

Prozentuallogiken

– m -wertige Junktorenlogiken mit
stochastischen n -Tupeln als Geltungswerte –

Von der Carl von Ossietzky Universität Oldenburg – Fakultät IV, Human-
und Gesellschaftswissenschaften – zur Erlangung des Grades eines

Doctor philosophiae (Dr. phil.)

genehmigte Dissertation

von Herrn Manfred Arens
geboren am 28. Juni 1957 in Papenburg.

In Erinnerung an
Prof. Dr. Heinrich Besuden
1965 – 1967 Rektor der Pädagogischen Hochschule Oldenburg
Von ihm habe ich gelernt,
dass Mathematik auch Spaß machen kann.

Referent: Prof. Dr. phil. Mark Siebel
(Carl von Ossietzky Universität Oldenburg)
Korreferent: Prof. Dr. rer. nat. Roland Meyer
(Technische Universität Braunschweig)

Datum der Disputation: 21. Mai 2026

Inhaltsverzeichnis

1	Vorwort	3
2	Prozentuallogiken	7
2.1	Syntaktische Aspekte der Prozentuallogiken	7
2.1.1	Die Struktur der Prozentuallogiken	7
2.1.2	Subkalküle	10
2.2	Semantische Aspekte der Prozentuallogiken	10
3	Geltungswerte	12
3.1	Hervorstechende Geltungswerte und Palindrome	12
3.2	Der logische Betrag $ a $ der Geltungswerte	13
3.3	Die Anzahl m der Geltungswerte der Menge $\mathfrak{G}_{j,n}$	17
3.4	Zwei Ordnungsrelationen bzgl. der Menge $\mathfrak{G}_{j,n}$	19
3.4.1	Die lexikographische Anordnung	19
3.4.2	Die Anordnung nach dem logischen Betrag	21
3.4.3	Alternative Berechnung von $m_{j,n}(b)$ und $m_{j,n}(b, z_1)$	26
3.5	Graphische Veranschaulichungen der Geltungswerte	28
4	Einstellige unabhängige Junktoren	32
4.1	Die unabhängige Negation	32
4.2	Die unabhängige Zyklation und die inverse Zyklation	35
4.3	Die unabhängige Veritation als Sortierung	37
4.4	Permutationsmatrizen	43
5	Einstellige innere Junktoren	46
5.1	Die innere Zyklation	46
5.2	Weitere innere Junktoren	47
5.3	Die innere Veritation als Weitergabe	51
6	Einstellige ergänzende Junktoren	54
6.1	Die Restation als alternative Negation	54
6.2	Die Quaestation	59
6.3	Die ergänzende Veritation	66
6.3.1	Die ergänzende Veritation als Stauchung	66
6.3.2	Die ergänzende Veritation als Umschichtung	70
6.4	Die Zentration	72
6.4.1	Die Zentration mit Hilfe der Binomialverteilung	73
6.4.2	Die Zentration mit Hilfe einer Umschichtung	75
6.4.3	Der p -Junktor	77
6.5	Junktoren mit Hilfe von Geltungswerten	79
6.5.1	Der einstellige d -Junktor	79
6.5.2	Zeilenstochastische Matrizen	81
6.6	Ergänzende Junktoren und innere Abbildungen	82

7	Die Konjugation als einstelliger paralleler Junktor	86
8	Mehrstellige Junktoren	90
8.1	Die Konjunktion	90
8.1.1	Ist K_{ab} angemessen definiert?	93
8.1.2	Entspricht K_{ab} einer T-Norm?	94
8.1.3	Idempotenz und das Gesetz vom Widerspruch	96
8.1.4	Die h -stellige Konjunktion	98
8.2	Die Disjunktion	100
8.2.1	Die obere und die untere Schranke	104
8.3	Die Subjunktion	105
8.4	Die Progression	111
8.5	Der zweistellige d -Junktor	115
9	Eine Anwendung auf Schulabschlüsse	119
10	Prozentuallogiken und Produktlogiken	123
10.1	Die Produktlogik von J. Łukasiewicz	123
10.2	Die vierwertige Logik von M. Bergmann	125
10.3	Ein Vergleich: Prozentuallogiken und Produktlogiken	127
11	Grenzüberschreitungen	129
12	Resümee und Ausblick	131
13	Anhang	I
13.1	Übersicht über Junktoren	I
13.2	Geltungswerte, Zeichen und Begriffe	III
13.3	Definitionen	IV
13.4	Gesetze	IX
13.5	Listings	XIV

... andererseits ist Schreiben nichts anderes
als eine endlose Reihe von Zweifeln,
die zugunsten eines Satzes
schließlich überwunden werden müssen.
Jurek Becker¹

1 Vorwort

In der klassischen 2-wertigen Logik kann Rousseaus Aussage „Der Mensch ist von Natur aus gut“² nur mit den Wahrheitswerten „wahr“ oder „falsch“ belegt werden. In der mehrwertigen Logik sind auch Belegungen wie „ziemlich wahr“ oder „unentschieden“ denkbar. Macht man jedoch zu der oben genannten Aussage eine Umfrage, so erhält man möglicherweise folgende Belegung: „20 % falsch“, „40 % unentschieden“ und „40 % wahr“, kurz als (20 %; 40 %; 40 %) geschrieben. Dieser Tatsache soll der in dieser Arbeit beschriebene Kalkül mit dem Namen *Prozentuallogiken* Rechnung tragen³.

Womit arbeiten die Prozentuallogiken und wie arbeiten sie? Die Prozentuallogiken arbeiten mit Zahlen- bzw. Datenreihen. Diese Datenreihen haben zwei besondere Eigenschaften: Die Elemente der Datenreihen ergeben die Summe 100 %, und die Daten sind geordnet und haben innerhalb der Datenreihen eine linear zunehmende Ausprägung von „wahr“. Dabei ist die Ausprägung von „wahr“ des ersten Elementes in der Datenreihe 0, womit das erste Element für „falsch“ steht. Die Ausprägung von „wahr“ des letzten Elementes ist 1. Die Datenreihen werden in Anlehnung an die Logik „Geltungswert“ genannt. Die Interpretation der Geltungswerte ist im Gegensatz zu Wahrheitswerten jedoch nicht auf „wahr“ und „falsch“ und Abstufungen davon beschränkt. Vielmehr beschreiben die Geltungswerte in Form einer Datenreihe, in wieweit über Wahrheit hinaus bestimmte Sachverhalte gültig sind, wie die folgende Übersicht zeigen soll:

¹Jurek Becker: *Amanda herzlos*, Suhrkamp, Frankfurt a.M., 1992³, S. 143

²Jean-Jacques Rousseau: *Diskurs über die Ungleichheit*, 1755

³Ich verwende den Begriff Prozentuallogik häufig im Plural, obwohl sich die Prozentuallogiken lediglich durch die Anzahl möglicher Geltungswerte unterscheiden (s. Kap. 3.3).

	von	über	bis
Wahrheit	falsch	unentschieden, unsicher, ...	wahr
Lösung	falsch	nur z.T. gelöst	richtig
Unsicherheit (s.u.)	unmöglich	wahrscheinlich	gewiss
Qualität	mangelhaft	minderwertig	gut
Wohlbefinden	nie	ab und zu ... meistens	immer
Krankheit	krank	beeinträchtigt	gesund
Komplexität	einseitig	begrenzt	vielseitig
Versuch	misslungen	nur z.T. erfolgreich	gelungen
Vermögen	nichts	wenig ... viel	alles

Ich bin mir der mangelnden Präzision bzw. der Unschärfe der oben verwendeten Begriffe durchaus bewusst. So gibt es z.B. nach der Sherman-Kent-Skala allein 19 Abstufungen der Unsicherheit von unmöglich (impossible) bis gewiss (certain)⁴. Aber nach Kant können sowieso „nur mathematische Begriffe sauber definiert werden“⁵.

Auf die Datenreihen bzw. Geltungswerte werden Operationen angewendet, die sich an den Operatoren der 2-wertigen Logik (z.B. „nicht“, „und“ oder „wenn ... dann“) und der mehrwertigen Logik (z.B. verschiedene Negationen, Zyklation) orientieren und daher „Junktoren“ genannt werden. Diese Junktoren sollen die „Normalbedingung“ erfüllen⁶, das heißt, dass die Junktoren, soweit sie bereits aus der 2-wertigen Logik bekannt sind, beim Einsetzen von „wahr“ und „falsch“ auch in den Prozentuallogiken zu den gleichen Ergebnissen führen wie in der 2-wertigen Logik.

Bei den Junktoren verwende ich vorzugsweise die polnische Notation, da sie einerseits kurz und andererseits schnell und einfach zu schreiben ist, zumal sie keine Klammern benötigt. Außerdem gibt es nur wenige Symbole für logische Verknüpfungsoperatoren, die allgemein bekannt und gebräuchlich sind wie z.B. $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ oder $\neg$. Und schon bei der Negation ist diese Schreibweise nicht mehr einheitlich, da für $\neg$ häufig auch $\bar{a}$ verwendet wird. Für diese Arbeit benötigte ich aber zusätzlich auch Bezeichnungen für Junktoren, für die keine Symbole vorliegen. Doch gelegentlich reichen selbst die

⁴[18] Kruse et. al., S. 13

⁵[21] McNeill, Freiburger, S. 120

⁶[17] Kreiser, Gottwald, S. 25

26 Buchstaben des Alphabets nicht aus, alle Junktoren zu bezeichnen, zumal die polnische Notation bereits für die klassische 2-wertige Logik 4 Buchstaben für die 4 möglichen 1-stelligen Junktoren und 16 Buchstaben für die 16 möglichen 2-stelligen Junktoren reserviert⁷. So habe ich Junktoren, die zueinander in Beziehung stehen, mit Varianten des gleichen Buchstabens bezeichnet, wie z.B. Z für die unabhängige Zyklation, $\hat{Z}$ für die (unabhängige) inverse Zyklation und Z_m für die innere Zyklation.

Wenn in dieser Arbeit z.B. von $a = (0,1; 0,2; 0,4; 0,3)$ die Rede ist, dann ist das 4-Tupel $(0,1; 0,2; 0,4; 0,3)$ ein konkreter Geltungswert und a ein Platzhalter für diesen Geltungswert. Ich verwende der Einfachheit halber für beide den Begriff Geltungswert und gehe davon aus, dass aus dem Zusammenhang klar ist, um was von beiden es sich handelt.

Ich habe in dieser Arbeit das Sakrileg begangen, an einigen wenigen Stellen den Komparativ „wahrer“ zu benutzen, obwohl manche Logiker „Einwände gegen die Abstufung der Wahrheit“ erheben⁸. So schreibt der britische Logiker Wilfrid Hodges: „Is true a scaling adjective? It is not: ... More true can only mean ‘more nearly true’ or ‘nearer the truth’. In this sense there are no degrees of truth. Truth is absolute.“⁹ Und Peter Strehle schreibt: Auch „bei der Verwendung von Logikwerten mit mehr als zwei Elementen entspricht letztendlich nur der ‚ausgezeichnetste‘ Wert dem Wahrheitswert ‚wahr‘. Die Menge der übrigen Logikwerte entspricht dem Wert ‚falsch‘“. ... Gewissermaßen wird der „Wahrheitswert ‚falsch‘ aus Zweckmäßigkeitsgründen in eine geordnete Menge von Logikwerten zerlegt.“¹⁰. Aber bereits Aristoteles benutzt im 9. Kapitel seines Werkes *De Interpretatione* die Begriffe „wahrer“ und „falscher“¹¹. Und der amerikanische Philosoph Max Black schreibt 1937 in seinem Artikel über Vagheit¹²: „While the mathematician constructs a theory in terms of ‘perfect’ objects, the experimental scientist observes objects of which the properties demanded by theory are and can, in the very nature of measurement, be only approximately true.“ Somit verwende ich den Begriff „wahrer“ im Sinne von „näher an wahr“. Ist „falsch“ = 0 und „wahr“ = 1, dann ist a „wahrer“ als b , wenn $0 \leq b < a \leq 1$ ist. Nur wenn $a > 1$ wäre, wäre a „wahrer“ als „wahr“, was dann „im wahrsten Sinne des Wortes“ unsinnig wäre. Aber die Interpretation der Geltungswerte beschränkt sich ja nicht nur auf Abstufungen von „wahr“ und „falsch“. Komparative wie „gesünder“, „vielseitiger“ oder „reicher“ sind weniger umstritten.

⁷Siehe im Anhang 13.1 die Übersicht über die Junktoren

⁸[21] McNeill, Freiburger, S. 57

⁹[13] Hodges, S. 34

¹⁰[30] Strehle, S. 67

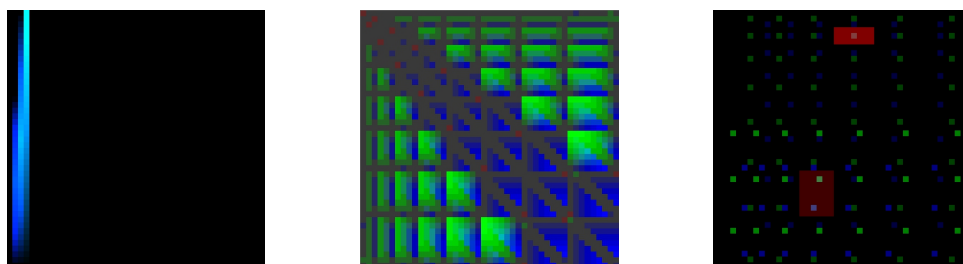
¹¹[21] Nach McNeill, Freiburger, S. 77f

¹²[4] Black, S. 427ff

Falls nach Drucklegung diese Arbeit noch Fehler auftauchen sollten, werde ich bei den Materialien zu dieser Arbeit unter <https://www.untexte.de/logik/> eine Liste mit Errata hinterlegen.

Dass Fehler aber durchaus auch eine schöne Seite haben können, zeigen die 3 Abbildungen am Ende dieses Vorworts, die jeweils das Ergebnis von Programmierfehlern waren.

Bleibt mir noch, mich bei all denjenigen zu bedanken, die mich bei der Erstellung dieser Dissertation unterstützt haben, nämlich zunächst Prof. Dr. Mark Siebel von der Carl von Ossietzky Universität Oldenburg als Betreuer und Erstgutachter und Prof. Dr. Roland Meyer von der TU Braunschweig als Zweitgutachter. Ohne ihr Interesse am Thema dieser Arbeit wäre diese Dissertation nie zustande gekommen. Prof. Dr. Siebel war zudem als Betreuer stets unterstützend und ermutigend. Bedanken möchte ich mich bei Frau Soelve Faja vom Serviceteam der Universitätsbibliothek Leipzig, die mir Material zur Logik von Peter Strehle¹³ zur Verfügung gestellt hat. Mein besonderer Dank gilt meiner Frau Birgit, die nicht nur den einen oder anderen (Flüchtigkeits-)Fehler entdeckt hat, sondern während der ganzen Zeit des Promotionsvorhabens meine wichtigste (und geduldige) Gesprächspartnerin war. Auch meine Tochter und mein Schwiegersohn Rahel und Chico Sundermann, die zur gleichen Zeit wie ich an ihrer Dissertation gearbeitet haben, haben mir wichtige Tipps nicht nur zu LaTeX, sondern auch zu praktischen Abläufen gegeben. Nicht zuletzt möchte ich mich bei meinen Freunden Christoph Heidrich und Jürgen Schlusnus bedanken. Jürgen hat mich überhaupt erst auf die Idee gebracht, zu promovieren, und Christoph hat mich immer aufgerichtet, wenn ich der Meinung war, dass etwas sowieso nicht klappt und außerdem für den Erfolg dieser Promotion gebetet.



¹³[30] Siehe Literaturverzeichnis

2 Prozentuallogiken

2.1 Syntaktische Aspekte der Prozentuallogiken

2.1.1 Die Struktur der Prozentuallogiken

Der Kalkül der Prozentuallogiken hat die Struktur $\sigma = \langle \mathfrak{G}_{j,n}, \mathfrak{A}_n, \mathfrak{J}, \mathfrak{F}_n \rangle^{14}$:

- $\mathfrak{G}_{j,n} \neq \emptyset$ ist die Menge aller Geltungswerte. Die Geltungswerte sind n -Tupel und die Objekte der n -Tupel sind Brüche aus dem abgeschlossenen Intervall $[0, 1]$ der Menge $\mathbb{Q}$ der reellen Zahlen mit $\alpha_i \in \{\frac{0}{j}, \frac{1}{j}, \frac{2}{j}, \dots, \frac{j}{j}\}$, wobei die Summe aller Zähler der Objekte j ergibt. Die Summe aller Objekte der n -Tupel ist also $1 = 100\%$. Nachfolgend die „ersten“ Geltungswerte sortiert nach j und n :

j	n	2	3	4	5	...
1		$(\frac{0}{1}, \frac{1}{1})$	$(\frac{0}{1}, \frac{0}{1}, \frac{1}{1})$	$(\frac{0}{1}, \frac{0}{1}, \frac{0}{1}, \frac{1}{1})$	$(\frac{0}{1}, \frac{0}{1}, \frac{0}{1}, \frac{0}{1}, \frac{1}{1})$	
		$(\frac{1}{1}, \frac{0}{1})$	$(\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{0}{1})$	$(\frac{0}{1}, \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{0}{1})$	$(\frac{0}{1}, \frac{0}{1}, \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{0}{1})$	
			$(\frac{1}{1}, \frac{0}{1}, \frac{0}{1})$	$(\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{0}{1}, \frac{0}{1})$	$(\frac{0}{1}, \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{0}{1}, \frac{0}{1})$	
				$(\frac{1}{1}, \frac{0}{1}, \frac{0}{1}, \frac{0}{1})$	$(\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{0}{1}, \frac{0}{1}, \frac{0}{1})$	
					$(\frac{1}{1}, \frac{0}{1}, \frac{0}{1}, \frac{0}{1}, \frac{0}{1})$	
2					$(\frac{1}{2}, \frac{0}{2}, \frac{0}{2}, \frac{0}{2}, \frac{0}{2})$	
		$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$(\frac{0}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$(\frac{0}{2}, \frac{0}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$(\frac{0}{2}, \frac{0}{2}, \frac{0}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	
			$(\frac{1}{2}, \frac{0}{2}, \frac{1}{2})$	$(\frac{0}{2}, \frac{1}{2}, \frac{0}{2}, \frac{1}{2})$	$(\frac{0}{2}, \frac{0}{2}, \frac{1}{2}, \frac{0}{2}, \frac{1}{2})$	
			$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{0}{2})$	$(\frac{0}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{0}{2})$	$(\frac{0}{2}, \frac{0}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{0}{2})$	
				$(\frac{1}{2}, \frac{0}{2}, \frac{0}{2}, \frac{1}{2})$	$(\frac{0}{2}, \frac{1}{2}, \frac{0}{2}, \frac{0}{2}, \frac{1}{2})$	
				$(\frac{1}{2}, \frac{0}{2}, \frac{1}{2}, \frac{0}{2})$	$(\frac{0}{2}, \frac{1}{2}, \frac{0}{2}, \frac{1}{2}, \frac{0}{2})$	
				$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{0}{2}, \frac{0}{2})$	$(\frac{0}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{0}{2}, \frac{0}{2})$	
					$(\frac{1}{2}, \frac{0}{2}, \frac{0}{2}, \frac{0}{2}, \frac{1}{2})$	
					$(\frac{1}{2}, \frac{0}{2}, \frac{0}{2}, \frac{1}{2}, \frac{0}{2})$	
					$(\frac{1}{2}, \frac{0}{2}, \frac{1}{2}, \frac{0}{2}, \frac{0}{2})$	
3		$(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$	$(\frac{0}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$	$\vdots$	$\vdots$	
		$(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$	$(\frac{0}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$			
			$(\frac{1}{3}, \frac{0}{3}, \frac{2}{3})$			
			$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$			
			$(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{0}{3})$			
			$(\frac{2}{3}, \frac{0}{3}, \frac{1}{3})$			
			$(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{0}{3})$			
4		$(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
		$(\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$				

¹⁴Nach [23] Priest, S. 136

Die Tabelle könnte den fälschlichen Eindruck vermitteln, dass es z.B. für $n = 2$ und $j = 4$ nur 2 Geltungswerte gäbe, nämlich $(\frac{1}{4}; \frac{3}{4})$ und $(\frac{3}{4}; \frac{1}{4})$. Es gibt jedoch auch noch die Geltungswerte $(\frac{0}{4}; \frac{4}{4}) = (\frac{0}{1}; \frac{1}{1})$, $(\frac{2}{4}; \frac{2}{4}) = (\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ und $(\frac{4}{4}; \frac{0}{4}) = (\frac{1}{1}; \frac{0}{1})$, die in gekürzter Form bereits bei $n = 1$ und $j = 2$ aufgelistet waren, da 1 und 2 die Zahl 4 teilen. Somit ist $m = 5$ die Mächtigkeit der Menge $\mathfrak{G}_{4,2}$.

Häufig ist es praktischer oder anschaulicher, die Objekte nicht als Brüche mit gemeinsamem Hauptnenner, sondern als gekürzte Brüche, als (positive) rationale Dezimalbrüche oder als Prozentsätze zu schreiben. Noch handlicher ist es, nur die Zähler zu schreiben, da sich die gemeinsamen Nenner aus der Summe der Zähler ergeben. Dazu ein Beispiel:

$$\begin{aligned} & (\frac{20}{100}; \frac{40}{100}; \frac{40}{100}) = \\ & (\frac{1}{5}; \frac{2}{5}; \frac{2}{5}) = \\ & (0,2; 0,4; 0,4) = \\ & (20\%; 40\%; 40\%) \hat{=} \\ & (20; 40; 40) \text{ bzw. } (1; 2; 2) \end{aligned}$$

Da die Objekte der Geltungswerte gelegentlich wie im Beispiel $(0,2; 0,4; 0,4)$ als Dezimalbrüche geschrieben werden und somit Kommata enthalten, ist es sinnvoll (wenn auch nicht üblich), die Objekte trotz Leerzeichen durch Semikola statt durch Kommata voneinander zu trennen, um das Lesen der Tupel zu vereinfachen.

Die Menge $\mathfrak{G}_{k,n}$ ist eine Teilmenge der Menge $\mathfrak{G}_{l,n}$, wenn k die Zahl l teilt. Somit ist $\mathfrak{G}_{1,n}$ Teilmenge jeder Menge $\mathfrak{G}_{j,n}$.

Mit endlichen Werten für j und n ist die jeweilige Prozentuallogik endlich. Eine endlichwertige Prozentuallogik kann als m -wertig bezeichnet werden.

Die Objekte der Geltungswerte repräsentieren unterschiedliche Intensitäten von „wahr“, wobei die Intensität von „wahr“ des ersten Objektes im Tupel 0 ist und bis zum letzten Objekt, dessen Intensität 1 ist, zunimmt.

n -Tupel, bei denen die Summe der Objekte 1 ist, können in Analogie zu zeilenstochastischen Matrizen¹⁵ auch „stochastisch“ genannt werden.

¹⁵[3] Behnke, Tietz, S. 375. In der Literatur wird eine stochastische Matrix oft auch dahingehend definiert, dass nicht die Zeilensumme, sondern die Spaltensumme 1 ist. Man nennt diese Matrix dann spaltenstochastisch. Das würde dazu führen, dass die Elemente

- $\mathfrak{A}_n \subseteq \mathfrak{G}_{j,n}$ mit $\mathfrak{A}_n \neq \emptyset$ ist die Menge der ausgezeichneten Wahrheitswerte, im Fall der Prozentuallogiken die Menge mit dem einen Element $(\underbrace{0, 0, \dots; 0, 1}_{(n-1)\text{-mal}})$, das in dieser Arbeit als „wahr“ bzw. W_n bezeichnet wird.
- $\mathfrak{J} \neq \emptyset$ ist die Menge der Junktoren bzw. Konnektoren, die in polnischer Präfix-Notation geschrieben werden. $\mathfrak{J}_1 \subseteq \mathfrak{J}$ ist die Menge der einstelligen Junktoren: $\mathfrak{J}_1 = \{N, Z, \acute{Z}, W, \acute{W}, N_m, Z_m, W_m, \acute{W}_m, \#Z_m, \#\acute{Z}_m, \#W_m, \#\acute{W}_m, R, Q_y, W_x, *W_x, T, T_x, {}^PT_p, U\}$. Die Differenzmenge $\mathfrak{J} \setminus \mathfrak{J}_1 = \mathfrak{J}_k$ ist die Menge der mehrstelligen Junktoren: $\mathfrak{J}_k = \{K, K_h, A, A_h, C, P, {}^DY_d\}$, wobei K, A, C, P und DY_d zweistellig und K_h und A_h h-stellig sind.
- $\mathfrak{F}_n \neq \emptyset$ ist die Menge $\{f_X \mid X \in \mathfrak{J}\}^{16}$ der zu einzelnen Junktoren aus der Menge $\mathfrak{J}$ gehörenden Funktionen, wobei f_X das n -Tupel $(f_{1,X}, f_{2,X}, f_{3,X}, \dots, f_{n,X})$ ist und f_i bei einstelligen Junktoren das i -te Objekt eines n -stelligen Geltungswertes bzw. bei mehrstelligen Junktoren die i -ten Objekte mehrerer n -stelligen Geltungswerte abbildet. Nicht zu jedem Junktor der Prozentuallogiken ist eine entsprechende Funktion f_X definiert.

Die Menge $\mathfrak{J}_1$ der einstelligen Junktoren kann in vier Gruppen eingeteilt werden:

1. Junktoren, die die Objekte der Geltungswerte lediglich permutieren, nämlich $N, Z, \acute{Z}, W$ und $\acute{W}$. Dabei spielt es keine Rolle, aus welcher Menge $\mathfrak{G}_{j,n}$ die Geltungswerte stammen, da nach einer Permutation j und n in jedem Fall unverändert bleiben. Daher möchte ich diese Junktoren *unabhängig* nennen.
2. Junktoren, die Geltungswerte aus der Menge $\mathfrak{G}_{j,n}$ so in Geltungswerte aus der Menge $\mathfrak{G}_{j,n}$ überführen, dass j und n nicht verändert werden, auch wenn sich die Menge der Objekte des Geltungswertes ändert, nämlich $N_m, Z_m, \#Z_m, \#\acute{Z}_m, \#W_m, \#\acute{W}_m, W_m, \acute{W}_m$ und $\#U$. Da die Abbildungen innerhalb der Menge $\mathfrak{G}_{j,n}$ stattfinden, möchte ich diese Junktoren *innere* Junktoren nennen.
3. Junktoren, die Geltungswerte aus der Menge $\mathfrak{G}_{j,n}$ nicht stets wieder auf Geltungswerte aus der Menge $\mathfrak{G}_{j,n}$, sondern in der Regel auf Geltungswerte aus der Menge $\mathfrak{G}_{l,n}$ abbilden, wobei j die Zahl

der Spaltenvektoren und somit die Objekte der in dieser Arbeit beschriebenen n -Tupel übereinander geschrieben würden, was ich für das Schreiben, das Lesen und für das Schriftbild dieser Arbeit für ungünstig halte.

¹⁶X fungiert an dieser Stelle als Platzhalter für einen beliebigen Junktor in polnischer Notation und darf nicht mit dem Junktor X für NOR (s. Anhang) verwechselt werden.

l teilt. Somit ist $\mathfrak{G}_{j,n}$ eine Teilmenge von $\mathfrak{G}_{l,n}$ und die Geltungswerte aus der Menge $\mathfrak{G}_{j,n}$ sind ebenfalls Elemente der Obermenge $\mathfrak{G}_{l,n}$. Da die Abbildung nicht stets innerhalb der Menge $\mathfrak{G}_{j,n}$ stattfindet, sondern die Geltungswerte der Menge $\mathfrak{G}_{j,n}$ auf Geltungswerte der Ergänzungsmenge von $\mathfrak{G}_{j,n}$ bezüglich der Menge $\mathfrak{G}_{l,n}$ abbildet werden, möchte ich diese Junktoren, nämlich R , Q_y , W_x , *W_x , T , T_x und PT_p , *ergänzende* Junktoren nennen.

4. Die Konjugation U ist ein Junktor, der Geltungswerte der Menge $\mathfrak{G}_{j,n}$ auf Geltungswerte der gleichmächtigen, aber (in der Regel) disjunkten Menge $\mathfrak{G}_{n-1,j+1}$ abbildet¹⁷. Da die beiden Mengen sich nicht schneiden, möchte ich diesen Junktor *parallel* nennen.

2.1.2 Subkalküle

Wenn man Teilmengen aus den Elementen der Struktur für den Kalkül der Prozentuallogiken bildet, entstehen neue (Sub-)Kalküle (Im Folgenden schreibe ich die Objekte $\frac{0}{2}$ und $\frac{0}{3}$ bzw. $\frac{2}{2}$ und $\frac{3}{3}$ der Geltungswerte der Einfachheit halber als 0 und 1):

- Mit $\mathfrak{G}_{1,2} = \{(0;1), (1;0)\}$, $\mathfrak{A}_2 = \{(0;1)\}$ und $\mathfrak{J} = \{N, K, A, C, E\}$ erhalte ich die klassische 2-wertige Logik, in der die Junktoren $N = Z = Z_m = \dot{Z} = \dot{Z}_m = R$ zu einem einzigen Junktor N zusammenfallen. Allerdings werden in der Prozentuallogik mit $j = 1$ und $n = 2$ die Wahrheitswerte „wahr“ als $(0;1)$ und „falsch“ als $(1;0)$ geschrieben.
- Mit $\mathfrak{G}_{1,3} = \{(0;0;1), (0;1;0), (1;0;0)\}$, $\mathfrak{A}_3 = \{(0;0;1)\}$ und $\mathfrak{J} = \{N, Z, \dot{Z}, K, A, C, E\}$ erhalte ich eine 3-wertige Logik.
- Eine Prozentuallogik im engeren Sinne des Wortes erhalte ich mit der Menge $\mathfrak{G}_{100,n}$, also wenn der Nenner $j = 100$ und der Zähler somit der Betrag eines Prozentsatzes ist. Erlaube ich beim Prozentsatz eine Nachkommastelle (2 Nachkommastellen), so muss $j = 1000$ ($j = 10000$) gewählt werden.

2.2 Semantische Aspekte der Prozentuallogiken

Nachfolgend möchte ich an 3 Beispielen die semantischen Aspekte der Prozentuallogiken verdeutlichen:

- Der Aussage „Ich habe gerade eine 6 gewürfelt“ kann in der 2-wertigen Logik der Wert „wahr“ oder „falsch“ zugeordnet werden. Der Aussage „Ich werde als Nächstes eine 6 würfeln“ kann vor dem Würfeln in der 2-wertigen Logik nicht mit Sicherheit „wahr“ oder „falsch“ zugeordnet werden, da der Inhalt der Aussage sich auf die (noch nicht eingetretene)

¹⁷Falls $j = n - 1 \Leftrightarrow j + 1 = n$ ist, so sind die beiden Mengen $\mathfrak{G}_{j,n}$ und $\mathfrak{G}_{n-1,j+1}$ identisch.

Zukunft bezieht. In einer 3-wertigen Logik mit den Geltungswerten 0, 1 und u für „unbestimmt“ wäre eine Zuordnung mit u sinnvoll. In einer 7-wertigen 2-stelligen Prozenuallogik mit Geltungswerten aus der Menge $\mathfrak{G}_{6,2}$ wäre hingegen gemäß der Wahrscheinlichkeitsrechnung eine Zuordnung mit $(\frac{5}{6}, \frac{1}{6})$ passend.

- Die Aussage „Die Kinder hatten Spaß beim Spielen“ kann, wenn von 4 Kindern eines Spaß hatte, 2 ein wenig Spaß hatten und ein Kind eher keinen, in der 2-wertigen Logik nicht wirklich treffend mit einem der Werte „wahr“ oder „falsch“ belegt werden. In einer 4-wertigen Logik mit 4 Geltungswerten von 0 bis 1 wäre der Geltungswert $\frac{2}{3}$ zutreffend. In einer 4-stelligen Prozenuallogik mit Geltungswerten aus der Menge $\mathfrak{G}_{4,4}$ würde der Geltungswert $(\frac{0}{4}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{1}{4})$ die Situation präzise beschreiben.
- Prüfungen spielen in Schule, Studium oder Ausbildung eine große Rolle. Wenn z.B. in der Schule eine Klassenarbeit zurückgegeben wird, so ist die erste Frage der Schüler/-innen meistens: „Ist die Arbeit gut ausgefallen?“ Die Antwort der Lehrer/-innen ist dann nicht unbedingt „2-wertig“ mit den Extremen „sehr schlecht“ oder „sehr gut“, sondern oft „mehrwertig“ wie z.B. „ziemlich schlecht“ oder „eher schlecht“, „es geht so“ oder „recht gut“. Aussagekräftiger ist die Durchschnittsnote. Noch aussagekräftiger ist jedoch ein Notenspiegel wie z.B.:

1	2	3	4	5	6
4	3	7	7	2	0

Der entsprechenden Geltungswert einer Prozenuallogik wäre bei 23 Schüler/-innen $(\frac{0}{23}, \frac{2}{23}, \frac{7}{23}, \frac{7}{23}, \frac{3}{23}, \frac{4}{23})$, wobei dieser Geltungswert aus der Menge $\mathfrak{G}_{23,6}$ im Gegensatz zum Notenspiegel mit „falsch“ beginnt, also dem schlechtesten Ergebnis.

Der Versuch, Alltagssprache formal abzubilden, birgt das Risiko, ungenau zu sein, und auch für Bertrand Russell war „jegliche Sprache ... unbestimmt“¹⁸. Was ist z.B. mit der Formulierung „ziemlich wahr“ gemeint? Heißt „ziemlich wahr“ so viel wie „zu 80 % wahr“ oder doch eher „zu 90 % wahr“? Angenommen, das Ergebnis einer Umfrage ist „zu 20 % falsch, zu 50 % ziemlich wahr und zu 30 % wahr“. Da die Intensität des Wahrheitsgehaltes von α_1 bis α_n linear zunimmt, dürfte dieses Ergebnis nicht durch das 3-Tupel bzw. Tripel $(0,2; 0,5; 0,3)$ abgebildet werden, da dann „ziemlich wahr“ bedeuten würde „zu 50 % wahr“. Ein passendes Tupel wäre hingegen $(0,2; 0; 0; 0; 0,5; 0,3)$, falls „ziemlich wahr“ bedeutet „zu 80 % wahr“. Bedeutet es jedoch „zu 90 % wahr“, ist das entsprechende Tupel $(0,2; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0,5; 0,3)$.

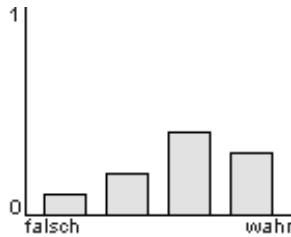
¹⁸[26] Russell, S. 84

3 Geltungswerte

Definition 1. In einer Prozentuallogik ist der *Geltungswert* ein (geordnetes) n -Tupel $a := (\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \dots; \alpha_n)$ von (endlich vielen¹⁹) Zahlen $\alpha_i \in \mathbb{Q}$ mit $0 \leq \alpha_i \leq 1 = 100\%$ und $n > 1$ ²⁰ und

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 = 100\%.$$

Somit sind die Geltungswerte sogenannte „stochastische Tupel“, also Zeilen einer zeilenstochastischen Matrix, die dadurch definiert ist, dass die Elemente der Matrix aus der Menge bzw. dem Intervall $[0, 1]$ sind und die Zeilensumme 1 ist (s.o.). α_i wird Objekt des Geltungswertes a genannt. Dabei repräsentiert α_1 die Intensität von „falsch“ = 0 und α_n die Intensität von „wahr“ = 1, wobei die Intensität des Wahrheitsgehaltes von α_1 bis α_n linear von 0 bis 1 zunimmt, wie man es u.a. von Likert-Skalen kennt. Ein Beispiel für einen Geltungswert einer 4-stelligen Prozentuallogik (also mit $n = 4$) wäre $a = (0,1; 0,2; 0,4; 0,3) = (10\%; 20\%; 40\%; 30\%)$:



3.1 Hervorstechende Geltungswerte und Palindrome

In der klassischen 2-wertigen Logik gibt es nur 2 Geltungswerte, nämlich den ausgezeichneten Geltungswert „wahr“ = $W = 1$ und sein Gegenstück „falsch“ = $F = 0$. Man könnte beide als „hervorstechend“ bezeichnen. In einer n -wertigen Logik könnte noch ein dritter Geltungswert als hervorstechend bezeichnet werden, nämlich der „mittlere“, vorausgesetzt, dass $n = 2k - 1$ ($k \in \mathbb{N}$ und $k > 1$) und somit ungerade ist. Für eine 5-wertige Logik mit Geltungswerten aus der Menge $\mathfrak{G} = \{0, 0,25, 0,5, 0,75, 1\}$ wäre der mittlere Wert 0,5 an der Stelle k hervorstechend, da die mehrwertigen Logiken in der Regel die Negation (s. Kap. 4.1) so definieren, dass die Negation des mittleren Wertes wieder diesen Wert ergibt.

¹⁹Da a z.B. eine Umfrage abbildet, ist es sinnvoll, dass die Anzahl möglicher Antworten endlich ist.

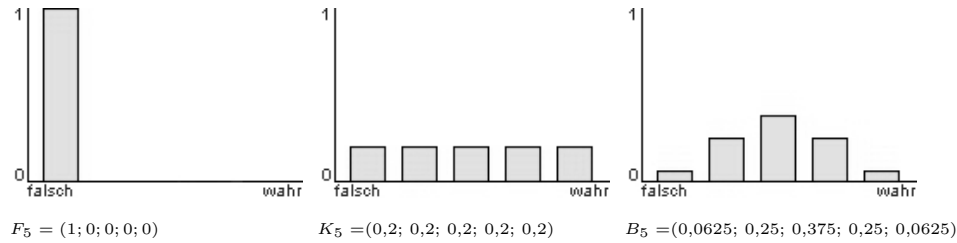
²⁰Die natürliche Zahl n ist sinnvollerweise größer als 1, da eine Umfrage mehr als eine Antwortmöglichkeit haben sollte. Das heißt, dass die n -Tupel mindestens geordnete Paare sind.

Auch in einer n -stelligen Prozentuallogik stechen zunächst die 2 Geltungswerte „wahr“ = $W_n = \underbrace{(0; 0; \dots; 0; 1)}_{(n-1)\text{-mal}}$ und „falsch“ = $F_n = (1; \underbrace{0; 0; \dots; 0}_{(n-1)\text{-mal}})$ besonders hervor. Und auch für den „mittleren“ Geltungswert $M_n = \underbrace{(0; 0; \dots; 0; 1)}_{(k-1)\text{-mal}}; \underbrace{0; 0; \dots; 0}_{(k-1)\text{-mal}}$ einer n -stelligen Prozentuallogik mit $n = 2k - 1$ ist die Negation von M_n wieder M_n (s. Kap. 4.1). Der entsprechende „mittlere“ Geltungswert in einer n -stelligen Prozentuallogik mit geradem $n = 2k$ ($k > 0$) wäre dann $M'_n = \underbrace{(0; 0; \dots; 0; 0,5; 0,5; 0; 0; \dots; 0)}_{(k-1)\text{-mal}}$.

Ein weiterer hervorstechender Geltungswert ist der konstante Geltungswert $K_n = (\frac{1}{n}; \frac{1}{n}; \dots; \frac{1}{n})$, bei dem alle Objekte gleich sind. Falls n die Zahl j teilt, so ist $K_n \in \mathfrak{G}_{j,n}$. Die Geltungswerte M_n , M'_n und K_n haben gemeinsam, dass sie Palindrome sind. Palindromisch sind auch Geltungswerte, die einer Binomialverteilung²¹ mit $p = 0,5$ entsprechen, wie z.B. $B_5 = (0,0625; 0,25; 0,375; 0,25; 0,0625)$. Für eine n -stellige Prozentuallogik wäre der Geltungswert (ebenfalls mit $p = 0,5$) dann:

$$B_n = \left(\frac{\binom{n-1}{0}}{2^{n-1}}; \frac{\binom{n-1}{1}}{2^{n-1}}; \dots; \frac{\binom{n-1}{n-1}}{2^{n-1}} \right)$$

Hier noch einmal einige hervorstechende Geltungswerte als Säulendiagramm:



Im Zusammenhang mit der Negation (s. Kap. 4.1) und dem logischen Betrag (s. nächstes Kap.) werden Palindrome noch einmal eine Rolle spielen.

3.2 Der logische Betrag $|a|$ der Geltungswerte

Wenn die Geltungswerte zum Ausdruck bringen, in wie weit eine Aussage „falsch“ oder „wahr“ ist, dann stellt sich die Frage, wann ein Geltungswert a „wahrer“ ist als ein Geltungswert b . Angenommen, $a = (\frac{0}{16}; \frac{4}{16}; \frac{0}{16}; \frac{12}{16})$ und $b = (\frac{0}{16}; \frac{1}{16}; \frac{5}{16}; \frac{10}{16})$. Ist dann a „wahrer“ als b , „falscher“ als b oder gleich „wahr“? Bei a ist zwar das letzte Objekt, das für die Wahrheitsintensität 1

²¹ $f(x) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ [22] Papula, S. 418

steht, etwas größer als das letzte Objekt von b. Dafür ist das vorletzte Objekt von a aber 0. Die Antwort auf die Frage nach „wahrer“ hängt nicht nur von den einzelnen Objekten ab, sondern vom Zusammenwirken der Objekte mit den Wahrheitsintensitäten.

Bevor ich eine Antwort auf die Frage nach „wahrer“ oder „falscher“ gebe, möchte ich noch einmal auf das Thema „Notenspiegel zu Klassenarbeiten“ aus dem Kapitel 2.2 zurückkommen: Angenommen, 3 Klassenarbeiten haben folgende Notenspiegel:

	1	2	3	4	5	6
1. Klassenarbeit	4	3	7	7	2	0
2. Klassenarbeit	0	9	7	5	2	0
3. Klassenarbeit	4	5	6	5	1	2

Berechne ich zu allen 3 Arbeiten die Durchschnittsnote, so erhalte ich:

1. Klassenarbeit: $(4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 7 \cdot 3 + 7 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 0 \cdot 6)/23 = 3,0$
2. Klassenarbeit: $(0 \cdot 1 + 9 \cdot 2 + 7 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 0 \cdot 6)/23 = 3,0$
3. Klassenarbeit: $(4 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 6)/23 = 3,0$

Alle 3 Arbeiten sind also „gleich gut“ ausgefallen. Analog zur Durchschnittsnote lässt sich nun für die Geltungswerte einer Prozentuallogik ein „logischer Betrag“ folgendermaßen definieren:

Definition 2. Der *Betrag* eines Geltungswertes $a = (\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \dots; \alpha_n)$ ist definiert durch:

$$|a| := \frac{1}{n-1}\alpha_2 + \frac{2}{n-1}\alpha_3 + \dots + \frac{n-2}{n-1}\alpha_{n-1} + \alpha_n = \sum_{i=2}^n \sum_{k=2}^i \frac{\alpha_i}{n-1}$$

Offensichtlich ist $|W_n| = 1$ und nur W_n hat den Betrag 1. Entsprechend ist $|F_n| = 0$ und auch nur F_n hat den Betrag 0. Der Betrag von Palindromen p ist stets $|p| = \frac{1}{2}$, denn:

Falls $n = 2k$ gerade ist, ist:

$$\begin{aligned} |p| &= \frac{1}{n-1}\alpha_2 + \dots + \frac{k-1}{n-1}\alpha_k + \frac{k}{n-1}\alpha_k + \dots + \frac{n-2}{n-1}\alpha_2 + \alpha_1 = \\ &= \left(\frac{1}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\right)\alpha_2 + \dots + \left(\frac{k-1}{n-1} + \frac{k}{n-1}\right)\alpha_k + \alpha_1 = \\ &= \frac{n-1}{n-1}\alpha_2 + \dots + \frac{2k-1}{n-1}\alpha_k + \alpha_1 = \\ &= \frac{n-1}{n-1}\alpha_2 + \dots + \frac{n-1}{n-1}\alpha_k + \alpha_1 = \\ &= \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Falls $n = 2k-1$ ungerade ist, ist zunächst:

$$n = 2k - 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$n - 1 = 2k - 2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{n-1}{2} = k - 1$$

Somit ist dann: $|p| =$

$$\frac{1}{n-1}\alpha_2 + \cdots + \frac{k-2}{n-1}\alpha_{k-1} + \frac{k-1}{n-1}\alpha_k + \frac{k}{n-1}\alpha_{k-1} + \cdots + \frac{n-2}{n-1}\alpha_2 + \alpha_1 =$$

$$\left(\frac{1}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\right)\alpha_2 + \cdots + \left(\frac{k-2}{n-1} + \frac{k}{n-1}\right)\alpha_{k-1} + \frac{k-1}{n-1}\alpha_k + \alpha_1 =$$

$$\frac{n-1}{n-1}\alpha_2 + \cdots + \frac{2k-2}{n-1}\alpha_{k-1} + \frac{k-1}{n-1}\alpha_k + \alpha_1 =$$

$$\frac{n-1}{n-1}\alpha_2 + \cdots + \frac{n-1}{n-1}\alpha_{k-1} + \frac{\frac{n-1}{2}}{n-1}\alpha_k + \alpha_1 =$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{k-1} + \frac{1}{2}\alpha_k = \frac{1}{2}$$

Gesetz 1. $|W_n| = 1, |F_n| = 0$ und $|p| = |K_n| = |M_n| = |M'_n| = |B_n| = \frac{1}{2}$

Um auf die Frage vom Anfang dieses Kapitels zurückzukommen, ob der Geltungswert a oder der Geltungswert b „wahr“ ist: Es ist $|a| < |b|$, denn $|a| = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \cdot 0 + \frac{3}{4} = \frac{1}{12} + 0 + \frac{9}{12} = \frac{5}{6}$ und $|b| = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{16} + \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{16} + \frac{5}{8} = \frac{1}{48} + \frac{10}{48} + \frac{30}{48} = \frac{41}{48} > \frac{40}{48}$.

Da der Nenner der Objekte des Geltungswertes j ist und der Nenner der Brüche, mit denen die Objekte multipliziert werden, $(n-1)$ ist, ist der Nenner des Betrags $j \cdot (n-1)$. Somit ist der kleinste mögliche Betrag $|F_n| = \frac{0}{j(n-1)}$ und der größte mögliche Betrag $|W_n| = \frac{j(n-1)}{j(n-1)}$. Das bedeutet:

Gesetz 2. Die Anzahl unterschiedlicher logischer Beträge von Geltungswerten aus der Menge $\mathfrak{G}_{j,n}$ ist $j \cdot (n-1) + 1$.

Wenn Palindrome den Betrag $\frac{1}{2}$ haben, so gibt es in einer Menge $\mathfrak{G}_{j,n}$ nur dann palindromische Geltungswerte, wenn der Betrag $\frac{1}{2}$ überhaupt vorkommt. Das ist der Fall, wenn die Anzahl unterschiedlicher logischer Beträge $j(n-1) + 1$ ungerade bzw. $j(n-1)$ gerade und somit durch 2 teilbar ist. Das darf jedoch nicht zu dem falschen Umkehrschluss verleiten, dass alle Geltungswerte mit dem Betrag $\frac{1}{2}$ Palindrome sind, wie das Gegenbeispiel $(\frac{2}{6}; \frac{0}{6}; \frac{3}{6}; \frac{1}{6})$ zeigt.

In Kapitel 2.1.1 zur Struktur der Prozentuallogiken wurde die Menge $\mathfrak{A}_n$ der ausgezeichneten Wahrheitswerte beschrieben, die nur das eine Element $(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{(n-1)\text{-mal}}; 1) = \text{„wahr“}$ enthielt. Nachdem der Betrag definiert wurde,

könnte auch die Menge $\mathfrak{A}_n$ bzw. der Begriff „ausgezeichnet“ modifiziert oder ergänzt werden:

Definition 3. Ein Geltungswert a wird als *ausgezeichnet* bezeichnet, wenn $|a| = 1$ ist. Ein Geltungswert a wird als *schwach ausgezeichnet* bezeichnet, wenn $|a| \geq \frac{1}{2}$ ist.

Durch die Berechnung der Beträge wird die Prozentuallogik mit Tupeln als Geltungswerte auf eine mehrwertige Logik mit Zahlen aus dem Intervall $[0, 1]$ als Geltungswerte reduziert. Und diese Zahlen/Geltungswerte scheinen sogar besser zu beschreiben, welche Aussagen „wahrer“ als andere Aussagen sind. Wozu dann überhaupt eine Logik mit stochastischen Tupeln?

Um diese Frage zu beantworten, kehre ich noch einmal zu den 3 Klassenarbeiten vom Anfang dieses Kapitels zurück: Rechnerisch gemäß der Durchschnittsnote (die dem logischen Betrag entspricht) waren die 3 Klassenarbeiten gleich gut ausgefallen, aber aus pädagogischer Sicht nicht unbedingt, was erst an den Notenspiegeln (die einem Geltungswert in Form eines Tupels entsprechen) zu sehen ist. Aus der Sichtweise eines Lehrers würde ich die 2. Klassenarbeit für die beste halten, da hier die meisten Schüler/-innen eine Note besser als „befriedigend“ haben. Dass in der 2. Klassenarbeit keine Schüler/-innen die Note „sehr gut“ haben, spielt unter dem Gesichtspunkt der Lernzielerreichung eine geringere Rolle, da z.B. zwei Flüchtigkeitsfehler in einer Mathearbeit oder 2 Fehltage vor einer Geschichtsarbeit bereits dazu führen können, dass die Note der Arbeit nicht mehr „sehr gut“ ist. Im Gegensatz dazu halte ich die 3. Klassenarbeit für die schlechteste bzw. problematischste, da hier nicht nur die meisten Noten schlechter als „ausreichend“ vorkommen, sondern vor allem, weil 2 Arbeiten sogar mit „ungenügend“ benotet wurden, was nicht mehr so einfach als „Ausrutscher“ entschuldigt werden kann. Der Notenspiegel sagt allerdings nichts darüber aus, ob immer die gleichen Schüler/-innen eine Note schlechter als „ausreichend“ geschrieben haben. Aber auch Einzelnoten lassen sich als stochastisches Tupel schreiben wie z.B. die Note „mangelhaft“ als $(0; 1; 0; 0; 0; 0)$.

Durchschnittsnote und logischer Betrag stehen in einem linearen Verhältnis: Ist d die Durchschnittsnote und $|a|$ der Betrag des Geltungswertes a , der den entsprechenden Notenspiegel als 6-Tupel abbildet, dann ist $d = -5|a| + 6$ ²². So ist z.B. der Notenspiegel einer Klassenarbeit $4 \mid 3 \mid 7 \mid 7 \mid 2 \mid 0$, wobei die Durchschnittsnote der Arbeit 3,0 ist, und der entsprechende Geltungswert ist $(\frac{0}{23}, \frac{2}{23}, \frac{7}{23}, \frac{7}{23}, \frac{3}{23}, \frac{4}{23})$, wobei der Betrag des Geltungswertes $\frac{69}{115} = 0,6$ ist.

²²Der „schlechteste“ Betrag 0 wird auf die Note 6 und der „beste“ Betrag 1 auf die Note 1 abgebildet. Dann folgt aus den beiden linearen Gleichungen $6 = 0m + c$ und $1 = 1m + c$, dass $c = 6$ und $m = -5$ ist.

Dabei kann der Betrag als Grad der Lernzielerreichung interpretiert werden, wobei bei dem Betrag 1 = 100 % das Lernziel zu 100 % erreicht wurde (da alle Arbeiten mit „sehr gut“ benotet wurden) und beim Betrag 0 das Lernziel völlig verfehlt wurde.

3.3 Die Anzahl m der Geltungswerte der Menge $\mathfrak{G}_{j,n}$

Die Geltungswerte der Menge $\mathfrak{G}_{j,n}$ bestehen aus n Brüchen ≤ 1 mit dem gemeinsamen Nenner j , wobei die Summe der Zähler j ergibt. Betrachtet man nur die Zähler, so können die Geltungswerte als geordnete (Zahl-)Partition²³ mit 0 als erlaubtem Summanden gedeutet werden:

Gesetz 3. Die Anzahl der Geltungswerte der Menge $\mathfrak{G}_{j,n}$ ist $m = \binom{j+n-1}{n-1}$ ²⁴

Diese Formel möchte ich anhand der 10 Geltungswerte aus der Menge $\mathfrak{G}_{3,3}$ mit jeweils $n = 3$ Objekten aus der Menge $\{\frac{0}{3}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{3}{3}\}$ veranschaulichen, wobei ich wiederum nur die Zähler betrachte. Die Summe der Zähler $j = 3$ wird durch 3 waagerechte Striche $---$ repräsentiert und durch $n - 1 = 3 - 1 = 2$ senkrechte „Schnitte“ in $n = 3$ Teile aufgeteilt. Die waagerechten und senkrechten Striche belegen somit zusammen $j + n - 1 = 3 + 3 - 1 = 5$ Plätze. Schnitte am Anfang oder Ende bedeuten, dass vor dem Anfang oder nach dem Ende eine 0 vorkommt. Zwei Schnitte nebeneinander bedeuten, dass zwischen den Schnitten eine 0 steht:

- | | |
|---------------------------|---------------------------|
| 1. (0; 0; 3) --- | 6. (1; 1; 1) - - - |
| 2. (0; 1; 2) - --- | 7. (1; 2; 0) - --- |
| 3. (0; 2; 1) - - - | 8. (2; 0; 1) - - - |
| 4. (0; 3; 0) - - - | 9. (2; 1; 0) - - - |
| 5. (1; 0; 2) - - - | 10. (3; 0; 0) - - - |

Die Anzahl, $n - 1$ Schnitte auf $j + n - 1$ Plätzen zu positionieren, ist $\binom{j+n-1}{n-1}$ ²⁵. Im obigen Beispiel ist die Anzahl also $\binom{3+3-1}{3-1} = \binom{5}{2} = 10$.

Wenn die Anzahl der Geltungswerte ein Binomialkoeffizient ist und für Binomialkoeffizienten die bekannte Rekursion $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ ²⁶ und somit auch die Rekursion $\binom{j+n-1}{n-1} = \binom{j+(n-1)-1}{(n-1)-1} + \binom{(j-1)+n-1}{n-1}$ mit $n \geq 2$ gilt, dann

²³Eine Partition heißt geordnet, wenn die Anordnung der Summanden eine Rolle spielt. Z.B. gelten die 3 Partitionen $1+1+2 = 1+2+1 = 2+1+1$ von 4 als unterschiedlich, während sie bei der ungeordneten Partition als eine einzige Partition angesehen werden, die durch die eine Partition $1+1+2$ mit aufsteigenden Summanden repräsentiert wird.

²⁴[32] Witt, S. 34

²⁵Hierbei interpretiere ich den Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ als die Anzahl von Möglichkeiten, k Objekte auf n Plätze zu stellen, ohne dass die Reihenfolge eine Rolle spielt.

²⁶[20] Matoušek und Nešetřil, S. 64

liegt die Vermutung nahe, dass die Geltungswerte aus der Menge $\mathfrak{G}_{j,n}$ aus den Geltungswerten der beiden Mengen $\mathfrak{G}_{j,n-1}$ und $\mathfrak{G}_{j-1,n}$ gebildet werden. Dazu ein Beispiel zu den 10 Geltungswerten der Menge $\mathfrak{G}_{3,3}$, die aus den 4 + 6 Geltungswerten der beiden Mengen $\mathfrak{G}_{3,2}$ und $\mathfrak{G}_{2,3}$ gebildet wurden:

- | | | | | | |
|-----------|---|--------------|--------------|---|---------------|
| 1. (0; 3) | → | 1. (0; 0; 3) | 1. (0; 0; 2) | → | 5. (1; 0; 2) |
| 2. (1; 2) | → | 2. (0; 1; 2) | 2. (0; 1; 1) | → | 6. (1; 1; 2) |
| 3. (2; 1) | → | 3. (0; 2; 1) | 3. (0; 2; 0) | → | 7. (1; 2; 0) |
| 4. (3; 0) | → | 4. (0; 3; 0) | 4. (1; 0; 1) | → | 8. (2; 0; 1) |
| | | | 5. (1; 1; 0) | → | 9. (2; 1; 0) |
| | | | 6. (2; 0; 0) | → | 10. (3; 0; 0) |

Wenn man also am Anfang aller $(n - 1)$ -Tupel der Menge $\mathfrak{G}_{j,n-1}$ mit $n > 2$ das Objekt $\frac{0}{j}$ einfügt, entstehen alle n -Tupel der Menge $\mathfrak{G}_{j,n}$, die mit dem Objekt $\frac{0}{j}$ beginnen, ohne dass sich die Summe j der Zähler verändert hat. Wenn man den Zähler des 1. Objektes aller n -Tupel der Menge $\mathfrak{G}_{j-1,n}$ mit $j > 1$ um 1 vergrößert, entstehen alle n -Tupel der Menge $\mathfrak{G}_{j,n}$, die nicht mit dem Objekt $\frac{0}{j}$ beginnen und die Summe $j - 1$ der Zähler wird um 1 größer.

Gesetz 4. $|\mathfrak{G}_{j,n}| = |\mathfrak{G}_{j,n-1}| + |\mathfrak{G}_{j-1,n}|$ mit $n > 2$ und $j > 1$.

Alle Geltungswerte der Menge $\mathfrak{G}_{j,n}$, die mit 0 beginnen, wurden aus den Geltungswerten der Menge $\mathfrak{G}_{j,n-1}$ gebildet. Alle Geltungswerte der Menge $\mathfrak{G}_{j,n}$, die mit 1 beginnen, wurden jedoch aus den Geltungswerten der Menge $\mathfrak{G}_{j-1,n}$ gebildet, die mit 0 beginnen, die wiederum aus den Geltungswerten der Menge $\mathfrak{G}_{j-1,n-1}$ gebildet wurden usw. Somit ist die Anzahl aller Geltungswerte mit gleichem 1. Objekt bzw. gleichem Zähler z_1 des 1. Objektes:

Gesetz 5. $|\{(\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_n) \in \mathfrak{G}_{j,n} \mid \alpha_1 = \frac{z_1}{j}\}| = |\mathfrak{G}_{j-z_1,n-1}| = \binom{j-z_1+n-2}{n-2}$ mit $n > 2$ und $j > z_1$.

3.4 Zwei Ordnungsrelationen bzgl. der Menge $\mathfrak{G}_{j,n}$

3.4.1 Die lexikographische Anordnung

Die 10 Geltungswerte aus dem Beispiel am Ende des vorherigen Kapitels wurden bezüglich ihrer Zähler lexikographisch angeordnet. Diese Anordnung entsteht, wenn man die Geltungswerte bzw. ihre Zähler von einem Programm mit verschachtelten Zählschleifen erzeugen lässt²⁷:

```
var j = ...;
var zaehler = 1;
for (var alpha_1 = 0; alpha_1 <= j; alpha_1++)
{
    ...
    for (var alpha_n = 0; alpha_n <= j; alpha_n++)
    {
        if (alpha_1 + ... + alpha_n == j)
        {
            document.writeln(zaehler);
            document.writeln(alpha_1, alpha_2, alpha_3, alpha_n);
            zaehler++;
        }
    }
    ...
}
```

Statt die Anordnung lexikographisch zu verstehen, kann man die Geltungswerte auch als n -stellige Zahlen (bei denen führende Nullen erlaubt sind) aus einem $(j+1)$ -adischen Zahlensystem bzw. einem Stellenwertsystem zur Basis $j+1$ interpretieren. Dabei sind die Zähler der Objekte in den Geltungswerten die Ziffern dieser Zahlen, die dann der Größe nach aufsteigend angeordnet werden, wobei sich die Quersumme nicht ändert, sondern stets j ist.

Mit der lexikographischen Anordnung sind 2 Probleme verbunden: Zunächst beginnt die Anordnung nicht mit dem Geltungswert für „falsch“ wie bei der Anordnung der Objekte innerhalb der Geltungswerte, sondern mit „wahr“ und endet dann mit „falsch“. Aber mit einer leichten Modifikation des obigen Listings ist dieses „Problem“ schnell behoben:

```
for (var alpha_1 = j; alpha_1 >= 0; alpha_1--)
{
    ...
    for (var alpha_n = j; alpha_n >= 0; alpha_n--)
    {
        ...
    }
}
```

²⁷Das Programm wurde in der Sprache JavaScript realisiert, damit es unabhängig von der jeweiligen Konfiguration in jedem Browser läuft. Die Punkte im Listing sind selbstverständlich nicht Bestandteil des Programms.

Das 2. Problem lässt sich jedoch nicht mit der umgekehrt lexikographischen Anordnung lösen. Dieses Problem möchte ich noch einmal an den Geltungswerten der Menge $\mathfrak{G}_{3,3}$ mit ihren jeweiligen Beträgen veranschaulichen, wobei von den Objekten wiederum nur die Zähler geschrieben wurden:

- | | |
|--------------------------------|---------------------------------|
| 1. $ (3; 0; 0) = \frac{0}{6}$ | 6. $ (1; 0; 2) = \frac{4}{6}$ |
| 2. $ (2; 1; 0) = \frac{1}{6}$ | 7. $ (0; 3; 0) = \frac{3}{6}$ |
| 3. $ (2; 0; 1) = \frac{2}{6}$ | 8. $ (0; 2; 1) = \frac{4}{6}$ |
| 4. $ (1; 2; 0) = \frac{2}{6}$ | 9. $ (0; 1; 2) = \frac{5}{6}$ |
| 5. $ (1; 1; 1) = \frac{3}{6}$ | 10. $ (0; 0; 3) = \frac{6}{6}$ |

Zunächst fällt auf, dass es mehrere Geltungswerte mit gleichen Beträgen gibt. Das ist jedoch unvermeidlich, da die Anzahl der Geltungswerte in der Regel größer ist als die Anzahl der unterschiedlichen Beträge, es sei denn, $n = 2$ oder $j = 1$:

Falls $n = 2$:

$$j(n-1) + 1 = \binom{j+n-1}{n-1} \Leftrightarrow$$

$$j(2-1) + 1 = \binom{j+2-1}{2-1} \Leftrightarrow$$

$$j \cdot 1 + 1 = \binom{j+1}{1} \Leftrightarrow$$

$$j + 1 = j + 1$$

Falls $j = 1$:

$$1 \cdot (n-1) + 1 = \binom{1+n-1}{n-1} \Leftrightarrow$$

$$n-1+1 = \binom{n}{n-1} \Leftrightarrow$$

$$n = \frac{n!}{(n-(n-1))!(n-1)!} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = n$$

Das größere Problem im obigen Beispiel ist der 7. Geltungswert, dessen Betrag kleiner ist als der Betrag des 6. Geltungswertes. Man würde von einer Ordnungsrelation, die von „falsch“ nach „wahr“ angeordnet ist, jedoch erwarten, dass die Geltungswerte nicht zwischendurch „falscher“ bzw. die Beträge nicht zwischendurch kleiner werden. Daher möchte ich eine 2. Ordnungsrelation nach den Beträgen der Geltungswerte einführen.

3.4.2 Die Anordnung nach dem logischen Betrag

Bei der Anordnung nach dem logischen Betrag werden die Geltungswerte nach dem Betrag aufsteigend angeordnet, wobei Geltungswerte mit gleichem Betrag umgekehrt lexikographisch angeordnet werden. Um eine solche Anordnung zu erstellen, ist es, wie schon im letzten Kapitel, am einfachsten, auf ein Programm zurückzugreifen:

- 1. Schritt: Die Geltungswerte werden mit n verschachtelten Zählschleifen (s. oben) in umgekehrt lexikographischer Anordnung erzeugt und in einer Liste abgelegt²⁸.
- 2. Schritt: Den m Geltungswerten in dieser Liste wird ihr Betrag zugeordnet.
- 3. Schritt: Die Geltungswerte in dieser Liste werden je nach Betrag von $\frac{0}{j(n-1)} = 0$ bis $\frac{j(n-1)}{j(n-1)} = 1$ auf $j(n-1) + 1$ Zwischenlisten verteilt.
- 4. Schritt: Diese Zwischenlisten werden nacheinander zu einer neuen Liste der Länge m zusammengefügt. In dieser neuen Liste sind die Geltungswerte jetzt nach dem Betrag aufsteigend angeordnet und die umgekehrt lexikographische Anordnung von Geltungswerten bei gleichem Betrag blieb erhalten.
- 5. Schritt: Die Geltungswerte in der neuen Liste werden aufsteigend mit einer Nummer von 1 bis m versehen und dann ausgegeben.

Das entsprechende Listing für den Fall $j = 6$ und $n = 4$ findet sich kommentiert zusammen mit dem Listing für die umgekehrt lexikographische Anordnung sowohl im Anhang 13.5 als auch bei den Materialien zu dieser Arbeit unter <https://www.untex.de/logik/> und zwar als Textdatei und als ausführbare HTML-Datei.

In den ersten 3 Spalten der nachfolgenden Tabelle befinden sich die Geltungswerte der Menge $\mathfrak{G}_{6,3}$ zusammen mit den Geltungswerten aus den beiden Mengen $\mathfrak{G}_{5,3}$ und $\mathfrak{G}_{6,2}$, aus denen sich die Geltungswerte der Menge $\mathfrak{G}_{6,3}$ zusammensetzen (s. Kap. 3.3), nach Betrag angeordnet.

In der vierten Spalte stehen alle Geltungswerte der Menge $\mathfrak{G}_{8,4}$, deren erstes Objekt den Zähler 2 hat. Die anderen 3 Objekte bilden dann die in der ersten Spalte stehenden Geltungswerte der Menge $\mathfrak{G}_{6,3}$. Von den Objekten der Geltungswerte sind jeweils wiederum nur die Zähler angegeben:

²⁸Die Liste muss ein sogenannter FIFO-Speicher sein, also nach dem Prinzip „first in – first out“ arbeiten, damit die umgekehrt lexikographische Anordnung erhalten bleibt.

$j = 6, n = 3$	$j = 5, n = 3$	$j = 6, n = 2$	$j = 8, n = 4, \alpha_1 = 2/j$
1. $ (6; 0; 0) =0/12$	1. $ (5; 0; 0) =0/10$		23. $ (2; 6; 0; 0) =6/24$
2. $ (5; 1; 0) =1/12$	2. $ (4; 1; 0) =1/10$		30. $ (2; 5; 1; 0) =7/24$
3. $ (5; 0; 1) =2/12$ 4. $ (4; 2; 0) =2/12$	3. $ (4; 0; 1) =2/10$ 4. $ (3; 2; 0) =2/10$		38. $ (2; 5; 0; 1) =8/24$ 39. $ (2; 4; 2; 0) =8/24$
5. $ (4; 1; 1) =3/12$ 6. $ (3; 3; 0) =3/12$	5. $ (3; 1; 1) =3/10$ 6. $ (2; 3; 0) =3/10$		48. $ (2; 4; 1; 1) =9/24$ 49. $ (2; 3; 3; 0) =9/24$
7. $ (4; 0; 2) =4/12$ 8. $ (3; 2; 1) =4/12$ 9. $ (2; 4; 0) =4/12$	7. $ (3; 0; 2) =4/10$ 8. $ (2; 2; 1) =4/10$ 9. $ (1; 4; 0) =4/10$		58. $ (2; 4; 0; 2) =10/24$ 59. $ (2; 3; 2; 1) =10/24$ 60. $ (2; 2; 4; 0) =10/24$
10. $ (3; 1; 2) =5/12$ 11. $ (2; 3; 1) =5/12$ 12. $ (1; 5; 0) =5/12$	10. $ (2; 1; 2) =5/10$ 11. $ (1; 3; 1) =5/10$ 12. $ (0; 5; 0) =5/10$		69. $ (2; 3; 1; 2) =11/24$ 70. $ (2; 2; 3; 1) =11/24$ 71. $ (2; 1; 5; 0) =11/24$
13. $ (3; 0; 3) =6/12$ 14. $ (2; 2; 2) =6/12$ 15. $ (1; 4; 1) =6/12$ 16. $ (0; 6; 0) =6/12$	13. $ (2; 0; 3) =6/10$ 14. $ (1; 2; 2) =6/10$ 15. $ (0; 4; 1) =6/10$	1. $ (6; 0) =0/6$	80. $ (2; 3; 0; 3) =12/24$ 81. $ (2; 2; 2; 2) =12/24$ 82. $ (2; 1; 4; 1) =12/24$ 83. $ (2; 0; 6; 0) =12/24$
17. $ (2; 1; 3) =7/12$ 18. $ (1; 3; 2) =7/12$ 19. $ (0; 5; 1) =7/12$	16. $ (1; 1; 3) =7/10$ 17. $ (0; 3; 2) =7/10$	2. $ (5; 1) =1/6$	92. $ (2; 2; 1; 3) =13/24$ 93. $ (2; 1; 3; 2) =13/24$ 94. $ (2; 0; 5; 1) =13/24$
20. $ (2; 0; 4) =8/12$ 21. $ (1; 2; 3) =8/12$ 22. $ (0; 4; 2) =8/12$	18. $ (1; 0; 4) =8/10$ 19. $ (0; 2; 3) =8/10$	3. $ (4; 2) =2/6$	103. $ (2; 2; 0; 4) =14/24$ 104. $ (2; 1; 2; 3) =14/24$ 105. $ (2; 0; 4; 2) =14/24$
23. $ (1; 1; 4) =9/12$ 24. $ (0; 3; 3) =9/12$	20. $ (0; 1; 4) =9/10$	4. $ (3; 3) =3/6$	115. $ (2; 1; 1; 4) =15/24$ 116. $ (2; 0; 3; 3) =15/24$
25. $ (1; 0; 5) =10/12$ 26. $ (0; 2; 4) =10/12$	21. $ (0; 0; 5) =10/10$	5. $ (2; 4) =4/6$	125. $ (2; 1; 0; 5) =16/24$ 126. $ (2; 0; 2; 4) =16/24$
27. $ (0; 1; 5) =11/12$		6. $ (1; 5) =5/6$	135. $ (2; 0; 1; 5) =17/24$
28. $ (0; 0; 6) =12/12$		7. $ (0; 6) =6/6$	143. $ (2; 0; 0; 6) =18/24$

Dass die Anzahl der Geltungswerte in Spalte 1 mit der Anzahl der Geltungswerte in Spalte 2 plus Spalte 3 übereinstimmt, wurde bereits in Gesetz 4 gezeigt, und dass die Anzahl der Geltungswerte in Spalte 1 mit der Anzahl der Geltungswerte in Spalte 4 übereinstimmt, in Gesetz 5. Schauen wir daher zunächst auf die jeweiligen Beträge: Dass die Nenner der Beträge sich von Spalte zu Spalte unterscheiden, überrascht nicht, denn die Nenner sind ja $j(n-1)$ und die Werte für j oder n sind von Spalte zu Spalte unterschiedlich. Betrachten wir daher die Zähler: Die Zähler der Beträge in den beiden ersten Spalten, in denen n gleich ist und die Geltungswerte sich nur durch das 1. Objekt unterscheiden, sind zeilenweise gleich, weil das 1. Objekt nicht zur Berechnung der Beträge herangezogen wird. In der 3. Spalte ist n um 1 kleiner, da am Anfang der Geltungswerte der 3. Spalte das 1. Objekt 0 der Geltungswerte aus der 1. Spalte fehlt und der Zähler des Betrages ist nun um 6 kleiner als der Zähler des Betrages in der 1. Spalte. In der 4. Spalte ist, verglichen mit der 1. Spalte, n um 1 größer, da an den Anfang der Geltungswerte der 1. Spalte ein Objekt mit dem Zähler 2 eingefügt wurde, und der Zähler des Betrages in der 4. Spalte ist nun um 6 größer. Allgemein gilt für den Betrag, wenn das 1. Objekt weggelassen wird:

Gesetz 6. $(|(\frac{z_1}{j}; \alpha_2; \alpha_3; \dots; \alpha_n)| = \frac{b}{j(n-1)}) \Rightarrow$
 $(|(\alpha_2; \alpha_3; \dots; \alpha_n)| = \frac{b-(j-z_1)}{(j-z_1)(n-2)})$ mit $n > 2$ und $j > z_1$.

Beim Beweis beschränke ich mich der Einfachheit halber nur auf die Zähler z_i der Objekte α_i . x ist der gesuchte Betragszähler von $(\alpha_2; \alpha_3; \dots; \alpha_n)$:

$$\begin{array}{r} b = z_2 + 2z_3 + 3z_4 + \dots + (n-1)z_n \\ x = \quad \quad z_3 + 2z_4 + \dots + (n-2)z_n \\ \hline b - x = z_2 + z_3 + z_4 + \dots + z_n \\ b - x = j - z_1 \\ b - j + z_1 = x \end{array}$$

Nun wird auch klar, warum die Geltungswerte der Menge $\mathfrak{G}_{6,2}$ in der obigen Tabelle um $j = 6$ Tabellenzeilen nach unten gerückt wurden.

In der Tabelle fällt außerdem auf, dass die Anzahlen der Geltungswerte mit gleichem Betrag der Mengen $\mathfrak{G}_{6,3}$, $\mathfrak{G}_{5,3}$ und $\mathfrak{G}_{6,2}$ jeweils symmetrisch sind:

$\mathfrak{G}_{6,3}$:	1	1	2	2	3	3	4	3	3	2	2	1	1
$\mathfrak{G}_{5,3}$:	1	1	2	2	3	3	3	2	2	1	1		
$\mathfrak{G}_{6,2}$:							1	1	1	1	1	1	1

So stehen z.B. in der 6. Tabellenzeile 3 Geltungswerte der Menge $\mathfrak{G}_{6,3}$ mit dem Betrag $\frac{5}{12}$ und zwar mit den Zählern 3,1,2 sowie 2,3,1 und 1,5,0. In der sechstletzten Tabellenzeile stehen ebenfalls 3 Geltungswerte der Menge $\mathfrak{G}_{6,3}$,

diesmal mit dem Betrag $\frac{12-5}{12}$, nämlich mit den Zählern 2,1,3 sowie 1,3,2 und 0,5,1. Die jeweils 3 Geltungswerte sind zueinander gespiegelt. Sei $m_{j,n}(b)$ die Anzahl der Geltungswerte aus Menge $\mathfrak{G}_{j,n}$ mit dem gleichen Betrag $\frac{b}{j(n-1)}$, so ist:

Gesetz 7. $m_{j,n}(b) = m_{j,n}(j(n-1) - b)$

Das heißt, es gibt genauso viele Geltungswerte mit dem Betrag $\frac{b}{j(n-1)}$ wie es Geltungswerte mit dem Betrag $1 - \frac{b}{j(n-1)}$ gibt. Zur Begründung möchte ich auf das Kapitel 4.1 über die Negation und dort auf den Beweis zum Gesetz 15 über den Betrag $|\mathbf{N}|$ verweisen. Außerdem gilt offensichtlich für die Anzahl m aller Geltungswerte:

Gesetz 8. $m = \sum_{b=0}^{j(n-1)} m_{j,n}(b)$

Die bisherigen Erkenntnisse sollen in den beiden folgenden Rekursionen zusammengefasst werden. Bei den Materialien zu dieser Arbeit unter <https://www.untexte.de/logik/position-und-geltungswert.pdf> werden diese Rekursionen für eine händische Berechnung der Position eines Geltungswertes innerhalb der Ordnungsrelation nach Betrag und zur Bestimmung eines Geltungswertes an einer bestimmten Position (s. Kap. 5.2 und 8.3) ohne Verwendung eines Computerprogramms herangezogen.

Gesetz 9. $m_{j,n}(b) = \begin{cases} 0, & \text{falls } n < 2 \text{ oder } j < 1 \text{ oder } b < 0 \text{ oder } b > j(n-1) \\ 1, & \text{falls } n = 2 \text{ oder } j = 1 \text{ oder } b = 0 \text{ oder } b = j(n-1) \\ & \text{oder } b = 1 \text{ oder } b = j(n-1) - 1 \\ m_{j-1,n}(b), & \text{falls } b < j \\ m_{j,n-1}(b-j), & \text{falls } b > (j-1)(n-1) \\ m_{j-1,n}(b) + m_{j,n-1}(b-j) & \text{sonst.} \end{cases}$

Zur 1. Zeile: n kann per Definition nicht kleiner als 2 sein und der Nenner j kann nicht 0 sein. Der Zähler des Betrages kann minimal 0 und maximal $j(n-1)$ sein.

Zur 2. Zeile: Falls $n = 2$ ist, sind die Geltungswerte der Menge $\mathfrak{G}_{j,2}$ die Paare $(\frac{j}{j}; \frac{0}{j}), (\frac{j-1}{j}; \frac{1}{j}), \dots, (\frac{0}{j}; \frac{j}{j})$ mit jeweils unterschiedlichen Beträgen. Falls $j = 1$ ist, sind die Geltungswerte der Menge $\mathfrak{G}_{1,n}$ n -Tupel der Form $(1; 0; \dots; 0), (0; 1; 0; \dots; 0), \dots, (0; 0; \dots; 1)$ mit ebenfalls unterschiedlichen Beträgen. Falls $b = 0$ ist, gibt es den einen Geltungswert $(1; 0; \dots; 0)$, und falls $b = j(n-1)$ ist, den einen Geltungswert $(0; \dots; 0; 1)$.

Zur 3. Zeile: Falls $b = 1$ ist, gibt es den einen Geltungswert $(\frac{j-1}{j}; \frac{1}{j}; \frac{0}{j}; \dots; \frac{0}{j})$, und falls $b = j(n-1) - 1$ ist, gibt es den einen Geltungswert $(\frac{0}{j}; \dots; \frac{0}{j}; \frac{1}{j}; \frac{j-1}{j})$.

Zur 4. Zeile: Der größtmögliche Zähler b der Beträge ist bei den beiden Mengen $\mathfrak{G}_{j-1,n}$ und $\mathfrak{G}_{j,n-1}$ jeweils kleiner als bei der Menge $\mathfrak{G}_{j,n}$ mit $b_{\max_{j,n}} = j(n-1)$, nämlich $b_{\max_{j-1,n}} = (j-1)(n-1)$ und $b_{\max_{j,n-1}} = j(n-2)$.

Die ersten Geltungswerte der nach Betrag angeordneten Menge $\mathfrak{G}_{j,n}$ werden nur aus Geltungswerten der Menge $\mathfrak{G}_{j-1,n}$ gebildet. Erst wenn $j = b$ ist, kommt die Menge $\mathfrak{G}_{j,n-1}$ mit ins Spiel, denn $b_{\max_{j,n}} - b_{\max_{j,n-1}} = j(n-1) - j(n-2) = j((n-1) - (n-2)) = j$.

Zur 5. Zeile: Falls $b > (j-1)(n-1) = b_{\max_{j-1,n}}$ ist, werden die Geltungswerte der Menge $\mathfrak{G}_{j,n}$ nur noch aus Geltungswerten der Menge $\mathfrak{G}_{j,n-1}$ gebildet, die ja erst ab $b = j$ (s. 4. Zeile) bzw. $b - j = 0$ zu den Geltungswerten der Menge $\mathfrak{G}_{j,n}$ beitragen.

Während $m_{j,n}(b)$ als die Anzahl der Geltungswerte aus Menge $\mathfrak{G}_{j,n}$ mit dem gleichen Betrag $\frac{b}{j(n-1)}$ definiert wurde, ist $m_{j,n}(b, z_1)$ die Anzahl der Geltungswerte aus Menge $\mathfrak{G}_{j,n}$ mit dem gleichen Betrag $\frac{b}{j(n-1)}$ und dem gleichen 1. Objekt $\alpha_1 = \frac{z_1}{j}$:

$$\textbf{Gesetz 10. } m_{j,n}(b, z_1) = \begin{cases} 0, \text{ falls } z_1 < 0 \text{ oder } z_1 > j \text{ oder } n < 2 \\ \text{oder } j < 1 \text{ oder } b < 0 \text{ oder } b > j(n-1) \\ \text{oder } z_1 < j - b \text{ oder } z_1 > j - \frac{b}{n-1} \\ 1, \text{ falls } n = 2 \text{ oder } j = 1 \\ \text{oder } b = 0 \text{ oder } b = j(n-1) \\ \text{oder } z_1 = j - b \text{ oder } z_1 = j + 1 - b \\ \text{oder } z_1 = j - \frac{b}{n-1} \text{ oder } z_1 = j - \frac{b+1}{n-1} \\ m_{j-1,n}(b, z_1 - 1), \text{ falls } z_1 > 0 \\ m_{j,n-1}(b - j), \text{ falls } z_1 = 0 \end{cases}$$

Die Behauptungen in Zeile 1, 2, 4 und 5 sind offensichtlich bzw. ergeben sich direkt aus Gesetz 9.

Zur 3. Zeile: Unter den Geltungswerten mit dem gleichen Betrageszähler $b \leq j$ ist $(\frac{z_1}{j}; \frac{j-z_1}{j}; \frac{0}{j}; \dots; \frac{0}{j})$ mit $b = j - z_1$ bzw. $z_1 = j - b$ jeweils der letzte in der umgekehrt lexikographischen Anordnung. Würde z_1 noch kleiner, so würde b zwangsläufig größer, da j konstant ist. Unter den Geltungswerten mit dem gleichen Zähler des 1. Objektes z_1 hat $(\frac{z_1}{j}; \frac{0}{j}; \dots; \frac{0}{j}; \frac{j-z_1}{j})$ den größtmöglichen Betrageszähler, nämlich $b = (n-1)(j - z_1)$. Der Zähler des 1. Objektes ist dann $z_1 = j - \frac{b}{n-1}$ ²⁹. Würde b größer, so würde z_1 zwangsläufig kleiner.

Zur 6. Zeile: Ist $z_1 = j - b$, gibt es, falls $b \geq 1$ ist, den einen Geltungswert $(\frac{z_1}{j}; \frac{j-z_1}{j}; \frac{0}{j}; \dots; \frac{0}{j})$ (s.o.). Ist $z_1 = j + 1 - b$, gibt es, falls $b \geq 2$ ist, den einen Geltungswert $(\frac{z_1}{j}; \frac{j-z_1-1}{j}; \frac{1}{j}; \frac{0}{j}; \dots; \frac{0}{j})$.

Zur 7. Zeile: Unter den Geltungswerten mit dem gleichen Zähler des 1. Objektes z_1 ist $(\frac{z_1}{j}; \frac{0}{j}; \dots; \frac{0}{j}; \frac{j-z_1}{j})$ der einzige Geltungswert mit dem Betrageszähler $b = (n-1)(j - z_1)$. Der Geltungswert $(\frac{z_1}{j}; \frac{0}{j}; \dots; \frac{0}{j}; \frac{1}{j}; \frac{j-z_1-1}{j})$ ist der einzige Geltungswert mit dem Betrageszähler $b = (n-2) \cdot 1 + (n-1) \cdot (j - z_1 - 1) =$

²⁹ $b = (n-1)(j - z_1) \Leftrightarrow \frac{b}{n-1} = j - z_1 \Leftrightarrow z_1 = j - \frac{b}{n-1}$

$(n-1) - 1 + (n-1)(j - z_1 - 1) = (n-1)(1 + j - z_1 - 1) - 1 = (n-1)(j - z_1) - 1$.
Der Zähler des 1. Objektes ist dann $z_1 = j - \frac{b+1}{n-1}$ ³⁰

Zur 8. Zeile: Wenn der Zähler des 1. Objektes $z_1 > 0$ um 1 kleiner wird, ändern sich n und der Betrag nicht, j wird aber um 1 kleiner.

Zur 9. Zeile: Wenn das 1. Objekt mit dem Zähler $z_1 = 0$ weggelassen wird, wird n um 1 kleiner, j bleibt unverändert, da ja $z_1 = 0$ war, und die Zähler z_2 bis z_n der anderen Objekte werden zur Berechnung des Betrages jetzt nicht mit 1 bis $n-1$, sondern mit 0 bis $n-2$ multipliziert. b wird also um $1 \cdot z_2 + \dots + 1 \cdot z_n = j - z_1 = j$ kleiner, da ja wiederum $z_1 = 0$ war.

3.4.3 Alternative Berechnung von $m_{j,n}(b)$ und $m_{j,n}(b, z_1)$

In Gesetz 9 wurde $m_{j,n}(b)$, die Anzahl der Geltungswerte der Menge $\mathfrak{G}_{j,n}$ mit gleichem Betrag bzw. gleichem Betrageszähler b , als Rekursion definiert, indem $m_{j,n}(b)$ mit Hilfe von $m_{j-1,n}(b)$ und $m_{j,n-1}(b-j)$ berechnet wurde. Nachfolgend soll an einem Beispiel ein Algorithmus entwickelt werden, der $m_{j,n}(b)$ lediglich an Hand der Werte für j , n und b bestimmt:

Es sei $j = 7$, $n = 5$ und $b = 6$. Welchen Wert hat dann der Zähler des letzten Objektes α_n minimal (min) und maximal (max)? Da bei der Berechnung des Betrages der Zähler von α_n mit $(n-1)$ multipliziert wird, muss $max \cdot (n-1) \leq b$ sein. Da der Zähler max außerdem eine ganze Zahl sein muss, ist $max = \lfloor \frac{b}{n-1} \rfloor$. Für den Fall $j = 7$, $n = 5$ und $b = 6$ ist der größtmögliche Zähler von α_n also $\lfloor \frac{6}{5-1} \rfloor = 1$.

Der Zähler von α_n muss aber mindestens so groß sein, dass zusammen mit dem Zähler von α_{n-1} , der mit $(n-2)$ multipliziert wird, überhaupt b erreicht werden kann:

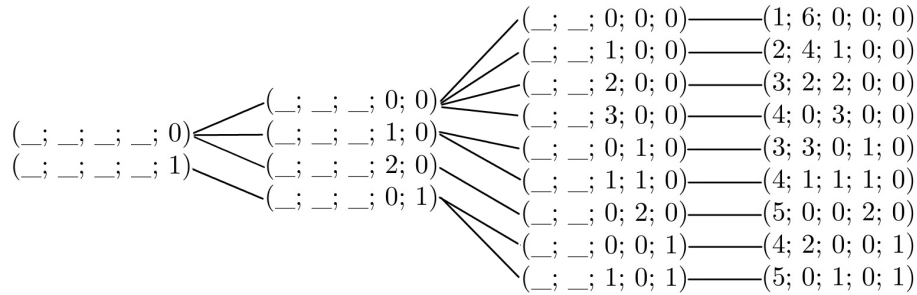
$$\begin{aligned} (j - min)(n-2) + min \cdot (n-1) &\geq b && \Leftrightarrow \\ j(n-2) - min \cdot (n-2) + min \cdot (n-1) &\geq b && \Leftrightarrow \\ min \cdot (n-1) - min \cdot (n-2) &\geq b - j(n-2) && \Leftrightarrow \\ min \cdot ((n-1) - (n-2)) &\geq b - j(n-2) && \Leftrightarrow \quad min \geq b - j(n-2) \end{aligned}$$

Da für den Fall $j = 7$, $n = 5$ und $b = 6$ der Term $b - j(n-2) = 6 - 7(5-2) = 6 - 21$ eine negative Zahl ergibt, min aber mindestens 0 sein muss, ist somit min das Maximum von $b - j(n-2)$ und 0. Somit kann der Zähler von α_n 0 oder 1 sein.

Nun müssen für beide Fälle, allgemein für alle $max - min + 1$ Fälle, das jeweilige Minimum und Maximum für den Zähler von α_{n-1} nach dem gleichen Verfahren bestimmt werden. Dazu muss jedoch zunächst n um 1, j

³⁰ $b = (n-1)(j - z_1) - 1 \Leftrightarrow b + 1 = (n-1)(j - z_1) \Leftrightarrow \frac{b+1}{n-1} = j - z_1 \Leftrightarrow z_1 = j - \frac{b+1}{n-1}$

um den jeweiligen Zähler von α_n und b um das Produkt aus $(n-1)$ und dem jeweiligen Zähler von α_n verringert werden. Für den Fall, dass im Moment der Zähler von $\alpha_n = 0$ ist, ist somit $j = 7 - 0 = 7$, $n = 5 - 1 = 4$ und $b = 6 - (5 - 1) \cdot 0 = 6$. Somit ist für den Zähler von α_{n-1} der Wert von $\max = \lfloor \frac{b}{n-1} \rfloor = \lfloor \frac{6}{4-1} \rfloor = 2$ und der Wert von $\min = 0$, weil $b - j(n-2) = 6 - 7(4-2) < 0$ ist. Das Verfahren wird solange wiederholt, solange $n > 2$ ist, denn sobald $n = 2$ ist, sind die Zähler für α_1 und für α_2 festgelegt, nämlich der Zähler von $\alpha_2 = b$ und der Zähler von $\alpha_1 = j - b$. Statt das Verfahren bei $n = 2$ weiter durchzuführen, wird stattdessen im Programm ein Zähler für $m_{j,n}(b)$ um 1 heraufgesetzt.



Somit ist also $m_{7,5}(6) = 9$. Das nachfolgende Listing verwendet das oben beschriebene Verfahren zur Berechnung von $m_{j,n}(b)$:

```
function berechne_m_von_b(j, n, b)
{
  var min = Math.max(b-j*(n-2),0);
  var max = Math.floor(b/(n-1))
  if (n > 2)
    for (var i = min; i <= max; i++)
      berechne_m_von_b(j-i, n-1, b-(n-1)*i);
  if (n == 2) zaehler++;
}
var zaehler = 0;
berechne_m_von_b(7, 5, 6);
document.write("<i>m</i><sub>7,5</sub>(6) = "+zaehler);
```

Die Funktion dieses Listings kann auch genutzt werden, um $m_{j,n}(b, z_1)$ zu berechnen (s. Gesetz 10). Dabei wird das Verfahren nicht auf die Geltungswerte $(\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_n)$, sondern auf die Geltungswerte $(\alpha_2; \alpha_3; \dots; \alpha_n)$ angewendet, womit nun n um 1 und j um den Zähler z_1 des 1. Objektes kleiner ist. Aber welchen Wert hat das neue b ?

$$\begin{array}{rcl}
 b & = & 0 \cdot z_1 + 1 \cdot z_2 + 2 \cdot z_3 + \dots + (n-1) \cdot z_n \\
 j & = & 1 \cdot z_1 + 1 \cdot z_2 + 1 \cdot z_3 + \dots + 1 \cdot z_n \\
 \hline
 b - j & = & -1 \cdot z_1 + 0 \cdot z_2 + 1 \cdot z_3 + \dots + (n-2) \cdot z_n \\
 b - j + z_1 & = & 0 \cdot z_2 + 1 \cdot z_3 + \dots + (n-2) \cdot z_n
 \end{array}$$

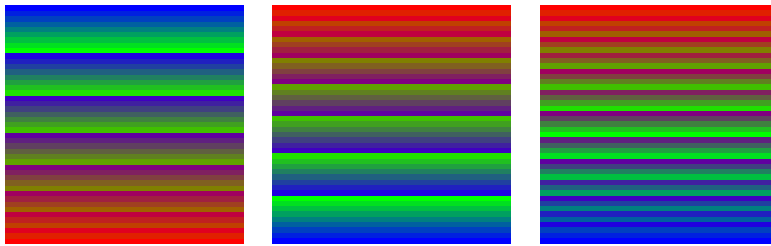
$b-j+z_1$ entspricht der Berechnung des Betragszählers von $(\alpha_2; \alpha_3; \dots; \alpha_n)$. Somit ist das Listing folgendermaßen zu modifizieren:

```
var zaehler = 0;
var j = 7, n = 5, b = 6, z1 = 4;
berechne_m_von_b(j-z1, n-1, b-j+z1);
document.write("<i>m</i><sub>7,5</sub>(6, 4) = "+zaehler);
```

Die Ausgabe des Programms ist dann $m_{7,5}(6,4) = 3$, zumal von den 9 Geltungswerten in der obigen Übersicht, die den Betragszähler 6 hatten, 3 Geltungswerte mit dem Zähler 4 begannen. Die beiden Listings finden sich jeweils als ausführbare HTML-Datei und zusammen als Textdatei bei den Materialien zu dieser Arbeit unter <https://www.untexte.de/logik/>.

3.5 Graphische Veranschaulichungen der Geltungswerte

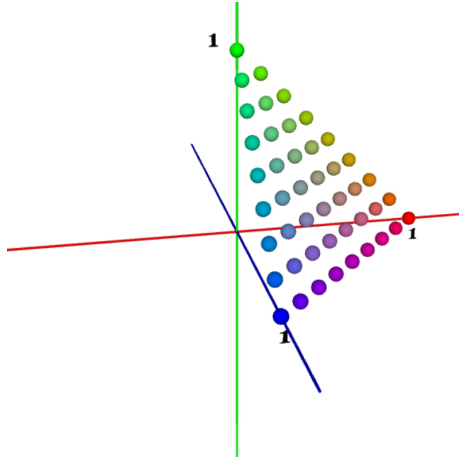
Bisher wurden einzelne Geltungswerte durch Säulendiagramme visualisiert. Nun sollen am Beispiel einer 3-stelligen Prozentuallogik ($n = 3$) sämtliche 45 Geltungswerte der Menge $\mathfrak{G}_{8,3}$ graphisch veranschaulicht werden. Auf diese Art der Visualisierung greife ich später bei der Veranschaulichung von Junktoren wieder zurück. Die gewählte Prozentuallogik ist deshalb 3-stellig, weil farbige Pixel auf Bildschirmen aus den 3 Farbanteilen Rot, Grün und Blau gebildet werden können. Die einzelnen Objekte der Geltungswerte sind aus der 9-elementigen Menge $\{\frac{0}{8}; \frac{1}{8}; \frac{2}{8}; \frac{3}{8}; \frac{4}{8}; \frac{5}{8}; \frac{6}{8}; \frac{7}{8}; \frac{8}{8}\}$. Somit ist $j = 8$. Beispielsweise wird der Geltungswert $(\frac{1}{8}; \frac{4}{8}; \frac{3}{8})$ durch die RGB-Farbe (32,128,96) bzw. hexadezimal (#208060) repräsentiert. Nachfolgend die 45 Geltungswerte als Streifen lexikographisch, umgekehrt lexikographisch und nach Betrag angeordnet, wobei die linke und die mittlere Abbildung zueinander symmetrisch sind:



In der linken Abbildung zur lexikographischen Anordnung bilden die Geltungswerte 45 farbige Streifen von $(0; 0; 1) = \text{blau}$ oben über $(0; 1; 0) = \text{grün}$ in der Mitte bis $(1; 0; 0) = \text{rot}$ unten.

In der nachfolgenden Abbildung werden die Objekte der 45 Geltungswerte als Koordinaten eines Punktes im Raum angesehen und die Geltungswerte als Ortsvektoren und somit vektorgeometrisch interpretiert³¹:

³¹Die Abbildung wurde mit Hilfe der Beschreibungssprache X3D für räumliche Darstellungen erstellt.



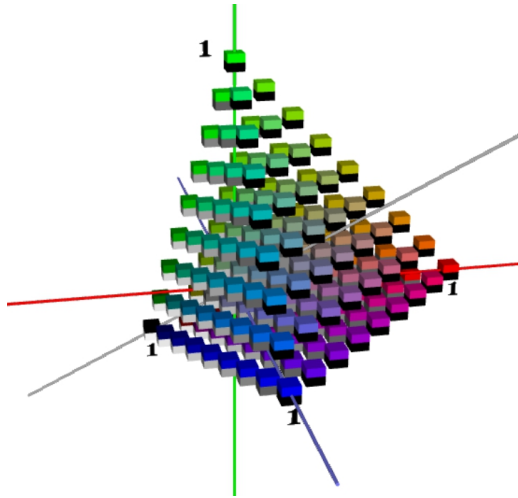
Anscheinend liegen alle Punkte in einer Ebene, was nicht überrascht, da $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$ bzw. allgemeiner „die Gleichung $ax + by + cz = r$ als algebraische Beschreibung einer Ebene“³² gedeutet werden kann. Diese Ebene muss die Punkte $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ und $(0, 0, 1)$ enthalten. Der Verbindungsvektor (Richtungsvektor) zwischen $(1, 0, 0)$ (Ortsvektor) und $(0, 1, 0)$ ist $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Der Verbindungsvektor zwischen $(1, 0, 0)$ und $(0, 0, 1)$ ist $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Die Punktrichtungsgleichung der Ebene ist dann $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Somit gilt für die Punkte $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, die in dieser Ebene liegen:

$$\begin{array}{rcl} \alpha_1 & = & 1 - \lambda - \mu \\ + \alpha_2 & = & \lambda \\ + \alpha_3 & = & \mu \\ \hline \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 & = & 1 \end{array}$$

Und da α_1, α_2 und α_3 nicht negativ sind, bilden die Punkte einen dreieckigen Ausschnitt der Ebene dort, wo x, y und $z \geq 0$ sind.

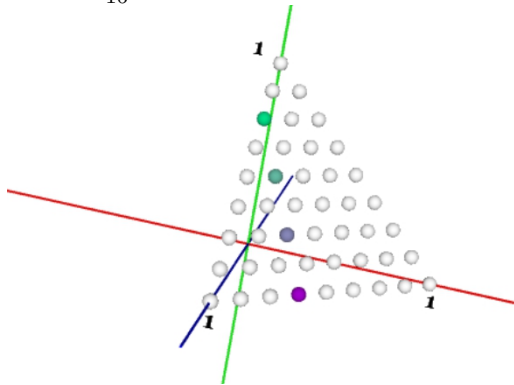
Eine 4-stellige Prozentuallogik mit den $\binom{8+(4-1)}{4-1} = \binom{11}{3} = 165$ Geltungswerten aus der Menge $\mathfrak{G}_{8,4}$ lässt sich jedoch nicht mehr ausschließlich mit den 3 Farbanteilen RGB darstellen. Daher werden die „Punkte“ bzw. Kugeln in der nachfolgenden Abbildung durch Würfel ersetzt, deren obere Hälfte die ersten 3 Objekte des Geltungswertes als RGB-Farbe repräsentiert, während die untere Hälfte das 4. Objekt in Graustufen darstellt.

³²[15] Knerr, S. 193



Ganz allgemein bilden die Geltungswerte, interpretiert als Punkte im Raum, einen n -Simplex³³ im $(n+1)$ -dimensionalen Raum. Zur Begründung müsste der obige Beweis für den Fall $n = 3$ auf beliebige n erweitert werden. Die beiden räumlichen Abbildungen finden sich, realisiert in der Beschreibungssprache X3D, bei den Materialien zu dieser Arbeit auf der Seite <https://www.untexte.de/logik/>. Mit der Maus kann dort das Koordinatensystem gedreht und der Tetraeder herangezoomt werden.

Die nachfolgende Abbildung zeigt noch einmal die 45 Geltungswerte als Punkte im Raum. Dabei sind die 4 Geltungswerte mit dem gemeinsamen Betrag $\frac{10}{16}$ farbig hervorgehoben:



Es fällt auf, dass alle 4 Geltungswerte auf einer Geraden liegen: Zunächst ist $\alpha_2 = \lambda$ und $\alpha_3 = \mu$ (s.o.). Für $n = 3$ ist der Betrag $|a| = \frac{\alpha_2}{2} + \frac{2\alpha_3}{2} = \frac{\alpha_2}{2} + \alpha_3$. Setze ich λ und μ ein, so ist $|a| = \frac{\lambda}{2} + \mu$ und somit $\mu = |a| - \frac{\lambda}{2}$. Setze ich das in die obige Punktrichtungsgleichung der Ebene ein, so erhalte ich eine Punktrichtungsgleichung für eine Gerade:

³³ n -dimensionaler Hypertetraeder

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (|a| - \frac{\lambda}{2}) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -|a| \\ 0 \\ |a| \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 - |a| \\ 0 \\ |a| \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Wenn $|a| = \frac{10}{16}$ ist und ich wähle $\lambda = \frac{3}{4}$, so ist

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{10}{16} \\ 0 \\ \frac{10}{16} \end{pmatrix} + \frac{3}{4} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ 0 \\ \frac{5}{8} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{3}{8} \\ \frac{6}{8} \\ -\frac{3}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{6}{8} \\ \frac{2}{8} \end{pmatrix}$$

Der Geltungswert $(0; \frac{6}{8}; \frac{2}{8})$ wird in der obigen Abbildung mit den 4 Geltungswerten mit gleichem Betrag durch die oberste, türkisfarbene bzw. blaugrüne Kugel repräsentiert. Ist $\lambda = 0$, so erhalte ich den Geltungswert $(\frac{3}{8}; 0; \frac{5}{8})$, der durch die unterste, blauviolette Kugel repräsentiert wird. Mit $\lambda = \frac{1}{4}$ und $\lambda = \frac{2}{4}$ erhalte ich die beiden übrigen Kugeln in der Mitte.

Die obige Herleitung der Punktrichtungsgleichung für eine Gerade lässt sich entsprechend für $n > 3$ modifizieren bzw. erweitern. Während also die Geltungswerte, interpretiert als Punkte im Raum, einen n -dimensionalen Körper im $(n+1)$ -dimensionalen Raum bilden, bilden die Geltungswerte mit gleichem Betrag einen $(n-1)$ -dimensionalen Körper.

4 Einstellige unabhängige Junktoren

Wie bereits in Kapitel 2.1.1 erwähnt, arbeiten die unabhängigen Junktoren unabhängig davon, ob die Geltungswerte aus der Menge $\mathfrak{G}_{j,n}$ oder aus der Menge $\mathfrak{G}_{k,j,n}$ mit $k > 1$ stammen. So könnte z.B. der Geltungswert $(\frac{2}{6}; \frac{0}{6}; \frac{4}{6})$ sowohl Element der Menge $\mathfrak{G}_{6,3}$, als auch gekürzt als $(\frac{1}{3}; \frac{0}{3}; \frac{2}{3})$ Element der Menge $\mathfrak{G}_{3,3}$ sein. Unabhängige Junktoren führen in beiden Fällen zum gleichen Ergebnis, innere Junktoren (s. Kap. 5) jedoch nicht unbedingt. Der Grund ist, dass durch unabhängige Junktoren die Objekte der Geltungswerte lediglich permutiert werden und es somit egal ist, ob sie gekürzt oder erweitert wurden. Eine Excel-Datei mit einstelligen Junktoren am Beispiel $n = 6$ finden Sie zum Ausprobieren bei den Materialien zu dieser Arbeit auf der Seite <https://www.untex.de/logik/>.

4.1 Die unabhängige Negation

Bevor ich die Negation der Prozentuallogiken definiere und beschreibe, möchte ich zunächst eine Übersicht über die Negation in der klassischen 2-wertigen und in der mehrwertigen Logik am Beispiel der 3-wertigen Logik geben: In der 2-wertigen Logik ist die Negation von „falsch“ = 0 und von „wahr“ = 1:

a	0	1
Na	1	0

In der 3-wertigen Logik ist die Negation der 3 Wahrheitswerte „falsch“ = 0, „unbestimmt“ = $\frac{1}{2}$ und „wahr“ = 1 nicht einheitlich festgelegt und divergiert je nach Kalkül. In der nachfolgenden Übersicht werden am Beispiel der 3-wertigen Logik verschiedene Negationen in Tabellenschreibweise vorgestellt. Wo es sich um mehr als 3-wertige Logiken handelt, wird außerdem die Formel angegeben. Slupecki (1938 und 1946) definiert jeweils 2 unterschiedliche, Reichenbach sogar 3 unterschiedliche Negationen:

0	$\frac{1}{2}$	1	Bezeichnung	von	als Formel
1	1	0	schwache Neg. ³⁴	Słupecki (1946) ³⁵	$Na = 1 - a$
1	$\frac{1}{2}$	0	symmetrische bzw. starke bzw. diametrale Neg.	Łukasiewicz (1920) ³⁶ bzw. Łukasiewicz/Tarski (1930) Bočvar (1939) ³⁷ Kleene (1952) ³⁸ Reichenbach (1946) ³⁹	
1	0	0		Gödel (1930) ⁴⁰	
1	1	$\frac{1}{2}$	vollständige Neg.	Reichenbach (1946) ⁴¹ Słupecki (1946) ⁴²	$a = 0 \rightarrow Na = 1 \wedge$ $a \neq 0 \rightarrow Na = a - \frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	1	0	zyklische Neg.	Reichenbach (1946) ⁴³	
1	0	$\frac{1}{2}$	(Zyklation)	Post (1921) ⁴⁴ Słupecki (1938) ⁴⁵	

Die vollständige Negation und die beiden zyklischen Negationen schließen die 2-wertige Logik, bei der 0 in 1 und 1 in 0 übergeht, nicht mit ein. Und nur für die symmetrische Negation, die auch starke bzw. diametrale Negation genannt wird⁴⁶, gilt die doppelte Negation $NNa = a$. Daher habe ich die symmetrische Negation, für die $Na = 1 - a$ ist, als Vorbild für die Definition der Negation in der Prozentuallogik verwendet:

Definition 4. Die unabhängige *Negation* **Na** ($\neg a$) eines Geltungswertes $a = (\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_n)$ ist:

$Na := (\alpha_n; \alpha_{n-1}; \alpha_{n-2}; \dots; \alpha_2; \alpha_1)$. Durch die Negation gehen die Objekte α_i in

$f_{i,N}(\alpha_i) = \alpha_{n+1-i}$ über.

³⁴[10] Groschupp, S. 87

³⁵[5] Bolc, Borovik, S 76

³⁶[9] Gottwald, S. 84

³⁷[5] Bolc, Borovik, S 65.

³⁸[5] Bolc, Borovik, S. 74

³⁹[5] Bolc, Borovik, S. 75

⁴⁰[5] Bolc, Borovik, S. 84

⁴¹[5] Bolc, Borovik, S. 75

⁴²[5] Bolc, Borovik, S 76

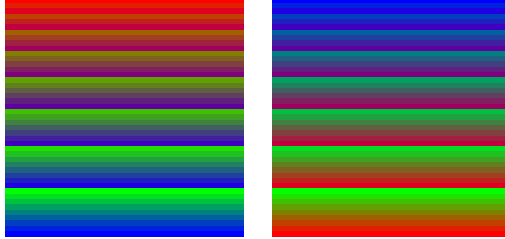
⁴³[5] Bolc, Borovik, S. 75

⁴⁴[9] Gottwald, S. 30

⁴⁵[5] Bolc, Borovik, S 80

⁴⁶[28] Sinowjew, S. 33

In den beiden folgenden Abbildungen mit den jeweils 45 Geltungswerten zu RGB-Farben bzgl. einer umgekehrt lexikographischen Anordnung ist die Abbildung zu Na nicht das Spiegelbild der Abbildung zu a. Das wird erst definitionsgemäß bei der Negation $N_m a$ in Kapitel 5.2 der Fall sein:



a

Na

Gesetz 11. von der doppelten Negation: $NNa = a$.

Dabei kann man sich die doppelte Negation wie eine Doppelspiegelung an einer Achse senkrecht durch das n -Tupel an der Stelle $\frac{n}{2}$ vorstellen.

$$\begin{aligned} NNa = NN(\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \dots; \alpha_n) &= f_{i,N}(f_{i,N}(\alpha_i)) = \\ N(\alpha_n; \alpha_{n-1}; \alpha_{n-2}; \alpha_{n-3}; \dots; \alpha_1) &= \text{bzw.} \quad f_{i,N}(\alpha_{n+1-i}) = \\ (\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \dots; \alpha_n) = a & \quad \alpha_{n+1-(n+1-i)} = \alpha_i \end{aligned}$$

Somit ist auch in den Prozentuallogiken die Negation eine Involution⁴⁷.

Aus der doppelten Negation folgt, dass aus $Na = b$ ebenfalls $a = Nb$ folgt, denn aus $Na = b$ folgt $NNa = Nb$. Mit $NNa = a$ gilt dann:

Gesetz 12. $Na = b \Rightarrow a = Nb$

In Kapitel 3.1 wurden einige Geltungswerte vorgestellt, die palindromisch, also symmetrisch sind, nämlich M_n , K_n und B_n , und es wurde bereits erwähnt, dass $NM_n = M_n$ ist. Aus der Symmetrie von Palindromen und der Symmetrie der Negation folgt:

Gesetz 13. Für Palindrome p gilt:

$$Np = p.$$

Somit gilt auch $NK_n = K_n$ und $NB_n = B_n$ (s. Kap. 3.1 auf S. 12). Aus $Np = p$ folgt, dass die beiden obigen Abbildungen von a und Na gar nicht symmetrisch sein konnten, da z.B. die Menge $\mathfrak{G}_{8,3}$ 5 Palindrome enthält, nämlich $(\frac{4}{8}; \frac{0}{8}; \frac{4}{8})$ bis $(\frac{0}{8}; \frac{8}{8}; \frac{0}{8})$, die durch die Negation auf sich selbst abgebildet werden. Sollten die Abbildungen von a und Na symmetrisch sein, so müssten alle 5 Palindrome genau in der Mitte liegen, was nicht möglich ist.

⁴⁷[6] Drazin, S. 139

Die Negation von „wahr“ ist offensichtlich „falsch“ und umgekehrt, da „wahr“ und „falsch“ in einer Prozentuallogik zueinander symmetrisch sind:

Gesetz 14. $NF_n = W_n$ und $NW_n = F_n$

Bei der symmetrischen Negation der mehrwertigen Logik ist $Na = 1 - a$. Entsprechend gilt für die Prozentuallogiken:

Gesetz 15. $|Na| = 1 - |a|$

Dazu zeige ich, dass $|a| + |Na| = 1$ ist:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n-1}\alpha_2 + \frac{2}{n-1}\alpha_3 + \cdots + \frac{n-3}{n-1}\alpha_{n-2} + \frac{n-2}{n-1}\alpha_{n-1} + \alpha_n + \\ & \frac{1}{n-1}\alpha_{n-1} + \frac{2}{n-1}\alpha_{n-2} + \cdots + \frac{n-3}{n-1}\alpha_3 + \frac{n-2}{n-1}\alpha_2 + \alpha_1 = \\ & \frac{n-1}{n-1}\alpha_2 + \frac{n-1}{n-1}\alpha_3 + \cdots + \frac{n-1}{n-1}\alpha_{n-2} + \frac{n-1}{n-1}\alpha_{n-1} + \alpha_n + \alpha_1 = \\ & \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_{n-2} + \alpha_{n-1} + \alpha_n + \alpha_1 = 1 \end{aligned}$$

Wenn aber 1 die Summe des Betrags eines Geltungswertes a und seines gespiegelten Geltungswertes Na ist, dann ist $\frac{1}{2}$ der durchschnittliche Wert aller Beträge der Geltungswerte einer Menge $\mathfrak{G}_{j,n}$ und die Summe der Beträge aller Geltungswerte ist somit $\frac{m}{2}$ (s. auch Gesetz 8 auf Seite 24):

Gesetz 16. $\frac{m}{2} = \sum_{b=1}^{j(n-1)} (m_{j,n}(b) \cdot \frac{b}{j(n-1)})$

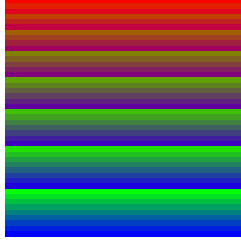
4.2 Die unabhängige Zyklation und die inverse Zyklation

Zu Beginn des letzten Kapitels hatte ich 2 zyklische Negationen von Reichenbach bzw. Post und Shupecki vorgestellt. Bevor ich die Zyklation bzw. die inverse Zyklation der Prozentuallogiken definiere, möchte ich zunächst noch einmal eine Übersicht über die Zyklation in der 2-wertigen und in der mehrwertigen Logik geben, diesmal der Deutlichkeit wegen jedoch anhand einer 4-wertigen Logik. In der 2-wertigen Logik fällt die Zyklation mit der Negation zusammen und ist dort daher nicht extra definiert, zumal es in der 2-wertigen Logik aus kombinatorischen Gründen sowieso nur 4 einstellige Junktoren geben kann, nämlich neben der Negation N noch die identische Abbildung I sowie Verum (V) und Falsum (O). In der 4-wertigen Logik ist die Zyklation:

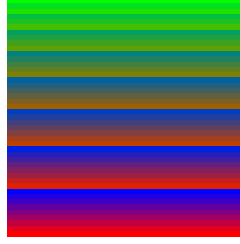
a	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
Zyklation Za	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
inverse Zyklation $\acute{Z}a$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	0

Definition 5. Die unabhängige *Zyklaktion* **Za** eines Geltungswertes $a = (\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_n)$ ist:

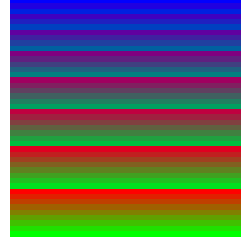
$Za := (\alpha_n; \alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_{n-1})$. Durch die Zyklaktion gehen die Objekte α_i in $f_{i,Z}(\alpha_i) = \alpha_{i+1}$ über, falls $i < n$ ist und in α_1 , falls $i = n$ ist ($f_{n,Z}(\alpha_n) = \alpha_1$).



$a = ZZZa$



Za



ZZa

Gesetz 17. von der n -fachen Zyklaktion: Für die n -fache Zyklaktion gilt:

$$\underbrace{ZZ \cdots Z}_{n\text{-mal}} a = a.$$

Man könnte sich die Objekte α_1 bis α_n im Kreis im Uhrzeigersinn angeordnet vorstellen, wobei die Objekte im Uhrzeigersinn n mal einen Platz weiter rücken, bis jedes Objekt seinen ursprünglichen Platz wieder erreicht hat.

Für die Summe der Beträge $|a| + |Za| + |ZZa| + |ZZZa| + \cdots + |\underbrace{ZZ \cdots Z}_{(n-1)\text{-mal}} a|$ gilt:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n-1} \alpha_2 + \frac{2}{n-1} \alpha_3 + \cdots + \frac{n-2}{n-1} \alpha_{n-1} + \alpha_n + \\ & \frac{1}{n-1} \alpha_1 + \frac{2}{n-1} \alpha_2 + \cdots + \frac{n-2}{n-1} \alpha_{n-2} + \alpha_{n-1} + \\ & \cdots \\ & \frac{1}{n-1} \alpha_4 + \frac{2}{n-1} \alpha_5 + \cdots + \frac{n-2}{n-1} \alpha_1 + \alpha_2 + \\ & \frac{1}{n-1} \alpha_3 + \frac{2}{n-1} \alpha_4 + \cdots + \frac{n-2}{n-1} \alpha_n + \alpha_1 = \\ & \frac{1}{n-1} (\alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_n + \cdots + \alpha_3) + \frac{2}{n-1} (\alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_4) + \cdots + \\ & \frac{n-2}{n-1} (\alpha_{n-1} + \alpha_{n-2} + \alpha_{n-3} + \cdots + \alpha_n) + (\alpha_n + \alpha_{n-1} + \alpha_{n-2} + \cdots + \alpha_1) = \\ & \frac{1}{n-1} \cdot 1 + \frac{2}{n-1} \cdot 1 + \cdots + \frac{n-2}{n-1} \cdot 1 + 1 = \\ & \frac{1+2+\cdots+(n-2)}{n-1} + 1 = \frac{\frac{(n-2)(n-1)}{2}}{n-1} + 1 = \\ & \frac{n-2}{2} + \frac{2}{2} = \frac{n}{2} \end{aligned}$$

Gesetz 18. $|a| + |Za| + |ZZa| + \dots + |\underbrace{ZZ\dots Z}_{(n-1)\text{-mal}} a| = \frac{n}{2}$

Analog zur Zyklaktion kann eine inverse Zyklaktion definiert werden:

Definition 6. Die unabhängige *inverse Zyklaktion* $\acute{Z}a$ eines Geltungswertes $a = (\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \dots; \alpha_n)$ ist:

$\acute{Z}a := (\alpha_2; \alpha_3; \dots; \alpha_n; \alpha_1)$. Durch die inverse Zyklaktion gehen die Objekte α_i in

$f_{i,\acute{Z}}(\alpha_i) = \alpha_{i-1}$ über, falls $i > 1$ ist und in α_n , falls $i = 1$ ist ($f_{1,\acute{Z}}(\alpha_1) = \alpha_n$).

Auch das Gesetz der n-fachen Zyklaktion gilt dann entsprechend für die n-fache inverse Zyklaktion mit $\underbrace{\acute{Z}\acute{Z}\dots\acute{Z}}_{n\text{-mal}} a = a$.

Gesetz 19. $ZNa = N\acute{Z}a$ (und entsprechend $NZa = \acute{Z}Na$), denn:

$$\begin{aligned} ZN(\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \dots; \alpha_n) &= \\ Z(\alpha_n; \alpha_{n-1}; \alpha_{n-2}; \dots; \alpha_1) &= \\ (\alpha_1; \alpha_n; \alpha_{n-1}; \dots; \alpha_2) &= \\ N(\alpha_2; \alpha_3; \dots; \alpha_n; \alpha_1) &= \\ N\acute{Z}(\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \dots; \alpha_n) \end{aligned}$$

Für den konstanten Geltungswert $K_n = (\frac{1}{n}; \frac{1}{n}; \dots; \frac{1}{n})$ aus Kapitel 3.1 gilt außerdem offensichtlich:

Gesetz 20. $ZK_n = \acute{Z}K_n = K_n$

Da beim Geltungswert F_n für „falsch“ $\alpha_1 = 1$ ist und beim Geltungswert W_n für „wahr“ $\alpha_n = 1$ ist (während jeweils alle anderen Objekte 0 sind), gilt:

Gesetz 21. $ZW_n = F_n$ und $\acute{Z}F_n = W_n$

Außerdem gilt offensichtlich analog zum Gesetz von der doppelten Negation $NNa = a$:

Gesetz 22. $Z\acute{Z}a = \acute{Z}Za = a$

4.3 Die unabhängige Veritation als Sortierung

Die Veritation W macht einen Geltungswert „wahrer“ oder präziser ausgedrückt: $|Wa| \geq |a|$. Nicht nur in diesem Kapitel wird eine unabhängige Veritation vorgestellt, sondern auch in den Kapiteln 5.2 und 5.3 werden 2 innere Veritationen thematisiert. In den Kapiteln 6.3 und 6.4.3 werden verschiedene Varianten einer ergänzenden Veritation untersucht und definiert und in Kapitel 6.6 wird das Thema „innere Veritation“ noch einmal aufgegriffen.

Daher erscheint es notwendig, auf die Veritation ganz allgemein bzw. auf mögliche Anwendungen einer Veritation zunächst genauer einzugehen:

Welchen Sinn sollte es haben, Datenreihen mit zunehmender Ausprägung einer bestimmten Eigenschaft zu verbessern bzw. „wahrer“ zu machen (einmal davon abgesehen, Daten in manipulativer Absicht zu „schönen“)? Eine denkbare Anwendung wäre die Veritation eines Versuchsergebnisses als Zielvorgabe für eine Wiederholung des Versuches. Ich möchte jedoch auf eine andere Anwendung etwas ausführlicher eingehen, nämlich auf die Veritation von Prüfungsergebnissen bzw. Notenspiegeln:

2007 wurde die erste niedersachsenweite zentrale Abschlussprüfung im 10. Jahrgang im Fach Mathematik gleich zweimal nachgebessert: Zunächst wurde die Zuordnung der Punkte zu den Noten verbessert und als das nicht ausreichte, wurden alle Noten (außer der Note 1) mit der bereits verbesserten Zuordnung noch einmal um eine Note heraufgesetzt. Dazu sagte der damalige niedersächsische Kultusminister Bernd Busemann: „Insgesamt aber ist in den Realschulen ... die Quote der unterhalb einer ausreichend Note bewerteten Arbeiten mit insgesamt mehr als 40 Prozent zu hoch“⁴⁸. Ministerialrat Peter Reinert vom Niedersächsischen Kultusministerium nannte mir gegenüber als Grund, „dass eine Ursache der Schwierigkeiten der Aufbau der Arbeit war“⁴⁹. Bereits in einer Presseinformation vom 14.06.2007 hieß es: „Von den Schulen seien ... häufig der Umfang der Arbeit mit einer Zeitdauer von 150 Minuten, die Bandbreite der Aufgaben und Themen, die das ganze Schuljahr umfassen, sowie die Komplexität sowohl einzelner Aufgaben als für die Schülerinnen und Schüler ungewohnt genannt worden“⁵⁰. 2022 wurde ebenfalls die „Bewertung der schriftlichen Abiturprüfung im Fach Mathematik ... um einen Notenpunkt angehoben“⁵¹.

Welchen Grund bzw. welche Gründe kann es geben, Prüfungsergebnisse nachzubessern?

- Die Aufgaben waren zu schwer oder zu komplex.
- Die Bandbreite der Aufgaben und Themen war zu groß.

⁴⁸Zitiert aus einer Presseinformation des Niedersächsischen Kultusministeriums vom 25.06.2007. Quelle:

<https://www.mk.niedersachsen.de/startseite/aktuelles/presseinformationen/-6196.html>, (abgerufen am 10.11.2024)

⁴⁹Email vom 11.06.2024

⁵⁰<https://www.mk.niedersachsen.de/startseite/aktuelles/presseinformationen/-6192.html>, (abgerufen am 10.11.2024)

⁵¹<https://www.mk.niedersachsen.de/startseite/aktuelles/presseinformationen/zu-wenig-zeit-anhebung-der-mathematik-klausuren-um-einen-notenpunkt-212416.html>, (abgerufen am 10.11.2024)

- Die Zuweisung von Punkten zu einzelnen Aufgaben war unangemessen.
- Die Lösung von Teilen der Aufgaben wurde nicht angemessen berücksichtigt bzw. ermöglicht.
- Die Aufgabenstellung war zu kompliziert oder missverständlich.
- Die Aufgaben waren zu einseitig bzw. bildeten den Unterricht nicht genügend ab.
- Die Zeit für die Prüfung war zu kurz.
- Der Unterricht hat nicht ausreichend auf die Prüfung vorbereitet.
- Mehrere Schüler/-innen haben ohne eigenes Verschulden länger im Unterricht gefehlt.
- Die Schüler/-innen haben sich nicht ausreichend vorbereitet.
- Die Einstellung der Schüler/-innen zum Fach ist gestört (Stichwort „Matheangst“).
- Die Lehrperson möchte den Schüler/-innen einen (vermeintlichen) Gefallen tun.
- Mögliche Probleme im Unterricht sollen kaschiert werden.

Natürlich ist die Nachbesserung eines Prüfungsergebnisses nicht die einzige oder immer angemessene Möglichkeit, um auf ein zu schlechtes Ergebnis zu reagieren. Statt dessen könnte man auch ...

- die Arbeit trotzdem werten.
- die Arbeit nicht werten.
- die Arbeit neu schreiben.
- die Arbeit in geringerem Maße für die Endnote heranziehen.
- die Arbeit durch eine mündliche Prüfung ergänzen.

Nachdem ich nun eine mögliche Anwendung der Veritation etwas genauer beschrieben habe, möchte ich zur Definition der unabhängigen Veritation kommen: Zunächst liegt der Gedanke nahe, die Zyklation als Veritation zu verwenden, da bis auf das letzte Objekt alle Objekte um einen Platz weiter nach rechts geschoben werden und somit zu einem größeren Betrag führen. Aber das letzte Objekt α_n springt um $n - 1$ Plätze nach links, wodurch der Betrag wiederum kleiner wird. Wann genau ist aber $|Za| \geq |a|$?

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{n-1}\alpha_1 + \frac{2}{n-1}\alpha_2 + \frac{3}{n-1}\alpha_3 + \cdots + \frac{n-2}{n-1}\alpha_{n-2} + \alpha_{n-1} \geq \\
& \frac{1}{n-1}\alpha_2 + \frac{2}{n-1}\alpha_3 + \frac{3}{n-1}\alpha_4 + \cdots + \frac{n-2}{n-1}\alpha_{n-1} + \alpha_n \Leftrightarrow \\
& \frac{1}{n-1}\alpha_1 + \frac{1}{n-1}\alpha_2 + \frac{1}{n-1}\alpha_3 + \cdots + \frac{1}{n-1}\alpha_{n-1} \geq \alpha_n \Leftrightarrow \\
& \frac{1}{n-1}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_{n-1}) \geq \alpha_n \Leftrightarrow \\
& \frac{1}{n-1}(1 - \alpha_n) \geq \alpha_n \Leftrightarrow \frac{1}{n-1} - \frac{\alpha_n}{n-1} \geq \alpha_n \Leftrightarrow \frac{1}{n-1} \geq \alpha_n + \frac{\alpha_n}{n-1} \Leftrightarrow \\
& \frac{1}{n-1} \geq \alpha_n \left(\frac{n-1}{n-1} + \frac{1}{n-1} \right) \Leftrightarrow \frac{1}{n-1} \geq \alpha_n \frac{n}{n-1} \Leftrightarrow \frac{n-1}{n(n-1)} \geq \alpha_n \text{ (wg. } n-1 > 0 \text{)}
\end{aligned}$$

Betrachten wir zum Beispiel die Zyklationen von $a = (\frac{1}{8}; \frac{2}{8}; \frac{0}{8}; \frac{3}{8}; \frac{2}{8})$ mit $n = 5$ und somit $\frac{n-1}{n(n-1)} = \frac{4}{5 \cdot 4} = \frac{1}{5}$:

$$\begin{aligned} |(\frac{1}{8}; \frac{2}{8}; \frac{0}{8}; \frac{3}{8}; \frac{2}{8})| &= 0,59 \text{ (a)} \\ |(\frac{2}{8}; \frac{1}{8}; \frac{2}{8}; \frac{0}{8}; \frac{3}{8})| &= 0,53 \text{ (Za)} \\ |(\frac{3}{8}; \frac{2}{8}; \frac{1}{8}; \frac{2}{8}; \frac{0}{8})| &= 0,31 \text{ (ZZa)} \\ |(\frac{0}{8}; \frac{3}{8}; \frac{2}{8}; \frac{1}{8}; \frac{2}{8})| &= 0,56 \text{ (ZZZa)} \\ |(\frac{2}{8}; \frac{0}{8}; \frac{3}{8}; \frac{2}{8}; \frac{1}{8})| &= 0,50 \text{ (ZZZZa)} \\ |(\frac{1}{8}; \frac{2}{8}; \frac{0}{8}; \frac{3}{8}; \frac{2}{8})| &= 0,59 \text{ (ZZZZZa = a)} \end{aligned}$$

Nur beim 3. zum 4. und beim 5. zum 1. Geltungswert wurde der Betrag größer, weil das letzte Objekt des 3. und 5. Geltungswertes kleiner als $\frac{1}{5} = \frac{1,6}{8}$ war. Die unabhängige Zyklation als Junktor für die unabhängige Veritation ist somit nicht brauchbar.

Da die unabhängigen Junktoren die Objekte der Geltungswerte lediglich permutieren, ist es nicht möglich, dass die Geltungswerte durch unabhängige Veritation bzw. mehrfache unabhängige Veritation zu $W_n = (0; 0; \dots; 0; 1)$ werden, es sei denn, der Geltungswert hat nur Nullen und eine 1 als Objekte. Der „wahrste“ Geltungswert, der durch Permutation erreicht werden kann, ist der Geltungswert mit den aufsteigend sortierten Objekten. Daher habe ich für die Definition der unabhängigen Veritation aus der Vielzahl von Sortieralgorithmen einen der bekanntesten und einfachsten Algorithmen ausgewählt, nämlich *bubble sort*, laut Donald E. Knuth auch unter den, wie er es formuliert, „more prosaic names such as *exchange selection* or *propagation*“ bekannt⁵². Dabei spielt an dieser Stelle keine große Rolle, ob es sich bei *bubble sort* z.B. unter dem Gesichtspunkt der Laufzeit um einen besonders effektiven Algorithmus handelt.

Wie arbeitet dieser Algorithmus? Nacheinander werden alle benachbarten Objekte α_i und α_{i+1} des Geltungswertes a von $\alpha_i = \alpha_1$ bis $\alpha_{i+1} = \alpha_n$ paarweise verglichen und wenn $\alpha_i > \alpha_{i+1}$ ist, miteinander vertauscht. Das führt dazu, dass nach einem Durchgang das größte Objekt auf den Platz von α_n wandert und auch andere Objekte möglicherweise weiter nach rechts rücken (also im bildlichen Sinne wie Blasen aufsteigen). Nach einem weiteren Durchgang wandert das zweitgrößte Objekt auf den Platz von α_{n-1} usw. Nach $n - 1$ Durchgängen sind die Objekte des Geltungswertes aufsteigend sortiert. In der nachfolgenden Definition wird einer dieser Durchgänge als Veritation definiert, wobei es in dieser Definition nicht notwendig ist, dass die paarweisen Vergleiche von Anfang an beginnend nacheinander durchgeführt werden:

⁵²[16] Knuth, S. 106

Definition 7. Die unabhängige *Veritation* **Wa** eines Geltungswertes $a = (\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_n)$ ist:

$$Wa := (\min(\alpha_1; \alpha_2); \min(\max(\alpha_1, \alpha_2); \alpha_3); \min(\max(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3); \alpha_4); \dots; \min(\max(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}); \alpha_n); \max(\alpha_1, \dots, \alpha_n)).$$

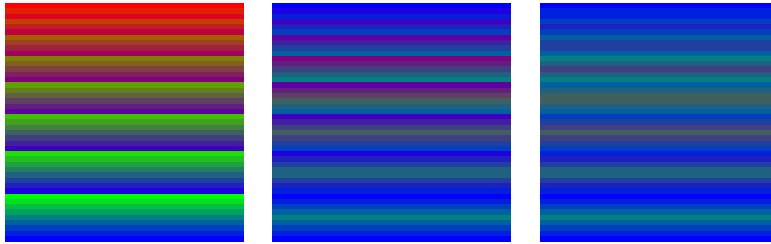
In der 2-wertigen Logik fällt die unabhängige Veritation mit dem 1-stelligen Junktor „Verum“ (V) zusammen, denn $W(0; 1) = (0; 1)$ und ebenfalls $W(1; 0) = (0; 1)$. Doch auch in einer Prozentuallogik ist $WF_n = W_n$, denn bei bubble sort wird das größte Objekt des Tupels, in diesem Fall 1, von links nach rechts durchgereicht:

Gesetz 23. $WW_n = W_n$ und $WF_n = W_n$

Bei fortgesetzter Veritation sind die Objekte des Geltungswertes spätestens nach $(n - 1)$ Durchläufen sortiert und der Geltungswert wird nicht mehr weiter verändert.

Gesetz 24. $\underbrace{WW \dots Wa}_{(n-1)\text{-mal}} = \underbrace{WW \dots Wa}_{n\text{-mal}}$

In den folgenden Abbildungen mit der Veritation der 45 Tripel zu den RGB-Farben ($n = 3$) beschreibt das 3. Bild bereits den Endzustand:



a

Wa

WWa

Von den 45 Geltungswerten, die in der linken Abbildung dargestellt sind, waren 10 Geltungswerte bereits aufsteigend sortiert⁵³ und werden durch die Veritation Wa nicht mehr verändert, nämlich (jeweils ohne den gemeinsamen Nenner $j = 8$):

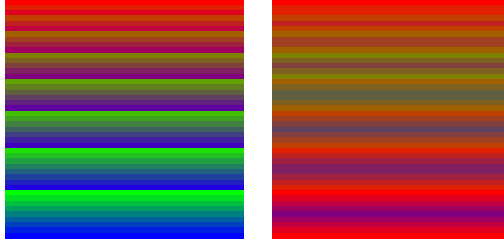
- | | | |
|---------------|---------------|---------------|
| 23. (2; 3; 3) | 41. (0; 4; 4) | 45. (0; 0; 8) |
| 24. (2; 2; 4) | 42. (0; 3; 5) | |
| 33. (1; 3; 4) | 43. (0; 2; 6) | |
| 34. (1; 2; 5) | 44. (0; 1; 7) | |
| 35. (1; 1; 6) | | |

⁵³Die Anzahl der ungeordneten Partitionen von $j = 8$ in $n = 3$ Summanden ist 10, falls 0 als Summand erlaubt ist. 10 ist die Summe der ungeordneten Partitionen von 8 in 3, 2 und 1 Summanden, wobei 0 als Summand nicht erlaubt ist: $P(8, 3) + P(8, 2) + P(8, 1) = 5 + 4 + 1 = 10$ (s. [32] Witt, S. 37).

Offensichtlich tut die Veritation das, was sie soll, nämlich $|Wa| \geq |a|$, denn durch die Sortierung wandern größere Werte nach rechts (und nie nach links) und werden dort bei der Berechnung des Betrages mit entsprechend größeren Brüchen multipliziert. Auch WK_n ist offensichtlich K_n .

Analog zur inversen Zyklation lässt sich eine inverse Veritation definieren, die Geltungswerte nicht „wahrer“ sondern „falscher“ macht, die Objekte des Geltungswertes also absteigend sortiert. Dabei könnte die inverse Veritation explizit wie oben definiert werden oder über eine Gesetzmäßigkeit:

Definition 8. Die unabhängige *inverse Veritation* $\acute{W}a$ eines Geltungswertes a ist $\acute{W}a := NWN a$.



a

$\acute{W}a$

Dazu ein Beispiel:

$$\begin{aligned} \acute{W}(\frac{3}{10}; \frac{1}{10}; \frac{2}{10}; \frac{0}{10}; \frac{3}{10}; \frac{1}{10}) &= \\ NWN(\frac{3}{10}; \frac{1}{10}; \frac{2}{10}; \frac{0}{10}; \frac{3}{10}; \frac{1}{10}) &= \\ NW(\frac{1}{10}; \frac{3}{10}; \frac{0}{10}; \frac{2}{10}; \frac{1}{10}; \frac{3}{10}) &= \\ N(\frac{1}{10}; \frac{0}{10}; \frac{2}{10}; \frac{1}{10}; \frac{3}{10}; \frac{3}{10}) &= \\ (\frac{3}{10}; \frac{3}{10}; \frac{1}{10}; \frac{2}{10}; \frac{0}{10}; \frac{1}{10}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Dabei ist } |a| &= |(\frac{3}{10}; \frac{1}{10}; \frac{2}{10}; \frac{0}{10}; \frac{3}{10}; \frac{1}{10})| = 0,44 \geq \\ |\acute{W}a| &= |(\frac{3}{10}; \frac{3}{10}; \frac{1}{10}; \frac{2}{10}; \frac{0}{10}; \frac{1}{10})| = 0,32. \end{aligned}$$

Auch das Gesetz 19, das bezüglich der Zyklation besagt, dass $ZNa = N\acute{Z}a$ ist, lässt sich entsprechend auf die Veritation übertragen, denn $N\acute{W}a = NNWN a$ (laut Definition) = WNa (nach Gesetz 11 von der doppelten Negation):

Gesetz 25. $WNa = N\acute{W}a$

Allerdings lässt sich Gesetz 22, das besagt, dass $Z\acute{Z}a = \acute{Z}Za = a$ ist, nicht auf die Veritation übertragen, was an einem Beispiel gezeigt werden kann:

$$\begin{aligned} W\acute{W}a &= W\acute{W}(\frac{3}{10}; \frac{1}{10}; \frac{4}{10}; \frac{0}{10}; \frac{2}{10}) = \\ WNWN(\frac{3}{10}; \frac{1}{10}; \frac{4}{10}; \frac{0}{10}; \frac{2}{10}) &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{WNW}(\frac{2}{10}; \frac{0}{10}; \frac{4}{10}; \frac{1}{10}; \frac{3}{10}) = \\
& \text{WN}(\frac{0}{10}; \frac{2}{10}; \frac{1}{10}; \frac{3}{10}; \frac{4}{10}) = \\
& \text{W}(\frac{4}{10}; \frac{3}{10}; \frac{1}{10}; \frac{2}{10}; \frac{0}{10}) = \\
& (\frac{3}{10}; \frac{1}{10}; \frac{2}{10}; \frac{0}{10}; \frac{4}{10}) \neq a = (\frac{3}{10}; \frac{1}{10}; \frac{4}{10}; \frac{0}{10}; \frac{2}{10})
\end{aligned}$$

Aber:

$$\begin{aligned}
& \acute{\text{W}}\text{Wa} = \acute{\text{W}}\text{W}(\frac{3}{10}; \frac{1}{10}; \frac{4}{10}; \frac{0}{10}; \frac{2}{10}) = \\
& \text{NWNW}(\frac{3}{10}; \frac{1}{10}; \frac{4}{10}; \frac{0}{10}; \frac{2}{10}) = \\
& \text{NWN}(\frac{1}{10}; \frac{3}{10}; \frac{0}{10}; \frac{2}{10}; \frac{4}{10}) = \\
& \text{NW}(\frac{4}{10}; \frac{2}{10}; \frac{0}{10}; \frac{3}{10}; \frac{1}{10}) = \\
& \text{N}(\frac{2}{10}; \frac{0}{10}; \frac{3}{10}; \frac{1}{10}; \frac{4}{10}) = \\
& (\frac{4}{10}; \frac{1}{10}; \frac{3}{10}; \frac{0}{10}; \frac{2}{10}) \neq a = (\frac{3}{10}; \frac{1}{10}; \frac{4}{10}; \frac{0}{10}; \frac{2}{10})
\end{aligned}$$

Ein Grund ist, dass das größte Objekt $\frac{4}{10}$ am Ende der 1. Rechnung an der Position von α_n stehen muss, da die letzte Operation eine Veritation war, während $\frac{4}{10}$ am Ende der 2. Rechnung an der Position von α_1 stehen muss, da die vorletzte Operation eine Veritation und die letzte dann eine Negation war. Dass also eine inverse Veritation eine Veritation im Sinne von $\acute{\text{W}}\text{Wa} = a$ rückgängig macht, was eigentlich der Vorstellung von einer inversen Abbildung entspräche, würde als notwendige (nicht unbedingt hinreichende) Bedingung voraussetzen, dass das größte Objekt von a an der Position α_n steht, was aber eben nicht bei jedem Geltungswert a der Fall ist. Überhaupt verhält sich bubble sort bezüglich kleiner und großer Zahlen ungleich: Während die größte Zahl nach einem Durchgang bereits bis an das Ende des Geltungswertes wandert, kann die kleinste Zahl pro Durchgang nur um (höchstens) eine Position nach vorne rücken.

4.4 Permutationsmatrizen

Da es sich bei den bisher vorgestellten einstelligen Junktoren um Permutationen der Objekte des Geltungswertes a handelt, ist es naheliegend, diese Abbildungen durch eine Multiplikation $\vec{a} \cdot A$ zu beschreiben, wobei $\vec{a}$ der zu a gehörende Zeilenvektor und A die zum Junktor passende, quadratische $n \times n$ -Permutationsmatrix⁵⁴ ist, bei der in jeder Zeile und Spalte genau eine 1 steht. Ich verwende anstelle von „ $=$ “ das Äquivalenzzeichen „ $\hat{=}$ “, da ein Junktor ein Tupel erzeugt, die Multiplikation eines Vektors mit einer Matrix jedoch einen Vektor. Zunächst die beiden Matrizen zur Negation N_a und zur Identität $I_a = a$, wobei die Matrix zur Identität die Einheitsmatrix als neutrales Element der Matrizenmultiplikation ist:

⁵⁴[27] Schmitt, Trenkler, S. 99

$$\text{Na} \stackrel{\wedge}{=} \vec{a} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Ia} \stackrel{\wedge}{=} \vec{a} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bei dieser Gelegenheit möchte ich auch die Matrizen zu den beiden anderen 1-stelligen Junktoren aus der 2-wertigen Logik, nämlich Verum und Falsum, mit vorstellen, die allerdings keine Permutationsmatrizen sind, da ja alle Geltungswerte entweder auf W_n oder F_n abgebildet und nicht permutiert werden:

$$\text{Va} \stackrel{\wedge}{=} \vec{a} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Oa} \stackrel{\wedge}{=} \vec{a} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Folgende Abbildungs- bzw. Permutationsmatrizen entsprechen der Zyklktion und der inversen Zyklktion:

$$\text{Za} \stackrel{\wedge}{=} \vec{a} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Za} \stackrel{\wedge}{=} \vec{a} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dabei ist in der linken Matrix sehr schön zu erkennen, wie bei der Zyklktion das letzte Objekt des Geltungswertes an die 1. Stelle rückt (s. 1. Spalte) und das 1. Objekt an die 2. Stelle (s. 2. Spalte).

Die Permutationsmatrizen für die unabhängige Veritation sind nicht immer gleich, da die Vertauschungen in einem Durchgang von bubble sort davon abhängen, wie die Objekte des Geltungswertes angeordnet sind. Allen Permutationsmatrizen der Veritation ist jedoch gemeinsam, dass sie in der linken unteren Ecke ein Dreieck aus Nullen haben, weil nach einem Durchgang von bubble sort an der 1. Stelle des Geltungswertes nur α_1 oder α_2 , an der 2. Stelle nur α_1 , α_2 oder α_3 usw. stehen kann:

$$\text{Wa} \stackrel{\wedge}{=} \vec{a} \cdot \begin{pmatrix} ? & ? & \dots & ? & ? & ? \\ ? & ? & \dots & ? & ? & ? \\ 0 & ? & \dots & ? & ? & ? \\ 0 & 0 & \dots & ? & ? & ? \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & ? & ? \end{pmatrix}$$

Die Fragezeichen sind Platzhalter für eine 1 oder 0, wobei natürlich in jeder Zeile und jeder Spalte der Matrix letztendlich jeweils genau eine 1 stehen muss. Um eine konkrete Matrix für eine Veritation anzugeben, muss ein konkreter Geltungswert (wie im Beispiel am Ende des letzten Kapitels) gewählt werden:

$$W(\frac{3}{10}; \frac{1}{10}; \frac{4}{10}; \frac{0}{10}; \frac{2}{10}) \stackrel{\wedge}{=} (\frac{3}{10} \frac{1}{10} \frac{4}{10} \frac{0}{10} \frac{2}{10}) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (\frac{1}{10} \frac{3}{10} \frac{0}{10} \frac{2}{10} \frac{4}{10})$$

Da im Beispiel am Ende des letzten Kapitels die inverse Veritation $NWN(\frac{3}{10}; \frac{1}{10}; \frac{4}{10}; \frac{0}{10}; \frac{2}{10}) = (\frac{4}{10}; \frac{3}{10}; \frac{1}{10}; \frac{2}{10}; \frac{0}{10})$ war, ist die entsprechende Matrix:

$$\dot{W}a(\frac{3}{10}; \frac{1}{10}; \frac{4}{10}; \frac{0}{10}; \frac{2}{10}) \stackrel{\wedge}{=} (\frac{3}{10} \frac{1}{10} \frac{4}{10} \frac{0}{10} \frac{2}{10}) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (\frac{4}{10} \frac{3}{10} \frac{1}{10} \frac{2}{10} \frac{0}{10})$$

Dabei fällt auf, dass bei der inversen Veritation diesmal das Dreieck aus Nullen oben rechts in der Matrix steht, da durch $\dot{W}a$ der Geltungswert a mit bubble sort von hinten nach vorne sortiert wird und bei einem Durchgang das letzte Objekt nur aus α_{n-1} und α_n , das vorletzte Objekt nur aus α_{n-2} , α_{n-1} und α_n usw. gebildet werden kann.

Da $NWN a = \dot{W}a$ ist, ist natürlich auch:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5 Einstellige innere Junktoren

Einstellige innere Junktoren sind Junktoren, die Geltungswerte aus der Menge $\mathfrak{G}_{j,n}$ wieder auf Geltungswerte aus der Menge $\mathfrak{G}_{j,n}$ abbilden, auch wenn die Objekte der neuen Geltungswerte dann möglicherweise andere sind. Dabei spielt es eine Rolle, wie die Ordnungsrelation bzgl. dieser Menge definiert ist (lexikographisch, umgekehrt lexikographisch oder nach dem logischen Betrag).

5.1 Die innere Zyklation

In diesem Kapitel soll eine Zyklation definiert werden, die nicht nur wie bei Z_a die Objekte eines Geltungswertes zyklieren lässt, sondern im Hinblick auf ein Gesetz vom ausgeschlossenen $(m+1)$ -ten über alle m Geltungswerte aus der Menge $\mathfrak{G}_{j,n}$ zyklisiert. Für diese Zwecke genügt eine Zyklation, die nacheinander alle lexikographisch angeordneten Geltungswerte durchläuft. Das kann man sich so vorstellen, als wenn alle n -stelligen $(j+1)$ -adischen Zahlen von 0 bis $(j+1)^n - 1$ mit den Zählern der Objekte als Ziffern durchlaufen werden, wobei allerdings jeweils die Quersumme j sein muss und führende Nullen bei den n -stelligen Zahlen mitzählen:

Definition 9. Die innere Zyklation $Z_m a$ eines Geltungswertes a ist:

$$Z_m a := \begin{cases} (\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_{n-1} + \frac{1}{j}; \alpha_n - \frac{1}{j}) & \text{falls } \alpha_n \neq 0 \quad (n \geq 2) \\ (\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_{n-2} + \frac{1}{j}; 0; \alpha_{n-1} - \frac{1}{j}) & \text{falls } \alpha_n = 0 \wedge \alpha_{n-1} \neq 0 \quad (n \geq 3) \\ (\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_{n-3} + \frac{1}{j}; 0; 0; \alpha_{n-2} - \frac{1}{j}) & \text{falls } \alpha_n = \alpha_{n-1} = 0 \wedge \alpha_{n-2} \neq 0 \quad (n \geq 4) \\ \dots & \\ (\alpha_1 + \frac{1}{j}; 0; \dots; 0; \alpha_2 - \frac{1}{j}) & \text{falls } \alpha_n = \dots = \alpha_3 = 0 \wedge \alpha_2 \neq 0 \\ (0; \dots; 0; 1) & \text{falls } \alpha_n = \dots = \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

Das m bei $Z_m a$ bedeutet, dass die innere Zyklation im Unterschied zur unabhängigen Zyklation Z_a durch alle m Geltungswerte der Menge $\mathfrak{G}_{j,n}$ zyklisiert.

Um zu verstehen, wie diese Zyklation arbeitet, sollte man sich zunächst vergegenwärtigen, wie eine Zahl in einem Stellenwertsystem schrittweise größer wird bzw. schrittweise größer wird, ohne dass die Quersumme sich ändert: Normalerweise wird eine ganze (positive) Zahl in einem Stellenwertsystem um einen Schritt bzw. um 1 größer, indem die letzte Ziffer um 1 größer wird, es sei denn, die letzte Ziffer ist die größtmögliche Ziffer j . Dann wird die letzte Ziffer zu 0 und die vorletzte Ziffer wird um 1 vergrößert (es sei denn, sie ist auch die größtmögliche Ziffer) usw.

Dieses Vorgehen ist aber nicht möglich, wenn die Quersumme unverändert bleiben soll. Denn wenn die letzte Ziffer um 1 vergrößert würde, müsste zwangsläufig eine weiter links stehende Ziffer um 1 verkleinert werden, damit sich die Quersumme nicht ändert. Dadurch würde die Zahl aber kleiner statt größer werden, da weiter links stehende Zahlen größere Potenzen der Basis $j + 1$ des Stellenwertsystems repräsentieren. Die letzte Ziffer kann also nur kleiner werden, bis sie 0 erreicht und die vorletzte Ziffer wird jeweils um 1 größer. Es muss die vorletzte Ziffer sein, die jeweils um 1 größer wird, damit das Größerwerden der Zahl minimal ist. Erst, wenn die vorletzte Ziffer die größtmögliche Ziffer unter Beachtung der Quersumme erreicht hat, wird die drittletzte Ziffer um 1 vergrößert, die vorletzte Ziffer auf 0 gesetzt und die letzte Ziffer, ebenfalls unter Beachtung der Quersumme, auf die unter dieser Bedingung größtmögliche Ziffer gesetzt usw.

Entscheidend ist also, dass sich die Summe 1 durch die innere Zyklaktion $Z_m a$ nicht verändert. Um das zu überprüfen, möchte ich als Beispiel einen Blick auf den 2. Geltungswert in der Definition, nämlich $(\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_{n-2} + \frac{1}{j}; 0; \alpha_{n-1} - \frac{1}{j})$ werfen: Durch die gleichzeitige Addition und Subtraktion von $\frac{1}{j}$ ändert sich die Summe nicht. Aber wo ist α_n geblieben? Der 2. Geltungswert in der Definition wurde unter der Voraussetzung definiert, dass $\alpha_n = 0$ ist und somit für die Summe keine Rolle spielt bzw. zum vorletzten Objekt 0 wurde. Die letzte Zeile der Definition beschreibt, dass durch die innere Zyklaktion $Z_m a$ das letzte Element in der lexikographisch angeordneten Menge $\mathfrak{G}_{j,n}$ wieder zum 1. Element in einer lexikographischen Anordnung wird.

Das entsprechende Listing für den Fall $j = 6$ und $n = 4$ findet sich sowohl im Anhang 13.5 als auch bei den Materialien zu dieser Arbeit unter <https://www.untexte.de/logik/> und zwar als Textdatei und als ausführbare HTML-Datei.

Eine inverse innere Zyklaktion $\hat{Z}_m a$ entspräche übrigens der Zyklaktion $Z_m a$ bezüglich einer umgekehrt lexikographisch angeordneten Menge $\mathfrak{G}_{j,n}$.

5.2 Weitere innere Junktoren

Ich habe zwar jetzt eine innere Zyklaktion definiert, aber die Definition einer inneren Negation $N_m a$ übersprungen. Ist eine solche Definition überhaupt notwendig? Auf den ersten Blick nicht, denn eine zentrale Bedingung, die eine Negation in einer Prozentuallogik erfüllen sollte, ist, dass $|Na| = 1 - |a|$ ist und diese Bedingung erfüllt bereits die unabhängige Negation (s. Gesetz 15). Auch die Definition einer inneren Zyklaktion bzgl. einer Ordnungsrelation nach Betrag erscheint auf den ersten Blick nicht notwendig, da die innere Zyklaktion bzgl. einer lexikographischen Anordnung für die Formulierung ei-

nes Gesetzes vom ausgeschlossenen $(m + 1)$ -ten ausreicht. Anders sieht es bei der inneren Veritation (und der inversen inneren Veritation) aus, da die unabhängige Veritation nur zum Teil befriedigt, weil sie auch bei mehrfacher Durchführung in der Regel nicht zum Geltungswert W_n führt⁵⁵. Nun bietet sich aber eine innere Zyklation $\#Z_m a$ bzgl. einer Ordnungsrelation nach Betrag an, um damit gleichzeitig eine innere Veritation $W_m a$ zu definieren, da dann offensichtlich $|\#Z_m a| \geq |a|$ ist, falls $a \neq W_n$. Entsprechendes gilt für eine innere inverse Zyklation bzgl. einer Ordnungsrelation nach Betrag bzw. eine innere inverse Veritation. Und die innere inverse Zyklation (bzw. die innere inverse Veritation) steht dann zusammen mit einer inneren Negation N_m in Beziehung zur inneren Zyklation (bzw. zur inneren Veritation).

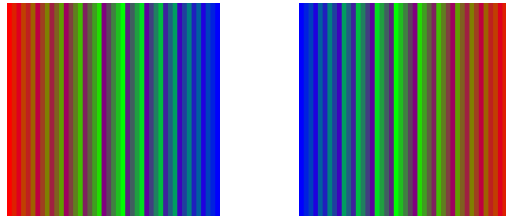
In der mehrwertigen Logik mit Geltungswerten a von 0 bis 1 ist die symmetrische Negation (s. Kap. 4.1) definiert durch $1 - a$. Bei Geltungswerten von 1 bis m (mit 1 für „falsch“ und m für „wahr“) wäre die entsprechende Definition $m + 1 - a$. Diese Definition soll auch für die Definition der inneren Negation herangezogen werden, wobei die innere Negation einen Geltungswert negiert, indem die Position bzw. Nummer des Geltungswertes innerhalb der Ordnungsrelation nach Betrag von $m + 1$ abgezogen und aus dem Ergebnis der entsprechende Geltungswert bestimmt wird. Dabei will ich nicht verhehlen, dass durch das Operieren mit Positionen innerhalb der Ordnungsrelation statt mit Tupeln die Prozentuallogik auf eine mehrwertige Logik mit Zahlen als Geltungswert reduziert wird.

Es sei $nr_{j,n}(a)$ die Nummer des Geltungswertes a innerhalb der nach Betrag geordneten Menge $\mathfrak{G}_{j,n}$ und es sei $ge_{j,n}(k)$ der Geltungswert mit der Nummer k . Dabei ist $nr_{j,n}(F_n) = 1$ und $nr_{j,n}(W_n) = m$ und umgekehrt $ge_{j,n}(1) = F_n$ und $ge_{j,n}(m) = W_n$. Außerdem ist $nr_{j,n}(ge_{j,n}(k)) = k$ und $ge_{j,n}(nr_{j,n}(a)) = a$.

Definition 10. Die innere *Negation* $N_m a$ eines Geltungswertes a ist:

$$N_m a := ge_{j,n}(m + 1 - nr_{j,n}(a)).$$

Aus der Definition ergibt sich, dass die beiden folgenden Abbildungen zueinander spiegelsymmetrisch sind (die Streifen sind nach Betrag angeordnet):



a

$N_m a$

⁵⁵Nur wenn ein Objekt des Geltungswertes 1 ist und die anderen Objekte 0 sind, kann durch unabhängige Veritation W_n erreicht werden.

Zur Negation $N_m a$ ein Beispiel aus der 28-elementigen Menge $\mathfrak{G}_{6,3}$: Der Geltungswert $(\frac{3}{6}; \frac{1}{6}; \frac{2}{6})$ ist der 10. Wert in der nach Betrag geordneten Menge (s. Seite 22). Dann ist $N_m(\frac{3}{6}; \frac{1}{6}; \frac{2}{6}) = \text{ge}_{j,n}(28 + 1 - 10) = \text{ge}_{j,n}(19) = (\frac{0}{6}; \frac{5}{6}; \frac{1}{6})$. Mit der unabhängigen Negation wäre $N(\frac{3}{6}; \frac{1}{6}; \frac{2}{6}) = (\frac{2}{6}; \frac{1}{6}; \frac{3}{6})$ gewesen. Doch sowohl der Betrag von $(\frac{0}{6}; \frac{5}{6}; \frac{1}{6})$ als auch der Betrag von $(\frac{2}{6}; \frac{1}{6}; \frac{3}{6})$ ist $\frac{7}{12}$ (s. ebenfalls Seite 22). Bei den Materialien zu dieser Arbeit unter <https://www.untexte.de/logik/position-und-geltungswert.pdf> findet sich ein weiteres Beispiel zur inneren Negation $N_m a$ bezüglich der 330-elementigen Menge $\mathfrak{G}_{7,5}$, das dort Schritt für Schritt „per Hand“, also ohne Computer, durchgerechnet wird.

Mit $|a| = \frac{b}{j(n-1)}$ ist unter der Bedingung, dass $m_{j,n}(b) = 1$ ist, $N a = N_m a$. Auch für die innere Negation gilt das Gesetz von der doppelten Negation (s. Gesetz 11):

Gesetz 26. $N_m N_m a = a$

$$N_m N_m a = \text{ge}_{j,n}(m + 1 - \text{nr}_{j,n}(\text{ge}_{j,n}(m + 1 - \text{nr}_{j,n}(a)))) = \text{ge}_{j,n}(m + 1 - (m + 1 - \text{nr}_{j,n}(a))) = \text{ge}_{j,n}(\text{nr}_{j,n}(a)) = a$$

Die innere Negation erfüllt ebenfalls die Normalbedingung (s. Gesetz 14):

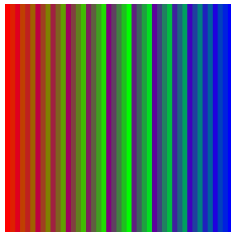
Gesetz 27. $N_m W_n = F_n$ und $N_m F_n = W_n$

$$N_m W_n = \text{ge}_{j,n}(m + 1 - \text{nr}_{j,n}(W_n)) = \text{ge}_{j,n}(m + 1 - m) = \text{ge}_{j,n}(1) = F_n$$

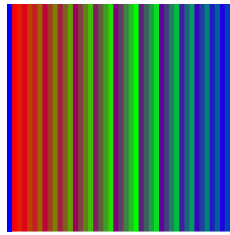
$$N_m F_n = \text{ge}_{j,n}(m + 1 - \text{nr}_{j,n}(F_n)) = \text{ge}_{j,n}(m + 1 - 1) = \text{ge}_{j,n}(m) = W_n$$

Definition 11. Die innere *Zyklktion* $\#Z_m a$ eines Geltungswertes a ist:

$$\#Z_m a := \begin{cases} \text{ge}_{j,n}(\text{nr}_{j,n}(a) + 1) & \text{falls } \text{nr}_{j,n}(a) < m \\ \text{ge}_{j,n}(1) & \text{falls } \text{nr}_{j,n}(a) = m \end{cases}$$



a



$\#Z_m a$

Man beachte den blauen Streifen am linken Rand der 2. Abbildung.

Definition 12. Die innere *inverse Zyklktion* $\#\hat{Z}_m a$ eines Geltungswertes a ist:

$$\#\hat{Z}_m a := \begin{cases} \text{ge}_{j,n}(\text{nr}_{j,n}(a) - 1) & \text{falls } \text{nr}_{j,n}(a) > 1 \\ \text{ge}_{j,n}(m) & \text{falls } \text{nr}_{j,n}(a) = 1 \end{cases}$$

Offensichtlich zyklisieren diese beiden inneren Zyklationen bei fortgesetzter Anwendung durch alle Geltungswerte:

Gesetz 28. $\underbrace{\#Z_m \#Z_m \dots \#Z_m}_m a = a$ und $\underbrace{\#\acute{Z}_m \#\acute{Z}_m \dots \#\acute{Z}_m}_m a = a$.

Offensichtlich ist auch

Gesetz 29. $\#Z_m \#\acute{Z}_m a = \#\acute{Z}_m \#Z_m a = a$

und direkt aus der Definition folgt

Gesetz 30. $\#Z_m W_n = F_n$ und $\#\acute{Z}_m F_n = W_n$.

Außerdem gilt auch bei der inneren Zyklation:

Gesetz 31. $N_m \#Z_m a = \#\acute{Z}_m N_m a$.

Falls $a = F_n$:

$$\begin{aligned} N_m \#Z_m F_n &= \\ N_m \text{ge}_{j,n}(\text{nr}_{j,n}(F_n)+1) &= \\ N_m \text{ge}_{j,n}(2) &= \\ \text{ge}_{j,n}(m+1 - \text{nr}_{j,n}(\text{ge}_{j,n}(2))) &= \\ \text{ge}_{j,n}(m+1 - 2) &= \\ \text{ge}_{j,n}(m-1) &= \\ \text{ge}_{j,n}(\text{nr}_{j,n}(W_n) - 1) &= \\ \#\acute{Z}_m W_n &= \\ \#\acute{Z}_m N_m F_n & \text{ (wg. Gesetz 27)} \end{aligned}$$

Falls $a = W_n$:

$$\begin{aligned} N_m \#Z_m W_n &= \\ N_m F_n & \text{ (wg. Gesetz 30)} = \\ \text{ge}_{j,n}(m+1 - \text{nr}_{j,n}(F_n)) &= \\ \text{ge}_{j,n}(m) &= \\ W_n &= \\ \#\acute{Z}_m F_n & \text{ (wg. Gesetz 30)} = \\ \#\acute{Z}_m N_m W_n & \text{ (wg. Gesetz 27)} \end{aligned}$$

Sonst:

$$\begin{aligned} N_m \#Z_m a &= \\ N_m \text{ge}_{j,n}(\text{nr}_{j,n}(a)+1) &= \\ \text{ge}_{j,n}(m+1 - \text{nr}_{j,n}(\text{ge}_{j,n}(\text{nr}_{j,n}(a)+1))) &= \\ \text{ge}_{j,n}(m+1 - (\text{nr}_{j,n}(a)+1)) &= \\ \text{ge}_{j,n}(m+1 - \text{nr}_{j,n}(a)-1) &= \\ \text{ge}_{j,n}(m - \text{nr}_{j,n}(a)) &= \\ \#\acute{Z}_m \text{ge}_{j,n}(m+1 - \text{nr}_{j,n}(a)) &= \\ \#\acute{Z}_m N_m a & \end{aligned}$$

Ersetze ich a in $N_m \#Z_m a = \#\acute{Z}_m N_m a$ durch $N_m a$, so erhalte ich als Definition für die innere inverse Zyklation $N_m \#Z_m N_m a = \#\acute{Z}_m N_m N_m a = \#\acute{Z}_m a$ (wg. Gesetz 26).

Der primäre Zweck der inneren Zyklaktion $\#Z_m a$ war, eine innere Veritation zu definieren:

Definition 13. Die innere *Veritation* $\#W_m a$ eines Geltungswertes a ist:

$$\#W_m a := \begin{cases} \#Z_m a & \text{falls } \text{nr}_{j,n}(a) < m \\ a & \text{falls } \text{nr}_{j,n}(a) = m \end{cases}$$

Definition 14. Die innere *inverse Veritation* $\#\dot{W}_m a$ eines Geltungswertes a ist:

$$\#\dot{W}_m a := \begin{cases} \#\dot{Z}_m a & \text{falls } \text{nr}_{j,n}(a) > 1 \\ a & \text{falls } \text{nr}_{j,n}(a) = 1 \end{cases}$$

Die Veritation $\#W_m a$ erfüllt nicht nur die Bedingung $|\#W_m a| \geq |a|$, sondern erreicht nach mehrfacher Anwendung auch W_n . Aber erfüllt sie ihren Zweck bei konkreten Anwendungen? Dazu wenden wir uns noch einmal dem Notenspiegel mit den Noten von 1 bis 6 vom Ende des Kapitels 3.2 zu, nämlich $4 \mid 3 \mid 7 \mid 7 \mid 2 \mid 0$ mit der Durchschnittsnote $3,0$ ⁵⁶. Der entsprechende Geltungswert war $a = (\frac{0}{23}, \frac{2}{23}, \frac{7}{23}, \frac{7}{23}, \frac{3}{23}, \frac{4}{23})$ mit dem Betrag $\frac{69}{115} = 0,6$. Nun ist $\#W_m a = \text{ge}_{23,6}(\text{nr}_{23,6}(a) + 1) = \text{ge}_{23,6}(74372 + 1) = (\frac{0}{23}, \frac{2}{23}, \frac{7}{23}, \frac{6}{23}, \frac{5}{23}, \frac{3}{23})$. Aber $|\#W_m a|$ ist ebenfalls $\frac{69}{115}$, genauso wie $|\#W_m^\# W_m a|$. Erst der Geltungswert $\text{ge}_{23,6}(74522) = (\frac{9}{23}, \frac{0}{23}, \frac{0}{23}, \frac{0}{23}, \frac{0}{23}, \frac{14}{23})$ hat erstmals den Betrag $\frac{70}{115}$, also den Notenspiegel verbessert, aber der neue Notenspiegel $14 \mid 0 \mid 0 \mid 0 \mid 0 \mid 9$ eignet sich offensichtlich kaum als Alternative zum ursprünglichen Notenspiegel $4 \mid 3 \mid 7 \mid 7 \mid 2 \mid 0$. Notwendig ist also eine Veritation, bei der nicht nur $|W_m a| \geq |a|$ ist, sondern $|W_m a| > |a|$. Außerdem sollte $W_m a$ bezüglich der Objekte nur minimal von a abweichen.

5.3 Die innere Veritation als Weitergabe

Um einen Notenspiegel nur minimal zu verbessern, wäre es naheliegend, genau eine Klassenarbeit um genau eine Note zu verbessern:

Definition 15. Die innere *Veritation* $W_m a$ eines Geltungswertes $a = (\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_n)$ ist:

$$W_m a := (\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_i - \frac{1}{j}; \alpha_{i+1} + \frac{1}{j}; \dots; \alpha_n), \text{ falls } \alpha_i > 0 \text{ und } i < n.$$

Definition 16. Die innere *inverse Veritation* $\dot{W}_m a$ eines Geltungswertes $a = (\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_n)$ ist:

$$\dot{W}_m a := (\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_i + \frac{1}{j}; \alpha_{i+1} - \frac{1}{j}; \dots; \alpha_n), \text{ falls } \alpha_{i+1} > 0 \text{ und } i < n.$$

⁵⁶Siehe S. 16

Diese innere Veritation ist im mathematischen Sinne keine Funktion, da nicht jedes Element der Menge $\mathfrak{G}_{j,n}$ abgebildet wird⁵⁷. Außerdem wird nicht jedes Element auf genau ein anderes Element abgebildet, sondern auf so viele Elemente, wie α_1 bis α_{n-1} ungleich 0 sind. Im Gegensatz zu $\#Z_m \# \dot{Z}_m a = a$ (s. Gesetz 29) wird somit $W_m \dot{W}_m a$ auch nicht unbedingt wieder zu a . Dafür verändert diese Veritation die Geltungswerte nur minimal, da bei 2 Nachbarobjekten die Zähler nur um jeweils 1 verkleinert bzw. vergrößert werden. Außerdem wird der Betrag der Geltungswerte nach jeder Veritation größer, und zwar ebenfalls nur minimal um $\frac{1}{j(n-1)}$:

Gesetz 32. $|W_m a| = |a| + \frac{1}{j(n-1)}$ und $|\dot{W}_m a| = |a| - \frac{1}{j(n-1)}$

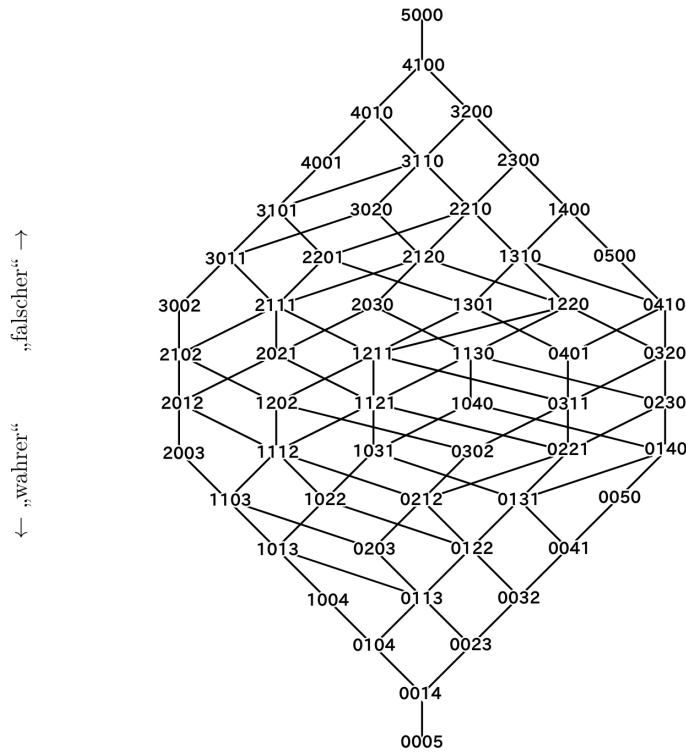
$$\begin{aligned} |W_m a| &= \frac{1}{n-1} \cdot \alpha_2 + \dots + \frac{i-1}{n-1} \cdot (\alpha_i - \frac{1}{j}) + \frac{i}{n-1} \cdot (\alpha_{i+1} + \frac{1}{j}) + \dots + \alpha_n = \\ &= \frac{1}{n-1} \cdot \alpha_2 + \dots + \frac{i-1}{n-1} \cdot \alpha_i - \frac{i-1}{j(n-1)} + \frac{i}{n-1} \cdot \alpha_{i+1} + \frac{i}{j(n-1)} + \dots + \alpha_n = \\ &= \frac{1}{n-1} \cdot \alpha_2 + \dots + \frac{i-1}{n-1} \cdot \alpha_i - \frac{i}{j(n-1)} + \frac{1}{j(n-1)} + \frac{i}{n-1} \cdot \alpha_{i+1} + \frac{i}{j(n-1)} + \dots + \alpha_n = \\ &= \frac{1}{n-1} \cdot \alpha_2 + \dots + \frac{i-1}{n-1} \cdot \alpha_i + \frac{i}{n-1} \cdot \alpha_{i+1} + \dots + \alpha_n + \frac{1}{j(n-1)} = |a| + \frac{1}{j(n-1)} \end{aligned}$$

Falls $i = 1$ ist, so ist $\frac{1}{n-1} \cdot (\alpha_2 + \frac{1}{j}) + \dots + \alpha_n = \frac{1}{n-1} \cdot \alpha_2 + \dots + \alpha_n + \frac{1}{j(n-1)}$.

$|\dot{W}_m a|$ ist somit offensichtlich $|a| - \frac{1}{j(n-1)}$. Der Beweis lässt sich für diese Behauptung entsprechend modifizieren. Somit ändert sich der Betrag eines Geltungswertes a nicht, wenn ich ein beliebiges Objekt $\alpha_i \geq \frac{2}{j}$ um $\frac{2}{j}$ verkleinere und die beiden Nachbarobjekte (jeweils kleiner als $\frac{j}{j} = 1$) um $\frac{1}{j}$ vergrößere bzw. $\alpha_i \leq \frac{j-2}{j}$ um $\frac{2}{j}$ vergrößere und die beiden Nachbarobjekte (jeweils größer als $\frac{0}{j} = 0$) um $\frac{1}{j}$ verkleinere.

Die nachfolgende Abbildung veranschaulicht am Beispiel der Menge $\mathfrak{G}_{5,4}$ die Arbeitsweise von $W_m a$ bzw. von $\dot{W}_m a$ durch eine Verbindungslinie von a nach unten zu $W_m a$ bzw. von a nach oben zu $\dot{W}_m a$. Dabei wurden die jeweiligen (möglichen) Veritationen $W_m a$ zu den einzelnen Geltungswerten a von hinten nach vorne durchgeführt, um die Ergebnisse dieser Veritation umgekehrt lexikographisch anzuordnen. Auch in den einzelnen Zeilen wurden die Geltungswerte umgekehrt lexikographisch angeordnet. Wegen der besseren Übersichtlichkeit habe ich wiederum von den einzelnen Objekten der Geltungswerte nur die Zähler angegeben und den gemeinsamen Nenner $j = 5$ so wie die Klammern und Semikola weggelassen:

⁵⁷Das letzte Element der nach Betrag angeordneten Menge $\mathfrak{G}_{j,n}$, nämlich $W_n = \text{ge}_{j,n}(m) = (0; 0; \dots; 0; 1)$ kann nicht abgebildet werden, da unter der Bedingung, dass $i < n$ sein muss, alle $\alpha_i = 0$ sind. Für eine innere Veritation W_m müsste aber mindestens ein $\alpha_i > 0$ sein.



Mit Hilfe der Veritaton bzw. der inversen Veritaton durch Weitergabe lässt sich zu einem beliebigen Geltungswert wie z.B. $d = (0; 1; 3; 1)$ (wobei ich nur die Zähler angegeben habe) aus einem anderen beliebigen Geltungswert aus der gleichen Menge $\mathfrak{G}_{j,n}$, dessen Betrag bekannt ist wie z.B. $a = (2; 0; 1; 2)$ mit $|a| = \frac{8}{15}$ der Betrag berechnen, indem ich Schritt für Schritt Anteile von i nach $i + 1$ oder umgekehrt weitergebe:

$$\begin{aligned}
 a &= (2; 0; 1; 2) & |a| &= \frac{8}{15} \\
 &+2 & & \text{(Weitergabe)} \\
 b &= (0; 2; 1; 2) & |b| &= \frac{8+2}{15} = \frac{10}{15} \\
 &+1 & & \text{(Weitergabe)} \\
 c &= (0; 1; 2; 2) & |c| &= \frac{10+1}{15} = \frac{11}{15} \\
 &-1 & & \text{(Weitergabe)} \\
 d &= (0; 1; 3; 1) & |d| &= \frac{11-1}{15} = \frac{10}{15}
 \end{aligned}$$

In der obigen Abbildung lässt sich der Weg von $(2; 0; 1; 2)$ in der 8. Zeile über $(0; 2; 1; 2)$ und $(0; 1; 2; 2)$ nach $(0; 1; 3; 1)$ in der 10. Zeile (da der Zähler des Betrages 10 ist) entsprechend nachverfolgen, obwohl es nicht der einzige Weg ist.

6 Einstellige ergänzende Junktoren

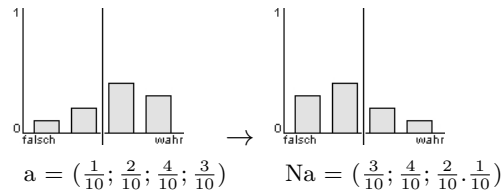
Das Charakteristische von ergänzenden Junktoren möchte ich zunächst am Beispiel einer Konjunktion⁵⁸ aus der mehrwertigen Logik mit Geltungswerten aus der Menge $\mathfrak{G} = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ veranschaulichen. Diese Konjunktion ist definiert als $Kab := a \cdot b$:

Kab	0	$\frac{1}{2}$	1
0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{2}$	1

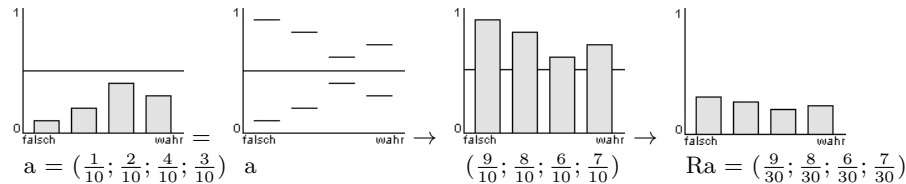
Diese Abbildung erfüllt zwar die Normalbedingung, ist aber keine Funktion innerhalb der 3-wertigen Logik, da man in der Tabelle sieht, dass Kab nicht immer ein Element von $\mathfrak{G} = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ ist, denn $\frac{1}{2} \wedge \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \notin \mathfrak{G}$. Auch eine Erweiterung auf eine 5-wertige Logik mit $\mathfrak{G} = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$ löst das Problem nicht, denn nun ist z.B. $\frac{1}{2} \wedge \frac{3}{4} = \frac{3}{8} \notin \mathfrak{G}$. Ob und inwieweit dieses Problem gelöst werden kann und soll, wird in Kapitel 6.6 u.a. an einem konkreten Anwendungsbeispiel thematisiert.

6.1 Die Restation als alternative Negation

Bei der unabhängigen Negation Na wurden die einzelnen Objekte der Geltungswerte an der Mitte des Geltungswertes gespiegelt. Das entsprechende Säulendiagramm für a wird dabei an einer Senkrechten durch die Mitte des Diagramms gespiegelt:



Nun soll das Säulendiagramm für a nicht an einer Senkrechten, sondern an einer Waagerechten durch die Mitte des Diagramms gespiegelt werden:



⁵⁸[17] Kreiser, Gottwald, S. 27

In der 2. Abbildung befinden sich in der unteren Hälfte die Oberkanten der Säulen von a und in der oberen Hälfte deren Spiegelungen. In der 3. Abbildung werden diese Spiegelungen zu Oberkanten der Säulen, die jetzt $1 - \alpha_i$ repräsentieren, wobei $\alpha_i \rightarrow 1 - \alpha_i$ stark an die symmetrische Negation erinnert (s. Kap. 4.1). Aber die Summe der Objekte $1 - \alpha_i$ ist offensichtlich nicht mehr 1. Daher müssen die einzelnen Objekte $1 - \alpha_i$ durch $n - 1$ geteilt werden, denn:

$$\begin{aligned} \frac{1-\alpha_1}{n-1} + \frac{1-\alpha_2}{n-1} + \frac{1-\alpha_3}{n-1} + \dots + \frac{1-\alpha_n}{n-1} &= \\ \frac{(1-\alpha_1)+(1-\alpha_2)+(1-\alpha_3)+\dots+(1-\alpha_n)}{n-1} &= \\ \frac{n-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\dots-\alpha_n}{n-1} &= \\ \frac{n-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\dots+\alpha_n)}{n-1} &= \\ \frac{n-1}{n-1} &= 1 \end{aligned}$$

Definition 17. Die *Restation* $\mathbf{Ra}$ eines Geltungswertes $a = (\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_n)$ ist:

$\mathbf{Ra} := (\frac{1-\alpha_1}{n-1}; \frac{1-\alpha_2}{n-1}; \frac{1-\alpha_3}{n-1}; \dots; \frac{1-\alpha_n}{n-1})$. Durch die Restation gehen die Objekte α_i in

$f_{i,R}(\alpha_i) = \frac{1-\alpha_i}{n-1}$ über.

Die entsprechende Abbildungsmatrix ist:

$$\mathbf{Ra} \stackrel{\wedge}{=} \vec{a} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{n-1} & \dots & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n-1} & 0 & \dots & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \dots & 0 & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \dots & \frac{1}{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Für a_1 soll gezeigt werden, dass nach der Multiplikation von $\vec{a}$ mit der Abbildungsmatrix a_1 in $\frac{1-a_1}{n-1}$ übergeht (die Berechnungen für a_2 bis a_n verlaufen analog):

$$0 \cdot a_1 + \frac{1}{n-1} \cdot a_2 + \frac{1}{n-1} \cdot a_3 + \dots + \frac{1}{n-1} \cdot a_n = \frac{a_2+a_3+\dots+a_n}{n-1} = \frac{1-a_1}{n-1}$$

Durch die Restation gehen Geltungswerte a aus der Menge $\mathfrak{G}_{j,n}$ in Geltungswerte $\mathbf{Ra}$ aus der Menge $\mathfrak{G}_{j(n-1),n}$ über. Falls allerdings $n = 2$ mit $a = (\alpha_1; \alpha_2)$ ist, so ist $\mathbf{Ra} = (\frac{1-\alpha_1}{1}; \frac{1-\alpha_2}{1}) = (\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1; \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_2) = (\alpha_2; \alpha_1)$ und $\mathbf{RRa}$ ist dann $(\alpha_1; \alpha_2)$. Das heißt, in der 2-wertigen Logik bzw. einer 2-stelligen Prozentuallogik mit (geordneten) Paaren als Geltungswert fällt die Restation wie schon die Zyklktion $\mathbf{Za}$ und die inverse Zyklktion $\check{\mathbf{Za}}$ mit der Negation $\mathbf{Na}$ zusammen, zumal die Abbildungsmatrizen von $\mathbf{Za}$, $\check{\mathbf{Za}}$ und $\mathbf{Ra}$ für $n = 2$ zu $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ werden, der Abbildungsmatrix von $\mathbf{Na}$. Und während in der mehrwertigen Logik und auch in den Prozentuallogiken die doppelte Negation von a wieder a ergibt, gilt dies für die Restation nicht:

RRa ist, falls $a \neq K_n$ und $n > 2$ ist, nicht a, da das Quadrat der Abbildungsmatrix zu Ra nicht die Einheitsmatrix ergibt:

$$\left(\begin{array}{ccccc} 0 & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n-1} & 0 & \cdots & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & 0 & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} & 0 \end{array} \right)^2 = \left(\begin{array}{ccccc} \frac{n-1}{(n-1)^2} & \frac{n-2}{(n-1)^2} & \cdots & \frac{n-2}{(n-1)^2} & \frac{n-2}{(n-1)^2} \\ \frac{n-2}{(n-1)^2} & \frac{n-1}{(n-1)^2} & \cdots & \frac{n-2}{(n-1)^2} & \frac{n-2}{(n-1)^2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{n-2}{(n-1)^2} & \frac{n-2}{(n-1)^2} & \cdots & \frac{n-1}{(n-1)^2} & \frac{n-2}{(n-1)^2} \\ \frac{n-2}{(n-1)^2} & \frac{n-2}{(n-1)^2} & \cdots & \frac{n-2}{(n-1)^2} & \frac{n-1}{(n-1)^2} \end{array} \right)$$

Vielmehr konvergiert bei fortgesetzter Restation a gegen K_n bzw. konvergieren die einzelnen Objekte α_i des Geltungswertes a gegen $\frac{1}{n}$, und zwar alternierend.

Die alternierende Konvergenz soll im folgenden für den Fall $\alpha_i < \frac{1}{n}$ gezeigt werden (der Beweis, dass α_i für $\alpha_i > \frac{1}{n}$ alterniert, verläuft entsprechend):

$$\begin{aligned} \alpha_i < \frac{1}{n} & \Leftrightarrow \\ \alpha_i n < 1 & \Leftrightarrow \\ -\alpha_i n > -1 & \Leftrightarrow \\ n - \alpha_i n > n - 1 & \Leftrightarrow \\ \frac{n - \alpha_i n}{n-1} > 1 & \Leftrightarrow \\ \frac{n(1 - \alpha_i)}{n-1} > 1 & \Leftrightarrow \\ \frac{1 - \alpha_i}{n-1} > \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Nun soll (wieder für den Fall $\alpha_i < \frac{1}{n}$) gezeigt werden, dass $f_{i,R}(\alpha_i) = \frac{1 - \alpha_i}{n-1}$ näher an $\frac{1}{n}$ liegt als α_i , dass also α_i gegen $\frac{1}{n}$ konvergiert ($n > 2$):

$$\begin{aligned} \alpha_i < \frac{1}{n} & \Leftrightarrow \\ \alpha_i n < 1 = \frac{2-n}{2-n} & \Leftrightarrow (\text{wegen } 2 - n < 0) \\ \alpha_i n(2 - n) > 2 - n & \Leftrightarrow \\ 2\alpha_i n - \alpha_i n^2 > 2 - n & \Leftrightarrow \\ n - 1 + 2\alpha_i n - \alpha_i n^2 > 1 & \Leftrightarrow \\ n - 1 - \alpha_i n^2 + 2\alpha_i n > 1 & \Leftrightarrow \\ n - 1 - \alpha_i n^2 + \alpha_i n > n - \alpha_i n - n + 1 & \Leftrightarrow \\ (n - 1) - \alpha_i n(n - 1) > (n - \alpha_i n) - (n - 1) & \Leftrightarrow \\ \frac{n-1}{n(n-1)} - \frac{\alpha_i n(n-1)}{n(n-1)} > \frac{n - \alpha_i n}{n(n-1)} - \frac{n-1}{n(n-1)} & \Leftrightarrow \\ \frac{1}{n} - \alpha_i > \frac{1 - \alpha_i}{n-1} - \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Um ganz sicher zu gehen, dass die k -fache Restation auch wirklich (alternierend) gegen $\frac{1}{n}$ konvergiert (und nicht etwa z.B. gegen 2 Werte in der Nähe von $\frac{1}{n}$), ist es sinnvoll zu zeigen (wiederum nur für $\alpha_i < \frac{1}{n}$), dass für ein bestimmtes α_i ab einem bestimmten k alle weiteren Restationen in der Epsilonumgebung von $\frac{1}{n}$ liegen, egal wie klein ε ist. Dabei wurde bereits gezeigt, dass für $\alpha_i < \frac{1}{n}$ die Restation $\frac{1 - \alpha_i}{n-1} > \frac{1}{n}$ ist. Wann ist aber $\frac{1 - \alpha_i}{n-1} < \frac{1}{n} + \varepsilon$ bzw. $\frac{1 - \alpha_i}{n-1} - \frac{1}{n} - \varepsilon < 0$?

$$\begin{aligned}
\frac{1-\alpha_i}{n-1} &< \frac{1}{n} + \varepsilon && \Leftrightarrow \\
1 - \alpha_i &< \frac{n-1}{n} + (n-1)\varepsilon && \Leftrightarrow \\
\alpha_i - 1 &> -\frac{n-1}{n} - (n-1)\varepsilon && \Leftrightarrow \\
\alpha_i &> 1 - \frac{n-1}{n} - (n-1)\varepsilon && \Leftrightarrow \\
\alpha_i &> \frac{n}{n} - \frac{n-1}{n} - (n-1)\varepsilon && \Leftrightarrow \\
\alpha_i &> \frac{1}{n} - (n-1)\varepsilon
\end{aligned}$$

Nachfolgend ein Beispiel zur Veranschaulichung⁵⁹: Am Anfang sei $\alpha_i = 0 < \frac{1}{n}$, $n = 4$ (und somit $\frac{1}{n} = 0,25$) und $\varepsilon = 0,0001$. Dann ist $\frac{1}{n} - (n-1)\varepsilon = 0,25 - 0,0003 = 0,2497$.

k		
0	$\alpha_i = 0,000000$	$R\alpha_i - \frac{1}{n} - \varepsilon = 0,083233$
2	$RR\alpha_i = 0,222222$	$RRR\alpha_i - \frac{1}{n} - \varepsilon = 0,009159$
4	$RRRR\alpha_i = 0,246913$	$RRRRR\alpha_i - \frac{1}{n} - \varepsilon = 0,000928$
6	$RRRRRR\alpha_i = 0,249657$	$RRRRRRR\alpha_i - \frac{1}{n} - \varepsilon = 0,000014$
8	$RRRRRRRR\alpha_i = \mathbf{0,249961}$	$RRRRRRRRR\alpha_i - \frac{1}{n} - \varepsilon = \mathbf{-0,000087}$
10	$RRRRRRRRRR\alpha_i = 0,249995$	$RRRRRRRRRRR\alpha_i - \frac{1}{n} - \varepsilon = -0,000098$

Da die k -fache Restation sich alternierend dem Wert $\frac{1}{n}$ annähert, nähert sich für $\alpha_i < \frac{1}{n}$ die doppelte bzw. 2-fache Restation dem Wert $\frac{1}{n}$ von unten und die $(k+1)$ -fache Restation von oben. Die k -fache Restation von α_i mit $k = 8$ ist größer als 0,2497 und die 9-fache Restation liegt somit innerhalb der Epsilonumgebung, da erstmals $\frac{1-\alpha_i}{n-1} - \frac{1}{n} - \varepsilon < 0$ ist. Da bei weiteren doppelten Restationen der Wert für die mehrfache Restation von α_i zudem immer kleiner wird (aber nach wie vor größer als $\frac{1}{n}$ ist), befinden sich alle weiteren Werte innerhalb der Epsilonumgebung.

Bleibt noch zu erwähnen, dass für den Fall $\alpha_i = \frac{1}{n}$ ebenfalls $f_{i,R}(\alpha_i) = \frac{1}{n}$ ist:

$$\frac{1-\alpha_i}{n-1} = \frac{1-\frac{1}{n}}{n-1} = \frac{\frac{n-1}{n}}{n-1} = \frac{n-1}{n(n-1)} = \frac{1}{n}.$$

Gesetz 33. Für $n > 2$ ist $\lim_{k \rightarrow \infty} \underbrace{RR \dots R}_{k\text{-mal}} a = (\frac{1}{n}; \frac{1}{n}; \dots; \frac{1}{n}) = K_n$

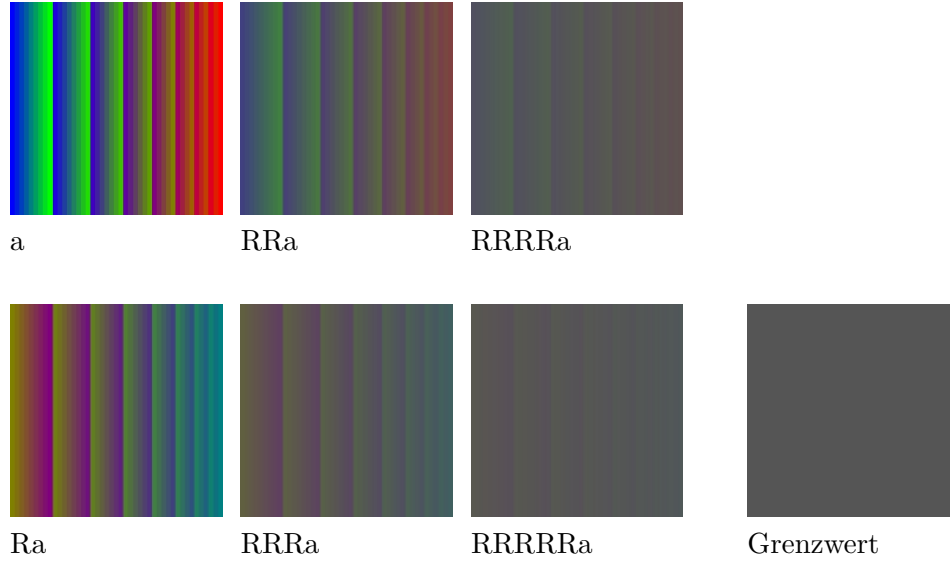
Somit gilt für den Geltungswert K_n aus Kapitel 3.1, dass $RK_n = K_n$ ist.

Wenn die k -fache Restation gegen K_n konvergiert, dann konvergiert auch der Betrag der k -fachen Restation gegen den Betrag von K_n :

Gesetz 34. Für $n > 2$ ist $\lim_{k \rightarrow \infty} \underbrace{|RR \dots R a|}_{k\text{-mal}} = \frac{1}{2}$

⁵⁹Die entsprechende Excel-Datei sowie ein Beweis finden Sie bei den Materialien zu dieser Arbeit auf der Seite <https://www.untex.de/logik/>.

Die Restation kann also nicht nur als eine Form von Negation, bei der das kleinste Objekt von a (die kürzeste Säule im Diagramm) in das größte Objekt (die längste Ergänzungssäule im Diagramm) usw. übergeht, sondern im Fall der doppelten Restation RRa als auch der mehrfachen Restation RRRRa usw. als eine zunehmende Nivellierung des Geltungswertes a interpretiert werden. Allerdings ist der Geltungswert K_n nicht weiter nivellierbar.



In der Visualisierung mit RGB-Farben lässt sich gut erkennen, wie die wiederholte Restation von a die einzelnen Objekte gegen $\frac{1}{n}$ konvergieren lässt, in diesem Fall gegen $\frac{1}{3}$, und wie die Geltungswerte gegen $(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3})$ bzw. gegen die Farbe (#555555) konvergieren. Außerdem zeigt sich Ra wirklich als Negation, da z.B. die Farbe Blau (links) = (0; 0; 1) in eine Mischung aus Rot = (1; 0; 0) und Grün (0; 1; 0), nämlich in Braun = $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0)$, und Rot (rechts) in eine Mischung aus Blau und Grün, nämlich in Türkis, übergehen.

Abschließend noch ein Zusammenhang zwischen Negation und Restation:

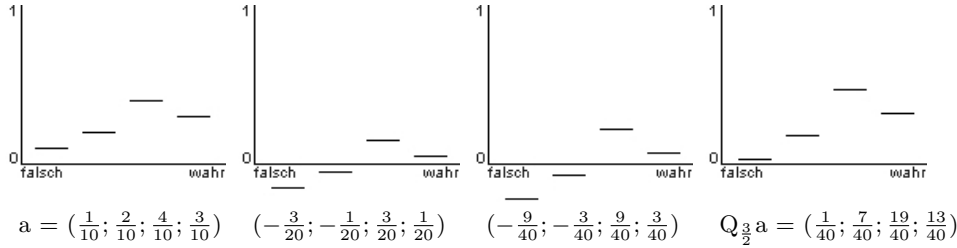
Gesetz 35. $RNa = NRa$

$$\begin{aligned} RN(\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_n) &= \\ R(\alpha_n; \alpha_{n-1}; \dots; \alpha_1) &= \\ (\frac{1-\alpha_n}{n-1}, \frac{1-\alpha_{n-1}}{n-1}, \dots, \frac{1-\alpha_1}{n-1}) &= \\ N(\frac{1-\alpha_1}{n-1}, \frac{1-\alpha_2}{n-1}, \dots, \frac{1-\alpha_n}{n-1}) &= \\ NR(\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_n) \end{aligned}$$

6.2 Die Quaestation

2 Punkte, die bei der Restation eine Rolle spielten, nämlich eine alternative Negation durch Spiegelung des Säulendiagramms an einer Waagerechten statt an einer Senkrechten und die Nivellierung von Geltungswerten, sollen noch etwas vertieft werden. Dazu möchte ich einen Junktor namens Quaestation definieren, der nicht nur nivelliert, sondern auch „kontrastverschärft“, wobei mit einer „Kontrastverschärfung“ gemeint ist, dass sich die einzelnen Objekte eines Geltungswertes nicht an $\frac{1}{n}$ annähern wie bei der Nivellierung RRa, sondern so von $\frac{1}{n}$ entfernen, dass sich die Abstände (Kontraste) zwischen benachbarten Objekten vergrößern. Dabei soll die Nivellierung bzw. Kontrastverschärfung nicht starr, sondern über einen Parameter y gesteuert in unterschiedlich starkem Maße ausgeführt werden.

Der Quaestation liegt eine axiale Streckung zu Grunde. Das soll am Beispiel $a = (\frac{1}{10}; \frac{2}{10}; \frac{4}{10}; \frac{3}{10})$ veranschaulicht werden: Zunächst werden die Oberkanten der zu den Objekten von a gehörenden Diagrammsäulen (s. 1. Abb.) um den Mittelwert der Objekte $\frac{1}{n} = \frac{1}{4}$ nach unten verschoben (s. 2. Abb.) bzw. es wird $\frac{1}{n}$ von α_i subtrahiert. Dadurch werden alle Objekte $\alpha_i < \frac{1}{n}$ negativ. Dann werden die neuen Oberkanten bzgl. der unteren Achse als Streckungsachse mit einem Faktor $y = \frac{3}{2}$ gestreckt (s. Abb. 3) bzw. es wird $(\alpha_i - \frac{1}{4})$ mit $y = \frac{3}{2}$ multipliziert. Dadurch wird der Betrag aller Objekte größer, falls $y > 1$ ist. Abschließend wird das Diagramm wieder um $\frac{1}{n} = \frac{1}{4}$ nach oben verschoben (s. Abb. 4) bzw. es wird $\frac{1}{4}$ zu $\frac{3}{2}(\alpha_i - \frac{1}{4})$ addiert.



Definition 18. Die *Quaestation* $Q_y a$ eines Geltungswertes $a = (\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_n)$ ist:

$Q_y a := (y(\alpha_1 - \frac{1}{n}) + \frac{1}{n}; y(\alpha_2 - \frac{1}{n}) + \frac{1}{n}; \dots; y(\alpha_n - \frac{1}{n}) + \frac{1}{n})$, wobei $y \in \mathbb{Q}$ ist. Durch die Quaestation gehen die Objekte α_i in

$f_{i, Q_y}(\alpha_i) = y(\alpha_i - \frac{1}{n}) + \frac{1}{n}$ über.

Die entsprechende Abbildungsmatrix ist:

$$Q_{y^a} \stackrel{\wedge}{=} \vec{a} \cdot \begin{pmatrix} \frac{y(n-1)+1}{n} & \frac{1-y}{n} & \cdots & \frac{1-y}{n} & \frac{1-y}{n} \\ \frac{1-y}{n} & \frac{y(n-1)+1}{n} & \cdots & \frac{1-y}{n} & \frac{1-y}{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{1-y}{n} & \frac{1-y}{n} & \cdots & \frac{y(n-1)+1}{n} & \frac{1-y}{n} \\ \frac{1-y}{n} & \frac{1-y}{n} & \cdots & \frac{1-y}{n} & \frac{y(n-1)+1}{n} \end{pmatrix}$$

a_1 wird dabei zum Beispiel abgebildet auf:

$$\begin{aligned} \frac{y(n-1)+1}{n} \cdot a_1 + \frac{1-y}{n} \cdot a_2 + \frac{1-y}{n} \cdot a_3 + \cdots + \frac{1-y}{n} \cdot a_n &= \frac{y(n-1)a_1+a_1}{n} + \frac{(1-y)(1-a_1)}{n} = \\ \frac{yna_1-ya_1+a_1+1-a_1-y+ya_1}{n} &= \frac{yna_1-y+1}{n} = \frac{y(na_1-1)}{n} + \frac{1}{n} = y(a_1 - \frac{1}{n}) + \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Schauen wir in der Definition von Q_{y^a} zunächst etwas genauer auf den Faktor y , denn α_i darf nicht kleiner als 0 werden:

$$\begin{aligned} y(\alpha_i - \frac{1}{n}) + \frac{1}{n} &\geq 0 && \Leftrightarrow \\ y(\alpha_i - \frac{1}{n}) &\geq -\frac{1}{n} && \Leftrightarrow \\ y &\leq \frac{-\frac{1}{n}}{\alpha_i - \frac{1}{n}} && \Leftrightarrow \quad (\text{falls } \alpha_i < \frac{1}{n} \text{ und somit } \alpha_i - \frac{1}{n} < 0) \\ y &\leq -\frac{1}{n(\alpha_i - \frac{1}{n})} && \Leftrightarrow \\ y &\leq \frac{1}{n(\frac{1}{n} - \alpha_i)} && \Leftrightarrow \\ y &\leq \frac{1}{1-n\alpha_i} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} y &\geq \frac{-\frac{1}{n}}{\alpha_i - \frac{1}{n}} && \Leftrightarrow \quad (\text{falls } \alpha_i > \frac{1}{n} \text{ und somit } \alpha_i - \frac{1}{n} > 0) \\ y &\geq \frac{1}{1-n\alpha_i} \end{aligned}$$

Außerdem darf α_i nicht größer als 1 werden:

$$\begin{aligned} y(\alpha_i - \frac{1}{n}) + \frac{1}{n} &\leq 1 && \Leftrightarrow \\ y(\alpha_i - \frac{1}{n}) &\leq 1 - \frac{1}{n} && \Leftrightarrow \\ y &\geq \frac{\frac{n-1}{n}}{\alpha_i - \frac{1}{n}} && \Leftrightarrow \quad (\text{falls } \alpha_i < \frac{1}{n} \text{ und somit } \alpha_i - \frac{1}{n} < 0) \\ y &\geq \frac{n-1}{n\alpha_i-1} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} y &\leq \frac{n-1}{n(\alpha_i - \frac{1}{n})} && \Leftrightarrow \quad (\text{falls } \alpha_i > \frac{1}{n} \text{ und somit } \alpha_i - \frac{1}{n} > 0) \\ y &\leq \frac{n-1}{n\alpha_i-1} \end{aligned}$$

Falls $\alpha_i = \frac{1}{n}$ ist, wird α_i wieder zu α_i : $f_{Q_y}(\frac{1}{n}) = y(\frac{1}{n} - \frac{1}{n}) + \frac{1}{n} = \frac{1}{n}$.

Für $\alpha_i > \frac{1}{n}$ ist $\frac{1}{1-n\alpha_i} \leq y \leq \frac{n-1}{n\alpha_i-1}$ und für $\alpha_i < \frac{1}{n}$ ist $\frac{n-1}{n\alpha_i-1} \leq y \leq \frac{1}{1-n\alpha_i}$

(jeweils mit $n \geq 2$). In den beiden Ungleichungen sind bei Einsetzung der entsprechenden α_i die linken Brüche negativ und die rechten positiv. Von den beiden linken (negativen) Brüchen ist (wiederum bei entsprechender Einsetzung von α_i) $\frac{1}{1-n\alpha_i} \geq \frac{n-1}{n\alpha_i-1}$, da beide Nenner negativ sind, und von den beiden rechten $\frac{1}{1-n\alpha_i} \leq \frac{n-1}{n\alpha_i-1}$. Nun muss nur noch geschaut werden, wann die untere Grenze für y am größten und wann die obere Grenze am kleinsten ist: Wenn α_{min} das kleinste Objekt von a und α_{max} das größte Objekt von a ist, dann ist $\frac{1}{1-n\alpha_{max}}$ von allen $\frac{1}{1-n\alpha_i}$ am größten und $\frac{1}{1-n\alpha_{min}}$ von allen $\frac{1}{1-n\alpha_i}$ am kleinsten. Somit gilt:

Gesetz 36. Für die Quaestation $Q_y a$ ist $\frac{1}{1-n\alpha_{max}} \leq y \leq \frac{1}{1-n\alpha_{min}}$ ($\alpha_{max} \neq \frac{1}{n}$ und $\alpha_{min} \neq \frac{1}{n}$).

Ist $\alpha_{max} = \frac{1}{n}$ bzw. $\alpha_{min} = \frac{1}{n}$ und somit alle $\alpha_i = \frac{1}{n}$, dann spielt y in der Definition der Quaestation keine Rolle (s.o.) und $f_{i,Q_y}(\alpha_i) = \frac{1}{n}$ bzw. $Q_y K_n = K_n$, unabhängig von y :

Gesetz 37. $Q_y K_n = K_n$

Falls $\alpha_{max} = 1$ und $\alpha_{min} = 0$ ist, wie z.B. bei „wahr“ = W_n oder „falsch“ = F_n , dann gilt für y : $\frac{1}{1-n \cdot 1} = \frac{1}{1-n} \leq y \leq \frac{1}{1-n \cdot 0} = 1$.

Bevor ich einige Beispiele zur Quaestation gebe, soll zunächst noch gezeigt werden, dass die Summe der Objekte $y(\alpha_i - \frac{1}{n}) + \frac{1}{n}$ gleich 1 ist:

$$\begin{aligned} y(\alpha_1 - \frac{1}{n}) + \frac{1}{n} + y(\alpha_2 - \frac{1}{n}) + \frac{1}{n} + \dots + y(\alpha_n - \frac{1}{n}) + \frac{1}{n} &= \\ y(\alpha_1 - \frac{1}{n}) + y(\alpha_2 - \frac{1}{n}) + \dots + y(\alpha_n - \frac{1}{n}) + n \frac{1}{n} &= \\ y((\alpha_1 - \frac{1}{n}) + (\alpha_2 - \frac{1}{n}) + \dots + (\alpha_n - \frac{1}{n})) + 1 &= \\ y(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n - n \frac{1}{n}) + 1 &= \\ y(1 - 1) + 1 &= 1 \end{aligned}$$

Für den Geltungswert $a = (0,1; 0,2; 0,4; 0,3)$ ist $\frac{1}{1-n\alpha_{max}} = \frac{1}{1-4 \cdot 0,4} = -\frac{5}{3} \leq y \leq \frac{1}{1-n\alpha_{min}} = \frac{1}{1-4 \cdot 0,1} = \frac{5}{3}$.

$$\begin{aligned} Q_{\frac{5}{3}} a &= (0; 0,1\bar{6}; 0,5; 0,3) \\ Q_1 a &= (0,1; 0,2; 0,4; 0,3) \\ Q_{\frac{1}{2}} a &= (0,175; 0,225; 0,325; 0,275) \\ Q_0 a &= (0,25; 0,25; 0,25; 0,25) \\ Q_{-\frac{5}{3}} a &= (0,5; 0,3; 0; 0,1\bar{6}) \end{aligned}$$

Im **ersten Beispiel** wird durch die Quaestation mit $y = \frac{5}{3}$ der Geltungswert verschärft: Die beiden Werte kleiner $\frac{1}{n} = 0,25$, nämlich $\alpha_1 = 0,1$ und $\alpha_2 = 0,2$ werden noch kleiner, während die beiden Werte größer $\frac{1}{4}$, nämlich

$\alpha_3 = 0,4$ und $\alpha_4 = 0,3$ größer werden. Zudem wurden die Abstände zwischen den Objekten größer. Aber 0,4 wächst nur auf 0,5, weil 0,1 schon auf 0 zurückgegangen ist. Um $\alpha_3 = 0,4$ auf 1 anwachsen zu lassen, müsste y unerlaubterweise 5 sein. Dann würde aber $\alpha_1 = 0,1$ ebenfalls unerlaubterweise zu $-0,5$ werden⁶⁰.

Im **zweiten Beispiel** wird α_i mit $y = 1$ wieder zu α_i , denn $1(\alpha_i - \frac{1}{n}) + \frac{1}{n} = \alpha_i - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \alpha_i$.

Das Ergebnis des **dritten Beispiels** erinnert an die doppelte Restation RRa, wo sich die Objekte der Geltungswerte dem Wert $\frac{1}{n}$ annäherten.

Im **vierten Beispiel** wird a mit $y = 0$ zu K_n , denn $0(\alpha_i - \frac{1}{n}) + \frac{1}{n} = \frac{1}{n}$.

Das Ergebnis des **fünften Beispiels** erinnert an die Restation Ra, wo die Objekte der Geltungswerte ebenfalls umso größer wurden, je kleiner sie ursprünglich waren (und umgekehrt).

Aus diesen 5 Beispielen ergibt sich folgende Übersicht über die Funktionsweise der Quaestation $Q_y a$, wobei y_{max} der größtmögliche und y_{min} der kleinstmögliche Wert für y ist:

1. $1 < y < y_{max}$: Verschärfung
2. $y = 1$: $a \rightarrow a$
3. $0 < y < 1$: Nivellierung wie bei RRa
4. $y = 0$: $a \rightarrow K_n$
5. $y_{min} < y < 0$: eine Art Negation wie bei Ra

Betrachten wir für positive y den Abstand zwischen 2 benachbarten Objekten nach einer Quaestation:

$$\begin{aligned}
 |f_{i,Q_y}(\alpha_i) - f_{i,Q_y}(\alpha_{i+1})| &= |(y(\alpha_i - \frac{1}{n}) + \frac{1}{n}) - (y(\alpha_{i+1} - \frac{1}{n}) + \frac{1}{n})| = \\
 &= |(y(\alpha_i - \frac{1}{n}) - y(\alpha_{i+1} - \frac{1}{n}) + \frac{1}{n} - \frac{1}{n})| = \\
 &= |y((\alpha_i - \frac{1}{n}) - (\alpha_{i+1} - \frac{1}{n}))| = \\
 &= |y(\alpha_i - \alpha_{i+1})| = y \cdot |\alpha_i - \alpha_{i+1}|
 \end{aligned}$$

Ist also $y > 1$, so wird der Abstand größer (Verschärfung), ist $0 < y < 1$, so wird der Abstand kleiner (Nivellierung). Ist $y < 0$, so ist die Quaestation eine Verknüpfung einer Spiegelung an der Waagerechten durch $\frac{1}{n}$ und einer axialen Stauchung/Streckung mit positivem y . Objekte, die kleiner als $\frac{1}{n}$ waren, sind jetzt größer als $\frac{1}{n}$ und umgekehrt.

⁶⁰ $5(0,4 - 0,25) + 0,25 = 5 \cdot 0,15 + 0,25 = 0,75 + 0,25 = 1$ und $5(0,1 - 0,25) + 0,25 = 5 \cdot (-0,15) + 0,25 = -0,75 + 0,25 = -0,5$

Falls $y = -1$ ist, ist $f_{i,Q_{-1}}(\alpha_i) = -1(\alpha_i - \frac{1}{n}) + \frac{1}{n} = -\alpha_i + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n} - \alpha_i$.
Bei der doppelten Quaestation $f_{i,Q_{-1}}(f_{i,Q_{-1}}(\alpha_i))$ ist dann $\frac{2}{n} - (\frac{2}{n} - \alpha_i) = \alpha_i$:

Gesetz 38. $f_{i,Q_{-1}}(\alpha_i) = \frac{2}{n} - \alpha_i$

Gesetz 39. $Q_0a = K_n$, $Q_1a = a$ und $Q_{-1}Q_{-1}a = a$

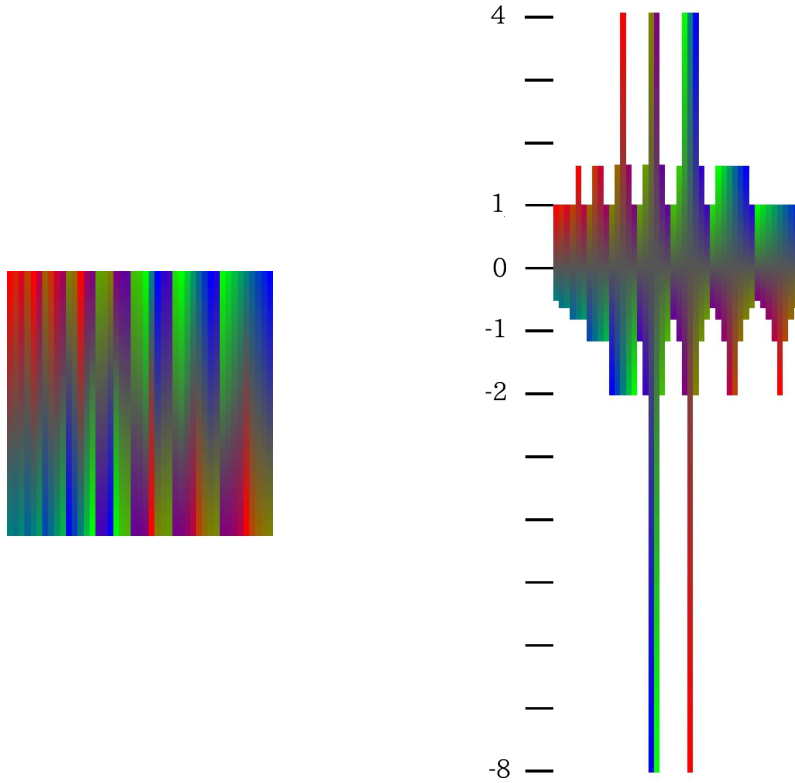
Man könnte dazu neigen, die Quaestation $Q_{-1}a$ wegen der doppelten Quaestation $Q_{-1}Q_{-1}a = a$ in Analogie zu $NNa = a$ und $N_mN_m a = a$ als eine weitere Negation zu betrachten, zumal die Restation wegen $RRa \neq a$ (falls $n > 2$ ist) diesen Anspruch nur bedingt erfüllt hatte. Außerdem gilt für die Quaestation mit $y = -1$ wie schon für die Negation Na , dass $|Q_{-1}a| = 1 - |a|$ ist:

$$\begin{aligned} |Q_{-1}a| &= \frac{1}{n-1}(-1 \cdot (\alpha_2 - \frac{1}{n}) + \frac{1}{n}) + \frac{2}{n-1}(-1 \cdot (\alpha_3 - \frac{1}{n}) + \frac{1}{n}) + \dots + \frac{n-1}{n-1}(-1 \cdot (\alpha_n - \frac{1}{n}) + \frac{1}{n}) = \\ &= \frac{1}{n-1}((-\alpha_2 + \frac{1}{n}) + \frac{1}{n}) + 2(-\alpha_3 + \frac{1}{n}) + \dots + (n-1)(-\alpha_n + \frac{1}{n}) = \\ &= \frac{1}{n-1}((-\alpha_2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n}) + 2(-\alpha_3 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n}) + \dots + (n-1)(-\alpha_n + \frac{1}{n} + \frac{1}{n})) = \\ &= \frac{1}{n-1}(-\alpha_2 + \frac{2}{n} - 2\alpha_3 + \frac{2 \cdot 2}{n} - \dots - (n-1)\alpha_n + \frac{2 \cdot (n-1)}{n}) = \\ &= \frac{1}{n-1}(-\alpha_2 - 2\alpha_3 - \dots - (n-1)\alpha_n + \frac{2}{n} + \frac{2 \cdot 2}{n} - \dots + \frac{2 \cdot (n-1)}{n}) = \\ &= \frac{1}{n-1}(-\alpha_2 - 2\alpha_3 - \dots - (n-1)\alpha_n + \frac{2}{n}(1 + 2 + \dots + (n-1))) = \\ &= -\frac{1}{n-1}\alpha_2 - \frac{2}{n-1}\alpha_3 - \dots - \frac{n-1}{n-1}\alpha_n + \frac{2}{n(n-1)} \frac{(n-1)n}{2} = -|a| + 1 = |Na| \text{ (wg. Gesetz 15)} \end{aligned}$$

Gesetz 40. $|Q_{-1}a| = 1 - |a|$

Doch wegen $f_{i,Q_{-1}}(\alpha_i) = \frac{2}{n} - \alpha_i$ muss α_i und somit $\alpha_{max} \leq \frac{2}{n}$ sein, um nicht negativ zu werden. Somit ist die Quaestation mit $y = -1$ nicht auf alle Geltungswerte anwendbar und daher ebenfalls als Negation nur begrenzt brauchbar. Während die Restation einer Spiegelung des entsprechenden Säulendiagramms an der Waagerechten durch $\frac{1}{2}$ entsprach (die dann noch durch eine Division durch $n-1$ „nachgebessert“ werden musste), entspricht die Quaestation mit $y = -1$ einer Spiegelung des entsprechenden Säulendiagramms an einer Waagerechten durch $\frac{1}{n}$, weil eine axiale Streckung/Stauchung mit dem Faktor $y = -1$ einer Achsenspiegelung entspricht.

Nachfolgend 2 Visualisierungen des Junktors Q_y (die Erläuterungen dazu erfolgen im Anschluss an die Abbildungen):



Q_{ya} (oben ist jeweils $y = y_{max}$ und unten $y = y_{min}$) Q_{ya} ($-8 < y < 4$)

Während in der linken Visualisierung die Geltungswerte nach unten hin in eine Negation nach Art der Restauration übergehen, kann man bei der rechten Visualisierung sehr gut erkennen, dass alle Geltungswerte bzw. alle RGB-Tripel bei $y = 0$ grau, also alle Objekte der Geltungswerte $\frac{1}{n}$ sind. Bei $y = 1$ sind alle Geltungswerte unverändert wie bei der Visualisierung von a . Sämtliche Farbstreifen liegen zumindest im Bereich von $y = -0,5$ und $y = 1$, denn die Objekte der Geltungswerte liegen bei $n = 3$ dann alle im Intervall $[0,1]$: $\frac{1}{1-n\alpha_{max}} = \frac{1}{1-3 \cdot 1} = -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{1-n\alpha_{min}} = \frac{1}{1-3 \cdot 0} = \frac{1}{1} = 1$. Somit liegen einige Farbstreifen nicht im Bereich $y = -1$ und für die entsprechenden Geltungswerte ist Q_{-1a} als Negation (s. oben) nicht anwendbar. Für $y = 4$ gibt es 6 Geltungswerte bzw. Tripel, nämlich jeweils 3 Tripel, bei denen ein Objekt 0,5 ist und 2 Objekte 0,25 sind und 3 Tripel, bei denen ein Objekt 0,25 ist und 2 Objekte 0,375 sind⁶¹. Für $y = -8$ gibt es 3 Geltungswerte bzw. Tripel, bei denen ebenfalls ein Objekt 0,25 ist und 2 Objekte 0,375 sind⁶².

⁶¹ $4(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \frac{1}{3} = 4 \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{4}{6} + \frac{1}{3} = 1$ und $4(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}) + \frac{1}{3} = 4 \cdot (-\frac{1}{12}) + \frac{1}{3} = -\frac{4}{12} + \frac{1}{3} = 0$
 und $4(\frac{3}{8} - \frac{1}{3}) + \frac{1}{3} = 4 \cdot \frac{1}{24} + \frac{1}{3} = \frac{4}{24} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$

⁶² $-8(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}) + \frac{1}{3} = -8 \cdot (-\frac{1}{12}) + \frac{1}{3} = \frac{8}{12} + \frac{1}{3} = 1$ und $-8(\frac{3}{8} - \frac{1}{3}) + \frac{1}{3} = -8 \cdot \frac{1}{24} + \frac{1}{3} = -\frac{8}{24} + \frac{1}{3} = 0$

Wenn die Quaestation mit $y < 0$ sich wie Ra verhält, bei welchem y ist $Q_y a$ dann genau Ra ?

$$\begin{aligned}
f_{i,Q_y}(\alpha_i) &= f_{i,R}(\alpha_i) && \Leftrightarrow \\
y(\alpha_i - \frac{1}{n}) + \frac{1}{n} &= \frac{1-\alpha_i}{n-1} && \Leftrightarrow \\
y(\alpha_i - \frac{1}{n}) &= \frac{(1-\alpha_i)n}{(n-1)n} - \frac{n-1}{(n-1)n} && \Leftrightarrow \\
y &= \frac{n-n\alpha_i-n+1}{(n-1)n(\alpha_i-\frac{1}{n})} && \Leftrightarrow \\
y &= \frac{-n\alpha_i+1}{(n-1)(n\alpha_i-1)} && \Leftrightarrow \\
y &= -\frac{1}{n-1}
\end{aligned}$$

Damit $Q_y a$ mit Ra zusammenfällt, ist y , wie zu erwarten, ein negativer Bruch. Für $n = 2$ und somit $y = -1$ fällt die Quaestation nicht nur mit der Restation Ra, sondern auch mit Na, Za und $\hat{Z}a$ zusammen.

Gesetz 41. $Q_{-\frac{1}{n-1}} a = Ra$

Die Geltungswerte „wahr“ = W_n und „falsch“ = F_n können nicht weiter verschärft werden, da auch hier für y gilt: $\frac{1}{1-n\alpha_{\max}} = \frac{1}{1-1n} \leq y \leq \frac{1}{1-n\alpha_{\min}} = \frac{1}{1-0n} = 1$. y müsste für eine Verschärfung aber größer als 1 werden. W_n und F_n können allerdings abgeschwächt bzw. nivelliert werden: Wie groß wäre y z.B. bei einer Abschwächung von $F_5 = (1; 0; 0; 0; 0)$ zu $(\frac{9}{10}; \alpha_2; \alpha_3; \alpha_4; \alpha_5)$, wobei $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5$ sein soll? Die Objekte α_2 bis α_5 sind $(1 - \frac{9}{10})/4 = \frac{1}{10}/4 = \frac{1}{40}$. Für y gilt dann: $y(1 - \frac{1}{5}) + \frac{1}{5} = \frac{4}{5}y + \frac{1}{5} = \frac{9}{10}$. Somit ist $\frac{4}{5}y = \frac{9}{10} - \frac{1}{5} = \frac{7}{10}$ und $y = \frac{7}{10} \cdot \frac{5}{4} = \frac{7}{8}$. Und dann ist auch $\frac{7}{8}(0 - \frac{1}{5}) + \frac{1}{5} = -\frac{7}{40} + \frac{1}{5} = \frac{1}{40}$.

Wie schon für die Restation gilt übrigens auch für die Quaestation (der Beweis verläuft entsprechend wie bei Ra):

Gesetz 42. $Q_y Na = NQ_y a$

Im Unterschied zu Zyklation und Veritation ist es bei der Quaestation nicht notwendig, eine inverse Quaestation zu definieren, da die Quaestation sowohl nivelliert als auch verschärft. Werfen wir trotzdem kurz einen Blick auf die Umkehrfunktion $f_{i,Q_y}^{-1}(\alpha_i)$:

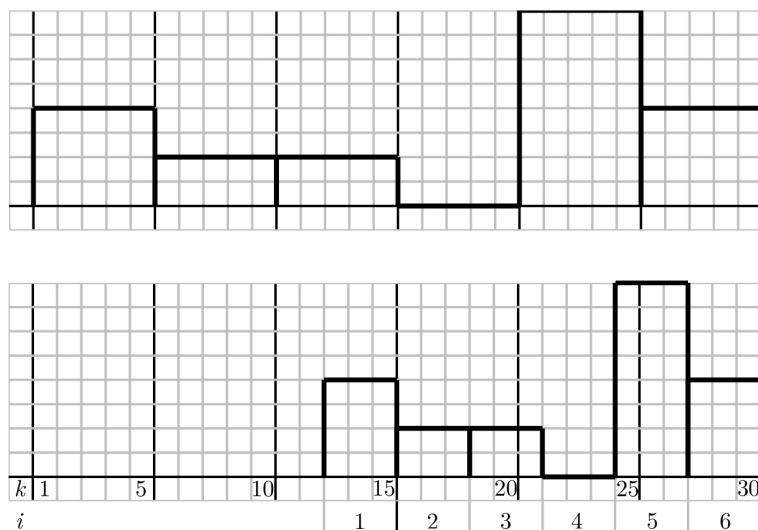
$$\begin{aligned}
\alpha_i &= y(f_{i,Q_y}(\alpha_i) - \frac{1}{n}) + \frac{1}{n} && \Leftrightarrow \\
\alpha_i - \frac{1}{n} &= y(f_{i,Q_y}(\alpha_i) - \frac{1}{n}) && \Leftrightarrow \\
\frac{1}{y}(\alpha_i - \frac{1}{n}) &= f_{i,Q_y}(\alpha_i) - \frac{1}{n} && \Leftrightarrow \\
\frac{1}{y}(\alpha_i - \frac{1}{n}) + \frac{1}{n} &= f_{i,Q_y}(\alpha_i)
\end{aligned}$$

Für den Fall, dass $y = 1$ oder $y = -1$ ist, ist $y = \frac{1}{y}$ und somit $f_{i,Q_y}(\alpha_i) = f_{i,Q_y}^{-1}(\alpha_i)$. Es überrascht also nicht, dass $Q_1 Q_1 a = Q_{-1} Q_{-1} a = a$ ist.

6.3 Die ergänzende Veritation

6.3.1 Die ergänzende Veritation als Stauchung

Die Quaestation beruhte auf einer axialen Streckung bzw. Stauchung des Säulendiagramms bzgl. einer Waagerechten als Streckungsachse. Eine axiale Stauchung bzgl. der rechten Diagrammkante führt demgegenüber zu einer Veritation $*W_x a$, wie das nachfolgende Beispiel für $a = (0,2; 0,1; 0,1; 0; 0,4; 0,2)$ mit dem Stauchungsfaktor $x = \frac{3}{5}$ zeigen soll:



Nun soll an diesem Beispiel eine Formel für die Veritation $*W_x a$ entwickelt werden: Der Zähler des Stauchungsfaktors x ist $x_z = 3$ und der Nenner $x_n = 5$. Das Diagramm wird in $n \cdot x_n = 6 \cdot 5 = 30$ senkrechte Streifen aufgeteilt. Die $n = 6$ Bereiche für α_i , jeweils aus 5 Streifen bestehend, beginnen mit $k = 1$ für den 1. Bereich mit dem ursprünglichen $i = 1$, mit $k = 6$ für den 2. Bereich mit $i = 2$ usw., also allgemein mit $k = x_n(i - 1) + 1$ für den i . Bereich⁶³. Die 6 Bereiche für α_i enden mit $k = 5$ für den 1. Bereich mit $i = 1$, mit $k = 10$ für den 2. Bereich mit $i = 2$ usw., also allgemein mit $k = x_n i$ für den i . Bereich. Das oben abgebildete, gestauchte Diagramm beginnt hinter $k = 12 = 30 \cdot (1 - \frac{3}{5}) = 30 \cdot \frac{5-3}{5}$ bzw. allgemein hinter $k = (x_n \cdot n) \frac{x_n - x_z}{x_n} = n(x_n - x_z)$. Die Diagrammsäule von α_1 wird auf die $x_z = 3$ senkrechten Streifen bei $k = 13, 14$ und 15 abgebildet, α_2 auf die 3 senkrechten Streifen bei $k = 16, 17$ und 18 usw. k geht dabei über in i , nämlich ...

⁶³Das entsprechende lineare Gleichungssystem ist:

I. $1 = m \cdot 1 + b \Rightarrow b = 1 - m$ und

II. $6 = 1 + x_n = m \cdot 2 + b = m \cdot 2 + 1 - m \Rightarrow 1 + x_n = m + 1 \Rightarrow x_n = m$.

Also ist $mi + b = x_n i + 1 - m = x_n i + 1 - x_n = x_n(i - 1) + 1$.

$$\begin{array}{llllll}
13 & \rightarrow & 13 - 12 = 1 & \rightarrow & \frac{1}{3} & \rightarrow & \lceil \frac{1}{3} \rceil = 1 \\
14 & \rightarrow & 14 - 12 = 2 & \rightarrow & \frac{2}{3} & \rightarrow & \lceil \frac{2}{3} \rceil = 1 \\
15 & \rightarrow & 15 - 12 = 3 & \rightarrow & \frac{3}{3} & \rightarrow & \lceil \frac{3}{3} \rceil = 1 \\
16 & \rightarrow & 16 - 12 = 4 & \rightarrow & \frac{4}{3} & \rightarrow & \lceil \frac{4}{3} \rceil = 2 \\
17 & \rightarrow & 17 - 12 = 5 & \rightarrow & \frac{5}{3} & \rightarrow & \lceil \frac{5}{3} \rceil = 2 \\
18 & \rightarrow & 18 - 12 = 6 & \rightarrow & \frac{6}{3} & \rightarrow & \lceil \frac{6}{3} \rceil = 2 \\
19 & \rightarrow & 19 - 12 = 7 & \rightarrow & \frac{7}{3} & \rightarrow & \lceil \frac{7}{3} \rceil = 3 \text{ usw.}
\end{array}$$

Dabei sind „ $\lceil$ “ und „ $\rceil$ “ die aufrundenden Gaußklammern. Allgemein geht k über in $i = \lceil \frac{k-n(x_n-x_z)}{x_z} \rceil$. Dadurch wird jedem Streifen k das entsprechende i vom abgebildeten α_i zugeordnet. Zum Schluss bleibt noch das Problem, dass von jeder Diagrammsäule des neuen α_i insgesamt $x_z = 3$ Streifen addiert wurden. Also muss jeder Summand in der folgenden Formel noch durch x_z geteilt bzw. mit $\frac{1}{x_z}$ multipliziert werden:

Definition 19. Die ergänzende *Veritation* ${}^*\mathbf{W}_x \mathbf{a}$ eines Geltungswertes $\mathbf{a}$ bildet ein Objekt α_i folgendermaßen ab:

$$f_{i, {}^*\mathbf{W}_x}(\alpha_i) = f_{i, {}^*\mathbf{W}_{\frac{x_z}{x_n}}}(\alpha_i) = \sum_{k=x_n(i-1)+1}^{x_n i} \frac{1}{x_z} \alpha_{\lceil \frac{k-n(x_n-x_z)}{x_z} \rceil}$$

Dabei ist der Stauchungsfaktor $x = \frac{x_z}{x_n} \in \mathbb{Q}$ mit $0 < x \leq 1$. Außerdem ist $\alpha_i = 0$, wenn $i < 1$ ist.

Zunächst einige Beispiele mit $\mathbf{a} = (0,2; 0,1; 0,1; 0; 0,4; 0,2)$:

$$\begin{array}{ll}
{}^*\mathbf{W}_{\frac{5}{5}}(\mathbf{a}) = (0,2; 0,1; 0,1; 0; 0,4; 0,2) = \mathbf{a} & \text{Betrag} = 0,58 \\
{}^*\mathbf{W}_{\frac{4}{5}}(\mathbf{a}) = (0; 0,2; 0,125; 0,075; 0,3; 0,3) & \text{Betrag} = 0,675 \\
{}^*\mathbf{W}_{\frac{3}{5}}(\mathbf{a}) = (0; 0; 0,2; 0,1\bar{6}; 0,1\bar{6}; 0,4\bar{6}) \text{ (s. Abb. oben)} & \text{Betrag} = 0,77\bar{9} \\
{}^*\mathbf{W}_{\frac{2}{5}}(\mathbf{a}) = (0; 0; 0; 0,2; 0,2; 0,6) & \text{Betrag} = 0,8 \\
{}^*\mathbf{W}_{\frac{1}{5}}(\mathbf{a}) = (0; 0; 0; 0; 0,2; 0,8) & \text{Betrag} = 0,96
\end{array}$$

Ein entsprechendes Listing, das die obige Formel verwendet und mit dem auch die 5 Beispiele berechnet wurden, findet sich sowohl im Anhang 13.5 als auch bei den Materialien zu dieser Arbeit unter <https://www.untexte.de/logik/> und zwar als Textdatei und als ausführbare HTML-Datei.

Wenn $x = 1 = \frac{1}{1}$ ist, findet keine Stauchung statt, was auch an der Formel sehr gut zu erkennen ist:

$$\sum_{k=x_n(i-1)+1}^{x_n i} \frac{1}{x_z} \alpha_{\lceil \frac{k-n(x_n-x_z)}{x_z} \rceil} = \sum_{k=1(i-1)+1}^{1i} \frac{1}{1} \alpha_{\lceil \frac{k-n(1-1)}{1} \rceil} = \sum_{k=i}^i \alpha_{\lceil k \rceil} = \alpha_i$$

Wenn $x = \frac{1}{n}$ ist, wird das komplette Diagramm in den Bereich für α_n gestaucht und das Ergebnis ist $(0; 0; \dots; 0; 1) = W_n$, denn wenn $i = n$, $x_z = 1$ und $x_n = n$ ist, dann ist:

$$f_{n,*W_{\frac{1}{n}}}(\alpha_n) = \sum_{k=n(n-1)+1}^{n \cdot n} \frac{1}{1} \alpha_{\lceil \frac{k-n(n-1)}{1} \rceil} = \sum_{k=n \cdot n - n + 1}^{n \cdot n} \alpha_{\lceil k - n \cdot n + n \rceil} = \quad 64$$

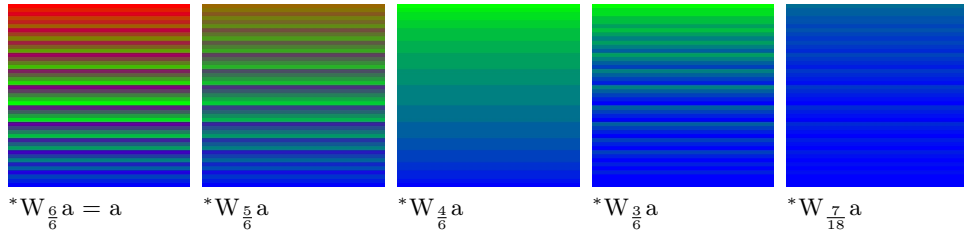
$$\sum_{k=n \cdot n - n + 1 - (n \cdot n - n)}^{n \cdot n - (n \cdot n - n)} \alpha_{\lceil k - n \cdot n + n + (n \cdot n - n) \rceil} = \sum_{k=1}^n \alpha_{\lceil k \rceil} = \sum_{k=1}^n \alpha_k = 1$$

Wird x noch kleiner als $\frac{1}{n}$ (aber bleibt größer als 0⁶⁵), so ändert sich das Ergebnis nicht mehr.

Gesetz 43. $*W_1 a = a$, $*W_{\frac{1}{n}} a = W_n$ und $*W_x W_n = W_n$

Da bei der Veritation $*W_x a$ der Parameter x ein Stauchungsfaktor ist, könnte man vermuten, dass die doppelte Veritation $*W_{x_1} *W_{x_2} a = *W_{x_1 \cdot x_2} a$ ist. Jedoch ist mit $a = (1, 2, 4, 3)$ $*W_{\frac{4}{7}} *W_{\frac{3}{5}} a = (0, 0, 19, 101)$ mit einem Betragszähler von 341, aber $*W_{\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{5}} a = *W_{\frac{12}{35}} a = (0, 0, 14, 106)$ mit einem Betragszähler von 346 (die Nenner wurden jeweils weggelassen).

In der nachfolgenden Visualisierung der 45 lexikographisch von oben nach unten angeordneten Geltungswerte als Tripel mit den RGB-Farben sieht man, dass bei $x = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ der Rot-Anteil völlig verschwunden ist. Die letzte Abbildung wäre mit $x = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ komplett blau gewesen. Stattdessen habe ich für die letzte Abbildung $x = \frac{7}{18}$ gewählt, also etwas mehr als $\frac{1}{3}$ und man sieht noch letzte Reste von Grün, vor allem dort, wo die Objekte von a ursprünglich einen starken Rot-Anteil hatten:



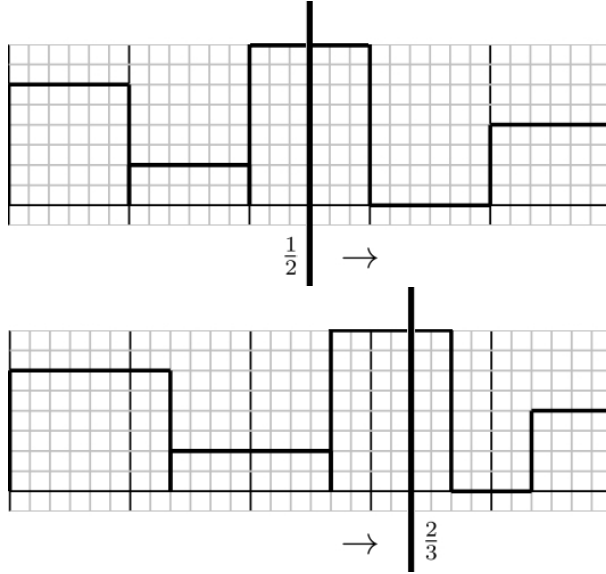
Wie schon bei der unabhängigen inversen Veritation $\acute{W}a$ lässt sich auch bei der ergänzenden Veritation eine inverse ergänzende Veritation definieren durch: $*W_x a := N *W_x N a$.

Ich möchte den Gedanken zur ergänzenden Veritation $*W_x$ noch kurz etwas weiterführen, zumal in den Beispielen auffiel, dass die Objekte links

⁶⁴Allgemein ist $\sum_{k=a}^b c_k = \sum_{k=a-d}^{b-d} c_{k+d}$.

⁶⁵ x kann nicht 0 sein, denn sonst würde in der Formel zweimal durch $x_z = 0$ geteilt.

im Geltungswert sehr schnell zu 0 wurden: Ich stelle mir vor, dass sich das Diagramm zum Geltungswert a auf einem angespannten, elastischen Untergrund befände. Durch die ergänzende Veritation *W_x wird der linke Rand des Untergrundes nach rechts zum unbeweglichen rechten Rand des Diagramms hinbewegt. Für eine alternative ergänzende Veritation $^{**}W_{x,z}$ stelle ich mir vor, dass sowohl der linke als auch der rechte Rand des elastischen Untergrundes fixiert wäre. Irgendwo zwischen linkem und rechtem Rand an der Stelle x ist ein Stab parallel zu den beiden Rändern am Untergrund befestigt. Nun wird dieser Stab zur Position z nach rechts zum rechten Rand des Diagramms hinbewegt. Dazu ein Beispiel mit $a = (0,3; 0,1; 0,4; 0; 0,2)$, $x = \frac{x_z}{x_n} = \frac{1}{2}$ und $z = \frac{z_z}{z_n} = \frac{2}{3}$:



Um $^{**}W_{x,z}a$ zu berechnen, gehe ich wie bei $^*W_x a$ vor: Das Diagramm wurde wiederum in 30 senkrechte Streifen aufgeteilt. Nun wird wiederum geschaut, wieviele Streifen von den abgebildeten α_i sich in den 5 Bereichen befinden. Da die Diagrammsäulen links von z auf eine Breite von 8 Streifen gestreckt und rechts von z auf eine Breite von 4 Streifen gestaucht wurden, müssen die Ergebnisse links durch 8 und rechts durch 4 dividiert werden:

$$f_{1,^{**}W_{\frac{1}{2},\frac{2}{3}}}(\alpha_1) = \frac{6\alpha_1}{8} = \frac{6 \cdot \frac{3}{10}}{8} = \frac{18}{80} = 0,225$$

$$f_{2,^{**}W_{\frac{1}{2},\frac{2}{3}}}(\alpha_2) = \frac{2\alpha_1}{8} + \frac{4\alpha_2}{8} = \frac{2 \cdot \frac{3}{10}}{8} + \frac{4 \cdot \frac{1}{10}}{8} = \frac{6}{80} + \frac{4}{80} = \frac{10}{80} = 0,125$$

$$f_{3,^{**}W_{\frac{1}{2},\frac{2}{3}}}(\alpha_3) = \frac{4\alpha_2}{8} + \frac{2\alpha_3}{8} = \frac{4 \cdot \frac{1}{10}}{8} + \frac{2 \cdot \frac{4}{10}}{8} = \frac{4}{80} + \frac{8}{80} = \frac{12}{80} = 0,15$$

$$f_{4,^{**}W_{\frac{1}{2},\frac{2}{3}}}(\alpha_4) = \frac{2\alpha_3}{8} + \frac{2\alpha_3}{4} + \frac{2\alpha_4}{4} = \frac{2 \cdot \frac{4}{10}}{8} + \frac{2 \cdot \frac{4}{10}}{4} + \frac{2 \cdot \frac{0}{10}}{4} = \frac{8}{80} + \frac{8}{40} + \frac{0}{40} = \frac{24}{80} = 0,3$$

$$f_{5,^{**}W_{\frac{1}{2},\frac{2}{3}}}(\alpha_5) = \frac{2\alpha_4}{4} + \frac{4\alpha_5}{4} = \frac{2 \cdot \frac{0}{10}}{4} + \frac{4 \cdot \frac{2}{10}}{4} = \frac{0}{40} + \frac{8}{40} = \frac{16}{80} = 0,2$$

Während der Betrag $|a| = |(0,3; 0,1; 0,4; 0; 0,2)| = 0,425$ ist, ist der Betrag nach der Veritation $|**W_{x,z}a| = |(0,225; 0,125; 0,15; 0,3; 0,2)| = 0,53125$.

So, wie die Restation Ra in Q_ya enthalten ist, so ist auch $*W_xa$ in $**W_{x,z}a$ enthalten: $*W_xa = **W_{0,1-x}a$. Die Veritation $**W_{x,z}a$ kann nicht $W_n = (0; 0; \dots; 0; 1)$ werden, falls nicht alle Diagrammsäulen links von x die Höhe 0 haben, denn diese Diagrammsäulen werden durch $**W_{x,z}a$ zwar breiter, aber nicht flacher. Haben allerdings alle Diagrammsäulen links von x die Höhe 0, dann ist $**W_{x,z}a = *W_{\frac{1-z}{1-x}}a$, denn $1-z$ verhält sich zu $1-x$, wie sich der Stauchungsfaktor von $*W_xa$ zu 1, der Breite des Diagramms, verhält. Und selbstverständlich ist $**W_{x,x}a = a$.

6.3.2 Die ergänzende Veritation als Umschichtung

Ich möchte noch einmal auf die innere Veritation W_m durch Weitergabe aus Kapitel 5.3 zurückkehren, wo ein Objekt, wenn es nicht 0 war, den Betrag $\frac{1}{j}$ an das nächste rechts stehende Objekt weitergab. Entsprechend möchte ich eine ergänzende Veritation als eine Art Umschichtung in Richtung „wahr“ definieren: Das 1. Objekt gibt einen vorgegebenen prozentualen Anteil x seines Betrages an das 2. Objekt ab, das wiederum den gleichen prozentualen Anteil seines ursprünglichen Betrages an das 3. Objekt abgibt usw. Das heißt, dass das 1. Objekt, das für „falsch“ steht, nur abgibt und das letzte Objekt, das für „wahr“ steht, nur bekommt, während alle anderen Objekte sowohl abgeben (es sei denn, sie sind 0) als auch bekommen (es sei denn, das Vorgängerobjekt ist 0) :

Definition 20. Die ergänzende Veritation W_xa eines Geltungswertes $a = (\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_n)$ ist:

$W_xa := ((1-x)\alpha_1; (1-x)\alpha_2 + x\alpha_1; (1-x)\alpha_3 + x\alpha_2; \dots; (1-x)\alpha_{n-1} + x\alpha_{n-2}; \alpha_n + x\alpha_{n-1})$. Dabei ist $0 \leq x \leq 1$ und $x \in \mathbb{Q}$. Durch die Veritation gehen die Objekte α_i über in

$$f_{i,W_x}(\alpha_i) = \begin{cases} (1-x)\alpha_i & \text{falls } i = 1 \\ (1-x)\alpha_i + x\alpha_{i-1} & \text{falls } 1 < i < n \\ \alpha_i + x\alpha_{i-1} & \text{falls } i = n \end{cases}$$

Die entsprechende Abbildungsmatrix ist:

$$W_xa \stackrel{\wedge}{=} \vec{a} \cdot \begin{pmatrix} 1-x & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1-x & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1-x & x \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Summe der Objekte von $W_x a$ ist 1:

$$\begin{aligned}
& (1-x)\alpha_1 + (1-x)\alpha_2 + x\alpha_{2-1} + (1-x)\alpha_3 + x\alpha_{3-1} + \cdots + \\
& (1-x)\alpha_{n-1} + x\alpha_{n-1-1} + \alpha_n + x\alpha_{n-1} = \\
& \alpha_1 - x\alpha_1 + \alpha_2 - x\alpha_2 + x\alpha_1 + \alpha_3 - x\alpha_3 + x\alpha_2 + \cdots + \\
& \alpha_{n-1} - x\alpha_{n-1} + x\alpha_{n-2} + \alpha_n + x\alpha_{n-1} = \\
& \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_{n-1} + \alpha_n = 1
\end{aligned}$$

Alle Objekte sind größer oder gleich 0, da mit $0 \leq x \leq 1$ offensichtlich $(1-x)\alpha_1 \geq 0$, $(1-x)\alpha_i + x\alpha_{i-1} \geq 0$ und $\alpha_n + x\alpha_{n-1} \geq 0$ ist. Alle Objekte sind außerdem kleiner oder gleich 1, was für $i = 1$ bzw. $(1-x)\alpha_1$ offensichtlich ist. Falls $i = n$ ist, so ist $\alpha_n + x\alpha_{n-1}$ auch kleiner oder gleich 1, da $x \leq 1$ und die Summe aus α_n und α_{n-1} nach Definition der Geltungswerte ebenfalls kleiner oder gleich 1 ist. Ist $2 \leq i \leq n-1$, dann gilt:

1. Fall: $\alpha_i > \alpha_{i-1}$ $ \begin{aligned} (1-x)\alpha_i + x\alpha_{i-1} &= \\ \alpha_i - x\alpha_i + x\alpha_{i-1} &= \\ \alpha_i - x(\alpha_i - \alpha_{i-1}) &\leq \\ \alpha_i \leq 1 \text{ (per Definition)} & \end{aligned} $	2. Fall: $\alpha_i \leq \alpha_{i-1}$ $ \begin{aligned} (1-x)\alpha_i + x\alpha_{i-1} &\leq \\ (1-x)\alpha_{i-1} + x\alpha_{i-1} &= \\ \alpha_{i-1} - x\alpha_{i-1} + x\alpha_{i-1} &= \\ \alpha_{i-1} \leq 1 \text{ und somit } \alpha_i \leq 1 & \end{aligned} $
--	--

Die Veritation von $W_n = (0; 0; \dots; 0; 1)$ ist W_n , da für $1 \leq i \leq n-1$ die Beträge von $\alpha_i = 0$ sind. Somit ist $(1-x) \cdot 0 = 0$ und $(1-x) \cdot 0 + x \cdot 0 = 0$. Für $i = n$ ist $1 + x \cdot 0 = 1$. Die Veritation von F_n ist $(1-x; x; 0; \dots; 0)$. Für $i = 1$ ist $(1-x)\alpha_1 = (1-x) \cdot 1 = 1-x$. Für $i = 2$ ist $(1-x)\alpha_2 + x\alpha_1 = (1-x) \cdot 0 + x \cdot 1 = x$. Sonst ist $(1-x)\alpha_i + x\alpha_{i-1} = (1-x) \cdot 0 + x \cdot 0 = 0$ und $\alpha_n + x\alpha_{n-1} = 0 + x \cdot 0 = 0$.

Gesetz 44. $W_x W_n = W_n$ und $W_x F_n = (1-x; x; 0; \dots; 0)$

$W_0 a$ ist:

$$\begin{aligned}
& ((1-x)\alpha_1; (1-x)\alpha_2 + x\alpha_1; \dots; \alpha_n + x\alpha_{n-1}) = \\
& ((1-0)\alpha_1; (1-0)\alpha_2 + 0\alpha_1; \dots; \alpha_n + 0\alpha_{n-1}) = \\
& (\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_n) = a
\end{aligned}$$

$W_1 a$ ist:

$$\begin{aligned}
& ((1-x)\alpha_1; (1-x)\alpha_2 + x\alpha_1; (1-x)\alpha_3 + x\alpha_2; \dots; (1-x)\alpha_{n-1} + x\alpha_{n-2}; \alpha_n + x\alpha_{n-1}) = \\
& ((1-1)\alpha_1; (1-1)\alpha_2 + 1\alpha_1; (1-1)\alpha_3 + 1\alpha_2; \dots; (1-1)\alpha_{n-1} + 1\alpha_{n-2}; \alpha_n + 1\alpha_{n-1}) = \\
& (0; \alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_{n-2}; \alpha_{n-1} + \alpha_n)
\end{aligned}$$

Gesetz 45. $W_0 a = a$ und $W_1 a = (0; \alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_{n-2}; \alpha_{n-1} + \alpha_n)$

Aus $W_1 a = (0; \alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_{n-2}; \alpha_{n-1} + \alpha_n)$ folgt
 $W_1 W_1 a = (0; 0; \alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_{n-3}; \alpha_{n-2} + \alpha_{n-1} + \alpha_n)$ usw. bis:

Gesetz 46. $\underbrace{W_1 W_1 \dots W_1 a}_{(n-1)\text{-mal}} = W_n$

Nun möchte ich zeigen, dass der Betrag von $W_x a$ größer als der Betrag von a ist, falls $x > 0$ und $\alpha_n < 1$ ist:

$$|a| = \frac{\alpha_2}{n-1} + \frac{2\alpha_3}{n-1} + \frac{3\alpha_4}{n-1} + \dots + \frac{(n-2)\alpha_{n-1}}{n-1} + \frac{(n-1)\alpha_n}{n-1} < |W_x a| =$$

$$\frac{(1-x)\alpha_2 + x\alpha_1}{n-1} + \frac{2((1-x)\alpha_3 + x\alpha_2)}{n-1} + \frac{3((1-x)\alpha_4 + x\alpha_3)}{n-1} + \dots +$$

$$\frac{(n-2)((1-x)\alpha_{n-1} + x\alpha_{n-2})}{n-1} + \frac{(n-1)(\alpha_n + x\alpha_{n-1})}{n-1} \Leftrightarrow (\text{ohne Hauptnenner:})$$

$$\alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 + \dots + (n-2)\alpha_{n-1} + (n-1)\alpha_n <$$

$$\alpha_2 - x\alpha_2 + x\alpha_1 + 2\alpha_3 - 2x\alpha_3 + 2x\alpha_2 + 3\alpha_4 - 3x\alpha_4 + 3x\alpha_3 + \dots +$$

$$(n-2)\alpha_{n-1} - (n-2)x\alpha_{n-1} + (n-2)x\alpha_{n-2} + (n-1)\alpha_n + (n-1)x\alpha_{n-1} \Leftrightarrow$$

$$\alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 + \dots + (n-2)\alpha_{n-1} + (n-1)\alpha_n <$$

$$\alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 + \dots + (n-2)\alpha_{n-1} + (n-1)\alpha_n + x\alpha_1 + x\alpha_2 + x\alpha_3 + x\alpha_4 +$$

$$\dots + x\alpha_{n-1} \Leftrightarrow$$

$$0 < x(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{n-1}) \Leftrightarrow (\text{auf beiden Seiten} + x\alpha_n:)$$

$$x\alpha_n < x(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{n-1} + \alpha_n) \Leftrightarrow$$

$$x\alpha_n < x \Leftrightarrow (\text{wegen } x > 0)$$

$$\alpha_n < 1$$

Gesetz 47. $|W_x a| > |a|$, falls $x > 0$ und $a \neq W_n$ ist.

6.4 Die Zentration

Wenn die Farbe zu einem Geltungswert/Tripel mit 3 RGB-Farbanteilen durch die Veritation blauer und durch die inverse Veritation roter wird, durch welchen Junktor wird sie grüner? Oder anders gefragt: Wenn die Datenreihe in einem Geltungswert durch die Veritation und die inverse Veritation extremer wird, wodurch wird sie „mittelmäßiger“? Einen solchen Junktor möchte ich *Zentration* nennen, da durch ihn die Mitte bzw. das Zentrum des Geltungswertes stärker betont wird, und verwende dafür den Buchstaben T⁶⁶:

Junktor	Farbe	Auswirkung	Ziel
Veritation W	blauer	rechter	W_n
inverse Veritation $\dot{W}$	roter	linker	F_n
doppelte Restation RR	grauer	ausgeglichener	K_n
Zentration T	grüner	mittiger	M_n bzw. M'_n oder B_n

⁶⁶Der Buchstabe T ist eine Reminiszenz an die T-Funktion von Slupecki, die einen Geltungswert aus einer 3-wertigen Logik mit Geltungswerten aus der Menge $\{1, 2, 3\}$ auf den mittleren Geltungswert 2 abbildet ([7] Evans, Schwartz, S. 267).

Das Ziel der Zentration ist, dass die Geltungswerte bei mehrfacher Zentration zu M_n bzw. M'_n oder B_n werden bzw. gegen diese Geltungswerte konvergieren. M_n bzw. M'_n und B_n wurden bereits im Kapitel 3.1 über hervorstechende Geltungswerte beschrieben. Hier noch einmal zur Erinnerung:

$$M_n = (\underbrace{0; 0; \dots; 0}_{(k-1)\text{-mal}}; 1; \underbrace{0; 0; \dots; 0}_{(k-1)\text{-mal}}), \text{ falls } n = 2k - 1 \text{ mit } k \in \mathbb{N}$$

$$M'_n = (\underbrace{0; 0; \dots; 0}_{(k-1)\text{-mal}}; 0,5; 0,5; \underbrace{0; 0; \dots; 0}_{(k-1)\text{-mal}}), \text{ falls } n = 2k \text{ mit } k \in \mathbb{N}$$

$$B_n = \left(\binom{n-1}{0}{2^{n-1}}, \binom{n-1}{1}{2^{n-1}}, \dots, \binom{n-1}{n-1}{2^{n-1}} \right)$$

6.4.1 Die Zentration mit Hilfe der Binomialverteilung

Zunächst möchte ich eine Zentration definieren, die gegen B_n konvergiert, wobei B_n einer Binomialverteilung mit $p = 0,5$ entspricht. Da die Summe der Geltungswerte α_1 bis α_n den Wert 1 hat und die Summe der Wahrscheinlichkeiten $\binom{n-1}{0}{2^{n-1}}$ bis $\binom{n-1}{n-1}{2^{n-1}}$ ebenfalls 1 ist⁶⁷, ergibt somit auch die Summe von $\frac{\alpha_1 + \binom{n-1}{0}}{2}$ bis $\frac{\alpha_n + \binom{n-1}{n-1}}{2}$ wiederum 1. Dabei ist $\frac{\alpha_i + \binom{n-1}{i-1}}{2} = \frac{1}{2}\alpha_i + \frac{1}{2^n}\binom{n-1}{i-1}$

Definition 21. Die *Zentration* $\mathbf{T}a$ eines Geltungswertes $a = (\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_n)$ ist:

$$\mathbf{T}a := \left(\frac{1}{2}\alpha_1 + \frac{1}{2^n}\binom{n-1}{0}; \frac{1}{2}\alpha_2 + \frac{1}{2^n}\binom{n-1}{1}; \dots; \frac{1}{2}\alpha_n + \frac{1}{2^n}\binom{n-1}{n-1} \right).$$

Durch die Zentration gehen die Objekte α_i über in

$$f_{i,T}(\alpha_i) = \frac{1}{2}\alpha_i + \frac{1}{2^n}\binom{n-1}{i-1}.$$

Die entsprechende Abbildungsmatrix ist:

$$\mathbf{T}a \stackrel{\wedge}{=} \vec{a} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2^n}\binom{n-1}{0} & \frac{1}{2^n}\binom{n-1}{1} & \dots & \frac{1}{2^n}\binom{n-1}{n-1} \\ \frac{1}{2^n}\binom{n-1}{0} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2^n}\binom{n-1}{1} & \dots & \frac{1}{2^n}\binom{n-1}{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2^n}\binom{n-1}{0} & \frac{1}{2^n}\binom{n-1}{1} & \dots & \frac{1}{2} + \frac{1}{2^n}\binom{n-1}{n-1} \end{pmatrix}$$

Für a_1 soll gezeigt werden, dass nach der Multiplikation von $\vec{a}$ mit der Abbildungsmatrix a_1 in $\frac{1}{2}\alpha_i + \frac{1}{2^n}\binom{n-1}{0}$ übergeht (die Berechnungen für a_2 bis a_n verlaufen analog):

⁶⁷Für $p = \frac{1}{2}$ ist $\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-k} = \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$

⁶⁸[19] Kunath, S. 21

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^n} \binom{n-1}{0}\right) \cdot \alpha_1 + \frac{1}{2^n} \binom{n-1}{0} \cdot \alpha_2 + \frac{1}{2^n} \binom{n-1}{0} \cdot \alpha_3 + \cdots + \frac{1}{2^n} \binom{n-1}{0} \cdot \alpha_n = \\ \frac{1}{2} \alpha_1 + \frac{1}{2^n} \binom{n-1}{0} \alpha_1 + \frac{1}{2^n} \binom{n-1}{0} \cdot (\alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_n) = \frac{1}{2} \alpha_1 + \frac{1}{2^n} \binom{n-1}{0} (\alpha_1 + \\ \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_n) = \frac{1}{2} \alpha_1 + \frac{1}{2^n} \binom{n-1}{0} \cdot 1 = \frac{1}{2} \alpha_1 + \frac{1}{2^n} \binom{n-1}{0}$$

Nachfolgend ein Beispiel für Ta und TTa:

$$\begin{aligned} a &= (0,1; 0,3; 0,2; 0,1; 0,2; 0,1) & |a| &= 0,43 \\ \text{Ta} &= (0,06; 0,23; 0,26; 0,21; 0,18; 0,06) & |\text{Ta}| &= 0,466 \\ \text{TTa} &= (0,05; 0,19; 0,28; 0,26; 0,17; 0,05) & |\text{TTa}| &= 0,483 \\ B_6 &= (0,03; 0,16; 0,31; 0,31; 0,16; 0,03) & |B_6| &= 0,5 \end{aligned}$$

Sowohl der Betrag von a nähert sich dem Betrag von B_6 an, als auch die Objekte von a nähern sich den entsprechenden Objekten von B_6 an. Um diese Konvergenz zu beweisen, suche ich zunächst eine Bildungsvorschrift $\alpha_{i,k} = f(k)$ mit $k \in \mathbb{N}$, beweise die Richtigkeit dieser Bildungsvorschrift durch vollständige Induktion und bestimme den Grenzwert von $f(k)$. Dabei kürze ich die Objekte von B_i mit β_i ab:

$$\begin{aligned} \alpha_{i,0} &= 0 = f(0) \\ \alpha_{i,1} &= \frac{\alpha_{i,0} + \beta_i}{2} = \frac{0 + \beta_i}{2} = \frac{1 \cdot \beta_i}{2} = f(1) \\ \alpha_{i,2} &= \frac{\alpha_{i,1} + \beta_i}{2} = \frac{\frac{1 \cdot \beta_i}{2} + \beta_i}{2} = \frac{\frac{1 \cdot \beta_i}{2} + \frac{2 \cdot \beta_i}{2}}{2} = \frac{3 \cdot \beta_i}{4} = f(2) \\ \alpha_{i,3} &= \frac{\alpha_{i,2} + \beta_i}{2} = \frac{\frac{3 \cdot \beta_i}{4} + \beta_i}{2} = \frac{\frac{3 \cdot \beta_i}{4} + \frac{4 \cdot \beta_i}{4}}{2} = \frac{7 \cdot \beta_i}{8} = f(3) \\ \alpha_{i,4} &= \frac{\alpha_{i,3} + \beta_i}{2} = \frac{\frac{7 \cdot \beta_i}{8} + \beta_i}{2} = \frac{\frac{7 \cdot \beta_i}{8} + \frac{8 \cdot \beta_i}{8}}{2} = \frac{15 \cdot \beta_i}{16} = f(4) \end{aligned}$$

Die Bildungsvorschrift (Induktionsvoraussetzung) ist also vermutlich:

$$\alpha_{i,k} = f(k) = \frac{(2^k - 1)\beta_i}{2^k} = \frac{2^k \beta_i - \beta_i}{2^k} = \beta_i - \frac{\beta_i}{2^k}$$

Induktionsanfang: $\alpha_{i,0} = 0 = \beta_i - \beta_i = \beta_i - \frac{\beta_i}{2^0}$

Induktionsschritt von k nach $k+1$ (Induktionsvoraussetzung für $\alpha_{i,k}$ einsetzen):

$$\alpha_{i,k+1} = \frac{\alpha_{i,k} + \beta_i}{2} = \frac{(\beta_i - \frac{\beta_i}{2^k}) + \beta_i}{2} = \frac{2\beta_i - \frac{\beta_i}{2^k}}{2} = \beta_i - \frac{\beta_i}{2^{k+1}}$$

Grenzwert bestimmen:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\beta_i - \frac{\beta_i}{2^k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \beta_i - \lim_{k \rightarrow \infty} \beta_i \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2^k} = \beta_i - \beta_i \cdot 0^{69} = \beta_i.$$

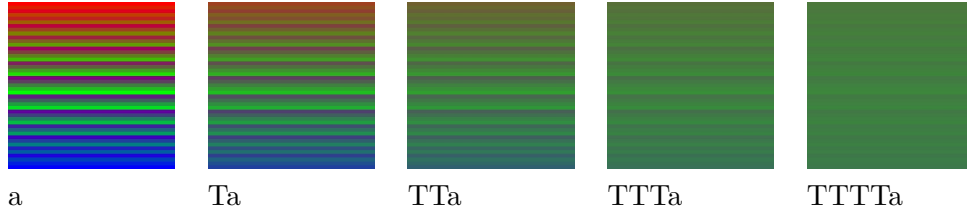
Falls $\alpha_i = \frac{\binom{n-1}{i-1}}{2^{n-1}}$ ist, so ist ebenfalls $\frac{1}{2} \frac{\binom{n-1}{i-1}}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} \binom{n-1}{i-1} = \frac{1}{2^n} \binom{n-1}{i-1} + \frac{1}{2^n} \binom{n-1}{i-1} = \frac{2}{2^n} \binom{n-1}{i-1} = \frac{\binom{n-1}{i-1}}{2^{n-1}}$. Somit ist auch $TB_n = B_n$.

⁶⁹Unter der Voraussetzung, dass die beiden Folgen $x_n = 0$ und $y_n = \frac{1}{n}$ gegen 0 konvergieren, konvergiert auch $z_n = \frac{1}{2^n}$ gegen 0, da $x_n \leq z_n \leq y_n$ ist.

Gesetz 48. $\lim_{k \rightarrow \infty} \underbrace{TT \dots T}_{k\text{-mal}} a = B_n$

Gesetz 49. $\lim_{k \rightarrow \infty} |\underbrace{TT \dots T}_{k\text{-mal}} a| = \frac{1}{2}$

Die nachfolgende Visualisierung zeigt an, dass die Geltungswerte gegen die Farbe Grün streben, aber nicht gegen ein leuchtendes Grün (0, 255, 0):



Der Grund dafür ist, dass Ta nicht gegen $M_3 = (0; 1; 0)$, sondern gegen $B_3 = (0,25; 0,5; 0,25)$ konvergiert. Das heißt, dass nicht nur genau die Mitte betont wird, sondern analog zur Binomialverteilung (in geringerem Maße) auch die Objekte links und rechts der Mitte, wodurch der mittlere Wert wegen der Summe 1 zwangsläufig kleiner als 1 wird.

6.4.2 Die Zentration mit Hilfe einer Umschichtung

Möchte man hingegen, dass Ta gegen M_n bzw. M'_n und nicht gegen B_n strebt, so ist eine andere Definition notwendig. Für diese Definition wäre es naheliegend, für die linke Hälfte des Geltungswertes eine Veritation und für die rechte Hälfte eine inverse Veritation zu verwenden. Ich möchte jedoch, bevor ich diese Art der Zentration definiere, auf 2 Besonderheiten hinweisen: Beschränken wir uns zunächst auf Geltungswerte mit geradem n : Egal, ob ich sortiere, stauche oder umschichte, die Summen in den beiden Hälften bleiben unverändert. Das obige Beispiel $a = (0,1; 0,3; 0,2; 0,1; 0,2; 0,1)$ kann also bestenfalls zu $(0; 0; 0,6; 0,4; 0; 0)$ und nicht zu $M'_6 = (0; 0; 0,5; 0,5; 0; 0)$ werden, da $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0,6$ und $\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 = 0,4$ ist. Ist n hingegen ungerade, und ich entscheide mich bei der Definition dieser Zentration für die Veritation bzw. inverse Veritation durch Umschichtung (s. Kap. 6.3.2), so bekommt das mittlere Objekt gleich zweimal prozentuale Anteile zugewiesen, und zwar von links und von rechts.

Definition 22. Durch die *Zentration* $T_x a$ eines Geltungswertes $a = (\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_n)$ gehen die Objekte α_i unter der Bedingung, dass $0 \leq x \leq 1$ und $x \in \mathbb{Q}$ ist, über in

$$f_{i,T_x}(\alpha_i) = \begin{cases} (1-x)\alpha_i & \text{falls } i = 1 \text{ oder } i = n \\ (1-x)\alpha_i + x\alpha_{i-1} & \text{falls } 1 < i < \frac{n}{2} \\ \alpha_i + x\alpha_{i-1} & \text{falls } i = \frac{n}{2} \\ \alpha_i + x\alpha_{i-1} + x\alpha_{i+1} & \text{falls } i = \frac{n+1}{2} \\ \alpha_i + x\alpha_{i+1} & \text{falls } i = \frac{n+2}{2} \\ (1-x)\alpha_i + x\alpha_{i+1} & \text{falls } \frac{n+2}{2} < i < n \end{cases}$$

Für den Fall $i = \frac{n}{2}$ oder $i = \frac{n+2}{2}$ ist n gerade, bei $i = \frac{n+1}{2}$ ist n ungerade.

Die beiden Abbildungsmatrizen für den Fall, dass n gerade bzw. ungerade ist, sind:

$$T_{xa} \stackrel{\wedge}{=} \vec{a} \cdot \begin{pmatrix} 1-x & x & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-x & x & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1-x & x & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & x & 1-x & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x & 1-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x & 1-x \end{pmatrix}$$

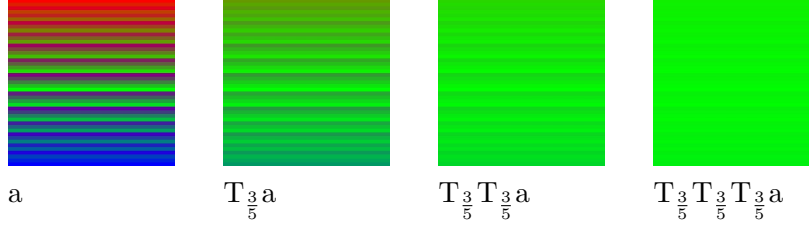
$$T_{xa} \stackrel{\wedge}{=} \vec{a} \cdot \begin{pmatrix} 1-x & x & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-x & x & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1-x & x & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x & 1-x & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & x & 1-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x & 1-x \end{pmatrix}$$

2 Beispiele sollen diese Zentration veranschaulichen, wobei n einmal ungerade und einmal gerade ist:

$$\begin{aligned} a &= (0,1; 0,2; 0,2; 0,3; 0,2), |a| = 0,575 > 0,5 = |(0; 0; 1; 0; 0)| \\ T_{\frac{9}{10}} a &= (0,01; 0,11; 0,65; 0,21; 0,02), |T_{\frac{9}{10}} a| = 0,53 \\ T_{\frac{9}{10}} T_{\frac{9}{10}} a &= (0,001; 0,02; 0,938; 0,039; 0,002), |T_{\frac{9}{10}} T_{\frac{9}{10}} a| = 0,50525 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= (0,1; 0,3; 0,2; 0,1; 0,2; 0,1), |a| = 0,43 < 0,48 = |(0; 0; 0,6; 0,4; 0; 0)| \\ T_{\frac{9}{10}} a &= (0,01; 0,12; 0,47; 0,28; 0,11; 0,01), |T_{\frac{9}{10}} a| = 0,478 \\ T_{\frac{9}{10}} T_{\frac{9}{10}} a &= (0,001; 0,021; 0,578; 0,379; 0,02; 0,001), |T_{\frac{9}{10}} T_{\frac{9}{10}} a| = 0,4798 \end{aligned}$$

Die Visualisierung der 45 Geltungswerte zu RGB-Farben ergibt ($n = 3$, und somit ungerade, und $x = \frac{3}{5}$):



Falls $x = 0$ ist, lässt sich in den 6 Termen der Definition leicht nachrechnen, dass α_i wieder zu α_i wird:

Gesetz 50. $T_0 a = a$

Falls $x = 1$ und n ungerade ist, ist:

$$\begin{aligned}
 T_1 a &= (0; \alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_{\frac{n-3}{2}}; \alpha_{\frac{n-1}{2}} + \alpha_{\frac{n+1}{2}} + \alpha_{\frac{n+3}{2}}; \alpha_{\frac{n+5}{2}}; \dots; \alpha_{n-1}; \alpha_n; 0) \\
 T_1 T_1 a &= (0; 0; \alpha_1; \dots; \alpha_{\frac{n-5}{2}}; \alpha_{\frac{n-3}{2}} + \alpha_{\frac{n-1}{2}} + \alpha_{\frac{n+1}{2}} + \alpha_{\frac{n+3}{2}} + \alpha_{\frac{n+5}{2}}; \dots; \alpha_{n-1}; \alpha_n; 0; 0) \\
 &\dots \\
 \underbrace{T_1 T_1 \dots T_1 a}_{\frac{n-1}{2}-mal} &= (\underbrace{0; \dots; 0}_{\frac{n-1}{2}-mal}; \alpha_1 + \dots + \alpha_n; \underbrace{0; \dots; 0}_{\frac{n-1}{2}-mal}) = (\underbrace{0; \dots; 0}_{\frac{n-1}{2}-mal}; 1; \underbrace{0; \dots; 0}_{\frac{n-1}{2}-mal})
 \end{aligned}$$

Falls $x = 1$ und n gerade ist, ist:

$$\begin{aligned}
 T_1 a &= (0; \alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_{\frac{n-4}{2}}; \alpha_{\frac{n-2}{2}} + \alpha_{\frac{n}{2}}; \alpha_{\frac{n+2}{2}} + \alpha_{\frac{n+4}{2}}; \alpha_{\frac{n+6}{2}}; \dots; \alpha_{n-1}; \alpha_n; 0) \\
 T_1 T_1 a &= (0; 0; \alpha_1; \dots; \alpha_{\frac{n-6}{2}}; \alpha_{\frac{n-4}{2}} + \alpha_{\frac{n-2}{2}} + \alpha_{\frac{n}{2}}; \alpha_{\frac{n+2}{2}} + \alpha_{\frac{n+4}{2}} + \alpha_{\frac{n+6}{2}}; \dots; \alpha_n; 0; 0) \\
 &\dots \\
 \underbrace{T_1 T_1 \dots T_1 a}_{\frac{n-2}{2}-mal} &= (\underbrace{0; \dots; 0}_{\frac{n-2}{2}-mal}; \alpha_1 + \dots + \alpha_{\frac{n}{2}}; \alpha_{\frac{n+2}{2}} + \dots + \alpha_n; \underbrace{0; \dots; 0}_{\frac{n-2}{2}-mal})
 \end{aligned}$$

Gesetz 51. Falls n ungerade ist, ist:

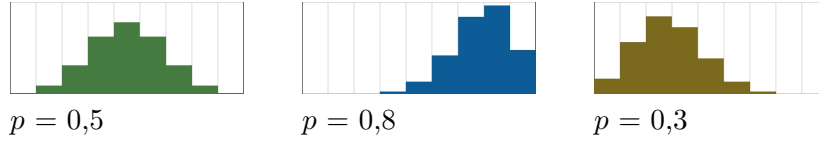
$$\underbrace{T_1 T_1 \dots T_1 a}_{\frac{n-1}{2}-mal} = (\underbrace{0; \dots; 0}_{\frac{n-1}{2}-mal}; 1; \underbrace{0; \dots; 0}_{\frac{n-1}{2}-mal})$$

Falls n gerade ist, ist:

$$\underbrace{T_1 T_1 \dots T_1 a}_{\frac{n-2}{2}-mal} = (\underbrace{0; \dots; 0}_{\frac{n-2}{2}-mal}; \alpha_1 + \dots + \alpha_{\frac{n}{2}}; \alpha_{\frac{n+2}{2}} + \dots + \alpha_n; \underbrace{0; \dots; 0}_{\frac{n-2}{2}-mal})$$

6.4.3 Der p -Junkt

Ich möchte noch einmal auf die Zentration Ta mit Hilfe der Binomialverteilung zurückkommen: Um eine Zentration zu definieren, war es sinnvoll, $p = 0,5$ zu setzen. Doch was wäre, wenn p frei aus dem Intervall $[0, 1]$ gewählt werden könnte? Dazu zunächst ein Blick auf die graphische Darstellung von 3 Wahrscheinlichkeitsfunktionen für Binomialverteilungen mit $n = 8$ und 3 verschiedenen Werten für p :



Während die 1. Abbildung (wie zu erwarten) wie ein Diagramm für einen Geltungswert nach mehrfacher Zentration TT...Ta aussieht, erinnern die 2. und die 3. Abbildung an ein Diagramm zur Veritation bzw. zur inversen Veritation. Das heißt, dass ich bei frei wählbarem Parameter $p \in [0,1]$ einen Junktoren erhalte, der je nach p sowohl eine Zentration als auch eine Veritation und eine inverse Veritation ist:

Definition 23. Der p -Junktor⁷⁰ ${}^P\mathbf{T}_p$ bildet einen Geltungswert $a = (a_1; a_2; \dots; a_n)$ unter der Bedingung $p \in \mathbb{Q}$ und $0 \leq p \leq 1$ folgendermaßen ab:

$${}^P\mathbf{T}_p a := (\frac{1}{2}\alpha_1 + \frac{1}{2}\binom{n-1}{0}(1-p)^{n-1}; \frac{1}{2}\alpha_2 + \frac{1}{2}\binom{n-1}{1}p(1-p)^{n-2}; \frac{1}{2}\alpha_3 + \frac{1}{2}\binom{n-1}{2}p^2(1-p)^{n-3}; \dots; \frac{1}{2}\alpha_n + \frac{1}{2}\binom{n-1}{n-1}p^{n-1}).$$

Durch ${}^P\mathbf{T}_p a$ gehen die Objekte a_i über in

$$f_{i, {}^P\mathbf{T}_p}(\alpha_i) = \frac{1}{2}\alpha_i + \frac{1}{2}\binom{n-1}{i-1}p^{i-1}(1-p)^{n-i}.$$

Falls $p = 0$ ist, ist ${}^P\mathbf{T}_p a$ eine inverse Veritation.

Falls $p = 0,5$ ist, ist ${}^P\mathbf{T}_p a = \mathbf{T}a$ eine Zentration.

Falls $p = 1$ ist, ist ${}^P\mathbf{T}_p a$ eine Veritation.

Ist $p = 0$ und $i = 1$, so ist (wg. $0^0 = 1$)

$$f_{1, {}^P\mathbf{T}_0}(\alpha_1) = \frac{1}{2}\alpha_1 + \frac{1}{2} \cdot \binom{n-1}{1-1} \cdot 0^{1-1} \cdot (1-0)^{n-1} = \frac{1}{2}\alpha_1 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}\alpha_1 + \frac{1}{2}$$

Ist $p = 0$ aber $i > 1$, so ist

$$f_{i, {}^P\mathbf{T}_0}(\alpha_i) = \frac{1}{2}\alpha_i + \frac{1}{2} \cdot \binom{n-1}{i-1} \cdot 0^{i-1} \cdot (1-0)^{n-i} = \frac{1}{2}\alpha_i + \frac{1}{2} \cdot \binom{n-1}{i-1} \cdot 0 \cdot 1 = \frac{1}{2}\alpha_i$$

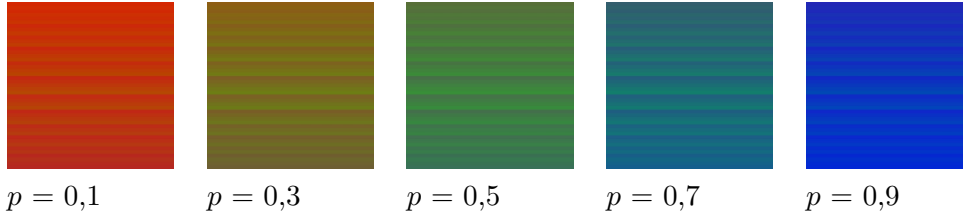
Die Rechnung für $p = 1$ verläuft entsprechend.

Gesetz 52. ${}^P\mathbf{T}_0 a = (\frac{1}{2}\alpha_1 + \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\alpha_2; \dots; \frac{1}{2}\alpha_n)$ und

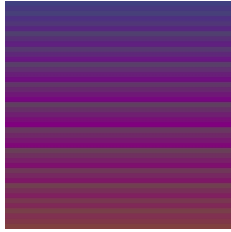
$${}^P\mathbf{T}_1 a = (\frac{1}{2}\alpha_1; \dots; \frac{1}{2}\alpha_{n-1}; \frac{1}{2}\alpha_n + \frac{1}{2})$$

In der Übersicht über die unterschiedlichen Veritationen auf der Seite 81 findet sich ein Beispiel für ${}^P\mathbf{T}_p a$ als Veritation mit $p = \frac{21}{25} > 0,5$. Die nachfolgende Visualisierung zeigt die Arbeitsweise von ${}^P\mathbf{T}_p a$ bzw. von ${}^P\mathbf{T}_p {}^P\mathbf{T}_p {}^P\mathbf{T}_p a$ (damit die Farben deutlicher hervortreten) und zwar bei unterschiedlichen Werten für p :

⁷⁰Der Name p -Junktor geht zurück auf den Gamma-Operator (γ -Operator) der Fuzzy-Logik (s. [25] Rommelfanger, S. 28). So wie der γ -Operator je nach Wert von γ eine Konjunktion oder Disjunktion ist, so ist der p -Junktor je nach Wert von p eine inverse Veritation, eine Zentration oder eine Veritation.



${}^PT_{0,3}{}^PT_{0,3}{}^PT_{0,3}a$ ergibt eine (dunkle) Mischung aus Rot und Grün, nämlich Braun und ${}^PT_{0,7}{}^PT_{0,7}{}^PT_{0,7}a$ ergibt eine (dunkle) Mischung aus Grün und Blau, nämlich Cyan bzw. Türkis. Doch nicht alle Farben sind durch Junktoren zu erzeugen bzw. überhaupt durch Geltungswerte bzw. Tripel einer Prozentuallogik darstellbar, denn die Objekte der Tripel zu den Farben Gelb = (1; 1; 0), Schwarz = (0; 0; 0) und Weiß = (1; 1; 1) ergeben nicht die Summe 1. Bleibt noch Violett = (0,5; 0; 0,5) als Rot-Blau-Mischung. Dazu möchte ich jedoch keinen neuen Junktor definieren, der Geltungswerte so abbildet, dass beide Extreme links und rechts gestärkt werden, sondern auf bereits bekannte Junktoren zurückgreifen, um jeweils gegen Violett zu konvergieren. Dazu werden die 45 Tripel bzw. die entsprechenden Farben zunächst durch $T_{\frac{1}{2}}a$ grüner, um dann die 3 Objekte der Tripel durch $Q_{-\frac{1}{2}}T_{\frac{1}{2}}a$ wie bei einer Restation zu „negieren“:



$Q_{-\frac{1}{2}}T_{\frac{1}{2}}a$

6.5 Junktoren mit Hilfe von Geltungswerten

6.5.1 Der einstellige d -Junktor

In Kapitel 6.4.1 habe ich die Zentration Ta definiert, indem ich jeweils paarweise von den Objekten α_i und den entsprechenden Objekten von B_n das arithmetische Mittel berechnet habe. Doch es gibt keinen Grund, sich bei der Mittelwertberechnung auf B_n zu beschränken. Verwende ich andere (hervorstechende) Geltungswerte an Stelle von B_n , so erhalte ich ...

- ... mit W_n eine Veritation,
- ... mit F_n eine inverse Veritation,
- ... mit K_n eine Nivellierung wie bei RRa oder Q_ya mit $0 < y < 1$,
- ... mit M_n bzw. M'_n eine Zentration.

Es ist jedoch nicht nötig, sich auf hervorstechende Geltungswerte zu beschränken. Berechne ich jeweils paarweise von den Objekten γ_i eines beliebigen Geltungswertes $G_n = (\gamma_1; \gamma_1; \gamma_1; \dots; \gamma_n)$ und den entsprechenden Objekten α_i von a das arithmetische Mittel, so nähert sich das Ergebnis dem Geltungswert G_n an. Der entsprechende Beweis wurde bereits im Zusammenhang mit Ta auf der Seite 74 geführt. Um Mittelwerte zu berechnen, möchte ich keinen neuen Junktor definieren, sondern auf den zweistelligen d -Junktor ${}^D Y_d$ aus Kapitel 8.5 vorgreifen, dessen Funktion folgendermaßen definiert ist:

$$f_{i, {}^D Y_d}(\gamma_i, \alpha_i) := (1 - d) \cdot \gamma_i + d \cdot \alpha_i \text{ mit } 0 \leq d \leq 1$$

Die Funktion $f_{i, {}^D Y_d}(\gamma_i, \alpha_i)$ ist eigentlich eine Funktion von γ_i und α_i . Da aber γ_i stets gleich bzw. eine Konstante ist, kann die Funktion auch als einstelliger Junktor interpretiert werden. In diesem Fall könnte man auch $f_{i, {}^D Y_d, \gamma_i}(\alpha_i)$ statt $f_{i, {}^D Y_d}(\gamma_i, \alpha_i)$ bzw. ${}^D Y_{d, G_n} a$ statt ${}^D Y_d G_n a$ schreiben. Ist der Parameter $d = \frac{1}{2}$, so handelt es sich um das arithmetische Mittel, ist der Parameter $d = 0$, so ist das Ergebnis G_n und ist der Parameter $d = 1$, so ist das Ergebnis a . Dazu 2 Beispiele für eine Zentration mit $G_n = M'_n$:

$$a = (0,1; 0,4; 0,3; 0,2)$$

$$M'_n = (0; 0,5; 0,5; 0)$$

$${}^D Y_{\frac{1}{2}} M'_n a = (0,05; 0,45; 0,4; 0,1)$$

$${}^D Y_{\frac{3}{10}} M'_n a = (0,03; 0,47; 0,44; 0,06)$$

Für die k -fache Anwendung eines einstelligen d -Junktors gilt:

$$\textbf{Gesetz 53.} \quad \underbrace{f_{i, {}^D Y_d}(f_{i, {}^D Y_d}(\dots f_{i, {}^D Y_d}(\gamma_i \alpha_i)))}_{k\text{-mal}} = \left(\sum_{j=0}^{k-1} d^j (1 - d) \gamma_i \right) + d^k \alpha_i,$$

denn wenn $k = 1$ ist, ist

$$\left(\sum_{j=0}^{1-1} d^j (1 - d) \gamma_i \right) + d^1 \alpha_i = (1 - d) \cdot \gamma_i + d \cdot \alpha_i$$

und wenn k um 1 größer wird, also $(1 - d) \cdot \gamma_i + d \cdot \alpha_i$ für α_i eingesetzt wird, ist

$$\left(\sum_{j=0}^{k-1} d^j (1 - d) \gamma_i \right) + d^k \cdot ((1 - d) \cdot \gamma_i + d \cdot \alpha_i) =$$

$$\left(\sum_{j=0}^{k-1} d^j (1 - d) \gamma_i \right) + d^k \cdot (1 - d) \cdot \gamma_i + d^k \cdot d \cdot \alpha_i =$$

$$\left(\sum_{j=0}^k d^j (1 - d) \gamma_i \right) + d^{k+1} \cdot \alpha_i$$

Eine Veritation von a (s.o.) wäre z.B. ${}^D Y_{\frac{3}{10}} W_n a = (0,03; 0,12; 0,09; 0,76)$.

Nachdem ich nun mit ${}^D Y_d W_n a$ eine (letzte) Veritation vorgestellt habe, möchte ich an dieser Stelle anhand des Beispiels $a = (0,1; 0,4; 0,3; 0,2)$ eine Übersicht geben über alle bisher vorgestellten Veritationen, nämlich durch Sortieren, innerhalb der Menge $\mathfrak{G}_{j,n}$, durch Weitergabe, durch Stauchung, durch Stauchung und Streckung, durch Umschichten, mit Hilfe der Binomialverteilung und zuletzt mit Hilfe der Mittelwertberechnung. Als Vorgabe soll jeweils das letzte Objekt α_4 durch die jeweilige Veritation zu 0,4 werden. Zur besseren Vergleichbarkeit wurden bei 4 Ergebnissen die Objekte, die als Dezimalbruch dargestellt sind, auf 2 Stellen nach dem Komma gerundet:

	Be- trag
$a = (0,1; 0,4; 0,3; 0,2) = (\frac{1}{10}; \frac{4}{10}; \frac{3}{10}; \frac{2}{10})$	0,53
$W a = (0,1; 0,3; 0,2; 0,4) = (\frac{1}{10}; \frac{3}{10}; \frac{2}{10}; \frac{4}{10})$	0,63
$\underbrace{\#W_m \dots \#W_m}_{9-mal} a = (0,3; 0,1; 0,2; 0,4) = (\frac{3}{10}; \frac{1}{10}; \frac{2}{10}; \frac{4}{10})$	0,57
$W_m W_m a = (0,1; 0,4; 0,1; 0,4) = (\frac{1}{10}; \frac{4}{10}; \frac{1}{10}; \frac{4}{10})$	0,60
$*W_{\frac{3}{5}} a = (0; 0,07; 0,53; 0,4) \approx (\frac{0}{15}; \frac{1}{15}; \frac{8}{15}; \frac{6}{15})$	0,78
$**W_{\frac{1}{2}, \frac{7}{10}} a = (0,07; 0,2; 0,33; 0,4) \approx (\frac{5}{70}; \frac{14}{70}; \frac{23}{70}; \frac{28}{70})$	0,69
$W_{\frac{2}{3}} a = (0,03; 0,2; 0,37; 0,4) \approx (\frac{1}{30}; \frac{6}{30}; \frac{11}{30}; \frac{12}{30})$	0,71
${}^P T_{\frac{21}{25}} a = (0,05; 0,23; 0,32; 0,4) \approx (\frac{3253}{62500}; \frac{14516}{62500}; \frac{19959}{62500}; \frac{24772}{62500})$	0,69
${}^D Y_{\frac{3}{4}} W_n a = (0,075; 0,3; 0,225; 0,4) = (\frac{3}{40}; \frac{12}{40}; \frac{9}{40}; \frac{16}{40})$	0,65

6.5.2 Zeilenstochastische Matrizen

Alle bisher im Zusammenhang mit der Definition von einstelligen Junktoren vorgestellten Matrizen hatten jeweils stets die Zeilensumme 1, was beispielhaft an der 1. Zeile der Matrix zu $T a$ auf der Seite 73 nachzurechnen ist:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^n} \binom{n-1}{0} + \frac{1}{2^n} \binom{n-1}{1} + \dots + \frac{1}{2^n} \binom{n-1}{n-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^n} ((\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \dots + \binom{n-1}{n-1})) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^n} 2^{n-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Allgemein ist das Produkt aus einem Vektor und einer quadratischen Matrix:

$$(\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_n) \cdot \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \cdot m_{11} & \alpha_1 \cdot m_{12} & \cdots & \alpha_1 \cdot m_{1n} \\ +\alpha_2 \cdot m_{21} & +\alpha_2 \cdot m_{22} & \cdots & +\alpha_2 \cdot m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ +\alpha_n \cdot m_{n1} & +\alpha_n \cdot m_{n2} & \cdots & +\alpha_n \cdot m_{nn} \end{pmatrix}$$

Wenn die Zeilensumme der Matrix 1 ist, dann ist die Summe der Objekte 1:

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha_1 \cdot m_{11} & +\alpha_1 \cdot m_{12} & \cdots & +\alpha_1 \cdot m_{1n} & & & \\ +\alpha_2 \cdot m_{21} & +\alpha_2 \cdot m_{22} & \cdots & +\alpha_2 \cdot m_{2n} & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \\ +\alpha_n \cdot m_{n1} & +\alpha_n \cdot m_{n2} & \cdots & +\alpha_n \cdot m_{nn} & & & \end{array} =$$

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha_1 \cdot (m_{11} + m_{12} + \cdots + m_{1n}) & & \alpha_1 \cdot 1 & & \alpha_1 & & \\ +\alpha_2 \cdot (m_{21} + m_{22} + \cdots + m_{2n}) & & +\alpha_2 \cdot 1 & & +\alpha_2 & & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ +\alpha_n \cdot (m_{n1} + m_{n2} + \cdots + m_{nn}) & & +\alpha_n \cdot 1 & & +\alpha_n & & \end{array} =$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{array} = 1$$

Somit würden auch n Geltungswerte (die nicht unbedingt n Objekte enthalten müssen) mit jeweils gleich vielen Objekten, interpretiert als Zeile einer Matrix (die nicht unbedingt quadratisch sein muss), einen denkbaren (wenn auch nicht unbedingt immer sinnvollen) Junktor definieren.

Abschließend ein Beispiel mit einer beliebigen zeilenstochastischen Matrix, wobei der Vektor einen Geltungswert und die Matrix einen einstelligen Junktor repräsentiert:

$$\left(\frac{1}{5}; \frac{2}{5}; \frac{0}{5}; \frac{2}{5}\right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{0}{4} & \frac{0}{4} & \frac{0}{4} & \frac{4}{4} \\ \frac{0}{4} & \frac{0}{4} & \frac{2}{4} & \frac{2}{4} \\ \frac{0}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{2}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \left(\frac{2}{20}; \frac{2}{20}; \frac{6}{20}; \frac{10}{20}\right)$$

6.6 Ergänzende Junktoren und innere Abbildungen

Bereits am Anfang dieses Kapitels über einstellige ergänzende Junktoren auf Seite 54 wurde darauf hingewiesen, dass ergänzende Junktoren Geltungswerte aus der Menge $\mathfrak{G}_{j,n}$ nicht unbedingt wieder auf Geltungswerte aus der gleichen Menge abbilden. Das kann bei einer Anwendung ein Problem sein, muss es aber nicht. Liegen die Daten einer Datenreihe als Brüche oder Dezimalbrüche vor, so sind sie auch nach der Anwendung ergänzender Junk-

toren wieder Brüche oder Dezimalbrüche, allerdings eventuell mit größeren Nennern oder mehr Stellen nach dem Komma, vielleicht sogar unendlich periodisch. Liegen die Daten jedoch als natürliche Zahlen vor und sollen auch nach der Anwendung wieder eine natürliche Zahl sein, so sind einige Überlegungen notwendig, wie das zu bewerkstelligen ist, was ich wiederum am Beispiel der Veritation einer Klassenarbeit durchspielen möchte. Die Verbesserung von Notenspiegeln/Prüfungsergebnissen habe ich bereits zu Beginn des Kapitels 4.3 ausführlich thematisiert.

Von den 8 auf Seite 81 beschriebenen Veritationen sind 3 Veritationen nicht ergänzend und somit stellt sich das Problem mit ganzen Zahlen hier nicht. Allerdings ist es abwegig, einen Notenspiegel durch die unabhängige Veritation W_a zu verbessern, indem die Einträge im Notenspiegel aufsteigend sortiert werden. Ähnlich abwegig ist es, den Notenspiegel durch die innere Veritation ${}^{\#}W_{ma}$ zu verbessern, indem aus der Menge aller nach Durchschnittsnote/logischem Betrag angeordneten möglichen Notenspiegel der nächste mit besserer Durchschnittsnote ausgewählt wird, da dieser Notenspiegel sehr stark vom ursprünglichen abweichen kann, obwohl die Durchschnittsnote bzw. der logische Betrag sich nur minimal geändert hat (s. Ende von Kap. 5.2).

Anders sieht es mit der Veritation W_{ma} durch Weitergabe aus. Angenommen, eine Klassenarbeit ist so ausgefallen, dass die Arbeit wegen genau einer mangelhaften Note zuviel von der Schulleitung genehmigt werden müsste, was die Lehrkraft aber, aus welchen Gründen auch immer, nicht möchte. Hier wäre es, wie bereits am Anfang von Kapitel 5.3 beschrieben, naheliegend, genau eine mangelhafte Klassenarbeit um genau eine Note zu verbessern.

Der nachfolgende Notenspiegel zeigt das Ergebnis einer Klassenarbeit von 30 Schüler/-innen, bei der 50 % der Arbeiten schlechter als ausreichend ausgefallen sind. Daneben ist der entsprechenden Notenspiegel, nachdem 6 mangelhafte Arbeiten zu einer ausreichenden Arbeit verbessert wurden, damit „nur noch“ 30 % der Arbeiten schlechter als ausreichend sind:

1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
1	2	4	8	10	5	1	2	4	14	4	5

Nun fragen (sich) die Schüler/-innen, deren Note nicht mangelhaft war, zu Recht, warum sie an dieser Verbesserung lediglich der mangelhaften Noten nicht teilhaben, zumal die Arbeit offensichtlich insgesamt schlecht ausgefallen ist. Somit kommen jetzt die ergänzenden Veritationen ${}^*W_{xa}$, W_{xa} und ${}^P T_{pa}$ ins Spiel:

$(\frac{5}{30}; \frac{10}{30}; \frac{8}{30}; \frac{4}{30}; \frac{2}{30}; \frac{1}{30})$ ist der Geltungswert zum ursprünglichen Notenspiegel bzw.:

$$a = (0,16666...; 0,33333...; 0,26666...; 0,13333...; 0,06666...; 0,03333...)$$

$$*W_{\frac{7}{8}}a = (0,04761...; 0,26190...; 0,34285...; 0,20952...; 0,09523...; 0,04285...)$$

$$W_{\frac{2}{3}}a = (0,05555...; 0,22222...; 0,31111...; 0,22222...; 0,11111...; 0,07777...)$$

$$^PT_{\frac{2}{3}}a = (0,08539...; 0,18724...; 0,21563...; 0,23127...; 0,19794...; 0,08251...)$$

Die entsprechenden Notenspiegel sind, wenn man die Objekte mit 30, der Anzahl der Schüler/-innen, multipliziert, die Ergebnisse nach 3 Stellen nach dem Komma abschneidet und die Reihenfolge wieder umdreht:

1	2	3	4	5	6
1,285	2,857	6,285	10,285	7,857	1,428
2,333	3,333	6,666	9,333	6,666	1,666
2,475	5,938	6,938	6,469	5,617	2,561

Um wieder auf ganze Zahlen zu kommen, ist es naheliegend, die Anzahlen zu runden:

1	2	3	4	5	6
1	3	6	10	8	1
2	3	7	9	7	2
2	6	7	6	6	3

Alle 3 Veritationen erfüllen die Bedingung, dass jetzt nur (maximal) 9 Arbeiten schlechter als ausreichend ausgefallen sind. Allerdings ist die Summe der Klassenarbeiten beim 1. Notenspiegel nicht mehr 30, sondern 29. Was ist hier zu tun?

- Es erscheint sinnvoll, diejenige Anzahl um 1 heraufzusetzen, die beim Abrunden am stärksten verändert wurde. Das ist im obigen Beispiel die Zahl 1,428 für ungenügend, die dann nicht zu 1 abgerundet, sondern zu 2 aufgerundet würde. Allerdings würde dann das Ziel verfehlt, dass nur maximal 9 Arbeiten schlechter als ausreichend sind.
- Man könnte den Parameter von $*W_x$ leicht modifizieren, so dass nach dem Runden die Summe wieder 30 ergibt. Das wäre mit $x = \frac{17}{20} = 0,85$ statt $x = \frac{7}{8} = 0,875$ der Fall: $*W_{\frac{17}{20}}a$ ist auf 3 Stellen nach dem Komma abgeschnitten (0.019; 0.245; 0.360; 0.227; 0.101; 0.045). Der entsprechende Notenspiegel ist dann 1,352 | 3,058 | 6,823 | 10,823 | 7,352 | 0,588 und gerundet 1 | 3 | 7 | 11 | 7 | 1 mit der Summe 30 und 8 Arbeiten schlechter als ausreichend.
- Da es sich bei $*W_xa$ um eine Veritation handelt, wäre es eigentlich naheliegend, das Objekt α_n zu vergrößern bzw. die Anzahl sehr guter

Noten um 1 zu erhöhen. Das ist in diesem Fall auch nicht abwegig, da auch die beiden anderen Veritationen zu jeweils 2 sehr guten Klassenarbeiten geführt haben.

- Sinnvoller erscheint es mir, eine der beiden mittleren Anzahlen um 1 zu erhöhen, damit sich die Durchschnittsnote nur minimal verändert. Die Durchschnittsnote für den Notenspiegel $1 \mid 3 \mid 6 \mid 10 \mid 8 \mid 1$ ist, bezogen auf 29 Schüler/-innen, 3,62. Die beiden modifizierten Notenspiegel $1 \mid 3 \mid 7 \mid 10 \mid 8 \mid 1$ und $1 \mid 3 \mid 6 \mid 11 \mid 8 \mid 1$ ergeben eine Durchschnittsnote von 3,6 und 3,63.

Bleibt noch, einen Blick auf den einstelligen d -Junktor zu werfen, und zwar als Veritation ${}^{\text{DY}}_{\frac{23}{40}}W_n\mathbf{a}$, als Zentration ${}^{\text{DY}}_{\frac{23}{40}}M'_n\mathbf{a}$ und als leicht modifizierte Zentration ${}^{\text{DY}}_{\frac{23}{40}}G_n\mathbf{a}$ mit $G_n = (0; 0; 0,5; 0,4; 0,1; 0)$. Die jeweils neuen Klassenspiegel sind dann:

	1	2	3	4	5	6
${}^{\text{DY}}_{\frac{23}{40}}W_n\mathbf{a} =$	13	1	2	5	6	3
${}^{\text{DY}}_{\frac{23}{40}}M'_n\mathbf{a} =$	1	1	9	11	6	3
${}^{\text{DY}}_{\frac{23}{40}}G_n\mathbf{a} =$	1	2	7	11	6	3

Alle 3 Abbildungen erfüllen mit $d = \frac{23}{40}$ die Bedingung, dass nur maximal 9 Arbeiten schlechter als ausreichend sind, zumal die beiden ersten Objekte von W_n , M'_n und G_n jeweils 0 sind. Allerdings ist der 1. Notenspiegel angesichts der Tatsache, dass die Arbeit sehr schlecht ausgefallen war, völlig unangemessen, da 13 mal die Note 1 berechnet wurde. Der 2. Notenspiegel ist demgegenüber deutlich passender. Allerdings gibt es jetzt, verglichen mit dem ursprünglichen Ergebnis, nur noch eine Note 2, was der Absicht, das Ergebnis der Arbeit zu verbessern, widerspricht. Außerdem ist die Summe der Schüler/-innen nicht 30, sondern 31. Der 3. Notenspiegel hat diese beiden Probleme nicht und erscheint angemessen.

Bei den bisherigen, formalen Überlegungen wurde allerdings aus den Augen verloren, dass Notengebung nicht nur eine arithmetische Berechnung, sondern in ganz besonderem Maße auch eine pädagogische Entscheidung ist. Ob, warum, mit welchen Junktoren und wie Datenreihen verändert werden, hängt folglich von der konkreten Anwendungssituation und ihren Rahmenbedingungen und Besonderheiten ab.

7 Die Konjugation als einstelliger paralleler Junktor

In Kapitel 3.3 legte die Formel $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ nahe, dass die Geltungswerte aus der Menge $\mathfrak{G}_{j,n}$ aus den Geltungswerten der beiden Mengen $\mathfrak{G}_{j,n-1}$ und $\mathfrak{G}_{j-1,n}$ gebildet wurden. Die Formel $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ ⁷¹ lässt nun vermuten, dass es zur Menge $\mathfrak{G}_{j,n}$ noch eine 2. Menge gibt, die gleichmächtig ist. Welche Menge ist das?

$$\binom{j+n-1}{n-1} = \binom{j+n-1}{(j+n-1)-(n-1)} = \binom{n+j-1}{j} = \binom{(n-1)+(j+1)-1}{(j+1)-1} = |\mathfrak{G}_{n-1,j+1}|$$

Die beiden gleichmächtigen Mengen sind identisch, falls $n-1 = j+n-1 - (n-1) \Leftrightarrow 0 = j - (n-1) \Leftrightarrow n-1 = j$ ist.

Gesetz 54. $|\mathfrak{G}_{j,n}| = |\mathfrak{G}_{n-1,j+1}|$. Falls $j \neq n-1$ ist, sind die beiden Mengen $\mathfrak{G}_{j,n}$ und $\mathfrak{G}_{n-1,j+1}$ disjunkt aber gleichmächtig, sonst identisch.

Zwei sehr kurze Beispiele für $n = 2$, $j = 2 \neq n-1$ und $n = 3$, $j = 1$ und somit $m = \binom{3}{1} = \binom{3}{2} = 3$ sind $\mathfrak{G}_{2,2} = \{(\frac{0}{2}; \frac{2}{2}), (\frac{1}{2}; \frac{1}{2}), (\frac{2}{2}; \frac{0}{2})\}$ und $\mathfrak{G}_{1,3} = \{(\frac{0}{1}; \frac{0}{1}; \frac{1}{1}), (\frac{0}{1}; \frac{1}{1}; \frac{0}{1}), (\frac{1}{1}; \frac{0}{1}; \frac{0}{1})\}$. Die beiden Mengen $\mathfrak{G}_{j,n}$ und $\mathfrak{G}_{n-1,j+1}$ haben gleich viele unterschiedliche Beträge $j(n-1)+1$ (s. Gesetz 2), nämlich $\frac{0}{2}$, $\frac{1}{2}$ und $\frac{2}{2}$, denn $j(n-1)+1 = (n-1)j+1 = (n-1)((j+1)-1)+1$.

Wenn die Mengen $\mathfrak{G}_{j,n}$ und $\mathfrak{G}_{n-1,j+1}$ gleichmächtig sind, dann muss es eine bijektive Abbildung von $\mathfrak{G}_{j,n}$ nach $\mathfrak{G}_{n-1,j+1}$ geben. Diese Abbildung möchte ich *Konjugation* nennen und dafür den Buchstaben U verwenden. Am einfachsten und naheliegensten wäre die Definition $Ua := \text{ge}_{n-1,j+1}(\text{nr}_{j,n}(a))$. Das heißt, das 1. Element der nach Betrag geordneten Menge $\mathfrak{G}_{j,n}$ wird auf das 1. Element der nach Betrag geordneten Menge $\mathfrak{G}_{n-1,j+1}$ abgebildet usw.

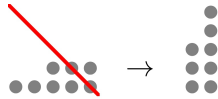
Aber gibt es auch eine paarweise Zuordnung, die unabhängig von einer Ordnungsrelation ist? Eine solche Zuordnung Ua möchte ich am Beispiel des Geltungswertes $a = (\frac{1}{6}; \frac{2}{6}; \frac{3}{6}; \frac{0}{6})$ aus der Menge $\mathfrak{G}_{6,4}$ demonstrieren, der auf einen Geltungswert aus der Menge $\mathfrak{G}_{4-1,6+1} = \mathfrak{G}_{3,7}$ eindeutig abgebildet werden soll. Dabei wird auch der enge Zusammenhang zwischen Geltungswerten und (ungeordneten) Zahlpartitionen deutlich:

Geltungswert (nur die Zähler)	(1; 2; 3; 0)
Berechnung des Betrages 8 (ebenfalls nur die Zähler)	$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 0$
Faktoren vertauschen und das Produkt 0 weglassen	$2 \cdot 1 + 3 \cdot 2$
Als Partition (aufsteigend ohne 0) schreiben	$1+1+2+2+2$
Das entsprechende Ferrers-Diagramm ist dann	



⁷¹[20] Matoušek und Nešetřil, S. 64

Dabei entspricht die Anzahl der Einträge im Ferrers-Diagramm dem Zähler des Betrages von a . Nun gibt es zu jedem Ferrers-Diagramm eindeutig ein konjugiertes Diagramm, indem man das Ferrers-Diagramm spiegelt⁷²:

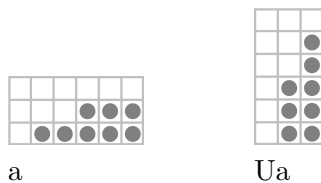


Bleibt noch, zu dem neuen Diagramm den zugehörigen Geltungswert eindeutig zu bestimmen:

Als Partition schreiben	$3+5$
Als Produkte schreiben	$1 \cdot 3 + 1 \cdot 5$
Faktoren vertauschen	$3 \cdot 1 + 5 \cdot 1$
Die Zahlen 1 bis 5 als 1. Faktor	$1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 1$

Nun wissen wir vom neuen Geltungswert $Ua = b$, dass die neuen Objekte $\beta_2 = \beta_3 = \beta_5 = 0$ (β_1 spielt bei der Berechnung des Betrages keine Rolle) und $\beta_4 = \beta_6 = 1$ sind. Doch welchen Wert hat β_1 und gibt es weitere Objekte β_7, β_8 usw. und welchen Wert haben sie? Da für die Elemente der Menge $\mathfrak{G}_{3,7}$ $n = 7$ ist, muss es ein Objekt β_7 geben. Und da es im konjugierten Ferrers-Diagramm rechts keine Säule der Höhe $6 = n - 1$ gibt, muss der Wert 0 sein. Da für die Elemente der Menge $\mathfrak{G}_{3,7}$ $j = 3$ ist, muss $\beta_1 = 1$ sein, da die Summe der Zähler bisher erst 2 ist. Somit ist $U(\frac{1}{6}; \frac{2}{6}; \frac{3}{6}; \frac{0}{6}) = (\frac{1}{3}; \frac{0}{3}; \frac{0}{3}; \frac{1}{3}; \frac{0}{3}; \frac{1}{3}; \frac{0}{3})$.

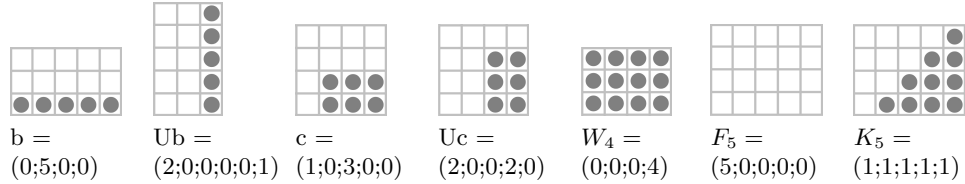
Das Verfahren, Ua über ein Ferrers-Diagramm zu bestimmen, wird beschleunigt, wenn ich das Diagramm rechts unten in ein Rechteck bzw. einem rechteckigen Raster der Breite j und der Höhe $n - 1$ eintrage, denn das Ferrers-Diagramm kann maximal aus j Säulen bestehen, die maximal $n - 1$ hoch sind. Die Anzahl der Säulen ist j , da jeder Zähler z_i eines Objektes z_i Säulen bildet (die auch die Höhe 0 haben können). Die Höhe der Säulen ist maximal $n - 1$, da das 1. Objekt α_1 Säulen der Höhe 0 bildet und somit das letzte Objekt α_n Säulen der Höhe $n - 1$. Ein Ferrers-Diagramm in einem Rechteck der Breite j und der Höhe $n - 1$ möchte ich *Ferrers-Rechteck* nennen.



Nun lassen sich die Zähler von a , nämlich $(1; 2; 3; 0)$, sehr einfach in das Rechteck übertragen, indem links eine Säule die Höhe 0, dann 2 Säulen die

⁷²[11] Halder, Heise S. 76

Höhe 1, 3 Säulen die Höhe 2 und keine Säule die Höhe 3 hat⁷³. Nach dem Spiegeln an einer Geraden mit der Steigung -1 durch die rechte untere Ecke hat das Diagramm zum neuen Geltungswert $Ua = b$ eine Säule der Höhe 0 (der Zähler von α_1 ist 1), keine Säulen der Höhe 1, 2, 4 und 6 (die Zähler von $\beta_2 = \beta_3 = \beta_5 = \beta_7$ sind 0) und jeweils 1 Säule der Höhen 3 und 5 (die Zähler von $\beta_4 = \beta_6$ sind 1). Nachfolgend noch einige weitere Beispiele (Wiederum sind nur die Zähler angegeben):



c und Uc sind beide aus der Menge $\mathfrak{G}_{4,5} = \mathfrak{G}_{5-1,4+1}$, aber $Uc \neq c$. Das wäre mit der zunächst angedachten Definition $Ua := \text{ge}_{n-1,j+1}(\text{nr}_{j,n}(a))$ anders gewesen.

Definition 24. Durch die parallele *Konjugation* Ua eines Geltungswertes $a = (a_1; a_2; \dots; a_n)$ geht a derart in Ua über, dass Ua demjenigen Ferrers-Rechteck entspricht, das aus dem zu a gehörenden Ferrers-Rechteck durch Spiegelung an einer Spiegelachse mit der Steigung -1 , die durch die rechte untere Ecke des Rechtecks geht, entsteht.

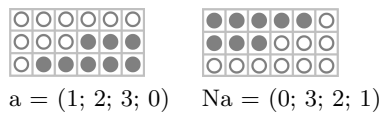
Da Ua einer Spiegelung entspricht, ergibt die Doppelspiegelung bzw. doppelte Konjugation UUa wiederum a .

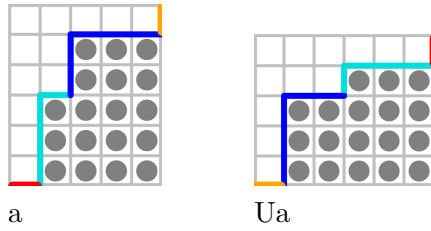
Die Anzahl der Einträge im Ferrers-Diagramm entspricht genau dem Zähler der Beträge der entsprechenden Geltungswerte. Das ist sehr gut an den letzten 3 Beispielen aus der obigen Abbildung zu sehen: $|W_4| = \frac{12}{12} = 1$, $|F_5| = \frac{0}{20} = 0$ und $|K_5| = \frac{10}{20} = 0,5$, da das zu K_n gehörende treppenförmige Ferrers-Diagramm genau die Hälfte der Rasterflächen belegt. Ist j nicht gleich n , sondern ein Vielfaches von n , so sind die Treppenstufen im Ferrers-Rechteck zu K_n entsprechend breiter.

Gesetz 55. $UUa = a$ und $|Ua| = |a|$

Nun möchte ich Ua durch einen Algorithmus bestimmen, ohne konkret eine Spiegelung ausführen zu müssen. Die unterschiedlichen Farben im Beispiel kennzeichnen die jeweils entsprechende Stelle im Ferrers-Rechteck:

⁷³Der „Rest“ des Diagramms zu a im Ferrers-Rechteck repräsentiert (nach einer Drehung um 180° bzw. einer Punktspiegelung) das Diagramm für Na , womit sich dann auch die Gesetze zur Negation mit einem Ferrers-Rechteck sehr einfach veranschaulichen lassen.





1. Schritt: Ist der Zähler k des 1. Objektes von a größer als 0, so endet Ua mit k Nullen:

Z.B. 1. Schritt: $a = (\mathbf{1}; 0; 0; 1; 0; 3; 0) \rightarrow Ua = (?; ?; ?; ?; ?; ?; \mathbf{0})$

2. bis vorletzter Schritt: Die Objekte von α_2 bis α_{n-1} werden in Blöcke von k Nullen, wobei $k = 0$ sein darf, und nachfolgend einem Zähler $l \neq 0$ aufgeteilt. Entsprechend wird rechts von Ua ein Zähler $k + 1$ und davor $l - 1$ Nullen eingefügt:

2. Schritt: $a = (1; \mathbf{0; 0; 1}; 0; 3; 0) \rightarrow Ua = (?; ?; ?; ?; \mathbf{3}; 0)$

3. Schritt: $a = (1; 0; 0; 1; \mathbf{0; 3}; 0) \rightarrow Ua = (?; \mathbf{0; 0; 2}; 3; 0)$

Letzter Schritt: Endet a mit k Nullen und danach einem Zähler $l \neq 0$, so beginnt Ua mit l Nullen und danach dem Zähler $k + 1$.

Endet a mit k Nullen, so beginnt Ua mit dem Zähler k :

4. Schritt: $a = (1; 0; 0; 1; 0; 3; \mathbf{0}) \rightarrow Ua = (\mathbf{1}; 0; 0; 2; 3; 0)$

Als letztes noch ein Beispiel mit a und Ua aus der Menge $\mathfrak{G}_{5,6}$:

1. Schritt: $a = (\mathbf{0}; 0; 4; 0; 0; 1) \rightarrow Ua = (?; ?; ?; ?; ?; ?)$

2. Schritt: $a = (0; \mathbf{0; 4}; 0; 0; 1) \rightarrow Ua = (?; ?; \mathbf{0; 0; 0; 2})$

Letzter Schritt: $a = (0; 0; 4; \mathbf{0; 0; 1}) \rightarrow Ua = (\mathbf{0; 3}; 0; 0; 0; 2)$

Ein entsprechendes Listing für den Fall $j = 5$ und $n = 6$ findet sich sowohl im Anhang 13.5 als auch bei den Materialien zu dieser Arbeit unter <https://www.untex.de/logik/> und zwar als Textdatei und als ausführbare HTML-Datei.

8 Mehrstellige Junktoren

8.1 Die Konjunktion

Zunächst eine Übersicht über die Konjunktion Kab in der 2-wertigen und der 3-wertigen Logik. In der 2-wertigen Logik ist die Konjunktion:

a	0	0	1	1
b	0	1	0	1
Kab	0	0	0	1

Die Konjunktion Kab ist somit stets der kleinste Wert von a und b . Entsprechend wird die Konjunktion in vielen mehrwertigen Logiken mit $Kab = \min(a, b)$ definiert, so bei Łukasiewicz, Kleene, Reichenbach und Gödel⁷⁴. Nur an einer Stelle weicht die 3-wertige Logik von Zygmunt Zawirski⁷⁵, in der die Konjunktion mit $Kab = 1 - \min(1, Na + Nb)$ definiert ist, von $\min(a, b)$ ab, nämlich bei der Konjunktion der beiden mittleren Werte $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}$. Dadurch gilt in der 3-wertigen Logik von Zawirski das Gesetz vom Widerspruch $KaNa = 0$. In den beiden Logiken von Bočvar⁷⁶ ist Kab entweder stets 0 oder stets $\frac{1}{2}$, falls a oder b $\frac{1}{2}$ ist.

a	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	1	
b	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	1	
Kab	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	Łukasiewicz, Kleene, Reichenbach, Gödel
	0	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	Zawirski
	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	Bočvar
	0	0	0	0	0	0	0	0	1	Bočvar

Alle 4 Konjunktionen schließen die Ergebnisse der 2-wertigen Logik mit ein bzw. erfüllen die Normalbedingung (in der Tabelle fett gedruckt).

Bei der Konjunktion der 2-wertigen und 3-wertigen Logik mit $Kab = \min(a, b)$ setzt sich „falsch“ = 0 stärker durch. Das soll auch bei der Konjunktion der Prozentuallogik, die sich an den Konjunktionen dieser Logiken orientiert, der Fall sein. Dabei sollen die Objekte γ_i des neuen Geltungswertes $c = Kab$ im (geschlossenen) Intervall von $\min(a_i, b_i)$ bis $\max(a_i, b_i)$ liegen. Daher soll die Konjunktion folgendermaßen definiert werden:

Definition 25. Die *Konjunktion* Kab ($a \wedge b$) zweier Geltungswerte $a \in \mathfrak{G}_{j,n}$ und $b \in \mathfrak{G}_{j,n}$ bildet die Objekte α_i und β_i folgendermaßen ab:

⁷⁴[5] Bolc, Borovik, S. 63, S. 74, S. 75 und S. 84

⁷⁵[31] Strombach, S. 195f

⁷⁶[5] Bolc, Borovik, S 65

$$f_{i,K}(\alpha_i, \beta_i) := \begin{cases} \max(\alpha_i, \beta_i) & \text{falls } s + s_i \leq 1 \\ \min(\alpha_i, \beta_i) + 1 - (s + s_{i-1}) & \text{falls } s + s_i > 1 \\ & \text{und } s + s_{i-1} \leq 1 \\ \min(\alpha_i, \beta_i) & \text{sonst} \end{cases}$$

Dabei ist

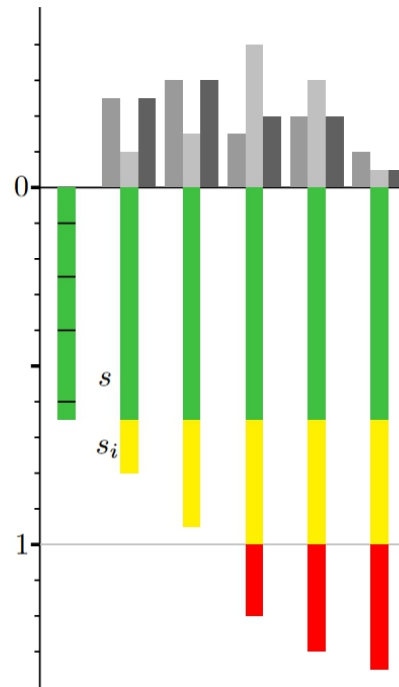
$s = \sum_{i=1}^n \min(\alpha_i, \beta_i)$ die Summe aller Minima von a und b und

$s_i = \sum_{k=1}^i |\alpha_k - \beta_k|$ die Summe der Abstände der Objekte von a und b bis i.

Vereinfacht ausgedrückt werden zunächst alle Objekte von $c = \text{Kab}$ auf das Minimum von α_i und β_i gesetzt und dann vom ersten Objekt γ_1 an nacheinander so lange bis zum Maximum $\max(\alpha_i, \beta_i)$ aufgefüllt, bis die Gesamtsumme 1 bzw. 100 % ergibt. Im nachfolgenden Beispiel mit $a = (0,25; 0,3; 0,15; 0,2; 0,1)$ und $b = (0,1; 0,15; 0,4; 0,3; 0,05)$ soll die Arbeitsweise der Definition noch etwas genauer veranschaulicht werden:

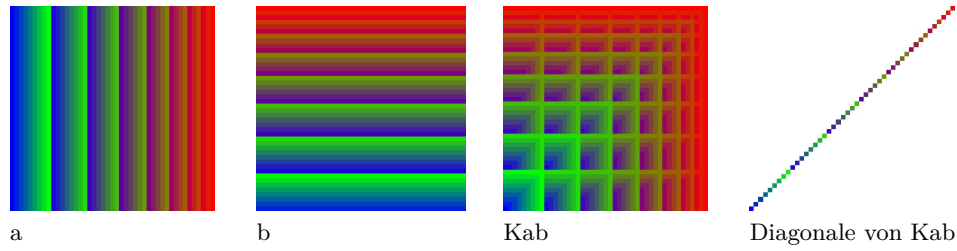
Im oberen Teil des Diagramms sieht man die jeweils 5 Säulen der Objekte von a (mittelgrau), von b (hellgrau) und von Kab (dunkelgrau). Im unteren Teil ist links die Säule für $s = 0,1 + 0,15 + 0,15 + 0,2 + 0,05 = 0,65$, die Summe der 5 Minima (grün). Rechts davon werden zur Säule von s die Werte von $s_1 = 0,15$, $s_2 = 0,3$, $s_3 = 0,55$, $s_4 = 0,65$ und $s_5 = 0,7$ addiert (gelb/rot).

Bei $i = 3$ ist $s + s_i = 0,65 + 0,55 = 1,2$ erstmals größer als 1. Daher ist $f_{3,K}(\alpha_3, \beta_3) = \min(\alpha_3, \beta_3) + 1 - (s + s_2) = \min(0,15, 0,4) + 1 - (0,65 + 0,3) = 0,15 + 1 - 0,95 = 0,2$. Links von $i = 3$ ist $f_{i,K}(\alpha_i, \beta_i) = \max(\alpha_i, \beta_i)$, rechts von $i = 3$ ist $f_{i,K}(\alpha_i, \beta_i) = \min(\alpha_i, \beta_i)$. Somit ist $\text{Kab} = (0,25; 0,3; 0,2; 0,2; 0,05)$.



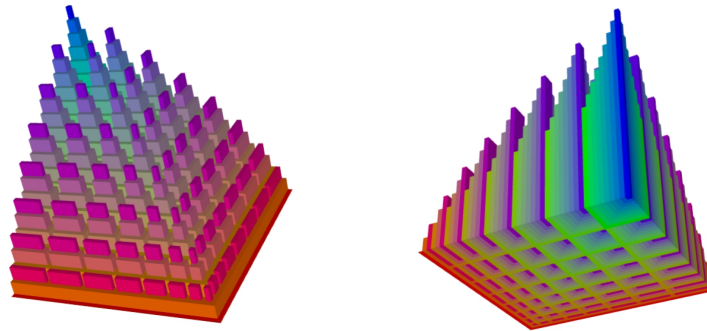
Das 1. Objekt von Kab ist stets $\max(\alpha_1, \beta_1)$: Es sei $\max(\alpha_1, \beta_1) = \alpha_1$ (es könnte auch genauso gut β_1 sein). Dann ist $\beta_1 = \min(\alpha_1, \beta_1) = \alpha_1 - s_1$. Die Summe aller Objekte α_2 bis α_n ist definitionsgemäß $1 - \alpha_1$. Falls alle diese Objekte α_2 bis α_n Minima sind, so ist die Summe aller Minima $s = (\alpha_1 - s_1) + (1 - \alpha_1) = 1 - s_1$. Dann ist $s + s_1 = (1 - s_1) + s_1 = 1 \leq 1$ und somit ist $f_{1,K}(\alpha_1, \beta_1) = \max(\alpha_1, \beta_1)$. Sind nicht alle Objekte α_2 bis α_n Minima, so sind entsprechende Objekte aus der Menge von β_2 bis β_n Minima und s wird kleiner, so dass $s + s_1 < 1$ wird und erst recht $f_{1,K}(\alpha_1, \beta_1) = \max(\alpha_1, \beta_1)$ ist⁷⁷.

Nachfolgend die Visualisierung der Konjunktion am Beispiel der 3-stelligen (45-wertigen) Prozentuallogik aus Kapitel 3.5:



Zwei Dinge fallen bei der Abbildung von Kab ins Auge, nämlich die Dominanz von Rot („falsch“), was auch bei der Definition der Konjunktion beabsichtigt war, und die Spiegelsymmetrie an der aufsteigenden Diagonalen, die bereits auf eine Kommutativität der Konjunktion hindeutet. Auch scheint auf der aufsteigenden Diagonalen $Kaa = a$ zu gelten. Außerdem ist die linke untere Ecke blau ($KW_n W_n = W_n$) und die übrigen 3 Ecken rot (F_n), was darauf schließen lässt, dass Kab die Normalbedingung erfüllt (s. S. 95). Darüber hinaus sind 2 der 4 Kanten rot, so dass zu vermuten ist, dass $KF_n a = KaF_n = F_n$ ist.

Wenn man zusätzlich den Betrag von Kab als Höhe in die Visualisierung mit einbezieht, lässt sich Kab folgendermaßen darstellen:



⁷⁷Falls $\alpha_1 = 1$ ist, dann ist $\beta_1 = \min(\alpha_1, \beta_1) = 1 - s_1$ und alle Objekte α_2 bis α_n sind 0 und somit Minima. Somit ist $s = 1 - s_1 + 0 + \dots + 0 = 1 - s_1$ und folglich ist $s + s_1 = 1 \leq 1$ und $f_{1,K}(\alpha_1, \beta_1) = \max(\alpha_1, \beta_1)$.

Mit dem Online-Rechner auf der Seite (<https://www.untex.de/logik/>) kann zu verschiedenen Geltungswerten Kab berechnet und als Säulendiagramme dargestellt werden. Dabei wird die Definition der Konjunktion anhand der Werte s, s_i usw. noch einmal veranschaulicht.

8.1.1 Ist Kab angemessen definiert?

Um zu überprüfen, ob die Definition der Konjunktion der Prozentuallogiken auch das definiert, was beabsichtigt war, müssen 3 Punkte überprüft werden:

Ist die Anzahl der Objekte von $Kab = c$ gleich der Anzahl der Objekte von a und b ?

Aus der Definition der Konjunktion ergibt sich, dass die Anzahl der Objekte von c gleich der Anzahl der Objekte von a und b ist, da γ_i jeweils genau aus α_i und β_i berechnet wird.

Ist die Summe der Objekte von $Kab = c$ gleich 1?

Wenn i die Stelle ist, bei der γ_i erstmals nicht $\max(\alpha_i, \beta_i)$ ist, dann ist die Summe der Objekte von c :

$$\begin{aligned}
& \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_{i-1} + \gamma_i + \gamma_{i+1} + \dots + \gamma_n = \\
& \max(\alpha_1, \beta_1) + \max(\alpha_2, \beta_2) + \dots + \max(\alpha_{i-1}, \beta_{i-1}) + \\
& \min(\alpha_i, \beta_i) + 1 - s - s_{i-1} + \min(\alpha_{i+1}, \beta_{i+1}) + \dots + \min(\alpha_n, \beta_n) = \\
& \max(\alpha_1, \beta_1) + \max(\alpha_2, \beta_2) + \dots + \max(\alpha_{i-1}, \beta_{i-1}) + \\
& \min(\alpha_i, \beta_i) + 1 - \min(\alpha_1, \beta_1) - \min(\alpha_2, \beta_2) - \dots - \min(\alpha_n, \beta_n) - s_{i-1} + \\
& \min(\alpha_{i+1}, \beta_{i+1}) + \dots + \min(\alpha_n, \beta_n) = \\
& \max(\alpha_1, \beta_1) + \max(\alpha_2, \beta_2) + \dots + \max(\alpha_{i-1}, \beta_{i-1}) + \\
& \min(\alpha_i, \beta_i) + 1 - \min(\alpha_1, \beta_1) - \min(\alpha_2, \beta_2) - \dots - \min(\alpha_i, \beta_i) - s_{i-1} = \\
& \max(\alpha_1, \beta_1) + \max(\alpha_2, \beta_2) + \dots + \max(\alpha_{i-1}, \beta_{i-1}) + \\
& 1 - \min(\alpha_1, \beta_1) - \min(\alpha_2, \beta_2) - \dots - \min(\alpha_{i-1}, \beta_{i-1}) - s_{i-1} = \\
& \max(\alpha_1, \beta_1) + \max(\alpha_2, \beta_2) + \dots + \max(\alpha_{i-1}, \beta_{i-1}) + \\
& 1 - \min(\alpha_1, \beta_1) - \min(\alpha_2, \beta_2) - \dots - \min(\alpha_{i-1}, \beta_{i-1}) - \\
& |\alpha_1 - \beta_1| - |\alpha_2 - \beta_2| - \dots - |\alpha_{i-1} - \beta_{i-1}| = \\
& \max(\alpha_1, \beta_1) + \max(\alpha_2, \beta_2) + \dots + \max(\alpha_{i-1}, \beta_{i-1}) + \\
& 1 - \min(\alpha_1, \beta_1) - \min(\alpha_2, \beta_2) - \dots - \min(\alpha_{i-1}, \beta_{i-1}) - \\
& (\max(\alpha_1, \beta_1) - \min(\alpha_1, \beta_1)) - (\max(\alpha_2, \beta_2) - \min(\alpha_2, \beta_2)) - \\
& \dots - (\max(\alpha_{i-1}, \beta_{i-1}) - \min(\alpha_{i-1}, \beta_{i-1})) = \\
& \max(\alpha_1, \beta_1) + \max(\alpha_2, \beta_2) + \dots + \max(\alpha_{i-1}, \beta_{i-1}) + \\
& 1 - \min(\alpha_1, \beta_1) - \min(\alpha_2, \beta_2) - \dots - \min(\alpha_{i-1}, \beta_{i-1}) - \\
& \max(\alpha_1, \beta_1) + \min(\alpha_1, \beta_1) - \max(\alpha_2, \beta_2) + \min(\alpha_2, \beta_2) - \\
& \dots - \max(\alpha_{i-1}, \beta_{i-1}) + \min(\alpha_{i-1}, \beta_{i-1}) = 1
\end{aligned}$$

Liegt der Wert von $\gamma_i = \min(\alpha_i, \beta_i) + 1 - (s + s_{i-1})$ im Intervall von $\min(\alpha_i, \beta_i)$ bis $\max(\alpha_i, \beta_i)$?

An der Stelle $\gamma_i = \min(\alpha_i, \beta_i) + 1 - (s + s_{i-1})$ ist $s + s_{i-1}$ definitionsgemäß ≤ 1 . Somit ist $1 - (s + s_{i-1}) \geq 0$. Und damit ist $\gamma_i = \min(\alpha_i, \beta_i) + 1 - (s + s_{i-1}) \geq \min(\alpha_i, \beta_i)$.

Außerdem ist $\gamma_i = \min(\alpha_i, \beta_i) + 1 - (s + s_{i-1}) = \min(\alpha_i, \beta_i) + 1 - (s + s_i) + |\alpha_i - \beta_i| = \min(\alpha_i, \beta_i) + 1 - (s + s_i) + \max(\alpha_i, \beta_i) - \min(\alpha_i, \beta_i) = 1 - (s + s_i) + \max(\alpha_i, \beta_i)$.

$s + s_i$ ist an der Stelle γ_i definitionsgemäß > 1 . Also ist $1 - (s + s_i) < 0$. Demzufolge ist $\gamma_i = 1 - (s + s_i) + \max(\alpha_i, \beta_i) < \max(\alpha_i, \beta_i)$.

In den Kapiteln 4 bis 7 wurden die einstelligen Junktoren in 4 Kategorien eingeteilt, nämlich in unabhängige, innere, ergänzende und parallele Junktoren. Zu welcher dieser Kategorien gehört die Konjunktion? Da gemäß Definition a $\in \mathfrak{G}_{j,n}$ und b $\in \mathfrak{G}_{j,n}$, haben die Objekte von a und b den gemeinsamen Nenner j und die Zähler sind ganze Zahlen. Durch die Definition der Konjunktion wird der Nenner nicht verändert bzw. der Nenner der Objekte von $Kab = c$ ist ebenfalls j . Die ersten k Objekte ($\max(\alpha_i, \beta_i)$) und die letzten $n - k - 1$ Objekte ($\min(\alpha_i, \beta_i)$) von $Kab = c$ sind Objekte aus a oder b mit ganzen Zählern. Bleibt noch das eine Objekt $\gamma_{k+1} = \min(\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}) + 1 - (s + s_k)$. Wenn von der ganzzahligen Summe j der Zähler einmal k und einmal $n - k - 1$ ganze Zahlen abgezogen werden, ist auch der Zähler des $(k+1)$ -te Objektes von c ganzzahlig und somit ist $c \in \mathfrak{G}_{j,n}$. Somit kann die Konjunktion als innerer Junktor bezeichnet werden und es gilt $\mathfrak{G}_{j,n} \times \mathfrak{G}_{j,n} \rightarrow \mathfrak{G}_{j,n}$.

8.1.2 Entspricht Kab einer T-Norm?

T-Normen werden in der mehrwertigen Logik häufig betrachtet⁷⁸ und sind folgendermaßen definiert:

	T-Norm	Bezeichnung
(T1)	$t(0, x) = 0$ und $t(1, x) = x$	Null- und neutr. Element
(T2)	$t(x, y) \leq t(u, z)$, falls $x \leq u$ und $y \leq z$	Monotonie
(T3)	$t(x, y) = t(y, x)$	Kommutativität
(T4)	$t(t(x, y), z) = t(x, t(y, z))$	Assoziativität

Übertragen auf die Konjunktion bedeutet das:

⁷⁸[9] Gottwald, S. 32

	Konjunktion
(T1)	$KF_na \stackrel{?}{=} F_n$ und $KW_na \stackrel{?}{=} a$
(T2)	$ Kab \stackrel{?}{\leq} Kcd $, falls $ a \leq c $ und $ b \leq d $
(T3)	$Kab \stackrel{?}{=} Kba$
(T4)	$KKabc \stackrel{?}{=} KaKbc$

(T1) Ist F_n ein Nullelement?

Es wurde bereits gezeigt, dass das 1. Objekt von Kab stets $\max(\alpha_1, \beta_1)$ ist (s. Seite 92). Also ist das 1. Objekt von KF_na $\max(1, \alpha_1) = 1$ und folglich sind alle weiteren Objekte von KF_na 0, da ja die Summe aller Objekte 1 ist. Somit ist F_n ein Nullelement.

(T1) Ist W_n ein neutrales Element?

Alle Objekte von KW_na sind α_i , denn

$$s = \min(0, \alpha_1) + \dots + \min(0, \alpha_{n-1}) + \min(1, \alpha_n) = 0 + \dots + 0 + \alpha_n = \alpha_n \text{ und}$$

$$s_{n-1} = |0 - \alpha_1| + \dots + |0 - \alpha_{n-1}| = \alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1} \text{ und somit}$$

$$s + s_{n-1} = \alpha_n + \alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1} = 1 \leq 1$$

Also sind die ersten $n-1$ Objekte von KW_na $\max(0, \alpha_i) = \alpha_i$.

$$s_n = s_{n-1} + |1 - \alpha_n| = \alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1} + 1 - \alpha_n$$

$$s + s_n = \alpha_n + \alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1} + 1 - \alpha_n = \alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1} + 1 > 1 \text{ (falls } a \neq W_n)$$

Also ist das letzte Objekt von KW_na $\min(1, \alpha_n) + 1 - (s + s_{n-1}) = \alpha_n + 1 - 1 = \alpha_n$. Somit ist W_n ein neutrales Element. Ist $a = W_n$ und somit $s + s_n = 1$, so ist definitionsgemäß das letzte Element von $KW_na = KW_n W_n$ $\max(1, 1) = \max(\alpha_n, \alpha_n)$ und somit ebenfalls α_n .

Gesetz 56. $KF_na = F_n$ (F_n als Nullelement) und $KW_na = a$ (W_n als neutralen Elementes)

(T3) Ist Kab kommutativ?

In der Definition von Kab kommen als Rechnungen nur Addition, $\max(\alpha_i, \beta_i)$, $\min(\alpha_i, \beta_i)$ und $|\alpha_k - \beta_k|$ vor. Doch sowohl Addition, Maximum, Minimum als auch $|\alpha_k - \beta_k|$ sind kommutativ. Somit ist auch Kab kommutativ.

Gesetz 57. $Kab = Kba$ (Kommutativgesetz)

Aus den beiden Gesetzen 56 und 57 folgt, dass die Konjunktion der Prozen-tuallogiken die Konjunktion der 2-wertigen Logik mit einschließen, also die Normalbedingung erfüllt:

a	b	Kab
W_n	W_n	W_n (wg. W_n als neutralem Element)
W_n	F_n	F_n (wg. W_n als neutralem Element)
F_n	W_n	F_n (wg. der Kommutativität und wg. F_n als Nullelement)
F_n	F_n	F_n (wg. F_n als Nullelement)

(T2) und (T4) Ist Kab monoton oder assoziativ?

Kab ist weder stets monoton noch stets assoziativ. Um das zu zeigen, genügt jeweils ein Gegenbeispiel:

$$\begin{aligned}a &= (\frac{3}{5}; \frac{1}{5}; \frac{0}{5}; \frac{1}{5}), & |a| &= 0.27 \\b &= (\frac{1}{5}; \frac{2}{5}; \frac{0}{5}; \frac{2}{5}), & |b| &= 0.53 \\c &= (\frac{3}{5}; \frac{0}{5}; \frac{0}{5}; \frac{2}{5}), & |c| &= 0.40 \\d &= (\frac{0}{5}; \frac{2}{5}; \frac{3}{5}; \frac{0}{5}), & |d| &= 0.53 \\Kab &= (\frac{3}{5}; \frac{1}{5}; \frac{0}{5}; \frac{1}{5}), & |Kab| &= 0.27 \\Kcd &= (\frac{3}{5}; \frac{2}{5}; \frac{0}{5}; \frac{0}{5}), & |Kcd| &= 0.13\end{aligned}$$

Obwohl $|a| \leq |c|$ und $|b| \leq |d|$ ist, ist nicht $|Kab| \leq |Kcd|$.

$$\begin{aligned}a &= (0,15; 0,3; 0,05; 0,1; 0,15; 0,25) \\b &= (0,4; 0,05; 0,05; 0,2; 0,2; 0,1) \\c &= (0,2; 0,2; 0,35; 0,05; 0,15; 0,05)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Kab &= (0,4; 0,2; 0,05; 0,1; 0,15; 0,1) \\Kbc &= (0,4; 0,2; 0,15; 0,05; 0,15; 0,05)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}KKabc &= (0,4; \mathbf{0,2}; \mathbf{0,15}; 0,05; 0,15; 0,05) \neq \\KaKbc &= (0,4; \mathbf{0,3}; \mathbf{0,05}; 0,05; 0,15; 0,05)\end{aligned}$$

Allerdings gilt wegen der Kommutativität, dass

Gesetz 58. $KaKba = KKaba$,

denn bei zweimaligem Anwenden des Kommutativgesetzes ist:
 $KaKba = KaKab = KKaba$.

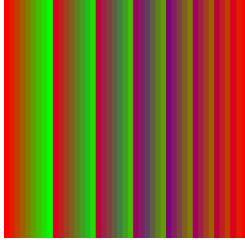
8.1.3 Idempotenz und das Gesetz vom Widerspruch

Das Idempotenzgesetz besagt, dass $Kaa = a$ ist. Es ist $\max(\alpha_i, \alpha_i) = \alpha_i$ und $\min(\alpha_i, \alpha_i) = \alpha_i$. Außerdem ist $s = \alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$ und $s_{i-1} = |\alpha_1 - \alpha_1| + \dots + |\alpha_{i-1} - \alpha_{i-1}| = 0 + \dots + 0 = 0$. Somit ist ebenfalls $\min(\alpha_i, \alpha_i) + 1 - (s + s_{i-1}) = \alpha_i + 1 - (1 + 0) = \alpha_i$.

Gesetz 59. $Kaa = a$ (Idempotenz der Konjunktion)

In der Tabelle mit 3-wertigen Logiken auf der Seite 90 galt für die Logik von Zawirski, wie bereits erwähnt, das Gesetz vom Widerspruch $KaN_a = 0$. Auch für die dort vorgestellte 2. Logik von Bočvar gilt dieses Gesetz. Ist

auch in den Prozentuallogiken $KaNa = F_n$? Dass dem nicht so ist, lässt bereits die nachfolgende Visualisierung vermuten, die dann nämlich einheitlich rot hätte sein müssen:



KaNa

Dass KaNa nicht F_n ist, lässt sich leicht mit Hilfe der Palindrome zeigen: $KpNp = Kpp$ (wg. Gesetz 13) und $Kpp = p$ (wg. Gesetz 59) und $p \neq F_n$. Ersetzt man allerdings die Negation N durch die innere Zyklation Z_m (s. Definition 11), so lässt sich auch für die Prozentuallogiken ein Gesetz vom Widerspruch formulieren, da Z_m durch alle m Geltungswerte der Menge $\mathfrak{G}_{j,n}$ zyklisiert, somit auch durch F_n :

Gesetz 60. vom Widerspruch:

$$\underbrace{KK \cdots K}_{(m-1)-mal} a Z_m a Z_m Z_m a \cdots \underbrace{Z_m Z_m \cdots Z_m a}_{(m-1)-mal} = F_n$$

Denn aus den beiden Gesetzen 56 und 57 folgt:

Falls der letzte Geltungswert $\underbrace{Z_m Z_m \cdots Z_m a}_{(m-1)-mal} = F_n$ ist, so ist:

$$\underbrace{KK \cdots K}_{(m-1)-mal} a Z_m a Z_m Z_m a \cdots \underbrace{Z_m Z_m \cdots Z_m a}_{(m-2)-mal} F_n = F_n \text{ (wg. } Kx F_n = K F_n x = F_n \text{)}$$

Falls der erste (oder zweite usw.) Geltungswert F_n ist, so ist:

$$\begin{aligned} & \underbrace{KK \cdots K}_{(m-1)-mal} F_n Z_m a Z_m Z_m a \cdots \underbrace{Z_m Z_m \cdots Z_m a}_{(m-1)-mal} = \\ & \underbrace{KK \cdots K}_{(m-2)-mal} F_n Z_m Z_m a \cdots \underbrace{Z_m Z_m \cdots Z_m a}_{(m-1)-mal} = \\ & \underbrace{KK \cdots K}_{(m-3)-mal} F_n Z_m Z_m Z_m a \cdots \underbrace{Z_m Z_m \cdots Z_m a}_{(m-1)-mal} = \\ & \dots = \end{aligned}$$

$$K F_n \underbrace{Z_m Z_m \cdots Z_m a}_{(m-1)-mal} = F_n \text{ (jeweils wg. } K F_n x = F_n \text{)}$$

8.1.4 Die h -stellige Konjunktion

Um eine Konjunktion auf mehr als 2 Geltungswerte anzuwenden, ohne dass die Reihenfolge der Geltungswerte oder die Nichtgültigkeit des Assoziativgesetzes eine Rolle spielt, möchte ich nachfolgend eine h -stellige Konjunktion definieren:

Definition 26. Die h -stellige *Konjunktion* $\mathbf{K}_h \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_h$ von h Geltungswerten $\mathbf{a}_1 \in \mathfrak{G}_{j,n}$, $\mathbf{a}_2 \in \mathfrak{G}_{j,n}$ bis $\mathbf{a}_h \in \mathfrak{G}_{j,n}$ bildet die Objekte $\alpha_{i,1}$, $\alpha_{i,2}$ bis $\alpha_{i,h}$ folgendermaßen ab:

$$f_{i,K_h}(\alpha_{i,1}, \alpha_{i,2}, \dots, \alpha_{i,h}) := \begin{cases} \max(\alpha_{i,1}, \alpha_{i,2}, \dots, \alpha_{i,h}) & \text{falls } s + s_i \leq 1 \\ \min(\alpha_{i,1}, \alpha_{i,2}, \dots, \alpha_{i,h}) + 1 - (s + s_{i-1}) & \text{falls } s + s_i > 1 \\ & \text{und} \\ & s + s_{i-1} \leq 1 \\ \min(\alpha_{i,1}, \alpha_{i,2}, \dots, \alpha_{i,h}) & \text{sonst} \end{cases}$$

Dabei ist

$$s = \sum_{i=1}^n \min(\alpha_{i,1}, \alpha_{i,2}, \dots, \alpha_{i,h}) \text{ und}$$

$$s_i = \sum_{k=1}^i (\max(\alpha_{k,1}, \alpha_{k,2}, \dots, \alpha_{k,h}) - \min(\alpha_{k,1}, \alpha_{k,2}, \dots, \alpha_{k,h})).$$

Bei der Berechnung von s_i gilt für $h = 2$: $\max(\alpha_{k,1}, \alpha_{k,2}) - \min(\alpha_{k,1}, \alpha_{k,2}) = \alpha_{k,1} - \alpha_{k,2}$, falls $\alpha_{k,1} \geq \alpha_{k,2}$ und $\max(\alpha_{k,1}, \alpha_{k,2}) - \min(\alpha_{k,1}, \alpha_{k,2}) = \alpha_{k,2} - \alpha_{k,1} = -(\alpha_{k,1} - \alpha_{k,2})$, falls $\alpha_{k,1} < \alpha_{k,2}$.

Somit ist $\max(\alpha_{k,1}, \alpha_{k,2}) - \min(\alpha_{k,1}, \alpha_{k,2}) = |\alpha_{k,1} - \alpha_{k,2}|$. Der Rest der Definition der h -stelligen Konjunktion fällt mit der Definition der 2-stelligen Konjunktion zusammen:

Gesetz 61. $\mathbf{K}_2 \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 = \mathbf{K} \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2$

Für die h -stellige Konjunktion spielt die Reihenfolge der Geltungswerte keine Rolle. Die Begründung entspricht der Begründung für die Kommutativität von $\mathbf{K} \mathbf{a} \mathbf{b}$ (s. Seite 95):

Gesetz 62. $\mathbf{K}_h \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_h = \mathbf{K}_h \pi(\mathbf{a}_1) \pi(\mathbf{a}_2) \dots \pi(\mathbf{a}_h)$ mit $\pi = (\overset{a_1}{\pi(a_1)} \overset{a_2}{\pi(a_2)} \dots \overset{a_h}{\pi(a_h)})$ als eine Permutation⁷⁹ der Geltungswerte $\mathbf{a}_1$ bis $\mathbf{a}_h$.

⁷⁹siehe [1] Aigner, S. 10

Auch für die h -stellige Konjunktion ist F_n ein Nullelement:

$$\begin{aligned}
s &= \min(1, \alpha_{1,2}, \alpha_{1,3}, \dots, \alpha_{1,h}) + \min(0, \alpha_{2,2}, \alpha_{2,3}, \dots, \alpha_{2,h}) + \dots + \min(0, \\
&\alpha_{n,2}, \alpha_{n,3}, \dots, \alpha_{n,h}) = \\
&\min(\alpha_{1,2}, \alpha_{1,3}, \dots, \alpha_{1,h}) + 0 + \dots + 0 = \min(\alpha_{1,2}, \alpha_{1,3}, \dots, \alpha_{1,h}) \\
s_1 &= \max(1, \alpha_{1,2}, \alpha_{1,3}, \dots, \alpha_{1,h}) - \min(1, \alpha_{1,2}, \alpha_{1,3}, \dots, \alpha_{1,h}) = \\
&1 - \min(\alpha_{1,2}, \alpha_{1,3}, \dots, \alpha_{1,h}) \\
s + s_1 &= \min(\alpha_{1,2}, \alpha_{1,3}, \dots, \alpha_{1,h}) + 1 - \min(\alpha_{1,2}, \alpha_{1,3}, \dots, \alpha_{1,h}) = 1 \\
\text{Also ist das 1. Objekt von } K_h &\max(1, \alpha_{1,2}, \alpha_{1,3}, \dots, \alpha_{1,h}) = 1 \text{ und folglich} \\
\text{sind alle weiteren Objekte 0. Somit ist } F_n &\text{ ein Nullelement:}
\end{aligned}$$

Gesetz 63. $K_h F_n a_2 a_3 \dots a_h = F_n$

Dabei spielt es wegen Gesetz 62 keine Rolle, ob F_n an erster Stelle oder an einer anderen Stelle steht.

Entsprechend dem Idempotenzgesetz 59 $Kaa = a$ für die 2-stellige Konjunktion gilt für die h -stellige Konjunktion:

Gesetz 64. $K_h \underbrace{aa \dots a}_{h\text{-mal}} = a$

Analog zum entsprechenden Beweis der Idempotenz der 2-stelligen Konjunktion ist $\max(\alpha_i, \alpha_i, \dots, \alpha_i) = \alpha_i$ und $\min(\alpha_i, \alpha_i, \dots, \alpha_i) = \alpha_i$. Außerdem ist wiederum $s = \alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$. $s_{i-1} = \max(\alpha_1, \alpha_1, \dots, \alpha_1) - \min(\alpha_1, \alpha_1, \dots, \alpha_1) + \dots + \max(\alpha_{i-1}, \alpha_{i-1}, \dots, \alpha_{i-1}) - \min(\alpha_{i-1}, \alpha_{i-1}, \dots, \alpha_{i-1}) = (\alpha_1 - \alpha_1) + \dots + (\alpha_{i-1} - \alpha_{i-1}) = 0 + \dots + 0 = 0$. Somit ist dann wiederum $\min(\alpha_i, \alpha_i, \dots, \alpha_i) + 1 - (s + s_{i-1}) = \alpha_i + 1 - (1 + 0) = \alpha_i$.

Das Gesetz vom Widerspruch lässt sich (ohne Beweis) für die h -stellige Konjunktion entsprechend umformulieren:

$$\underbrace{KK \dots K}_{(m-1)\text{-mal}} a \underbrace{Z_m a Z_m a \dots Z_m a}_{(m-1)\text{-mal}} = F_n$$

Wie lässt sich die h -stellige Konjunktion mehrerer Geltungswerte interpretieren? Wenn die Geltungswerte z.B., wie schon öfter in dieser Arbeit, Notenspiegel mehrerer Klassenarbeiten repräsentieren, so könnte die h -stellige Konjunktion als „worst case“ oder auch „untere Schranke“ gelten. Das heißt nicht, dass die h -stellige Konjunktion den schlechtesten Notenspiegel bestimmt, was mit Hilfe des Betrages bzw. der Durchschnittsnote leicht zu berechnen wäre, sondern die h -stellige Konjunktion bestimmt den auf der Basis mehrerer vorliegender Notenspiegel schlechtesten zu erwartenden Notenspiegel. Das werde ich im nächsten Unterkapitel, in dem eine h -stellige Disjunktion als obere Schranke definiert wird, an einem Beispiel noch genauer veranschaulichen.

8.2 Die Disjunktion

Zunächst wieder eine Übersicht, diesmal über die Disjunktion in der 2-wertigen und der 3-wertigen Logik. In der 2-wertigen Logik ist die Disjunktion:

a	0	0	1	1
b	0	1	0	1
Aab	0	1	1	1

Die Disjunktion wird in den mehrwertigen Logiken häufig mit $Aab := \max(a, b)$ definiert, so von Łukasiewicz, Kleene und Gödel⁸⁰. Allerdings beginnen Łukasiewicz und Zawirski⁸¹ ihre Logiken mit der Negation $Na = 1 - a$ und der Subjunktion $Cab = \min(1, 1 - a + b)$ und leiten daraus die Disjunktion Aab her:

Łukasiewicz definiert $Aab := CCabb = \min(1, 1 - \min(1, 1 - a + b) + b)$:

Falls $a \geq b$:

$$\begin{aligned} \min(1, 1 - (1 - a + b) + b) &= \\ \min(1, 1 - 1 + a - b + b) &= \\ \min(1, a) &= a \text{ (da } a \leq 1). \end{aligned}$$

Falls $a < b$:

$$\begin{aligned} \min(1, 1 - 1 + b) &= \\ \min(1, b) &= b \text{ (da } b \leq 1) \end{aligned}$$

Somit ist auch bei Łukasiewicz $Aab = \max(a, b)$.

Zawirski definiert $Aab := CNab = \min(1, 1 - (1 - a) + b) = \min(1, 1 - 1 + a + b) = \min(1, a + b)$.

a	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	1
b	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	1
Aab	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	1	1
	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1	1	1	1	1
	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	1
	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1
	0	0	1	0	0	1	1	1	1
	Łukasiewicz, Kleene, Gödel								
	Zawirski								
	Reichenbach ⁸²								
	Bočvar ⁸³								
	Bočvar								

Die Disjunktion der mehrwertigen Logik mit $Aab = \max(a, b)$ kann sozusagen als Gegenstück zur Konjunktion $Kab = \min(a, b)$ gedeutet werden.

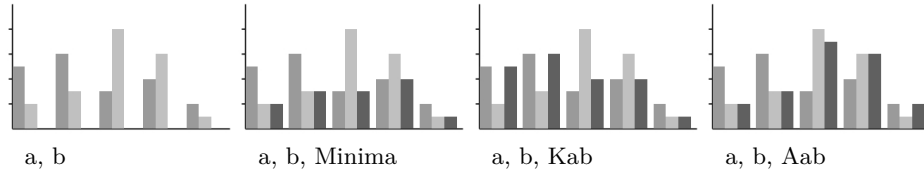
⁸⁰[5] Bolc, Borovik, S. 63, S. 74 und S. 84

⁸¹[31] Strombach, S. 193ff

⁸²[5] Bolc, Borovik, S. 75

⁸³[5] Bolc, Borovik, S. 65

Entsprechend soll auch in den Prozentuallogiken die Disjunktion als Gegenstück zur Konjunktion, bei der im vorderen Bereich der n -Tupel von Kab $\max(\alpha_i, \beta_i)$ und im hinteren Bereich $\min(\alpha_i, \beta_i)$ dominierten, definiert werden. Nun soll jedoch im vorderen Bereich von Aab $\min(\alpha_i, \beta_i)$ und im hinteren Bereich $\max(\alpha_i, \beta_i)$ dominieren. Das möchte ich zunächst an dem Beispiel von Seite 91 mit $a = (0,25; 0,3; 0,15; 0,2; 0,1)$ und $b = (0,1; 0,15; 0,4; 0,3; 0,05)$ durchspielen:



Von den Objekten der beiden Geltungswerte a (mittelgrau) und b (hellgrau, s. 1. Abb.) wird zunächst wieder jeweils das Minimum bestimmt (dunkelgrau, s. 2. Abb.). Bei der Konjunktion (s. 3. Abb.) wurden die Minima von links beginnend nach rechts hin so lange bis zum Maximum aufgefüllt, bis die Summe der Objekte von Kab gleich 1 war. Nun sollen bei der Disjunktion entsprechend die Minima von rechts beginnend nach links hin so lange bis zum Maximum aufgefüllt werden, bis die Summe der Objekte von Aab ebenfalls gleich 1 ist. Somit ist dann $Aab = (0,1; 0,15; 0,35; 0,3; 0,1)$.

Definition 27. Die *Disjunktion Aab* ($a \vee b$) zweier Geltungswerte $a \in \mathfrak{G}_{j,n}$ und $b \in \mathfrak{G}_{j,n}$ bildet die Objekte α_i und β_i folgendermaßen ab:

$$f_{i,A}(\alpha_i, \beta_i) := \begin{cases} \max((\alpha_i, \beta_i)) & \text{falls } s + \sigma_i \leq 1 \\ \min((\alpha_i, \beta_i) + 1 - (s + \sigma_{i+1})) & \text{falls } s + \sigma_i > 1 \\ & \text{und } s + \sigma_{i+1} \leq 1 \\ \min((\alpha_i, \beta_i)) & \text{sonst} \end{cases}$$

Dabei ist

$$s = \sum_{i=1}^n \min(\alpha_i, \beta_i) \text{ wiederum die Summe aller Minima von } a \text{ und } b, \text{ aber}$$

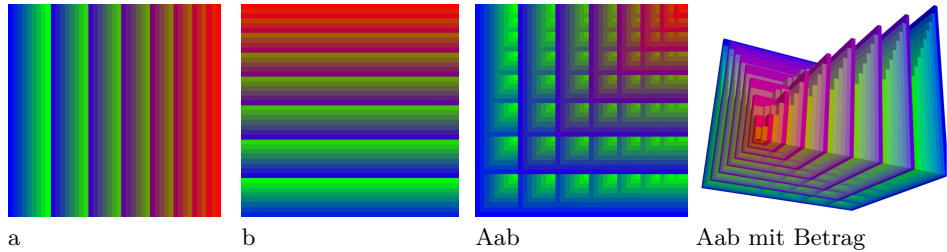
$$\sigma_i = \sum_{k=i}^n |\alpha_k - \beta_k| \text{ die Summe der Abstände der Objekte von } i \text{ bis } n.$$

Noch ein 2. Beispiel mit der Summe der Minima $s = 65$ (die Zahlen sind Prozentangaben):

$i =$	1	2	3	4	5	6
$\alpha_i =$	30	15	15	25	5	10
$\beta_i =$	20	20	10	5	25	20
$\sigma_i =$	70	60	55	50	30	10
$s + \sigma_i =$	135	125	120	115	95	75
$f_{i,A}(\alpha_i, \beta_i) =$	20	15	10	10	25	20

Bei $i = 4$ ist $s + \sigma_i = 115$ von rechts kommend erstmals größer als 100 und $f_{i,A}(\alpha_i, \beta_i)$ wechselt ab $i = 3$ bis $i = 1$ von Maximum auf Minimum.

Nachfolgend die Visualisierung der Konjunktion am Beispiel der 3-stelligen (45-wertigen) Prozentuallogik aus Kapitel 3.5:



Wegen der Symmetrie von Konjunktion und Disjunktion zueinander und der Symmetrie der Negation ist das Ergebnis von Aab das Gleiche, als wenn ich zunächst die Geltungswerte a und b zu Na und Nb spiegel, dann mit den gespiegelten Geltungswerten die Konjunktion KNaNb bilde und das Ergebnis wieder zu NKNaNb zurückspeigel. Somit ist $Aab = NKNaNb$ und wegen Gesetz 12 $NAab = KNaNb$. Ersetze ich in $NAab = KNaNb$ die Geltungswerte Na und Nb durch a und b und umgekehrt, so gilt auch das 2. Gesetz von De Morgan, nämlich $NANa Nb = Kab$ und somit $NKab = ANa Nb$.

Gesetz 65. von De Morgan:

- 1.) $NAab = KNaNb$ bzw. $Aab = NKNaNb$ und
- 2.) $NKab = ANa Nb$ bzw. $Kab = NANa Nb$

Gesetz 66. $AW_na = W_n$ (W_n als Nullelement) und $AF_na = a$ (F_n als neutrales Element)

$AW_na =$ (wg. Gesetz 65)
 $NKNW_n Na =$
 $NKF_n Na =$ (wg. Gesetz 56)
 $NF_n = W_n$

$AF_na =$ (wg. Gesetz 65)
 $NKNF_n Na =$
 $NKW_n Na =$ (wg. Gesetz 56)
 $NNa = a$

Gesetz 67. $Aab = Aba$ (Kommutativgesetz)

Die Begründung entspricht der Begründung für die Kommutativität der Konjunktion. Somit erfüllt die Disjunktion die beiden Bedingungen (T*1) und (T*3) für T-Conormen⁸⁴.

Gesetz 68. $Aaa = a$ (Idempotenz der Disjunktion)

Die Begründung entspricht der Begründung für die Idempotenz der Konjunktion, nur dass $s_{i-1} = |\alpha_1 - \alpha_1| + \dots + |\alpha_{i-1} - \alpha_{i-1}|$ durch $\sigma_{i+1} = |\alpha_{i+1} - \alpha_{i+1}| + \dots + |\alpha_n - \alpha_n|$, was ebenfalls 0 ergibt, ersetzt werden muss.

Gesetz 69. (Gesetz vom ausgeschlossenen $(m+1)$ -ten):

$$\underbrace{AA \cdots A}_{(m-1)-mal} a \underbrace{Z_m a Z_m Z_m a \cdots Z_m Z_m \cdots Z_m a}_{(m-1)-mal} = W_n$$

Auch hier kann zur Begründung auf die Begründung des Gesetzes vom Widerspruch 60 zurückgegriffen werden. Allerdings wird jetzt nicht auf die Gesetze 56 und 57 verwiesen ($KF_n a = F_n$ und $Kab = Kba$), sondern auf die Gesetze 66 und 67, nämlich $AW_n a = W_n$ und $Aab = Aba$. Und natürlich muss in der Begründung zum Gesetz vom Widerspruch F_n durch W_n und K durch A ersetzt werden.

Analog zur h -stelligen Konjunktion möchte ich ebenfalls eine h -stellige Disjunktion definieren:

Definition 28. Die h -stellige *Disjunktion* $\mathbf{A}_h \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_h$ von h Geltungswerten $a_1 \in \mathfrak{G}_{j,n}$, $a_2 \in \mathfrak{G}_{j,n}$ bis $a_h \in \mathfrak{G}_{j,n}$ bildet die Objekte $\alpha_{i,1}$, $\alpha_{i,2}$ bis $\alpha_{i,h}$ folgendermaßen ab:

$$f_{i,A_h}(\alpha_{i,1}, \alpha_{i,2}, \dots, \alpha_{i,h}) := \begin{cases} \max(\alpha_{i,1}, \alpha_{i,2}, \dots, \alpha_{i,h}) & \text{falls } s + \sigma_i \leq 1 \\ \min(\alpha_{i,1}, \alpha_{i,2}, \dots, \alpha_{i,h}) + 1 - (s + \sigma_{i+1}) & \text{falls } s + \sigma_i > 1 \\ & \text{und} \\ & s + \sigma_{i+1} \leq 1 \\ \min(\alpha_{i,1}, \alpha_{i,2}, \dots, \alpha_{i,h}) & \text{sonst} \end{cases}$$

Dabei ist

$$s = \sum_{i=1}^n \min(\alpha_{i,1}, \alpha_{i,2}, \dots, \alpha_{i,h}) \text{ und}$$

$$\sigma_i = \sum_{k=i}^n (\max(\alpha_{k,1}, \alpha_{k,2}, \dots, \alpha_{k,h}) - \min(\alpha_{k,1}, \alpha_{k,2}, \dots, \alpha_{k,h})).$$

⁸⁴[9] s. Gottwald, S. 33

8.2.1 Die obere und die untere Schranke

Möchte man im Schulalltag aus bereits geschriebenen Klassenarbeiten bestimmen, zwischen welchen 2 Notenspiegeln als untere und obere Schranke sich eine noch zu schreibende Klassenarbeit vermutlich bewegt, bzw. möchte ich mehrere Geltungswerte mit gleichem n , wobei n zunächst gerade sein soll, nach oben und unten jeweils durch einen Geltungswert beschränken, so wäre es naheliegend, von den ersten $\frac{1}{2}n$ Objekten der mehreren Geltungswerte, die „eher schlecht“ repräsentieren, das Minimum (bzw. das Maximum) und von den letzten $\frac{1}{2}n$ Objekten der mehreren Geltungswerte das Maximum (bzw. das Minimum) zu bestimmen, um eine obere (bzw. untere) Schranke zu berechnen. Ist n ungerade, so könnte man von den mittleren Objekten der mehreren Geltungswerte das arithmetische Mittel bestimmen. Das folgende Beispiel zeigt für 3 hypothetische Notenspiegel ($n = 6$) die Berechnung einer solchen unteren Schranke (der gemeinsame Nenner $j = 23$ für 23 Schüler/-innen wurde jeweils weggelassen):

Note	6	5	4	3	2	1	
$i =$	1	2	3	4	5	6	Summe
$\alpha_i =$	4	5	5	5	4	0	23
$\beta_i =$	0	9	3	5	4	2	23
$\gamma_i =$	8	2	7	5	1	0	23
	Maximum			Minimum			
	8	9	7	5	1	0	30

Das Ergebnis ist schon von daher nicht als schlechtestes zu erwartender Fall geeignet, da die Summe der Zähler bzw. Schüler/-innen deutlich von 23 abweicht. Außerdem hatten in den 3 Klassenarbeiten, die der Berechnung zugrunde lagen, 14, 12 und 17 Schüler/-innen eine Note schlechter als 3, im Ergebnis sind es 24, was sogar über der Gesamtzahl der Schüler/-innen liegt.

Nun soll die gleiche untere Schranke mit einer h -stelligen Konjunktion berechnet werden:

$i =$	1	2	3	4	5	6	Summe	Durchschnittsnote
$\alpha_i =$	4	5	5	5	4	0	23	4,0
$\beta_i =$	0	9	3	5	4	2	23	3,6
$\gamma_i =$	8	2	7	5	1	0	23	4,5
Minima	0	2	3	5	1	0	$11 = s$	
Maxima	8	9	7	5	4	2		
Max - Min	8	7	4	0	3	2		
$s_i =$	8	15	19	19	22	24		
$s + s_i =$	19	26	30	30	33	35		
untere Schranke	8	6	3	5	1	0	23	4,7
$\sigma_i =$	24	16	9	5	5	2		
$s + \sigma_i =$	35	27	20	16	16	13		
obere Schranke	0	5	7	5	4	2	23	3,4

Bereits bei $i = 2$ ist der Zähler von $s + s_i = 26$ größer als 23. Somit ist bereits für $i = 3$ das Ergebnis bei dieser unteren Schranke nicht, wie im obigen Versuch, eine untere Schranke zu definieren, $\max(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$, sondern $\min(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$.

Bei der Berechnung von oberen und unteren Schranken z.B. von Notenspiegeln ist zu bedenken, dass möglicherweise nicht bei jeder Klassenarbeit jeder Schüler bzw. jede Schülerin mitgeschrieben und auch nicht nachgeschrieben hat⁸⁵. Somit sind die Notenspiegel auf 100 % umzurechnen. Für die obere und untere Schranke sind dann die Ergebnisse wieder auf die Anzahl der Schüler/-innen zurückzurechnen und zu runden (s. dazu Kapitel 6.6). Somit können dann auch verschiedene Schranken für unterschiedliche Anzahlen bestimmt werden.

8.3 Die Subjunktion

Wie schon bei den bisherigen Junktoren, die bereits aus der 2-wertigen Logik bekannt sind, möchte ich auch hier zunächst eine Übersicht über die Subjunktion in der 2-wertigen Logik und in den 3-wertigen Logiken geben. In der 2-wertigen Logik ist die Subjunktion:

a	0	0	1	1
b	0	1	0	1
Cab	1	1	0	1

⁸⁵Die Rechtslage über das Nachschreiben von Klassenarbeiten ist, je nach Bundesland, in Deutschland uneinheitlich.

Im Zusammenhang mit der Disjunktion wurde bereits erwähnt, dass bei Łukasiewicz und Zawirski die Subjunktion einer mehrwertigen Logik als $\text{Cab} := \min(1, 1 - a + b)$ definiert ist (s. S. 100). Alternativ ließe sich die Subjunktion auch als $\text{Cab} := \text{ANab} = \max(1 - a, b)$ definieren, falls Aab mit $\text{Aab} := \max(a, b)$ definiert worden ist, was bei Kleene⁸⁶ der Fall ist. Gödel⁸⁷ definiert die Subjunktion mit $\text{Cab} = 1$ (falls $a \leq b$) und $\text{Cab} = b$ (falls $a > b$). Für Zadeh⁸⁸ ist $\text{Cab} = \max(1 - a, \min(a, b))$. Es erstaunt, dass alle 4 recht unterschiedlichen Definitionen in einer 3-wertigen Logik zu sehr ähnlichen Ergebnissen führen:

a	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	1	
b	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	1	
Cab	1	1	1	$\frac{1}{2}$	1	1	0	$\frac{1}{2}$	1	Łukasiewicz, Zawirski, Reichenbach ⁸⁹
	1	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	1	Kleene ($\text{Cab} := \text{ANab} = \max(1 - a, b)$)
	1	1	1	0	1	1	0	$\frac{1}{2}$	1	Gödel, Słupecki ⁹⁰
	1	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	Zadeh
	1	1	1	1	1	1	0	0	1	Reichenbach, Bočvar ⁹¹
	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	Bočvar
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	Reichenbach

Die 3. Subjunktion von Reichenbach (letzte Zeile) erfüllt nicht die Normalbedingung (s. die fettgedruckten Spalten 1 und 3). Die 2. Subjunktion von Reichenbach bzw. die 1. Subjunktion von Bočvar (drittletzte Zeile) widersprechen mit $C\frac{1}{2}0 = 1$ der Erwartung, dass Cab nicht „wahr“ ist, wenn das Vorderglied a größer als das Hinterglied b ist. Die 2. Subjunktion von Bočvar (vorletzte Zeile) widerspricht mit $C0\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ (statt 1) und $C\frac{1}{2}1 = \frac{1}{2}$ (statt 1) den Prinzipien „ex falso quodlibet“ und „ex quodlibet verum“.

Anhand der 4 Definitionen $\text{Cab} = \min(1, 1 - a + b)$, $\text{Cab} = \max(\text{Na}, b)$, $\text{Cab} = 1$ (falls $a \leq b$) und $\text{Cab} = b$ (falls $a > b$) und $\text{Cab} = \max(1 - a, \min(a, b))$ der Subjunktion in der mehrwertigen Logik möchte ich analog 4 mögliche Definitionen einer Subjunktion in den Prozentuallogiken vorstellen, wobei diese Definitionen ähnlich wie die Definitionen der inneren Junktoren N_m , $\#Z_m$ und $\#\acute{Z}_m$ aufgebaut sind (s. Kap. 5.2):

⁸⁶[5] Bolc, Borovik, S. 74

⁸⁷[5] Bolc, Borovik, S. 84

⁸⁸[18] Kruse et. al., S. 59

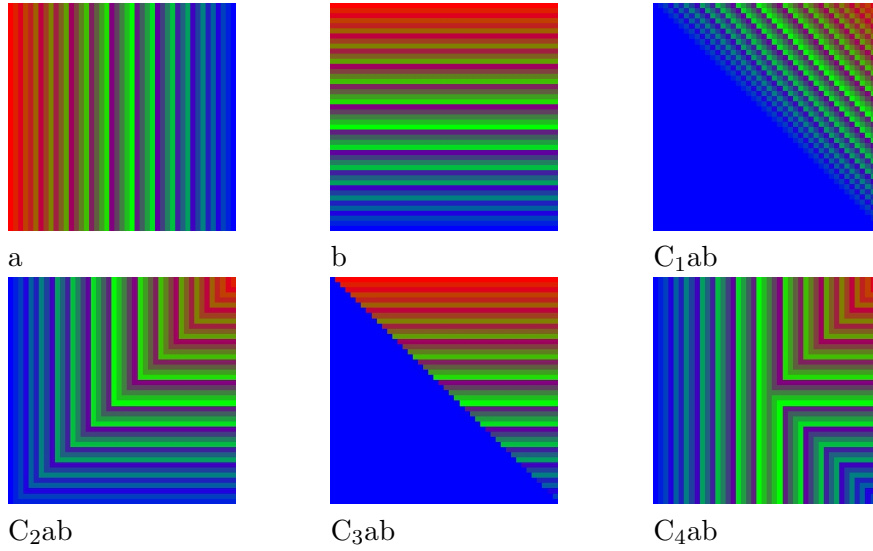
⁸⁹[5] Bolc, Borovik, S. 75

⁹⁰[5] Bolc, Borovik, S. 76

⁹¹[5] Bolc, Borovik, S. 65

$$\begin{aligned}
C_{1ab} &:= \text{ge}_{j,n}(\min(m, m - \text{nr}_{j,n}(a) + \text{nr}_{j,n}(b))) \\
C_{2ab} &:= \text{ge}_{j,n}(\max(\text{nr}_{j,n}(N_m a), \text{nr}_{j,n}(b))) \\
&= \text{ge}_{j,n}(\max((m + 1 - \text{nr}_{j,n}(a)), \text{nr}_{j,n}(b))) \\
C_{3ab} &:= \begin{cases} W_n & \text{falls } \text{nr}_{j,n}(a) \leq \text{nr}_{j,n}(b) \\ b & \text{falls } \text{nr}_{j,n}(a) > \text{nr}_{j,n}(b) \end{cases} \\
C_{4ab} &:= \text{ge}_{j,n}(\max(m + 1 - \text{nr}_{j,n}(a), \min(\text{nr}_{j,n}(a), \text{nr}_{j,n}(b))))
\end{aligned}$$

Nachfolgend die Visualisierung der 4 Subjunktionen, wobei a und b nicht lexikographisch, sondern nach Betrag angeordnet sind:



Alle 4 Visualisierungen haben gemeinsam, dass die rechte obere Ecke rot ist, wo also die Subjunktion von Blau = $(0; 0; 1) = W_n$ und Rot = $(1; 0; 0) = F_n$ zu Rot wird, während die anderen 3 Ecken blau sind. Das bedeutet, dass diese 4 Subjunktionen offensichtlich die Normalbedingung erfüllen:

$$\begin{aligned}
C_1 W_n W_n &= \text{ge}_{j,n}(\min(m, m - \text{nr}_{j,n}(W_n) + \text{nr}_{j,n}(W_n))) = \\
&= \text{ge}_{j,n}(\min(m, m - m + m)) = \text{ge}_{j,n}(\min(m, m)) = \text{ge}_{j,n}(m) = W_n \\
C_1 W_n F_n &= \text{ge}_{j,n}(\min(m, m - \text{nr}_{j,n}(W_n) + \text{nr}_{j,n}(F_n))) = \\
&= \text{ge}_{j,n}(\min(m, m - m + 1)) = \text{ge}_{j,n}(\min(m, 1)) = \text{ge}_{j,n}(1) = F_n \\
C_1 F_n W_n &= \text{ge}_{j,n}(\min(m, m - \text{nr}_{j,n}(F_n) + \text{nr}_{j,n}(W_n))) = \\
&= \text{ge}_{j,n}(\min(m, m - 1 + m)) = \text{ge}_{j,n}(\min(m, 2m - 1)) = \text{ge}_{j,n}(m) = W_n \\
C_1 F_n F_n &= \text{ge}_{j,n}(\min(m, m - \text{nr}_{j,n}(F_n) + \text{nr}_{j,n}(F_n))) = \\
&= \text{ge}_{j,n}(\min(m, m - 1 + 1)) = \text{ge}_{j,n}(\min(m, m)) = \text{ge}_{j,n}(m) = W_n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_2 W_n W_n &= \text{ge}_{j,n}(\max((m+1 - \text{nr}_{j,n}(W_n)), \text{nr}_{j,n}(W_n))) = \\ &\text{ge}_{j,n}(\max((m+1 - m), m)) = \text{ge}_{j,n}(\max((1, m)) = \text{ge}_{j,n}(m) = W_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_2 W_n F_n &= \text{ge}_{j,n}(\max((m+1 - \text{nr}_{j,n}(W_n)), \text{nr}_{j,n}(F_n))) = \\ &\text{ge}_{j,n}(\max((m+1 - m), 1)) = \text{ge}_{j,n}(\max((1, 1)) = \text{ge}_{j,n}(1) = F_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_2 F_n W_n &= \text{ge}_{j,n}(\max((m+1 - \text{nr}_{j,n}(F_n)), \text{nr}_{j,n}(W_n))) = \\ &\text{ge}_{j,n}(\max((m+1 - 1), m)) = \text{ge}_{j,n}(\max((m, m)) = \text{ge}_{j,n}(m) = W_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_2 F_n F_n &= \text{ge}_{j,n}(\max((m+1 - \text{nr}_{j,n}(F_n)), \text{nr}_{j,n}(F_n))) = \\ &\text{ge}_{j,n}(\max((m+1 - 1), 1)) = \text{ge}_{j,n}(\max((m, 1)) = \text{ge}_{j,n}(m) = W_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_3 W_n W_n &= W_n, \text{ weil } \text{nr}_{j,n}(a) = \text{nr}_{j,n}(W_n) = m \leq \text{nr}_{j,n}(b) = \text{nr}_{j,n}(W_n) = m \\ C_3 W_n F_n &= F_n, \text{ weil } \text{nr}_{j,n}(a) = \text{nr}_{j,n}(W_n) = m > \text{nr}_{j,n}(b) = \text{nr}_{j,n}(F_n) = 1 \\ C_3 F_n W_n &= W_n, \text{ weil } \text{nr}_{j,n}(a) = \text{nr}_{j,n}(F_n) = 1 \leq \text{nr}_{j,n}(b) = \text{nr}_{j,n}(W_n) = m \\ C_3 F_n F_n &= W_n, \text{ weil } \text{nr}_{j,n}(a) = \text{nr}_{j,n}(F_n) = 1 \leq \text{nr}_{j,n}(b) = \text{nr}_{j,n}(F_n) = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_4 W_n W_n &= \text{ge}_{j,n}(\max(m+1 - \text{nr}_{j,n}(W_n), \min(\text{nr}_{j,n}(W_n), \text{nr}_{j,n}(W_n)))) = \\ &\text{ge}_{j,n}(\max(m+1 - m, \min(m, m))) = \text{ge}_{j,n}(\max(1, m)) = \text{ge}_{j,n}(m) = W_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_4 W_n F_n &= \text{ge}_{j,n}(\max(m+1 - \text{nr}_{j,n}(W_n), \min(\text{nr}_{j,n}(W_n), \text{nr}_{j,n}(F_n)))) = \\ &\text{ge}_{j,n}(\max(m+1 - m, \min(m, 1))) = \text{ge}_{j,n}(\max(1, 1)) = \text{ge}_{j,n}(1) = F_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_4 F_n W_n &= \text{ge}_{j,n}(\max(m+1 - \text{nr}_{j,n}(F_n), \min(\text{nr}_{j,n}(F_n), \text{nr}_{j,n}(W_n)))) = \\ &\text{ge}_{j,n}(\max(m+1 - 1, \min(1, m))) = \text{ge}_{j,n}(\max(m, 1)) = \text{ge}_{j,n}(m) = W_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_4 F_n F_n &= \text{ge}_{j,n}(\max(m+1 - \text{nr}_{j,n}(F_n), \min(\text{nr}_{j,n}(F_n), \text{nr}_{j,n}(F_n)))) = \\ &\text{ge}_{j,n}(\max(m+1 - 1, \min(1, 1))) = \text{ge}_{j,n}(\max(m, 1)) = \text{ge}_{j,n}(m) = W_n \end{aligned}$$

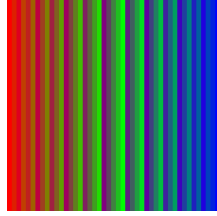
Eine weitere Bedingung, die eine Subjunktion erfüllen sollte, ist, dass aus a folgt bzw., dass $C_{aa} = W_n$ ist. Diese Bedingung erfüllen offensichtlich die beiden Subjunktionen C_1 und C_3 , da in den beiden Visualisierungen die Diagonale von links oben nach rechts unten blau ist:

$$\begin{aligned} C_{1aa} &= \text{ge}_{j,n}(\min(m, m - \text{nr}_{j,n}(a) + \text{nr}_{j,n}(a))) = \\ &\text{ge}_{j,n}(\min(m, m)) = \text{ge}_{j,n}(m) = W_n \text{ und} \\ C_{3aa} &= W_n, \text{ weil } \text{nr}_{j,n}(a) \leq \text{nr}_{j,n}(a). \end{aligned}$$

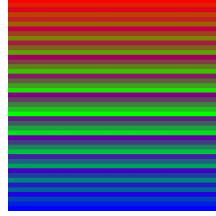
Ich möchte die Betrachtung der 4 Subjunktionen C_1 , C_2 , C_3 und C_4 nicht weiter vertiefen, da ich bereits in Kapitel 5.2 kritisiert hatte, dass die Definition von Junktoren mit Hilfe von $\text{nr}_{j,n}(a)$ und $\text{ge}_{j,n}(k)$ die Prozentuallogiken zu einer herkömmlichen mehrwertigen Logik mit Zahlen als Geltungswerte reduziert. Daher möchte ich eine Subjunktion vorschlagen, die nicht auf $\text{nr}_{j,n}(a)$ und $\text{ge}_{j,n}(k)$ zurückgreift, sondern C_{ab} über die Disjunktion, wie in der 2. Zeile der Tabelle zu verschiedenen Subjunktionen in einer 3-wertigen Logik (s. S. 106), definiert:

Definition 29. Die *Subjunktion* **Cab** ($a \rightarrow b$) zweier Geltungswerte $a \in \mathfrak{G}_{j,n}$ und $b \in \mathfrak{G}_{j,n}$ ist folgendermaßen definiert:

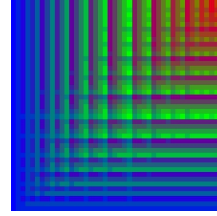
$$\text{Cab} := \text{ANab}$$



a



b



Cab

Als Beispiel für eine Subjunktion dient noch einmal das Beispiel zur Disjunktion von Seite 102, nur dass jetzt a durch Na ersetzt wurde (die Objekte werden wiederum als Prozentwerte angegeben). Dabei dient dieses Beispiel im Moment nur als reines Rechenbeispiel. Auf die Interpretation komme ich am Ende dieses Kapitels noch einmal zu sprechen:

$$\begin{aligned} a &= (10; 5; 25; 15; 15; 30) \\ b &= (20; 20; 10; 5; 25; 20) \\ \text{Cab} &= (20; 15; 10; 10; 25; 20) \end{aligned}$$

Da die Subjunktion mit Hilfe der Disjunktion definiert wurde, lassen sich eine Reihe von Gesetzen aus Gesetzen der Disjunktion ableiten:

1. $\text{CW}_n a = \text{ANW}_n a = \text{AF}_n a = a$ (wg. Gesetz 66)
2. $\text{CaW}_n = \text{ANaW}_n = \text{AW}_n \text{Na} = W_n$ (wg. der Gesetze 66 und 67)
3. $\text{CF}_n a = \text{ANF}_n a = \text{AW}_n a = W_n$ (wg. Gesetz 66)
4. $\text{CaF}_n = \text{ANaF}_n = \text{AF}_n \text{Na} = \text{Na}$ (wg. der Gesetze 66 und 67)
5. $\text{Cab} = \text{ANab} = \text{AbNa} = \text{CNbNa}$ (wg. Gesetz 67)
6. $\text{CNaa} = \text{ANNaa} = \text{Aaa} = a$ (wg. Gesetz 68)

Diese 6 Herleitungen sollen in den folgenden 4 Gesetzen zusammengefasst werden:

Gesetz 70. $\text{CaW}_n = W_n$ (ex quodlibet verum) und
 $\text{CF}_n a = W_n$ (ex falso quodlibet)

Gesetz 71. $\text{CW}_n a = a$ und $\text{CaF}_n = \text{Na}$

Gesetz 72. $\text{Cab} = \text{CNbNa}$ (Kontrapositionsgesetz)

Gesetz 73. $\text{CNaa} = a$

Somit lässt sich auch zeigen, dass Cab, wie schon anhand der Visualisierung zu erwarten war, die Normalbedingung erfüllt:

$$CW_nW_n = W_n \text{ (wg. 1. und wg. 2.)}$$

$$CW_nF_n = F_n \text{ (wg. 1. und wg. 4.)}$$

$$CF_nW_n = W_n \text{ (wg. 2. und wg. 3.)}$$

$$CF_nF_n = W_n \text{ (wg. 3. und wg. 4.)}$$

Nachdem ich bisher einige Subjunktionen in der Prozentuallogik beschrieben und untersucht habe, ohne dabei jedoch auf ihre Anwendbarkeit zu achten, ist spätestens jetzt der Moment gekommen, um 2 Fragen zu stellen:

Wie interpretiere ich die Subjunktion?

Was soll, auf Grundlage dieser Interpretation, eine Subjunktion leisten?

Bei einer Subjunktion denkt man zunächst an „Wenn ... dann“. Diese Interpretation kann ich in der Subjunktion Cab innerhalb der Prozentuallogiken nicht erkennen, zumal in der Definition von Cab = ANab die Negation vorkommt. Doch wie ist die Negation bzw. Spiegelung von Geltungswerten, deren Objekte ja eine ansteigender Intensität beschreiben, zu interpretieren? Daher möchte ich zur Interpretation der Subjunktion zunächst nur auf die entsprechende Tabelle in der klassischen 2-wertigen Logik schauen (s. S. 105). Ich deute diese Tabelle als die Beschreibung der Aufeinanderfolge zweier Zahlen, wobei die Subjunktion eine Verkleinerung von Vorder- zu Hinterglied hervorhebt ($1 \rightarrow 0 = 0$), indem die Subjunktion (nur) an dieser Stelle nicht 1 ist. In der 2-wertigen Logik ist die Subjunktion von a und b also genau dann 1, wenn das Vorderglied sich zum Hinterglied hin nicht verkleinert hat. Genau das gleiche steht in der Definition der Subjunktion einer mehrwertigen Logik von Gödel ($Cab = 1$, falls $a \leq b$). Und auch in der Definition von Łukasiewicz ist $Cab = \min(1, 1 - a + b)$ dann 1, falls $1 - a + b \geq 1 \Leftrightarrow -a + b \geq 0 \Leftrightarrow b \geq a$. Da die Subjunktionen C_{1ab} und C_{3ab} genaue Übertragungen der Definitionen von Łukasiewicz und Gödel auf die Prozentuallogiken sind, gilt auch für sie, dass dann $C_{1ab} = C_{3ab} = W_n$ ist, wenn $nr_{j,n}(a) \leq nr_{j,n}(b)$ ist, und $nr_{j,n}(a) \leq nr_{j,n}(b) \Leftrightarrow |a| \leq |b|$.

Allerdings unterscheidet weder die Subjunktion der 2-wertigen Logik noch die Subjunktionen von Łukasiewicz und Gödel zwischen den beiden Fällen, ob eine Vergrößerung stattfand ($a < b$) oder ob a und b gleich sind.

Wie sollte nun ein Junktor beschaffen sein, der die Veränderung von a nach b möglichst genau beschreibt?

- Bei maximaler Vergrößerung ($0 \rightarrow 1$) sollte das Ergebnis 1 sein.
- Bei maximaler Verkleinerung ($1 \rightarrow 0$) sollte das Ergebnis 0 sein.
- Gibt es weder eine Vergrößerung noch Verkleinerung ($0 \rightarrow 0$ oder $1 \rightarrow 1$), so sollte das Ergebnis weder 1 noch 0 sein, sondern $\frac{1}{2}$, womit dann allerdings die Normalbedingung der Subjunktion nicht mehr erfüllt ist.
- Sollte die Vergrößerung geringer ausfallen als bei $0 \rightarrow 1$ (z.B. $0 \rightarrow \frac{1}{2}$), so sollte das Ergebnis kleiner als 1 aber größer als $\frac{1}{2}$ sein.
- Entsprechendes gilt für eine geringere Verkleinerung (größer als 0 aber kleiner als $\frac{1}{2}$).
- Sehr wichtig ist mir, dass man die Veränderung nicht nur am Betrag ablesen kann, wie bei den Subjunktionen C_{1ab} bis C_{4ab} , sondern an jeder einzelnen Stelle der Tupel.

Auch die oben definierte Subjunktion C_{ab} erfüllt, obwohl sie nicht mit Hilfe von $nr_{j,n}(a)$ und $ge_{j,n}(x)$ definiert worden ist, nicht die letzte Bedingung, dass die einzelnen Objekte von C_{ab} Auskunft über die Veränderung geben, denn im obigen Beispiel von C_{ab} werden sowohl $\alpha_1 = 10\%$ und $\beta_1 = 20\%$ (Vergrößerung) als auch $\alpha_6 = 30\%$ und $\beta_1 = 20\%$ (Verkleinerung) jeweils zu 20% . Somit möchte ich einen Junktor definieren, der den Bedingungen mehr entspricht:

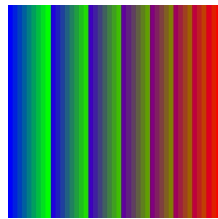
8.4 Die Progression

Definition 30. Die *Progression* **Pab** zweier Geltungswerte $a \in \mathfrak{G}_{j,n}$ und $b \in \mathfrak{G}_{j,n}$ ist:

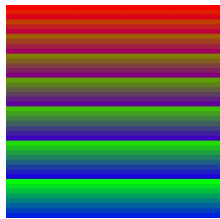
$Pab := (\frac{1-\alpha_1+\beta_1}{n}; \frac{1-\alpha_2+\beta_2}{n}; \dots; \frac{1-\alpha_n+\beta_n}{n})$. Durch die Progression gehen die Objekte α_i und β_i in

$f_{i,P}(\alpha_i, \beta_i) = \frac{1-\alpha_i+\beta_i}{n}$ über.

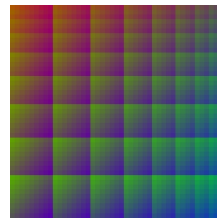
Die entsprechende Visualisierung ist:



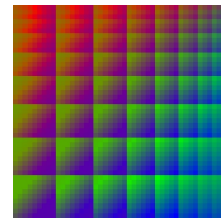
a



b



Pab



$Q_y Pab (1 \leq y \leq 2)$

Es fällt auf, dass die Visualisierung von Pab, ähnlich der Visualisierung der Restation Ra (s. S. 58), einen „Grauschleier“ hat, da $\frac{1-\alpha_i+\beta_i}{n}$ um so näher bei $\frac{1}{n}$ liegt, je näher α_i bei β_i liegt, und die Farbe des Geltungswertes $(\frac{1}{n}; \frac{1}{n}; \frac{1}{n})$ grau ist. Um diesen Grauschleier zu beseitigen, habe ich auf die 45 mal 45 Bildpunkte/Geltungswerte der Visualisierung eine Quaestation Q_y mit $1 \leq y \leq 2$ angewendet, wobei bei jedem Bildpunkt darauf zu achten war, dass $y \leq \frac{1}{1-n\alpha_{\min}}$ ist (s. Gesetz 36).

Ein Beispiel für die Progression Pab ist:

$$\begin{array}{ll} a = & (0,10; 0,20; 0,25; 0,30; 0,15) \quad |a| = 0,55 \\ b = & (0,20; 0,20; 0,10; 0,05; 0,45) \quad |b| = 0,5875 \\ \text{Pab} = & (0,22; 0,20; 0,17; 0,15; 0,26) \quad |\text{Pab}| = 0,5075 \\ \hline Q_4\text{Pab} = & (0,28; 0,20; 0,08; 0,00; 0,44) \end{array}$$

Da $|a|$ zu $|b|$ hin etwas größer wird, liegt $|\text{Pab}|$ knapp über $\frac{1}{n}$ (s.u.). Dort, wo α_i und β_i gleich sind (hier bei $i = 2$), ist $f_{i,P}(\alpha_i, \beta_i) = \frac{1}{n}$ (hier $\frac{1}{5} = 0,20$). Dort, wo $\alpha_i > \beta_i$ ist (hier bei $i = 3$ und $i = 4$), ist $f_{i,P}(\alpha_i, \beta_i) < \frac{1}{n}$ und dort, wo $\alpha_i < \beta_i$ ist (hier bei $i = 1$ und $i = 5$), ist $f_{i,P}(\alpha_i, \beta_i) > \frac{1}{n}$.

Doch bevor ich diese Beobachtungen weiter vertiefe, möchte ich zunächst sicherstellen, dass die Summe der Objekte von Pab 1 ist, und dass die Objekte im Intervall $[0, 1]$ liegen;

$$\begin{aligned} & \frac{1-\alpha_1+\beta_1}{n} + \frac{1-\alpha_2+\beta_2}{n} + \dots + \frac{1-\alpha_n+\beta_n}{n} = \\ & \frac{1}{n} - \frac{\alpha_1}{n} + \frac{\beta_1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{\alpha_2}{n} + \frac{\beta_2}{n} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{\alpha_n}{n} + \frac{\beta_n}{n} = \\ & n \cdot \frac{1}{n} - \frac{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n}{n} + \frac{\beta_1+\beta_2+\dots+\beta_n}{n} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = 1 \end{aligned}$$

Die Objekte von Pab sind minimal, wenn $\alpha_i = 1$ und $\beta_i = 0$ sind:

$$\frac{1-1+0}{n} = \frac{0}{n} \geq 0.$$

Die Objekte von Pab sind maximal, wenn $\alpha_i = 0$ und $\beta_i = 1$ sind:

$$\frac{1-0+1}{n} = \frac{2}{n} \leq 1, \text{ da } n \geq 2 \text{ ist.}$$

$\frac{2}{n}$ kann allerdings nur dann zu 1 werden, wenn $n = 2$ ist. Somit können durch Pab (falls $n > 2$ ist) die Geltungswerte W_n und F_n nicht erzeugt werden. Damit kann Pab auch nicht als Subjunktion betrachtet werden, obwohl Pab zur Berechnung der Objekte den Term $1 - \alpha_i + \beta_i$ benutzt, der auch schon bei der Definition der Subjunktion von Łukasiewicz Verwendung fand, da die Normalbedingung für die Subjunktion in allen 4 Punkten verfehlt wird (s.u.). Und somit werden auch die ersten beiden Anforderungen an einen Junktor, der eine Veränderung von a nach b beschreibt (s. S. 110) nicht erfüllt, dass nämlich $PF_nW_n = W_n$ ist und dass $PW_nF_n = F_n$ ist. Besser sieht es mit den anderen Anforderungen von Seite 110 aus.

Gesetz 74.

$$|\text{Pab}| > \frac{1}{2}, \text{ falls } |a| < |b|$$

$$|\text{Pab}| = \frac{1}{2}, \text{ falls } |a| = |b|$$

$$|\text{Pab}| < \frac{1}{2}, \text{ falls } |a| > |b|$$

Falls $|a| < |b|$ und somit $\frac{\alpha_2}{n-1} + \frac{2\alpha_3}{n-1} + \dots + \frac{(n-1)\alpha_n}{n-1} < \frac{\beta_2}{n-1} + \frac{2\beta_3}{n-1} + \dots + \frac{(n-1)\beta_n}{n-1}$

dann ist auch $\frac{\alpha_2}{n(n-1)} + \frac{2\alpha_3}{n(n-1)} + \dots + \frac{(n-1)\alpha_n}{n(n-1)} < \frac{\beta_2}{n(n-1)} + \frac{2\beta_3}{n(n-1)} + \dots + \frac{(n-1)\beta_n}{n(n-1)}$

und somit $|\text{Pab}| = \frac{1-\alpha_2+\beta_2}{n(n-1)} + \frac{2(1-\alpha_3+\beta_3)}{n(n-1)} + \dots + \frac{(n-1)(1-\alpha_n+\beta_n)}{n(n-1)} =$

$$\frac{1}{n(n-1)} - \frac{\alpha_2}{n(n-1)} + \frac{\beta_2}{n(n-1)} + \frac{2}{n(n-1)} - \frac{2\alpha_3}{n(n-1)} + \frac{2\beta_3}{n(n-1)} + \dots +$$

$$\frac{n-1}{n(n-1)} - \frac{(n-1)\alpha_n}{n(n-1)} + \frac{(n-1)\beta_n}{n(n-1)} =$$

$$\left(\frac{1}{n(n-1)} + \frac{2}{n(n-1)} + \dots + \frac{n-1}{n(n-1)}\right) - \left(\frac{\alpha_2}{n(n-1)} + \frac{2\alpha_3}{n(n-1)} + \dots + \frac{(n-1)\alpha_n}{n(n-1)}\right) +$$

$$\left(\frac{\beta_2}{n(n-1)} + \frac{2\beta_3}{n(n-1)} + \dots + \frac{(n-1)\beta_n}{n(n-1)}\right) =$$

$$\frac{(n-1)n}{2n(n-1)} - \frac{1}{n}|a| + \frac{1}{n}|b| >$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{n}|a| + \frac{1}{n}|a| = \frac{1}{2}$$

Falls $|a| = |b|$ ist, muss in dem Beweis das Kleiner- und das Größerzeichen jeweils durch ein Gleichheitszeichen ersetzt werden. Falls $|a| > |b|$ ist, muss in dem Beweis das Kleiner- und das Größerzeichen miteinander vertauscht werden.

Gesetz 75.

$$f_{i,P}(\alpha_i, \beta_i) > \frac{1}{n}, \text{ falls } \alpha_i < \beta_i$$

$$f_{i,P}(\alpha_i, \beta_i) = \frac{1}{n}, \text{ falls } \alpha_i = \beta_i$$

$$f_{i,P}(\alpha_i, \beta_i) < \frac{1}{n}, \text{ falls } \alpha_i > \beta_i$$

Falls $\alpha_i < \beta_i$ ist, ist $f_{i,P}(\alpha_i, \beta_i) = \frac{1-\alpha_i+\beta_i}{n} > \frac{1-\alpha_i+\alpha_i}{n} = \frac{1}{n}$. Die beiden anderen Beweise für $\alpha_i = \beta_i$ und $\alpha_i > \beta_i$ verlaufen wieder entsprechend.

Somit zeigt Pab sowohl anhand des Betrages als auch anhand der Objekte an, ob der Geltungswert a bzw. das Objekt α_i größer oder kleiner geworden oder gleich geblieben ist.

Anhand der Objekte von Pab lässt sich außerdem zeigen, um wieviel der Betrag von a zu b größer bzw. kleiner geworden ist:

$$\textbf{Gesetz 76.} \quad \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i (n \cdot f_{k,P}(\alpha_k, \beta_k) - 1) = |a| - |b|$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
& (n \cdot \frac{1-\alpha_1+\beta_1}{n} - 1 + \\
& n \cdot \frac{1-\alpha_1+\beta_1}{n} - 1 + n \cdot \frac{1-\alpha_2+\beta_2}{n} - 1 + \\
& \vdots \\
& n \cdot \frac{1-\alpha_1+\beta_1}{n} - 1 + n \cdot \frac{1-\alpha_2+\beta_2}{n} - 1 + \dots + n \cdot \frac{1-\alpha_n+\beta_n}{n} - 1) / (n-1) = \\
& (1 - \alpha_1 + \beta_1 - 1 + \\
& 1 - \alpha_1 + \beta_1 - 1 + 1 - \alpha_2 + \beta_2 - 1 + \\
& \vdots \\
& 1 - \alpha_1 + \beta_1 - 1 + 1 - \alpha_2 + \beta_2 - 1 + \dots + 1 - \alpha_n + \beta_n - 1) / (n-1) = \\
& (-\alpha_1 + \beta_1 + \\
& -\alpha_1 + \beta_1 - \alpha_2 + \beta_2 + \\
& \vdots \\
& -\alpha_1 + \beta_1 - \alpha_2 + \beta_2 + \dots - \alpha_n + \beta_n) / (n-1) = \\
& (n(-\alpha_1 + \beta_1) + (n-1)(-\alpha_2 + \beta_2) + (n-2)(-\alpha_3 + \beta_3) + \dots + (n - (n-1))(-\alpha_n + \beta_n)) / (n-1) = (\alpha_1 \text{ und } \beta_1 \text{ ersetzen}) \\
& (n(-(1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \dots - \alpha_n) + (1 - \beta_2 - \beta_3 - \dots - \beta_n)) + \\
& (n-1)(-\alpha_2 + \beta_2) + (n-2)(-\alpha_3 + \beta_3) + \dots + 1 \cdot (-\alpha_n + \beta_n)) / (n-1) = \\
& (-n + n\alpha_2 + n\alpha_3 + \dots + n\alpha_n + n - n\beta_2 - n\beta_3 - \dots - n\beta_n + \\
& (n-1)(-\alpha_2 + \beta_2) + (n-2)(-\alpha_3 + \beta_3) + \dots + (-\alpha_n + \beta_n)) / (n-1) = \\
& (n(\alpha_2 - \beta_2) + n(\alpha_3 - \beta_3) + \dots + n(\alpha_n - \beta_n) + \\
& (n-1)(-\alpha_2 + \beta_2) + (n-2)(-\alpha_3 + \beta_3) + \dots + (-\alpha_n + \beta_n)) / (n-1) = \\
& (n(\alpha_2 - \beta_2) + n(\alpha_3 - \beta_3) + \dots + n(\alpha_n - \beta_n) + \\
& (-n+1)(\alpha_2 - \beta_2) + (-n+2)(\alpha_3 - \beta_3) + \dots + (-1)(\alpha_n - \beta_n)) / (n-1) = \\
& (1(\alpha_2 - \beta_2) + 2(\alpha_3 - \beta_3) + \dots + (n-1)(\alpha_n - \beta_n)) / (n-1) = \\
& \frac{\alpha_2 - \beta_2}{n-1} + 2\frac{\alpha_3 - \beta_3}{n-1} + \dots + (n-1)\frac{\alpha_n - \beta_n}{n-1} = \\
& \frac{\alpha_2}{n-1} + \frac{2\alpha_3}{n-1} + \dots + \frac{(n-1)\alpha_n}{n-1} - \frac{\beta_2}{n-1} - \frac{2\beta_3}{n-1} - \dots - \frac{(n-1)\beta_n}{n-1} = |a| - |b|
\end{aligned}$$

Wenn Pab weder W_n noch F_n werden kann, was ist dann die Progression von Kombinationen von W_n und F_n ?

Gesetz 77.

$PW_n W_n = PF_n F_n = K_n$, $PW_n F_n = (\frac{2}{n}; \frac{1}{n}; \dots; \frac{1}{n}; 0)$ und $PF_n W_n = (0; \frac{1}{n}; \dots; \frac{1}{n}; \frac{2}{n})$.

$$\begin{aligned}
PW_n W_n &= (\frac{1-0+0}{n}; \frac{1-0+0}{n}; \dots; \frac{1-0+0}{n}; \frac{1-1+1}{n}) = (\frac{1}{n}; \frac{1}{n}; \dots; \frac{1}{n}; \frac{1}{n}) = K_n \\
PF_n F_n &= (\frac{1-1+1}{n}; \frac{1-0+0}{n}; \dots; \frac{1-0+0}{n}; \frac{1-0+0}{n}) = (\frac{1}{n}; \frac{1}{n}; \dots; \frac{1}{n}; \frac{1}{n}) = K_n \\
PW_n F_n &= (\frac{1-0+1}{n}; \frac{1-0+0}{n}; \dots; \frac{1-0+0}{n}; \frac{1-1+0}{n}) = (\frac{2}{n}; \frac{1}{n}; \dots; \frac{1}{n}; 0) \\
PF_n W_n &= (\frac{1-1+0}{n}; \frac{1-0+0}{n}; \dots; \frac{1-0+0}{n}; \frac{1-0+1}{n}) = (0; \frac{1}{n}; \dots; \frac{1}{n}; \frac{2}{n})
\end{aligned}$$

Dass $PW_n W_n = PF_n F_n = K_n$ ist, war eigentlich schon vorher klar, denn aus der 2. Zeile von Gesetz 75 folgt, dass

Gesetz 78. $Paa = K_n$

Die Progression lässt sich jedoch nicht nur dazu nutzen, um Veränderungen bei 2 Geltungswerten anzuzeigen, sondern auch dazu, mit Hilfe der inversen Zyklation Veränderungen innerhalb eines Geltungswertes bzw. zwischen den Objekten zu beschreiben. Dazu ein Beispiel (ohne den gemeinsamen Hauptnenner 20):

$$\begin{aligned} a &= (1; 2; 4; 4; 9) \\ \acute{Z}a &= (2; 4; 4; 9; 1) \\ Pa\acute{Z}a &= (4,2; 4,4; 4; 5; 2,4) \end{aligned}$$

Von $\alpha_3 = \frac{4}{20}$ zu $\alpha_4 = \frac{4}{20}$ gibt es keine Veränderung und $f_{3,P}(\alpha_3, \alpha_4) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} = \frac{1}{n}$. Von α_1 zu α_2 , von α_2 zu α_3 und von α_4 zu α_5 wurden die Objekte größer und sowohl $f_{1,P}(\alpha_1, \alpha_2)$ als auch $f_{2,P}(\alpha_2, \alpha_3)$ als auch $f_{4,P}(\alpha_4, \alpha_5)$ sind größer als $\frac{1}{n}$. Somit sind in diesem Beispiel die ersten $n-1$ Objekte von $Pa\acute{Z}a$ größer oder gleich $\frac{1}{n}$, was genau dann der Fall ist, wenn a aufsteigend sortiert war (s. Kap. 4.3).

Für den Betrag der Progression $Pa\acute{Z}a$ gilt außerdem:

Gesetz 79. $|Pa\acute{Z}a| = \frac{1}{2} - \frac{1-n\alpha_1}{n(n-1)}$

$$\begin{aligned} |Pa\acute{Z}a| &= \frac{1-\alpha_2+\alpha_3}{n(n-1)} + \frac{2-2\alpha_3+2\alpha_4}{n(n-1)} + \frac{3-3\alpha_4+3\alpha_5}{n(n-1)} + \dots + \frac{(n-1)-(n-1)\alpha_n+(n-1)\alpha_1}{n(n-1)} = \\ &= \frac{1-\alpha_2+\alpha_3+2-2\alpha_3+2\alpha_4+3-3\alpha_4+3\alpha_5+\dots+(n-1)-(n-1)\alpha_n+(n-1)\alpha_1}{n(n-1)} = \\ &= \frac{\frac{(n-1)n}{2}-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4-\dots-\alpha_n+(n-1)\alpha_1}{n(n-1)} = \frac{1}{2} - \frac{1-\alpha_1-(n-1)\alpha_1}{n(n-1)} = \frac{1}{2} - \frac{1-n\alpha_1}{n(n-1)} \end{aligned}$$

Für das obige Beispiel $Pa\acute{Z}a = (4,2; 4,4; 4; 5; 2,4)$ ergibt die Berechnung des Betrages:

$$|Pa\acute{Z}a| = \frac{4,4}{20 \cdot 4} + \frac{2 \cdot 4}{20 \cdot 4} + \frac{3 \cdot 5}{20 \cdot 4} + \frac{4 \cdot 2,4}{20 \cdot 4} = \frac{4,4}{80} + \frac{8}{80} + \frac{15}{80} + \frac{9,6}{80} = \frac{37}{80}$$

Laut Gesetz 79 ist ebenfalls:

$$|Pa\acute{Z}a| = \frac{1}{2} - \frac{1-n\alpha_1}{n(n-1)} = \frac{1}{2} - \frac{1-5 \cdot \frac{1}{20}}{5 \cdot 4} = \frac{1}{2} - \frac{1-\frac{1}{4}}{20} = \frac{40}{80} - \frac{3}{80} = \frac{37}{80}$$

8.5 Der zweistellige d -Junktor

Nachdem ich für mehrere Geltungswerte bereits eine obere und untere Schranke definiert habe, ist es naheliegend, auch einen „durchschnittlichen“ Geltungswert zu berechnen. Dafür bietet sich das arithmetische Mittel $\frac{\alpha_i + \beta_i}{2}$ an.

Allerdings habe ich aus verschiedenen Gründen zusätzlich einen Parameter d eingefügt:

- Durch einen Parameter können die Geltungswerte a und b unterschiedlich gewichtet werden. Fand z.B. bei mehreren Versuchen ein Versuch unter nicht ganz optimalen Bedingungen statt, so kann der entsprechende Geltungswert bei der Berechnung eines durchschnittlichen Versuchsergebnisses schwächer berücksichtigt werden. Wurde stattdessen z.B. die letzte Klassenarbeit im Schuljahr als eine Art Abschlussprüfung konzipiert, so kann diese Arbeit eine stärkere Berücksichtigung finden.
- In Kapitel 53 wurde der zweistellige d -Junktor bereits als einstelliger Junktor verwendet. Durch Modifikation des Parameters d war der Junktor deutlich flexibler anwendbar.
- Durch die Verwendung eines Parameters ist es nicht notwendig (wenn auch vielleicht praktischer), einen h -stelligen d -Junktor zu definieren (s.u.)

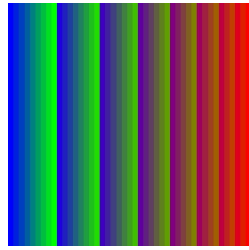
Definition 31. Der d -Junktor ${}^D Y_d$ bildet zwei Geltungswerte $a \in \mathfrak{G}_{j,n}$ und $b \in \mathfrak{G}_{j,n}$ unter der Bedingung $d \in \mathbb{Q}$ und $0 \leq d \leq 1$ folgendermaßen ab:

$${}^D Y_{dab} := ((1-d) \cdot \alpha_1 + d \cdot \beta_1; (1-d) \cdot \alpha_2 + d \cdot \beta_2; \dots; (1-d) \cdot \alpha_n + d \cdot \beta_n).$$

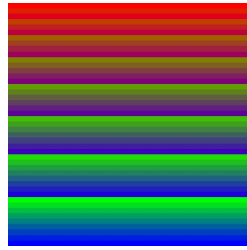
Durch ${}^D Y_{dab}$ gehen die Objekte α_i und β_i in

$$f_{i, {}^D Y_d}(\alpha_i, \beta_i) = (1-d) \cdot \alpha_i + d \cdot \beta_i \text{ über.}$$

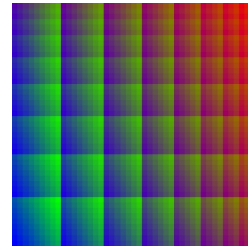
Die entsprechende Visualisierung ist:



$a = {}^D Y_{0ab}$



$b = {}^D Y_{1ab}$



${}^D Y_{\frac{1}{3}ab}$

Es ist ${}^D Y_{0ab} = a$, weil alle Objekte β_i mit 0 multipliziert werden. Entsprechend ist ${}^D Y_{1ab} = b$. In der rechten Abbildung wurde $d = \frac{1}{3}$ gesetzt, sodass der Geltungswert a stärker zum Vorschein kommt. Im nachfolgenden Beispiel mit $d = \frac{4}{5}$ kommt hingegen der 2. Geltungswert stärker zum Tragen:

$$\begin{aligned} a &= (0,10; 0,20; 0,40; 0,30) \\ b &= (0,20; 0,30; 0,40; 0,10) \\ {}^D Y_{\frac{4}{5}ab} &= (0,18; 0,28; 0,40; 0,14) \end{aligned}$$

Zunächst möchte ich zeigen, dass die Objekte von ${}^D Y_d ab$ im Intervall $[0, 1]$ liegen: Da $\alpha_i, \beta_i, 1-d$ und d jeweils ≥ 0 sind, ist $(1-d) \cdot \alpha_i + d \cdot \beta_i \geq 0$. Da α_i und β_i jeweils ≤ 1 sind, ist außerdem $(1-d) \cdot \alpha_i + d \cdot \beta_i \leq (1-d) + d = 1 \leq 1$.

Die Summe der Objekte ist:

$$(1-d) \cdot \alpha_1 + d \cdot \beta_1 + (1-d) \cdot \alpha_2 + d \cdot \beta_2 + \cdots + (1-d) \cdot \alpha_n + d \cdot \beta_n = \\ (1-d) \cdot (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) + d \cdot (\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n) = (1-d) \cdot 1 + d \cdot 1 = 1$$

Offensichtlich ist:

Gesetz 80. ${}^D Y_d aa = a$,

denn $(1-d) \cdot \alpha_i + d \cdot \alpha_i = \alpha_i - d \cdot \alpha_i + d \cdot \alpha_i = \alpha_i$. Somit ist auch ${}^D Y_d W_n W_n = W_n$ und ${}^D Y_d F_n F_n = F_n$.

Gesetz 81. ${}^D Y_d W_n F_n = (d; 0; \cdots; 0; 1-d)$ und ${}^D Y_d F_n W_n = (1-d; 0; \cdots; 0; d)$,

denn $(1-d) \cdot 1 + d \cdot 0 = 1-d$, $(1-d) \cdot 0 + d \cdot 1 = d$ und $(1-d) \cdot 0 + d \cdot 0 = 0$.

Gesetz 82. ${}^D Y_d ab = {}^D Y_{1-d} ba$,

denn $(1-d) \cdot \alpha_i + d \cdot \beta_i = d \cdot \beta_i + (1-d) \cdot \alpha_i = (1 - (1-d)) \cdot \beta_i + (1-d) \cdot \alpha_i$

Insbesondere ist dann, wie wegen der Kommutativität der Addition in der Formel für das arithmetische Mittel bereits zu erwarten war, ${}^D Y_{\frac{1}{2}} ab = {}^D Y_{\frac{1}{2}} ba$.

Peter Strehle beschreibt 1984⁹² eine „dreidimensionale, mehrwertige“ Logik⁹³ und definiert in dieser Logik einen Junktor $\bar{\wedge}$, der dem hier vorgestellten d -Junktor (mit $d = \frac{1}{2}$) entspricht^{94,95}:

$a \bar{\wedge} b = (\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3) \bar{\wedge} (\beta_1; \beta_2; \beta_3) = (\gamma_1; \gamma_2; \gamma_3)$ mit

$$\gamma_i := \begin{cases} \frac{\alpha_i + \beta_i}{2}, & \text{falls } \frac{\alpha_i + \beta_i}{2} \in W_{M_i} = \{1, 2, \dots, M_i\}, \text{ wobei } M_i \in \mathbb{N} \text{ ist,} \\ \frac{\alpha_i + \beta_i + 1}{2} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese Definition entspricht $\gamma_i := \lceil \frac{\alpha_i + \beta_i}{2} \rceil$. Der Unterschied zum d -Junktor ist, abgesehen vom Parameter d und der Tatsache, dass die Objekte bei Strehle aus der Menge $W_{M_i} = \{1, 2, \dots, M_i\}$ und nicht aus dem Intervall $[0, 1]$ stammen, dass die Objekte γ_i stets ganze Zahlen sind. Das kann bei mehrfacher Durchschnittsbildung auch von Nachteil sein, wie das folgende Beispiel zeigt, in dem der Durchschnitt der 8 Zahlen 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8 und 10 jeweils paarweise berechnet wird (links nur mit ganzen Zahlen wie bei Strehle, rechts auch mit Dezimalbrüchen):

⁹²[30] Strehle S. 65ff

⁹³[17] Kreiser, Gottwald S. 71ff

⁹⁴[17] Kreiser, Gottwald S. 76f

⁹⁵In Kapitel 10 auf der Seite 128 wird noch etwas ausführlicher auf die Logik von P. Strehle eingegangen.

$$\begin{array}{ll}
\frac{1+2+1}{2} = 2; \frac{3+5}{2} = 4; \frac{6+7+1}{2} = 7; \frac{8+10}{2} = 9 & \frac{1+2}{2} = 1,5; \frac{3+5}{2} = 4; \frac{6+7}{2} = 6,5; \frac{8+10}{2} = 9 \\
\frac{2+4}{2} = 3; \frac{7+9}{2} = 8 & \frac{1,5+4}{2} = 2,75; \frac{6,5+9}{2} = 7,75 \\
\frac{3+8+1}{2} = 6 & \frac{2,75+7,75}{2} = 5,25
\end{array}$$

Runde ich, wie in Kapitel 6.6 thematisiert, erst nach Abschluss der Rechnung das Ergebnis 5,25 auf die ganze Zahl 5, so beträgt die Abweichung 0,25, also etwa 4,76 %, statt des Dreifachen, nämlich 14,29 %.

Im vorherigen Beispiel wurde nicht zufällig der Durchschnitt von 8 Zahlen berechnet, denn $8 = 2^3$. Weicht die Anzahl der Zahlen jedoch von 2^n ab, so reicht der Term $\frac{\alpha_i + \beta_i}{2}$ zur Durchschnittsberechnung nicht mehr aus:

Ein h -stelliger d -Junktor für den Durchschnitt von mehr als 2 Geltungswerten bzw. von h Geltungswerten lässt sich jedoch folgendermaßen durch $(h-1)$ 2-stellige d -Junktoren nachbilden:

$${}^D Y_{\frac{1}{h}} {}^D Y_{\frac{1}{h-1}} \cdots {}^D Y_{\frac{1}{4}} {}^D Y_{\frac{1}{3}} {}^D Y_{\frac{1}{2}} a_1 a_2 a_3 \cdots a_{h-1} a_h$$

Gesetz 83. $f_{i, {}^D Y_{\frac{1}{h}}} (\cdots f_{i, {}^D Y_{\frac{1}{4}}} (f_{i, {}^D Y_{\frac{1}{3}}} (f_{i, {}^D Y_{\frac{1}{2}}} (\alpha_{i,1}, \alpha_{i,2}), \alpha_{i,3}), \alpha_{i,4}), \cdots, \alpha_{i,h})$
 $= \frac{\alpha_{i,1} + \alpha_{i,2} + \cdots + \alpha_{i,h}}{h}$

Der Beweis soll mit Hilfe der vollständigen Induktion geführt werden:

Für $h = 2$ ist:

$$f_{i, {}^D Y_{\frac{1}{2}}} (\alpha_{i,1}, \alpha_{i,2}) = (1 - \frac{1}{2}) \cdot \alpha_{i,1} + \frac{1}{2} \cdot \alpha_{i,2} = \frac{1}{2} \alpha_{i,1} + \frac{1}{2} \alpha_{i,2} = \frac{\alpha_{i,1} + \alpha_{i,2}}{2}$$

Es sei:

$$f_{i, {}^D Y_{\frac{1}{h}}} (\cdots f_{i, {}^D Y_{\frac{1}{3}}} (f_{i, {}^D Y_{\frac{1}{2}}} (\alpha_{i,1}, \alpha_{i,2}), \alpha_{i,3}), \cdots, \alpha_{i,h}) = \frac{\alpha_{i,1} + \alpha_{i,2} + \cdots + \alpha_{i,h}}{h}$$

Dann ist (Schritt von h auf $h+1$):

$$\begin{aligned}
& f_{i, {}^D Y_{\frac{1}{h+1}}} (f_{i, {}^D Y_{\frac{1}{h}}} (\cdots f_{i, {}^D Y_{\frac{1}{3}}} (f_{i, {}^D Y_{\frac{1}{2}}} (\alpha_{i,1}, \alpha_{i,2}), \alpha_{i,3}), \cdots, \alpha_{i,h}), \alpha_{i,h+1}) = \\
& f_{i, {}^D Y_{\frac{1}{h+1}}} \left(\frac{\alpha_{i,1} + \alpha_{i,2} + \cdots + \alpha_{i,h}}{h}, \alpha_{i,h+1} \right) = \\
& \left(1 - \frac{1}{h+1} \right) \cdot \frac{\alpha_{i,1} + \alpha_{i,2} + \cdots + \alpha_{i,h}}{h} + \frac{1}{h+1} \cdot \alpha_{i,h+1} = \\
& \left(\frac{h+1}{h+1} - \frac{1}{h+1} \right) \cdot \frac{\alpha_{i,1} + \alpha_{i,2} + \cdots + \alpha_{i,h}}{h} + \frac{1}{h+1} \cdot \alpha_{i,h+1} = \\
& \frac{h}{h+1} \cdot \frac{\alpha_{i,1} + \alpha_{i,2} + \cdots + \alpha_{i,h}}{h} + \frac{1}{h+1} \cdot \alpha_{i,h+1} = \\
& \frac{\alpha_{i,1} + \alpha_{i,2} + \cdots + \alpha_{i,h}}{h+1} + \frac{\alpha_{i,h+1}}{h+1} = \\
& \frac{\alpha_{i,1} + \alpha_{i,2} + \cdots + \alpha_{i,h} + \alpha_{i,h+1}}{h+1}
\end{aligned}$$

9 Eine Anwendung auf Schulabschlüsse

Bisher bezogen sich Anwendungen in der Regel auf Prüfungsergebnisse bzw. Notenspiegel von Klassenarbeiten. Dabei waren diese Anwendungen über die Arbeit verstreut und wurden im Zusammenhang mit dem jeweiligen Junktor thematisiert. Nun möchte ich mögliche Anwendungsbereiche noch einmal zusammenfassen und auf ein anderes Thema anwenden, nämlich auf Schulabschlüsse in Deutschland über den Zeitraum von 25 Jahren vom Schuljahr 1998/99 bis zum Schuljahr 2022/23. Als Quelle dient mir dabei die Datenbank GENESIS-Online des Statistischen Bundesamtes⁹⁶. Aus dieser Datenbank verwende ich die jeweilige Anzahl von Absolventen und Abgängern in Deutschland, differenziert nach Geschlecht und Art der Schulabschlüsse, nämlich „Ohne Hauptschulabschluss“ (ohne Abschluss), „Hauptschulabschluss“ (HS), „Mittlerer Schulabschluss“ (RS), „Fachhochschulreife“ und „Allgemeine Hochschulreife“, wobei ich „Fachhochschulreife“ und „Allgemeine Hochschulreife“ zu einem Ergebnis zusammengefasst habe (Abitur). Zur besseren Vergleichbarkeit habe ich die Ergebnisse von Absolventen und Abgängern bzw. Absolventinnen und Abgängerinnen jeweils auf 100 % umgerechnet.

Die Daten und die entsprechenden Anwendungen bzw. Berechnungen mit den jeweiligen Junktoren finden sich als Tabellenkalkulation bei den Materialien zu dieser Arbeit unter <https://www.untexte.de/logik/>.

Zunächst habe ich die jeweils 4 Prozentwerte für „ohne Abschluss“, „HS“, „RS“ und „Abitur“ zu den 25 Schuljahren einmal für Absolventen und Abgänger und einmal für Absolventinnen und Abgängerinnen als 4 Objekte eines Geltungswertes mit $n = 4$ interpretiert und bekomme somit $25 \cdot 2 = 50$ Geltungswerte, zu denen ich zunächst jeweils den logischen Betrag berechnet habe. Dabei lagen die Beträge für Absolventen und Abgänger (a_m) im Intervall von 0,56 (Sj. 2000/01) bis 0,67 (Sj. 2012/13) und für Absolventinnen und Abgängerinnen (a_w) im Intervall von 0,64 (ebenfalls im Sj. 2000/01) bis 0,72 (ebenfalls im Sj. 2012/13) (nachfolgend jeweils gerundet auf 2 Stellen nach dem Komma):

2001	ohne	HS	RS	Abitur	Summe	Betrag
$a_m =$	11,99 %	28,58 %	38,46 %	20,97 %	100 %	0,56
$a_w =$	7,08 %	22,24 %	42,88 %	27,80 %	100 %	0,64
2013	ohne	HS	RS	Abitur	Summe	Betrag
$a_m =$	6,15 %	19,50 %	42,21 %	32,14 %	100 %	0,67
$a_w =$	4,17 %	14,24 %	42,08 %	39,51 %	100 %	0,72

⁹⁶[29] Statistisches Bundesamt (Destatis), 2024

Mit anderen Worten, im Jahr 2013 gab es die besten Abschlüsse, sowohl für Absolventen und Abgänger als auch für Absolventinnen und Abgängerinnen, im Jahr 2001 die schlechtesten.

Bisher spielten im Zusammenhang mit Anwendungen verschiedene Formen der Veritation eine große Rolle. Bei Klassenarbeiten, die zwar geschrieben, aber noch nicht zurückgegeben waren, war es möglich, die Notengebung nachträglich noch zu verändern bzw. zu verbessern. Bei Schulabschlüssen ist eine Veränderung durch Veritation eher nicht möglich, wenn die Abschlusszeugnisse ausgeteilt und die Ergebnisse statistisch erfasst sind (es sei denn z.B. durch gerichtliche Überprüfung einzelner Abschlüsse). Dennoch kann die Veritation auch bei Daten zu Schulabschlüssen eine Rolle spielen. Angenommen, von Seiten der Politik wird das Ziel vorgegeben, dass sich die Abschlüsse in einem gewissen Zeitraum verbessern, dann wäre eine Veritation sinnvoll, um ein konkretes Ziel zu definieren, z.B. mit der Veritation W_x durch prozentuale Umschichtung. Die nachfolgende Veritation bezieht sich auf die Abschlüsse im Sommer 2023, der prozentuale Anteil x bei der Veritation W_x beträgt $5\% = 0,05$:

	ohne	HS	RS	Abitur	Summe	Betrag
$a =$	7,1 %	16,7 %	43,0 %	33,2 %	100 %	0,674
$W_{0,05}a =$	6,7 %	16,2 %	41,7 %	35,4 %	100 %	0,686

Bei dieser Veritation verbessert sich besonders die Anzahl der Absolventen/Absolventinnen mit Abitur, während sich die Anzahl der Abgänger/-innen ohne Abschluss nur unwesentlich verringert. Möchte man jedoch als Ziel vorgeben, dass sich besonders die Anzahl der Abgänger/-innen ohne Abschluss verringert, böte sich die Veritation mit dem p -Junktor eher an (hier mit $p = 0,7$):

	ohne	HS	RS	Abitur	Summe	Betrag
$a =$	7,1 %	16,7 %	43,0 %	33,2 %	100 %	0,674
${}^pT_{0,7}a =$	4,9 %	17,8 %	43,5 %	33,8	100 %	0,687

Denkbar wäre auch, von einer „Idealsituation“ auszugehen, z.B. $G_4 = (0\%; 20\%; 40\%; 40\%)$, und den realen letzten Schulabschluss a dieser Idealsituation schrittweise anzunähern (z.B. mit $d = 0,7$, $d = 0,5$ und $d = 0,3$):

	ohne	HS	RS	Abitur	Summe	Betrag
$a =$	7,1 %	16,7 %	43,0 %	33,2 %	100 %	0,67
$G_4 =$	0 %	20 %	40 %	40 %	100 %	0,73
${}^dY_{0,7}G_4a =$	5,0 %	17,6 %	42,1 %	35,3 %	100 %	0,69
${}^dY_{0,5}G_4a =$	3,6 %	18,3 %	41,5 %	36,6 %	100 %	0,70
${}^dY_{0,3}G_4a =$	2,1 %	19,0 %	40,9 %	38,0 %	100 %	0,72

Statt nur auf den als Letztes vorliegenden Abschluss a zuzugreifen, wäre es auch denkbar, dass a der Durchschnitt der letzten z.B. 5 Abschlüsse wäre, und zwar ebenfalls mit dem d -Junktore berechnet.

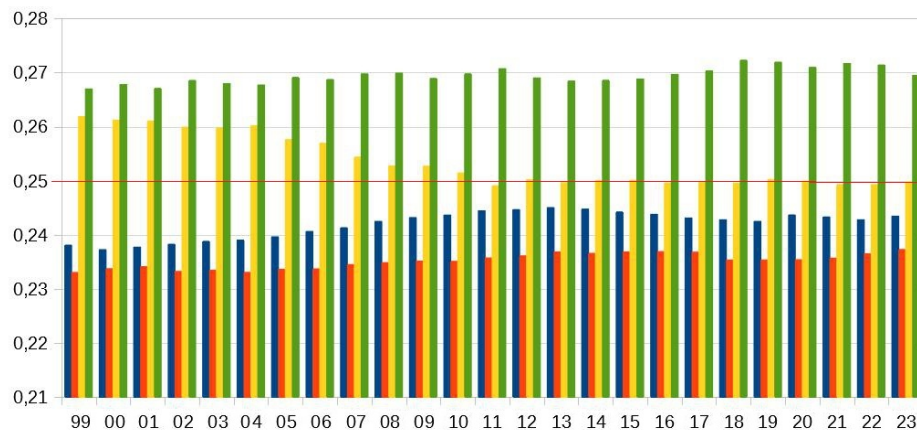
Anhand der jeweils besten/größten und schlechtesten/kleinsten Beträge war bereits zu sehen, dass die Abschlüsse weiblicher Absolventen besser waren als die Abschlüsse männlicher Absolventen, ohne dass die Beträge Auskunft über die jeweilige Art der Abschlüsse geben. Daher möchte ich nachfolgend die obere und untere Schranke ($K_h a_1 a_2 \dots a_{25}$ und $A_h a_1 a_2 \dots a_{25}$, s. Kap. 8.2.1) zu den 25 Jahrgängen, getrennt nach Geschlecht, angeben und durch den jeweils auf 25 Abschlüsse bezogenen Durchschnitt ergänzen:

männlich	ohne	HS	RS	Abitur	Summe	Betrag
untere Schranke =	12,0 %	29,2 %	38,1 %	20,7 %	100 %	0,56
obere Schranke =	6,2 %	18,7 %	42,1 %	33,0 %	100 %	0,67
Durchschnitt =	8,6 %	23,3 %	41,0 %	27,1 %	100 %	0,62
weiblich	ohne	HS	RS	Abitur	Summe	Betrag
untere Schranke =	7,1 %	22,6 %	42,6 %	27,7 %	100 %	0,64
obere Schranke =	4,2 %	13,0 %	41,8 %	41,0 %	100 %	0,73
Durchschnitt =	5,4 %	17,3 %	42,4 %	34,9 %	100 %	0,69

Sowohl bei der unteren Schranke (Betrag 0,64 gegenüber 0,56) als auch bei der oberen Schranke (0,73 gegenüber 0,67) als auch im Durchschnitt (0,69 gegenüber 0,62) lagen die weiblichen Abgänger/Absolventen besser als die männlichen. Schaut man genauer auf die einzelnen Abschlüsse, so stehen im Bereich „ohne Abschluss“ Schülerinnen nach der Schule besser da (zwischen 4,2 % und 7,1 %) als Schüler (zwischen 6,2 % und 12,0 %). Das Gleiche gilt für den Bereich „Abitur“, wo die Beträge zwischen 27,7 % und 41,0 % bei Schülerinnen und zwischen 20,7 % und 33,0 % bei Schülern liegen.

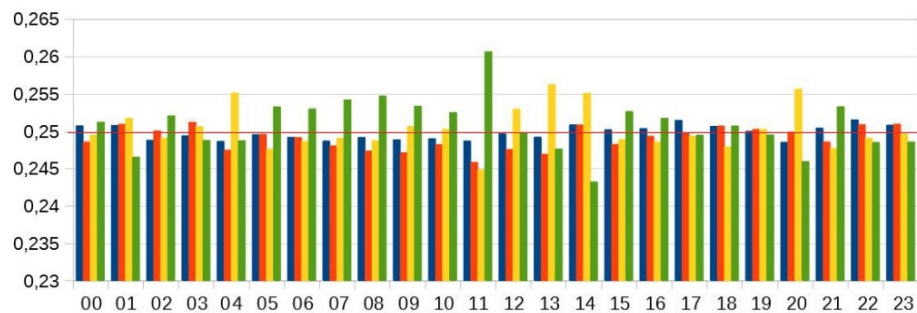
Möchte man genauer auf die einzelnen Jahrgänge schauen und dabei wiederum Abgänger bzw. Absolventen mit Abgängerinnen bzw. Absolventinnen vergleichen, so bieten sich 25 Progressionen $Pa_{i,m} a_{i,w}$ mit $i \in \mathbb{N}$ und $1 \leq i \leq 25$ an, wobei $a_{1,w}$ der Geltungswert (in Prozentwerten) für die Abschlüsse der Abgängerinnen bzw. Absolventinnen im Schuljahr 1998/1999, $a_{2,m}$ der Geltungswert für die Abschlüsse der Abgänger bzw. Absolventen im Schuljahr 1999/2000 usw. ist. Die 25 Progressionen $Pa_{1,m} a_{1,w}$ bis $Pa_{25,m} a_{25,w}$ ergeben folgendes Diagramm⁹⁷:

⁹⁷Die entsprechenden Berechnungen finden sich ebenfalls in der entsprechenden Tabellenkalkulationsdatei bei den Materialien zu dieser Arbeit unter <https://www.untex.de/logik/>



Ins Auge sticht zunächst, dass der prozentuale Anteil von Abiturientinnen (grüne Säulen) in allen 25 Schuljahren deutlich über dem prozentualen Anteil von Abiturienten liegt, da das letzte Objekt von $\text{Pa}_{i,m}a_{i,w}$ stets größer als $0,25 = \frac{1}{n} = \frac{1}{4}$ ist (rote Linie), während es prozentual stets weniger Abgängerinnen als Abgänger ohne Abschluss (blaue Säulen) und weniger Absolventinnen als Absolventen mit Hauptschulabschluss (rote Säulen) gab (die ersten beiden Objekte von $\text{Pa}_{i,m}a_{i,w}$ sind jeweils kleiner als 0,25). Bis zum Sommer 2010 war auch der prozentuale Anteil von Absolventinnen mit Realschulabschluss (gelbe Säulen) stets größer als der der Absolventen, während sich die Werte ab Sommer 2012 anglichen.

Abschließend soll die Entwicklung der Schulabschlüsse von Jahr zu Jahr unabhängig vom Geschlecht durch 24 Progressionen $\text{Pa}_i a_{i+1}$ mit $1 \leq i \leq 24$ wiederum mit einem Diagramm beschrieben werden:



Augenfällig ist diesmal, dass der Anteil an Abiturienten/-innen (grüne Säulen) vom Schuljahr 2004/05 bis zum Schuljahr 2010/11 stets zunahm und sich dann im Schuljahr 2011/12 im Vergleich zum Vorjahr kaum veränderte. In den Schuljahren 2012/13 und 2013/14 ging der Anteil zurück, während gleichzeitig der Anteil an Absolventen/innen mit Realschulabschluss zunahm (gelbe Säulen). Das Gleiche geschah im Sommer 2020. Beachtenswert ist auch die Tatsache, dass der Anteil an Abgängern/-innen ohne Schulabschluss (blaue Säulen) in den letzten 3 hier erfassten Schuljahren stetig zunahm ($> 0,25$).

10 Prozentuallogiken und Produktlogiken

Die Prozentuallogik ist, wie bereits am Beispiel der von P. Strehle beschriebenen Logik (s. Seite 117) zu sehen war, nicht die einzige Logik, die mit Tupeln als Geltungswerte arbeitet. S. Gottwald bezeichnet solche Geltungswertemengen als „mehrdimensional“⁹⁸. Ich möchte in diesem Kapitel 2 Logiken, bei denen die Geltungswerte ebenfalls Tupel sind, vorstellen und mit der Prozentuallogik vergleichen. N. Rescher schreibt über Logiken mit mehrdimensionalen Geltungswertemengen⁹⁹:

„Suppose two systems of pluri-valued logic, $\mathbf{X}_1$ and $\mathbf{X}_2$, to be given. We can then form a new, many-valued system — to be designed $\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2$ — as the product (the „Cartesian“ product) of these two systems. This is to be done in accordance with the following three rules:

- (1) The trues-values of the system $\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2$ are to be ordered pairs $\langle v_1, v_2 \rangle$ of truth-values, the first of which, v_1 , is a truth-value of $\mathbf{X}_1$ and the second of which, v_2 , is one of $\mathbf{X}_2$.
- (2) The truth-value of a proposition is to be $\langle v_1, v_2 \rangle$ in $\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2$ if and only if its truth-value is v_1 in $\mathbf{X}_1$ and is v_2 in $\mathbf{X}_2$.
- (3) Correspondingly, negation ($\neg$) and the primitive binary logical connectives ($\emptyset$ an arbitrary such connective) are to be so specified for $\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2$ that their truth tables are governed by the rules:

$$\begin{aligned}\neg \langle v_1, v_2 \rangle &= \langle \neg v_1, \neg v_2 \rangle \\ \langle v_1, v_2 \rangle \emptyset \langle v'_1, v'_2 \rangle &= \langle v_1 \emptyset v'_1, v_2 \emptyset v'_2 \rangle\end{aligned}$$

... This method of forming the product of two pluri-valued systems was devised in the late 1930s by the Polish logician Stanisław Jaśkowski.“

Zur besseren Vergleichbarkeit habe ich nachfolgend die Schreibweisen an die bisher benutzte Schreibweise angepasst.

10.1 Die Produktlogik von J. Łukasiewicz

In der 4-wertigen Logik von Łukasiewicz sind die Geltungswerte Paare aus den beiden Werten 0 und 1 der 2-wertigen Logik.¹⁰⁰ Somit kommt es zu 4 verschiedenen Paaren bzw. Geltungswerten, nämlich $(0; 0) = F$, $(0; 1)$, $(1; 0)$ und $(1; 1) = W$. Seien N_2 und C_2 die Negation und die Subjunktion aus

⁹⁸[9] Gottwald, S. 180

⁹⁹[24] Rescher, S. 96f

¹⁰⁰[28] Sinowjew, S. 30

der klassischen 2-wertigen Logik. Dann sind die Negation N_L und die Subjunktion C_L der 4-wertigen Logik von Łukasiewicz folgendermaßen definiert:

$$N_L a = N_L(\alpha_1, \alpha_2) := (N_2 \alpha_1, N_2 \alpha_2) \text{ und} \\ C_L a b = C_L(\alpha_1, \alpha_2)(\beta_1, \beta_2) := (C_2 \alpha_1 \beta_1, C_2 \alpha_2 \beta_2)$$

Daraus ergeben sich folgende Tabellen:

a	$N_L a$	$C_L a b$	(0; 0)	(0; 1)	(1; 0)	(1; 1)
(0; 0)	(1; 1)	(0; 0)	(1; 1)	(1; 1)	(1; 1)	(1; 1)
(0; 1)	(1; 0)	(0; 1)	(1; 0)	(1; 1)	(1; 0)	(1; 1)
(1; 0)	(0; 1)	(1; 0)	(0; 1)	(0; 1)	(1; 1)	(1; 1)
(1; 1)	(0; 0)	(1; 1)	(0; 0)	(0; 1)	(1; 0)	(1; 1)

Aus den Tabellen ist ersichtlich, dass $N_L N_L a = a$ ist, dass $C_L a a = (1; 1) = W$ ist und dass die Normalbedingung erfüllt ist. Außerdem gilt $C_L a(1; 1) = (1; 1)$ (s. letzte Spalte: „ex quodlibet verum“) und $C_L(0; 0)b = (1; 1)$ (s. erste Zeile: „ex falso quodlibet“).

Sei $\mathbf{L}_4$ das System der 4-wertigen Logik von Łukasiewicz und $\mathbf{A}$ die klassische Aussagenlogik, dann lässt sich $\mathbf{L}_4$ folgendermaßen als Produktsystem beschreiben: $\mathbf{L}_4 = \prod_{i=1}^2 \mathbf{A} = \mathbf{A} \times \mathbf{A}$ ¹⁰¹.

Das bisher beschriebene System einer 4-wertigen Logik legt Erweiterungen nahe:

- Zunächst können über die Subjunktion hinaus weitere aus der klassischen Logik bekannte 2-stellige Junktoren nach der oben von Rescher beschriebenen Methode $\langle v_1, v_2 \rangle \varnothing \langle v'_1, v'_2 \rangle = \langle v_1 \varnothing v'_1, v_2 \varnothing v'_2 \rangle$ definiert werden.
- Darüber hinaus können neue Junktoren $\varnothing$ definiert werden, indem verschiedene aus der klassischen Logik bekannte 2-stellige Junktoren $\varnothing_1$ und $\varnothing_2$ gleichzeitig verwendet werden:
 $\langle v_1, v_2 \rangle \varnothing \langle v'_1, v'_2 \rangle = \langle v_1 \varnothing_1 v'_1, v_2 \varnothing_2 v'_2 \rangle$
(s. dazu als Beispiel die Disjunktion und Subjunktion auf Seite 126).
- Die Idee, aus Wahrheitswerten der 2-wertigen Logik Paare zu bilden, könnte dahingehend weitergedacht werden, dass aus Paaren der 4-wertigen Logik wiederum Paare gebildet werden, was zu einer 16-wertigen Logik führen würde: $\mathbf{S}_{16} = \prod_{i=1}^2 \prod_{i=1}^2 \mathbf{A} = (\mathbf{A} \times \mathbf{A}) \times (\mathbf{A} \times \mathbf{A})$.

¹⁰¹[9] Siehe Gottwald, S. 181

(Natürlich sind dann auch Paare aus Paaren von Paaren usw. möglich.)

- Anstelle von Paaren wären auch andere Tupel wie z.B. Tripel möglich: $\mathbf{S}_8 = \prod_{i=1}^3 \mathbf{A} = \mathbf{A} \times \mathbf{A} \times \mathbf{A}$. Selbst ein unendlichwertiges System ist denkbar: $\mathbf{S}_\infty = \prod_{i=1}^\infty \mathbf{A} = \mathbf{A} \times \mathbf{A} \times \mathbf{A} \times \dots$ ¹⁰².
- Es ist nicht notwendig, lediglich Produkte aus 2-wertigen Logiken zu bilden.
- Es können darüber hinaus auch Produkte aus verschiedenwertigen Systemen gebildet werden. Rescher schlägt z.B. folgendes System vor¹⁰³, wobei $\mathbf{L}_3$ das System der 3-wertigen Logik von Łukasiewicz ist: $\mathbf{S}_6 = \mathbf{A} \times \mathbf{L}_3$. Das führt dann zu einer $(2 \cdot 3)$ - bzw. 6-wertigen Logik mit folgenden Geltungswerten: $(0; 0)$, $(0; \frac{1}{2})$, $(0; 1)$, $(1; 0)$, $(1; \frac{1}{2})$ und $(1; 1)$.

10.2 Die vierwertige Logik von M. Bergmann

Für S. Gottwald resultiert das besondere Interesse an mehrdimensionalen Geltungswertemengen „— neben rein theoretischen Gründen — vor allem aus Anwendungsgesichtspunkten Gibt es nämlich mehrere, gleichzeitig zu beachtende Aspekte, die ein Abgehen von dem Zweiwertigkeitsprinzip der klassischen Logik veranlassen, so kann jeder dieser Aspekte — es mögen k Stück sein — den Wert einer Komponente eines k -Tupels von Werten bestimmen“¹⁰⁴. Mehrere gleichzeitig zu beachtende Aspekte finden sich z.B. in folgendem Satz, der eine Abwandlung des Zitats von Rousseau am Anfang dieser Arbeit ist (s. S. 3), nämlich „Der Marsmensch ist von Natur aus gut“.¹⁰⁵ Verstehe ich dann den Satz „Der Marsmensch ist von Natur aus nicht gut“ als Negation des Satzes „Der Marsmensch ist von Natur aus gut“, so müsste einer der beiden Sätze wahr sein, wenn der andere falsch ist. Aber eigentlich würde man keinen der beiden Sätze als wahr empfinden, da es keine Marsmenschen gibt und sie somit weder gut noch nicht gut sein können. Der Grund für diesen Widerspruch liegt darin, dass in beiden Sätzen die Existenz von Marsmenschen unterstellt wurde. „Derartige ‘Unterstellungen’ heißen Präsuppositionen und treten nicht nur in der hier diskutierten Form von Existenzpräsuppositionen auf“¹⁰⁶.

¹⁰²[24] s. Rescher, S. 99

¹⁰³[24] Rescher, S. 98

¹⁰⁴[9] Gottwald, S. 180

¹⁰⁵Es ist an dieser Stelle nicht entscheidend, dass ich den Satz, ausgehend von der Beschreibung von Marsmenschen im Roman „Krieg der Welten“ von H. G. Wells, für „falsch“ halte.

¹⁰⁶[9] Gottwald, S. 262

„Es erscheint intuitiv als klar, daß keinem der beiden Sätze ... der Wahrheitswert **W** zugeordnet werden kann Deswegen scheinen sich nur zwei Auswege anzubieten:

- (a) man ordne“ keinem der beiden Sätze „einen Wahrheitswert zu, gestatte also das Auftreten sogenannter *Wahrheitswertlücken*;
- (b) man ordne“ beiden Sätzen „von **W**, **F** verschiedene Wahrheitswerte zu, führe die Betrachtungen also in einem geeigneten System mehrwertiger Logik.“¹⁰⁷.

Ein solches geeignetes System mehrwertiger Logik könnte eine 3-wertige Logik sein, ein anderes die nachfolgend vorgestellte 4-wertige Logik, wiederum mit Paaren aus 0 und 1 als Geltungswert. Dabei ist das 1. Objekt des Paares ein Wahrheitswert der 2-wertigen Logik, während das 2. Objekt als „Korrektheitswert“ bezeichnet werden kann, „der Auskunft über das Erfülltsein der Präsuppositionen gibt“¹⁰⁸. Somit ist auch das System der 4-wertigen Logik von Bergmann als Produktsystem beschreibbar: $\mathbf{B}_4 = \prod_{i=1}^2 \mathbf{A} = \mathbf{A} \times \mathbf{A}$. Die Paare (0; 1) und (1; 1) entsprechen den Werten „falsch“ und „wahr“ der klassischen 2-wertigen Logik, das Paar (0; 0) wird Sätzen zugeordnet, bei denen Präsuppositionen nicht erfüllt sind. Interessant ist dann der Satz „Marsmenschen sind grün oder Gurken sind grün“. Die gesamte Disjunktion ist „wahr“, weil der 2. Teil des Satzes „wahr“ ist. Aber im 1. Teil des Satzes ist die Präsupposition nicht erfüllt. Daher ist diesem Satz das Paar (1; 0) zuzuordnen.

Disjunktion und Subjunktion sind folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} A_{Bab} &= A_B(\alpha_1, \alpha_2)(\beta_1, \beta_2) := (A_2\alpha_1\beta_1, K_2\alpha_2\beta_2) \text{ und} \\ C_{Bab} &= C_B(\alpha_1, \alpha_2)(\beta_1, \beta_2) := (C_2\alpha_1\beta_1, K_2\alpha_2\beta_2) \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich, zusammen mit der Negation, folgende Tabellen:

a	$N_B a$	A_{Bab}	(0; 0)(0; 1)(1; 0)(1; 1)	C_{Bab}	(0; 0)(0; 1)(1; 0)(1; 1)
(0; 0)	(0; 0)	(0; 0)	(0; 0)(0; 0)(1; 0)(1; 0)	(0; 0)	(1; 0)(1; 0)(0; 0)(0; 0)
(0; 1)	(1; 1)	(0; 1)	(0; 0)(0; 1)(1; 0)(1; 1)	(0; 1)	(1; 0)(1; 1)(0; 0)(0; 1)
(1; 0)	(0; 0)	(1; 0)	(1; 0)(1; 0)(1; 0)(1; 0)	(1; 0)	(1; 0)(1; 0)(1; 0)(1; 0)
(1; 1)	(0; 1)	(1; 1)	(1; 0)(1; 1)(1; 0)(1; 1)	(1; 1)	(1; 0)(1; 1)(1; 0)(1; 1)

Es fällt auf, dass $N_B N_B(1; 0) = N_B(0; 0) = (0; 0) \neq (1; 0)$ ist. Außerdem ist auch C_{Baa} nicht immer (1; 1). Schaut man allerdings nur auf die beiden Paare (0; 1) und (1; 1), so erfüllen alle 3 Junktoren die Normalbedingung.

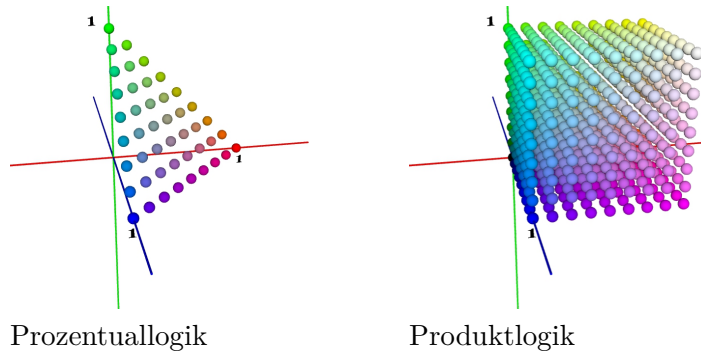
¹⁰⁷[9] Gottwald, *ebenda*

¹⁰⁸[9] Gottwald, S. 264

10.3 Ein Vergleich: Prozentuallogiken und Produktlogiken

Die Gemeinsamkeit von Prozentuallogiken und Produktlogiken wurde bereits erwähnt, nämlich die Verwendung von Tupeln als Geltungswerte. Nachfolgend sollen einige signifikante Unterschiede aufgezeigt werden:

- In der 4-wertigen Logik $\mathbf{L}_4$ mit der Negation N_L und der Subjunktion C_L „sind alle Tautologien der zweiwertigen Logik ebenfalls Tautologien“¹⁰⁹. Das gilt für die Prozentuallogik nicht: So ist z.B. nicht immer $Caa = W_n$, denn für beispielsweise $a = (\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{0}{3})$ ist $Caa = ANaa = AN(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{0}{3})(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{0}{3}) = A(\frac{0}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3})(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{0}{3}) = (\frac{0}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}) \neq W_n$. Wie bereits gezeigt, ist auch in der Logik $\mathbf{B}_4$ Caa keine Tautologie. Die Tatsache, dass in der 4-wertigen Logik $\mathbf{L}_4$ mit der Negation N_L und der Subjunktion C_L alle Tautologien der zweiwertigen Logik ebenfalls Tautologien sind, überrascht nicht, da ich $\mathbf{L}_4$ interpretiere als 2 voneinander unabhängige, parallele Systeme $\mathbf{A}$, für die die Tautologien ja gelten.
- Während die Summe der Objekte der n -Tupel in den Prozentuallogiken stets 1 und somit gleich ist, reicht die Summe der Objekte in den Produktlogiken von 0 bis n . Die Visualisierung von 3-Tupeln im Raum (s. dazu Kap. 3.5) aus der Prozentual- und der Produktlogik führt zu folgenden Ergebnissen:



- Da die Summe der Objekte in den Prozentuallogiken stets gleich ist, ist es nicht möglich, nur ein einzelnes Objekt zu verändern, ohne die Prozentuallogik zu verlassen, sondern es muss stets (mindestens) ein weiteres Objekt ebenfalls verändert werden, damit die Summe gleich bleibt. Das ist in der Produktlogik nicht der Fall, da dort die Summe unterschiedlich sein darf.
- Das wiederum führt in der Prozentuallogik zu Junktoren, die darauf zu achten haben, dass die Summe der Objekte 1 bleibt.

¹⁰⁹[28] Sinowjew, S. 30

- Die 4-wertige Logik $\mathbf{B}_4$ von Bergmann wurde damit begründet, dass durch sie 2 gleichzeitig zu beachtende Aspekte betrachtet werden können, nämlich im 1. Objekt der Paare, ob eine Aussage wahr ist, und im 2. Objekt, ob die Präsuppositionen erfüllt ist. Ähnliches gilt für die im Zusammenhang mit dem d -Junktor erwähnten (s. Seite 117) und von P. Strehle beschriebenen Logik, die Tripel als Geltungswerte benutzt. Hier beschreibt das 1. Objekt der Tripel wiederum, in welchem Maße eine Aussage wahr ist, also „wie ausgeprägt der tatsächliche Sachverhalt bezüglich des behaupteten ist“ („Ausprägungswert“)¹¹⁰, das 2. Objekt, in welchem Maße darüber Gewissheit besteht, wobei die Spanne von „sicher“ bis „widerlegt“ reicht („Begründungswert“), und das 3. Objekt, in welchem Maße die Aussage vage ist („Vagheitswert“)¹¹¹.

In der Prozentuallogik werden nicht mehrere bzw. n gleichzeitig zu beachtende Aspekte betrachtet, sondern nur ein Aspekt, nämlich der Wahrheitswert einer Aussage bzw. die Gültigkeit eines Sachverhaltes. Somit ist nicht nur das 1. Objekt α_1 für den Wahrheitswert zuständig, sondern alle Objekte, abgestuft nach zunehmender Intensität.

- Den letzten Punkt möchte ich als Besonderheit der Prozentuallogiken und als Unterschied zur Produktlogik noch einmal besonders herausstreichen, nämlich die Tatsache, dass die Objekte der Geltungswerte von α_1 bis α_n die Gültigkeit einer Aussage oder eines Sachverhaltes mit zunehmender Intensität repräsentieren. Wäre das so nicht vorgegeben, hätte der Junktor Veritation gar keinen Sinn, da dann Objekte, die im Geltungswert weiter rechts stehen, nicht mehr als „wahrer“ oder „gültiger“ interpretiert würden. Auch die Art und Weise, wie der logische Betrag oder die Konjunktion bzw. die Disjunktion definiert worden sind, wäre dann sinnlos.

¹¹⁰[17] Kreiser, S. 72

¹¹¹[17] Kreiser, S. 73

11 Grenzüberschreitungen

Wie soll damit umgegangen werden, wenn bestimmte Bedingungen, die in den Definitionen der Geltungswerte oder der Junktoren vorgegeben sind, nicht erfüllt sind, bzw. wie können diese „Grenzüberschreitungen“ wieder in eine Prozentuallogik zurückgeführt werden?

1. Fall: Die Summe der Objekte ist nicht 1

Dieser Fall wurde implizit in dieser Arbeit schon öfter betrachtet, wenn ich in Beispielen die Objekte der Geltungswerte durch Prozentwerte angegeben habe, ohne ein Prozentzeichen zu setzen, oder wenn bei den Objekten der Geltungswerte wegen der besseren Übersichtlichkeit nur die Zähler der Brüche angegeben und betrachtet wurden. Falls Prozentwerte ohne Prozentzeichen angegeben wurden, wäre die Summe der Objekte $j = 100$. Falls der Nenner weggelassen wurde, wäre die Summe der Objekte dieser Nenner j . Diese Situation lässt sich einfach wieder auf eine Prozentuallogik zurückführen, indem alle Objekte durch j geteilt werden, ohne dass die Interpretation der Geltungswerte sich dadurch maßgeblich ändern würde.

2. Fall: Die Summen der Objekte von a und b sind verschieden

Auch dieser Fall wurde gelegentlich in Beispielen betrachtet, wenn unterschiedlich viele Schüler/-innen eine Klassenarbeit mitgeschrieben hatten oder wenn bei Schulabschlüssen die Anzahl männlicher und weiblicher Absolventen ungleich war. In diesen Fällen habe ich die absoluten Zahlen in Prozentwerte umgerechnet und die Junktoren dann auf diese so modifizierten Geltungswerte angewendet.

Ist σ_1 die Summe der Objekte von a und σ_2 die Summe der Objekte von b, dann ist die Summe der Objekte von a und b gleich, wenn ich die Objekte von a mit σ_2 und die Objekte von b mit σ_1 multipliziere, wodurch die gemeinsame Summe dann $\sigma_1 \cdot \sigma_2$ ist¹¹². Dadurch würde sich die Interpretation der Geltungswerte wiederum nicht maßgeblich ändern.

3. Fall: Die Anzahlen der Objekte von a und b sind verschieden

Wenn die Anzahlen n_1 und n_2 der jeweiligen Objekte der Geltungswerte a und b verschieden sind, wäre es möglich, zwischen die jeweiligen Objekte von a und b jeweils eine gleiche Anzahl von neuen Objekten mit dem Wert 0 einzufügen, bis n bei beiden Geltungswerten gleich ist. Dadurch wäre der

¹¹² Aus $\sum_{i=1}^n \alpha_i = \sigma_1$ folgt $\sum_{i=1}^n \sigma_2 \cdot \alpha_i = \sigma_2 \cdot \sum_{i=1}^n \alpha_i = \sigma_2 \cdot \sigma_1$. Entsprechendes gilt für $\sum_{i=1}^n \beta_i = \sigma_2$.

Anstieg der Intensität des Wahrheitsgehaltes von a_1 bis a_n nach wie vor linear. Für das neue n gilt $n = kgV(n_1 - 1, n_2 - 1) + 1$, die Anzahl der jeweils einzufügenden Objekte mit dem Wert 0 ist $\frac{n-n_i}{n_i-1}$. Dazu ein Beispiel: $a = (\frac{1}{8}; \frac{2}{8}; \frac{3}{8}; \frac{2}{8})$ mit $n_1 = 4$ und $b = (\frac{3}{8}; \frac{1}{8}; \frac{4}{8})$ mit $n_2 = 3$. Für die erweiterten Geltungswerte ist nun $n = kgV(4-1, 3-1)+1 = kgV(3, 2)+1 = 6+1 = 7$. Bei a sind jeweils $\frac{n-n_1}{n_1-1} = \frac{7-4}{4-1} = \frac{3}{3} = 1$ neue Geltungswerte zwischen den Objekten einzufügen, bei b sind es jeweils $\frac{n-n_2}{n_2-1} = \frac{7-3}{3-1} = \frac{4}{2} = 2$:

$$a = (\frac{1}{8}; \frac{2}{8}; \frac{3}{8}; \frac{2}{8}) \rightarrow a' = (\frac{1}{8}; \frac{0}{8}; \frac{2}{8}; \frac{0}{8}; \frac{3}{8}; \frac{0}{8}; \frac{2}{8})$$

$$b = (\frac{3}{8}; \frac{1}{8}; \frac{4}{8}) \rightarrow b' = (\frac{3}{8}; \frac{0}{8}; \frac{0}{8}; \frac{1}{8}; \frac{0}{8}; \frac{0}{8}; \frac{4}{8})$$

Dabei ist $|a| = |a'|$ und $|b| = |b'|$, da bei der Berechnung der Beträge von a' und b' die Brüche jeweils mit $\frac{n-n_1}{n_1-1} + 1 = \frac{n-1}{n_1-1}$ bzw. mit $\frac{n-1}{n_2-1}$ gekürzt werden können.

12 Resümee und Ausblick

Als ich anfang, diese Dissertation zu schreiben, hatte ich neben der Negation und der Zyklation lediglich die Restation als alternative Negation und die Konjunktion definiert. Zu diesem Zeitpunkt war ich mir nicht sicher, ob die Prozentuallogiken das Potential hatten, zu einem genügend ausgewachsenen und ausdifferenzierten System anzuwachsen, zumal die Restation nicht die gewünschte Bedingung $RRa = a$ erfüllte und die formale Definition der Konjunktion recht mühsam zu handhaben war. Aber im Laufe der Zeit zeigte sich, dass das Thema (fast wie von selbst) immer größeren Umfang annahm und mein Problem weniger mangelndes Wachstum, sondern fast eher „Wildwuchs“ war, so dass ich gelegentlich gezwungen war, „zurückzuschneiden“ oder bestimmte Verzweigungen nicht weiter zu verfolgen.

Nun bedeutet Wachstum aber nicht zwangsläufig, dass das Gewachsene auch nutzbare Früchte trägt. Mit anderen Worten, sind die Prozentuallogiken geeignet, in umfangreicherem Maße auf bestimmte Situationen sinnvoll und hilfreich angewendet zu werden? Im Moment bin ich unsicher, diese Frage eindeutig mit ja oder nein zu beantworten und tendiere zu „eher ja“. Für „eher ja“ spricht, dass die Zahl potentieller Anwendungssituationen sehr groß ist. Hierbei denke ich nicht nur an unterschiedlichste Likert-Skalen, die unter anderem bei Lehrevaluationsergebnissen oder bei einer Vielzahl von Bewertungsportalen eine Rolle spielen, sondern auch an die große Zahl von Sachverhalten, die nicht nur gültig oder ungültig sind, sondern Zwischenstufen erlauben (s. Tabelle auf Seite 4).

Doch ist eine Anwendung der Prozentuallogiken auf die große Zahl potentieller Anwendungssituationen auch relevant? In dieser Arbeit habe ich mich bei den Anwendungsbeispielen primär auf 2 Anwendungssituationen bezogen, nämlich auf Prüfungsergebnisse/Notenspiegel und auf Schulabschlüsse. Dabei war der Grund für die Auswahl dieser beiden Anwendungssituationen weniger ihre Relevanz, sondern, dass nicht nur ich, sondern auch der Leser bzw. die Leserin dieser Arbeit mit dem beschriebenen Sachverhalt vertraut war und dass die Beispiele überschaubar und nachvollziehbar waren. Von größerer Relevanz wäre die Anwendung von Prozentuallogiken z.B. auf medizinische Daten wie die Auswertungen des WHO-5-Fragebogens zum Wohlbefinden¹¹³.

Die Frage nach dem Anwendungspotential der Prozentuallogiken könnte auch differenzierter gestellt werden: Welche Teilbereiche oder welche Junktoren haben ein vermutlich eher größeres Anwendungspotential, welche eher

¹¹³Siehe https://www.psykiatri-regionh.dk/who-5/Documents/WH05_German.pdf, abgerufen am 22.08.2025.

ein geringeres. Auf der Seite mit dem eher größeren Anwendungspotential sehe ich den logischen Betrag, die unterschiedlichsten Veritationen, die h -stellige Konjunktion bzw. Disjunktion mit der oberen und unteren Schranke sowie den zweistelligen d -Junktor zur (gewichteten) Durchschnittsberechnung und die Progression zur Beschreibung einer Entwicklung, zumal ich dazu Anwendungsbeispiele vorgestellt habe (s. Kap. 9). Auf der anderen Seite finde ich die Konjugation, die einen Zusammenhang zwischen Prozentuallogiken und ungeordneten Zahlpartitionen aufzeigt, zwar interessant, aber bereits bei der Definition der Konjugation war mir klar, dass sie eher kein Anwendungspotential hat. Denn was soll man sich z.B. unter der Konjugation eines Notenspiegels vorstellen, wenn n sich ändert, es aber ja stets nur 6 verschiedene Noten gibt?

Auch die Subjunktion wurde von mir eher stiefmütterlich und eigentlich nur der Vollständigkeit halber behandelt, da das, was ich ursprünglich von der Subjunktion erwartet hatte, von der Progression geleistet wurde¹¹⁴. Außerdem verwendet die Subjunktion $Cab := ANab$ die Negation und wie soll Na interpretiert werden bzw. konkreter, wie soll man z.B. einen gespiegelten Notenspiegel interpretieren und nutzen?

Doch selbst, wenn auf den ersten Blick für die Prozentuallogiken keine relevanten Anwendungsmöglichkeiten erkennbar wären, bedeutet das nicht, dass sie ihren Wert völlig verlieren würde, denn für „die mehrwertige Logik ist es ... nur wichtig und von Interesse, daß mit der Vielfalt logischer Systeme, die sie bereitstellt, eine breite Palette potentiell brauchbarer Systeme für Belange spezieller Anwendungen verfügbar sind.“¹¹⁵ Ob die Prozentuallogiken nicht nur potentiell, sondern auch wirklich ein brauchbares Angebot für Belange spezieller Anwendungen sind, muss sich zeigen.

Wie könnte es nach Abschluss dieser Dissertation mit den Prozentuallogiken weitergehen? Wenn weiter oben von „Wildwuchs“ und „Zurückschneiden“ die Rede war, wird klar, dass ich in dieser Arbeit nicht absolut jede Ecke ausgeleuchtet habe oder überhaupt ausleuchten konnte. Bedenkt man allein, dass, wie in Kapitel 6.5.2 beschrieben, jede Matrix mit der Zeilensumme 1 als einstelliger Junktor gedeutet werden kann (wobei die Matrix zudem noch einen oder mehrere Parameter enthalten kann), so wird klar, wieviele dieser Junktoren ich nicht beschrieben und untersucht habe, ohne ausschließen zu können, dass der eine oder andere dieser Junktoren vielleicht interessant

¹¹⁴Während die Subjunktionen C_{1ab} bis C_{4ab} die Entwicklung vom Geltungswert a zum Geltungswert b nur durch den Betrag beschreiben, beschreibt die Progression die Entwicklung von jedem einzelnen α_i zu jedem entsprechenden β_i und zusätzlich noch vom Geltungswert a zum Geltungswert b durch den Betrag.

¹¹⁵[9] Gottwald, S. 267

gewesen wäre oder Potential für eine bestimmte Anwendung gehabt hätte. Doch 3 Bereiche, die in dieser Arbeit nur gestreift wurden und möglicherweise eine andere Sichtweise auf die Prozentuallogiken ermöglichen, möchte ich hier kurz erwähnen:

- In Kapitel 7 über die Konjugation wurde eine Verbindung zwischen Geltungswerten und ungeordneten Partitionen aufgezeigt. Es könnte interessant sein, diese Verbindung weiter zu untersuchen. So gilt z.B. für $m_{j,n}(b)$, der Anzahl der Geltungswerte aus Menge $\mathfrak{G}_{j,n}$ mit dem gleichen Betrag $\frac{b}{j(n-1)}$ (s. am Ende von Kapitel 3.4.2 und das nachfolgende Kapitel 3.4.3), dass $m_{j,n}(b) \leq P(b)$ ist, also der Anzahl der ungeordneten Partitionen der Zahl b ¹¹⁶. Doch wenn $m_{j,n}(b) \leq P(b)$ ist, um wieviel ist $m_{j,n}(b)$ jeweils kleiner als $P(b)$?
- In der Fußnote auf Seite 88 wurde erwähnt, dass die Darstellung der Geltungswerte durch Ferrers-Rechtecke dazu dienen könnte, Gesetzmäßigkeiten der Negation zu veranschaulichen. Diese Veranschaulichung muss sich aber nicht auf die Negation beschränken. So lässt sich z.B. mit Ferrers-Rechtecken sehr einfach zeigen, dass $m_{j,n}(b, z_1) = m_{j-1,n}(b, z_1 - 1)$ ist, falls $z_1 > 0$ ist und dass $m_{j,n}(b, z_1) = m_{j,n-1}(b - j)$ ist, falls $z_1 = 0$ ist.
- In Kapitel 3.5 zur Visualisierung wurden die Geltungswerte als Punkte bzw. Ortsvektoren innerhalb eines mehrdimensionalen Tetraeders beschrieben. Viele einstellige Junktoren wurden zusätzlich über die Multiplikation eines Vektors mit einer Matrix definiert. Lassen sich weitere Bereiche der Prozentuallogiken vektorgeometrisch beschreiben? Oder umgekehrt: Führen Operationen mit Vektoren zu weiteren Aspekten der Prozentuallogiken?

Im letzten Kapitel wurden einige „Grenzüberschreitungen“ beschrieben, die, wenn man sie nicht wieder „einfängt“ und auf eine Prozentuallogik zurückführt, auch als eine Erweiterung der Prozentuallogiken angesehen werden können, wobei dann die Definitionen der Prozentuallogiken entsprechend angepasst werden müssten. Für den Fall, dass die Summe der Objekte der Geltungswerte nicht $1 = 100\%$ ist, wäre dann allerdings auch der Begriff „Prozentuallogik“ nicht mehr zutreffend und man müsste vielleicht von „Anteilslogik“ sprechen. Doch kann man eine Erweiterung der Prozentuallogiken auch weniger vorsichtig als im letzten Kapitel denken:

¹¹⁶Der Grund ist, dass alle Geltungswerte aus Menge $\mathfrak{G}_{j,n}$ mit gleichem b in einem Ferrers-Rechteck (s. Seite 87) der Breite j und der Höhe $n - 1$ liegen müssen, während die Ferrers-Diagramme zur Partition von b auch links und/oder oben aus dem Ferrers-Rechteck herausragen dürfen.

- Auf Seite 63 wurde die Quaestation Q_{-1a} als alternative Negation diskutiert. Sie war jedoch als Negation nur bedingt brauchbar, da Geltungswerte mit negativen Objekten entstehen konnten. Sollte man solche negativen Objekte in einer erweiterten Prozentuallogik zulassen und wenn ja, wie sollte man sie interpretieren? Bedeutet z.B. -10% „wahr“ das gleiche wie $+10\%$ „falsch“?
- Was wäre, wenn man die Geltungswerte nicht, wie am Anfang dieser Arbeit, als das Ergebnis einer einzigen Umfrage zu einer Aussage interpretiert, sondern mehrere bzw. m Umfragen zur gleichen Aussage in einem Geltungswert zusammenfasst? In diesem Fall ist der Geltungswert nicht mehr ein n -Tupel, sondern eine $m \times n$ -Matrix.

There are no limits.
Neither to thoughts nor to feelings.
It's anxiety that sets limits.
*Ingmar Bergman*¹¹⁷

¹¹⁷ Ausspruch der Schauspielerin Liv Ullmann gegenüber Ingrid Bergman in dem Film *Herbstsonate*, 1978

13 Anhang

13.1 Übersicht über Junktoren

In der nachfolgenden Übersicht¹¹⁸ über die verschiedenen Junktoren sind die Namen der in dieser Arbeit verwendeten Junktoren fett gedruckt:

Junktor	1-stellig	2-stellig	mehr-stellig	mit logischen Operatoren	Name(n)
A		×		$a \vee b$	2-stellige Disjunktion , Adjunktion, „Alternation“
A_h			×	$a_1 \vee \dots \vee a_h$	h -stellige Disjunktion
B		×		$b \rightarrow a$	konverse Subjunktion Replikation
C		×		$a \rightarrow b$	Subjunktion , Implikation, „Condition“
D		×		$\neg(a \wedge b) = a b$	NAND, Sheffer-Strich, Unverträglichkeit
E		×		$a \leftrightarrow b$	Bijunktion, Bisubjunktion, „Équivalence“
F		×		$\neg a$	Negation von a
G		×		$\neg b$	Negation von b
H		×		b	Projektion von b
I	×	×		a	Identität, Projektion von a
J		×		$\neg(a \leftrightarrow b)$	XOR, Bisubtraktion
K		×		$a \wedge b = a \& b$	(2-stellige) Konjunktion
K_h			×	$a_1 \wedge \dots \wedge a_h$	h -stellige Konjunktion
L		×		$\neg(a \rightarrow b)$	Subtraktion
M		×		$\neg(b \rightarrow a)$	konverse Subtraktion
N	×			$\neg a = \bar{a}$	(symmetrische) Negation
N_m	×				innere Negation
O	×	×		0	Falsum, Kontradiktion
P		×			Progression
Q_y	×				Quaestation ($y \in \mathbb{Q}$)

¹¹⁸[2] Arens, S. 46, [8] Felgner, S. 7 und S. 14, [14] Klaus, G. 46

Junktor	1-stellig	2-stellig	mehrstellig	mit logischen Operatoren	Name(n)
R	×				Restation
S	×			a	Affirmation
T	×				ergänzende Zentration
T_x	×				ergänzende Zentration
pT_p	×				ergänzender p-Junktor
U	×				parallele Konjugation
V	×	×		1	Verum, Tautologie
W	×				unabhängige Veritation
$\acute{W}$	×				unabhängige inverse Veritation
$\#W_m$	×				innere Veritation
$\#\acute{W}_m$	×				innere inverse Veritation
W_m	×				innere Veritation
$\acute{W}_m$	×				innere inverse Veritation
W_x	×				ergänzende Veritation ($x \in \mathbb{Q}$ und $x \in [0, 1]$)
$*W_x$	×				ergänzende Veritation ($x \in \mathbb{Q}$ und $x \in [0, 1[$)
X		×		$\neg(a \vee b)$	NOR
dY_d	×	×			d-Junktor
Z	×				unabhängige Zyklation
$\acute{Z}$	×				(unabh.) inverse Zyklation
Z_m	×				innere Zyklation
$\#Z_m$	×				innere Zyklation
$\#\acute{Z}_m$	×				innere inverse Zyklation

Außerdem wurden die beiden Veritationen $*\acute{W}_x$, $**W_{x,z}$ und die 4 Subjunktionen C_1 , C_2 , C_3 und C_4 angesprochen.

13.2 Geltungswerte, Zeichen und Begriffe

$a, b, \dots, a_1, a_2, \dots$	Variablen für Geltungswerte
$\alpha_i, \beta_i, \dots$	Objekte der entsprechenden Geltungswerte bzw. Tupel
n	Anzahl der Objekte in den Geltungswerten
i	Position der Objekte in den Geltungswerten mit $1 \leq i \leq n$
z_i	Zähler der Objekte
j	Nenner der Objekte bzw. Summe der Zähler der Objekte
$ a $	Betrag des Geltungswertes a
b	Zähler des Betrages
$\mathfrak{G}_{j,n}$	Menge der Geltungswerte mit gleichem j und n
m	Mächtigkeit der Menge $\mathfrak{G}_{j,n}$
p	palindromischer Geltungswert
$m_{j,n}(b)$	Anzahl der Geltungswerte der Menge $\mathfrak{G}_{j,n}$ mit dem gleichen Betrag
$m_{j,n}(b, z_1)$	Anzahl der Geltungswerte der Menge $\mathfrak{G}_{j,n}$ mit gleichem Betrag und gleichem 1. Zähler
$nr_{j,n}(a)$	Position des Geltungswertes a in der nach Betrag geordneten Menge $\mathfrak{G}_{j,n}$
$ge_{j,n}(k)$	Geltungswert an der Position k in der nach Betrag geordneten Menge $\mathfrak{G}_{j,n}$

$$W_n \quad \text{„wahr“} = \underbrace{(0; 0; \dots; 0; 1)}_{(n-1)\text{-mal}}$$

$$F_n \quad \text{„falsch“} = \underbrace{(1; 0; 0; \dots; 0)}_{(n-1)\text{-mal}}$$

$$M_n \quad \text{„unentschieden“} = \underbrace{(0; 0; \dots; 0; 1)}_{(\frac{n-1}{2})\text{-mal}}; \underbrace{1; 0; 0; \dots; 0}_{(\frac{n-1}{2})\text{-mal}} \quad (n \text{ ungerade})$$

$$M'_n \quad \text{„unentschieden“} = \underbrace{(0; 0; \dots; 0; 0,5)}_{(\frac{n-2}{2})\text{-mal}}; 0,5; \underbrace{0; 0; \dots; 0}_{(\frac{n-2}{2})\text{-mal}} \quad (n \text{ gerade})$$

$$K_n \quad \text{„konstant“} = \underbrace{\left(\frac{1}{n}; \frac{1}{n}; \dots; \frac{1}{n}\right)}_{n\text{-mal}}$$

$$B_n \quad \text{„binomialverteilt“} = \left(\frac{\binom{n-1}{0}}{2^{n-1}}; \frac{\binom{n-1}{1}}{2^{n-1}}; \dots; \frac{\binom{n-1}{n-1}}{2^{n-1}}\right)$$

13.3 Definitionen

1. *Geltungswert*: $a := (\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \dots; \alpha_n)$ mit $\alpha_i \in \mathbb{Q}$, $0 \leq \alpha_i \leq 1$, $n > 1$ und

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 = 100 \text{ } \%.$$

$$2. \textit{Betrag}: |a| = \frac{1}{n-1} \alpha_2 + \frac{2}{n-1} \alpha_3 + \dots + \frac{n-2}{n-1} \alpha_{n-1} + \alpha_n = \sum_{i=2}^n \sum_{k=2}^i \frac{\alpha_i}{n-1}.$$

3. Ein Geltungswert a wird als *ausgezeichnet* bezeichnet, wenn $|a| = 1$ ist.
Ein Geltungswert a wird als *schwach ausgezeichnet* bezeichnet, wenn $|a| \geq \frac{1}{2}$ ist.

4. Unabhängige *Negation*: $Na := (\alpha_n; \alpha_{n-1}; \alpha_{n-2}; \dots; \alpha_2; \alpha_1)$.

5. Unabhängige *Zyklation*: $Za := (\alpha_n; \alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_{n-1})$.

6. Unabhängige *inverse Zyklation*: $\acute{Z}a := (\alpha_2; \alpha_3; \dots; \alpha_n; \alpha_1)$.

7. Unabhängige *Veritation*: $Wa := (\min(\alpha_1; \alpha_2); \min(\max(\alpha_1, \alpha_2); \alpha_3); \min(\max(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3); \alpha_4); \dots; \min(\max(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}); \alpha_n); \max(\alpha_1, \dots, \alpha_n))$.

8. Unabhängige *inverse Veritation*: $\acute{W}a := NWNa$.

9. Innere *Zyklation*:

$$Z_m a := \begin{cases} (\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_{n-1} + \frac{1}{j}; \alpha_n - \frac{1}{j}) & \text{falls } \alpha_n \neq 0 \\ (\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_{n-2} + \frac{1}{j}; 0; \alpha_{n-1} - \frac{1}{j}) & \text{falls } \alpha_n = 0 \wedge \alpha_{n-1} \neq 0 \\ (\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_{n-3} + \frac{1}{j}; 0; 0; \alpha_{n-2} - \frac{1}{j}) & \text{falls } \alpha_n = \alpha_{n-1} = 0 \wedge \alpha_{n-2} \neq 0 \\ \dots & \\ (\alpha_1 + \frac{1}{j}; 0; \dots; 0; \alpha_2 - \frac{1}{j}) & \text{falls } \alpha_n = \dots = \alpha_3 = 0 \wedge \alpha_2 \neq 0 \\ (0; \dots; 0; 1) & \text{falls } \alpha_n = \dots = \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

10. Innere *Negation*: $N_m a := \text{ge}_{j,n}(m + 1 - \text{nr}_{j,n}(a))$.

11. Innere *Zyklation*:

$$\#Z_m a := \begin{cases} \text{ge}_{j,n}(\text{nr}_{j,n}(a) + 1) & \text{falls } \text{nr}_{j,n}(a) < m \\ \text{ge}_{j,n}(1) & \text{falls } \text{nr}_{j,n}(a) = m \end{cases}$$

12. Innere *inverse Zyklation*:

$$\#\dot{Z}_m a := \begin{cases} \text{ge}_{j,n}(\text{nr}_{j,n}(a) - 1) & \text{falls } \text{nr}_{j,n}(a) > 1 \\ \text{ge}_{j,n}(m) & \text{falls } \text{nr}_{j,n}(a) = 1 \end{cases}$$

13. Innere *Veritation*:

$$\#W_m a := \begin{cases} \#Z_m a & \text{falls } \text{nr}_{j,n}(a) < m \\ a & \text{falls } \text{nr}_{j,n}(a) = m \end{cases}$$

14. Innere *inverse Veritation*:

$$\#\dot{W}_m a := \begin{cases} \#\dot{Z}_m a & \text{falls } \text{nr}_{j,n}(a) > 1 \\ a & \text{falls } \text{nr}_{j,n}(a) = 1 \end{cases}$$

15. Innere *Veritation*:

$$W_m a := (\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_i - \frac{1}{j}; \alpha_{i+1} + \frac{1}{j}; \dots; \alpha_n), \text{ falls } \alpha_i > 0 \text{ und } i < n.$$

16. Innere *inverse Veritation*:

$$\dot{W}_m a := (\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_i + \frac{1}{j}; \alpha_{i+1} - \frac{1}{j}; \dots; \alpha_n), \text{ falls } \alpha_{i+1} > 0 \text{ und } i < n.$$

$$17. \text{Restation } R_a: f_{i,R}(\alpha_i) := \frac{1-\alpha_i}{n-1}.$$

$$18. \text{Quaestation } Q_y a: f_{i,Q_y}(\alpha_i) := y(\alpha_i - \frac{1}{n}) + \frac{1}{n}.$$

19. Ergänzende *Veritation* $*W_x a$:

$$f_{i,*W_x}(\alpha_i) = f_{i,*W_{\frac{x_z}{x_n}}}(\alpha_i) := \sum_{k=x_n(i-1)+1}^{x_n i} \frac{1}{x_z} \alpha_{\lceil \frac{k-n(x_n-x_z)}{x_z} \rceil}$$

Stauchungsfaktor $x = \frac{x_z}{x_n} \in \mathbb{Q}$ mit $0 < x \leq 1$ und $i < 1 \Rightarrow \alpha_i = 0$.

20. Ergänzende *Veritation* W_x :

$$f_{i,W_x}(\alpha_i) := \begin{cases} (1-x)\alpha_i & \text{falls } i = 1 \\ (1-x)\alpha_i + x\alpha_{i-1} & \text{falls } 1 < i < n \\ \alpha_i + x\alpha_{i-1} & \text{falls } i = n \end{cases}$$

Anteil $x \in \mathbb{Q}$ mit $0 \leq x \leq 1$.

21. *Zentration* T_a : $f_{i,T}(\alpha_i) := \frac{1}{2}\alpha_i + \frac{1}{2^n} \binom{n-1}{i-1}$.

22. *Zentration* $T_x a$:

$$f_{i,T_x}(\alpha_i) := \begin{cases} (1-x)\alpha_i & \text{falls } i = 1 \text{ oder } i = n \\ (1-x)\alpha_i + x\alpha_{i-1} & \text{falls } 1 < i < \frac{n}{2} \\ \alpha_i + x\alpha_{i-1} & \text{falls } i = \frac{n}{2} \\ \alpha_i + x\alpha_{i-1} + x\alpha_{i+1} & \text{falls } i = \frac{n+1}{2} \\ \alpha_i + x\alpha_{i+1} & \text{falls } i = \frac{n+2}{2} \\ (1-x)\alpha_i + x\alpha_{i+1} & \text{falls } \frac{n+2}{2} < i < n \end{cases}$$

Anteil $x \in \mathbb{Q}$ mit $0 \leq x \leq 1$.

23. *p-Junktor* ${}^P T_p$: $f_{i,{}^P T_p}(\alpha_i) := \frac{1}{2}\alpha_i + \frac{1}{2} \binom{n-1}{i-1} p^{i-1} (1-p)^{n-i}$.

$p \in \mathbb{Q}$ mit $0 \leq p \leq 1$.

Falls $p = 0$ ist, ist ${}^P T_p a$ eine inverse Veritation.

Falls $p = 0,5$ ist, ist ${}^P T_p a$ eine Zentration.

Falls $p = 1$ ist, ist ${}^P T_p a$ eine Veritation.

24. Durch die parallele *Konjugation* U_a eines Geltungswertes $a = (a_1; a_2; \dots; a_n)$ geht a derart in U_a über, dass U_a demjenigen Ferrers-Rechteck¹¹⁹ entspricht, das aus dem zu a gehörenden Ferrers-Rechteck durch Spiegelung an einer Spiegelachse mit der Steigung -1 , die durch die rechte untere Ecke des Rechtecks geht, entsteht.

¹¹⁹Ein *Ferrers-Rechteck* ist ein rechteckiges Raster der Breite j und der Höhe $n-1$, in dessen rechter unterer Ecke sich ein Ferrers-Diagramm befindet.

25. Die *Konjunktion* Kab :

$$f_{i,K}(\alpha_i, \beta_i) := \begin{cases} \max(\alpha_i, \beta_i) & \text{falls } s + s_i \leq 1 \\ \min(\alpha_i, \beta_i) + 1 - (s + s_{i-1}) & \text{falls } s + s_i > 1 \\ & \text{und } s + s_{i-1} \leq 1 \\ \min(\alpha_i, \beta_i) & \text{sonst} \end{cases}$$

Dabei ist

$$s = \sum_{i=1}^n \min(\alpha_i, \beta_i) \text{ die Summe aller Minima von a und b und}$$

$$s_i = \sum_{k=1}^i |\alpha_k - \beta_k| \text{ die Summe der Abstände der Objekte von a und b bis i.}$$

26. Die h -stellige *Konjunktion* $K_h a_1 a_2 \dots a_h$:

$$f_{i,K_h}(\alpha_{i,1}, \alpha_{i,2}, \dots, \alpha_{i,h}) := \begin{cases} \max(\alpha_{i,1}, \alpha_{i,2}, \dots, \alpha_{i,h}) & \text{falls } s + s_i \leq 1 \\ \min(\alpha_{i,1}, \alpha_{i,2}, \dots, \alpha_{i,h}) + 1 - (s + s_{i-1}) & \text{falls } s + s_i > 1 \\ & \text{und} \\ & s + s_{i-1} \leq 1 \\ \min(\alpha_{i,1}, \alpha_{i,2}, \dots, \alpha_{i,h}) & \text{sonst} \end{cases}$$

Dabei ist

$$s = \sum_{i=1}^n \min(\alpha_{i,1}, \alpha_{i,2}, \dots, \alpha_{i,h}) \text{ und}$$

$$s_i = \sum_{k=1}^i (\max(\alpha_{k,1}, \alpha_{k,2}, \dots, \alpha_{k,h}) - \min(\alpha_{k,1}, \alpha_{k,2}, \dots, \alpha_{k,h})).$$

27. Die *Disjunktion* Aab :

$$f_{i,A}(\alpha_i, \beta_i) := \begin{cases} \max((\alpha_i, \beta_i)) & \text{falls } s + \sigma_i \leq 1 \\ \min((\alpha_i, \beta_i)) + 1 - (s + \sigma_{i+1}) & \text{falls } s + \sigma_i > 1 \text{ und } s + \sigma_{i+1} \leq 1 \\ \min((\alpha_i, \beta_i)) & \text{sonst} \end{cases}$$

Dabei ist

$$s = \sum_{i=1}^n \min(\alpha_i, \beta_i) \text{ die Summe aller Minima von a und b und}$$

$$\sigma_i = \sum_{k=i}^n |\alpha_k - \beta_k| \text{ die Summe der Abstände der Objekte von a und b von i bis n.}$$

28. Die h -stellige *Disjunktion* $\mathbf{A}_h \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_h$:

$$f_{i, A_h}(\alpha_{i,1}, \alpha_{i,2}, \dots, \alpha_{i,h}) := \begin{cases} \max(\alpha_{i,1}, \alpha_{i,2}, \dots, \alpha_{i,h}) & \text{falls } s + \sigma_i \leq 1 \\ \min(\alpha_{i,1}, \alpha_{i,2}, \dots, \alpha_{i,h}) + 1 - (s + \sigma_{i+1}) & \text{falls } s + \sigma_i > 1 \\ \text{und} & s + \sigma_{i+1} \leq 1 \\ \min(\alpha_{i,1}, \alpha_{i,2}, \dots, \alpha_{i,h}) & \text{sonst} \end{cases}$$

Dabei ist

$$s = \sum_{i=1}^n \min(\alpha_{i,1}, \alpha_{i,2}, \dots, \alpha_{i,h}) \text{ und}$$

$$\sigma_i = \sum_{k=i}^n (\max(\alpha_{k,1}, \alpha_{k,2}, \dots, \alpha_{k,h}) - \min(\alpha_{k,1}, \alpha_{k,2}, \dots, \alpha_{k,h})).$$

29. Die *Subjunktion* $\mathbf{Cab}$: $\mathbf{Cab} := \mathbf{ANab}$.

30. Die *Progression* $\mathbf{Pab}$: $f_{i,P}(\alpha_i, \beta_i) = \frac{1-\alpha_i+\beta_i}{n}$.

31. Der d -Junktor $\mathbf{P}^d \mathbf{Y}_d$: $f_{i, \mathbf{P}^d \mathbf{Y}_d}(\alpha_i, \beta_i) = (1-d) \cdot \alpha_i + d \cdot \beta_i$.

$d \in \mathbb{Q}$ mit $0 \leq d \leq 1$

13.4 Gesetze

1. $|W_n| = 1, |F_n| = 0$ und $|p| = |K_n| = |M_n| = |M'_n| = |B_n| = \frac{1}{2}$
2. Die Anzahl unterschiedlicher logischer Beträge von Geltungswerten aus der Menge $\mathfrak{G}_{j,n}$ ist $j \cdot (n-1) + 1$.
3. Die Anzahl der Geltungswerte der Menge $\mathfrak{G}_{j,n}$ ist $m = \binom{j+n-1}{n-1}$
4. $|\mathfrak{G}_{j,n}| = |\mathfrak{G}_{j,n-1}| + |\mathfrak{G}_{j-1,n}|$ mit $n > 2$ und $j > 1$.
5. $|\{(\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_n) \in \mathfrak{G}_{j,n} \mid \alpha_1 = \frac{z_1}{j}\}| = |\mathfrak{G}_{j-z_1, n-1}| = \binom{j-z_1+n-2}{n-2}$ mit $n > 2$ und $j > z_1$.
6. $(|(\frac{z_1}{j}; \alpha_2; \alpha_3; \dots; \alpha_n)| = \frac{b}{j(n-1)}) \Rightarrow (|(\alpha_2; \alpha_3; \dots; \alpha_n)| = \frac{b-(j-z_1)}{(j-z_1)(n-2)})$ mit $n > 2$ und $j > z_1$.
7. $m_{j,n}(b) = m_{j,n}(j(n-1) - b)$
8. $m = \sum_{b=0}^{j(n-1)} m_{j,n}(b)$
9. $m_{j,n}(b) = \begin{cases} 0, \text{ falls } n < 2 \text{ oder } j < 1 \text{ oder } b < 0 \text{ oder } b > j(n-1) \\ 1, \text{ falls } n = 2 \text{ oder } j = 1 \text{ oder } b = 0 \text{ oder } b = j(n-1) \\ \text{oder } b = 1 \text{ oder } b = j(n-1) - 1 \\ m_{j-1,n}(b), \text{ falls } b < j \\ m_{j,n-1}(b-j), \text{ falls } b > (j-1)(n-1) \\ m_{j-1,n}(b) + m_{j,n-1}(b-j) \text{ sonst.} \end{cases}$
10. $m_{j,n}(b, z_1) = \begin{cases} 0, \text{ falls } z_1 < 0 \text{ oder } z_1 > j \text{ oder } n < 2 \\ \text{oder } j < 1 \text{ oder } b < 0 \text{ oder } b > j(n-1) \\ \text{oder } z_1 < j-b \text{ oder } z_1 > j - \frac{b}{n-1} \\ 1, \text{ falls } n = 2 \text{ oder } j = 1 \\ \text{oder } b = 0 \text{ oder } b = j(n-1) \\ \text{oder } z_1 = j-b \text{ oder } z_1 = j+1-b \text{ (mit } b \geq 2) \\ \text{oder } z_1 = j - \frac{b}{n-1} \text{ oder } z_1 = j - \frac{b+1}{n-1} \\ m_{j-1,n}(b, z_1-1), \text{ falls } z_1 > 0 \\ m_{j,n-1}(b-j), \text{ falls } z_1 = 0 \end{cases}$
11. $\text{NNa} = a$ (Gesetz von der doppelten Negation)
12. $\text{Na} = b \Rightarrow a = \text{Nb}$
13. $\text{Np} = p$. (mit p als Palindrom)
14. $\text{NF}_n = W_n$ und $\text{NW}_n = F_n$
15. $|\text{Na}| = 1 - |a|$

17. $\underbrace{ZZ \cdots Z}_n a = a$. (Gesetz von der n -fachen Zyklation)
18. $|a| + |Za| + |ZZa| + \dots + |\underbrace{ZZ \cdots Z}_{(n-1)-mal} a| = \frac{n}{2}$
19. $ZN_a = N\acute{Z}a$ und $NZa = \acute{Z}N_a$
20. $ZK_n = \acute{Z}K_n = K_n$
21. $ZW_n = F_n$ und $\acute{Z}F_n = W_n$
22. $Z\acute{Z}a = \acute{Z}Za = a$
23. $WW_n = W_n$ und $WF_n = W_n$
24. $\underbrace{WW \cdots W}_{(n-1)-mal} a = \underbrace{WW \cdots W}_n a$
25. $WN_a = N\acute{W}a$
26. $N_m N_m a = a$
27. $N_m W_n = F_n$ und $N_m F_n = W_n$
28. $\underbrace{\#Z_m \#Z_m \cdots \#Z_m}_m a = a$ und $\underbrace{\#\acute{Z}_m \#\acute{Z}_m \cdots \#\acute{Z}_m}_m a = a$.
29. $\#Z_m \#\acute{Z}_m a = \#\acute{Z}_m \#Z_m a = a$
30. $\#Z_m W_n = F_n$ und $\#\acute{Z}_m F_n = W_n$.
31. $N_m \#Z_m a = \#\acute{Z}_m N_m a$.
32. $|W_m a| = |a| + \frac{1}{j(n-1)}$ und $|\acute{W}_m a| = |a| - \frac{1}{j(n-1)}$
33. Für $n > 2$ ist $\lim_{k \rightarrow \infty} \underbrace{RR \cdots R}_{k-mal} a = (\frac{1}{n}; \frac{1}{n}; \dots; \frac{1}{n}) = K_n$
34. Für $n > 2$ ist $\lim_{k \rightarrow \infty} \underbrace{|RR \cdots R|}_{k-mal} = \frac{1}{2}$
35. $RNa = NRa$
36. Für die Quaestation $Q_y a$ ist $\frac{1}{1-n\alpha_{\max}} \leq y \leq \frac{1}{1-n\alpha_{\min}}$ ($\alpha_{\max} \neq \frac{1}{n}$ und $\alpha_{\min} \neq \frac{1}{n}$)
37. $Q_y K_n = K_n$
38. $f_{i, Q_{-1}}(\alpha_i) = \frac{2}{n} - \alpha_i$
39. $Q_0 a = K_n$, $Q_1 a = a$ und $Q_{-1} Q_{-1} a = a$

$$40. |Q_{-1}a| = 1 - |a|$$

$$41. Q_{-\frac{1}{n-1}}a = Ra$$

$$42. Q_yNa = NQ_ya$$

$$43. {}^*W_1a = a, {}^*W_{\frac{1}{n}}a = W_n \text{ und } {}^*W_xW_n = W_n$$

$$44. W_xW_n = W_n \text{ und } W_xF_n = (1-x; x; 0; \dots; 0)$$

$$45. W_0a = a \text{ und } W_1a = (0; \alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_{n-2}; \alpha_{n-1} + \alpha_n)$$

$$46. \underbrace{W_1W_1 \dots W_1a}_{(n-1)-mal} = W_n$$

$$47. |W_xa| > |a|, \text{ falls } x > 0 \text{ und } a \neq W_n \text{ ist.}$$

$$48. \lim_{k \rightarrow \infty} \underbrace{TT \dots Ta}_{k-mal} = B_n$$

$$49. \lim_{k \rightarrow \infty} |\underbrace{TT \dots Ta}_{k-mal}| = \frac{1}{2}$$

$$50. T_0a = a$$

51. Falls n ungerade ist, ist:

$$\underbrace{T_1T_1 \dots T_1a}_{\frac{n-1}{2}-mal} = (\underbrace{0; \dots; 0}_{\frac{n-1}{2}-mal} ; \alpha_1 + \dots + \alpha_n; \underbrace{0; \dots; 0}_{\frac{n-1}{2}-mal}) = (\underbrace{0; \dots; 0}_{\frac{n-1}{2}-mal} ; 1; \underbrace{0; \dots; 0}_{\frac{n-1}{2}-mal})$$

Falls n gerade ist, ist:

$$\underbrace{T_1T_1 \dots T_1a}_{\frac{n-2}{2}-mal} = (\underbrace{0; \dots; 0}_{\frac{n-2}{2}-mal} ; \alpha_1 + \dots + \alpha_{\frac{n}{2}}; \alpha_{\frac{n+2}{2}} + \dots + \alpha_n; \underbrace{0; \dots; 0}_{\frac{n-2}{2}-mal})$$

$$53. \underbrace{f_{i, D_{Y_d}}(f_{i, D_{Y_d}}(\dots f_{i, D_{Y_d}}(\gamma_i \alpha_i)))}_{k-mal} = (\sum_{j=0}^{k-1} d^j(1-d)\gamma_i) + d^k \alpha_i$$

$$54. |\mathfrak{G}_{j,n}| = |\mathfrak{G}_{n-1,j+1}|. \text{ Falls } j \neq n-1 \text{ ist, sind die beiden Mengen } \mathfrak{G}_{j,n} \text{ und } \mathfrak{G}_{n-1,j+1} \text{ disjunkt aber gleichmächtig, sonst identisch.}$$

$$55. UUa = a \text{ und } |Ua| = |a|$$

$$56. KF_na = F_n \text{ (} F_n \text{ als Nullelement) und } KW_na = a \text{ (} W_n \text{ als neutralen Elementes)}$$

$$57. Kab = Kba \text{ (Kommutativgesetz)}$$

$$58. KaKba = KKaba$$

$$59. Kaa = a \text{ (Idempotenz der Konjunktion)}$$

$$60. \text{ Gesetz vom Widerspruch: } \underbrace{KK \dots K}_{(m-1)-mal} a Z_m a Z_m Z_m a \dots \underbrace{Z_m Z_m \dots Z_m a}_{(m-1)-mal} = F_n$$

$$61. K_2 a_1 a_2 = K a_1 a_2$$

$$62. K_h a_1 a_2 \dots a_h = K_h \pi(a_1) \pi(a_2) \dots \pi(a_h) \text{ mit } \pi = (\pi(a_1) \pi(a_2) \dots \pi(a_h)) \text{ als eine Permutation der Geltungswerte } a_1 \text{ bis } a_h.$$

$$63. K_h F_n a_2 a_3 \dots a_h = F_n$$

$$64. K_h \underbrace{aa \dots a}_{h-mal} = a$$

$$65. \text{ Gesetz von De Morgan:} \\ 1.) NAab = KNaNb \text{ bzw. } Aab = NKNaNb \text{ und} \\ 2.) NKab = ANaNb \text{ bzw. } Kab = NNaNb$$

$$66. AW_n a = W_n \text{ (} W_n \text{ als Nullelement) und } AF_n a = a \text{ (} F_n \text{ als neutralen Elementes)}$$

$$67. Aab = Aba \text{ (Kommutativgesetz)}$$

$$68. Aaa = a \text{ (Idempotenz der Disjunktion)}$$

$$69. \text{ Gesetz vom ausgeschlossenen } (m+1)\text{-ten:} \\ \underbrace{AA \dots A}_{(m-1)-mal} a Z_m a Z_m Z_m a \dots \underbrace{Z_m Z_m \dots Z_m a}_{(m-1)-mal} = W_n$$

$$70. CaW_n = W_n \text{ (ex quodlibet verum) und } CF_n a = W_n \text{ (ex falso quodlibet)}$$

$$71. CW_n a = a \text{ und } CaF_n = Na$$

$$72. Cab = CNbNa \text{ (Kontrapositionsgesetz)}$$

$$73. CNaa = a$$

$$74. |Pab| > \frac{1}{2}, \text{ falls } |a| < |b| \\ |Pab| = \frac{1}{2}, \text{ falls } |a| = |b| \\ |Pab| < \frac{1}{2}, \text{ falls } |a| > |b|$$

$$75. f_{i,P}(\alpha_i, \beta_i) > \frac{1}{n}, \text{ falls } \alpha_i < \beta_i \\ f_{i,P}(\alpha_i, \beta_i) = \frac{1}{n}, \text{ falls } \alpha_i = \beta_i \\ f_{i,P}(\alpha_i, \beta_i) < \frac{1}{n}, \text{ falls } \alpha_i > \beta_i$$

$$76. \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i (n \cdot f_{k,P}(\alpha_k, \beta_k) - 1) = |a| - |b|$$

$$77. PW_n W_n = PF_n F_n = K_n, PW_n F_n = (\frac{2}{n}; \frac{1}{n}; \dots; \frac{1}{n}; 0) \text{ und } PF_n W_n = (0; \frac{1}{n}; \dots; \frac{1}{n}; \frac{2}{n}).$$

$$78. Paa = K_n$$

$$79. |Pa\check{Z}a| = \frac{1}{2} - \frac{1-n\alpha_1}{n(n-1)}$$

$$80. {}^D Y_{daa} = a$$

$$81. {}^{\mathrm{D}}\mathrm{Y}_d\mathrm{W}_n\mathrm{F}_n = (d; 0; \cdots; 0; 1-d) \text{ und } {}^{\mathrm{D}}\mathrm{Y}_d\mathrm{F}_n\mathrm{W}_n = (1-d; 0; \cdots; 0; d)$$

$$82. {}^{\mathrm{D}}\mathrm{Y}_d\mathrm{a}\mathrm{b} = {}^{\mathrm{D}}\mathrm{Y}_{1-d}\mathrm{b}\mathrm{a}$$

$$83. f_{i, {}^{\mathrm{D}}\mathrm{Y}_{\frac{1}{h}}}(\cdots f_{i, {}^{\mathrm{D}}\mathrm{Y}_{\frac{1}{4}}}(f_{i, {}^{\mathrm{D}}\mathrm{Y}_{\frac{1}{3}}}(f_{i, {}^{\mathrm{D}}\mathrm{Y}_{\frac{1}{2}}}(\alpha_{i,1}, \alpha_{i,2}), \alpha_{i,3}), \alpha_{i,4}), \cdots, \alpha_{i,h}) = \\ \frac{\alpha_{i,1} + \alpha_{i,2} + \cdots + \alpha_{i,h}}{h}$$

13.5 Listings

1. Listing zur Erstellung der umgekehrt lexikographisch angeordneten Geltungswerte mit $j = 6$ und $n = 4$:

```
<!DOCTYPE html>
<html>
  <body>
    <script language="JavaScript">
      var j = 6; // n ist 4
      var zaehler = 1;
      for (var alpha_1 = j; alpha_1 >= 0; alpha_1--)
      {
        for (var alpha_2 = j; alpha_2 >= 0; alpha_2--)
        {
          for (var alpha_3 = j; alpha_3 >= 0; alpha_3--)
          {
            for (var alpha_n = j; alpha_n >= 0; alpha_n--)
            {
              if (alpha_1+alpha_2+alpha_3+alpha_n == j)
              {
                document.writeln(zaehler);
                // Die nachfolgende Ausgabe
                // wurde etwas modifiziert
                document.write(". (" +alpha_1+", "+alpha_2
                +", "+alpha_3+", "+alpha_n+")<br>");
                zaehler++;
              }
            }
          }
        }
      }
    </script>
  </body>
</html>
```

2. Listing zur Erstellung der nach Betrag angeordneten Geltungswerte mit $j = 6$ und $n = 4$:

```
<!DOCTYPE html>
<html>
  <body>
    <script language="JavaScript">
      // Die folgende Funktion berechnet
      // den Binomialkoeffizienten
      function binom(v,w)
      {
        if ((w==0)|| (v==w))
        {
          return 1;
        } else
        {
          if ((w<0)|| (v<w))
          {
            return 0;
          } else

```

```

        {
            return (binom(v-1,w-1)+binom(v-1,w));
        }
    }
}
// Die folgende Funktion berechnet den Zaehler
// des logischen Betrages
function betrag()
{
    var x = 0;
    for (var k = 0; k <= (arguments[0].length - 1); k++)
    {
        x = x + k*arguments[0][k];
    }
    return x;
}
var j = 6, n = 4, zaehler = 0, m = binom (j+n-1,n-1);
// Die erste Liste fuer die umgekehrt lexikographisch
// angeordneten Geltungswerte (nur die Zaehler)
//wird definiert:
var liste_1 = new Array(m);
for (var i = 0; i < m; i++) liste_1[i] = new Array(n);
// Die Zwischenlisten fuer die Einsortierung
//nach Betrag werden definiert:
var listen = new Array(j*(n+1)+1);
for (var i = 0; i < j*(n+1)+1; i++) listen[i] = new Array();
// Die zweite Liste fuer die nach Betrag
// angeordneten Geltungswerte wird definiert:
var liste_2 = new Array(m);
for (var i = 0; i < m; i++) liste_2[i] = new Array(n);
// Die erste Liste wird erstellt:
for (var alpha_1 = j; alpha_1 >= 0; alpha_1--)
{
    for (var alpha_2 = j; alpha_2 >= 0; alpha_2--)
    {
        for (var alpha_3 = j; alpha_3 >= 0; alpha_3--)
        {
            for (var alpha_n = j; alpha_n >= 0; alpha_n--)
            {
                if (alpha_1+alpha_2+alpha_3+alpha_n == j)
                {
                    liste_1[zaehler][0] = alpha_1;
                    liste_1[zaehler][1] = alpha_2;
                    liste_1[zaehler][2] = alpha_3;
                    liste_1[zaehler][3] = alpha_n;
                    zaehler++;
                }
            }
        }
    }
}
// Die Geltungswerte werden je nach Betrag
// auf Zwischenlisten verteilt:
var listennummer;
```

```

for (var i = 0; i < m; i++)
{
    // Die Nummer der Zwischenliste ist:
    listennummer = betrag(liste_1[i]);
    // Der Geltungswert wird an die
    // entsprechende Zwischenliste angehaengt:
    listen[listennummer].push(liste_1[i]);
}
zaehler = 0;
for (var i = 0; i < listen.length; i++)
{
    for (var k = 0; k < listen[i].length; k++)
    {
        // Die Zwischenlisten werden zu einer neuen
        // Liste zusammengefuegt:
        liste_2[zaehler] = listen[i][k];
        zaehler++;
    }
}
for (var i = 0; i < liste_2.length; i++)
{
    // Die neue Liste wird zusammen
    //mit dem Betrags ausgegeben:
    document.write((i+1)+". |(");
    document.write(liste_2[i][0]+", ");
    document.write(liste_2[i][1]+", ");
    document.write(liste_2[i][2]+", ");
    document.write(liste_2[i][3]+")| = ");
    document.write(betrag(liste_2[i])+ " / "+j*(n-1)+"<br>");
}
</script>
</body>
</html>

```

3. Listing zur Erstellung der lexikographisch angeordneten Geltungswerte durch innere Zyklktion mit $j = 6$ und $n = 4$:

```

<!DOCTYPE html>
<html>
<body>
<script language="JavaScript">
    // Zyklktion analog zur Definition
    var a = [0,0,0,6]; // nur die Zaehler
    document.write("1. ("+a+"<br>");
    for (var i = 2; i <= 84; i++)
    {
        if (a[3] > 0)
        {
            a[2] = a[2] + 1;
            a[3] = a[3] - 1;
            document.write(i+" ("+a+"<br>");
        } else {
            if (a[2] > 0)
            {
                a[1] = a[1] + 1;

```

```

        a[3] = a[2] - 1;
        a[2] = 0;
        document.write(i+". ("+a+"<br>");
    } else {
        if(a[1] > 0)
        {
            a[0] = a[0] + 1;
            a[3] = a[1] - 1;
            a[1] = 0;
            a[2] = 0;
            document.write(i+". ("+a+"<br>");
        } else {
            if(a[0] > 0)
            {
                a[0] = 0;
                a[1] = 0;
                a[2] = 0;
                a[3] = j;
                document.write(i+". ("+a+"<br>");
            }
        }
    }
}
</script>
</body>
</html>

```

Etwas kürzer wäre:

```

var a = [0,0,0,6]; // nur die Zaehler
var position;
document.write("1. ("+a+"<br>");
for(var i = 2; i <= 84; i++)
{
    position = 3;
    // Nullen von hinten ueberspringen
    while(a[position] == 0) {position--;}
    if (position == 0)
    {
        a = [0,0,0,6]; // zurueck auf Anfang
    } else {
        a[position-1] = a[position-1]+1;
        a[3] = a[position]-1;
        for (var j = position; j < 3; j++)
        {
            a[j] = 0; // Rest auf Null setzen
        }
    }
    document.write(i+". ("+a+"<br>");
}

```

4. Listing zur ergänzenden Veritation als Stauchung mit $n = 6$ und $x = \frac{3}{5}$:

```
<!DOCTYPE html>
<html>
  <body>
    <script language="JavaScript">
      var n = 6, x_z = 3, x_n = 5, index, beta;
      var alpha = new Array(n+1);
      alpha[1] = 2/10; alpha[2] = 1/10;
      alpha[3] = 1/10; alpha[4] = 0/10;
      alpha[5] = 4/10; alpha[n] = 2/10;
      for (var i = 1; i <= n; i++)
      {
        beta = 0;
        for (var k = (x_n*(i-1)+1); k <= (x_n*i); k++)
        {
          index = (k-n*(x_n-x_z))/x_z;
          if (Math.ceil(index)>0)
            beta = beta + 1/(x_z)*alpha[Math.ceil(index)];
        }
        document.write(beta+"<br >");
      }
    </script>
  </body>
</html>
```

5. Listing zur Kunjugation mit $n = 6$ und $j = 5$:

```
<!DOCTYPE html>
<html>
  <body>
    <script language="JavaScript">
      function belegung(nullen, wert)
      {
        var zeichenkette = "";
        zeichenkette = wert.toString()+" "+ zeichenkette;
        for (var i = 1; i <= nullen; i++)
          zeichenkette = "0 " + zeichenkette;
        return zeichenkette;
      }
      var position, n, k, geltungswert = "";
      var a = new Array(253);
      // Die nachfolgenden 252 Geltungswerte wurden
      // vorweg mit einem anderen Programm erzeugt
      a[1]=[5,0,0,0,0,0];
      a[2]=[4,1,0,0,0,0];
      a[3]=[4,0,1,0,0,0];
      ...
      a[251]=[0,0,0,0,1,4];
      a[252]=[0,0,0,0,0,5];
      n = a[1].length;
      for (var m = 1; m <= 252; m++)
      {
        // 1. Schritt
        for (var i = 1; i <= a[m][0]; i++)
```

```

    geltungswert = "0 " + geltungswert;
// 2. bis vorletzter Schritt
position = 1;
while (position < n)
{
    k = 0;
    while ((a[m][position]==0)&&(position<(n-1)))
    {
        position++;
        k++;
    }
    if (position<(n-1))
    {
        geltungswert =
        belegung(a[m][position]-1,1+k) + geltungswert;
    } else {
        // letzter Schritt
        if (a[m][n-1]!=0)
        {
            geltungswert = belegung(a[m][n-1],1+k) + geltungswert;
        } else {
            geltungswert = belegung(0,1+k) + geltungswert;
        }
    }
    position++;
}
document.write(m + ". " + a[m] + " -> ");
document.write(geltungswert + "<br>");
geltungswert = "";
}
</script>
</body>
</html>

```

Literatur

- [1] Aigner, Martin: *Diskrete Mathematik*.
Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig/Wiesbaden, 2001⁴
- [2] Arens, Manfred: *Grundzüge einer n -wertigen Junktorenlogik*.
Abschlussarbeit an der Universität Oldenburg, Oldenburg, 1986
- [3] Behnke, Heinrich und Tietz, Horst: *Mathematik II*.
Fischer, Frankfurt a.M., 1966
- [4] Black, Max: *Vagueness - An exercise in logical analysis*.
In: Philosophy of Science , Vol. 4 , Nr. 4, Oktober 1937
- [5] Bolc, Leonard und Borovik, Piotr: *Many-Valued Logics*.
Springer, Berlin, 1992
- [6] Drazin, Michael P.: *Natural Structures on semigroups with involution*.
In: Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. 84, Nr. 1, Januar 1978
- [7] Evans, Trevor und Schwartz, P. B.: *On Slupecki T-Functions* In: The
Journal of Symbolic Logic, Vol. 23, Nr. 3, Storrs, Connecticut, Sept. 1958
- [8] Felgner, Ulrich: *Scriptum – Mathematische Logik*,
Universität Tübingen, SS 2002
- [9] Gottwald, Siegfried: *Mehrwertige Logik*,
Akademie-Verlag, Berlin, 1989
- [10] Groschupp, Steffen: *Die Trade-offs der Nachhaltigkeit - Eine Forschungsreise zur dreiwertigen Logik und zu Science Constellations*.
Springer Gabler, Wiesbaden, 2022
- [11] Halder, Heinz-Richard und Heise, Werner: *Einführung in die Kombinatorik*,
De Gruyter, Berlin, Boston, 2022
- [12] Hazewinkel, Michiel: *Encyclopaedia of mathematics*, Vol. 3.
Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1993
- [13] Hodges, Wilfrid: *Logic*.
Penguin Books Ltd, Harmondsworth, 1977
- [14] Klaus, Georg: *Moderne Logik*.
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (Ost), 1965
- [15] Knerr, Richard: *Mathematik*.
Goverts Verlag, Frankfurt a.M., 1973
- [16] Knuth, Donald E.: *The Art of Computer Programming, Vol. 3, Second Edition*. Addison–Wesley, Boston, 1998
- [17] Kreiser, Lothar und Gottwald, Siegfried: *Nichtklassische Logik*.
Akademie-Verlag, Berlin, 1990²
- [18] Kruse, Rudolf, Gebhardt, Jörg und Klawonn, Frank: *Fuzzy-Systeme*.
Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden, 1995²

- [19] Kunath, Jens: *Binomialverteilung, (hyper)geometrische Verteilung, Poisson-Verteilung und Co.*
Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2022
- [20] Matoušek, Jiří und Nešetřil, Jaroslav: *Diskrete Mathematik.*
Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2002
- [21] McNeill, Daniel und Freiburger, Paul: *Fuzzy Logic.*
Knaur, München, 1994
- [22] Papula, Graham: *Mathematische Formelsammlung.*
Springer, Wiesbaden, 2017
- [23] Priest, Graham: *Einführung in die nicht-klassische Logik.*
mentis Verlag, Paderborn, 2008
- [24] Rescher, Nicholas: *Many-valued logic.*
McGraw-Hill, New York u.a., 1969
- [25] Rommelfanger, Heinrich: *Entscheiden bei Unschärfe - Fuzzy Decision Support-Systeme.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1988
- [26] Russell, Bertrand: *Vagueness.*
In: Australasian Journal of Psychology and Philosophy, 1, Sydney, 1923
- [27] Schmitt, Karsten und Trenkler, Götz: *Moderne Matrix-Algebra.*
Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1998
- [28] Sinowjew, Alexander Alexandrowitsch: *Über mehrwertige Logik.*
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (Ost), 1968
- [29] Statistisches Bundesamt (Destatis): *Absolventen und Abgänger: Deutschland, Schuljahr, Geschlecht, Schulart, Schulabschlüsse.*
<https://www-genesis.destatis.de/datenbank/online/table/21111-0004/table-toolbar> (abgerufen am 10.11.2024)
- [30] Strehle, Peter: *Zur Notwendigkeit und zum Aufbau mehrdimensionaler mehrwertiger Logiken.* In: Untersuchungen zur Logik und zur Methodologie, Bd. 1, Karl-Marx-Universität, Leipzig, 1984
- [31] Strombach, Werner et al.: *Mathematische Logik.*
CH Beck, München, 1972
- [32] Witt, Kurt-Ulrich: *Elementare Kombinatorik für die Informatik.*
Springer-Verlag, Wiesbaden, 2013