**Carl von Ossietzky
Universität Oldenburg**

Zwei-Fächer-Bachelor Chemie / Physik, zur Erlangung des akademischen Grades Bachelor of Science (B. Sc.)

Bachelorarbeit

NEWTONSCHES IMPULSPENDEL und Dreikörperproblem

vorgelegt von

Stephan Adolf

Betreuender Gutachter: Prof. Dr. Joachim Peinke

Zweiter Gutachter: Dr. Michael Hölling

Oldenburg, 23. August 2012

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Quelltextverzeichnis

1. Einleitung

Das Dreikörperproblem kann als das einfachste Beispiel der Mehrkörperdynamik gesehen werden. Allgemein wird angenommen, dass man das Dreikörperproblem nicht ohne weiteres lösen könne (vgl. [22, S. 972]). Das Problem liegt darin, dass nur eine begrenzte Zahl an Freiheitsgraden eines System mit algebraischen Gleichungen exakt berechnet werden kann. Das ist bei zwei Körpern mit Energie- und Impulserhaltung möglich. Bei mehr als zwei Körpern funktioniert dieses Vorgehen nicht. Aus diesem Grund ist das Dreikörperproblem ein Thema, mit welchem sich in den letzten drei Jahrhunderten Physiker beschäftigt haben. Unter anderem bekannte Physiker wie EULER, LAPLACE oder LAGRANGE (aus [16, S. 12]). Die Mehrkörperdynamik (damit auch das Dreikörperproblem) spielt in der Himmelsmechanik eine Rolle, wenn man verstehen möchte, wie sich einzelne Objekte gegenseitig beeinflussen. Das ist beispielsweise in Sonnensystemen interessant.

In dieser Arbeit soll eine experimentelle Untersuchung anhand eines NEWTONSCHEN PENDELS (auch KUGELSTOSSPENDEL oder NEWTONSCHE WIEGE genannt) mit unterschiedlichen Massen erfolgen. Diese Pendelapparatur ist ein altbekanntes System der Physik und wird kommerziell als Spielzeug vertrieben. Bereits 1662 wurde ein Paper von JOHN WALLIS, CHRISTOPHER WREN und CHRISTIAN HUYGENS veröffentlicht, welches die physikalischen Grundlagen betrachtet (vgl. [9, S. 1508]). Es sei angemerkt, dass die physikalischen Grundlagen, wenn man verstehen möchte, wie der Stoß sich genau ausbreitet, im Gegensatz zu häufig anzutreffenden Meinungen nicht trivial sind.

In der vorliegenden Arbeit werden mehrere Stoßexperimente durchgeführt, wobei mit Hilfe von optischen Methoden die Trajektorien der einzelnen Kugeln bestimmt werden. Ferner wird eine von CEANGA & HURMUZLU entwickelte Theorie, die es ermöglicht Kugelgeschwindigkeiten nach einem Stoß auch für verschiedene Massen zu berechnen, auf die experimentell gewonnenen Daten angewandt. Eine kurze Darstellung der benötigten theoretischen Grundlagen erfolgt in Kapitel 2.

2. Theoretische Betrachtung des Kugelstoßpendels

2.1. „Klassische" Erklärungsansätze

Betrachtet man ein ideales Kugelstoßpendel, dessen Massen identisch seien und nehme man an, dass nur vollständig elastische Stöße vorhanden seien. Lenkt man nun wie in Abbildung 2.1 zu sehen ist, m_1 bis m_n Pendelkörper aus, wobei m_n die letzte ausgelenkte Masse sei. So ist zu erwarten, dass eine entsprechende Anzahl an Massen $\tilde{m}_n$ auf der anderen Seite ausgelenkt wird, während die anderen Kugeln in Ruhe verbleiben.

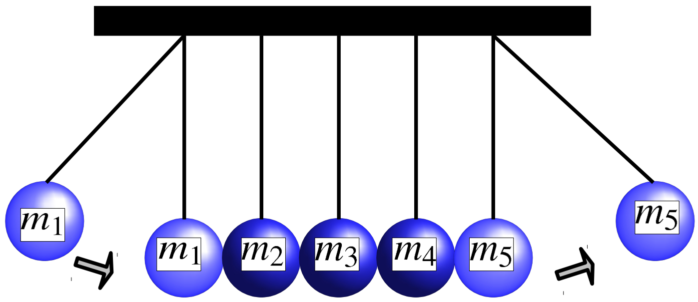


Abbildung 2.1.: Schemazeichnung eines Newtonschen Pendels.

Beschrieben werden kann dieser Umstand mit Hilfe von Impuls- und Energieerhaltung, dass heißt Impuls ($p_1 = p_2$) und Energie ($E_1 = E_2$) des Gesamtsystems sind vor und nach dem Stoß identisch. Es gilt für den Impuls p von n_1 stoßenden Massen $p_1 = m \cdot v_1 \cdot n_1$ und $E_1 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 \cdot n_1$ für die Energie E, entsprechend für die ausgelenkten Pendel $p_2 = m \cdot v_2 \cdot n_2$ und $E_2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 \cdot n_2$. Die Geschwindigkeit v_1 sei die der einschlagenden Kugeln vor dem Stoß und v_2 die Geschwindigkeit der weggestoßenden Kugeln nach dem Stoß.

Der Impuls der stoßenden Pendelkörper muss gleich dem Impuls der ausgelenkten Massen seien:

$$p_1 = p_2 \tag{2.1}$$
$$m \cdot v_1 \cdot n_1 = m \cdot v_2 \cdot n_2 \tag{2.2}$$
$$\Leftrightarrow v_1 = \frac{n_2}{n_1} \cdot v_2. \tag{2.3}$$

Entsprechend ergibt sich wegen Energieerhaltung für die kinetische Energie:

$$E_1 = E_2 \tag{2.4}$$
$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 \cdot n_1 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 \cdot n_2 \tag{2.5}$$
$$\Leftrightarrow v_1^2 = \frac{n_2}{n_1} \cdot v_2^2. \tag{2.6}$$

Einsetzen von Gleichung (2.3) in Gleichung (2.6) liefert:

$$\frac{n_2^2}{n_1^2} \cdot v_2^2 = \frac{n_2}{n_1} \cdot v_2^2 \tag{2.7}$$
$$\Leftrightarrow \boxed{n_1 = n_2}. \tag{2.8}$$

Mit Impuls- und Energieerhaltung gibt es zwei Bestimmungsgleichungen, mit denen man das System beschreiben kann. Allerdings wird im Falle von mehr als zwei Kugeln ein Problem behandelt, in dem mehr als zwei Geschwindigkeiten beschrieben werden müssen[1]. Die dazu in der Literatur auffindbaren Angaben sollen hier teilweise kurz vorgestellt werden.

Wenn nur Impuls- und Energieerhaltung angenommen werden, lassen sich andere hypothetische Bewegungen konstruieren. Beispielhaft seien drei Kugeln vorhanden, die durch folgende Geschwindigkeiten charakterisiert werden: Kugel eins stoße mit der Geschwindigkeit v und bewege sich nach dem Einschlag mit $-1/3 \cdot v$.

[1] Dieses Problem tritt insbesondere bei verschiedenen Massen auf.

Die beiden anderen Kugeln haben jeweils eine Geschwindigkeit von $2/3 \cdot v$ (aus [6, S. 762]), so dass

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(-\frac{1}{3} \cdot v \right)^2 + m \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot v \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \tag{2.9}$$

$$p = m \cdot \left(-\frac{1}{3} \cdot v \right) + 2 \cdot m \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot v \right) = m \cdot v \tag{2.10}$$

ist. Wie man nachrechnen kann, werden Impuls- und Energieerhaltung bei diesem Beispiel erfüllt, allerdings lassen sich diese Bewegungsformen experimentell nicht verifizieren (vgl. [6, S. 762]). Bei ideal elastischen Stößen verformen sich die Kugeln während eines Stoßes und geben die dabei kurzzeitig gespeicherte Energie wieder vollständig ab. Das hat nach dem dritten Newtonschen Gesetz zur Folge, dass sich bei drei Kugeln nur die letzte bewegt (vgl. [20]).

HERRMANN & SCHMÄLZLE haben gezeigt, dass sich eine Anordnung aus reibungsfreien Luftkissengleitern mit Federn verbunden, dann wie ein Newtonsches Pendel verhält, wenn das System *dispersionsfrei* ist (vgl. [6, S. 763]). Das bedeutet, dass sich die Form der Störung nicht verändern darf, während sie sich durch die Kette aus Gleitern bzw. Kugeln ausbreitet (vgl. [7, S. 977]). Ansonsten würden Impuls- und Energie der stoßenden Kugel nicht vollständig auf die dritte Kugel übertragen werden. Dann müssten sich die daraus resultierenden Abweichungen vom beobachteten Verhalten bei weiteren Stoßdurchgängen aufaddieren, sodass auf lange Sicht ein chaotisches Verhalten zu erwarten wäre (vgl. [7, S. 981]).

Des Weiteren haben HERRMANN & SEITZ gezeigt, dass eine Beschreibung über eine Massepunkt- und Federanordnung nach dem HERTZ'SCHEN GESETZ

$$F = k \cdot x^{1.5} \tag{2.11}$$

möglich ist (vgl. [7, S. 977]). In Gleichung (2.11) bezeichnet x die Auslenkung der „Feder“ und k eine Konstante ähnlich wie beim HOOKSCHEN GESETZ. Sie haben mit Hilfe von Computersimulationen festgestellt, dass dann aber keine Dispersionsfreiheit vorläge. Das hätte wie oben angedeutet zur Folge, dass sich die Dispersion bei weiteren Pendelstößen verstärken würde. Damit müsste man auch bei zunächst sehr geringer Dispersion davon ausgehen, dass es nach einer gewissen Zeit zu vollständig chaotischem Verhalten käme. Derartiges Verhalten könne jedoch nicht beobachtet werden. Die Autoren geben als

Lösung an, dass beim ersten Stoß alle Massen in Bewegung seien, wobei die Abweichung für die „ruhenden“ Pendel gering sei. Dadurch würden die einzelnen Kugeln getrennt und müssten bei der nächsten Stoßfolge als ein Stoßproblem mit jeweils zwei Massen behandelt werden (vgl. [7, S. 981]). Stöße zwischen zwei Pendelkörpern der gleichen Masse seien jedoch vollständig dispersionsfrei, daher bewirke die kleine Abweichung während des ersten Stoßes, dass alle weiteren Stöße dispersionsfrei verliefen (vgl. [7, S. 977 & 981] und [9, S. 1510]). Es sei angemerkt, dass die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Störung signifikant unter der Schallgeschwindigkeit von Stahl liegt (etwa ein Zehntel der Schallgeschwindigkeit) (vgl. [7, S. 980]) und von der stoßenden Masse abhängt (vgl. [14, S. 324]).

2.2. Berechnung der Kugelgeschwindigkeiten nach dem Stoß gemäß CEANGA & HURMUZLU

Als nächstes soll gemäß der Theorie von CEANGA & HURMUZLU (vgl. [8]) überlegt werden, wie das Problem mit drei Massen formal so gelöst werden kann, dass sich die Geschwindigkeiten direkt nach dem Stoß allgemein berechnen lassen.

Dazu müssen zunächst einige Gleichungen für die Impulserhaltung (vgl. Gleichungen (2.12 – 2.14)) sowie den *Restitutionskoeffizienten* (e_2^k) zwischen den Kugeln eins und zwei (vgl. Gleichung (2.15)) aufgestellt werden. Der *Restitutionskoeffizient* ist ein Maß für die Elastizität eines Stoßes und nimmt Werte im Intervall 0 (ideal plastisch) bis 1 (ideal elastisch) an. Dabei seien die mit $+$ gekennzeichneten Geschwindigkeiten diejenigen nach dem Stoß und entsprechend die mit einem $-$ gekennzeichneten Geschwindigkeiten diejenigen vor dem Stoß. Die Δv- und Δp-Variable bezeichnen dabei die durch den Stoß verursachten Geschwindigkeits- und Impulsänderungen der einzelnen Kugeln. Des Weiteren wird angenommen, dass Kugel eins die stoßende Kugel sei und die beiden anderen Kugeln vor dem Stoß in Kontakt und in Ruhe seien (vgl. [8, S. 238]):

$$m_1 \cdot \Delta v_1 = -\Delta p_2 \tag{2.12}$$

$$m_2 \cdot \Delta v_2 = \Delta p_2 - \Delta p_3 \tag{2.13}$$

$$m_3 \cdot \Delta v_3 = \Delta p_3 \tag{2.14}$$

$$v_1^+ - v_2^+ = -e_2^k \cdot v_1^-. \tag{2.15}$$

Als nächstes berechnen CEANGA & HURMUZLU die Verschiebungen der einzelnen Kugeln für den Fall, dass alle drei Massen sowie v_1^- eins seien und die Kugeln zwei und drei in Ruhe verharren. Dabei sei k die Federkonstante zwischen den Kugeln eins und zwei und $\gamma \cdot k$ die Federkonstante zwischen den Kugeln zwei und drei, des Weiteren seien $\gamma_1 = 1 + \gamma + \sqrt{1 - \gamma + \gamma^2}$ und $\gamma_2 = 1 + \gamma - \sqrt{1 - \gamma + \gamma^2}$ (vgl. [8, S. 238 f.]):

$$q_1 = \frac{t}{3} - \frac{k \cdot (2 \cdot \gamma - \gamma_1) \cdot \sin\left(\sqrt{k \cdot \gamma_1} \cdot t\right)}{(k \cdot \gamma_1)^{3/2} \cdot (\gamma_1 - \gamma_2)} + \frac{k \cdot (2 \cdot \gamma - \gamma_2) \cdot \sin\left(\sqrt{k \cdot \gamma_2} \cdot t\right)}{(k \cdot \gamma_2)^{3/2} \cdot (\gamma_1 - \gamma_2)} \tag{2.16}$$

$$q_2 = \frac{t}{3} + \frac{k \cdot (\gamma - \gamma_1) \cdot \sin\left(\sqrt{k \cdot \gamma_1} \cdot t\right)}{(k \cdot \gamma_1)^{3/2} \cdot (\gamma_1 - \gamma_2)} - \frac{k \cdot (\gamma - \gamma_2) \cdot \sin\left(\sqrt{k \cdot \gamma_2} \cdot t\right)}{(k \cdot \gamma_2)^{3/2} \cdot (\gamma_1 - \gamma_2)} \tag{2.17}$$

$$q_3 = \frac{t}{3} + \frac{k \cdot \gamma \cdot \sin\left(\sqrt{k \cdot \gamma_1} \cdot t\right)}{(k \cdot \gamma_1)^{3/2} \cdot (\gamma_1 {-}_2)} - \frac{k \cdot \gamma \cdot \sin\left(\sqrt{k \cdot \gamma_2} \cdot t\right)}{(k \cdot \gamma_2)^{3/2} \cdot (\gamma_1 {-}_2)}. \tag{2.18}$$

Nun ergeben sich die Impulse

$$\begin{aligned}\Delta p_2 &= \int_0^t k \cdot (q_2 - q_1)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{(3 \cdot \gamma - 2 \cdot \gamma_1) \cdot \gamma_2^2 \cdot \sin^2\left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{k \cdot \gamma_1} \cdot t\right) - (3 \cdot \gamma - 2 \cdot \gamma_2) \cdot \gamma_1^2 \cdot \sin^2\left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{k \cdot \gamma_2} \cdot t\right)}{\frac{1}{2} \cdot \gamma_1^2 \cdot \gamma_2^2 \cdot (\gamma_1 - \gamma_2)}\end{aligned} \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned}\Delta p_3 &= \int_0^t k \cdot \gamma \cdot (q_3 - q_2)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\left[1 - \cos\left(\sqrt{k \cdot \gamma_1} \cdot t\right)\right] \cdot \gamma \cdot \gamma_2 - \left[1 - \cos\left(\sqrt{k \cdot \gamma_2} \cdot t\right)\right] \cdot \gamma \cdot \gamma_1}{\gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot (\gamma_1 - \gamma_2)},\end{aligned} \tag{2.20}$$

die von links (Δp_2 mit Gleichung (2.16) und Gleichung (2.17)) und rechts (Δp_3 mit Gleichung (2.17) und Gleichung (2.18)) auf die Kugel zwei wirken (vgl. [8, S. 239]). Des Weiteren kann eine Beziehung zwischen den Impulsen formuliert werden, wobei $\alpha_2 \geq 0$ die *Impuls-Korrelations-Relation* ist (vgl. [8, S. 239])

$$\delta = \alpha_2 \cdot \Delta p_2 + \Delta p_3, \tag{2.21}$$

für die Grenzfälle $\gamma \ll 1$ und $\gamma \gg 1$ ergibt sich für δ aus Gleichung (2.21) ein Wert von 0. Eine einfache Impuls-Beziehung zwischen den Kugeln j und $j+1$ ist

$$\Delta p_{j+1} = \alpha_j \cdot \Delta p_j, \tag{2.22}$$

dabei ist α_j die *Impuls-Korrelations-Relation* (vgl. [8, S. 240]). Die Gleichung (2.22) lässt sich nur in dem Fall formulieren, wenn es sich um ein lineares Problem handelt, also Bewegungen außerhalb der Stoßrichtung ausgeschlossen sind. Mit diesen Vorüberlegungen ergeben sich

$$\Delta v_1 = -\frac{1}{m_1} \cdot \Delta p_2 \tag{2.23}$$

$$\Delta v_2 = \frac{1-\alpha_2}{m_2} \cdot \Delta p_2 = \frac{1-\alpha_2}{\alpha_2 \cdot m_2} \cdot \Delta p_3 \tag{2.24}$$

$$\Delta v_3 = \frac{1}{m_3} \cdot \Delta p_3 \tag{2.25}$$

als Funktionen für Δv_1, Δv_2 und Δv_3 mit den zuvor aufgestellten Gleichungen (2.12 – 2.14 und 2.22) (vgl. [8, S. 240 f.]). Um den finalen Impuls für Kugel zwei berechnen zu können, benötigt man für die Geschwindigkeiten

$$v_1 = v_1^- - \frac{1}{m_1} \cdot p_2 \tag{2.26}$$

$$v_2 = v_2^- + \frac{1-\alpha_2}{m_2} \cdot p_2, \tag{2.27}$$

wobei die v^- Bezeichnung analog wie oben die Geschwindigkeit vor dem Stoß angibt (vgl. [8, S. 241]). Aus den beiden vorherigen Gleichungen ergibt sich für $v_1 = v_2$

$$p_2^c = \frac{m_1 \cdot m_2 \cdot \left(v_1^- - v_2^-\right)}{(1-\alpha_2) \cdot m_1 + m_2}, \tag{2.28}$$

das ist der maximale Kompressionsimpuls (vgl. [8, S. 241]).

Nun muss die während der kompressions- und entspannungs Phase verrichtete Arbeit mit Hilfe des oben eingeführten *Restitutionskoeffizienten* e_2 für die Kugeln eins und zwei berechnet und nach p_2^f auflöst werden (vgl. [8, S. 241]):

$$e_2^2 \int_0^{p_2^c} (v_1 - v_2)\, \mathrm{d}p_2 + \int_{p_2^c}^{p_2^f} (v_1 - v_2)\, \mathrm{d}p_2 = 0 \tag{2.29}$$

$$\Leftrightarrow p_2^f = \frac{(1+e_2) \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot \left(v_1^- - v_2^-\right)}{(1-\alpha_2) \cdot m_1 + m_2}. \tag{2.30}$$

Für den Stoß zwischen den Kugeln zwei und drei kann entsprechend

$$v_2 = \begin{cases} v_2^- + \dfrac{1-\alpha_2}{\alpha_2 \cdot m_2} \cdot p_3 & \text{falls } 0 \leq p_3 \leq \alpha_2 \cdot p_2^f \\ v_2^* - \dfrac{p_3 - \alpha_2 \cdot p_2^f}{m_2} & \text{falls } p_3 \geq \alpha_2 \cdot p_2^f \text{ nach dem Stoß} \end{cases} \tag{2.31}$$

$$v_2^* = v_2^- + \frac{(1-\alpha_2) \cdot (1+e_2) \cdot m_1 \cdot \left(v_1^- - v_2^-\right)}{(1-\alpha_2) \cdot m_1 + m_2} \tag{2.32}$$

formuliert werden (vgl. [8, S. 242]). Mit

$$v_3 = v_3^- + \frac{1}{m_3} \cdot p_3 \tag{2.33}$$

kann der maximale Kompressionsimpuls zwischen den Kugeln zwei und drei berechnet und analog zu Gleichung (2.30) eine Gleichung p_3^f bestimmt werden. Dabei sei e_3 der *Restitutionskoeffizient* zwischen den Kugeln zwei und drei (vgl. [8, S. 242]):

$$p_3^c = \frac{\left\{\left(v_1^- - v_2^-\right) \cdot (1+e_2) \cdot m_1 + \left(v_2^- - v_3^-\right) \cdot [m_1 \cdot (1-\alpha_2) + m_2]\right\} \cdot m_2 \cdot m_3}{[(1-\alpha_2) \cdot m_1 + m_2] \cdot (m_2 + m_3)} \tag{2.34}$$

$$e_3^2 \int_0^{p_3^c} (v_2 - v_3)\, \mathrm{d}p_3 + \int_{p_3^c}^{p_3^f} (v_2 - v_3)\, \mathrm{d}p_3 = 0 \tag{2.35}$$

$$p_3^f = \left\{ \left(v_1^- - v_2^-\right) \cdot (1+e_2) \cdot m_2 + \left(v_2^- - v_3^-\right) \cdot \left[m_1 \cdot (1-\alpha_2) + m_2\right] \right\} \cdot m_2 \cdot m_3$$
$$\frac{1 + e_3 \cdot \sqrt{1 - \alpha_2 \cdot \left(\frac{m_2}{m_3} + 1\right) \cdot \left[1 + \frac{\left(v_2^- - v_3^-\right)}{\left(v_1^- - v_2^-\right)} \cdot \frac{(1-\alpha_2) \cdot m_1 + m_2}{(1+e_2) \cdot m_1}\right]^{-2}}}{\left[(1-\alpha_2) \cdot m_1 + m_2\right] \cdot (m_2 + m_3)}. \tag{2.36}$$

Damit ergeben sich die drei Geschwindigkeiten v_1^+, v_2^+ und v_3^+ nach dem Stoß für alle drei Kugeln in Abhängigkeit der jeweiligen Massen (vgl. [8, S. 242]):

$$v_1^+ = v_1^- - \frac{1}{m_1} \cdot p_2^f \tag{2.37}$$
$$v_2^+ = v_2^* - \frac{p_3^f - \alpha_2 \cdot p_2^f}{m_2} \tag{2.38}$$
$$v_3^+ = v_3^- + \frac{1}{m_3} \cdot p_3^f. \tag{2.39}$$

Es sei angemerkt, dass bei dieser Lösung sogenannte *Mehrfachstöße* vernachlässigt wurden, da diese die Rechnung erheblich verkomplizieren würden. Des Weiteren lässt sich dieser Ansatz verallgemeinern, um eine Reihe aus n-Kugeln zu beschreiben (vgl. [8, S. 244]).

Die spätere Auswertung der Messdaten, um einen Vergleich zu der hier präsentierten Theorie anstellen zu können, wird mit einem R-Programm weitestgehend automatisiert erfolgen, dazu werden die zuletzt aufgeführten Gleichungen benötigt. Des Weiteren werden als „Hilfsfunktionen“ die Impulsgrößen p_2^f (vgl. Gleichung (2.30)) und p_3^f (vgl. Gleichung (2.36)) sowie die Geschwindigkeitskomponente v_2^* (vgl. Gleichung (2.32)) verwendet. Für die *Restitutionskoeffizienten* (vgl. Gleichung (2.15)) werden eigene Messungen durchgeführt.

2.3. Vergleich des Kugelstoßpendel mit dem „allgemeinen“ Dreikörperproblem

Das Dreikörperproblem gilt allgemein als nicht exakt lösbar, dennoch wurden für verschiedene Problemstellungen Näherungslösungen mit Hilfe von numerischen Computersimulationen gefunden (vgl. [22, S. 972]).

Bei den hier vorgestellten Lösungsansätzen wurde immer angenommen, dass die Massen wie bei einem Kugelstoßpendel eindimensional angeordnet sind und Bewegungen außerhalb der Stoßrichtung experimentell bedingt ausgeschlossen bzw. vernachlässigbar klein sind. Im Allgemeinfall kann diese Annahme nicht gemacht werden. Wenn aber Bewegungen in drei Dimensionen ausgeführt werden, dann können auch Situationen auftreten, in denen drei oder auch mehr Massen direkt, also nicht in einer Kette, zusammenstoßen. Damit ist klar, dass man die Trajektorien dreidimensional berechnen muss. Die Theorie von CEANGA & HURMUZLU wurde jedoch unter der Einschränkung des eindimensionalen Falls entwickelt.

Des Weiteren basieren alle bisher aufgeführten Überlegungen auf Stößen, damit werden Interaktionen durch Gravitation nicht betrachtet. Für das hier experimentell untersuchte Kugelstoßpendel ist diese Einschränkung sinnvoll, da die gegenseitige Anziehung durch Gravitationskräfte vernachlässigbar klein sind. Betrachtet man jedoch beispielsweise das Verhalten des Sonnensystems, so liegt ein Mehrkörpersystem mit unterschiedlichen Massen vor. Es ist offensichtlich, dass die Massen von Asteroiden und Kometen viel kleiner als von Planeten sind (vgl. [13, S. 103]). Aus diesem Grund spricht man hier vom *Eingeschränkten Dreikörperproblem*, wo eine der drei Massen vernachlässigt werden kann, sodass sich näherungsweise Lösungen berechnen lassen (vgl. [13, S. 29]).

3. Experimentelle Untersuchungen zum Kugelstoßpendel

3.1. Aufbau & Durchführung

Im vorherigen Kapitel wurde die Theorie von CEANGA & HURMUZLU vorgestellt, mit der sich die Geschwindigkeiten von Pendelkörpern eines Kugelstoßpendels bestimmen lassen. Um diese Theorie überprüfen zu können, werden experimentell einige Stoßexperimente mit jeweils drei Kugeln durchgeführt. Dabei wird ein vorgefertigtes Impulspendel benutzt, die einzelnen Kugeln haben eine Masse von (67.8 ± 0.1) g bzw. (134.2 ± 0.1) g. Um reproduzierbare Ergebnisse erhalten zu können, wird eine Spule mit Eisenkern als Haltemagneten (s. Abbildung 3.1) verwendet. Die Kugeln werden mit Hilfe von Klebeband an der bifilaren Aufhängung fixiert. Des Weiteren ist darauf zu achten, dass die Kugeln möglichst zentral stoßen, da ansonsten die Ergebnisse verfälscht werden können. Für das spätere Auslesen der Trajektorien befindet sich ein Stück Papier mit einer aufgedruckten Vergleichsstrecke von 10 cm Länge oberhalb der Pendelkörper. Dabei muss dieses Papier so befestigt werden, dass es nicht zu einem Schleifen mit den Pendelkörpern oder deren Aufhängung kommt, da es ansonsten eine signifikante Verfälschung durch Reibung geben würde. Um die Pendelbewegungen gut aufnehmen zu können, ist es wichtig, dass die Kugeln möglichst kontrastreich ausgeleuchtet sind. Es hat sich herausgestellt, dass man zu guten Ergebnissen kommt, wenn die Reflexionspunkte der Schreibtischlampe (vgl. Lampe in Abbildung 3.1) getrackt werden. Das bedeutet, dass der Reflexionspunkt der Lampe von dem Computer-Programm KINOVEA (vgl. [10]) erfasst wird. Aufgrund der Tatsache, dass sich dieser Reflexionspunkt während der Bewegung verschiebt, ist besonders bei großen Auslenkungen mit einem entsprechenden Fehler zu rechnen. Bei einem Abstand von etwa 28 cm zwischen Kugeln und Lampe liegt dieser Fehler maximal bei etwa $1-2$ mm in Abszissenrichtung. In Ordinatenrichtung nimmt der Fehler einen Wert kleiner als einen Millimeter an. Die hier angegeben Werte sind jedoch die maximal möglichen Fehler, die nur bei der größten Auslenkung auftreten können. Sind die

Auslenkungen geringer, werden auch die Fehler kleiner.

Ferner ist es sinnvoll regelmäßig die Justierung der Kugeln zu kontrollieren, um grobe Fehler ausschließen zu können.

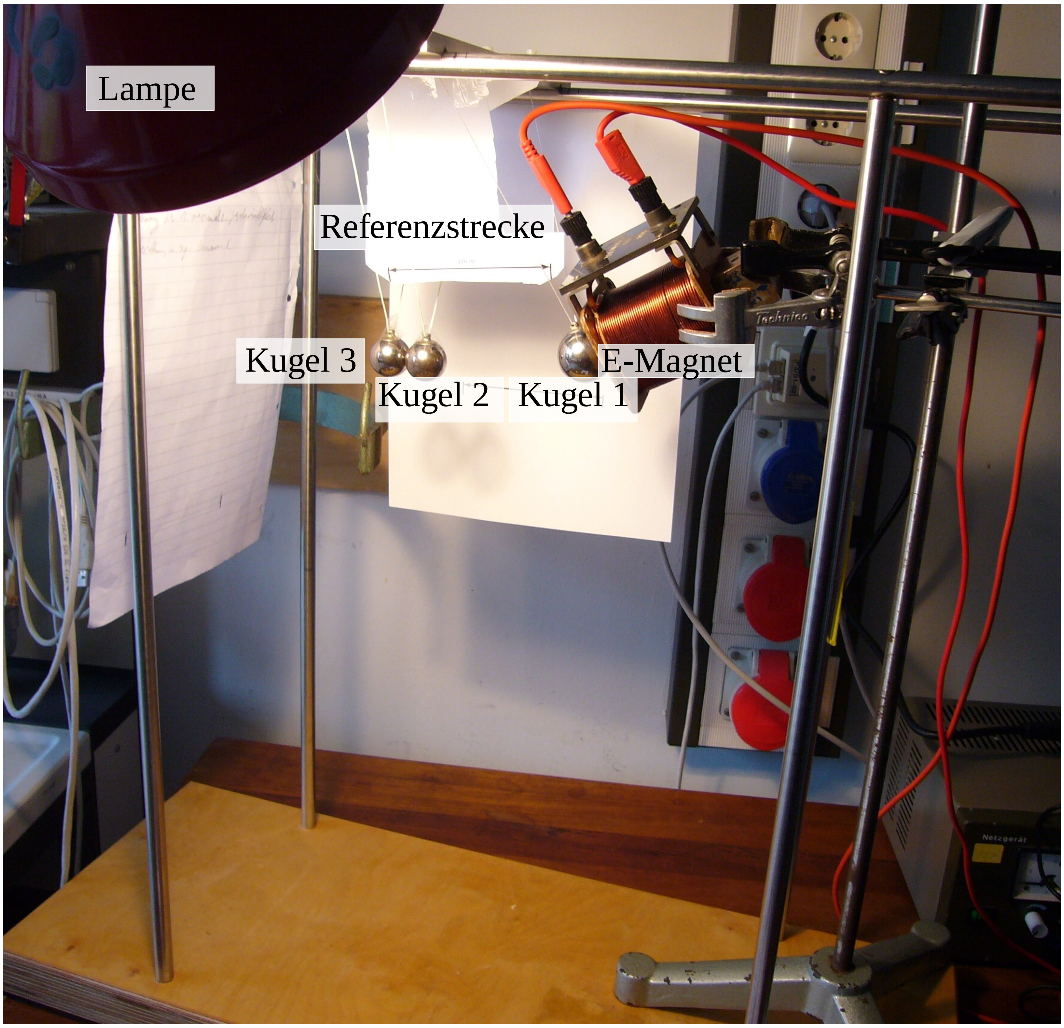


Abbildung 3.1.: Aufbau des Experiments mit Haltevorrichtung und Kugelstoßpendel.

Die Bewegungen der Pendelkörper werden mit Hilfe einer Highspeed-Kamera (DANTEC DYNAMICS, Steuerungssoftware: IDT X VISION SDT, Version 1.10.00) bei einer Framerate von 100 Frames pro Sekunde (Zeit: 4 s bzw. 8 s) aufgezeichnet. Aus den im mpg-Format abgespeicherten Videos werden danach mit Hilfe der Software KINOVEA (Version 0.8.15, 2006 – 2011) die Trajektorien ausgelesen. Dank der Vergleichsstrecke kann KINOVEA automatisch die Trajektorien von Pixel in cm umrechnen. Wichtig ist, die Markierungen der Kugeln sowie der Vergleichsstrecke möglichst genau zu setzen, da hierdurch die Genauigkeit der Messwerte erheblich beeinflusst wird. Um eine grobe Abschätzung zu haben, wie groß dieser Einfluss ist, muss man den Durchmesser des Leuchtpunktes betrachten. Dieser liegt bei ca. (0.25 ± 0.019) cm, der Wert ergibt sich als Mittelwert aus 20 Einzelmessungen[1]. Damit kann der Trackingpunkt maximal um etwa ± 0.13 cm von dem Mittelpunkt abweichen.

Erwähnenswert ist, dass dieses Programm die mpg-Files von X VISION nicht einwandfrei lesen konnte. Es wurden immer die ersten ca. 60 Frames eingelesen[2], daher muss eine Konvertierung der Videos erfolgen, sobald mehr als der erste Stoß analysiert werden sollte. Hierzu wird das Programm KOYOTESOFT FREE VIDEO CONVERTER (vgl. [11]) verwendet. Allerdings wird dabei die Framerate um ein Viertel gesenkt[3]. Das Problem lässt sich jedoch dadurch lösen, dass man die Trajektorien in Abhängigkeit von der Framenummer ausgeben lässt und die tatsächliche Zeit falls benötigt manuell über die Framerate der aufgenommenen Videos berechnet. Um sich den ersten Stoß ansehen zu können werden etwa die ersten 55 Frames benötigt.

Insgesamt wurden drei Serien mit verschiedenen Auslenkungen untersucht (sowie Bestimmung der jeweiligen *Restituktionskoeffizienten*). In allen drei Fällen wurde der Fall mit drei gleichen Massen durchgeführt. Die drei Konfigurationen mit der großen Kugel an 1. 2. bzw. 3. Position[4] wurden nur für die beiden größeren Auslenkungen durchgeführt. Dieses Vorgehen wird als sinnvoll erachtet, da sich für die kleine Auslenkung herausstellte, dass einige der Kugelbewegungen zu klein waren, um zuverlässig gemessen zu werden. Aus diesem Grund ist darauf verzichtet worden bei der geringsten Auslenkung mehr als nur den Fall gleicher Massen zu untersuchen. Dieser soll im Folgenden nur zu Vergleichszwecken aufgeführt werden.

Ein R-Programm (vgl. Manual [18]) berechnet automatisch die für die Anwendung der Theorie von CEANGA & HURMUZLU benötigten Geschwindigkeiten.

[1] Daten vgl. Daten-CD: `durchmesserLeuchte.txt`.

[2] Für die Analyse des ersten Stoßes wäre dieser Umstand nicht störend, da sich alle hierfür benötigten Informationen in diesem Zeitraum abspielen.

[3] Andere Alternativprogramme hatten ähnliche Probleme mit der Framerate und haben zusätzlich die Output Videoqualität noch stärker verschlechtert.

[4] Die 1. Kugel sei diejenige, welche ausgelenkt werde.

Wie an den Gleichungen (2.37) bis (2.39) im Kapitel 2 zu erkennen ist, benötigen man die Geschwindigkeiten vor bzw. nach dem Stoß (vgl. [8, S. 242]):

$$v_1^+ = v_1^- - \frac{1}{m_1} \cdot p_2^f \tag{3.1}$$

$$v_2^+ = v_2^* - \frac{p_3^f - \alpha_2 \cdot p_2^f}{m_2} \tag{3.2}$$

$$v_3^+ = v_3^- + \frac{1}{m_3} \cdot p_3^f. \tag{3.3}$$

Um die „Hilfsfunktionen“[5] v_2^*, p_2^f und p_3^f ausrechnen zu können, werden die Werte für den sogenannten *Restitutionskoeffizienten* benötigt. Dieser ergibt sich aus Gleichung (2.15) (vgl. [8, S. 238])

$$e_2 = \frac{\left(v_2^+ - v_1^+\right)}{v_1^-} \tag{3.4}$$

nach e_2 umgeformt. Dafür muss für jedes verwendete Kugelpaar und jede Auslenkungsstärke eine Serie an Stoßexperimenten durchgeführt werden, um mittels Mittelwertbildung diesen Stoßparameter bestimmen zu können. Als Notation wird wie in Kapitel 2 für den Stoß der ersten- auf die zweite Kugel e_2 und von der zweiten- auf die dritte Kugel e_3 verwendet.

Von jedem Einzelexperiment (Stoßexperimente mit drei bzw. zwei Kugeln für den *Restitutionskoeffizienten*) wurden 20 Videos aufgenommen, um den Standardfehler des Mittelwertes möglichst gering zu halten.

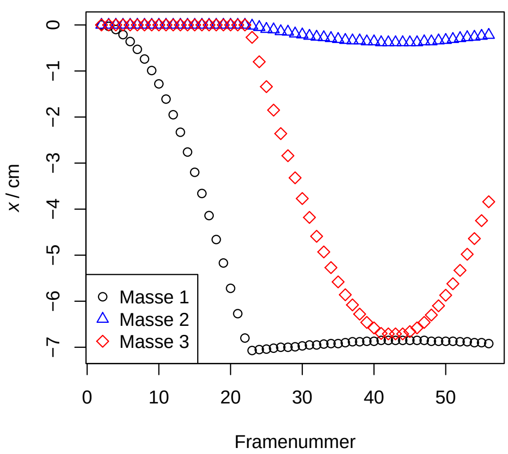
Die Überprüfung der Validität des Aufbaus erfolgt mit Hilfe von 20 Schwingungsexperimenten mit einem einzelnen Fadenpendel bei einer Framerate von 100 Frames pro Sekunde und 8 Sekunden Länge.

3.2. Qualitative Auswertung

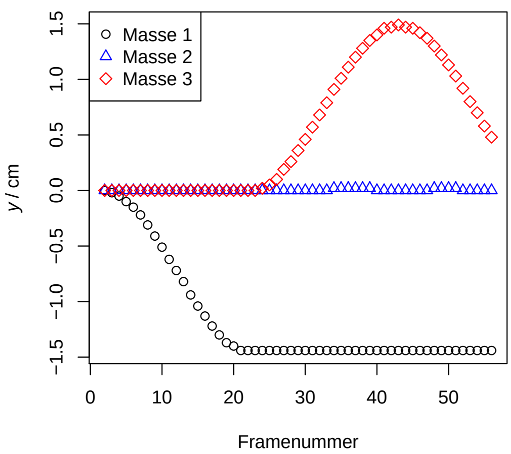
Es sollen hier exemplarisch einige erzeugte Plots für die Kugelstoßexperimente aufgeführt werden. Ferner wird hier kurz und qualitativ auf das Langzeitverhalten der Pendelkörper eingegangen.

[5] Die entsprechenden Gleichungen werden nur in Kapitel 2 aufgeführt und hier wie „BlackBoxen“ behandelt.

In Abbildung 3.2 werden *x-Framenummer*- bzw. *y-Framenummer*-Diagramme aufgeführt. Betrachtet man die Abbildung 3.2(a), so erkennt man sehr gut den Punkt des Einschlages der ersten Masse, da sich diese bei gleichen Massen ein wenig zurück bewegt. Des Weiteren lässt sich auch erkennen, dass sich die Massen zwei und drei in die Richtung des Stoßes bewegen, wobei die maximale Auslenkung der zweiten Kugel viel kleiner als die der dritten ist. Abbildung 3.2(b) zeigt die Bewegung in Ordinatenrichtung, hier ist gut zu erkennen, dass die Auslenkung von Kugel eins vor dem Stoß in etwa so groß ist, wie die maximale Auslenkung der dritten Kugel nach dem Stoß. Wie an Abbildung 3.3 zu sehen ist, ändert sich im Laufe einiger Stoßfolgen das Verhalten der Kugeln nicht signifikant[6]. Dieser Umstand wurde schon bei den theoretischen Überlegungen in Kapitel 2 vermutet, als die Annahme gemacht wurde, Kugel zwei sei annähernd in Ruhe.



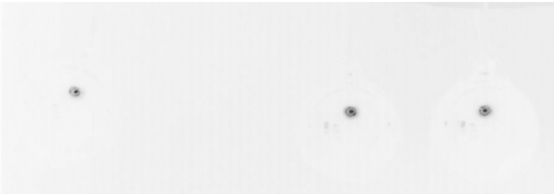
(a) Ein *x-Framenummer*-Diagramm.



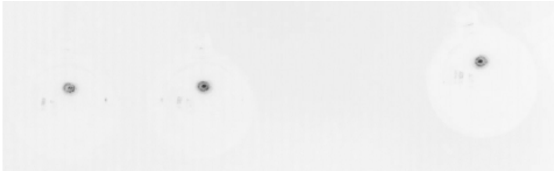
(b) Ein *y-Framenummer*-Diagramm.

Abbildung 3.2.: Plots für große Auslenkung und gleiche Massen.

[6]Einzige Ausnahme bildet die Amplitude, diese verringert sich durch Reibung im Langzeitverhalten.

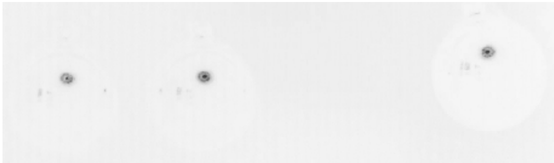


(a) 1. Stoß.



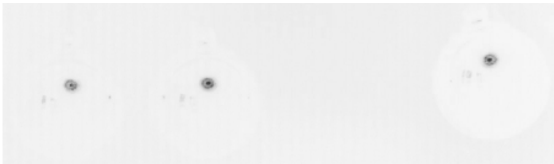
(b) 2. Stoß.

(c) 3. Stoß.

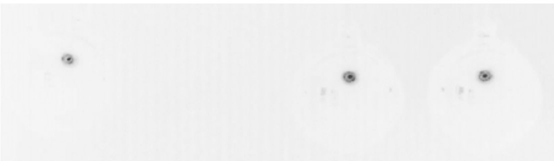


(d) 4. Stoß.

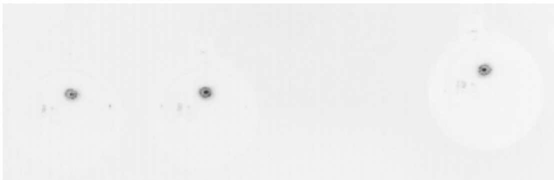
(e) 5. Stoß.



(f) 6. Stoß.



(g) 7. Stoß.

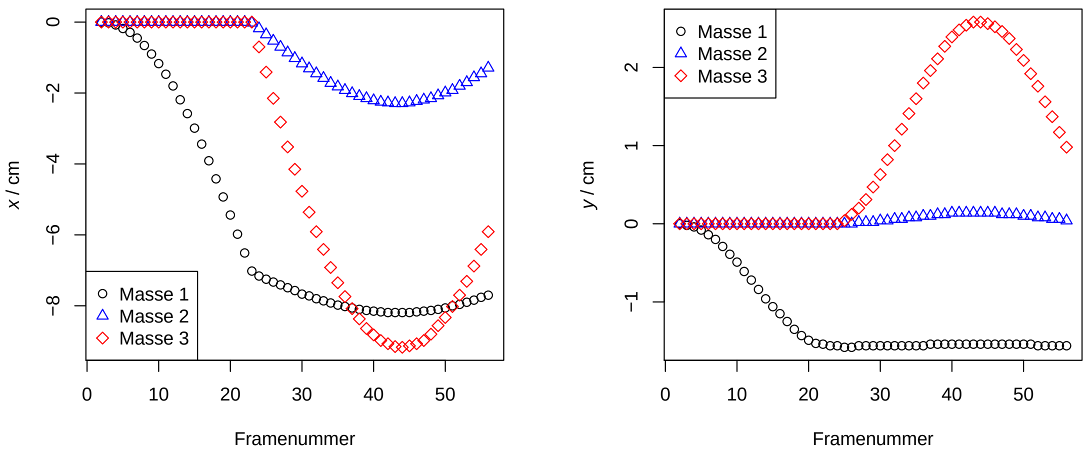


(h) 8. Stoß.

Abbildung 3.3.: Invertierte Screenshots der maximalen Auslenkung nach einem Stoß für gleiche Massen[7].

Im Fall unterschiedlicher Massen bekommt man ein etwas anderes Bild, ist die stoßende Masse eins die große Masse (vgl. Abbildung 3.4(a)), so wird diese nicht zurückgestoßen, sondern bewegt sich mit verringerter Geschwindigkeit weiter, der Stoß ist dabei an der Unstetigkeitsstelle im *x-Framenummer*-Diagramm der ersten Masse zu erkennen. Auch die Massen zwei und drei werden wesentlich stärker ausgelenkt. Wie an Abbildung 3.4(b) zu erkennen ist, zeigt Masse drei eine höhere Auslenkung als Masse eins, dieser Umstand liegt an dem geringeren Gewicht der dritten Kugel.

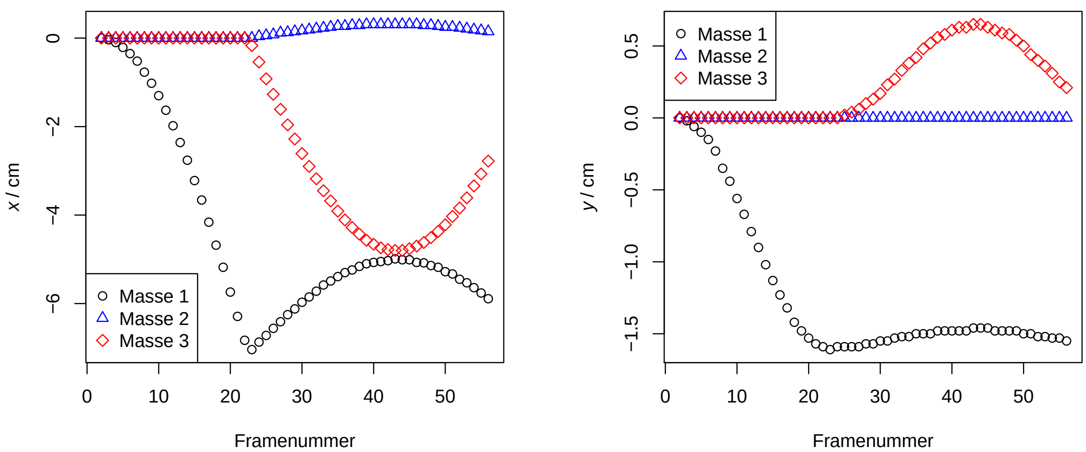
[7] Es werden hier die invertierten Screenshots aufgeführt, da auch auf den Originalen die Kugeln kaum erkennbar sind. Das liegt daran, dass die Blende so eingestellt wird, dass außer der Reflexionspunkte der Schreibtischlampe das Bild möglichst dunkel ist.



(a) Ein *x*-*Framenummer*-Diagramm. (b) Ein *y*-*Framenummer*-Diagramm.

Abbildung 3.4.: Plots für große Auslenkung und große-, kleine- und kleine Massen.

Ist Masse drei die größte, dann bewegt sich auch die zweite Kugel in entgegengesetzter Richtung zur Bewegung der Kugel eins vor dem Einschlag (vgl. Abbildung 3.5(a)). Allerdings ist die Auslenkung hier wieder viel kleiner (vgl. dazu auch Abbildung 3.5(b)).



(a) Ein *x*-*Framenummer*-Diagramm. (b) Ein *y*-*Framenummer*-Diagramm.

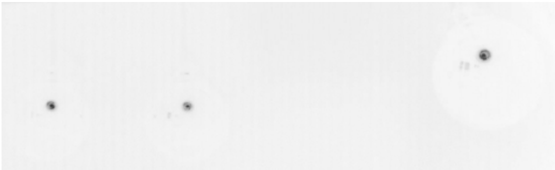
Abbildung 3.5.: Plots für große Auslenkung und kleine-, kleine- und große Massen.

Für das Verhalten in längeren Zeitskalen sieht die Bewegung in diesen „asymmetrischen“ Fällen etwas anders als oben aus. Wie CHAPMAN bzw. SIMANEK (vgl. [1] bzw. [20]) schreiben, bekäme man bei einer Konfiguration, bei der Masse eins (vgl. Abbildung 3.6) bzw. Masse drei (vgl. Abbildung 3.7) schwerer ist, eine Situation, bei der alle drei Massen in Bewegung sind. Ferner käme es zu einer Stoßfolge, die sich durch zyklische Bewegungen auszeichnete. Dieser Umstand lässt sich an den kurzen Stoßfolgen erahnen, da in Abbildung 3.7 (Masse drei groß) zunächst Kugel eins und zwei einen geringen Abstand aufweisen (entsprechend zwei und drei einen großen, vgl. Abbildung 3.7(a)), nach dem nächsten Stoß jedoch die Abstände zwischen allen drei Kugeln annähernd gleich sind. Diesem Stoß folgen drei Stöße, die Ähnlichkeiten zum ersten aufweisen: Zunächst ist der Abstand Kugel eins zu zwei gering (vgl. Abbildung 3.7(c)), danach drehen sich die Verhältnisse um und der Abstand der Kugeln zwei und drei ist klein, während der von Kugel eins zu zwei groß ist (vgl. Abbildung 3.7(d)). Der nachfolgende Stoß (vgl. Abbildung 3.7(e)) führt nun zu einem analogen Aussehen wie diejenigen in Abbildung 3.7(a) und 3.7(c). Diese drei sehr ähnlichen Konfigurationen werden von einem Stoß analog zu Abbildung 3.7(b) gefolgt. Für den Fall, dass die erste Masse groß ist bekommt man eine ähnliche Konfiguration (vgl. Abbildung 3.6), der auffälligste Unterschied ist jedoch, dass hier jeweils zwei Stöße mit geringen Kugelabständen (vgl. Kugeln eins und zwei in Abbildung 3.6(a) und Kugeln zwei und drei in Abbildung 3.6(b)) durch einen mit annähernd gleich großen Abständen gefolgt werden (vgl. Abbildung 3.6(c)).

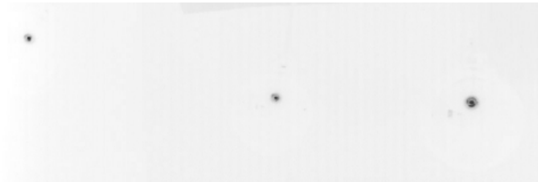
CHAPMAN beschreibt dies als zyklische Bewegungen:

> „After every two (or four) multiple impacts, the two little balls will fly out together with their original amplitude.“ (aus [1, S. 357]).

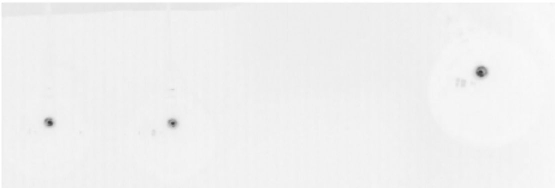
(a) 1. Stoß.



(b) 2. Stoß.

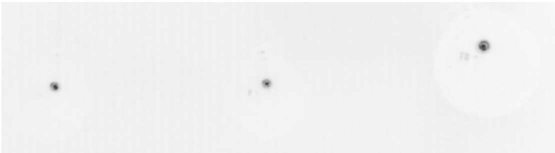


(c) 3. Stoß.



(d) 4. Stoß.

(e) 5. Stoß.



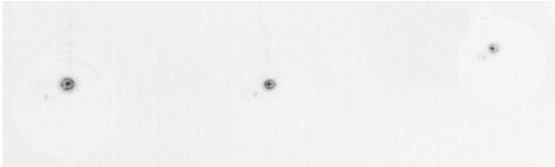
(f) 6. Stoß.

(g) 7. Stoß.

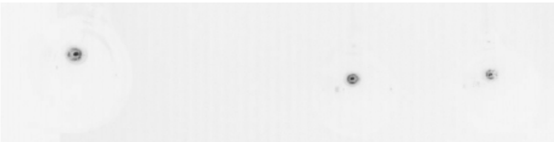
(h) 8. Stoß.

Abbildung 3.6.: Invertierte Screenshots der maximalen Auslenkung nach einem Stoß für große-, kleine- und kleine Massen.

(a) 1. Stoß.



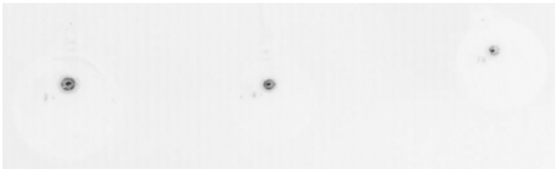
(b) 2. Stoß.



(c) 3. Stoß.

(d) 4. Stoß.

(e) 5. Stoß.



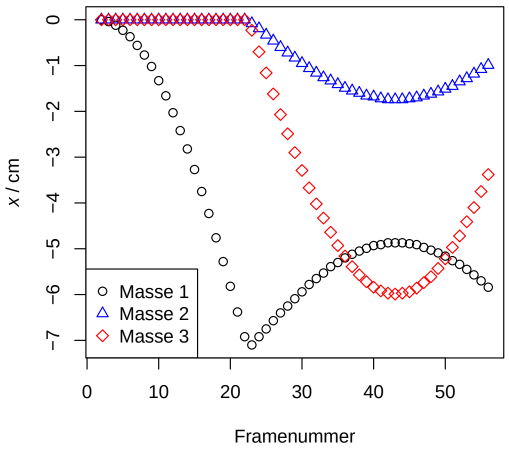
(f) 6. Stoß.

(g) 7. Stoß.

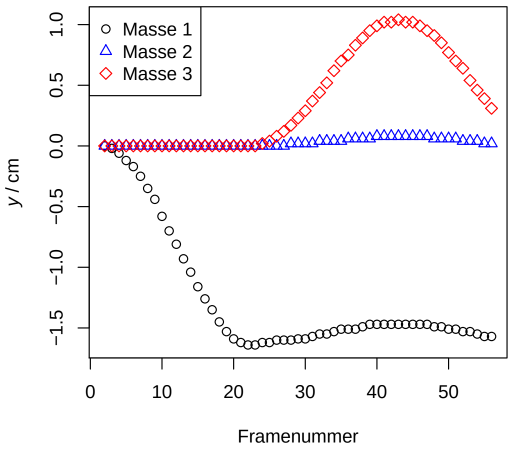
(h) 8. Stoß.

Abbildung 3.7.: Invertierte Screenshots der maximalen Auslenkung nach einem Stoß für kleine-, kleine- und große Massen.

Befindet sich die große Masse zwischen den beiden kleineren Kugeln (vgl. Abbildung 3.8(a)), so bewegt sich die stoßende Kugel nach dem Einschlag mit verminderter Geschwindigkeit zurück, während sich die beiden anderen in Stoßrichtung bewegen. Wie man an Abbildung 3.8(b) erkennen kann ist dabei die Auslenkung von Masse drei größer als von Masse zwei. Für das Verhalten einer längeren Stoßfolge lässt sich eine Fallunterscheidung durchführen (s. Abbildung 3.9). Man erkennt, dass alle ungeraden Stöße (Abbildung 3.9(a), 3.9(c), 3.9(e) und 3.9(g)), sowie alle geraden Stöße (Abbildung 3.9(b), 3.9(d), 3.9(f) und 3.9(h)) eine sehr ähnliche Charakteristik aufweisen. In den ungeraden Fällen ist keine der Kugeln in Ruhe, der Einschlag von Kugel eins verursacht eine Aufspaltung der Kette, wobei sich die Kugeln zwei und drei in Stoßrichtung bewegen. Dabei ist die Auslenkung von Kugel drei am stärksten, während die erste Kugel zurückgestoßen wird und sich somit in die entgegengesetzte Richtung bewegt.

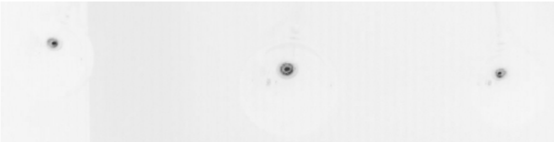


(a) Ein *x-Framenummer*-Diagramm.



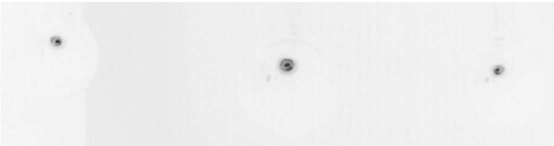
(b) Ein *y-Framenummer*-Diagramm.

Abbildung 3.8.: Plots für große Auslenkung und kleine-, große- und kleine Massen.

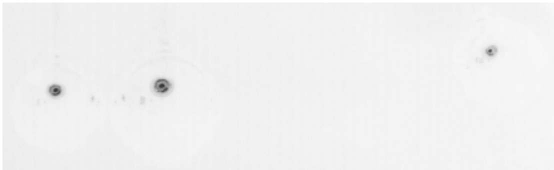


(a) 1. Stoß.

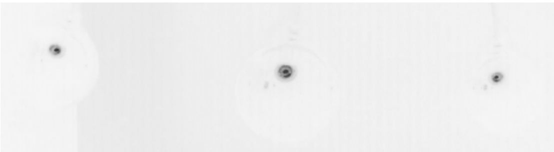
(b) 2. Stoß.



(c) 3. Stoß.

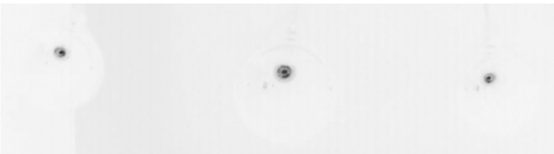


(d) 4. Stoß.

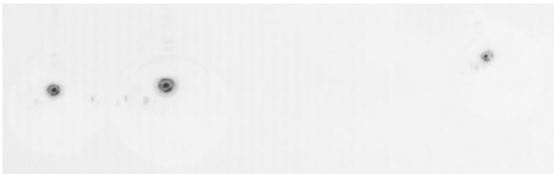


(e) 5. Stoß.

(f) 6. Stoß.



(g) 7. Stoß.



(h) 8. Stoß.

Abbildung 3.9.: Invertierte Screenshots der maximalen Auslenkung nach einem Stoß für kleine-, große- und kleine Massen.

Bestimmt man die Verhältnisse der Abstände für die ungeraden Abstände mit einem Bildbearbeitungsprogramm wie GIMP (vgl. [5]), so erkennt man, dass diese annähernd konstant sind. Sei der maximale Abstand Kugel eins zu Kugel zwei eins, so ergeben sich folgende Verhältnisse:

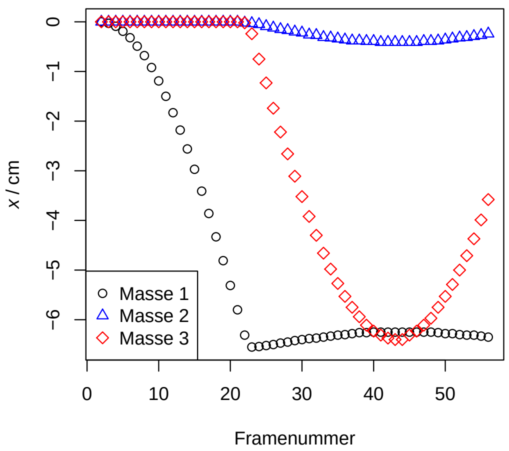
1. Stoß 0.905 : 1

3. Stoß 0.927 : 1

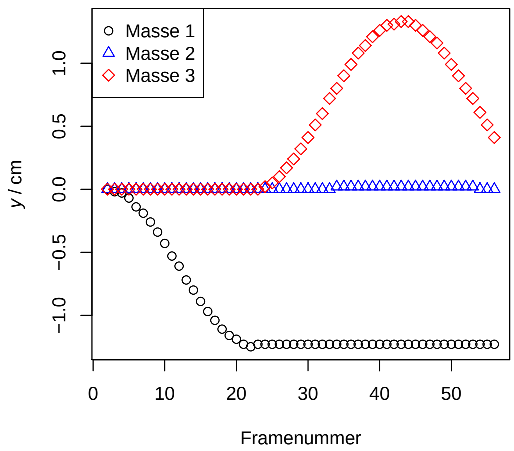
5. Stoß 0.911 : 1

7. Stoß 0.914 : 1

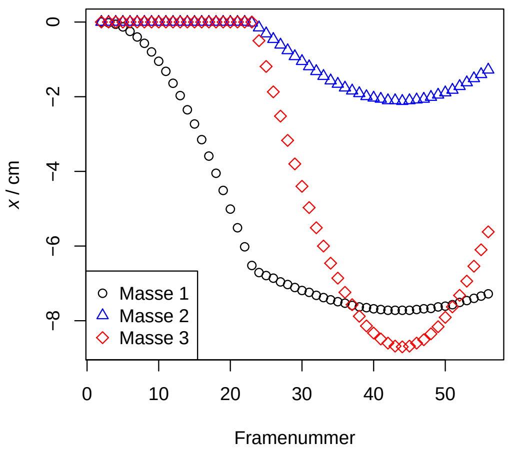
Vergleicht man dies nun mit den geraden Stoßnummern der Folge, so erkennt man, dass das Zusammenstoßen der drei sich in Bewegung befindlichen Kugeln zu einer Bewegung führt, bei der die Kugeln zwei und drei annähernd in Ruhe sind und sich nur die dritte Kugel bewegt. Das führt annähernd wieder zu einer Konfiguration wie vor dem ersten Stoß, sodass sich diese Stoßfolge wiederholt und somit eine Abfolge dieser zwei Fälle ergibt.



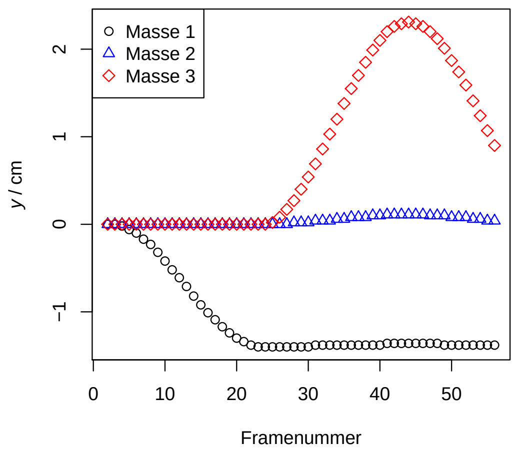
(a) Gleiche Massen, *x-Framenummer*-Diagramm.



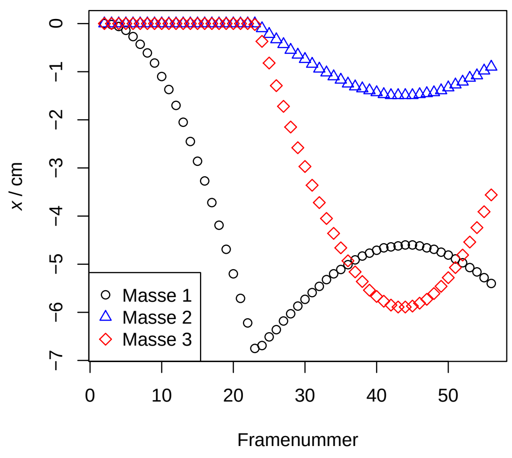
(b) Gleiche Massen, *y-Framenummer*-Diagramm.



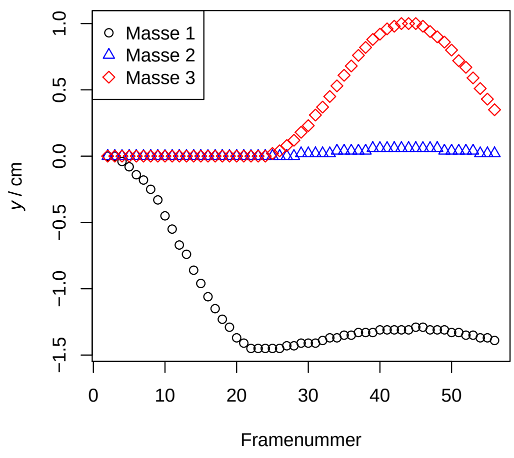
(c) Große-, kleine- und kleine Massen, *x-Framenummer*-Diagramm.



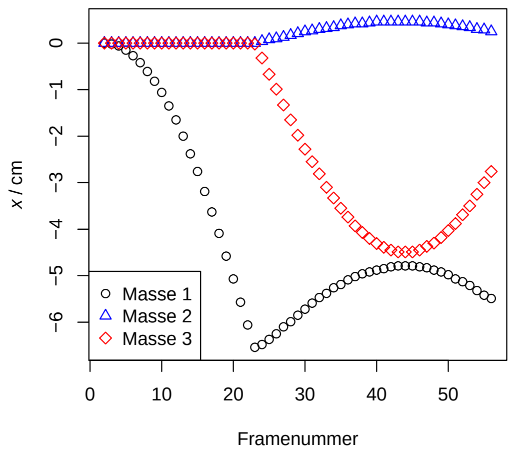
(d) Große-, kleine- und kleine Massen, *y-Framenummer*-Diagramm.



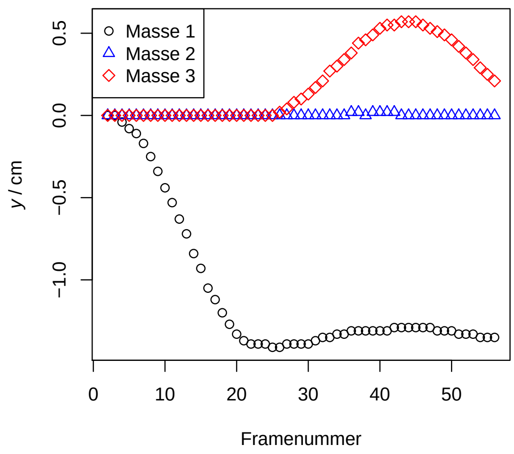
(e) Kleine-, große- und kleine Massen, *x*-*Framenummer*-Diagramm.



(f) Kleine-, große- und kleine Massen, *y*-*Framenummer*-Diagramm.



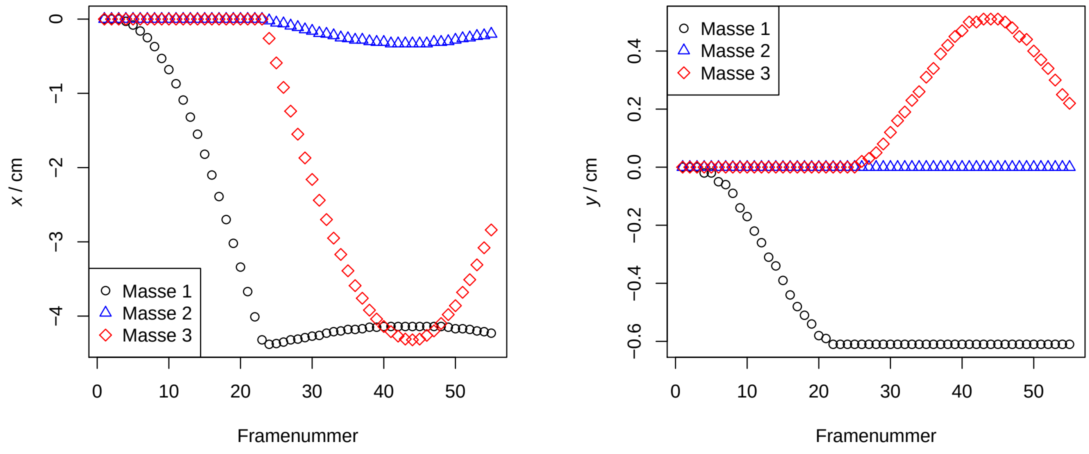
(g) Kleine-, kleine- und große Massen, *x*-*Framenummer*-Diagramm.



(h) Kleine-, kleine- und große Massen, *y*-*Framenummer*-Diagramm.

Abbildung 3.8.: Plots für mittlere Auslenkung[8].

[8]Auf den im Folgenden gezeigten Plots lassen sich die die Bewegungen der Pendelkörper analog wie in Abbildung 3.2 erkennen. Der Unterschied liegt lediglich in der verringerten Amplitude, sie werden daher hier nicht explizit diskutiert, sondern nur aufgeführt.



(a) Gleiche Massen, *x-Framenummer*-Diagramm. (b) Gleiche Massen, *y-Framenummer*-Diagramm.

Abbildung 3.9.: Plots für kleine Auslenkung.

3.3. Quantitative Auswertung

Die Darstellung der Ergebnisse beginnt mit der „Fehleranalyse“. Dazu wurde eine Messserie eines gedämpften Fadenpendels aufgenommen. Die Werte werden mit Hilfe von R und QTIPLOT[9] analysiert. Im Folgenden gibt die log-Ausgabe von QTIPLOT die gefitteten Werte an. Diese Daten werden benötigt, um ein R-Plot gemäß Abbildung 3.10(a) zu erstellen. Wie am Verlauf dieses Graphen zu erkennen ist, führt das Fadenpendel eine durch Luftreibung gedämpfte Sinusschwingung aus. Wie zu erwarten ist, lässt sich dies mit einer Gleichung der Form

$$x(t) = a \cdot \mathrm{e}^{-b \cdot t} \cdot \sin(T \cdot t + \varphi) + f \tag{3.5}$$

beschreiben. Dabei ist T die Periodendauer, b eine Dämpfungskonstante, φ die Phasenverschiebung, t die Zeit und f eine Verschiebung in Ordinatenrichtung. Die Verschiebung um f lässt sich dadurch erklären, dass der Versuch bei der größten Auslenkung beginnt, das Tracking-Programm KINOVEA diesen Punkt jedoch automatisch als Nullpunkt setzt.

[9]Die verwendeten QTIPLOT-files befinden sich auf der Daten-CD: `/Auswertung/qti_-fit/FehlermessungFit.qti` & `/fitsin.fit`.

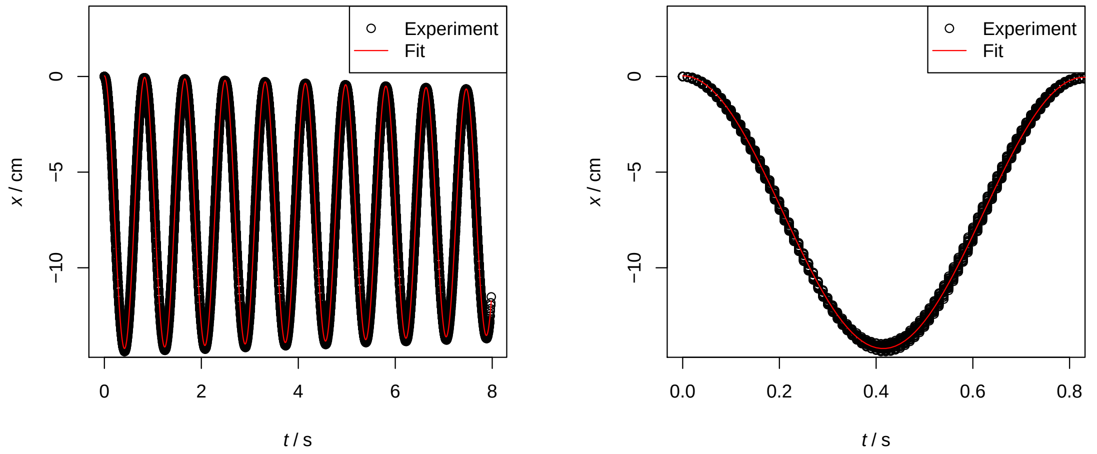
Daher muss das mathematische Modell diesen Gegebenheiten angepasst werden. Die Periodendauer kann mit

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \tag{3.6}$$

berechnet werden (vgl. [2, S. 77]). Bei einer Fadenlänge $l = (16.3 \pm 0.1)$ cm ergibt sich ein zu erwartender Wert von $T = (8.1 \pm 0.2)\ \mathrm{s}^{-1}$. Damit liegt der gefittete Wert für die Periodendauer unterhalb des zu erwartenden Wertes. Eine prozentuale Abweichung von 6.6 % ist zwar höher, als man erwarten würde, jedoch liegt die Auslenkung mit etwa 23 ° deutlich oberhalb von 5 °, sodass Gleichung (3.6) nur eine sehr grobe Näherung angibt.

Log-Ausgabe von QTIPLOT.

```
using function: a*exp(-b*x)*sin(T*x+d)+f
Weighting Method: No weighting
Scaled Levenberg-Marquardt algorithm with tolerance = 0,0001
From x = 0,000000000000000e+00 to x = 7,980000000000000e+00
a = -7,150165148353363e+00 +/- 3,090933271970646e-03
b = 1,355258509607770e-02 +/- 9,680586868301810e-05
d = 4,710371782513360e+00 +/- 4,381848626102997e-04
f = -7,112804425708992e+00 +/- 1,075267097109793e-03
T = 7,576324235049420e+00 +/- 9,884938436000650e-05
---------------------------
Chi^2/doF = 1,822623222658011e-02
R^2 = 0,999213324056714
```



(a) Vollständiger Fit-Plot. (b) 1. Periode des Fits aus Abbildung 3.10(a).

Abbildung 3.10.: Darstellung des Plots mit Fit gemäß den oben aufgeführten Fitparametern.

Wie man an der log-Ausgabe von QTIPLOT erkennen kann, sind die Fehler der einzelnen Fitparameter sehr klein. Des Weiteren ist der Korrelationskoeffizient R^2 nahe eins, sodass man auf eine sehr hohe Güte der gewählten Messmethode schließen kann. Dies lässt sich durch Abbildung 3.10(b) bestätigen, da zu erkennen ist, dass die Streuung der Messpunkte sehr gering ist. Wie schon in der Versuchsdurchführung beschrieben, ist es wichtig darauf zu achten, dass die zu trackenden Objekte möglichst kontrastreich ausgeleuchtet sind. Die gewählte Methode die Spiegelung der Lampe auf den Metalloberflächen der Kugeln als Trackingpunkt zu wählen lässt sich hiermit rechtfertigen. Wie schon oben beschrieben, kommt es allerdings zu einem Fehler, da der Trackingpunkt sich bei Bewegung der Kugel ändert. Der Fehler in Abszissenrichtung liegt dabei maximal bei etwa $1-2$ mm. In Ordinatenrichtung ist der Fehler jedoch wesentlich geringer. Wie schon oben beschrieben sind das die maximal möglichen Fehler, welche nur bei sehr großen Kugelauslenkungen auftreten, sind die Auslenkungen kleiner, werden auch die Fehler kleiner. Da alle quantitativen Auswertung auf den Ordinatenwerten basieren, können diese Fehler vernachlässigt werden. Eine weitere mögliche Fehlerquelle liegt in der manuellen Übergabe der Referenzlänge mit Hilfe eines Zeigers an KINOVEA. Die Genauigkeit dieser Übergabe wirkt sich jedoch direkt auf die Genauigkeit der ausgegeben Werte aus, da sie als Umrechnungsfaktor von Pixel zu cm benutzt wird. Dies dürfte eine der größten

Fehlerquellen sein. Als Abschätzung der Größenordnung kann dafür der Durchmesser der Reflexionspunkte angesehen werden, er liegt bei etwa (0.25 ± 0.019) cm (s. oben). In den konkreten Stoßexperimenten muss als weitere „große“ Fehlerquelle die Tatsache angesehen werden, dass die Kugeln für einen idealen Stoß exakt zentrale Stöße ausführen müssen. In einem realen Experiment wird es immer gewisse Abweichungen geben, es wurde jedoch versucht durch fixieren der Kugeln und regelmäßiges nachjustieren diesen Fehler so gering wie möglich zu halten.

Als nächstes werden die von R berechneten Werte tabellarisch angegeben. In Tabelle 3.1 befinden sich die Werte der *Restitutionskoeffizienten*, es werden intern Namen vergeben (1. Spalte), anhand derer eine interne Verknüpfung zu den Variablen erfolgt.

Name	m_1 / g	m_2 / g	Restitutionskoeffizienten (e)	σ_e
aa	67.8	67.9	0.971	0.016
ab	67.9	67.8	1.000	0.000
ba	134.2	67.8	0.755	0.002
bb	67.8	67.9	0.963	0.013
bc	67.8	134.2	0.483	0.003
bd	134.2	67.9	0.767	0.002
be	67.8	67.9	0.963	0.013
bf	67.8	134.2	0.479	0.003
ca	134.2	67.9	0.752	0.002
cb	67.9	67.8	0.959	0.013
cc	67.2	134.2	0.475	0.003
cd	67.8	67.9	0.959	0.013
ce	67.9	134.2	0.481	0.004
cf	67.8	67.9	0.941	0.012

Tabelle 3.1.: Mittelwerte und deren Standardabweichungen der *Restitutionskoeffizienten*.

Die experimentellen Werte befinden sich in Tabelle 3.2. In Spalte eins wird der Name der Messung aufgeführt, der erste Buchstabe gibt dabei die „Serie" an. Die Messungen (erster Buchstabe) a, b und c geben die Auslenkungsstärke an, welche zunimmt. Der zweite Buchstabe steht für die Massenverhältnisse. Eine Zuordnung Namen zu Massen erfolgt in Tabelle 3.3. Die auf dieser Grundlage berechneten theoretischen Werte nach CEANGA & HURMUZLU werden in Tabelle 3.4 aufgeführt. Für die theoretisch bestimmten Werte werden die zu erwartenden Größtfehler in der jeweils folgenden Spalte angegeben[10]. Das *Impuls-Korrelationsverhältnis* α_2 wird als „Fitparameter" angenommen.

Name	$v_1^- / \frac{cm}{s}$	$\sigma_{v_1^-} / \frac{cm}{s}$	$v_1^+ / \frac{cm}{s}$	$\sigma_{v_1^+} / \frac{cm}{s}$	$v_2^+ / \frac{cm}{s}$	$\sigma_{v_2^+} / \frac{cm}{s}$	$v_3^+ / \frac{cm}{s}$	$\sigma_{v_3^+} / \frac{cm}{s}$
ad	*3.41*	*0.00*	*0.00*	*0.00*	*0.00*	*0.00*	*3.13*	*0.00*
ba	5.23	0.00	0.61	0.01	2.09	0.03	6.57	0.01
bb	5.31	0.00	-1.72	0.01	1.08	0.00	4.45	0.01
bc	5.30	0.01	-1.41	0.02	0.63	0.00	3.37	0.00
bd	4.93	0.00	-0.35	0.07	0.63	0.00	5.12	0.01
ca	5.56	0.01	0.82	0.03	1.62	0.02	7.12	0.01
cb	5.67	0.01	-1.93	0.02	1.25	0.00	4.61	0.01
cc	5.64	0.01	-1.57	0.02	0.60	0.03	3.58	0.00
cd	5.31	0.00	-0.54	0.05	0.63	0.00	5.42	0.01

Tabelle 3.2.: Mittelwerte der einzelnen experimentell bestimmten Geschwindigkeiten und deren Standardfehler für vor (+) - und nach (-) dem Stoß.

[10]Die mit dem CAS GNU MAXIMA (vgl. [17]) bestimmten Ableitungen für die Größtfehlerfortpflanzung werden in Kapitel A aufgeführt.

Name	m_1 / g	m_2 / g	m_3 / g
ad	67.8	67.9	67.8
ba	134.2	67.8	67.9
bb	67.8	134.2	67.9
bc	67.8	67.9	134.2
bd	67.8	67.9	67.8
ca	134.2	67.9	67.8
cb	67.8	134.2	67.9
cc	67.8	67.9	134.2
cd	67.8	67.9	67.8

Tabelle 3.3.: Massen der einzelnen Kugeln, Namen sind identisch mit Tabelle 3.2.

Name	v_1^+ / $\frac{\text{cm}}{\text{s}}$	Δv_1^+ / $\frac{\text{cm}}{\text{s}}$	α_2	v_2^+ / $\frac{\text{cm}}{\text{s}}$	Δv_2^+ / $\frac{\text{cm}}{\text{s}}$	α_2	v_3^+ / $\frac{\text{cm}}{\text{s}}$	Δv_3^+ / $\frac{\text{cm}}{\text{s}}$	α_2
ad	*0.00*	*0.03*	*0.03*	*0.00*	*0.00*	*0.00*	*3.13*	*0.03*	*0.36*
ba	0.61	0.01	0.50	2.09	0.04	0.37	6.14	0.04	0.24
bb	-1.72	0.02	0.76	1.08	0.01	0.00	3.10	0.02	0.00
bc	-1.41	0.05	0.45	0.63	0.02	0.31	2.89	0.03	0.54
bd	-0.35	0.04	0.17	0.63	0.04	0.19	4.76	0.07	0.02
ca	0.82	0.01	0.47	1.62	0.05	0.30	6.51	0.06	0.24
cb	-1.93	0.02	0.80	1.25	0.01	0.06	3.27	0.02	0.00
cc	-1.57	0.06	0.47	0.60	0.02	0.28	3.07	0.03	0.54
cd	-0.54	0.05	0.24	0.63	0.04	0.17	5.05	0.07	0.02

Tabelle 3.4.: Theoretische Geschwindigkeitswerte mit Größtfehlern nach dem Stoß und Werte des „Fit-Parameters“ α_2.

Name	$A(v_1^+)$	$pA(v_1^+)$	$A(v_2^+)$	$pA(v_2^+)$	$A(v_3^+)$	$pA(v_3^+)$
ad	*0.00082*	*100.000*	*0.00247*	*100.000*	*0.00004*	*0.001*
ba	0.00208	0.340	0.00065	0.031	0.42731	6.956
bb	0.00074	0.043	0.00049	0.045	1.34938	43.520
bc	0.00033	0.023	0.00052	0.082	0.48316	16.736
bd	0.00018	0.052	0.00112	0.178	0.35920	7.545
ca	0.00035	0.043	0.00194	0.120	0.60780	9.333
cb	0.00094	0.049	0.00062	0.050	1.34412	41.156
cc	0.00212	0.135	0.00034	0.057	0.51143	16.667
cd	0.00087	0.161	0.00058	0.092	0.37259	7.382

Tabelle 3.5.: Absolute- A und prozentuale pA Abweichung der experimentellen- (Tabelle 3.2) und theoretischen Werte (Tabelle 3.4).

Wie zu erkennen ist, weisen die experimentell bestimmten Geschwindigkeiten der Kugeln relativ geringe Standardabweichungen auf (vgl. Tabelle 3.2). Vergleicht man nun die experimentell bestimmten Werte der einzelnen Geschwindigkeiten nach dem Stoß mit denen, die nach der Theorie von CEANGA & HURMUZLU berechnet wurden, so erkennt man, dass sich die Geschwindigkeiten der ersten Kugel sehr ähnlich sind (vgl. Tabelle 3.2, Tabelle 3.4 und absolute- / prozentuale Abweichungen Tabelle 3.5, hellblau markierte Spalten). Bei der zweiten Kugel sieht das etwas schlechter aus, da hier größere Abweichungen auftreten (vgl. besagte Tabellen, hellgrau markierte Spalten). Die Abweichungen bei der jeweils dritten Kugel hingegen sind ziemlich groß, sodass hier von groben Fehlern ausgegangen werden muss (vgl. besagte Tabellen, hellrot markierte Spalten). Betrachtet man die Abweichungen für die dritte Kugel genauer, so erkennt man, dass für gleiche Massen relativ kleine Abweichungen auftreten (kleiner 10 %), selbiges kann man für den Fall feststellen, dass die stoßende Kugel die große Masse ist. Auffällig ist, dass in den beiden anderen Fällen sehr große Abweichungen auftreten, das tritt insbesondere dann auf, wenn sich die schwere Kugel an Position zwei befindet. Dort liegt die Abweichung bei mehr als 40 %. Vergleicht man diese Ergebnisse mit den Experimenten zu den *Restitutionskoeffizienten*, so ist auffällig, dass dieser besonders klein ist, wenn die zweite Kugel schwerer als die erste ist (vgl. Tabelle 3.1). Im Falle gleicher Massen nimmt der *Restitutionskoeffizient* einen Wert nahe eins an. Ist die stoßende Kugel schwerer, so ist der *Restitutionskoeffizient* kleiner als im Falle gleicher Massen, jedoch größer wie für Stöße einer kleinen- gegen eine große Kugel. Wie schon in Kapitel 2 beschrieben bedeutet das, dass bei gleichen Massen der Stoß elastischer als im Falle unterschiedlicher Massen ist, da der *Restitutionskoeffizient* ein Maß für die Elastizität eines Stoßes ist. Damit sieht es so aus, als würden die Abweichungen zwischen Theorie und Experiment mit dem *Restitutionskoeffizienten* und damit mit der Elastizität der Stöße zusammenhängen. Die Abweichungen für den Fall, dass Kugel drei die schwerere ist, weist in beiden Fällen (bc und cc in Tabelle 3.5) einen größeren Wert auf als wenn die schwere Masse die erste ist (ba und ca). Befindet sich die schwere Kugel zwischen zwei leichteren Kugeln (bb und cb), so kommt zu zwei Stößen, die nicht ideal elastisch sind. Die großen Abweichungen in der ersten Zeile (Bezeichnung ad, kursiv) hingegen liegen daran, dass die Auslenkung zu klein gewählt wurde und die Bewegungen der ersten Kugel nach dem Stoß bzw. der zweiten Kugel nicht mehr erfasst werden kann. Wie schon oben beschrieben ist das Experiment bei dieser geringen Auslenkung abgebrochen worden.

Die These, dass hier ein Problem bei der Berechnung der theoretischen Geschwindigkeiten auftritt lässt sich auch durch den Vergleich der Fitparameter α_2 in Tabelle 3.4 der einzelnen Kugeln erhärten. Es ist zu sehen, dass die Werte für die erste-, zweite- und dritte Kugel in allen Fällen in erheblichem Maße voneinander abweichen. Diese Abweichungen lassen sich nicht mit den Messfehlern der Größen erklären, die die Grundlage der Rechnung darstellen. Vielmehr ist davon auszugehen, dass es einen konzeptionellen Fehler bei der Anwendung der Theorie gibt, wie CEANGA & HURMUZLU schreiben, muss im Falle sogenannter „Multiplen Stöße“ eine Fallunterscheidung bei der Berechnung der Geschwindigkeit erfolgen (vgl. [8, S. 244]). Dennoch ist zu erkennen, das es nicht völlig unmöglich ist die Geschwindigkeiten zu berechnen. Der in dieser Arbeit implementierte Algorithmus ist immerhin in der Lage die Geschwindigkeit der ersten- und zweiten Kugel nach dem Stoß zuverlässig zu berechnen.

4. Fazit

Abschließend lässt sich sagen, dass es gelungen ist, einen Versuchsaufbau sowie eine Messmethode zu entwickeln, mit der man die Trajektorien eines Kugelstoßpendels bestimmen kann. Darauf aufbauend ist ein weitestgehend automatisiertes R-Programm entstanden, dass die Kugelgeschwindigkeiten auswertet. In Anschlussarbeiten wäre es denkbar diesen Algorithmus derart zu erweitern, dass er beliebig viele Stöße verarbeiten kann. Dazu müsste die Betrachtung von verschieden Intervallen, wie sie für die Bestimmung der Geschwindigkeiten der ersten Kugel begonnen wurde fortgesetzt und entsprechend angepasst werden. Des Weiteren wurde versucht die theoretischen Ansätze von CEANGA & HURMUZLU in R-Quellcode zu übersetzen, um theoretische Werte für Kugelgeschwindigkeiten berechnen zu können. Dieses Vorhaben ist jedoch nur teilweise gelungen, da gerade bei den jeweils dritten Kugeln erhebliche Abweichungen zu den experimentellen Werten zu erkennen sind. Auch hier könnte eine Anschlussarbeit ansetzen und die Theorie vollständig anzuwenden und zu bewerten. Dennoch konnte gezeigt werden, dass es prinzipiell möglich ist die Geschwindigkeiten der Kugeln zu berechnen.

All diese Untersuchungen basieren jedoch auf der Annahme, dass die Bewegungen auf ein eindimensionales Problem reduziert werden. Damit einher geht, dass es kein direktes Stoßen der Kugeln gibt. Viel mehr muss sich der Impuls durch die Kette ausbreiten. Da dies nicht instantan geschieht, kann man den Stoß stark vereinfacht in eine Folge aus verschiedenen Stößen zerlegt denken. Damit ist jedoch nicht mehr der allgemein denkbare Fall gegeben.

Wie aufgezeigt wurde sind Einschränkungen notwendig, um das Problem zu lösen. Für allgemeinere Fälle lassen sich „Lösungen“ nur mit Hilfe von Computersimulationen darstellen.

ANHANG

A. Fehlerfortpflanzung des Ansatzes nach CEANGA & HURMUZLU

Im folgenden werden mit Hilfe des CAS GNU MAXIMA (vgl. [17])[1] die für die Fehlerfortpflanzung benötigen Gleichungen bestimmt.

Gleichungen für p_2^f (s. Gleichung (2.30)):

```
(%i1) diff(((1+e2)*m1*m2*(v1m-v2m))/((1-alpha23)*m1+m2),e2,1);
```

$$(\%o1)\ \frac{\partial p_2^f}{\partial e_2} = \frac{m_1\, m_2\, \left(v_1^- - v_2^-\right)}{m_2 + (1-\alpha_{2,3})\, m_1} \tag{A.1}$$

```
(%i2) diff(((1+e2)*m1*m2*(v1m-v2m))/((1-alpha23)*m1+m2),m1,1);
```

$$(\%o2)\ \frac{\partial p_2^f}{\partial m_1} = \frac{(e_2+1)\, m_2\, \left(v_1^- - v_2^-\right)}{m_2 + (1-\alpha_{2,3})\, m_1} - \frac{(1-\alpha_{2,3})\,(e_2+1)\, m_1\, m_2\, \left(v_1^- - v_2^-\right)}{\left(m_2 + (1-\alpha_{2,3})\, m_1\right)^2} \tag{A.2}$$

```
(%i3) diff(((1+e2)*m1*m2*(v1m-v2m))/((1-alpha23)*m1+m2),m2,1);
```

$$(\%o3)\ \frac{\partial p_2^f}{\partial m_2} = \frac{(e_2+1)\, m_1\, \left(v_1^- - v_2^-\right)}{m_2 + (1-\alpha_{2,3})\, m_1} - \frac{(e_2+1)\, m_1\, m_2\, \left(v_1^- - v_2^-\right)}{\left(m_2 + (1-\alpha_{2,3})\, m_1\right)^2} \tag{A.3}$$

[1] Auf der beigefügten Daten-CD ist im default-Ordner die Datei `casBerechnungGroesstfehler1.mac` zu finden.

```
(%i4) diff(((1+e2)*m1*m2*(v1m-v2m))/((1-alpha23)*m1+m2),v1m,1);
```

$$(\%o4)\ \frac{\partial p_2^f}{\partial v_1^-} = \frac{(e_2+1)\, m_1\, m_2}{m_2 + (1-\alpha_{2,3})\, m_1} \tag{A.4}$$

```
(%i5) diff(((1+e2)*m1*m2*(v1m-v2m))/((1-alpha23)*m1+m2),v2m,1);
```

$$(\%o5)\ \frac{\partial p_2^f}{\partial v_2^-} = -\frac{(e_2+1)\, m_1\, m_2}{m_2 + (1-\alpha_{2,3})\, m_1} \tag{A.5}$$

Gleichungen für v_2^* (s. Gleichung (2.32)):

```
(%i6) diff(v2m+((1-alpha23)*(1+e2)*m1*(v1m-v2m))
/((1-alpha23)*m1+m2),e2,1);
```

$$(\%o6)\ \frac{\partial v_2^*}{\partial e_2} = \frac{(1-\alpha_{2,3})\, m_1\, \left(v_1^- - v_2^-\right)}{m_2 + (1-\alpha_{2,3})\, m_1} \tag{A.6}$$

```
(%i7) diff(v2m+((1-alpha23)*(1+e2)*m1*(v1m-v2m))
/((1-alpha23)*m1+m2),m1,1);
```

$$(\%o7)\ \frac{\partial v_2^*}{\partial m_1} = \frac{(1-\alpha_{2,3})\, (e_2+1)\, \left(v_1^- - v_2^-\right)}{m_2 + (1-\alpha_{2,3})\, m_1} - \frac{(1-\alpha_{2,3})^2\, (e_2+1)\, m_1\, \left(v_1^- - v_2^-\right)}{\left(m_2 + (1-\alpha_{2,3})\, m_1\right)^2} \tag{A.7}$$

```
(%i8) diff(v2m+((1-alpha23)*(1+e2)*m1*(v1m-v2m))
/((1-alpha23)*m1+m2),m2,1);
```

$$(\%o8)\ \frac{\partial v_2^*}{\partial m_2} = -\frac{(1-\alpha_{2,3})\, (e_2+1)\, m_1\, \left(v_1^- - v_2^-\right)}{\left(m_2 + (1-\alpha_{2,3})\, m_1\right)^2} \tag{A.8}$$

```
(%i9) diff(v2m+((1-alpha23)*(1+e2)*m1*(v1m-v2m))
/((1-alpha23)*m1+m2),v1m,1);
```

$$(\%o9)\ \frac{\partial v_2^*}{\partial v_1^-} = \frac{(1-\alpha_{2,3})\,(e_2+1)\,m_1}{m_2+(1-\alpha_{2,3})\,m_1} \tag{A.9}$$

```
(%i10) diff(v2m+((1-alpha23)*(1+e2)*m1*(v1m-v2m))
/((1-alpha23)*m1+m2),v2m,1);
```

$$(\%o10)\ \frac{\partial v_2^*}{\partial v_2^-} = 1-\frac{(1-\alpha_{2,3})\,(e_2+1)\,m_1}{m_2+(1-\alpha_{2,3})\,m_1} \tag{A.10}$$

Gleichungen für p_3^f (s. Gleichung (2.36)):

```
(%i11) diff(((v1m-v2m)*(1+e2)*m1+(v2m-v3m)*(m1*(1-alpha23)+m2))
*m2*m3*(1+e3*sqrt(1-alpha23*(m2/m3+1)*(1+(v2m-v3m)/(v1m-v2m)
*((1-alpha23)*m1+m2)/((1+e2)*m1))^(-2)))
/(((1-alpha23)*m1+m2)*(m2+m3)),e2,1);
```

$$(\%o11)\ \frac{\partial p_3^f}{\partial e_2} = \frac{m_1\,m_2\,m_3\,\left(v_1^- - v_2^-\right)\left(e_3\sqrt{1-\frac{\alpha_{2,3}\left(\frac{m_2}{m_3}+1\right)}{\left(\frac{\left(m_2+\left(1-\alpha_{2,3}\right)m_1\right)\left(v_2^- - v_3^-\right)}{(e_2+1)\,m_1\left(v_1^- - v_2^-\right)}+1\right)^2}}+1\right)}{(m_2+(1-\alpha_{2,3})\,m_1)\,(m_3+m_2)} - \frac{\alpha_{2,3}\,e_3\,m_2\left(\frac{m_2}{m_3}+1\right)m_3\,\xi_1\left(v_2^- - v_3^-\right)}{(e_2+1)^2\,m_1\,(m_3+m_2)\left(v_1^- - v_2^-\right)\xi_2} \tag{A.11}$$

$$\xi_1 = \left((m_2+(1-\alpha_{2,3})\,m_1)\left(v_2^- - v_3^-\right)+(e_2+1)\,m_1\left(v_1^- - v_2^-\right)\right)$$

$$\xi_2 = \sqrt{1-\frac{\alpha_{2,3}\left(\frac{m_2}{m_3}+1\right)}{\left(\frac{\left(m_2+\left(1-\alpha_{2,3}\right)m_1\right)\left(v_2^- - v_3^-\right)}{(e_2+1)\,m_1\left(v_1^- - v_2^-\right)}+1\right)^2}}\left(\frac{(m_2+(1-\alpha_{2,3})\,m_1)\left(v_2^- - v_3^-\right)}{(e_2+1)\,m_1\left(v_1^- - v_2^-\right)}+1\right)^3$$

```
(%i12) diff(((v1m-v2m)*(1+e2)*m1+(v2m-v3m)*(m1*(1-alpha23)+m2))
*m2*m3*(1+e3*sqrt(1-alpha23*(m2/m3+1)*(1+(v2m-v3m)/(v1m-v2m)
```

```
*((1-alpha23)*m1+m2)/((1+e2)*m1))^(-2)))
/(((1-alpha23)*m1+m2)*(m2+m3)),e3,1);
```

$$(\%o12)\ \frac{\partial p_3^f}{\partial e_3} = \frac{m_2\, m_3 \sqrt{1 - \frac{\alpha_{2,3}\left(\frac{m_2}{m_3}+1\right)}{\left(\frac{(m_2+(1-\alpha_{2,3})\, m_1)\left(v_2^- - v_3^-\right)}{(e_2+1)\, m_1\left(v_1^- - v_2^-\right)}+1\right)^2}}\,\xi_1}{(m_2+(1-\alpha_{2,3})\, m_1)\,(m_3+m_2)} \tag{A.12}$$

$$\xi_1 = \left((m_2+(1-\alpha_{2,3})\, m_1)\left(v_2^- - v_3^-\right) + (e_2+1)\, m_1\left(v_1^- - v_2^-\right)\right)$$

```
(%i13) diff(((v1m-v2m)*(1+e2)*m1+(v2m-v3m)*(m1*(1-alpha23)+m2))
*m2*m3*(1+e3*sqrt(1-alpha23*(m2/m3+1)*(1+(v2m-v3m)/(v1m-v2m)
*((1-alpha23)*m1+m2)/((1+e2)*m1))^(-2)))
/(((1-alpha23)*m1+m2)*(m2+m3)),m1,1);
```

$$\begin{aligned}(\%o13)\ \frac{\partial p_3^f}{\partial m_1} = &\frac{\alpha_{2,3}\, e_3\, m_2\left(\frac{m_2}{m_3}+1\right) m_3\, \xi_1\left(\frac{(1-\alpha_{2,3})\left(v_2^- - v_3^-\right)}{(e_2+1)\, m_1\left(v_1^- - v_2^-\right)} - \frac{(m_2+(1-\alpha_{2,3})\, m_1)\left(v_2^- - v_3^-\right)}{(e_2+1)\, m_1{}^2\left(v_1^- - v_2^-\right)}\right)}{(m_2+(1-\alpha_{2,3})\, m_1)\,(m_3+m_2)\,\xi_2\left(\frac{(m_2+(1-\alpha_{2,3})\, m_1)\left(v_2^- - v_3^-\right)}{(e_2+1)\, m_1\left(v_1^- - v_2^-\right)}+1\right)^3}\\ &- \frac{(1-\alpha_{2,3})\, m_2\, m_3\,(e_3\,\xi_2+1)\,\xi_1}{(m_2+(1-\alpha_{2,3})\, m_1)^2\,(m_3+m_2)}\\ &+ \frac{m_2\, m_3\,(e_3\,\xi_2+1)\left((1-\alpha_{2,3})\left(v_2^- - v_3^-\right)+(e_2+1)\left(v_1^- - v_2^-\right)\right)}{(m_2+(1-\alpha_{2,3})\, m_1)\,(m_3+m_2)}\end{aligned} \tag{A.13}$$

$$\xi_1 = \left((m_2+(1-\alpha_{2,3})\, m_1)\left(v_2^- - v_3^-\right) + (e_2+1)\, m_1\left(v_1^- - v_2^-\right)\right)$$

$$\xi_2 = \sqrt{1 - \frac{\alpha_{2,3}\left(\frac{m_2}{m_3}+1\right)}{\left(\frac{(m_2+(1-\alpha_{2,3})\, m_1)\left(v_2^- - v_3^-\right)}{(e_2+1)\, m_1\left(v_1^- - v_2^-\right)}+1\right)^2}}$$

```
(%i14) diff(((v1m-v2m)*(1+e2)*m1+(v2m-v3m)*(m1*(1-alpha23)+m2))
*m2*m3*(1+e3*sqrt(1-alpha23*(m2/m3+1)*(1+(v2m-v3m)/(v1m-v2m)
```

```
*((1-alpha23)*m1+m2)/((1+e2)*m1))^(-2)))
/(((1-alpha23)*m1+m2)*(m2+m3)),m2,1);
```

$$(\%o14)\ \frac{\partial p_3^f}{\partial m_2} = \frac{m_2\, m_3\, (e_3\, \xi_2 + 1)\, \left(v_2^- - v_3^-\right)}{(m_2 + (1-\alpha_{2,3})\, m_1)\, (m_3 + m_2)} + \frac{e_3\, m_2\, m_3\, \xi_1\, (\xi_3 - \xi_4)}{2\, (m_2 + (1-\alpha_{2,3})\, m_1)\, (m_3 + m_2)\, \xi_2} + \frac{m_3\, (e_3\, \xi_2 + 1)\, \xi_1}{(m_2 + (1-\alpha_{2,3})\, m_1)\, (m_3 + m_2)} - \frac{m_2\, m_3\, (e_3\, \xi_2 + 1)\, \xi_1}{(m_2 + (1-\alpha_{2,3})\, m_1)^2\, (m_3 + m_2)} - \frac{m_2\, m_3\, (e_3\, \xi_2 + 1)\, \xi_1}{(m_2 + (1-\alpha_{2,3})\, m_1)\, (m_3 + m_2)^2} \tag{A.14}$$

$$\xi_1 = \left((m_2 + (1-\alpha_{2,3})\, m_1)\, \left(v_2^- - v_3^-\right) + (e_2 + 1)\, m_1\, \left(v_1^- - v_2^-\right)\right)$$

$$\xi_2 = \sqrt{1 - \frac{\alpha_{2,3}\, \left(\frac{m_2}{m_3} + 1\right)}{\left(\frac{\left(m_2 + \left(1-\alpha_{2,3}\right) m_1\right)\left(v_2^- - v_3^-\right)}{(e_2+1)\, m_1\, \left(v_1^- - v_2^-\right)} + 1\right)^2}}$$

$$\xi_3 = \frac{2\, \alpha_{2,3}\, \left(\frac{m_2}{m_3} + 1\right)\, \left(v_2^- - v_3^-\right)}{(e_2 + 1)\, m_1\, \left(v_1^- - v_2^-\right)\, \left(\frac{\left(m_2 + \left(1-\alpha_{2,3}\right) m_1\right)\left(v_2^- - v_3^-\right)}{(e_2+1)\, m_1\, \left(v_1^- - v_2^-\right)} + 1\right)^3}$$

$$\xi_4 = \frac{\alpha_{2,3}}{m_3\, \left(\frac{\left(m_2 + \left(1-\alpha_{2,3}\right) m_1\right)\left(v_2^- - v_3^-\right)}{(e_2+1)\, m_1\, \left(v_1^- - v_2^-\right)} + 1\right)^2}$$

```
(%i15) diff(((v1m-v2m)*(1+e2)*m1+(v2m-v3m)*(m1*(1-alpha23)+m2))
*m2*m3*(1+e3*sqrt(1-alpha23*(m2/m3+1)*(1+(v2m-v3m)/(v1m-v2m)
*((1-alpha23)*m1+m2)/((1+e2)*m1))^(-2)))
/(((1-alpha23)*m1+m2)*(m2+m3)),m3,1);
```

$$(\%o15)\ \frac{\partial p_3^f}{\partial m_3} = \frac{\alpha_{2,3}\, e_3\, {m_2}^2\, \xi_1}{2\,(m_2+(1-\alpha_{2,3})\,m_1)\,m_3\,(m_3+m_2)\,\xi_2\left(\frac{\left(m_2+\left(1-\alpha_{2,3}\right)m_1\right)\left(v_2^- - v_3^-\right)}{(e_2+1)\,m_1\left(v_1^- - v_2^-\right)}+1\right)^2} + \frac{m_2\left(e_3\sqrt{1-\frac{\alpha_{2,3}\left(\frac{m_2}{m_3}+1\right)}{\left(\frac{\left(m_2+\left(1-\alpha_{2,3}\right)m_1\right)\left(v_2^- - v_3^-\right)}{(e_2+1)\,m_1\left(v_1^- - v_2^-\right)}+1\right)^2}}+1\right)\xi_1}{(m_2+(1-\alpha_{2,3})\,m_1)\,(m_3+m_2)} - \frac{m_2\, m_3\left(e_3\sqrt{1-\frac{\alpha_{2,3}\left(\frac{m_2}{m_3}+1\right)}{\left(\frac{\left(m_2+\left(1-\alpha_{2,3}\right)m_1\right)\left(v_2^- - v_3^-\right)}{(e_2+1)\,m_1\left(v_1^- - v_2^-\right)}+1\right)^2}}+1\right)\xi_1}{(m_2+(1-\alpha_{2,3})\,m_1)\,(m_3+m_2)^2} \tag{A.15}$$

$$\xi_1 = \left((m_2+(1-\alpha_{2,3})\,m_1)\left(v_2^- - v_3^-\right)+(e_2+1)\,m_1\left(v_1^- - v_2^-\right)\right)$$

$$\xi_2 = \sqrt{1-\frac{\alpha_{2,3}\left(\frac{m_2}{m_3}+1\right)}{\left(\frac{\left(m_2+\left(1-\alpha_{2,3}\right)m_1\right)\left(v_2^- - v_3^-\right)}{(e_2+1)\,m_1\left(v_1^- - v_2^-\right)}+1\right)^2}}$$

```
(%i16) diff(((v1m-v2m)*(1+e2)*m1+(v2m-v3m)*(m1*(1-alpha23)+m2))
*m2*m3*(1+e3*sqrt(1-alpha23*(m2/m3+1)*(1+(v2m-v3m)/(v1m-v2m)
*((1-alpha23)*m1+m2)/((1+e2)*m1))^(-2)))
/(((1-alpha23)*m1+m2)*(m2+m3)),v1m,1);
```

$$(\%o16)\ \frac{\partial p_3^f}{\partial v_1^-} = \frac{(e_2+1)\,m_1\,m_2\,m_3\,(e_3\,\xi_2+1)}{(m_2+(1-\alpha_{2,3})\,m_1)\,(m_3+m_2)} - \frac{\alpha_{2,3}\,e_3\,m_2\left(\frac{m_2}{m_3}+1\right)m_3\,\xi_1\left(v_2^- - v_3^-\right)}{(e_2+1)\,m_1\,(m_3+m_2)\left(v_1^- - v_2^-\right)^2\xi_2\left(\frac{\left(m_2+\left(1-\alpha_{2,3}\right)m_1\right)\left(v_2^- - v_3^-\right)}{(e_2+1)\,m_1\left(v_1^- - v_2^-\right)}+1\right)^3} \tag{A.16}$$

$$\xi_1 = \left(\left(m_2 + (1-\alpha_{2,3})\, m_1\right) \left(v_2^- - v_3^-\right) + (e_2+1)\, m_1 \left(v_1^- - v_2^-\right)\right)$$

$$\xi_2 = \sqrt{1 - \frac{\alpha_{2,3}\left(\frac{m_2}{m_3}+1\right)}{\left(\frac{\left(m_2+(1-\alpha_{2,3})\,m_1\right)\left(v_2^- - v_3^-\right)}{(e_2+1)\,m_1\left(v_1^- - v_2^-\right)}+1\right)^2}}$$

```
(%i17) diff(((v1m-v2m)*(1+e2)*m1+(v2m-v3m)*(m1*(1-alpha23)+m2))
*m2*m3*(1+e3*sqrt(1-alpha23*(m2/m3+1)*(1+(v2m-v3m)/(v1m-v2m)
*((1-alpha23)*m1+m2)/((1+e2)*m1))^(-2)))
/(((1-alpha23)*m1+m2)*(m2+m3)),v2m,1);
```

$$(\%o17)\ \frac{\partial p_3^f}{\partial v_2^-} = \frac{\alpha_{2,3}\, e_3\, m_2\left(\frac{m_2}{m_3}+1\right) m_3\, \xi_1 \left(\frac{\left(m_2+(1-\alpha_{2,3})\,m_1\right)\left(v_2^- - v_3^-\right)}{(e_2+1)\,m_1\left(v_1^- - v_2^-\right)^2} + \frac{m_2+(1-\alpha_{2,3})\,m_1}{(e_2+1)\,m_1\left(v_1^- - v_2^-\right)}\right)}{\left(m_2+(1-\alpha_{2,3})\,m_1\right)(m_3+m_2)\,\xi_2\left(\frac{\left(m_2+(1-\alpha_{2,3})\,m_1\right)\left(v_2^- - v_3^-\right)}{(e_2+1)\,m_1\left(v_1^- - v_2^-\right)}+1\right)^3} + \frac{m_2\left(m_2-(e_2+1)\,m_1+(1-\alpha_{2,3})\,m_1\right) m_3\left(e_3\,\xi_2+1\right)}{\left(m_2+(1-\alpha_{2,3})\,m_1\right)(m_3+m_2)} \tag{A.17}$$

$$\xi_1 = \left(\left(m_2 + (1-\alpha_{2,3})\, m_1\right) \left(v_2^- - v_3^-\right) + (e_2+1)\, m_1 \left(v_1^- - v_2^-\right)\right)$$

$$\xi_2 = \sqrt{1 - \frac{\alpha_{2,3}\left(\frac{m_2}{m_3}+1\right)}{\left(\frac{\left(m_2+(1-\alpha_{2,3})\,m_1\right)\left(v_2^- - v_3^-\right)}{(e_2+1)\,m_1\left(v_1^- - v_2^-\right)}+1\right)^2}}$$

```
(%i18) diff(((v1m-v2m)*(1+e2)*m1+(v2m-v3m)*(m1*(1-alpha23)+m2))
*m2*m3*(1+e3*sqrt(1-alpha23*(m2/m3+1)*(1+(v2m-v3m)/(v1m-v2m)
*((1-alpha23)*m1+m2)/((1+e2)*m1))^(-2)))
/(((1-alpha23)*m1+m2)*(m2+m3)),v3m,1);
```

$$(\%o18)\ \frac{\partial p_3^f}{\partial v_3^-} = \frac{\left(-m_2-\left(1-\alpha_{2,3}\right) m_1\right) m_2\, m_3\, \left(e_3\, \xi_2+1\right)}{\left(m_2+\left(1-\alpha_{2,3}\right) m_1\right)\, \left(m_3+m_2\right)} - \frac{\alpha_{2,3}\, e_3\, m_2\, \left(\frac{m_2}{m_3}+1\right)\, m_3\, \xi_1}{\left(e_2+1\right)\, m_1\, \left(m_3+m_2\right)\, \left(v_1^- - v_2^-\right)\, \xi_2 \left(\frac{\left(m_2+\left(1-\alpha_{2,3}\right) m_1\right)\, \left(v_2^- - v_3^-\right)}{\left(e_2+1\right) m_1\, \left(v_1^- - v_2^-\right)}+1\right)^3} \tag{A.18}$$

$$\xi_1 = \left(\left(m_2+\left(1-\alpha_{2,3}\right) m_1\right)\, \left(v_2^- - v_3^-\right) + \left(e_2+1\right)\, m_1\, \left(v_1^- - v_2^-\right)\right)$$

$$\xi_2 = \sqrt{1-\frac{\alpha_{2,3}\, \left(\frac{m_2}{m_3}+1\right)}{\left(\frac{\left(m_2+\left(1-\alpha_{2,3}\right) m_1\right)\, \left(v_2^- - v_3^-\right)}{\left(e_2+1\right) m_1\, \left(v_1^- - v_2^-\right)}+1\right)^2}}$$

Mit diesen Vorüberlegungen lassen sich nun die entsprechenden Gleichungen für die einzelnen Geschwindigkeiten formulieren (s. Gleichungen (2.37 – 2.39)):

$$\begin{aligned}\Delta v_1^+ = &\left|1-\frac{1}{m_1}\cdot\frac{\partial p_2^f}{\partial v_1^-}\right|\cdot\Delta v_1^- + \left|\frac{1}{m_1^2}\cdot p_2^f - \frac{1}{m_1}\cdot\frac{\partial p_2^f}{\partial m_1}\right|\cdot\Delta m_1 \\ &+\frac{1}{m_1}\cdot\left(\left|-\frac{\partial p_2^f}{\partial v_2^-}\right|\cdot\Delta v_2^- + \left|-\frac{\partial p_2^f}{\partial m_2}\right|\cdot\Delta m_2 + \left|-\frac{\partial p_2^f}{\partial e_2}\right|\cdot\Delta e_2\right)\end{aligned} \tag{A.19}$$

$$\begin{aligned}\Delta v_2^+ = &\left|\frac{\partial v_2^*}{\partial v_1^-} - \frac{1}{m_2}\left(\frac{\partial p_3^f}{\partial v_1^-} - \alpha_{2,3}\cdot\frac{\partial p_2^f}{\partial v_1^-}\right)\right|\cdot\Delta v_1^- + \left|\frac{\partial v_2^*}{\partial v_2^-} - \frac{1}{m_2}\left(\frac{\partial p_3^f}{\partial v_2^-} - \alpha_{2,3}\cdot\frac{\partial p_2^f}{\partial v_2^-}\right)\right|\cdot\Delta v_2^- \\ &+\left|-\frac{1}{m_2}\cdot\frac{\partial p_3^f}{\partial v_3^-}\right|\cdot\Delta v_3^- + \left|\frac{\partial v_2^*}{\partial e_2} - \frac{1}{m_2}\cdot\left(\frac{\partial p_3^f}{\partial e_2} - \alpha_{2,3}\cdot\frac{\partial p_2^f}{\partial e_2}\right)\right|\cdot\Delta e_2 + \left|-\frac{1}{m_2}\frac{\partial p_3^f}{\partial e_3}\right|\cdot\Delta e_3 \\ &+\left|\frac{\partial v_2^*}{\partial m_1} - \frac{1}{m_2}\cdot\left(\frac{\partial p_3^f}{\partial m_1} - \alpha_{2,3}\cdot\frac{\partial p_2^f}{\partial m_1}\right)\right|\cdot\Delta m_1 + \left|\frac{\partial v_2^*}{\partial m_2} + \frac{1}{m_2^2}\cdot\left(p_3^f - \alpha_{2,3}\cdot p_2^f\right)\right. \\ &\left.-\frac{1}{m_2}\cdot\left(\frac{\partial p_3^f}{\partial m_2} - \alpha_{2,3}\cdot\frac{\partial p_2^f}{\partial m_2}\right)\right|\cdot\Delta m_2 + \left|-\frac{1}{m_2}\cdot\frac{\partial p_3^f}{\partial m_3}\right|\cdot\Delta m_3\end{aligned} \tag{A.20}$$

$$\Delta v_3^+ = \left|1 + \frac{1}{m_3} \cdot \frac{\partial p_3^f}{\partial v_3^-}\right| \cdot \Delta v_3^- + \left|-\frac{1}{m_3^2} \cdot p_3^f + \frac{1}{m_3} \cdot \frac{\partial p_3^f}{\partial m_3}\right| \cdot \Delta m_3 + \frac{1}{m_3} \cdot \left(\left|\frac{\partial p_3^f}{\partial v_1^-}\right| \cdot \Delta v_1^- \right.$$
$$\left. + \left|\frac{\partial p_3^f}{\partial v_2^-}\right| \cdot \Delta v_2^- + \left|\frac{\partial p_3^f}{\partial e_2}\right| \cdot \Delta e_2 + \left|\frac{\partial p_3^f}{\partial e_3}\right| \cdot \Delta e_3 + \left|\frac{\partial p_3^f}{\partial m_1}\right| \cdot \Delta m_1 + \left|\frac{\partial p_3^f}{\partial m_2}\right| \cdot \Delta m_2\right) \tag{A.21}$$

B. R-Quellcode zur Geschwindigkeitsanalyse

Im Folgenden wird das verwendete R-Programm kurz vorgestellt. Aus Platzgründen können hier nicht alle Codeabschnitte abgedruckt werden. Daher erfolgt an den entsprechenden Stellen im Folgenden ein Verweis auf die beigefügte Daten-CD (Übersicht aller Dateien, s. Kapitel 4).

Das Programm gliedert sich in ein „Hauptprogramm“ und entsprechende „Unterprogramme“. Die „Hauptdatei“ (vgl. Quelltext B.1) dient dazu die weiteren Programmteile aufzurufen. Hier wird der Basisordner gesetzt, dies geschieht mittels `getwd()`[1]. Mithilfe von `paste()`-Konkatenationen werden die aufzurufenden Orte bestimmt. Ferner werden alle global benötigten Konstanten und Funktionen definiert, sowie das Paket `outliers` (vgl. [15]) geladen. Danach erfolgt das Aufrufen der einzelnen Unterdateien:

Quelltext B.1: Hauptdatei

```r
# File Auswertung.R ruft die Unterfiles auf, definiert globale Variablen und Funktionen und laedt
# benoetigte Pakete



# Setze Basisordner

Ort = getwd()

varOrt1 = '/Restitutionskoeffizienten/Restitutionskoeffizient.R'
Variable1 = paste(Ort, varOrt1, sep = "")
```

[1] Aus diesem Grund muss man in der Konsole in das entsprechende Verzeichnis wechseln, bevor man die Hauptdatei ausführen kann.

```
varOrt2 = '/Stoesse/Dateneinlesen.R'
Variable2 = paste(Ort, varOrt2, sep = "")

varOrt3 = '/pruefeVorzeichen.R'
Variable3 = paste(Ort, varOrt3, sep = "")

varOrt4 = '/TheoFunktionen.R'
Variable4 = paste(Ort, varOrt4, sep = "")

varOrt5 = '/Theorie.R'
Variable5 = paste(Ort, varOrt5, sep = "")

varOrt6 = '/plots.R'
Variable6 = paste(Ort, varOrt6, sep = "")

varOrt7 = '/Fehlermessung/Fehler.R'
Variable7 = paste(Ort, varOrt7, sep = "")

setwd(Ort)

# lade benoetigte Pakete

library(outliers)

# Definition von Konstanten und Funktionen

# Gravitationskonstante

g = 9.81

# allgemeine Konstante fuer Iterationszahl und obere Grenze

it = 1000

t = 1

# Definition der Zeichenbefehle
```

```

plottx <- function(t,x,y,z) { # Plot(Zeit,Masse1,Masse2,Masse3)
  matplot(Trajektorien[,t], cbind(Trajektorien[,x], Trajektorien[,y], Trajektorien[,z]), col = cbind("black", "blue", "red"), xlab = "Framenummer", ylab = expression(italic(x) ~ "/" ~ "cm"), pch = cbind(1,2,5))
  legend("bottomleft", c("Masse 1", "Masse 2", "Masse 3"), col = c("black", "blue", "red"), pch = cbind(1,2,5))
}

plotty <- function(t,x,y,z) { # Plot(Zeit,Masse1,Masse2,Masse3)
  matplot(Trajektorien[,t], cbind(Trajektorien[,x], Trajektorien[,y], Trajektorien[,z]), col = cbind("black", "blue", "red"), xlab = "Framenummer", ylab = expression(italic(y) ~ "/" ~ "cm"), pch = cbind(1,2,5))
  legend("topleft", c("Masse 1", "Masse 2", "Masse 3"), col = c("black", "blue", "red"), pch = cbind(1,2,5))
}

# Standardabweichung des Mittelwerts

stderr <- function(x) sd(x, na.rm = TRUE)/sqrt(length(x))

# prozentuale Abweichung

proabw <- function(theorie, experiment) {
  abw <- abs((experiment - theorie)/theorie)*100
  return(abw)
}

# absolute Abweichung

abw <- function(theorie, experiment) {
  abw <- abs(experiment - theorie)
  return(abw)
}

# Grubbs-Test unter Verwendung von grubbs.test() aus dem Paket
```

```
outliers

grubbs <- function(x) { # Funktion gibt boolsches Literal fuer Ausreisser zurueck
  if (grubbs.test(x)[2] == paste("highest value", outlier(x), "is an outlier", sep = " ")) {
    return(TRUE);
  } else {
    return(FALSE);
  }
}

# Berechnung der Geschwindigkeit aus der y-Komponente

ges <- function(y) sqrt(2*g*y)

source(Variable1)

source(Variable2)

setwd(Ort)

source(Variable4)

source(Variable5)

source(Variable6)

source(Variable7)

setwd(Ort)

save.image()
```

Als erstes werden die *Restitutionskoeffizienten* für die theoretische Berechnung bestimmt. Dazu werden in Quelltext B.2 die systematisch abgespeicherten Textdateien eingelesen (vgl. Quelltext B.2, Z. 13 ff.):

```
1 files<-list.files(pattern = '*.txt')
```

```
2 Data<-lapply(files,function(Data){read.table(Data, header =
     FALSE)})
3 Stoesse<-do.call(cbind, Data)
```

Dabei wird in `files` geschrieben, welche txt-Dateien sich im gewählten Verzeichnis befinden. Danach werden die Daten in der Variable `Data` abgespeichert, woraus mit Hilfe von `cbind` eine Matrix zusammengefügt wird. Durch dieses Vorgehen ist gewährleistet, dass alle Daten nach alphabetischer Reihenfolge der Textdateien in den Spalten einer Matrix abgespeichert werden. Das Einlesen der „Bezeichner“-Datei (vgl. Quelltext B.2, Z. 20)[2] ist notwendig, da hier die Informationen enthalten sind, in welchen Spalten der Matrix `Stoesse` sich welche Messungen befindet. Die Spalten Anfang und Ende der Bezeichnermatrix geben diese Information konkret an (dieses Vorgehen wurde gewählt, um die Möglichkeit zu haben die Zahl der Experimente pro Serie anpassen zu können). Die in der Bezeichnerdatei angegeben Namen setzten sich aus einem Buchstaben für die Experimentierserie (eine Serie entspricht einer Auslenkungsstärke) und einem laufenden Buchstaben (beginnend mit a) zusammen. Die folgenden Codezeilen dienen lediglich internen Berechnungen, um die Größe der neu anzulegenden Matrizen zu bestimmen. In den Zeilen 39 – 74 werden die Höhendifferenzen aus den Ordinaten der einzelnen Trajektorien bestimmt, die notwendig sind, um die gesuchten Geschwindigkeiten ausrechnen zu können. Aus diesen Höhendifferenzen werden direkt die *Restitutionskoeffizienten* nach Gleichung (2.15) berechnet (vgl. Quelltext B.2, Z. 94), die benötigten Geschwindigkeiten errechnen sich nach Gleichung (B.1). Dort ist g die Erdbeschleunigung und Δh die zuvor berechnete Höhendifferenz.

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot \Delta h} \tag{B.1}$$

Gleichung (B.1) ist in Quelltext B.1, Z. 91 implementiert. In den nachfolgenden Codezeilen werden die berechneten *Restitutionskoeffizienten* mit den Informationen zu Namen und Massen zusammengefasst. Letztendlich wird dabei die Matrix `restkoeff` erstellt, auf die im weiteren Verlauf zurückgegriffen wird. Das Speichern von Matrix `restitutionskoeffizienten` und nachfolgendes aufrufen wurde implementiert für den Fall, dass zu Testzwecken beispielsweise mit einem anderen Programm auf die Daten zurückgegriffen werden muss. Des Weiteren erfüllt es den Zweck, einen expliziten Typecast zu umgehen, da die Namen als Character-String abgespeichert werden, die

[2] Bezeichner-Datei für Restitutionskoeffizienten auf der Daten-CD: `/Auswertung/Restitutionskoeffizienten/Bezeichnera.csv`

übrigen Zahlenwerte aber im Datentyp Numeric vorliegen[3]:

Quelltext B.2: Bestimmung der Restitutionskoeffizienten.

```
# File Restitutionskoeffizient.R in Unterordner Restitutionskoeffizienten
# liesst die Messwerte ein und berechnet die Stossparameter



var = '/Restitutionskoeffizienten'
Variable = paste(Ort, var, sep = "")

setwd(Variable)

# n-txt Dateien einlesen und in Matrix Stoesse speichern

files<-list.files(pattern = '*.txt')
Data<-lapply(files,function(Data){read.table(Data, header = FALSE)})
Stoesse<-do.call(cbind, Data)

# Lade Datei Bezeichnera, fuer Navigation in den folgenden Matrizen und uebergabe der
# korrekten Werte

Bezeichnera <- read.csv("Bezeichnera.csv", sep = " ", header=TRUE)

r = 0
h = 0

for (i in 1:(dim(Bezeichnera)[1]-1)) {
 h = h + 1;
 if (((Bezeichnera[h,5] - Bezeichnera[h,4]) >= (Bezeichnera[h+1,5] - Bezeichnera[h+1,4]))) {
  r = (Bezeichnera[h,5] - Bezeichnera[h,4])+1;
```

[3]Diese Lösung ist zwar nicht die eleganteste, erfüllt aber ihren Zweck.

```
  } else {
    r = (Bezeichnera[h+1,5] - Bezeichnera[h+1,4])+1;
  }
}



# maximale Hoehendifferenzen werden in 'werte' gespeichert jeder Block (Wert 1. Kugel vor-,
# 1. Kugel nach-, 2. Kugel nach- und 3. Kugel nach Stoss)

werte <- matrix(c(0:0), ncol=dim(Bezeichnera)[1]*3, nrow=(r / 6))

b = 0
c = 3
j = 1
k = 0

for (i in 1:dim(Bezeichnera)[1]) {
  a = 0
  b = b + 1;
  j = b;
  k = k + 1;
  for (f in 1:((Bezeichnera[k,5] - Bezeichnera[k,4] + 1) / 6)) {
    b = j;
    a = a + 1;
    werte[a,b] <- (max(Stoesse[,c])-min(Stoesse[,c]));
    b = b + 1;
    h = 1
    while (Stoesse[h,c] != min(Stoesse[,c])) {
      h = h + 1;
    }
    h = h + 1;
    hilfsmatrix <- matrix(c(0:0), ncol=1, nrow=(dim(Stoesse)[1]-h))
    l = 1
    for (n in 1:(dim(Stoesse)[1]-h)) {
```

```
      hilfsmatrix[l,1] <- Stoesse[h,c]
      h = h + 1;
      l = l + 1;
    }
    werte[a,b] <- (max(hilfsmatrix[,1])-min(hilfsmatrix[,1]));
    b = b + 1;
    c = c + 3;
    werte[a,b] <- (max(Stoesse[,c])-min(Stoesse[,c]));
    c = c + 3;
  }
}



# Berechnung der Restitutionskoefizienten aus den entsprechenden maximalen Hoehendifferenzen
# in der Matrix werte

rest <- matrix(c(0:0), ncol=dim(Bezeichnera)[1], nrow=dim(werte)[1])

a = 0
b = -2
c = 0
d = 0

for (n in 1:dim(Bezeichnera)[1]) {
  a = d
  c = c + 1;
  b = b + 3;
  for (i in 1:dim(werte)[1]) {
    a = a + 1;
    rest[a,c] <- abs((-ges(werte[a, b+1])+ges(werte[a, b+2]))/ges(werte[a, b+2]))
  }
}

```

```
restitutionskoeffizienten <- matrix(c(0:0), ncol=5, nrow=(dim(Bezeichnera)[1]))

colnames(restitutionskoeffizienten) <- c("Name", "Masse 1", "Masse 2", "Restitutionskoeffizienten (e)", "sigma_e")

restitutionskoeffizienten[,1] <- as.character(Bezeichnera[,1])
restitutionskoeffizienten[,2] <- Bezeichnera[,2]
restitutionskoeffizienten[,3] <- Bezeichnera[,3]

a = 0

for (i in 1:dim(Bezeichnera)[1]) {
 a = a + 1;
 restitutionskoeffizienten[a,4] <- mean(rest[,a])
 restitutionskoeffizienten[a,5] <- stderr(rest[,a])
}

write.table(restitutionskoeffizienten,file=paste('restitutionskoeffizienten.csv', sep = ""), sep = " ", dec = ".")
restkoeff <- read.csv("restitutionskoeffizienten.csv", sep = " ", header=TRUE)
save.image()
```

Anschließend wird der Quelltext B.3 abgearbeitet, dieser hat von der Grundstruktur große Ähnlichkeiten wie der vorherige für die Berechnung des *Restitutionskoeffizienten*. Daher wird für das Einlesen der Daten und die abschließende Speicherung auf den vorherigen Abschnitt verwiesen. Bei der Speicherung am Ende wird lediglich noch zusätzlich ein Runden auf zwei Nachkommastellen vorgenommen. Ferner werden die Vorzeicheninfomationen durch das Aufrufen der Datei `pruefeVorzeichen.R`[4] zu den Mittelwertdaten hinzugefügt[5]. Auch hier wird eine Bezeichnerdatei geladen (vgl. Bezeichner-Datei auf der Daten-CD: `/Auswertung/Dateneinlesen/Bezeichnerb.csv`), die Benennung der einzelnen Experimente erfolgt nach dem selben Muster wie bei den *Restituktionskoeffizienten*. Wie oben beschrieben wird für die kleinste Auslenkung (erster

[4] S. Daten-CD: `/Auswertung/pruefeVorzeichen.R`.

[5] Der unten weiter vorgestellte Algorithmus bestimmt die Beträge der Geschwindigkeiten anhand der Ordinate, wobei die Vorzeicheninformationen hier „manuell“ hinzugefügt werden.

Buchstabe a) nur der Fall gleicher Massen angegeben. Für die mittlere- (erster Buchstabe b) und große Auslenkung (erster Buchstabe c) wurden die Fälle schwere Masse an Position eins (zweiter Buchstabe a), zwei (b) und drei (c) sowie der Fall gleicher Massen (d) betrachtet. In Quelltext B.3, Z. 52 – 69 werden die Geschwindigkeiten vor und nach dem ersten Stoß für die erste Kugel berechnet. Dabei wird benutzt, dass bei Betrachtung der Ordinate sich die Geschwindigkeit vor dem Stoß aus der Differenz des maximalen- und minimalen Ordinatenwertes ergibt. Hierzu wird wieder Gleichung (B.1) verwendet (s. Z. 57). Um nun aber die maximale Auslenkung der Kugel eins nach dem Stoß bestimmen zu können, müssen die Daten selektiert behandelt werden. Dazu werden die Datenpunkte nach dem Stoß in eine Hilfsmatrix transferiert, aus der sich dann die gesuchte Geschwindigkeit analog berechnen lässt, dieses Vorgehen ist notwendig, da die gesuchte Differenz in Ordinatenrichtung wegen Energieerhaltung kleiner als im einschlagenden Falle sein muss. Bei der Bestimmung der Geschwindigkeiten für die Kugeln zwei und drei kann ganz einfach die Funktion wie für die erste Kugel verwendet werden. Ein Aufspalten der Daten ist nicht notwendig, da experimentell bedingt die Geschwindigkeiten vor dem Stoß null sind. Diese Berechnung erfolgt in der letzten for-Schleife dieses Anweisungsblocks. Anhand dieser Berechnung soll einmal kurz das Nutzen der Bezeichnermatrix demonstriert werden. Mit Hilfe von `dim(Bezeichnerb)[1]` (vgl. Z. 49) wird die Zahl der Zeilen der Bezeichnermatrix bestimmt. Diese gibt wiederum an, wie viele Experimente durchgeführt wurden. Die nachfolgende for-Schleife[6] arbeitet die Experimente eines „Blocks“ ab (in diesem Fall wurden zwar jeweils immer 20 Einzelexperimente durchgeführt, der Algorithmus ist jedoch auf Allgemeingültigkeit ausgelegt). Dafür werden die Anfangs- und Endwertespalten aus der Bezeichnermatrix benötigt. Dieses Vorgehen hat den Vorteil, dass beispielsweise für das Plotten der Daten sehr einfach die Spalten der Matrix Trajektorien für ein spezifisches Teilexperiment ermittelt werden können. Danach werden aus diesen Geschwindigkeitsdaten die größten Ausreißer entfernt. Dazu wird ein GRUBBS-TEST (Paket OUTLIERS) in den Zeilen 89 – 98 durchgeführt. Es wird `grubbs(geschwindigkeit[,b])` aufgerufen, diese Funktion wurde in der Hauptdatei (vgl. Quelltext B.1, Z. 81) definiert und gibt ein boolsches Literal zurück. Mit Hilfe der geschachtelten `for`-, `if`- und `while` Anweisung wird die komplette Matrix überprüft und die Ausreißer durch den Wert `NA` ersetzt. Abschließend werden von jedem Einzelexperiment der Mittelwert und dessen Standardabweichung berechnet, die Vorzeicheninformation hinzugefügt und analog wie in Quelltext B.3 abgespeichert:

[6] Die Zuweisungen der einzelnen Werte (z.B. a=0, b=b+1 ...) werden hier nicht einzeln diskutiert.

Quelltext B.3: Einlesen der Daten und Bestimmung der Kugelgeschwindigkeiten vor- und nach dem Stoß.

```r
# File Dateneinlesen.R in Unterordner Stoesse liesst die Messdaten ein und
#berechnet die Geschwindigkeiten vor bzw. nach dem Stoss fuer alle Massen



var = '/Stoesse'
Variable = paste(Ort, var, sep = "")

setwd(Variable)

# n-txt Dateien einlesen und in Matrix Trajektorien speichern

files<-list.files(pattern = '*.txt')
Data<-lapply(files,function(Data){read.table(Data, header = FALSE)})
Trajektorien<-do.call(cbind, Data)

# laden der Datei Bezeichnerb zur Navigation in den folgenden Matrizen und zur Uebergabe der
# korrekten Werte

Bezeichnerb <- read.csv("Bezeichnerb.csv", sep = " ", header=TRUE)

# Berechnung der benoetigten Zeilenanzahl der Matrix geschwindigkeit (s. unten)

r = 0
h = 0

for (i in 1:(dim(Bezeichnerb)[1]-1)) {
  h = h + 1;
```

```
  if (((Bezeichnerb[h,6] - Bezeichnerb[h,5]) >= (Bezeichnerb[h
      +1,6] - Bezeichnerb[h+1,5]))) {
    r = (Bezeichnerb[h,6] - Bezeichnerb[h,5])+1;
  } else {
    r = (Bezeichnerb[h+1,6] - Bezeichnerb[h+1,5])+1;
  }
}



# Berechnung der maximalen Geschwindigkeiten



geschwindigkeit <- matrix(c(0:0), ncol=dim(Bezeichnerb)[1]*4,
    nrow=(r / 9))

b = 0
c = 3
j = 1
k = 0

for (i in 1:dim(Bezeichnerb)[1]) {
  a = 0
  b = b + 1;
  j = b;
  k = k + 1;
  for (f in 1:((Bezeichnerb[k,6] - Bezeichnerb[k,5] + 1) / 9)) {
    b = j;
    a = a + 1;
    geschwindigkeit[a,b] <- ges(max(Trajektorien[,c])-min(
        Trajektorien[,c]));
    b = b + 1;
    h = 1
    while (Trajektorien[h,c] != min(Trajektorien[,c])) {
      h = h + 1;
    }
    h = h + 1;
```

```
    hilfsmatrix <- matrix(c(0:0), ncol=1, nrow=(dim(Trajektorien)
        [1]-h))
    l = 1
    for (n in 1:(dim(Trajektorien)[1]-h)) {
      hilfsmatrix[l,1] <- Trajektorien[h,c]
      h = h + 1;
      l = l + 1;
    }
    geschwindigkeit[a,b] <- ges(max(hilfsmatrix[,1])-min(
        hilfsmatrix[,1]));
    for (i in 1:2) {
      b = b + 1;
      c = c + 3;
      geschwindigkeit[a,b] <- ges(max(Trajektorien[,c])-min(
          Trajektorien[,c]));
    }
    c = c + 3;
  }
}

# Test, ob die Werte mit der groessten Abweichung als Ausreisser
    entfernt werden muessen
# (setze Wert auf NA)

b = 1

for (i in 1:dim(geschwindigkeit)[2]) {
  if (grubbs(geschwindigkeit[,b]) == TRUE) {
    a = 1
    while (
      if (is.na(geschwindigkeit[a,b])) {TRUE} else {
        outlier(geschwindigkeit[,b]) != geschwindigkeit[a,b]}
      ) {
      a = a + 1;
    }
    geschwindigkeit[a,b] = NA
  }
  b = b + 1;
```

```r
}

# Mittelwerte der einzelnen Geschwindigkeitsmaxima werden fuer
   alle Versuche in Matrix gespeichert



MWGeschw <- matrix(c(0:0), ncol=9, nrow=(dim(Bezeichnerb)[1]))

MWGeschw[,1] <- as.character(Bezeichnerb[,1])

a = 0
c = 0

for (n in 1:dim(Bezeichnerb)[1]) {
  a = a + 1;
  b = 0
  for (i in 1:4) {
    b = b + 2;
    c = c + 1;
    MWGeschw[a,b] <- mean(geschwindigkeit[,c], na.rm = TRUE)
    MWGeschw[a,b+1] <- stderr(geschwindigkeit[,c])
  }
}

write.table(MWGeschw,file=paste('MWGeschw.csv', sep = ""), sep =
     " ", dec = ".")
MWGes <- read.csv("MWGeschw.csv", sep = " ", header=TRUE)

MWGes <- MWGes

for (i in 2:9) {
  MWGes[,i] <- round(MWGes[,i], 2)
}
# fuege Vorzeicheninformation zu MWGes hinzu

source(Variable3)

```

```
134 MWGes1 <- matrix(c(0:0), ncol=12, nrow=(dim(Bezeichnerb)[1]))
135 MWGes1[,1] <- as.character(MWGes[,1])
136 MWGes1[,2] <- Bezeichnerb[,2]
137 MWGes1[,3] <- Bezeichnerb[,3]
138 MWGes1[,4] <- Bezeichnerb[,4]
139 MWGes1[,5] <- MWGes[,2]
140 MWGes1[,6] <- MWGes[,3]
141 MWGes1[,7] <- MWGes[,4]
142 MWGes1[,8] <- MWGes[,5]
143 MWGes1[,9] <- MWGes[,6]
144 MWGes1[,10] <- MWGes[,7]
145 MWGes1[,11] <- MWGes[,8]
146 MWGes1[,12] <- MWGes[,9]
147 save.image()
```

Hiermit sind alle Berechnungen zu den experimentellen Stoßexperimenten abgeschlossen, in den folgenden Codeabschnitten geht es darum die Theorie nach Ceanga & Hurmuzlu anzuwenden. Zur Erhöhung der Übersichtlichkeit sind die Definitionen der benötigten Funktionen in eine separate Datei ausgelagert worden. Diese wird lediglich in der beigelegten Daten-CD unter `/Auswertung/TheoFunktionen.R` aufgeführt. Die Ableitungen für die Fehlerfortpflanzung des Ansatzes nach Ceanga & Hurmuzlu wurden mit Hilfe des CAS GNU Maxima (vgl. [17]) bestimmt, die Ausgabe wird im Anhang A, S. 34 aufgeführt. Ferner werden Funktionen für die Bestimmung der *Impuls-Korrelations-Relation* α_2 definiert. Dabei wird für jede Kugel der Bestwert berechnet. Das heißt, es wird überprüft, bei welchem Wert die Differenz zwischen dem experimentellen- und dem theoretischen Wert möglichst gering ist. Die *Impuls-Korrelations-Relation* kann nur einen Wert im Intervall $[0,1]$ annehmen. Für die erste Kugel wird ein rekursiver Algorithmus implementiert. Dieser beginnt mit der Rechnung bei $\alpha_2 = 0$ und erhöht diesen Wert immer weiter um eine Breite von 0.001. Dabei wird überprüft, ob die aktuelle Abweichung kleiner als die folgende ist. Ist das der Fall wird der aktuelle Wert für die *Impuls-Korrelations-Relation* zurückgegeben, ansonsten wird die Rekursion fortgeführt (vgl. Z. 335 – 349). Für die Kugeln zwei und drei ergibt sich das Problem, dass in einigen Fällen der Bestwert nicht mit diesem Algorithmus gefunden werden kann, wie in der Kapitel 3.3 aufgezeigt, führt gerade die Analyse der dritten Kugel zu teilweise sehr schlechten Werten. Schon an der Tatsache, dass der Algorithmus für Kugel eins hier nicht ohne Weiteres funktioniert, zeigt, dass es hier ein Problem gibt. Die „Lösung" dieses Problems ist ein iterativer Algorithmus, der die berechneten Werte in einer Matrix zwischenspeichert und die auftretenden Warnmeldungen abfängt. Hierzu dient die if-else-Anweisung in Z. 364, die `NaN`-Einträge werden durch den Wert 10, der das Ergebnis nicht verfälscht, ersetzt. Ohne diese Fehlerbehandlung, die durch negative Werte unter Wurzelausdrücken notwendig ist, ergäbe sich ein semantisch äquivalenter Algorithmus zu der rekursiven Lösung für die erste Kugel. Die bereitgestellten Funktionen werden nun mit Hilfe von Quelltext B.4 auf die experimentellen Werte angewendet. Bei der Wertezuweisung spielt wieder die Bezeichnermatrix `b` eine Rolle, da in den Spalten 7 und 8 die Namen der jeweiligen *Restitutionskoeffizienten* stehen. Die Zuweisung der Werte erfolgt mit Hilfe der beiden while-Schleifen in den Zeilen 23 bzw. 28. Die jeweiligen Fehlerwerte werden im Quellcode mit einem `d` gekennzeichnet, für die Fehler der Massen wird ein Fehler von 0.1 g angegeben:

Quelltext B.4: Berechnung der theoretischen Werte nach der Theorie von CEANGA & HURMUZLU.

```
1  # File Theorie.R wendet die theoretischen Funktionen aus TheoFunktionen.R auf die
2  # experimentellen Daten an
3
4
5
6
7  # Uebergebung der Werte und Berechnung der Theoriewerte und Fehler
8
9  theowerte1 <- matrix(c(0:0), ncol=10, nrow=(dim(Bezeichnerb)[1]))
10
11 theowerte1[,1] <- as.character(Bezeichnerb[,1])
12
13 abweichung1 <- matrix(c(0:0), ncol=7, nrow=(dim(Bezeichnerb)[1]))
14
15 abweichung1[,1] <- as.character(Bezeichnerb[,1])
16
17 a = 0;
18
19 for (i in 1:(dim(Bezeichnerb)[1])) {
```

```
a = a + 1;
b = 1;
c = 1;
while (as.character(Bezeichnerb[a,7]) != restkoeff[b,1]) {
  b = b + 1;
}
e2 <- restkoeff[b,4]
de2 <- restkoeff[b,5]
while (as.character(Bezeichnerb[a,8]) != restkoeff[c,1]) {
  c = c + 1;
}
e3 <- restkoeff[c,4]
de3 <- restkoeff[c,5]
m1 <- Bezeichnerb[a,2]
m2 <- Bezeichnerb[a,3]
m3 <- Bezeichnerb[a,4]
dm1 = dm2 = dm3 = 0.1;
v1m <- MWGes[a,2]
dv1m <- MWGes[a,3]
v2m <- 0
dv2m <- 0
v3m <- 0
dv3m <- 0
v1n <- MWGes[a,4]
v2n <- MWGes[a,6]
v3n <- MWGes[a,8]

alpha1 <- reg1(v1m, v2m, m1, m2, e2, v1n, it);
alpha2 <- reg2(v1m, v2m, v3m, m1, m2, m3, e2, e3, v2n, it);
alpha3 <- reg3(v1m, v2m, v3m, m1, m2, m3, e2, e3, v3n, it);

theowerte1[a,2] <- v1p(v1m, v2m, m1, m2, e2, alpha1)
theowerte1[a,3] <- v1pf(v1m, v2m, m1, m2, e2, alpha1, dv1m,
   dv2m, dm1, dm2, de2)
theowerte1[a,4] <- alpha1;
theowerte1[a,5] <- v2p(v1m, v2m, v3m, m1, m2, m3, e2, e3,
   alpha2)
```

```
  theowerte1[a,6] <- v2pf(v1m, v2m, v3m, m1, m2, m3, e2, e3,
      alpha2, dv1m, dv2m, dv3m, dm1, dm2, dm3, de2, de3)
  theowerte1[a,7] <- alpha2
  theowerte1[a,8] <- v3p(v1m, v2m, v3m, m1, m2, m3, e2, e3,
      alpha3)
  theowerte1[a,9] <- v3pf(v1m, v2m, v3m, m1, m2, m3, e2, e3,
      alpha3, dv1m, dv2m, dv3m, dm1, dm2, dm3, de2, de3)
  theowerte1[a,10] <- alpha3

  abweichung1[a,2] <- round(abw(v1p(v1m, v2m, m1, m2, e2, alpha1)
      , v1n), 5)
  abweichung1[a,3] <- round(proabw(v1p(v1m, v2m, m1, m2, e2,
      alpha1), v1n), 3)
  abweichung1[a,4] <- round(abw(v2p(v1m, v2m, v3m, m1, m2, m3, e2
      , e3, alpha2), v2n), 5)
  abweichung1[a,5] <- round(proabw(v2p(v1m, v2m, v3m, m1, m2, m3,
       e2, e3, alpha2), v2n), 3)
  abweichung1[a,6] <- round(abw(v3p(v1m, v2m, v3m, m1, m2, m3, e2
      , e3, alpha3), v3n), 5)
  abweichung1[a,7] <- round(proabw(v3p(v1m, v2m, v3m, m1, m2, m3,
       e2, e3, alpha3), v3n), 3)
}

write.table(theowerte1,file=paste('theowerte1.csv', sep = ""),
    sep = " ", dec = ".")
theowerte2 <- read.csv("theowerte1.csv", sep = " ", header=TRUE)

for (i in 2:10) {
  theowerte2[,i] <- round(theowerte2[,i], 2)
}
```

Sämtliche Plots von Pendelbewegungen (außer der Fehlerbetrachtung Abbildung 3.10(a)) werden in einer Datei `plots.R`[7] erzeugt und im pdf-Format abgespeichert. Analoges gilt für die Tabellen.

Der letzte entwickelte Quelltext B.5 wird benötigt, um den Versuchsaufbau sowie die Messmethode zu validieren. Hierzu erfolgt das schon beschriebene Einlesen der Daten. Diese werden standardisiert, d. h. der Messbereich wird so eingeschränkt, dass alle Mes-

[7]Nur auf der Daten-CD: `/Auswertung/plots.R` zu finden.

sungen exakt zum gleichen Zeitpunkt beginnen. Des Weiteren muss die Zeit anhand der Framenummer berechnet werden. Dabei setzt der Algorithmus den ersten Zeitpunkt auf Null und berechnet automatisch die folgenden Zeiten neu. Gleichzeitig werden diese t- und Abszissenwerte in eine zweispaltige-Matrix geschrieben und mit Hilfe eines *Insertionsort-Algorithmus* sortiert[8]. Diese sortierten Daten werden exportiert um die Regression mit Hilfe von QTIPLOT (vgl. [21]) durchzuführen[9]. Die Fitkurve wird abschließend mit den experimentellen Werten geplottet[10]:

Quelltext B.5: Validierung des Versuchsaufbaus.

```
# File Fehler.R aus Unterordner Fehlermessung liesst die
   Messdaten ein und erzeugt eine
# Matrix, die gespeichert wird, um mit QtiPlot manuell die
   Regression durchzufuehren



setwd(paste(Ort, '/Fehlermessung', sep = ""))

files<-list.files(pattern = '*.txt')
Data<-lapply(files,function(Data){read.table(Data, header =
   FALSE)})
fehler<-do.call(cbind, Data)

# Berechnung der benoetigten Matrizenzeilen, wobei alle
   Messungen zeitlich standardisiert werden.

c = 0
b = -1
for (i in 1:20) {
  a = 2;
  b = b + 3;
  while (fehler[a,b] == 0) {
```

[8] Es wäre denkbar diesen Algorithmus durch einen komplexeren, aber schnelleren zu ersetzten, da dass Ausführen relativ lange (ca. 20 Minuten) dauert.

[9] Die mit QTIPLOT erstellten Dateien sind auf der Daten-CD: `/Auswertung/qti_fit/FehlermessungFit.qti` enthalten.

[10] Die Regression konnte mit R nicht ohne Weiteres durchgeführt werden, so dass hierfür der Scaled Levenberg-Marquardt Algorithmus in QTIPLOT genutzt wurde.

```
    a = a + 1;
    c = c + 1;
  }
  c = c - 1;
}

schwingung <- matrix(c(0:0), ncol=2, nrow=20*797-c)
schwingung1 <- matrix(c(0:0), ncol=2, nrow=20*797-c)

b = -1
c = 0
d = 1

for (i in 1:20) {
  a = 2;
  b = b + 3;
  while (fehler[a,b] == 0) {
    a = a + 1;
  }
  a = a - 1;
  c = a;
  while (a <= dim(fehler)[1]) {
    schwingung[d,1] <- (fehler[a,b-1]-fehler[c,b-1])/100
    schwingung[d,2] <- fehler[a,b]
    a = a + 1;
    d = d + 1;
  }
}

schwingung1 <- schwingung

# Insertionsort-Algorithmus sortiert Matrix

a = 0
b = 0
j = 0

for(i in 2:dim(schwingung1)[1]) {
```

```
  a <- schwingung1[i,1]
  b <- schwingung1[i,2]
  j <- i
  while (j>1 && schwingung1[j-1,1] > a) {
    schwingung1[j,1] <- schwingung1[j-1,1]
    schwingung1[j,2] <- schwingung1[j-1,2]
    j = j - 1
  }
  schwingung1[j,1] <- a
  schwingung1[j,2] <- b
}

write.table(schwingung1,file=paste(Ort, '/plots/', 'schwingung1.csv', sep = ""), sep = " ", dec = ".")

# Plot mit Fitdaten aus QtiPLot

a = -7.150165148353363
b = 1.355258509607770*10^(-2)
d = 4.710371782513360
f = -7.112804425708992
j = 7.576324235049420

pdf(file = paste(Ort, '/plots/', 'fit.pdf', sep = ""), width = 5, height = 5)
plot(schwingung1[,1], schwingung1[,2], xlab = expression(italic(t) ~ "/" ~ "s"), ylab = expression(italic(x) ~ "/" ~ "cm"), pch = 1, ylim = c(-14, 3))
lines(schwingung1[,1], a*exp(-b*schwingung1[,1])*sin(j*schwingung1[,1]+d)+f, col="red", lwd = 1)
legend("topright", c("Experiment", "Fit"), col = c("black", "red"), lty = cbind(0, 1), pch = cbind(1,-100), lwd = cbind(1, 1))
dev.off()

pdf(file = paste(Ort, '/plots/', 'fitzoom.pdf', sep = ""), width = 5, height = 5)
```

```
plot(schwingung1[,1], schwingung1[,2], xlab = expression(italic(
    t) ~ "/" ~ "s"), ylab = expression(italic(x) ~ "/" ~ "cm"),
    pch = 1, xlim = c(0, 0.8), ylim = c(-14, 3))
lines(schwingung1[,1], a*exp(-b*schwingung1[,1])*sin(j*
    schwingung1[,1]+d)+f, col="red", lwd = 1, xlim = c(0, 0.1000)
    )
legend("topright", c("Experiment", "Fit"), col = c("black", "red
    "), lty = cbind(0, 1), pch = cbind(1,-100), lwd = cbind(1, 1)
    )
dev.off()
```

Literaturverzeichnis

[1] CHAPMAN, S.: Some Interesting Aspects of the Impact Ball Apparatus. In: *American Journal of Physics* 9 (1941), Nr. 6, 357-360. http://dx.doi.org/10.1119/1.1991715. – DOI 10.1119/1.1991715

[2] DEMTRÖDER, W.: *Experimentalphysik 1 – Mechanik und Wärme*. 4. Auflage. Berlin Heidelberg New York : Springer-Lehrbuch, 2006

[3] EHRLICH, R.: Experiments with "Newton's cradle". In: *The Physics Teacher* 34 (1996), Nr. 3, 181-183. http://dx.doi.org/10.1119/1.2344392. – DOI 10.1119/1.2344392

[4] GAVENDA, J. D. ; EDGINGTON, J. R.: Newton's cradle and scientific explanation. In: *The Physics Teacher* 35 (1997), Nr. 7, 411-417. http://dx.doi.org/10.1119/1.2344742. – DOI 10.1119/1.2344742

[5] GIMP-ENTWICKLERTEAM: *GIMP: GNU Image Manipulation Program*. http://www.gimp.org/. Version: 2008. – Version aus den Paketquellen von UBUNTU-LINUX 10.04 LTS

[6] HERRMANN, F. ; SCHMÄLZLE, P.: Simple explanation of a well-known collision experiment. In: *American Journal of Physics* 49 (1981), August, Nr. 8, S. 761–764

[7] HERRMANN, F. ; SEITZ, M.: How does the ball-chain work? In: *American Journal of Physics* 50 (1982), November, Nr. 11, S. 977–981

[8] HURMUZLU, Y. ; CEANGA, V.: Impulse Correlation Ratio in Solving Multiple Impact Problems. In: BROGLIATO, B. (Hrsg.): *Impacts in Mechanical Systems* Bd. 551. Springer Berlin / Heidelberg, 2000. – ISBN 978–3–540–67523–5, S. 235–273. – 10.1007/3-540-45501-9_5 – http://dx.doi.org/10.1007/3-540-45501-9_5

[9] HUTZLER, S. ; DELANEY, G. ; WEAIRE, D. ; MACLEOD, F.: Rocking Newton's cradle. In: *American Journal of Physics* 72 (2004), Dezember, Nr. 12, S. 1508–1516

[10] KINOVEA-ENTWICKLERTEAM: *Kinovea (0.8.15)*. www.kinovea.org. Version: 2006 - 2011

[11] KOYOTESOFT: *Koyotesoft Free Video Converter*. http://www.koyotesoft.com/

[12] LEMON, H. B.: An Almost Forgotten Case of Elastic Impact. In: *The American Physics Teacher* 3 (1935), Nr. 1, 36-36. `http://dx.doi.org/10.1119/1.1992910`. – DOI 10.1119/1.1992910

[13] LHOTKA, C: *Nekhoroshev stability in the elliptic restricted three body problem*. Wien, Universität Wien, unv. Diss, 2008. `http://othes.univie.ac.at/3528/`

[14] LOVETT, D. R. ; MOULDING, K. M. ; ANKETELL-JONES, S.: Collisions between elastic bodies: Newton's cradle. In: *European Journal of Physics* 9 (1988), S. 323–328

[15] LUKASZ, K.: *outliers: Tests for outliers*, 2011. `http://CRAN.R-project.org/package=outliers`. – R package version 0.14

[16] MARCHAL, C.: *The Three-Body Problem*. Amsterdam : Elsevier, 1990

[17] MAXIMA: *Maxima, a Computer Algebra System. (5.20.1)*. `http://maxima.sourceforge.net/`. Version: 2010. – Version aus den Paketquellen von UBUNTU-LINUX 10.04 LTS

[18] R DEVELOPMENT CORE TEAM: *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. Vienna, Austria: R Foundation for Statistical Computing, 2009. `http://www.R-project.org`. – ISBN 3-900051-07-0

[19] SATTERLY, J.: Ball Pendulum Impact Experiments. In: *American Journal of Physics* 13 (1945), Nr. 3, 170-174. `http://dx.doi.org/10.1119/1.1990696`. – DOI 10.1119/1.1990696

[20] SIMANEK, D.: *Newton's Cradle*. `http://www.lhup.edu/~dsimanek/scenario/cradle.htm`, 2003. – Abgerufen: 17.01.2012

[21] VASILIEF, I.: *QtiPlot (0.9.7.10)*. `http://soft.proindependent.com/qtiplot.html`. Version: 2004 - 2009. – Version aus den Paketquellen von UBUNTU-LINUX 10.04 LTS

[22] WOLFRAM, S.: *A new kind of science*. Champaign : Wolfram Media, 2002

Danksagung

Zunächst einmal möchte ich Herrn Prof. Dr. Joachim Peinke für die Stellung dieses interessanten Themas sowie die Übernahme der Betreuung dieser Arbeit danken. Ferner gilt mein Dank Herrn Dr. Michael Hölling für die Übernahme des Zweitgutachters und die Unterstützung während der Arbeit.

Des Weiteren möchte ich mich bei Peter Pargmann und Bernd Schwenker bedanken, dass sie mir die Haltevorrichtung sowie das Newtonsche Pendel für die Experimente verliehen haben.

Tobias Lüschen und René Wassermeier danke ich dafür, dass sie diese Arbeit inhaltliche- und sprachliche Unstimmigkeiten durchgesehen haben.

Den Mitgliedern der Arbeitsgruppe TWIST danke ich für die freundliche und angenehme Arbeitsatmosphäre.

Außerhalb der Universität möchte ich meinen Eltern für ihre Unterstützung danken.

Daten-CD

Verzeichnis	**Dateien**
default-Ordner	ReadMe.txt casBerechnungGroesstfehler1.mac durchmesserLeuchte.txt[11]
∟ Auswertung	Auswertung.R pruefeVorzeichen.R TheoFunktionen.R Theorie.R plots.R
∟ Restitutionskoeffizienten	Messwerte für Restitutionskoeffizienten (*.txt) Bezeichnera.csv Restitutionskoeffizient.R
∟ Stoesse	Messwerte für Impulspendelexperimente (*.txt) Bezeichnerb.csv Dateneinlesen.R
∟ plots	exportierte Graphen und Tabellen
∟ Fehlermessung	Messwerte der einfachen Pendelschwingung (*.txt) schwingung1.csv Fehler.R
∟ qti_fit	FehlermessungFit.qti fitsin.fit

[11] Alle von R automatisch generierten Dateien werden hier nicht explizit aufgeführt.

Versicherung

Hiermit versichere ich, dass ich diese Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe. Außerdem versichere ich, dass ich die allgemeinen Prinzipien wissenschaftlicher Arbeit und Veröffentlichung, wie sie in den Leitlinien guter wissenschaftlicher Praxis der Carl von Ossietzky Universität Oldenburg festgelegt sind, befolgt habe.

Unterschrift