

Carl von Ossietzky
Universität Oldenburg

2-Fächer-Bachelor Biologie, Mathematik

Bachelorarbeit

Die Kasteleyn-Fisher-Temperley-Formel
für die Anzahl der Domino-
Pflasterungen eines Rechtecks

vorgelegt von

Ina Lammers

Betreuender Gutachter Prof. Dr. Daniel Grieser

Zweiter Gutachter Prof. Dr. Florian Heß

Oldenburg, 19.09.2013

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	5
2	Die Kasteleyn-Fisher-Temperley-Formel	6
3	Eine Herleitung der Kasteleyn-Fisher-Temperley-Formel	8
3.1	Vorüberlegungen	8
3.2	Das wichtigste Werkzeug: Die Pfaffsche Determinante	10
3.3	Die Entwicklung der Matrix D	11
3.4	Berechnen der Pfaffschen Determinante	24
4	Grenzwertbetrachtungen	38
5	Literaturverzeichnis	48

Abbildungsverzeichnis

2.1	Ein 2×2 -Rechteck und Dominosteine	6
2.2	Mögliche Pflasterungen eines 2×2 -Rechtecks	6
2.3	Ein 6×5 -Rechteck	6
3.1	Darstellung eines 6×5 -Rechtecks mit einer Pflasterung C	8
3.2	Bezeichnung der Knoten eines 6×5 -Rechtecks	8
3.3	Die Standardpflasterung C_0 eines 6×5 -Rechtecks	9
3.4	Eine Pflasterung mit farbig hervorgehobenen Knoten	10
3.5	C_0 -Dominos (gestrichelte Kanten) und C -Dominos (durchgezogene Kanten) bilden Polygone	13
3.6	Ein Polygon mit Kantenrichtung im Uhrzeigersinn	16
3.7	Ein Polygon mit einer C_0 -Spalte und ein Startpunkt S	17
3.8	Ein Polygon mit eingefärbten senkrechten C -Dominos	19
3.9	Ein Polygon aus Hauptpolygon (gelb) und einer Ausstülpung (orange)	19
3.10	Der linke Rand eines Polygons	20
3.11	Eine Rechts- und eine Linkskurve	20
3.12	Zwei aufeinanderfolgende Kurven im Kantenzug eines Polygonrandes	21
3.13	Die Kanten eines 6×5 -Rechtecks und ihre Matrixeinträge	22

1 Einleitung

„Auf wieviele Arten kann man ein $2 \times n$ -Rechteck mit Dominosteinen der Größe 1×2 pflastern?“ (Grieser [9], Vorlesung 2, S.7)

So lautet eine Aufgabenstellung aus dem Modul „Mathematisches Problemlösen und Beweisen“ von Prof. Dr. Daniel Grieser im Wintersemester 2011/12. Ist a_n die Anzahl der Pflasterungen, ergibt sich für $n \geq 3$ als Lösung die rekursive Formel $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Dies ist genau die Definition der Fibonacci-Zahlen. Man erkennt: Das Problem ist nicht trivial.

Wie sieht die Lösung für ein $m \times n$ -Rechteck aus? Auf diese Frage fanden P. W. Kasteleyn [11] sowie M. E. Fisher und H. N. V. Temperley [7] 1961 unabhängig voneinander eine Antwort. Alle drei Männer waren Physiker und beschäftigten sich mit dem Problem als eine Vereinfachung der Anordnung zweiatomiger Moleküle in einem System (vgl. Fisher und Temperley [7], S. 1061).

In dieser Arbeit wollen wir uns zunächst mit der Kasteleyn-Fisher-Temperley-Formel vertraut machen, ehe wir im Hauptteil eine Herleitung des Satzes nachvollziehen. Dabei werden wir die Arbeitsweise von Kasteleyn übernehmen. Sein Artikel „The statistic of dimer on a lattice“ [11] dient uns als Hauptquelle. In einem abschließenden Kapitel soll der Grenzwert der Formel betrachtet und damit die weitere Arbeitsweise von Kasteleyn beispielhaft skizziert werden.

Es soll nicht darum gehen, die physikalische Motivation der Herren Kasteleyn, Fisher und Temperley zu verstehen und das praktische Nutzen der Formel zu untersuchen. Vielmehr steht die ästhetische Lösung eines mathematischen Problems, die Herleitung einer Formel mit vergleichsweise einfachen Mitteln der Mathematik, im Vordergrund dieser Arbeit.

2 Die Kasteleyn-Fisher-Temperley-Formel

Wir betrachten ein Rechteck der Größe 2×2 und symmetrische Dominosteine der Größe 1×2 und 2×1 .

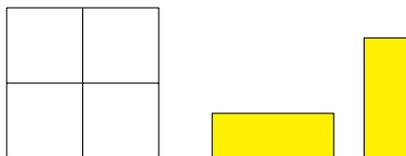


Abbildung 2.1: Ein 2×2 -Rechteck und Dominosteine

Auf wie viele verschiedene Weisen kann man das Rechteck mit Dominosteinen so pflastern, dass es komplett ausgefüllt ist und sich dabei keine Dominos überschneiden? Die Lösung ist einfach: Es gibt zwei Möglichkeiten.

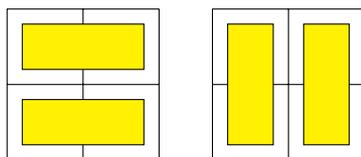


Abbildung 2.2: Mögliche Pflasterungen eines 2×2 -Rechtecks

Betrachten wir ein 3×2 -Rechteck, ist die Anzahl der Pflasterungen drei, bei einem 4×2 -Rechteck gibt es schon fünf mögliche Pflasterungen. Wie sieht es aber bei einem 6×5 -Rechteck aus? Kann man die Anzahl der Dominopflasterungen berechnen, ohne alle Möglichkeiten ausprobieren zu müssen?

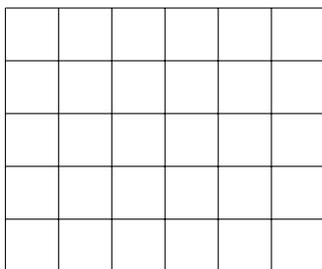


Abbildung 2.3: Ein 6×5 -Rechteck

Wie eingangs erwähnt, befassten sich Kasteleyn [11] sowie Fischer und Temperley [7] mit dieser Frage und fanden folgende Formel.

Satz 2.1 (Die Kasteleyn-Fisher-Temperley-Formel).

Seien m und n natürliche Zahlen. Sei m gerade. Sei Q_{mn} ein $m \times n$ -Rechteck. Sei Z_{mn} die Anzahl der Dominopflasterungen dieses Rechtecks. Dann gilt:

$$Z_{mn} = \begin{cases} 2^{\frac{1}{2}mn} \cdot \prod_{k=1}^{\frac{m}{2}} \prod_{l=1}^{\frac{n}{2}} \left(\cos^2\left(\frac{k\pi}{m+1}\right) + \cos^2\left(\frac{l\pi}{n+1}\right) \right) & \text{für } n \text{ gerade} \\ 2^{\frac{1}{2}m(n-1)} \cdot \prod_{k=1}^{\frac{m}{2}} \prod_{l=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(\cos^2\left(\frac{k\pi}{m+1}\right) + \cos^2\left(\frac{l\pi}{n+1}\right) \right) & \text{für } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Es ist erstaunlich, dass dieses Produkt immer eine ganze Zahl ergeben soll. Wir überprüfen unser Ergebnis für das 2×2 -Rechteck. Mit $m, n = 2$ gilt:

$$\begin{aligned} Z_{22} &= 2^{\frac{1}{2}2 \cdot 2} \cdot \prod_{k=1}^{\frac{1}{2}2} \prod_{l=1}^{\frac{1}{2}2} \left(\cos^2\left(\frac{k\pi}{2+1}\right) + \cos^2\left(\frac{l\pi}{2+1}\right) \right) \\ &= 4 \cdot \left(\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) \\ &= 4 \cdot (0.25 + 0.25) \\ &= 2. \end{aligned}$$

Für das 3×2 -Rechteck kommen wir mithilfe der Formel auf erwartete 3 Pflasterungen. Für diese beiden Fälle stimmt der Satz 2.1 offenbar.

Jetzt setzen wir $m = 6$ und $n = 5$ ein.

$$\begin{aligned} Z_{65} &= 2^{\frac{1}{2}6 \cdot (5-1)} \cdot \prod_{k=1}^{\frac{1}{2}6} \prod_{l=1}^{\frac{1}{2}(5-1)} \left(\cos^2\left(\frac{k\pi}{6+1}\right) + \cos^2\left(\frac{l\pi}{5+1}\right) \right) \\ &= 2^{12} \cdot \left(\cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) \right) \left(\cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{6}\right) \right) \left(\cos^2\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) \right) \\ &\quad \left(\cos^2\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{6}\right) \right) \left(\cos^2\left(\frac{3\pi}{7}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) \right) \left(\cos^2\left(\frac{3\pi}{7}\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{6}\right) \right) \\ &= 4096 \cdot (0.8117\dots + 0.75) \cdot (0.8117\dots + 0.25) \cdot (0.3887\dots + 0.75) \\ &\quad \cdot (0.3887\dots + 0.25) \cdot (0.0495\dots + 0.75) \cdot (0.0495\dots + 0.25) \\ &= 1183 \end{aligned}$$

Gibt es bei einem 6×5 -Rechteck tatsächlich 1183 Dominopflasterungen? Anstatt sie zu zählen, wollen ihr in Kapitel 3 zeigen, dass die Kasteleyn-Fisher-Temperley-Formel funktioniert.

3 Eine Herleitung der Kasteleyn-Fisher-Temperley-Formel

3.1 Vorüberlegungen

Als Vereinfachung und aus Gründen der Anschaulichkeit stellen wir ein Rechteck Q_{mn} mit einer Dominopflasterung C im Folgenden als Graph dar. Dabei seien die einzelnen 1×1 -Felder des Rechtecks Knoten und die Dominosteine Kanten zwischen je zwei Knoten. Ein Beispiel für eine solche Darstellung zeigt Abbildung 3.1(b).

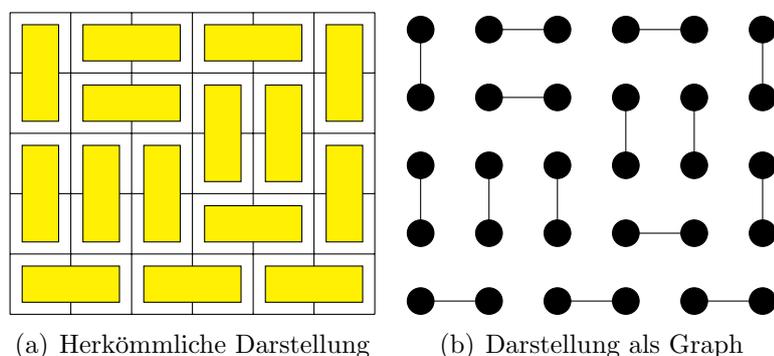


Abbildung 3.1: Darstellung eines 6×5 -Rechtecks mit einer Pflasterung C

Wir wollen die Knoten nummerieren. Bei einem Rechteck mit m Spalten und n Zeilen nennen wir den Knoten in der i -ten Spalte und j -ten Zeile

$$p = (j - 1)m + i.$$

Dies ergibt eine zeilenweise Nummerierung der Knoten von links unten nach rechts oben (vgl. Abbildung 3.2).

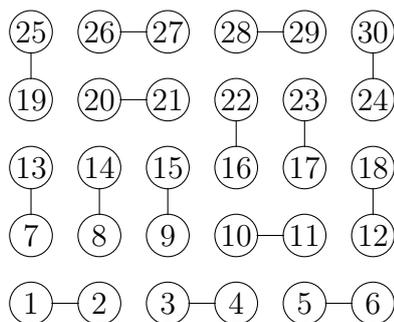


Abbildung 3.2: Bezeichnung der Knoten eines 6×5 -Rechtecks

Ein Rechteck Q_{mn} mit ungerader Anzahl Spalten m und Zeilen n lässt sich nicht mit Dominosteinen pflastern, da in dem Fall die Anzahl der Knoten $m \times n$ ebenfalls ungerade ist. Bei einer versuchten Pflasterung würde stets ein 1×1 -Feld unbedeckt bleiben. m oder n müssen also gerade sein, damit es für Q_{mn} Dominopflasterungen gibt.

Wir gehen in dieser Arbeit davon aus, dass die Anzahl der Spalten m gerade ist. Dann können wir jedes Rechteck Q_{mn} ausschließlich mit waagerechten Dominosteinen pflastern, sodass für alle $p \in \{1, 3, 5, \dots, mn - 1\}$ die nebeneinanderliegenden Knoten p und $p + 1$ von einem Domino überdeckt werden. Diese Pflasterung nennen wir die Standardpflasterung C_0 (vgl. Abbildung 3.3).

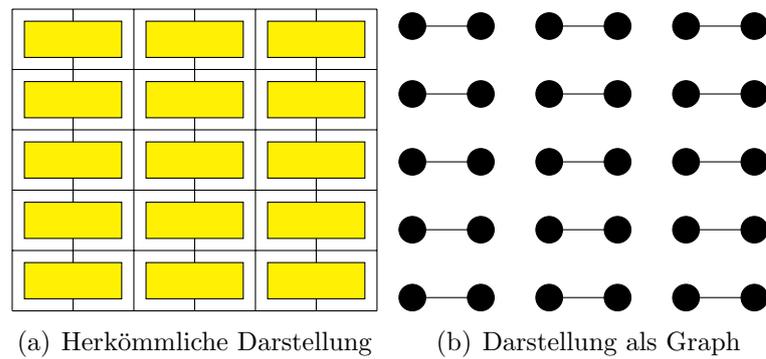


Abbildung 3.3: Die Standardpflasterung C_0 eines 6×5 -Rechtecks

Wir können jede Dominopflasterung eines Rechtecks Q_{mn} als Permutation der mn Knoten betrachten. Eine Permutation

$$\pi : \{1, 2, \dots, mn\} \rightarrow \{1, 2, \dots, mn\}$$

entspreche genau dann einer Dominopflasterung, wenn für alle $r \in \{1, 3, 5, \dots, mn - 1\}$ die Knoten $\pi(r)$ und $\pi(r+1)$ von einem gemeinsamen Dominostein überdeckt werden und außerdem folgende Reihenfolgen gelten:

$$\pi(1) < \pi(2), \pi(3) < \pi(4), \dots, \pi(mn - 1) < \pi(mn); \quad (3.1)$$

$$\pi(1) < \pi(3) < \pi(5) < \dots < \pi(mn - 1). \quad (3.2)$$

Beispiel 3.1. Die Permutation $(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 13\ 8\ 14\ 9\ 15\ 10\ 11\ 12\ 18\ 16\ 22\ \dots\ 28\ 29)$ entspricht der in Abbildung 3.4 dargestellten Dominopflasterung.

Beispiel 3.2. Die Identische Permutation $id = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ \dots\ mn - 1\ mn)$ entspricht der Standardpflasterung C_0 .

Zu jeder Dominopflasterung von Q_{mn} gibt es auf diese Weise eine eindeutige Permutation, aber nicht jeder Permutation wird auch eine Dominopflasterung zugeordnet. Dies kann man sich leicht durch ein Gegenbeispiel klar machen.

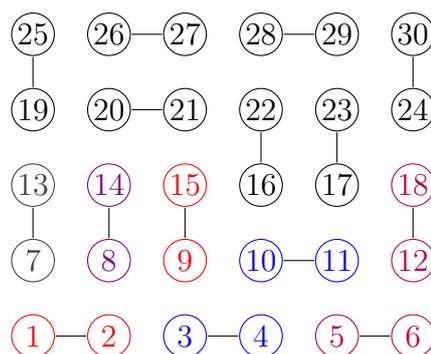


Abbildung 3.4: Eine Pflasterung mit farbig hervorgehobenen Knoten

Beispiel 3.3. Wir betrachten das Rechteck Q_{65} und die Permutation $\rho = (1\ 3\ 2\ 20\ \dots)$. Entspräche ρ einer Pflasterung, müssten die Knoten 1 und 3 sowie 2 und 20 in dieser Pflasterung von einem gemeinsamen Dominostein überdeckt sein. Die Knoten liegen aber jeweils gar nicht direkt neben- oder übereinander, sodass dies unmöglich ist. ρ entspricht keiner Pflasterung.

3.2 Das wichtigste Werkzeug: Die Pfaffsche Determinante

Kasteleyn sucht zur Entwicklung der Formel nach einem mathematischen Ausdruck, bei dem jede Dominopflasterung mit 1 gezählt wird. Die Summe über diese Einsen soll die Anzahl der möglichen Dominopflasterungen ergeben. Das Mittel seiner Wahl ist die Pfaffsche Determinante (vgl. Kasteleyn [11], S. 1211).

Definition 3.4 (Die Pfaffsche Determinante). Sei n eine natürliche gerade Zahl. Sei A eine schiefsymmetrische $n \times n$ -Matrix mit den Einträgen $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{nn}$. Sei P_n die Menge aller Permutationen einer n -elementigen Menge, die die Reihenfolgen 3.1 und 3.2 auf Seite 9 einhalten. Dann heißt

$$Pf(A) = \sum_{\sigma \in P_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot x_{\sigma(1)\sigma(2)} \cdot x_{\sigma(3)\sigma(4)} \cdots x_{\sigma(n-1)\sigma(n)}$$

die Pfaffsche Determinante von A .

Diese Definition übernimmt Kasteleyn von Scott und Mathews ([13], S. 93 ff.). Sie findet sich in ähnlicher Form auch bei Bourbaki ([5], S. 82).

Beispiel 3.5. *Wir betrachten eine schiefsymmetrische Matrix*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

In diesem Fall ist $n = 4$.

Die Menge P_4 besteht aus den Permutationen $\pi = (1\ 2\ 3\ 4)$ und $\rho = (1\ 3\ 2\ 4)$.

Dann ist

$$\begin{aligned} Pf(A) &= \sum_{\sigma \in P_4} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot x_{\sigma(1)\sigma(2)} \cdot x_{\sigma(3)\sigma(4)} \\ &= \operatorname{sgn}(\pi) \cdot x_{\pi(1)\pi(2)} \cdot x_{\pi(3)\pi(4)} + \operatorname{sgn}(\rho) \cdot x_{\rho(1)\rho(2)} \cdot x_{\rho(3)\rho(4)} \\ &= (+1) \cdot x_{12} \cdot x_{34} + (-1) \cdot x_{13} \cdot x_{24} \\ &= (+1) \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) \cdot 1 \\ &= 2. \end{aligned}$$

3.3 Die Entwicklung der Matrix D

Die Idee von Kasteleyn ist im Grunde simpel. Für jedes Rechteck Q_{mn} wird eine schiefsymmetrische $mn \times mn$ -Matrix D entwickelt, sodass gilt:

$Pf(D)$ ist die Anzahl der Dominosteinpflasterungen von Q_{mn} .

D soll so aufgebaut sein, dass jede Zeile wie auch jede Spalte für einen Knoten steht. Die Einträge entsprechen dann (möglichen oder unmöglichen) Kanten zwischen je zwei Knoten.

Es reicht aus, die Einträge von D oberhalb der Hauptdiagonalen zu definieren. Die Einträge des unteren Dreiecks ergeben sich aus der gewünschten schiefsymmetrischen Form.

Seien p und p' zwei Knoten unseres Rechtecks Q_{mn} . Wir setzen oberhalb der Hauptdiagonalen von D zunächst

$$|D(p, p')| := 1, \text{ falls } p \text{ und } p' \text{ direkt über- oder nebeneinander liegen.} \quad (3.3)$$

$$D(p, p') := 0, \text{ sonst.} \quad (3.4)$$

Lemma 3.6. Sei P_{mn} wie in Definition 3.4 festgelegt. Sei D eine schiefsymmetrische $mn \times mn$ -Matrix, deren Einträge $D(p, p') = x_{p, p'}$ wie in den Überlegungen 3.3 und 3.4 auf Seite 11 definiert sind. Dann gilt:

1. Für jede Permutation $\pi \in P_{mn}$, die eine Dominopfasterung darstellt, ist

$$|\operatorname{sgn}(\pi) \cdot x_{\pi(1)\pi(2)} \cdot x_{\pi(3)\pi(4)} \cdots x_{\pi(mn-1)\pi(mn)}| = 1.$$

2. Für jede Permutation $\rho \in P_{mn}$, die keine Dominopfasterung darstellt, ist

$$\operatorname{sgn}(\rho) \cdot x_{\rho(1)\rho(2)} \cdot x_{\rho(3)\rho(4)} \cdots x_{\rho(mn-1)\rho(mn)} = 0.$$

Beweis. Das Vorzeichen einer Permutation kann nach Definition nur die Werte $+1$ oder -1 annehmen. Es gilt also insbesondere für alle $\pi \in P_{mn}$: $|\operatorname{sgn}(\pi)| = 1$.

Sei $\pi \in P_{mn}$ eine Permutation, die eine Dominopfasterung C darstellt. Dann gilt für alle $r \in \{1, 3, 5, \dots, mn - 1\}$: Die Knoten $\pi(r)$ und $\pi(r + 1)$ werden in der Pflasterung C von einem Domino überdeckt. Folglich müssen sie direkt neben- oder übereinander liegen.

Nach Überlegung 3.3 auf Seite 11 setzen wir

$$|x_{\pi(r)\pi(r+1)}| = |D(\pi(r), \pi(r + 1))| = 1.$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} & |\operatorname{sgn}(\pi) \cdot x_{\pi(1)\pi(2)} \cdot x_{\pi(3)\pi(4)} \cdots x_{\pi(mn-1)\pi(mn)}| \\ &= |\operatorname{sgn}(\pi)| \cdot |x_{\pi(1)\pi(2)}| \cdot |x_{\pi(3)\pi(4)}| \cdots |x_{\pi(mn-1)\pi(mn)}| \\ &= 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdots 1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Sei $\rho \in P_{mn}$ eine Permutation, die keine Dominopfasterung darstellt. Dann gibt es mindestens ein Zahlenpaar $(r, r + 1)$ mit $r \in \{1, 3, 5, \dots, mn - 1\}$, für das die Knoten $\rho(r)$ und $\rho(r + 1)$ nicht direkt neben- oder übereinander liegen.

Nach Überlegung 3.4 auf Seite 11 setzen wir

$$x_{\rho(r)\rho(r+1)} = D(\rho(r), \rho(r + 1)) = 0.$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} & \operatorname{sgn}(\rho) \cdot x_{\rho(1)\rho(2)} \cdot x_{\rho(3)\rho(4)} \cdots x_{\rho(r)\rho(r+1)} \cdots x_{\rho(mn-1)\rho(mn)} \\ &= \operatorname{sgn}(\rho) \cdot x_{\rho(1)\rho(2)} \cdot x_{\rho(3)\rho(4)} \cdots 0 \cdots x_{\rho(mn-1)\rho(mn)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Wir wollen die Matrix D jetzt so präzisieren, dass für jede Permutation $\pi \in P_{mn}$, die eine Dominopfasterung darstellt, nicht nur

$$|\operatorname{sgn}(\pi) \cdot x_{\pi(1)\pi(2)} \cdot x_{\pi(3)\pi(4)} \cdots x_{\pi(mn-1)\pi(mn)}| = 1,$$

sondern

$$\operatorname{sgn}(\pi) \cdot x_{\pi(1)\pi(2)} \cdot x_{\pi(3)\pi(4)} \cdots x_{\pi(mn-1)\pi(mn)} = 1$$

gilt. Dazu werden wir $\operatorname{sgn}(\pi)$ ermitteln und die Einträge von D so definieren, dass der Term $x_{\pi(1)\pi(2)} \cdot x_{\pi(3)\pi(4)} \cdots x_{\pi(mn-1)\pi(mn)}$ das gleiche Vorzeichen trägt.

Die Identische Permutation $id = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ \dots\ mn - 1\ mn)$, welche der Standardpflasterung C_0 von Q_{mn} entspricht, hat das Vorzeichen $+1$.

Sei C eine beliebige Pflasterung von Q_{mn} und $\pi \in P_{mn}$ die entsprechende Permutation.

Betrachten wir gleichzeitig die Graphendarstellungen von C_0 und C , so bilden die C_0 -Dominos mit den C -Dominos Vielecke oder Polygone (vgl. Abbildung 3.5).

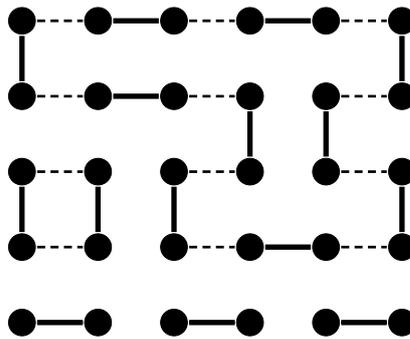


Abbildung 3.5: C_0 -Dominos (gestrichelte Kanten) und C -Dominos (durchgezogene Kanten) bilden Polygone

Wir überlegen uns jetzt, wie wir von unserer Standardpflasterung C_0 zu einer beliebigen Pflasterung C kommen und was dabei mit den Vorzeichen der zugehörigen Permutationen passiert.

Beispiel 3.7. Wir betrachten das Rechteck Q_{65} , die zugehörige Standardpflasterung C_0 und eine Pflasterung C entsprechend der Abbildung 3.5. Speziell betrachten wir das kleine Polygon, welches die Knoten 7, 8, 13 und 14 umfasst.

1. Wir überlegen uns, wie die Knoten 7, 8, 13 und 14 in der Standardpflasterung C_0 durch Kanten verbunden werden. Wir geben den Dominos dabei eine Richtung vom kleineren zum größeren Knoten.

$$\textcircled{13} \dashrightarrow \textcircled{14}$$

$$\textcircled{7} \dashrightarrow \textcircled{8}$$

In der zugehörigen Identischen Permutation tauchen die Knoten wie folgt auf:

$$(\dots 7 8 \dots 13 14 \dots).$$

Das Vorzeichen der Identischen Permutation ist $+1$.

2. Die Knotenpaare, die zu einem Polygon gehören, sollen in der Permutation nebeneinander stehen. Dazu verschieben wir die Knoten 13 und 14 nach vorne:

$$(\dots 7 8 13 14 \dots).$$

Da wir zwei Knoten gleichzeitig verschieben, ändert sich das Vorzeichen der Permutation nicht.

3. Wir drehen die beteiligten Kanten so, dass sie im Uhrzeigersinn entlang des Polygonrandes verlaufen. Wir müssen also die Kante zwischen den Knoten 7 und 8 umdrehen.

$$\textcircled{13} \dashrightarrow \textcircled{14}$$

$$\textcircled{7} \dashleftarrow \textcircled{8}$$

Die entsprechende Änderung der Permutation ergibt

$$(\dots 8 7 13 14 \dots).$$

Durch die Vertauschung von zwei Knoten ändert sich das Vorzeichen der Permutation um -1 .

4. Jetzt schieben wir die Kanten entsprechend ihrer Richtung entlang des Polygonrandes um einen Knoten weiter.

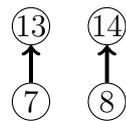
$$\begin{array}{cc} \textcircled{13} & \textcircled{14} \\ \uparrow & \downarrow \\ \textcircled{7} & \textcircled{8} \end{array}$$

Wir führen also eine zyklische Permutation entlang der Polygonknoten durch:

$$(\dots 7 13 14 8 \dots).$$

Bei einer zyklischen Permutation von vier Zahlen ändert sich das Vorzeichen um -1 .

5. Jetzt sollen die einzelnen Kanten so gedreht werden, dass sie vom kleineren zum größeren Knoten verlaufen. Wir drehen also die Kante zwischen 14 und 8.



Entsprechend vertauschen wir in der Permutation die Knoten 14 und 8:

$$(\dots 7 13 8 14 \dots).$$

Das Vorzeichen ändert sich um -1 .

6. Jetzt sollen die Kanten in der Permutation entsprechend der Reihenfolge 3.2 auf Seite 9 geordnet werden. In diesem Beispiel erfüllt unsere Permutation diese Konvention bereits, da $7 < 8$ und keine natürliche Zahl zwischen beiden liegen kann:

$$(\dots 7 13 8 14 \dots).$$

Die Kanten und Knoten des Polygons liegen jetzt wie in der Pflasterung C .

Während der Änderungen von C_0 zu C an diesem Polygon hat sich das Vorzeichen der Permutation um $(-1)^3 = -1$ geändert.

Betrachtet man das größere Polygon aus Abbildung 3.5 analog, ergibt sich bei der Entwicklung von C_0 zu C ebenfalls eine Änderung des Vorzeichens der Permutation von (-1) .

Dieses Beispiel führt uns zu folgendem Lemma.

Lemma 3.8. Sei C_0 die Standardpflasterung und C eine beliebige Dominopflasterung eines Rechtecks Q_{mn} .

Jedes Polygon, dass von C_0 - und C -Dominos gebildet wird, trägt den Faktor -1 zum Vorzeichen der zu C gehörenden Permutation bei.

Beweis. Sei C_0 die Standardpflasterung und C eine beliebige Pflasterung eines Rechtecks Q_{mn} . Wir betrachten ein beliebiges aus C_0 - und C -Dominos gebildetes Polygon.

Der Polygonrand bildet einen geschlossenen Weg um das Vieleck. Wir geben ihm eine Richtung, z.B. im Uhrzeigersinn wie in Abbildung 3.6.

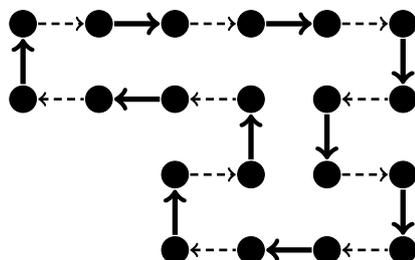


Abbildung 3.6: Ein Polygon mit Kantenrichtung im Uhrzeigersinn

Betrachtet man die Spalten dieses Polygons, lassen sich C_0 -Spalten, die nur C_0 -Dominos enthalten, von C -Spalten unterscheiden. Wir betrachten eine C_0 -Spalte (vgl. Abbildung 3.7). In dieser gibt es nach rechts weisende Dominos und nach links weisende Dominos. Wir nennen sie im Folgenden V-Dominos und R-Dominos als Abkürzung für „Vorwärts-“ und „Rückwärtsdominos“.

Wir setzen auf unserem Polygonrand einen Startpunkt S . Da der Weg um das Polygon geschlossen ist, können wir von S ausgehend einmal entlang unserer definierten Richtung um das Polygon laufen und wieder bei S enden. Gehen wir dabei x -mal über unsere fixierte C_0 -Spalte nach rechts, müssen wir x -mal über sie nach links gehen, um wieder zu S zurückzukehren (vgl. Abbildung 3.7). Daraus folgt:

Mit x V-Dominos gibt es auch x R-Dominos in dieser C_0 -Spalte.

Übertragen wir die Überlegung auf alle C_0 -Spalten, können wir folgern:

Ein Polygon umfasst mit r C_0 -V-Dominos auch r C_0 -R-Dominos.

Insgesamt gibt es dann $2r$ C_0 -Dominos.

Nach Konstruktion der Polygone alternieren an deren Rand C_0 - und C -Dominos. Aus diesem Wechsel folgt, dass es mit $2r$ C_0 -Dominos auch $2r$ C -Dominos geben muss.

Auch die C -Dominos lassen sich in r V- und r R-Dominos aufteilen. Allerdings umfassen die V-Dominos in diesem Fall sowohl die nach rechts zeigenden als auch die nach oben weisenden Kanten. Die R-Dominos setzen sich aus nach links und nach unten zeigenden Kanten zusammen. Der Beweis erfolgt analog zu den C_0 -Dominos, wobei nicht nur die C -Spalten, sondern auch die Zeilen betrachtet werden. Das Ergebnis:

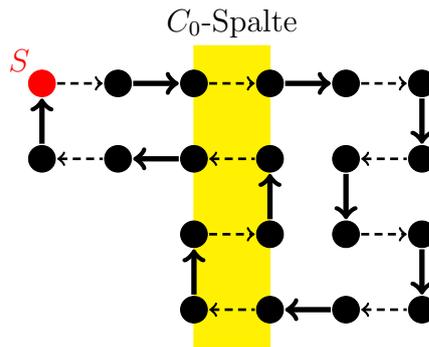


Abbildung 3.7: Ein Polygon mit einer C_0 -Spalte und ein Startpunkt S

Unser Polygonrand umfasst $2r$ C_0 - bzw. $2r$ C -Kanten und damit $2 \cdot 2r = 4r$ Knoten.

Wie in Beispiel 3.7 wollen wir von der Standardpflasterung C_0 durch Drehen und Verschieben der Dominos zu C gelangen und dabei beobachten, was mit dem Vorzeichen der Permutationen geschieht.

1. Wir betrachten die Standardpflasterung C_0 . Sie besteht ausschließlich aus C_0 -Kanten in Vorwärtsrichtung. Insbesondere treten $2r$ für das Polygon relevante V-Dominos auf.
2. Zunächst ordnen wir die C_0 -Dominos in der Permutation so an, dass die $2r$ für das Polygon relevanten Kanten so hintereinander stehen, wie sie im Uhrzeigersinn entlang des Polygonrandes vorkommen. Wir ändern also

$$(\dots p p' \dots q q' \dots)$$

in

$$(\dots p p' q q' \dots),$$

falls die Kante (q, q') , also die Kante zwischen den Knoten q und q' , entlang des Polygonrandes der Kante (p, p') folgt.

Da immer ein Zahlenpaar verschoben wird, verändert sich das Vorzeichen der Permutation nicht.

3. Wir wollen jetzt erreichen, dass die C_0 -Dominos entlang des Polygonrandes alle in eine Richtung, z.B. im Uhrzeigersinn, orientiert sind (vgl. Abbildung 3.6). Wir haben $2r$ V-Dominos, wollen entsprechend unserer Vorüberlegungen aber r V- und r R-Dominos. Wir müssen also r Dominos umdrehen bzw. in der Permutation r Transpositionen benachbarter Zahlen durchführen. Bei jeder Transposition ändert sich das Vorzeichen

um -1 . Folglich ergibt sich bei diesem Schritt eine Vorzeichenänderung von $(-1)^r$.

4. Jetzt schieben wir alle $2r$ C_0 -Kanten entlang des Polygonrandes im Uhrzeigersinn um einen Knoten weiter, sodass C -Dominos entstehen. Entsprechend führen wir eine zyklische Permutation der $4r$ Knoten unseres Polygons durch. Die zyklische Permutation von $4r$ Zahlen bringt das Vorzeichen $(-1)^{4r-1}$ mit sich.
5. Wir haben jetzt r C -V-Dominos und r C -R-Dominos. Unsere endgültige Pflasterung C soll aus $2r$ V-Dominos bestehen, sodass die r R-Dominos umgedreht werden müssen. Für die Permutation bedeutet das r Transpositionen benachbarter Zahlen. Das Vorzeichen ändert sich um $(-1)^r$.
6. Schließlich müssen die Kanten oder Dominos nach Größe des ersten Knotens sortiert werden. Da in der Permutation wieder zwei Zahlen gleichzeitig verschoben werden, ändert sich das Vorzeichen unabhängig der Anzahl der Verschiebungen nicht.

Während der Entwicklung von der Standardpflasterung C_0 zu einer beliebigen Pflasterung C an einem Polygon ergibt sich für die Permutation von C das Vorzeichen

$$(+1)(-1)^r(-1)^{4r-1}(-1)^r(+1) = -1.$$

□

Die einem Polygon entsprechenden Einträge unserer Matrix D sollen insgesamt ebenfalls das Vorzeichen -1 tragen, sodass das Produkt aus beidem eins ergibt.

Um uns D so definieren zu können, betrachten wir die Polygone aus C_0 - und C -Dominos noch einmal genauer.

Lemma 3.9. *Sei C_0 die Standardpflasterung und C eine beliebige Dominopflasterung eines Rechtecks Q_{mn} . Wir betrachten ein von C_0 - und C -Dominos gebildetes Polygon. Färben wir die Spalten senkrechter C -Dominos entsprechend der Abbildung 3.8 abwechselnd rot und grün ein, liegen sich in einem horizontalen Streifen dieses Polygons immer eine rote und eine grüne C -Kante gegenüber.*

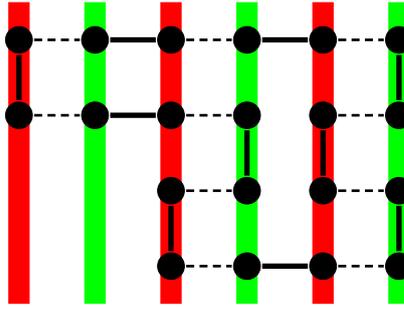


Abbildung 3.8: Ein Polygon mit eingefärbten senkrechten C -Dominos

Beweis. Sei C_0 die Standardpflasterung und C eine beliebige Pflasterung eines Rechtecks Q_{mn} . Wir betrachten ein von C_0 - und C -Dominos gebildetes Polygon. Es lässt sich in einzelne, horizontale Streifen aufteilen. Dabei können mehrere horizontale Streifen nebeneinander liegen. In dem Fall teilen wir das Vieleck in ein „Hauptpolygon“, welches in jeder Zeile nur einen horizontalen Streifen hat, und daran angehängte Ausstülpungen auf (vgl. Abbildung 3.9).

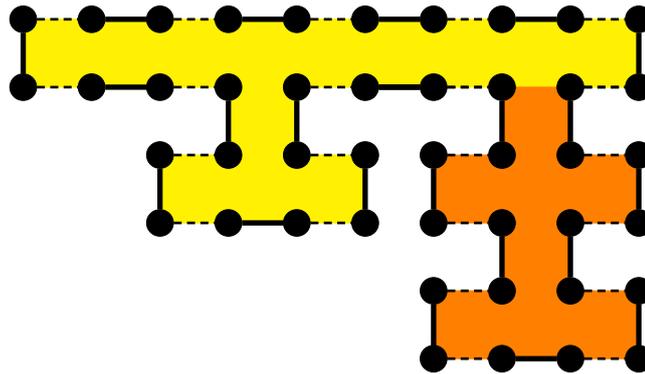


Abbildung 3.9: Ein Polygon aus Hauptpolygon (gelb) und einer Ausstülpung (orange)

Wir betrachten jetzt das Hauptpolygon oder eine Ausstülpung und führen eine vollständige Induktion über die horizontalen Streifen durch.

Induktionsanfang: Wir fixieren den obersten (oder untersten) horizontalen Streifen, der nur unten (oder oben) an einen anderen Streifen angrenzt. Zwischen der linken und der rechten senkrechten Kante – nach Konstruktion beides C -Dominos – muss wegen des Alternierens von C_0 - und C -Dominos eine ungerade Anzahl von Kanten liegen. Daraus folgt direkt:

Färben wir die Spalten senkrechter C -Dominos wie in Abbildung 3.8 abwechselnd in rot und grün ein, liegen sich in dieser ersten Zeile eine rote und eine grüne Kante gegenüber.

Induktionsvoraussetzung: Es sei für einen beliebigen fixierten horizontalen Streifen H bewiesen, dass er bei obiger Färbung rechts und links von genau

einem roten und einem grünen senkrechten C -Domino begrenzt wird.

Induktionsschritt: Wir betrachten den horizontalen Streifen $H + 1$ direkt unter (oder über) H . Zwischen der rechten senkrechten Kante von H und der rechten senkrechten Kante von $H + 1$ – beides C -Dominos – müssen wegen der Alternanz von C_0 - und C -Dominos ungerade viele Kanten liegen. Ist die rechte senkrechte Kante von H rot, ist die rechte senkrechte Kante von $H + 1$ grün, und umgekehrt. Die gleichen Überlegungen gelten für die linken Kanten. Damit gilt:

Wird H von zwei verschiedenfarbigen senkrechte Kanten eingeschlossen, hat $H + 1$ ebenfalls zwei verschiedenfarbige senkrechte Kanten. \square

Lemma 3.10. *Sei C_0 die Standardpflasterung und C eine beliebige Dominopflasterung eines Rechtecks Q_{mn} . Betrachten wir ein von C_0 - und C -Dominos gebildetes Polygon, besteht dieses immer aus einer ungeraden Anzahl einzelner, horizontaler Streifen.*

Beweis. Sei C_0 die Standardpflasterung und C eine beliebige Pflasterung eines Rechtecks Q_{mn} . Wir betrachten zunächst den Kantenzug am rechten oder linken Rand eines von C_0 - und C -Dominos gebildeten Polygons (vgl. Abbildung 3.10). Alle senkrechten Kanten sind C -Dominos. Wegen des Alternierens von

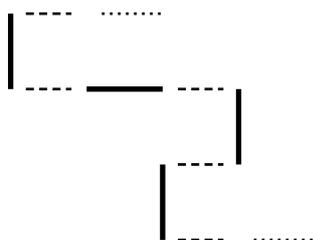


Abbildung 3.10: Der linke Rand eines Polygons

C_0 - und C -Dominos, liegen im Kantenzug davor und dahinter C_0 -Dominos. Sie sind nach Definition von C_0 waagrecht und kommen zudem nur in jeder zweiten Spalte vor. Die senkrechten C -Kanten sind folglich immer Teil einer „Rechts-“ oder einer „Linkskurve“ entsprechend Abbildung 3.11.



Abbildung 3.11: Eine Rechts- und eine Linkskurve

Wir überlegen uns außerdem, dass im Kantenzug entlang des Polygonrandes nach einer Rechtskurve (und einer fakultativen geraden Strecke) eine Linkskurve folgen muss und umgekehrt. Denn betrachtet man eine senkrechte Kante, die beispielsweise einer Rechtskurve angehört, setzt sich der Kantenzug nach rechts fort. Wegen der Alternanz der C_0 und C -Kanten liegt links von der nächsten senkrechten Kante ein C_0 -Domino. Diese senkrechte Kante muss also Teil einer Linkskurve sein (vgl. Abbildung 3.12).



Abbildung 3.12: Zwei aufeinanderfolgende Kurven im Kantenzug eines Polygonrandes

Wir teilen das Polygon wie in Abbildung 3.9 in ein Hauptpolygon und Ausstülpungen auf.

Wir betrachten zunächst das Hauptpolygon. Der Kantenzug des linken Rands beginnt oben mit einer Rechtskurve. Die letzte Kurve auf der linken Seite muss ebenfalls eine Rechtskurve sein, damit der Polygonrand geschlossen ist (vgl. Abbildung 3.10). Aus dem regelmäßigen Wechsel von Rechts- und Linkskurven folgt: Am linken Rand des Hauptpolygons gibt es ungerade viele Kurven, d.h. ungerade viele senkrechte Kanten und damit ungerade viele horizontale Streifen. Alternativ kann man natürlich den rechten Rand betrachten.

Für jede Ausstülpung gilt: Wenn der linke Rand mit einer Linkskurve beginnt, endet er in einer Rechtskurve, und umgekehrt. Wegen des Alternierens der Kurven hat die Ausstülpung eine gerade Anzahl Kurven und damit eine gerade Anzahl horizontaler Streifen.

Die Summe der horizontalen Streifen aus Hauptpolygon und Ausstülpungen ist somit unabhängig von der Anzahl der Ausstülpungen immer ungerade. \square

Wir spezialisieren das obere Dreieck unserer Matrix D wie folgt:

$$D(i, j; i + 1, j) := 1 \quad \text{mit } 1 \leq i \leq m - 1 \text{ und } 1 \leq j \leq n, \quad (3.5)$$

$$D(i, j; i, j + 1) := (-1)^i \quad \text{mit } 1 \leq i \leq m \text{ und } 1 \leq j \leq n - 1. \quad (3.6)$$

Alle waagerechten Kanten bekommen also den Matrixeintrag 1. Färben wir alle Spalten senkrechter Dominos entsprechend Abbildung 3.8 abwechselnd rot und grün, erhalten alle roten senkrechten Kanten das Vorzeichen -1 und alle grünen den Eintrag 1. Allen unmöglichen Kanten haben wir bereits in der Überlegung 3.4 auf Seite 11 den Wert 0 zugeordnet.

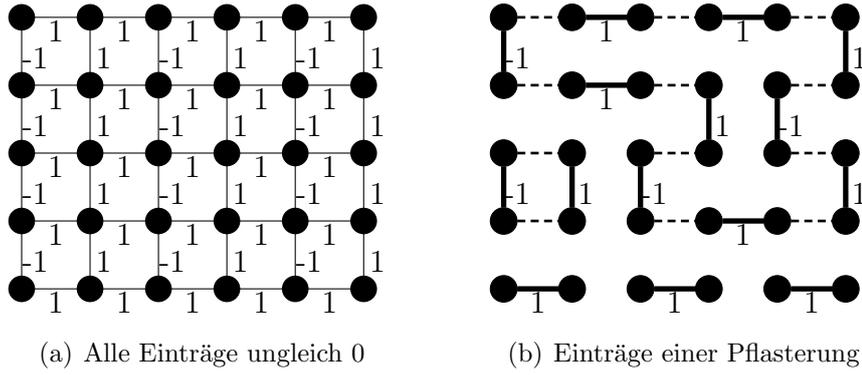


Abbildung 3.13: Die Kanten eines 6×5 -Rechtecks und ihre Matrixeinträge

Lemma 3.11. Sei Q_{mn} ein Rechteck. Sei Z_{mn} die Anzahl der Dominopfasterungen dieses Rechtecks. Sei D eine schiefsymmetrische $mn \times mn$ -Matrix, deren Einträge entsprechend der Überlegungen 3.4 auf Seite 11 sowie 3.5 und 3.6 auf Seite 21 definiert seien. Dann gilt:

$$Pf(D) = Z_{mn}.$$

Beweis. Sei mn eine natürliche gerade Zahl, D eine schiefsymmetrische $mn \times mn$ -Matrix mit den Einträgen $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{mnmn}$ und P_{mn} die Menge aller Permutationen einer mn -elementigen Menge, die die Reihenfolgen 3.1 und 3.2 auf Seite 9 einhalten. Dann gilt nach Definition 3.4:

$$Pf(D) = \sum_{\sigma \in P_{mn}} \text{sgn}(\sigma) \cdot x_{\sigma(1)\sigma(2)} \cdot x_{\sigma(3)\sigma(4)} \cdots x_{\sigma(mn-1)\sigma(mn)}.$$

Sei Q_{mn} ein Rechteck, Z_{mn} die Anzahl der Dominopfasterungen dieses Rechtecks und D eine wie oben definierte schiefsymmetrische $mn \times mn$ -Matrix.

Wir haben in Lemma 3.6 gezeigt:

Für jede Permutation $\rho \in P_{mn}$, die keine Dominopfasterung darstellt, gilt

$$\text{sgn}(\rho) \cdot x_{\rho(1)\rho(2)} \cdot x_{\rho(3)\rho(4)} \cdots x_{\rho(mn-1)\rho(mn)} = 0$$

und für jede Permutation $\pi \in P_{mn}$, die eine Dominopfasterung darstellt, gilt

$$|\text{sgn}(\pi) \cdot x_{\pi(1)\pi(2)} \cdot x_{\pi(3)\pi(4)} \cdots x_{\pi(mn-1)\pi(mn)}| = 1.$$

Es bleibt zu zeigen, dass

$$\text{sgn}(\pi) \cdot x_{\pi(1)\pi(2)} \cdot x_{\pi(3)\pi(4)} \cdots x_{\pi(mn-1)\pi(mn)} = 1.$$

Sei C eine beliebige Pflasterung eines Rechtecks Q_{mn} und $\pi \in P_{mn}$ die zugehörige Permutation. Sei a die Anzahl der Polygone, die aus C_0 und C -Dominos gebildet werden.

Aus Lemma 3.8 wissen wir, dass jedes Polygon den Faktor -1 zum Vorzeichen der Permutation beiträgt. Es gilt also:

$$\operatorname{sgn}(\pi) = (-1)^a. \quad (3.7)$$

Der Term $x_{\pi(1)\pi(2)} \cdot x_{\pi(3)\pi(4)} \cdots x_{\pi(mn-1)\pi(mn)}$ besteht aus allen Matrixeinträgen der C -Kanten. Ein Beispiel zeigt Abbildung 3.13(b).

C -Dominos, die keine Polygone mit C_0 -Kanten bilden, sind waagrecht. Ihre Einträge in der Matrix sind nach unserer Überlegung 3.5 auf Seite 21 alle gleich 1. Im Produkt $x_{\pi(1)\pi(2)} \cdot x_{\pi(3)\pi(4)} \cdots x_{\pi(mn-1)\pi(mn)}$ können sie vernachlässigt werden.

Wir betrachten ein beliebiges aus C_0 - und C -Dominos gebildetes Polygon. Es kann in b einzelne, horizontale Streifen aufgeteilt werden. In Lemma 3.9 haben wir gezeigt, dass sich bei entsprechender Färbung in jedem dieser horizontalen Streifen zwei verschiedenfarbige senkrechte Kanten gegenüberliegen. Nach Überlegung 3.6 auf Seite 21 haben diese Kanten verschiedene Vorzeichen. Zusammen mit Überlegung 3.5 auf Seite 21 hat jeder horizontale Streifen in unserem Term das Vorzeichen -1 .

In Lemma 3.10 haben wir bewiesen, dass die Anzahl horizontaler Streifen b ungerade ist. Insgesamt ergibt sich für das Produkt der Polygon-Matrix-Einträge: $(-1)^b = -1$.

Bei a Polygonen gilt dann:

$$x_{\pi(1)\pi(2)} \cdot x_{\pi(3)\pi(4)} \cdots x_{\pi(mn-1)\pi(mn)} = (-1)^a. \quad (3.8)$$

Die Gleichungen 3.7 und 3.8 ergeben:

$$\begin{aligned} & \operatorname{sgn}(\pi) \cdot x_{\pi(1)\pi(2)} \cdot x_{\pi(3)\pi(4)} \cdots x_{\pi(mn-1)\pi(mn)} \\ &= (-1)^a \cdot (-1)^a \\ &= (-1)^{2a} \\ &= 1. \end{aligned}$$

In der Summe $\sum_{\sigma \in P_{mn}} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot x_{\sigma(1)\sigma(2)} \cdot x_{\sigma(3)\sigma(4)} \cdots x_{\sigma(mn-1)\sigma(mn)}$ werden somit alle Pflasterungen mit 1 gezählt, alle anderen Summanden sind 0. Ins-

gesamt gilt dann:

$$Pf(D) = Z_{mn}. \quad \square$$

3.4 Berechnen der Pfaffschen Determinante

Das Lemma 3.11 ist nur dann zielführend, wenn wir $Pf(D)$ auch berechnen können. Folgende Eigenschaft der Pfaffschen Determinante ist entscheidend.

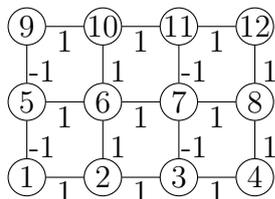
Lemma 3.12. *Sei n eine natürliche gerade Zahl. Sei A eine schiefssymmetrische $n \times n$ -Matrix. Dann gilt:*

$$(Pf(A))^2 = \det(A).$$

Dieser Lemma soll hier nicht bewiesen werden. Wir finden es z.B. bei Bouraki ([5], S. 84), Scott und Mathews ([13], S. 99) oder Knus ([12], S. 86).

Wir möchten die Determinante von D berechnen. Dazu überlegen wir uns zunächst, welche Gestalt D hat.

Beispiel 3.13. *Wir betrachten das 4×3 -Rechteck Q_{43} .*



Die zugehörige Matrix $D = (x_{k,l;k',l'})$ hat folgende Form:

$$\begin{matrix}
 & & & \color{blue}{k'=1} & & & \color{blue}{k'=2} & & & \color{blue}{k'=3} & & & \color{blue}{k'=4} \\
 & & & \color{blue}{l'=1} & \color{blue}{l'=2} & \color{blue}{l'=3} & \color{blue}{l'=1} & \color{blue}{l'=2} & \color{blue}{l'=3} & \color{blue}{l'=1} & \color{blue}{l'=2} & \color{blue}{l'=3} \\
 \color{blue}{k=1} \color{blue}{l=1} & \left(\begin{array}{cccccccccccc}
 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \color{blue}{k=2} \color{blue}{l=1} & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \color{blue}{l=2} & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 \color{blue}{l=3} & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 \color{blue}{k=3} \color{blue}{l=1} & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
 \color{blue}{l=2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
 \color{blue}{l=3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
 \color{blue}{k=4} \color{blue}{l=1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 \color{blue}{l=2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\
 \color{blue}{l=3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1
 \end{array} \right)
 \end{matrix}$$

Lemma 3.14. *Sei Q_{mn} ein Rechteck und sei die Matrix D nach unseren Überlegungen 3.4 auf Seite 11 sowie 3.5 und 3.6 auf Seite 21 definiert. Dann hat D bei entsprechender Reihenfolge der Indizes folgende Merkmale:*

1. *Betrachten wir die Einträge der Diagonalen direkt oberhalb der Hauptdiagonalen, sind die ersten $n - 1$ Einträge gleich -1 , der n -te Eintrag dieser Diagonalen ist 0 . Dann folgen $n - 1$ Einträge gleich 1 , eine 0 , wieder $n - 1$ Einträge gleich -1 , \dots*
2. *Betrachten wir die Einträge der Diagonalen direkt unterhalb der Hauptdiagonalen, sind die ersten $n - 1$ Einträge gleich 1 , der n -te Eintrag ist 0 . Dann folgen $n - 1$ Einträge gleich -1 , eine 0 , wieder $n - 1$ Einträge gleich 1 , \dots*
3. *Angefangen in der 1. Zeile und $n + 1$ -ten Spalte beginnt eine parallel zur Hauptdiagonalen verlaufende Diagonale mit allen Einträgen gleich 1 .*
4. *Angefangen in der $n + 1$ -ten Zeile und 1. Spalte beginnt eine parallel zur Hauptdiagonalen verlaufende Diagonale mit allen Einträgen gleich -1 .*
5. *Alle anderen Einträge von D sind 0 .*

Beweis.

1. Wir betrachten zunächst die -1 und 1 -Einträge der Diagonalen direkt oberhalb der Hauptdiagonalen. Für den Eintrag $D(p, p') = D(k, l; k', l')$ liegen hier die zwei Knoten p und p' jeweils in der gleichen Spalte. Es gilt also $k = k'$. Die Zeilen l und l' sind um eins verschieden: $l' = l + 1$. p und p' liegen also direkt übereinander und können von einem senkrechten Domino überdeckt werden. Nach unserer Überlegung 3.6 auf Seite 21 ist der Eintrag also -1 , wenn k ungerade, und 1 , wenn k gerade ist.
Die 0 -Einträge in dieser Diagonalen ergeben sich, wenn p und p' durch den Spaltenumbruch weder in einer Spalte noch in derselben Zeile liegen. Sie können nicht von einem gemeinsamen Domino überdeckt werden.
2. Diese Diagonale ergibt sich aus 1. und der schiefsymmetrischen Form von D .
3. Für jeden Eintrag $D(p, p') = D(k, l; k', l')$ dieser Diagonalen gilt: p und p' liegen in derselben Zeile. Es gilt $l = l'$. Die Spalten sind um eins verschoben, also $k' = k + 1$. p und p' können folglich von waagerechten

Dominos überdeckt werden, sodass der Eintrag $D(p, p')$ nach Überlegung 3.5 auf Seite 21 1 ist.

4. Dies ergibt sich wieder aus der Schiefsymmetrie von D .
5. Alle potentiellen senkrechten Dominos werden in 1. und alle waagerechten in 3. beachtet. Weitere Kanten kann es nicht geben, sodass alle übrigen Einträge von D nach Überlegung 3.4 auf Seite 11 0 sind.

□

Um die Determinante von D berechnen zu können, „teilen“ wir D zunächst in einfachere Matrizen „auf“. Dazu benötigen wir die Definition des Tensorprodukts zweier Matrizen.

Definition 3.15 (Tensorprodukt zweier Matrizen). Sei A eine $k \times l$ -Matrix und B eine $m \times n$ -Matrix. Dann ist das Tensorprodukt $A \otimes B$ definiert als eine $km \times ln$ -Matrix mit der Gestalt

$$\begin{pmatrix} a_{11} \cdot B & \dots & a_{1l} \cdot B \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} \cdot B & \dots & a_{kl} \cdot B \end{pmatrix}.$$

Diese Definition findet man beispielsweise bei Witt ([16], S. 120).

Lemma 3.16. Sei Q_{mn} ein Rechteck und D die zugehörige, nach Überlegung 3.4 auf Seite 11 sowie 3.5 und 3.6 auf Seite 21 definierte $mn \times mn$ -Matrix.

Sei G_m eine $m \times m$ -Matrix mit

$$G_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ -1 & 0 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sei G_n eine analoge $n \times n$ -Matrix. Sei E_n die $n \times n$ -Einheitsmatrix. Und sei

F_m eine $m \times m$ -Matrix mit

$$F_m = \begin{pmatrix} -1 & & \dots & 0 \\ & 1 & & \vdots \\ & & -1 & \\ \vdots & & & \ddots \\ 0 & \dots & & 1 \end{pmatrix}.$$

\otimes bezeichne das Tensorprodukt zweier Matrizen.

Dann gilt:

$$D = (G_m \otimes E_n) + (F_m \otimes G_n).$$

Beweis. Seien die Matrizen D , G_m , E_n , F_m und G_n wie oben definiert.

Dann gilt:

$$\begin{aligned} D &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & -1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & & 1 & & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ -1 & \dots & & 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & & -1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & & & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & \vdots \\ & & & & & 0 & 1 & \dots & \dots & \vdots \\ & & & & & & -1 & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & & & & & & & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & & \dots & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & & & & & 1 & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & & & & & & 1 & \dots & \dots & \vdots \\ -1 & \dots & & & & & & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & -1 & & & & & & & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & -1 & & & & & & 0 & \vdots \\ & & & -1 & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ & & & 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ & & & & -1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ & & & & & 1 & 0 & 0 & \dots & \vdots \\ & & & & & & 0 & 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & & & & & & & -1 & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & & & & & & & & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & & \dots & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \\ &= \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & \dots & -1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) + \left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & \dots & -1 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= (G_m \otimes E_n) + (F_m \otimes G_n). \quad \square \end{aligned}$$

Jetzt wollen wir zunächst die zu G_m und G_n ähnlichen Diagonalmatrizen \tilde{G}_m und \tilde{G}_n einführen. Mit ihrer Hilfe finden wir zu unserer Matrix D eine ähnliche Matrix \tilde{D} , deren Determinante leicht zu berechnen ist.

Lemma 3.17. Die Matrix G_m sei wie in Lemma 3.16 definiert. Zu G_m können wir eine Diagonalmatrix \tilde{G}_m finden, die die Ähnlichkeitsbedingung $\tilde{G}_m = U_m^{-1}G_mU_m$ erfüllt. Dabei ist

$$U_m(k, k') = \left(\sqrt{\frac{2}{m+1}} i^k \sin\left(\frac{kk'\pi}{m+1}\right) \right) \quad \text{und}$$

$$U_m^{-1}(k, k') = \left(\sqrt{\frac{2}{m+1}} (-i)^{k'} \sin\left(\frac{kk'\pi}{m+1}\right) \right).$$

Die Diagonaleinträge von \tilde{G}_m sind die Eigenwerte

$$\lambda_{k'} = 2i \cos\left(\frac{k'\pi}{m+1}\right), \quad k' = 1, \dots, m,$$

von G_m .

Beweis. $v_{k'}$ mit $k' = 1, \dots, m$ bezeichne die Eigenvektoren und $\lambda_{k'}$ mit $k' = 1, \dots, m$ die Eigenwerte von G_m . Es gilt:

$$\begin{aligned} & \tilde{G}_m = U_m^{-1}G_mU_m \\ \Leftrightarrow & U_m\tilde{G}_m = G_mU_m \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_m \end{pmatrix} = G_m \cdot \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_m \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} \lambda_1 v_1 & \lambda_2 v_2 & \dots & \lambda_m v_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_m v_1 & G_m v_2 & \dots & G_m v_m \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & \lambda_{k'} v_{k'} = G_m v_{k'} \quad \text{für alle } k' \in \{1, \dots, m\}. \end{aligned}$$

Wir können also statt $\tilde{G}_m = U_m^{-1}G_mU_m$ zeigen, dass für alle $k' \in \{1, \dots, m\}$ die Gleichung $\lambda_{k'} v_{k'} = G_m v_{k'}$ erfüllt ist. Mit

$$\lambda_{k'} = 2i \cos\left(\frac{k'\pi}{m+1}\right) \quad \text{und} \quad v_{k'} = \left(\sqrt{\frac{2}{m+1}} i^k \sin\left(\frac{kk'\pi}{m+1}\right) \right)_{k=1, \dots, m}$$

gilt:

$$\begin{aligned} \lambda_{k'} v_{k'} &= 2i \cos\left(\frac{k'\pi}{m+1}\right) \sqrt{\frac{2}{m+1}} i^k \sin\left(\frac{kk'\pi}{m+1}\right) \\ &= \sqrt{\frac{2}{m+1}} i^{k+1} 2 \sin\left(\frac{kk'\pi}{m+1}\right) \cos\left(\frac{k'\pi}{m+1}\right) \end{aligned}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{m+1}} i^{k+1} 2 \sin\left(\frac{(k+1)k'\pi + (k-1)k'\pi}{2(m+1)}\right) \cos\left(\frac{(k+1)k'\pi - (k-1)k'\pi}{2(m+1)}\right).$$

An dieser Stelle können wir die Gleichung

$$2 \cdot \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) = \sin(a) + \sin(b)$$

verwenden. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} \lambda_{k'} v_{k'} &= \sqrt{\frac{2}{m+1}} i^{k+1} \left(\sin\left(\frac{(k+1)k'\pi}{m+1}\right) + \sin\left(\frac{(k-1)k'\pi}{m+1}\right) \right) \\ &= \sqrt{\frac{2}{m+1}} i^{k+1} \sin\left(\frac{(k+1)k'\pi}{m+1}\right) + \sqrt{\frac{2}{m+1}} i^{k+1} \sin\left(\frac{(k-1)k'\pi}{m+1}\right) \\ &= \sqrt{\frac{2}{m+1}} i^{k+1} \sin\left(\frac{(k+1)k'\pi}{m+1}\right) + i^2 \sqrt{\frac{2}{m+1}} i^{k-1} \sin\left(\frac{(k-1)k'\pi}{m+1}\right) \\ &= -\sqrt{\frac{2}{m+1}} i^{k-1} \sin\left(\frac{(k-1)k'\pi}{m+1}\right) + \sqrt{\frac{2}{m+1}} i^{k+1} \sin\left(\frac{(k+1)k'\pi}{m+1}\right) \\ &= \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{m+1}} i^2 \sin\left(\frac{2k'\pi}{m+1}\right) & \text{für } k = 1 \\ -\sqrt{\frac{2}{m+1}} i^{k-1} \sin\left(\frac{(k-1)k'\pi}{m+1}\right) + \sqrt{\frac{2}{m+1}} i^{k+1} \sin\left(\frac{(k+1)k'\pi}{m+1}\right) & \text{für } k = 2, \dots, m-1 \\ -\sqrt{\frac{2}{m+1}} i^{m-1} \sin\left(\frac{(m-1)k'\pi}{m+1}\right) & \text{für } k = m \end{cases} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ -1 & 0 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{m+1}} i^k \sin\left(\frac{kk'\pi}{m+1}\right) \right)_{k=1, \dots, m} \\ &= G_m v_{k'}. \end{aligned} \quad \square$$

Das Lemma 3.17 gilt natürlich analog für die Matrix G_n .

In Lemma 3.18 definieren wir jetzt wie angekündigt eine Matrix \tilde{D} , indem wir unser D mit der Ähnlichkeitsabbildung $U^{-1}DU$ transformieren. U sei dabei das Tensorprodukt $U_m \otimes U_n$ und U^{-1} entsprechend $(U_m \otimes U_n)^{-1}$.

Lemma 3.18. *Sei die Matrix D wie in den vorherigen Lemmata und seien die Matrizen U_m und U_m^{-1} bzw. U_n und U_n^{-1} wie in Lemma 3.17 definiert. \otimes sei das Tensorprodukt zweier Matrizen. Außerdem gelte:*

$$\begin{aligned} U &:= U_m \otimes U_n, \\ U^{-1} &:= (U_m \otimes U_n)^{-1} \quad \text{und} \\ \tilde{D} &:= U^{-1}DU. \end{aligned}$$

δ sei die Deltafunktion mit

$$\delta_{x,y} = \begin{cases} 1 & \text{für } x = y \\ 0 & \text{für } x \neq y \end{cases}.$$

Dann gilt für $k, k' = 1, \dots, m$ und $l, l' = 1, \dots, n$:

$$\tilde{D}(k, l; k', l') = 2i\delta_{k,k'}\delta_{l,l'} \cos\left(\frac{k\pi}{m+1}\right) - 2i\delta_{k+k',m+1}\delta_{l,l'} \cos\left(\frac{l\pi}{n+1}\right).$$

Beweis. Seien die Voraussetzungen wie im Lemma. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{D} &= U^{-1}DU \\ &= (U_m \otimes U_n)^{-1} \left((G_m \otimes E_n) + (F_m \otimes G_n) \right) (U_m \otimes U_n) \\ &= \left((U_m^{-1} \otimes U_n^{-1})(G_m \otimes E_n)(U_m \otimes U_n) \right) + \\ &\quad \left((U_m^{-1} \otimes U_n^{-1})(F_m \otimes G_n)(U_m \otimes U_n) \right) \\ &= \left((U_m^{-1}G_mU_m) \otimes (U_n^{-1}E_nU_n) \right) + \left((U_m^{-1}F_mU_m) \otimes (U_n^{-1}G_nU_n) \right) \\ &= \left(\tilde{G}_m \otimes E_n \right) + \left((U_m^{-1}F_mU_m) \otimes \tilde{G}_n \right). \end{aligned}$$

Mit $\tilde{F}_m := (U_m^{-1}F_mU_m)$ gilt:

$$\tilde{D} = (\tilde{G}_m \otimes E_n) + (\tilde{F}_m \otimes \tilde{G}_n). \quad (3.9)$$

Die Matrizen \tilde{G}_m , E_n und \tilde{G}_n sind uns aus Lemma 3.17 bekannt. Man kann sie umschreiben zu

$$\tilde{G}_m(k, k') = \delta_{k,k'} 2i \cos\left(\frac{k'\pi}{m+1}\right), \quad (3.10)$$

$$E_n(l, l') = \delta_{l,l'} \quad \text{und} \quad (3.11)$$

$$\tilde{G}_n(k, k') = \delta_{l, l'} 2i \cos\left(\frac{l'\pi}{n+1}\right). \quad (3.12)$$

Betrachten wir die Matrix \tilde{F}_m .

$$\begin{aligned} \tilde{F}_m &= U_m^{-1} F_m U_m \\ &= \left(\sqrt{\frac{2}{m+1}} (-i)^{k'} \sin\left(\frac{kk'\pi}{m+1}\right) \right) \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\sqrt{\frac{2}{m+1}} i^k \sin\left(\frac{kk'\pi}{m+1}\right) \right) \\ &= \left(\sqrt{\frac{2}{m+1}} (-i)^{k'} (-1)^{k'} \sin\left(\frac{kk'\pi}{m+1}\right) \right) \left(\sqrt{\frac{2}{m+1}} i^k \sin\left(\frac{kk'\pi}{m+1}\right) \right) \\ &= \left(\sqrt{\frac{2}{m+1}} i^{k'} \sin\left(\frac{kk'\pi}{m+1}\right) \right) \left(\sqrt{\frac{2}{m+1}} i^k \sin\left(\frac{kk'\pi}{m+1}\right) \right) \\ &= \left(\sum_{j=1}^m \left(\sqrt{\frac{2}{m+1}} i^j \sin\left(\frac{kj\pi}{m+1}\right) \sqrt{\frac{2}{m+1}} i^j \sin\left(\frac{k'j\pi}{m+1}\right) \right) \right) \\ &= \left(\sum_{j=1}^m \left(\frac{2}{m+1} (-1)^j \sin\left(\frac{kj\pi}{m+1}\right) \sin\left(\frac{k'j\pi}{m+1}\right) \right) \right) \end{aligned}$$

Für die nächsten zwei Rechenschritte benutzen wir die Gleichungen

$$\sin(a) \cdot \sin(b) = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2} \quad \text{und} \quad (3.13)$$

$$\cos(z) = \operatorname{Re}(\exp(zi)). \quad (3.14)$$

Die Formel 3.14 ist eine Umformung der Eulerformel 3.17 auf Seite 33.

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{j=1}^m \left(\frac{2}{m+1} (-1)^j \sin\left(\frac{kj\pi}{m+1}\right) \sin\left(\frac{k'j\pi}{m+1}\right) \right) \right) \\ &= \left(\sum_{j=1}^m \left(\frac{1}{m+1} (-1)^j \left(\cos\left(\frac{(k-k')j\pi}{m+1}\right) - \cos\left(\frac{(k+k')j\pi}{m+1}\right) \right) \right) \right) \\ &= \left(\sum_{j=1}^m \left(\frac{1}{m+1} (-1)^j \left(\operatorname{Re}\left(\exp\left(\frac{(k-k')j\pi i}{m+1}\right)\right) - \operatorname{Re}\left(\exp\left(\frac{(k+k')j\pi i}{m+1}\right)\right) \right) \right) \right) \\ &= \left(\frac{1}{m+1} \operatorname{Re} \left(\sum_{j=1}^m \left((-1)^j \exp\left(\frac{(k-k')\pi i}{m+1} j\right) \right) - \sum_{j=1}^m \left((-1)^j \exp\left(\frac{(k+k')\pi i}{m+1} j\right) \right) \right) \right) \\ &= \left(\frac{1}{m+1} \operatorname{Re} \left(\sum_{j=1}^m \left(-\exp\left(\frac{(k-k')\pi i}{m+1} \right) \right)^j - \sum_{j=1}^m \left(-\exp\left(\frac{(k+k')\pi i}{m+1} \right) \right)^j \right) \right) \\ &= \left(\frac{1}{m+1} \operatorname{Re} \left(\sum_{j=0}^m \left(-\exp\left(\frac{(k-k')\pi i}{m+1} \right) \right)^j - \sum_{j=0}^m \left(-\exp\left(\frac{(k+k')\pi i}{m+1} \right) \right)^j \right) \right) \end{aligned}$$

Wir können die Summen mithilfe der Gleichung

$$\sum_{j=0}^m z^j = \begin{cases} \frac{1-z^{m+1}}{1-z} & \text{für } z \neq 1 \\ m+1 & \text{für } z = 1 \end{cases} \quad (3.15)$$

auflösen. Der Fall $z = 1$ tritt bei uns bei $k + k' = m + 1$ auf. Dann gilt nämlich:

$$-\exp\left(\frac{(k+k')\pi i}{m+1}\right) = -\exp(\pi i) = 1.$$

Wir machen also eine Fallunterscheidung.

1. Fall: $k + k' = m + 1$.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m+1} \operatorname{Re} \left(\sum_{j=0}^m \left(-\exp\left(\frac{(k-k')\pi i}{m+1}\right) \right)^j - \sum_{j=0}^m \left(-\exp\left(\frac{(k+k')\pi i}{m+1}\right) \right)^j \right) \\ &= \frac{1}{m+1} \operatorname{Re} \left(\frac{1 - \left(-\exp\left(\frac{(k-k')\pi i}{m+1}\right) \right)^{m+1}}{1 + \exp\left(\frac{(k-k')\pi i}{m+1}\right)} - (m+1) \right) \end{aligned}$$

Wir haben festgelegt, dass m gerade ist. Damit ist $m + 1$ ungerade. Wegen $k + k' = m + 1$ ist auch $k + k'$ und gleichzeitig $k - k'$ ungerade. Außerdem wissen wir, dass

$$\exp(n\pi i) = \exp(\pi i)^n = \begin{cases} 1 & \text{für } n \text{ gerade,} \\ -1 & \text{für } n \text{ ungerade.} \end{cases} \quad (3.16)$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m+1} \operatorname{Re} \left(\frac{1 - \left(-\exp\left(\frac{(k-k')\pi i}{m+1}\right) \right)^{m+1}}{1 + \exp\left(\frac{(k-k')\pi i}{m+1}\right)} - (m+1) \right) \\ &= \frac{1}{m+1} \operatorname{Re} \left(\frac{1 + \exp((k-k')\pi i)}{1 + \exp\left(\frac{(k-k')\pi i}{m+1}\right)} - (m+1) \right) \\ &= \frac{1}{m+1} \operatorname{Re} \left(\frac{1 + (-1)}{1 + \exp\left(\frac{(k-k')\pi i}{m+1}\right)} - (m+1) \right) \\ &= \frac{1}{m+1} (- (m+1)) \\ &= -1 \end{aligned}$$

2. Fall: $k + k' \neq m + 1$. Auch hier benutzen wir zunächst die Gleichung 3.15 auf Seite 32 und das Wissen, dass $m + 1$ ungerade ist.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m+1} \operatorname{Re} \left(\sum_{j=0}^m \left(-\exp\left(\frac{(k-k')\pi i}{m+1}\right) \right)^j - \sum_{j=0}^m \left(-\exp\left(\frac{(k+k')\pi i}{m+1}\right) \right)^j \right) \\ &= \frac{1}{m+1} \operatorname{Re} \left(\frac{1 + \exp((k-k')\pi i)}{1 + \exp\left(\frac{(k-k')\pi i}{m+1}\right)} - \frac{1 + \exp((k+k')\pi i)}{1 + \exp\left(\frac{(k+k')\pi i}{m+1}\right)} \right) \end{aligned}$$

Jetzt wenden wir im Zähler die Gleichung 3.16 und im Nenner die Eulerformel

$$\exp(zi) = \cos(z) + \sin(z)i \quad (3.17)$$

an.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m+1} \operatorname{Re} \left(\frac{1 + \exp((k-k')\pi i)}{1 + \exp\left(\frac{(k-k')\pi i}{m+1}\right)} - \frac{1 + \exp((k+k')\pi i)}{1 + \exp\left(\frac{(k+k')\pi i}{m+1}\right)} \right) \\ &= \frac{1}{m+1} \operatorname{Re} \left(\frac{1 + (-1)^{k-k'}}{1 + \cos\left(\frac{(k-k')\pi}{m+1}\right) + \sin\left(\frac{(k-k')\pi}{m+1}\right)i} - \frac{1 + (-1)^{k+k'}}{1 + \cos\left(\frac{(k+k')\pi}{m+1}\right) + \sin\left(\frac{(k+k')\pi}{m+1}\right)i} \right) \\ &= \frac{1}{m+1} \operatorname{Re} \left(\frac{(1 + (-1)^{k-k'}) \cdot \left(1 + \cos\left(\frac{(k-k')\pi}{m+1}\right) - \sin\left(\frac{(k-k')\pi}{m+1}\right)i\right)}{\left(1 + \cos\left(\frac{(k-k')\pi}{m+1}\right) + \sin\left(\frac{(k-k')\pi}{m+1}\right)i\right) \cdot \left(1 + \cos\left(\frac{(k-k')\pi}{m+1}\right) - \sin\left(\frac{(k-k')\pi}{m+1}\right)i\right)} \right. \\ & \quad \left. - \operatorname{Re} \left(\frac{(1 + (-1)^{k+k'}) \cdot \left(1 + \cos\left(\frac{(k+k')\pi}{m+1}\right) - \sin\left(\frac{(k+k')\pi}{m+1}\right)i\right)}{\left(1 + \cos\left(\frac{(k+k')\pi}{m+1}\right) + \sin\left(\frac{(k+k')\pi}{m+1}\right)i\right) \cdot \left(1 + \cos\left(\frac{(k+k')\pi}{m+1}\right) - \sin\left(\frac{(k+k')\pi}{m+1}\right)i\right)} \right) \right) \\ &= \frac{1}{m+1} \left(\frac{1 + (-1)^{k-k'} + \cos\left(\frac{(k-k')\pi}{m+1}\right) + (-1)^{k-k'} \cos\left(\frac{(k-k')\pi}{m+1}\right)}{2 + 2 \cos\left(\frac{(k-k')\pi}{m+1}\right)} \right. \\ & \quad \left. - \frac{1 + (-1)^{k+k'} + \cos\left(\frac{(k+k')\pi}{m+1}\right) + (-1)^{k+k'} \cos\left(\frac{(k+k')\pi}{m+1}\right)}{2 + 2 \cos\left(\frac{(k+k')\pi}{m+1}\right)} \right) \\ &= \frac{1}{m+1} \cdot \begin{cases} (1-1) & \text{für } k+k' \text{ und } k-k' \text{ gerade} \\ (0-0) & \text{für } k+k' \text{ und } k-k' \text{ ungerade} \end{cases} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Insgesamt gilt also:

$$\begin{aligned} \tilde{F}_m(k, k') &= \begin{cases} -1 & \text{falls } k + k' = m + 1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ &= -\delta_{k+k', m+1}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Wenn wir die Matrizen \tilde{G}_m (3.10), E_n (3.11), \tilde{F}_m (3.18) und \tilde{G}_n (3.12) in die Gleichung 3.9 auf Seite 30 einsetzen, kommen wir zu unserer Behauptung.

$$\begin{aligned}\tilde{D}(k, l; k', l') &= \tilde{G}_m(k, k') \cdot E_n(l, l') + \tilde{F}_m(k, k') \cdot \tilde{G}_n(l, l') \\ &= 2i\delta_{k,k'}\delta_{l,l'} \cos\left(\frac{k\pi}{m+1}\right) - 2i\delta_{k+k',m+1}\delta_{l,l'} \cos\left(\frac{l\pi}{n+1}\right)\end{aligned}$$

□

Beispiel 3.19. Wir betrachten das 4×3 -Rechteck Q_{43} .

Die zugehörige Matrix \tilde{D} hat folgende Form:

$$\begin{array}{cccccccccccc} & & l'=1 & & & l'=2 & & & l'=3 & & & & & \\ & & k'=1 & k'=4 & k'=2 & k'=3 & k'=1 & k'=4 & k'=2 & k'=3 & k'=1 & k'=4 & k'=2 & k'=3 & \\ l=1 & k=1 & 2i \cos(\frac{\pi}{4}) & -2i \cos(\frac{\pi}{4}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & k=4 & -2i \cos(\frac{\pi}{4}) & 2i \cos(\frac{\pi}{4}) & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l=2 & k=2 & 0 & 0 & 2i \cos(\frac{2\pi}{4}) & -2i \cos(\frac{\pi}{4}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & k=3 & 0 & 0 & -2i \cos(\frac{\pi}{4}) & 2i \cos(\frac{2\pi}{4}) & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l=3 & k=1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2i \cos(\frac{\pi}{4}) & -2i \cos(\frac{2\pi}{4}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & k=4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2i \cos(\frac{2\pi}{4}) & 2i \cos(\frac{\pi}{4}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & k=2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2i \cos(\frac{2\pi}{4}) & -2i \cos(\frac{2\pi}{4}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & k=3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2i \cos(\frac{2\pi}{4}) & 2i \cos(\frac{3\pi}{4}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l=3 & k=1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2i \cos(\frac{\pi}{4}) & -2i \cos(\frac{2\pi}{4}) & 0 & 0 & 0 \\ & k=4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2i \cos(\frac{2\pi}{4}) & 2i \cos(\frac{\pi}{4}) & 0 & 0 & 0 \\ & k=2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2i \cos(\frac{2\pi}{4}) & -2i \cos(\frac{3\pi}{4}) & 0 \\ & k=3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2i \cos(\frac{2\pi}{4}) & 2i \cos(\frac{3\pi}{4}) & 0\end{array}$$

Lemma 3.20. Sei die Matrix \tilde{D} wie in Lemma 3.18 definiert. Dann gilt:

$$\det(\tilde{D}) = \prod_{k=1}^{\frac{m}{2}} \prod_{l=1}^n 4 \left(\cos^2\left(\frac{k\pi}{m+1}\right) + \cos^2\left(\frac{l\pi}{n+1}\right) \right)$$

Beweis. Wie wir in Beispiel 3.19 oder direkt an der Formel in Lemma 3.18 sehen können, ist die Matrix \tilde{D} bei entsprechender Reihenfolge der Indizes „fast“ diagonal. Die einzigen Einträge ungleich 0 gruppieren sich in 2×2 -Blöcken um die Hauptdiagonale. Die 2×2 -Blöcke haben folgende Form:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 2i \cos(\frac{k\pi}{m+1}) & -2i \cos(\frac{l\pi}{n+1}) \\ -2i \cos(\frac{l\pi}{n+1}) & 2i \cos(\frac{(m+1-k)\pi}{m+1}) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2i \cos(\frac{k\pi}{m+1}) & -2i \cos(\frac{l\pi}{n+1}) \\ -2i \cos(\frac{l\pi}{n+1}) & 2i \cos(\pi - \frac{k\pi}{m+1}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2i \cos(\frac{k\pi}{m+1}) & -2i \cos(\frac{l\pi}{n+1}) \\ -2i \cos(\frac{l\pi}{n+1}) & -2i \cos(\frac{k\pi}{m+1}) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Die Determinante von \tilde{D} ist das Produkt der Determinanten dieser 2×2 -

Blöcke:

$$\begin{aligned} \det(\tilde{D}) &= \prod_{k=1}^{\frac{m}{2}} \prod_{l=1}^n \det \begin{pmatrix} 2i \cos\left(\frac{k\pi}{m+1}\right) & -2i \cos\left(\frac{l\pi}{n+1}\right) \\ -2i \cos\left(\frac{l\pi}{n+1}\right) & -2i \cos\left(\frac{k\pi}{m+1}\right) \end{pmatrix} \\ &= \prod_{k=1}^{\frac{m}{2}} \prod_{l=1}^n 4 \left(\cos^2\left(\frac{k\pi}{m+1}\right) + \cos^2\left(\frac{l\pi}{n+1}\right) \right). \quad \square \end{aligned}$$

Aufgrund unserer Vorarbeit bedarf es jetzt nur noch weniger Rechenschritte, um die Kasteleyn-Fisher-Temperley-Formel (Satz 2.1) herzuleiten.

Da D und \tilde{D} ähnliche Matrizen sind, gilt:

$$\det(D) = \det(\tilde{D}).$$

Zusammen mit den Lemmata 3.11, 3.12, 3.20 und dem Wissen, dass Z_{mn} positiv sein muss, ergibt sich:

$$\begin{aligned} Z_{mn} &= Pf(D) \\ &= \sqrt{\det(D)} \\ &= \sqrt{\det(\tilde{D})} \\ &= \sqrt{\prod_{k=1}^{\frac{m}{2}} \prod_{l=1}^n 4 \left(\cos^2\left(\frac{k\pi}{m+1}\right) + \cos^2\left(\frac{l\pi}{n+1}\right) \right)} \\ &= \prod_{k=1}^{\frac{m}{2}} \prod_{l=1}^n 2 \sqrt{\cos^2\left(\frac{k\pi}{m+1}\right) + \cos^2\left(\frac{l\pi}{n+1}\right)}. \end{aligned}$$

Wegen der Gleichung

$$\cos\left(\frac{(n+1-l)\pi}{n+1}\right) = \cos\left(\pi - \frac{l\pi}{n+1}\right) = -\cos\left(\frac{l\pi}{n+1}\right) \quad (3.19)$$

können wir immer zwei Wurzeln multiplizieren. Hierbei müssen wir eine Fallunterscheidung machen.

1. Fall: n gerade. In diesem Fall können mit der Gleichung 3.19 immer genau zwei Wurzeln multipliziert werden:

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{\frac{m}{2}} \prod_{l=1}^n 2 \sqrt{\cos^2\left(\frac{k\pi}{m+1}\right) + \cos^2\left(\frac{l\pi}{n+1}\right)} &= \prod_{k=1}^{\frac{m}{2}} \prod_{l=1}^{\frac{n}{2}} 2^2 \left(\cos^2\left(\frac{k\pi}{m+1}\right) + \cos^2\left(\frac{l\pi}{n+1}\right) \right) \\ &= 2^{\frac{1}{2}mn} \prod_{k=1}^{\frac{m}{2}} \prod_{l=1}^{\frac{n}{2}} \left(\cos^2\left(\frac{k\pi}{m+1}\right) + \cos^2\left(\frac{l\pi}{n+1}\right) \right). \end{aligned}$$

2. Fall: n ungerade. Hier ergibt sich mithilfe der Gleichung 3.19:

$$\begin{aligned}
& \prod_{k=1}^{\frac{m}{2}} \prod_{l=1}^n 2 \sqrt{\cos^2\left(\frac{k\pi}{m+1}\right) + \cos^2\left(\frac{l\pi}{n+1}\right)} \\
&= \prod_{k=1}^{\frac{m}{2}} \left(\prod_{l=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(2^2 \left(\cos^2\left(\frac{k\pi}{m+1}\right) + \cos^2\left(\frac{l\pi}{n+1}\right) \right) \right) 2 \sqrt{\cos^2\left(\frac{k\pi}{m+1}\right) + \cos^2\left(\frac{\frac{n+1}{2}\pi}{n+1}\right)} \right) \\
&= \prod_{k=1}^{\frac{m}{2}} \left(\prod_{l=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(2^2 \left(\cos^2\left(\frac{k\pi}{m+1}\right) + \cos^2\left(\frac{l\pi}{n+1}\right) \right) \right) 2 \sqrt{\cos^2\left(\frac{k\pi}{m+1}\right) + 0} \right) \\
&= \prod_{k=1}^{\frac{m}{2}} \left(\prod_{l=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(2^2 \left(\cos^2\left(\frac{k\pi}{m+1}\right) + \cos^2\left(\frac{l\pi}{n+1}\right) \right) \right) 2 \cos\left(\frac{k\pi}{m+1}\right) \right).
\end{aligned}$$

Für den letzten Schritt der Gleichungskette sei erwähnt, dass aus

$$1 < k < \frac{m}{2} \quad \text{die Ungleichungen} \quad 0 < \frac{k\pi}{m+1} < \frac{\pi}{2}$$

folgen. Damit gilt:

$$0 < \cos\left(\frac{k\pi}{m+1}\right) < 1. \quad (3.20)$$

Insbesondere ist $\cos\left(\frac{k\pi}{m+1}\right)$ also positiv.

Jetzt können wir die Gleichung

$$\prod_{k=1}^{\frac{m}{2}} 2 \cos\left(\frac{k\pi}{m+1}\right) = 1 \quad (3.21)$$

anwenden. Sie ergibt sich, wenn wir in das Lemma 4.1, das wir auf Seite 38 noch einführen und beweisen werden, $u = 0$ einsetzen und anschließend auf beiden Seiten der Gleichung die Wurzel ziehen.

Mit Gleichung 3.21 gilt:

$$\begin{aligned}
& \prod_{k=1}^{\frac{m}{2}} \left(\prod_{l=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(2^2 \left(\cos^2\left(\frac{k\pi}{m+1}\right) + \cos^2\left(\frac{l\pi}{n+1}\right) \right) \right) 2 \cos\left(\frac{k\pi}{m+1}\right) \right) \\
&= \prod_{k=1}^{\frac{m}{2}} \prod_{l=1}^{\frac{n-1}{2}} 2^2 \left(\cos^2\left(\frac{k\pi}{m+1}\right) + \cos^2\left(\frac{l\pi}{n+1}\right) \right) \\
&= 2^{\frac{1}{2}m(n-1)} \cdot \prod_{k=1}^{\frac{m}{2}} \prod_{l=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(\cos^2\left(\frac{k\pi}{m+1}\right) + \cos^2\left(\frac{l\pi}{n+1}\right) \right).
\end{aligned}$$

Damit haben wir die Kasteleyn-Fisher-Temperley-Formel hergeleitet:

$$Z_{mn} = \begin{cases} 2^{\frac{1}{2}mn} \cdot \prod_{k=1}^{\frac{m}{2}} \prod_{l=1}^{\frac{n}{2}} \left(\cos^2\left(\frac{k\pi}{m+1}\right) + \cos^2\left(\frac{l\pi}{n+1}\right) \right) & , \text{ für } n \text{ gerade} \\ 2^{\frac{1}{2}m(n-1)} \cdot \prod_{k=1}^{\frac{m}{2}} \prod_{l=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(\cos^2\left(\frac{k\pi}{m+1}\right) + \cos^2\left(\frac{l\pi}{n+1}\right) \right) & , \text{ für } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

4 Grenzwertbetrachtungen

Wir haben in Kapitel 2 gesehen, dass ein 2×2 -Rechteck 2 mögliche Dominopfasterungen hat, während ein 6×5 -Rechteck schon 1183-mal mit Dominos gepflastert werden kann.

In diesem Kapitel wollen wir uns mit dem Grenzverhalten der Kasteleyn-Fisher-Temperley-Formel auseinandersetzen und untersuchen, wie sich unser Satz für $m, n \rightarrow \infty$ verhält. Den Grenzwert $\lim_{m, n \rightarrow \infty} Z_{mn}$ zu betrachten, ist wenig interessant. Natürlich divergiert Z_{mn} gegen unendlich. Wir wollen daher

$$Z := \lim_{m, n \rightarrow \infty} (Z_{mn})^{\frac{1}{mn}} \quad (4.1)$$

untersuchen, den Grenzwert für die Anzahl der Dominopfasterungen pro Knoten.

Für die Grenzwertbetrachtungen bietet es sich an, die Kasteleyn-Fisher-Temperley-Formel zunächst umzustellen. Dazu benötigen wir folgendes Lemma.

Lemma 4.1. *Sei m eine natürliche gerade Zahl und $u \in \mathbb{C}$. Dann gilt folgende Gleichung:*

$$\prod_{k=1}^{\frac{m}{2}} 4 \left(u^2 + \cos^2 \left(\frac{k\pi}{m+1} \right) \right) = \frac{(u + \sqrt{1+u^2})^{m+1} - (u - \sqrt{1+u^2})^{m+1}}{2\sqrt{1+u^2}}.$$

Beweis. Wir zeigen: Die beiden Terme

$$\prod_{k=1}^{\frac{m}{2}} 4 \left(u^2 + \cos^2 \left(\frac{k\pi}{m+1} \right) \right) \quad \text{und} \quad (4.2)$$

$$\frac{(u + \sqrt{1+u^2})^{m+1} - (u - \sqrt{1+u^2})^{m+1}}{2\sqrt{1+u^2}} \quad (4.3)$$

sind Polynome in u vom Grad m und haben den gleichen Leitkoeffizienten und die gleichen Nullstellen. Denn dann sind sie gleich.

Der linke Term. Der Term 4.2 ist offensichtlich ein Polynom in u . Um den Grad und den Leitkoeffizienten zu ermitteln, schreiben wir das Produkt aus.

$$\prod_{k=1}^{\frac{m}{2}} 4 \left(u^2 + \cos^2\left(\frac{k\pi}{m+1}\right) \right) \\ = \left(4u^2 + 4 \cos^2\left(\frac{\pi}{m+1}\right) \right) \cdot \left(4u^2 + 4 \cos^2\left(\frac{2\pi}{m+1}\right) \right) \cdots \left(4u^2 + 4 \cos^2\left(\frac{\frac{m}{2}\pi}{m+1}\right) \right)$$

Schon jetzt können wir erkennen: Lösen wir die Klammern auf, ist der Summand mit der größten Potenz

$$(4u^2)^{\frac{m}{2}} = 2^m u^m.$$

Damit ist der ganze Term 4.2 ein Polynom in u vom Grad m mit dem Leitkoeffizienten 2^m .

Jetzt suchen wir die Nullstellen. Die Gleichheit

$$\prod_{k=1}^{\frac{m}{2}} 4 \left(u^2 + \cos^2\left(\frac{k\pi}{m+1}\right) \right) = 0$$

gilt genau dann, wenn für ein $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq \frac{m}{2}$ gilt:

$$4 \left(u^2 + \cos^2\left(\frac{k\pi}{m+1}\right) \right) = 0.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} 4 \left(u^2 + \cos^2\left(\frac{k\pi}{m+1}\right) \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow u^2 + \cos^2\left(\frac{k\pi}{m+1}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow u^2 &= -\cos^2\left(\frac{k\pi}{m+1}\right) \\ \Leftrightarrow u^2 &= i^2 \cos^2\left(\frac{k\pi}{m+1}\right) \\ \Leftrightarrow u &= \pm i \cos\left(\frac{k\pi}{m+1}\right). \end{aligned}$$

Die Nullstellen des Polynoms haben also die Form

$$\pm i \cos\left(\frac{k\pi}{m+1}\right) \quad \text{mit } k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq \frac{m}{2}.$$

Wegen der in Gleichung 3.19 auf Seite 35 gezeigten Periodizität von \cos kann

man erweiternd sagen:

$$\pm i \cos\left(\frac{k\pi}{m+1}\right) \quad \text{mit } k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq m \quad (4.4)$$

sind die Nullstellen des Polynoms.

Der rechte Term. Wir kennen den binomischen Satz:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k. \quad (4.5)$$

Wenden wir ihn auf den Term 4.3 an, erhalten wir:

$$\begin{aligned} & \frac{(u + \sqrt{1+u^2})^{m+1} - (u - \sqrt{1+u^2})^{m+1}}{2\sqrt{1+u^2}} \\ &= \frac{\sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} u^{m+1-k} (\sqrt{1+u^2})^k - \sum_{j=0}^{m+1} \binom{m+1}{j} u^{m+1-j} (-\sqrt{1+u^2})^j}{2\sqrt{1+u^2}} \\ &= \frac{\sum_{k=0}^{m+1} \left(\binom{m+1}{k} u^{m+1-k} \sqrt{1+u^2}^k - \binom{m+1}{k} u^{m+1-k} (-\sqrt{1+u^2})^k \right)}{2\sqrt{1+u^2}}. \end{aligned}$$

Alle Summanden, in denen k gerade ist, sind gleich 0. Ist k ungerade, gibt es ein $r \in \mathbb{N}_0$ mit $k = 2r + 1$. Wir können also schreiben:

$$\begin{aligned} & \frac{\sum_{k=0}^{m+1} \left(\binom{m+1}{k} u^{m+1-k} \sqrt{1+u^2}^k - \binom{m+1}{k} u^{m+1-k} (-\sqrt{1+u^2})^k \right)}{2\sqrt{1+u^2}} \\ &= \frac{\sum_{r=0}^{\frac{m}{2}} \left(2 \binom{m+1}{2r+1} u^{m-2r} \sqrt{1+u^2}^{2r+1} \right)}{2\sqrt{1+u^2}} \\ &= \frac{\sum_{r=0}^{\frac{m}{2}} \left(\binom{m+1}{2r+1} u^{m-2r} \sqrt{1+u^2}^{2r} \sqrt{1+u^2} \right)}{\sqrt{1+u^2}} \\ &= \sum_{r=0}^{\frac{m}{2}} \binom{m+1}{2r+1} u^{m-2r} (1+u^2)^r. \quad (4.6) \end{aligned}$$

Wir sehen: Dieser Ausdruck ist ein Polynom in u . Um die höchste Potenz zu finden, betrachten wir zunächst $(1+u^2)^r$. Mit dem binomischen Satz 4.5 gilt:

$$(1+u^2)^r = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} (u^2)^j.$$

Der Summand mit der höchsten Potenz entsteht bei $j = r$. Dann ist

$$\binom{r}{j} (u^2)^j = \binom{r}{r} (u^2)^r = u^{2r}.$$

Die Teilsumme mit den höchsten Potenzen des ganzen Terms 4.6 ist dann

$$\begin{aligned}
& \sum_{r=0}^{\frac{m}{2}} \binom{m+1}{2r+1} u^{m-2r} u^{2r} \\
&= \sum_{r=0}^{\frac{m}{2}} \binom{m+1}{2r+1} u^m \\
&= \sum_{r=0}^{\frac{m}{2}} \left(\binom{m}{2r} + \binom{m}{2r+1} \right) u^m
\end{aligned}$$

Die $2r$ sind alle geraden und die $2r+1$ alle ungeraden Zahlen von 0 bis $m+1$. Es gilt also:

$$\begin{aligned}
& \sum_{r=0}^{\frac{m}{2}} \left(\binom{m}{2r} + \binom{m}{2r+1} \right) u^m \\
&= \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m}{k} u^m \\
&= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} u^m \\
&= 2^m u^m.
\end{aligned}$$

Damit ist der Grad des Polynoms m und der Leitkoeffizient 2^m .

Nun suchen wir nach den Nullstellen. Dazu betrachten wir zunächst nur den Zähler des Terms 4.3:

$$\begin{aligned}
& (u + \sqrt{1+u^2})^{m+1} - (u - \sqrt{1+u^2})^{m+1} = 0 \\
\Leftrightarrow & (u + \sqrt{1+u^2})^{m+1} = (u - \sqrt{1+u^2})^{m+1} \\
\Leftrightarrow & u + \sqrt{1+u^2} = (u - \sqrt{1+u^2})z.
\end{aligned}$$

z sei die komplexe Einheitswurzel vom Grad $m+1$. Weiter gilt:

$$\begin{aligned}
& u + \sqrt{1+u^2} = (u - \sqrt{1+u^2})z \\
\Leftrightarrow & \sqrt{1+u^2}z + \sqrt{1+u^2} = uz - u \\
\Leftrightarrow & \sqrt{1+u^2}(z+1) = u(z-1) \\
\Rightarrow & (1+u^2)(z+1)^2 = u^2(z-1)^2 \\
\Leftrightarrow & z^2 + 2z + 1 + z^2u^2 + 2zu^2 + u^2 = u^2z^2 - 2u^2z + u^2 \\
\Leftrightarrow & 4zu^2 = -z^2 - 2z - 1 \\
\Leftrightarrow & u^2 = -\frac{1}{4}\left(z + 2 + \frac{1}{z}\right). \quad (4.7)
\end{aligned}$$

z ist die komplexe Einheitswurzel der Ordnung $m + 1$, also gilt:

$$z = \exp\left(\frac{2k\pi}{m+1}i\right) \quad \text{mit } k = 0, 1, \dots, m.$$

Setzen wir dies in den Ausdruck 4.7 ein, ergibt sich:

$$\begin{aligned} u^2 &= -\frac{1}{4} \left(\exp\left(\frac{2k\pi}{m+1}i\right) + 2 + \frac{1}{\exp\left(\frac{2k\pi}{m+1}i\right)} \right) \\ \Leftrightarrow u^2 &= -\frac{1}{4} \left(\exp\left(\frac{2k\pi}{m+1}i\right) + 2 + \exp\left(-\frac{2k\pi}{m+1}i\right) \right) \\ \Leftrightarrow u^2 &= -\frac{1}{4} \left(\exp\left(\frac{k\pi}{m+1}i\right) + \exp\left(-\frac{k\pi}{m+1}i\right) \right)^2 \\ \Leftrightarrow u &= \pm \frac{i}{2} \left(\exp\left(\frac{k\pi}{m+1}i\right) + \exp\left(-\frac{k\pi}{m+1}i\right) \right). \end{aligned}$$

Mit

$$\cos(z) = \frac{\exp(zi) + \exp(-zi)}{2}$$

haben die Nullstellen des Zählers folgende Form:

$$u = \pm i \cos\left(\frac{k\pi}{m+1}\right) \quad \text{mit } k = 0, 1, \dots, m.$$

Den Fall $k = 0$ müssen wir als Nullstelle des ganzen Terms 4.3 ausschließen, da dann der Nenner 0 würde:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{1+u^2} &= 2\sqrt{1 + \left(\pm i \cos\left(\frac{0\pi}{m+1}\right)\right)^2} \\ &= 2\sqrt{1 + (\pm i)^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Die Nullstellen des rechten Terms 4.3 sind also

$$\pm i \cos\left(\frac{k\pi}{m+1}\right) \quad \text{mit } k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq m.$$

Sie stimmen mit den Nullstellen 4.4 des linken Terms 4.2 überein. \square

Wie angekündigt wollen wir die Kasteleyn-Fisher-Temperley-Formel umformen. $\lfloor \cdot \rfloor$ bezeichne dabei die Gaußklammer. Für $x \in \mathbb{R}$ sei also

$$\lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}.$$

Lemma 4.2. Die Anzahl der Dominopflasterungen Z_{mn} aus der Kasteleyn-Fisher-Temperley-Formel (Satz 2.1) lässt sich auch wie folgt darstellen:

$$Z_{mn} = \prod_{l=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{\left(\cos\left(\frac{l\pi}{n+1}\right) + \sqrt{1 + \cos^2\left(\frac{l\pi}{n+1}\right)} \right)^{m+1} - \left(\cos\left(\frac{l\pi}{n+1}\right) - \sqrt{1 + \cos^2\left(\frac{l\pi}{n+1}\right)} \right)^{m+1}}{2\sqrt{1 + \cos^2\left(\frac{l\pi}{n+1}\right)}}.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} Z_{mn} &= \begin{cases} 2^{\frac{1}{2}mn} \cdot \prod_{k=1}^{\frac{m}{2}} \prod_{l=1}^{\frac{n}{2}} \left(\cos^2\left(\frac{k\pi}{m+1}\right) + \cos^2\left(\frac{l\pi}{n+1}\right) \right) & \text{für } n \text{ gerade} \\ 2^{\frac{1}{2}m(n-1)} \cdot \prod_{k=1}^{\frac{m}{2}} \prod_{l=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(\cos^2\left(\frac{k\pi}{m+1}\right) + \cos^2\left(\frac{l\pi}{n+1}\right) \right) & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \prod_{l=1}^{\frac{n}{2}} 2^m \cdot \prod_{k=1}^{\frac{m}{2}} \left(\cos^2\left(\frac{k\pi}{m+1}\right) + \cos^2\left(\frac{l\pi}{n+1}\right) \right) & \text{für } n \text{ gerade} \\ \prod_{l=1}^{\frac{n-1}{2}} 2^m \cdot \prod_{k=1}^{\frac{m}{2}} \left(\cos^2\left(\frac{k\pi}{m+1}\right) + \cos^2\left(\frac{l\pi}{n+1}\right) \right) & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases} \\ &= \prod_{l=1}^{\lfloor \frac{1}{n} \rfloor} 2^m \prod_{k=1}^{\frac{m}{2}} \left(\cos^2\left(\frac{l\pi}{n+1}\right) + \cos^2\left(\frac{k\pi}{m+1}\right) \right) \\ &= \prod_{l=1}^{\lfloor \frac{1}{n} \rfloor} \left(\prod_{k=1}^{\frac{m}{2}} 4 \left(\cos^2\left(\frac{l\pi}{n+1}\right) + \cos^2\left(\frac{k\pi}{m+1}\right) \right) \right) \end{aligned}$$

Durch Verwendung des Lemmas 4.1 gelangen wir direkt zu der Formel. \square

Wir berechnen zunächst den Grenzwert $\lim_{m \rightarrow \infty} (Z_{mn})^{\frac{1}{m}}$, um damit dann Z (vgl. Seite 38) zu bestimmen.

Lemma 4.3. Sei Z_{mn} wie in der Kasteleyn-Fisher-Temperley-Formel (Satz 2.1) definiert. Dann gilt:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (Z_{mn})^{\frac{1}{m}} = \prod_{l=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \cos\left(\frac{l\pi}{n+1}\right) + \sqrt{1 + \cos^2\left(\frac{l\pi}{n+1}\right)}.$$

Beweis. Es gilt nach Lemma 4.2:

$$\begin{aligned}
& \lim_{m \rightarrow \infty} (Z_{mn})^{\frac{1}{m}} \\
&= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\prod_{l=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{\left(\cos\left(\frac{l\pi}{n+1}\right) + \sqrt{1 + \cos^2\left(\frac{l\pi}{n+1}\right)} \right)^{m+1} - \left(\cos\left(\frac{l\pi}{n+1}\right) - \sqrt{1 + \cos^2\left(\frac{l\pi}{n+1}\right)} \right)^{m+1}}{2\sqrt{1 + \cos^2\left(\frac{l\pi}{n+1}\right)}} \right)^{\frac{1}{m}} \\
&= \prod_{l=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\left(\cos\left(\frac{l\pi}{n+1}\right) + \sqrt{1 + \cos^2\left(\frac{l\pi}{n+1}\right)} \right)^{m+1} - \left(\cos\left(\frac{l\pi}{n+1}\right) - \sqrt{1 + \cos^2\left(\frac{l\pi}{n+1}\right)} \right)^{m+1} \right)^{\frac{1}{m}}}{\lim_{m \rightarrow \infty} \left(2\sqrt{1 + \cos^2\left(\frac{l\pi}{n+1}\right)} \right)^{\frac{1}{m}}}
\end{aligned}$$

Wir betrachten zunächst den Nenner. Es gilt für alle $l \in \{1, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$:

$$2\sqrt{1 + \cos^2\left(\frac{l\pi}{n+1}\right)} > 0$$

und damit

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(2\sqrt{1 + \cos^2\left(\frac{l\pi}{n+1}\right)} \right)^{\frac{1}{m}} = 1. \quad (4.8)$$

Betrachten wir nun den Zähler. Mit

$$A := \cos\left(\frac{l\pi}{n+1}\right) + \sqrt{1 + \cos^2\left(\frac{l\pi}{n+1}\right)} \quad \text{und} \quad B := \cos\left(\frac{l\pi}{n+1}\right) - \sqrt{1 + \cos^2\left(\frac{l\pi}{n+1}\right)}$$

ist

$$\begin{aligned}
& \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\left(\cos\left(\frac{l\pi}{n+1}\right) + \sqrt{1 + \cos^2\left(\frac{l\pi}{n+1}\right)} \right)^{m+1} - \left(\cos\left(\frac{l\pi}{n+1}\right) - \sqrt{1 + \cos^2\left(\frac{l\pi}{n+1}\right)} \right)^{m+1} \right)^{\frac{1}{m}} \\
&= \lim_{m \rightarrow \infty} (A^{m+1} - B^{m+1})^{\frac{1}{m}}.
\end{aligned}$$

Analog zu der Ungleichung 3.20 auf Seite 36 gilt für alle $l \in \{1, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$:

$$0 < \cos\left(\frac{l\pi}{n+1}\right) < 1.$$

Daraus folgt:

$$A > 1 \quad \text{und} \quad |B| < 1.$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}
& \lim_{m \rightarrow \infty} (A^{m+1} - B^{m+1})^{\frac{1}{m}} \\
&= \lim_{m \rightarrow \infty} (A^{m+1})^{\frac{1}{m}} \left(1 - \left(\frac{B}{A}\right)^{m+1}\right)^{\frac{1}{m}} \\
&= \lim_{m \rightarrow \infty} A^{m \cdot \frac{1}{m}} A^{\frac{1}{m}} \left(1 - \left(\frac{B}{A}\right)^{m+1}\right)^{\frac{1}{m}} \\
&= \lim_{m \rightarrow \infty} A \cdot \lim_{m \rightarrow \infty} A^{\frac{1}{m}} \cdot \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 - \left(\frac{B}{A}\right)^{m+1}\right)^{\frac{1}{m}} \\
&= A \cdot 1 \cdot 1 \\
&= A.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Insgesamt folgt aus den Gleichungen 4.8 und 4.9:

$$\begin{aligned}
\lim_{m \rightarrow \infty} (Z_{mn})^{\frac{1}{m}} &= \prod_{l=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{A}{1} \\
&= \prod_{l=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \cos\left(\frac{l\pi}{n+1}\right) + \sqrt{1 + \cos^2\left(\frac{l\pi}{n+1}\right)}.
\end{aligned}$$

□

Lemma 4.4. Sei Z_{mn} wie in der Kasteleyn-Fisher-Temperley-Formel (Satz 2.1) definiert und sei $Z = \lim_{m,n \rightarrow \infty} (Z_{mn})^{\frac{1}{mn}}$ wie in der Gleichung 4.1 auf Seite 38. Dann ist

$$Z = \exp\left(\frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left(\cos(\omega) + \sqrt{1 + \cos^2(\omega)}\right) d\omega\right).$$

Beweis. Wir betrachten zunächst den natürlichen Logarithmus von Z .

$$\begin{aligned}
\log(Z) &= \log\left(\lim_{m,n \rightarrow \infty} (Z_{mn})^{\frac{1}{mn}}\right) \\
&= \log\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{m \rightarrow \infty} (Z_{mn})^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}}\right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sum_{l=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \log\left(\cos\left(\frac{l\pi}{n+1}\right) + \sqrt{1 + \cos^2\left(\frac{l\pi}{n+1}\right)}\right)}{n}\right)
\end{aligned}$$

Mit

$$f(x) := \log \left(\cos(x) + \sqrt{1 + \cos^2(x)} \right) \quad (4.10)$$

ergibt sich:

$$\begin{aligned} \log(Z) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sum_{l=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} f\left(\frac{l\pi}{n+1}\right)}{n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{l=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} f\left(\frac{l\pi}{n+1}\right) \cdot \frac{\pi}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{\pi} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{l=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} f\left(\frac{l\pi}{n+1}\right) \cdot \frac{\pi}{n+1} \right) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\omega) d\omega \cdot 1 \cdot \frac{1}{\pi}. \end{aligned}$$

Ersetzen wir f wieder durch den rechten Ausdruck der Gleichung 4.10 und exponieren die Gleichung, erhalten wir:

$$Z = \exp \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \left(\cos(\omega) + \sqrt{1 + \cos^2(\omega)} \right) d\omega \right).$$

□

Wir können für den Grenzwert Z sogar einen exakten Wert finden. In dieser Arbeit sollen diese abschließenden Überlegungen nur kurz skizziert werden. Der interessierte Leser sei jedoch dazu aufgefordert, die einzelnen Rechenschritte selbst nachzuvollziehen und seinen Wissensdurst zusätzlich mit der Lektüre von Kasteleyn [11], S. 1216 ff., zu stillen.

In der Arbeit von Kasteleyn (vgl. [11], S. 1216) wird die Formel aus Lemma 4.4 weiter umgeformt zu

$$\log(Z) = \pi^{-1} \int_0^1 x^{-1} \arctan(x) dx.$$

Mit den Gleichungen

$$\begin{aligned} \arctan x &= (2i)^{-1} (\log(1 + ix) - \log(1 - ix)) \quad \text{und} \\ \text{Li}_2(x) &= (2i)^{-1} (\text{Li}_2(ix) - \text{Li}_2(-ix)), \end{aligned}$$

wobei Li_2 der Eulersche Dilogarithmus

$$\text{Li}_2(u) = - \int_0^u x^{-1} \log(1 - x) dx$$

ist, kommt Kasteleyn zu

$$\begin{aligned}\log(Z) &= \pi^{-1} \Lambda_2(1) \\ &= \pi^{-1} G.\end{aligned}\tag{4.11}$$

G ist die Catalansche Konstante:

$$G = 1^{-2} - 3^{-2} + 5^{-2} - 7^{-2} + \dots \approx 0.915965594.\tag{4.12}$$

Aus den Gleichungen 4.11 und 4.12 ergibt sich:

$$Z = \exp\left(\frac{G}{\pi}\right) \approx 1.338515152.$$

Wie schon erwähnt, drückt Z aus, wie viele Dominopflasterungen im Fall $m, n \rightarrow \infty$ pro Knoten existieren.

In der molekularen Statistik ist in diesem Zusammenhang die „molecular freedom“ ϕ_2 interessant, die Anzahl von Dominopflasterungen pro Domino (vgl. Kasteleyn [11], S. 1217, oder Fowler und Rushbrooke [8], S. 1281). Diese ist

$$\phi_2 = (Z_{mn})^{\frac{2}{mn}}.$$

Für ein unendliches Rechteck gilt:

$$\phi_2^{(\infty)} = Z^2 = \exp\left(\frac{2G}{\pi}\right) \approx 1.791622812.$$

Dieses exakte Ergebnis von $\phi_2^{(\infty)}$ kann 1961 erstmals von Kasteleyn [11] sowie Fisher und Temperley [7] durch ihre Formel für die Anzahl der Dominopflasterungen eines Rechtecks berechnet werden.

5 Literaturverzeichnis

- [1] Aigner, M. (2006): Diskrete Mathematik. Mit 600 Übungsaufgaben. Wiesbaden: Friedrich Vieweg & Sohn Verlag
- [2] Ardila, F.; Stanley, R. P. (2006): Tilings. (Pflasterungen.) In: Math. Semesterber. 53, No. 1, S. 17-43
- [3] Artin, E. (1957): Geometric Algebra. New York (u.a.): Interscience Publishers
- [4] Barth, W.; Knabner, P. (2013): Lineare Algebra. Grundlagen und Anwendungen. Berlin Heidelberg: Spektrum-Verlag
- [5] Bourbaki, N. (1959): Algèbre. Éléments de mathématique. Chapitre 9: Formes sesquilineaires et formes quadratiques. Paris: Hermann
- [6] Fischer, G. (2010): Lineare Algebra. Eine Einführung für Studienanfänger. Wiesbaden: Vieweg & Teubner Verlag
- [7] Fisher, M.; Temperley H. (1961): Dimer problem in statistical mechanics - an exact result. In: Philos. Mag. 6 Jg. 1961, S. 1061-1063
- [8] Fowler, R. H.; Rushbrooke, G. S. (1937): The statistical theory of perfect solutions. In: Trans. Faraday Soc. 33, S. 1272 ff.
- [9] Grieser, D. (Wintersemester 2011/2012): Notizen zur Vorlesung „Mathematisches Problemlösen und Beweisen“. Oldenburg: StudIP
- [10] Hurst, C. A.; Green, H. S. (1960): New Solutions of the Ising Problem for a Rectangular Lattice. In: J. chem. Phys. 33, S. 1059 ff.
- [11] Kasteleyn, P. (1961): The statistics of dimers on a lattice I. The number of dimer arrangements on a quadratic lattice. In: Phys. 27, S. 1209-1225
- [12] Knus, M.A. (1988): Quadratic forms, Clifford algebras and spinors. Campinas: Universidade Estadual de Campinas
- [13] Scott, R. F.; Mathews, G. B. (1904): The theory of determinants and their applications. New York: Cambridge University Press
- [14] Sharir, M.; Sheffer, A.; Welzl, E. (2013): Counting Plane Graphs: Perfect Matchings, Spanning Cycles, and Kasteleyn's Technique. In: Journal of Combinatorial Theory, Series A 120, S. 777-794

- [15] Thomas, R. (2006): A survey of Pfaffian orientations of graphs. International Congress of Mathematicians III. Zürich: European Mathematical Society, S. 963–984
- [16] Witt, K.-U. (2013): Lineare Algebra für die Informatik, Wiesbaden: Springer Verlag

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich diese Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe. Außerdem versichere ich, dass ich die allgemeinen Prinzipien wissenschaftlicher Arbeit und Veröffentlichung, wie sie in den Leitlinien guter wissenschaftlicher Praxis der Carl von Ossietzky Universität Oldenburg festgelegt sind, befolgt habe.

Unterschrift