
Theorie und Anwendungen thermisch induzierter Nahfeldeffekte

Von der Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften
der Carl von Ossietzky Universität Oldenburg zur Erlangung
des Grades und Titels eines
Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)
angenommene Dissertation

von

Svend-Age Biehs

geboren am 04.08.1977
in Halle/Saale

Gutachter: Prof. Dr. Martin Holthaus
Zweitgutachter: Apl.-Prof. Dr. Achim Kittel
Weiterer Gutachter: PD Dr. Heinz-Peter Breuer (Universität Freiburg)
Tag der Disputation: 06.12.2007

Abstract

In this work I investigate the fluctuating evanescent fields outside dielectric bodies, being generated by thermal and quantum mechanical fluctuations inside that dielectrics. Within the framework of Rytov's fluctuational electrodynamics the energy density above a dielectric, the radiative near-field heat transfer, and the forces between dielectric media are calculated, assuming that these media are in local thermodynamic equilibrium.

In particular, I determine the near-field energy density above a metallic slab, and show that for slab thicknesses d smaller than the skin depth d_s the value of the near-field energy density does not decrease monotonically with d , but increases for observation distances $z \gg d$ over the value obtained for an infinitely thick slab. This unexpected result is ascribed to the surface plasmon polariton coupling inside the metallic slab, leading to a shift of the low-frequency surface plasmon polariton branch into the thermally accessible frequency regime. Therefore the local density of states and also the energy density above the metallic slab is increased. The results of this study were published in ref. [1].

In addition, I show that the near-field energy density above a metal-coated substrate is also increased by this surface plasmon polariton coupling, if a polar substrate is used. Otherwise, if a metallic substrate is used, this surface plasmon polariton coupling does not increase the local density of states in the thermally accessible regime. It follows that one receives various distinct power laws for the near-field energy density in the distance $z > d$ above a metal-coated substrate, depending on the choice of the substrate material. I also show that these characteristic power laws leave their imprints in the radiative near-field heat transfer between a metal-coated substrate and a polar material. The results of this part of my work were published in ref. [2].

Furthermore, I examine whether existing models can quantitatively describe the radiative near-field heat transfer in a real near-field scanning thermal microscope. It is shown that the existing experimental data cannot be described within the Polder-van Hove approach, which gives the near-field radiative heat transfer between two semi-infinite slabs. Also the dipole model, describing the near-field radiative heat transfer between a semi-infinite slab and a homogeneously polarised sphere, is not able to predict the experimental results. Therefore, I develop a phenomenological sensor model which can quantitatively describe the experimental results. A less general version of this phenomenological sensor model was used in ref. [3] to explain experimental data.

Finally, in the last part of this work I study the thermal contribution to the Casimir-van der Waals force between two dielectric media. Especially the transition

from a real to an ideal metal is investigated with the method of Wick rotations. It is shown that the transition from a real to an ideal metal is discontinuous. In fact, a continuous transition would even imply a violation of the Kramers-Kronig relation. This last part results from a close collaboration with Oliver Huth [4]. These results of our joined work have not been published yet.

Zusammenfassung

In dieser Arbeit untersuche ich fluktuierende evaneszente Felder außerhalb dielektrischer Medien, die durch thermische und quantenmechanische Fluktuationen innerhalb dieser Medien erzeugt werden. Dabei bestimme ich im Rahmen der Rytovschen „fluktuierenden Elektrodynamik“ die Energiedichte oberhalb dielektrischer Medien, den Nahfeldwärmehtransport und die Kräfte zwischen verschiedenen dielektrischen Medien, die sich im lokalen thermodynamischen Gleichgewicht befinden.

Insbesondere bestimme ich die Nahfeldenergiedichte oberhalb einer metallischen Schicht und zeige, dass diese bei Verringerung der Schichtdicke d nicht monoton abnimmt, wenn d kleiner als die Skintiefe d_s wird, sondern für Abstände $z \gg d$ sogar Werte annehmen kann, die größer sind als die entsprechenden Werte für eine unendlich dicke Schicht. Dieses unerwartete Verhalten führe ich auf die Oberflächenplasmonenkopplung innerhalb der Schicht zurück, die dazu führt, dass der niederfrequente Oberflächenplasmonenzweig in den thermisch anregbaren Bereich rückt und somit die Zustandsdichte und damit auch die Energiedichte erhöht. Die Ergebnisse dieser Untersuchung wurden in [1] veröffentlicht.

Des Weiteren zeige ich, dass die Nahfeldenergiedichte oberhalb eines mit einem Metallfilm beschichteten unendlich ausgedehnten Substratmediums ebenfalls diese Erhöhung der Nahfeldenergiedichte zeigt, wenn das Medium aus einem polaren Material besteht. Für ein metallisches Substrat hingegen kann die Oberflächenplasmonenkopplung die lokale Zustandsdichte im thermisch anregbaren Bereich nicht erhöhen. Dementsprechend erhält man für die Nahfeldenergiedichte oberhalb eines beschichteten Substrats für Abstände $z \gg d$ in Abhängigkeit von der Wahl des Substratmaterials verschiedene charakteristische Potenzgesetze. In einem eigenen Kapitel zeige ich schließlich, dass man dieses substratabhängige Verhalten im Nahfeldwärmehtransport für eine Schichtgeometrie wiederfindet, wobei man auch hier in Abhängigkeit von der Wahl des Substratmediums verschiedene, aber charakteristische Potenzgesetze erhält. Die Ergebnisse dieser Untersuchung habe ich in [2] publiziert.

In einem weiteren Teil dieser Arbeit untersuche ich, ob bereits existierende Modelle den Strahlungswärmehtransport in einem Rasterwärmehmikroskop beschreiben können. Es wird gezeigt, dass man die bisherigen experimentellen Ergebnisse nicht vollständig mit der Polder-van Hove-Formel, die den Wärmehtransport zwischen zwei unendlich ausgedehnten Halbräumen beschreibt, erfassen kann. Auch das sogenannte Dipolmodell, das den Nahfeldwärmehtransport zwischen einem Halbraum und einer homogen polarisierten dielektrischen Kugel wiedergibt, ist nicht in der Lage, die Messergebnisse quantitativ vorherzusagen. Daher stelle ich ein phänomenologisches Sensormodell auf, das es ermöglicht, die vorhandenen Messwerte quantitativ gut zu

beschreiben. Eine weniger allgemeine Version dieses phänomenologischen Modells wurde in [3] verwendet, um experimentelle Daten zu erklären.

Im letzten Teil meiner Arbeit untersuche ich schließlich den thermischen Beitrag zur Casimir-van der Waals-Kraft. Besonderes Augenmerk ist dabei dem Übergang vom realen zum idealen Metall gewidmet, wobei dieser mithilfe der Methode der Wick-Rotation studiert wird. Es wird gezeigt, dass der Übergang vom realen zum idealen Metall unstetig ist und ein stetiger Übergang aufgrund der Kramers-Kronig-Relation sogar verboten ist. Dieser Teil meiner Arbeit ist in enger Zusammenarbeit mit Oliver Huth [4] entstanden, wobei die Ergebnisse dieser Untersuchung noch nicht veröffentlicht wurden.

Inhaltsverzeichnis

I	Einleitung	1
1	Das evaneszente Nahfeld	3
1.1	Fluktuierende Elektrodynamik	3
1.2	Quanten-Elektrodynamik in Materie	7
1.2.1	Linear-Response-Theorie	7
1.2.2	Makroskopische Quanten-Elektrodynamik	9
1.2.3	Janowicz-Beschreibung	11
1.3	Freie dyadische Greensche Funktion	12
1.4	Die freie dyadische Greensche Funktion in Zylinderkoordinaten	14
1.5	Greensche Funktion für eine Halbraumgeometrie	18
1.6	Die propagierenden Moden des fluktuierenden Feldes	20
1.7	Die evaneszenten Moden des fluktuierenden Feldes	24
1.8	Energiedichte für verschiedene Materialien	27
1.9	Das optische Theorem	29
1.10	Eigenschaften des Nahfeldes	33
II	Das thermische Nahfeld eines beschichteten Mediums	37
2	Das evaneszente Nahfeld einer dielektrischen Platte	41
2.1	Die Plattengeometrie	42
2.2	Konstruktion der Greenschen Funktion	43
2.3	Die propagierenden Moden	48
2.4	Die evaneszenten Moden	53
2.4.1	Umformulierung der Transmissionskoeffizienten	54
2.4.2	Transmissionskoeffizienten für verschiedene Grenzfälle	55
2.4.3	Abstandsabhängigkeit der Energiedichte	61
2.4.4	Universelles Verhalten der Energiedichte	66
2.5	Zusammenfassung	70
3	Das evaneszente Nahfeld eines beschichteten Mediums	73
3.1	Konstruktion der Greenschen Funktion	73
3.2	Die propagierenden Moden	74
3.3	Die evaneszenten Moden	77
3.4	Zusammenfassung	84

4	Oberflächenmoden	87
4.1	Oberflächenmoden in einer Halbraumgeometrie	87
4.2	Oberflächenmoden in einer Plattengeometrie	91
4.3	Energiedichte und Oberflächenmoden	94
4.4	Der universelle Energiedichtebeitrag	99
4.5	Zusammenfassung	101
 III Strahlungswärmetransport im Nahfeld		 105
5	Strahlungswärmetransport	109
5.1	Vorbereitende Überlegungen	110
5.2	Ableitung der Polder-van Hove-Formel	112
5.3	Strahlungswärmetransport	115
5.4	Nahfeldwärmetransport für beschichtete Medien	119
5.5	Das Dipolmodell	122
5.6	Zusammenfassung	128
6	Räumliche Dispersion	131
6.1	Zeitliche und räumliche Dispersion	132
6.2	Oberflächenimpedanz	134
6.3	Leontovich-Randbedingungen	136
6.4	Greensche Funktion im Medium	138
6.5	Modell der Spiegelreflexion	139
6.6	Das SCIB-Modell	142
6.7	Vergleich der Modelle	145
6.8	Zusammenfassung	148
7	Ein phänomenologisches Sensormodell	149
7.1	Experimenteller Aufbau und Ergebnisse	149
7.2	Vergleich mit der Polder-van Hove-Formel	151
7.2.1	Au-Probe	151
7.2.2	GaN-Probe	152
7.3	Vergleich mit dem Dipolmodell	156
7.4	Phänomenologisches Sensormodell	158
7.5	Die Korrelationslänge	161
7.6	Zusammenfassung	167
 IV Casimir-Kräfte im thermischen Nahfeld		 171
8	Die Lifshitz-Formel	175
8.1	Ableitung der Lifshitz-Formel	175
8.1.1	Die Korrelationsfunktion des elektrischen Feldes	177
8.1.2	Die Korrelationsfunktion des magnetischen Feldes	178
8.1.3	Die Lifshitz-Formel	179
8.2	Das ideale Metall	183

8.3	Zusammenfassung	191
9	Casimir-Effekt für reale und ideale Metalle	193
9.1	Einführung in die Problematik	194
9.2	Die propagierenden Moden und das ideale Metall	197
9.2.1	Die Wick-Rotation	197
9.2.2	Der klassische Beitrag	200
9.3	Die evaneszenten Moden und das ideale Metall	202
9.3.1	Evaneszente Moden und Oberflächenplasmonen	202
9.3.2	Der klassische Beitrag der TE-Moden	206
9.3.3	Der klassische Beitrag der TM-Moden	208
9.4	Zusammenfassung	210
V	Anhang	213
A	Materialeigenschaften	215
A.1	Drude-Metalle	215
A.2	Reststrahlenformel	217
B	Gültigkeit des lokalen Gleichgewichts	219
C	Relationen für die Fresnel-Koeffizienten	223
C.1	Transmissionskoeffizienten	223
C.2	Fresnel-Koeffizienten	224
C.3	Hagen-Rubens-Näherung	226
D	Polylogarithmus und Zeta-Funktion	229

Teil I
Einleitung

Kapitel 1

Das evaneszente Nahfeld

In diesem ersten und einführenden Kapitel werden zunächst die theoretischen formalen Beziehungen bereitgestellt, die benötigt werden, um Nahfeldphänomene zu beschreiben. Außerdem werden einige wesentliche Eigenschaften des thermischen fluktuierenden Nahfeldes beschrieben, die es dem Leser ermöglichen sollen, ein Gefühl für diese Erscheinung zu bekommen. Es wird daher in diesem ersten Kapitel im Prinzip bekanntes Wissen zusammengestellt, von dem in späteren Kapiteln Gebrauch gemacht werden soll.

In dem ersten Abschnitt werden die Grundlagen der fluktuierenden Elektrodynamik nach Rytov [5] dargestellt und erläutert. Eine nachträgliche Rechtfertigung für die Verwendung dieser semi-klassischen Theorie wird im darauffolgenden Abschnitt gegeben, in dem quantenmechanische Theorien [6, 7, 8] mit der fluktuierenden Elektrodynamik und untereinander verglichen werden. Die drei darauf folgenden Abschnitte beschäftigen sich mit der formalen Herleitung der freien Greenschen Funktion und der Greenschen Funktion für Schichtgeometrien planarer Medien [9, 10], die die Grundlage für die weiteren Berechnungen bilden. Eine erste Anwendung finden diese Greenschen Funktionen bei der Bestimmung des Poynting-Vektors und der Energiedichte oberhalb eines dissipativen Mediums im lokalen thermodynamischen Gleichgewicht [11, 12]. Da die Bestimmung dieser physikalischen Größen stets eine Volumenintegration über ein Produkt zweier dyadischer Greenscher Funktionen enthält, das in der Regel mühsam auszuwerten ist, wird das sogenannte optische Theorem [7, 13] diskutiert, das es in Spezialfällen erlaubt, dieses Volumenintegral selbst durch eine Greensche Funktion zu ersetzen. Im letzten Abschnitt werden schließlich zwei sehr faszinierende Eigenschaften des thermischen Nahfeldes diskutiert: Die zeitliche und räumliche Kohärenz [14, 15, 16, 17, 18, 19, 20].

1.1 Fluktuierende Elektrodynamik

Die theoretische Beschreibung des fluktuierenden Nahfeldes dielektrischer Körper basiert auf der Rytovschen fluktuierenden Elektrodynamik [5]. Innerhalb dieser Beschreibung werden die makroskopischen Maxwell-Gleichungen durch fluktuierende Quellenströme \mathbf{j} ergänzt, die die fluktuierenden Quellen des elektrischen und magnetischen Feldes \mathbf{E} und \mathbf{H} innerhalb des dielektrischen Körpers beschreiben. Die einzelnen Frequenzkomponenten dieser Quellenströme $\mathbf{j}(\mathbf{r}, \omega)$ werden als stationäre sto-

chastische Prozesse angesehen, sodass man die sogenannten stochastischen Maxwell-Gleichungen

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) &= i\omega\mu_0\mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega), \\ \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) &= \mathbf{j}(\mathbf{r}, \omega) - i\omega\epsilon(\omega)\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)\end{aligned}\quad (1.1.1)$$

mit der Permeabilität des Vakuums μ_0 und der Permittivität des dielektrischen Körpers $\epsilon(\omega)$ erhält. Indem man die stochastischen Maxwell-Gleichungen in der Form (1.1.1) angibt, geht man bereits davon aus, dass der dielektrische Körper, der die fluktuierenden Quellenströme enthält, nicht-magnetisch, homogen, isotrop und lokal ist. Das heisst, es gelten die linearen Beziehungen

$$\mathbf{D} = \epsilon_b(\omega)\mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H} \quad \text{und} \quad \mathbf{J} = \sigma(\omega)\mathbf{E}, \quad (1.1.2)$$

wobei die Leitfähigkeit $\sigma(\omega)$, die zu dem makroskopischen Strom \mathbf{J} führt, direkt in die Permittivität $\epsilon(\omega)$ des Dielektrikums eingeht, d.h. sie wird zur Permittivität der gebundenen Ladungen $\epsilon_b(\omega)$ hinzuaddiert, sodass man

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_b(\omega) + \frac{i\sigma(\omega)}{\omega} \quad (1.1.3)$$

erhält.

Die elektrischen und magnetischen Felder, die durch die stochastischen Maxwell-Gleichungen beschrieben werden, sind als klassische stochastische Prozesse aufzufassen, die formal durch Integrale der Art

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) &= i\omega\mu_0 \int d^3r' \mathbf{G}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{j}(\mathbf{r}', \omega), \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) &= i\omega\mu_0 \int d^3r' \mathbf{G}^H(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{j}(\mathbf{r}', \omega)\end{aligned}\quad (1.1.4)$$

ausgedrückt werden können, wobei die Integration über das quellenenthaltende Volumen durchzuführen ist. Die Tensoren \mathbf{G}^E und \mathbf{G}^H sind die sogenannte dyadische elektrische und magnetische Greensche Funktion. Die elektrische dyadische Greensche Funktion ist entsprechend der Definition in Gl. (1.1.4) eine Lösung der inhomogenen Helmholtz-Gleichung

$$(\nabla \times \nabla \times - k^2)\mathbf{G}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \mathbf{1}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (1.1.5)$$

mit der Wellenzahl $k^2 = \omega^2\mu_0\epsilon$ und der Einheitsmatrix $\mathbf{1}$. Diese Gleichung ist eine dyadische Gleichung und gilt für jeden Spaltenvektor der dyadischen Greenschen Funktion separat. Außerdem erfüllt die dyadische Greensche Funktion in einem unbegrenzten Medium die Symmetrierelation

$$\mathbf{G}_{\alpha\beta}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \mathbf{G}_{\beta\alpha}^E(\mathbf{r}', \mathbf{r}), \quad (1.1.6)$$

was man leicht mithilfe des Reziprozitätstheorems [21] zeigen kann.

Entsprechend der Definition in Gl. (1.1.4) stimmen die Greenschen Funktionen für einen Delta-Strom $\mathbf{j} = \mathbf{j}_0\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0)$ mit dem Feld überein, das durch diesen Strom

bei \mathbf{r}_0 am Ort \mathbf{r} erzeugt wird. Daher erfüllen die dyadischen Greenschen Funktionen die Randbedingungen der entsprechenden Felder, sodass sich etwa die Stetigkeit der Transversalkomponenten des elektrischen Feldes an einer Grenzfläche direkt auf die elektrische dyadische Greensche Funktion überträgt. An der Grenzfläche zwischen zwei dielektrischen Medien 1 und 2 mit den Greenschen Funktionen \mathbb{G}_1^E und \mathbb{G}_2^E gelten somit die beiden Randbedingungen

$$\begin{aligned}\mathbf{n} \times \mathbb{G}_1^E &= \mathbf{n} \times \mathbb{G}_2^E, \\ \mathbf{n} \times \nabla \times \mathbb{G}_1^E &= \mathbf{n} \times \nabla \times \mathbb{G}_2^E,\end{aligned}\tag{1.1.7}$$

wobei \mathbf{n} das Normaleneinheitsvektorfeld für den Übergangsbereich von Medium 1 zu Medium 2 darstellt. Selbstverständlich erfüllt per Konstruktion die magnetische Greensche Funktion die Randbedingungen des magnetischen Feldes. Allerdings reicht es vollkommen aus, nur die elektrische Greensche Funktion für ein gegebenes Problem zu betrachten, da die magnetische Greensche Funktion durch Rotationsbildung direkt aus der elektrischen Greenschen Funktion mittels der Relation

$$\mathbb{G}^H(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{i}{\omega\mu_0} \nabla \times \mathbb{G}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\tag{1.1.8}$$

berechnet werden kann, was eine direkte Folgerung des Faradayschen Induktionsgesetzes ist.

Die Umformulierung der elektrischen und magnetischen Felder \mathbf{E} und \mathbf{H} als Integrale über die Quellenströme in den Gln. (1.1.4) macht deutlich, dass die fluktuierenden Eigenschaften der Felder direkt durch die fluktuierenden Eigenschaften der Quellenströme bestimmt sind. In der Tat kann man, falls $\langle \mathbf{j}(\mathbf{r}, \omega) \rangle$ und $\langle \mathbf{j}(\mathbf{r}, \omega) \bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r}', \omega') \rangle$ bekannt sind, wobei die spitze Klammer für das Ensemble-Mittel steht, die entsprechenden Mittelwerte und Korrelationsfunktionen der Felder angeben. Dabei soll der Querstrich hier und im Weiteren die komplexe Konjugation symbolisieren. Deshalb ist es essentiell, die stochastischen Eigenschaften der Quellenströme zu bestimmen.

Innerhalb der fluktuierenden Elektrodynamik sind die Felder makroskopische und daher über ein ausreichend großes Volumen gemittelte Größen. Die Quellenströme beschreiben innerhalb dieser Theorie die thermischen und quantenmechanischen Fluktuationen in einem dielektrischen dissipativen Körper mit der Temperatur T innerhalb dieses Mittelungsvolumens, sodass sich der makroskopische Quellenstrom $\mathbf{j}(\mathbf{r}, \omega)$ aus einer Vielzahl mikroskopischer Fluktuationen zusammensetzt. Es erscheint daher vernünftig, dem zentralen Grenzwertsatz entsprechend voranzusetzen, dass es sich bei den Quellenströmen um Gaußsche Prozesse handelt, wobei die Quellenströme im Mittel Null ergeben sollen, sodass man mit (1.1.4)

$$\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \rangle = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \langle \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) \rangle = \mathbf{0}\tag{1.1.9}$$

für die Felder erhält. Wäre dies nicht der Fall, würden geladene Teilchen mit der Ladung q und der Geschwindigkeit \mathbf{v} in der Nähe eines dielektrischen Mediums eine mittlere Kraft $\langle \mathbf{F} \rangle = q\langle \mathbf{E} \rangle + q\mathbf{v} \times \langle \mathbf{B} \rangle$ durch die fluktuierenden Felder erfahren, sodass die fluktuierenden Quellenströme durch $q\langle \mathbf{E} \rangle$ im Mittel Arbeit verrichten würden. Somit wäre der zweite Hauptsatz der Thermodynamik verletzt, der besagt, dass bei einer einheitlichen Temperatur im Mittel keine Arbeit verrichtet wird.

Außerdem sind die Korrelationen und damit die Fluktuationen der Quellenströme durch die dielektrischen Eigenschaften des dissipativen Körpers bestimmt. Der Zusammenhang zwischen Dissipation und Fluktuation kann allgemein mittels des Fluktuations-Dissipations-Theorems [22] ausgedrückt werden, und auf das gegebene Problem [5] angewendet werden. Für einen homogenen, isotropen, lokalen und dissipativen dielektrischen Körper erhält man

$$\langle j_\alpha(\mathbf{r}, \omega) \bar{j}_\beta(\mathbf{r}', \omega') \rangle = 4\pi\omega E_0(\omega, T) \epsilon''(\omega) \delta_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(\omega - \omega') \quad (1.1.10)$$

und

$$\langle \bar{j}_\alpha(\mathbf{r}, \omega) \bar{j}_\beta(\mathbf{r}', \omega') \rangle = \langle j_\alpha(\mathbf{r}, \omega) j_\beta(\mathbf{r}', \omega') \rangle = 0 \quad (1.1.11)$$

für die Komponenten der Quellenströme, wobei die Permittivität $\epsilon = \epsilon' + i\epsilon''$ in Real- und Imaginärteil aufgeteilt und die Bose-Einstein-Funktion

$$E_0(\omega, T) := \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega\beta} - 1} = \frac{\hbar\omega}{2} \coth\left(\frac{\hbar\omega\beta}{2}\right) \quad (1.1.12)$$

mit der inversen Temperatur $\beta = (k_B T)^{-1}$ des Körpers eingeführt wurde. Das Auftauchen der Bose-Einstein-Funktion ist hier eine Implikation des Fluktuations-Dissipations-Theorems, das eigentlich eine quantenmechanische Beziehung für Operatoren ist, wohingegen die fluktuierenden Felder innerhalb der fluktuierenden Elektrodynamik klassisch sind, was als eine Schwachstelle der Theorie angesehen werden kann. Wie allerdings kürzlich gezeigt wurde [8], führt eine rigorose quantenelektrodynamische Beschreibung für dissipative Medien auf die gleichen Korrelationsfunktionen für die Felder wie die Anwendung des Fluktuations-Dissipations-Theorems im Rahmen der fluktuierenden Elektrodynamik. Demnach erscheint diese Vorgehensweise gerechtfertigt, wobei die fluktuierende Elektrodynamik als eine semi-klassische Theorie aufzufassen ist.

Nun können die Korrelationsfunktionen der fluktuierenden Felder angegeben werden. Benutzt man die Gln. (1.1.4) zusammen mit dem Fluktuations-Dissipations-Theorem in Gl. (1.1.10), bekommt man

$$\begin{aligned} \langle E_\alpha(\mathbf{r}, t) H_\beta(\mathbf{r}', t') \rangle &= \int_0^\infty d\omega e^{-i\omega(t-t')} E_0(\omega, T) \frac{\omega \epsilon''(\omega)}{\pi} (\mu_0 \omega)^2 \\ &\times \int d^3 r'' \left(\mathbf{G}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}'') \mathbf{G}^{H\dagger}(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') \right)_{\alpha\beta} + \text{c.c.}, \end{aligned} \quad (1.1.13)$$

wobei das \dagger -Symbol für die adjungierte Dyade steht und c.c. eine Abkürzung für das komplex Konjugierte des ersten Terms ist. Ähnliche Ausdrücke kann man für $\langle E_\alpha(\mathbf{r}, t) E_\beta(\mathbf{r}', t') \rangle$ bzw. $\langle H_\alpha(\mathbf{r}, t) H_\beta(\mathbf{r}', t') \rangle$ ableiten. Das Ensemble-Mittel der physikalischen Größen — der Poynting-Vektor, die Energiedichte und der Spannungstensor — des dissipativen dielektrischen Körpers kann direkt mithilfe dieser Korrelationsfunktionen bestimmt werden, wenn die Materialeigenschaften, d.h. die Permittivität $\epsilon(\omega)$ und die Temperatur des Körpers bekannt sind. Außerdem ist es notwendig, die dyadischen Greenschen Funktionen für das gegebene elektrodynamische Problem zu bestimmen, in die die Geometrie des Problems mit einfließt. Man hat somit das ganze Problem auf die Lösung eines klassischen Problems — die Bestimmung der elektrischen Greenschen Funktion in einer gegebenen Geometrie — zurückgeführt.

1.2 Quanten-Elektrodynamik in Materie

In diesem Abschnitt werden drei verschiedene quantenmechanische Herangehensweisen und ihre Beziehung zueinander vorgestellt. Es wird gezeigt, dass die Anwendung der fluktuierenden Elektrodynamik quantenmechanisch auch für Nicht-Gleichgewichtsprozesse, bei denen nur ein lokales thermodynamisches Gleichgewicht innerhalb eines Dielektrikums vorausgesetzt wird, gerechtfertigt werden kann.

1.2.1 Linear-Response-Theorie

Eine quantenmechanische Ableitung der Korrelationsfunktionen der Feldgrößen bzw. Feldoperatoren im thermodynamischen Gleichgewicht, die ebenfalls auf dem Fluktuations-Dissipations-Theorem beruht, hat Agarwal 1975 [6] geliefert. Die Grundidee dieser quantenmechanischen Behandlung soll nun anhand der Korrelationsfunktion des elektrischen Feldes skizziert werden. Eine ausführliche Darstellung findet man etwa in [23, 24].

Als Ausgangspunkt dienen zunächst die Maxwell-Gleichungen, wobei die Felder durch entsprechende Operatoren im Heisenberg-Bild, d.h. $\mathbf{E} \rightarrow \hat{\mathbf{E}}$ und $\mathbf{H} \rightarrow \hat{\mathbf{H}}$, zu ersetzen sind. Anstatt einen stochastischen Quellenstrom einzuführen, wird die Reaktion auf eine kleine deterministische äußere Störung betrachtet, die durch ein Polarisationsfeld \mathbf{P}_{ext} gegeben sein soll. Der Hamilton-Operator für die externe Störung hat die Form

$$\hat{H}_{\text{ext}} = - \int d^3r' \mathbf{P}_{\text{ext}}(\mathbf{r}', t) \cdot \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}', t), \quad (1.2.1)$$

wobei sich der Hamilton-Operator für das Gesamtsystem als eine Summe aus dem ungestörten Teil \hat{H}_0 und der Störung \hat{H}_{ext} zusammensetzt. Ziel ist es nun, die lineare Antwort des ungestörten Feldes, das bei $t = -\infty$ durch $\langle \hat{E}_i \rangle_0$ gegeben ist, auf die äußere Störung zu bestimmen, die adiabatisch eingeschaltet wird. Der Erwartungswert des ungestörten Feldes läßt sich durch Spurbildung

$$\langle \hat{E}_i \rangle_0 := \text{Tr}[\hat{\rho}_0 \hat{E}_i] \quad (1.2.2)$$

mit dem Dichte-Operator des ungestörten Systems

$$\hat{\rho}_0 = \hat{\rho}(t = -\infty) = e^{(\mathcal{F}_0 - \hat{H}_0)\beta} \quad (1.2.3)$$

bestimmen, wobei $\mathcal{F}_0 = -\beta^{-1} \ln(Z_0)$ die freie Energie und $Z_0 = \text{Tr}[\exp(-\beta \hat{H}_0)]$ die Zustandssumme des ungestörten Systems darstellen. Der entsprechende Erwartungswert $\langle \hat{E}_i \rangle$ für das Gesamtsystem mit $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{\text{ext}}$ wird dann durch Spurbildung mit dem Dichteoperator

$$\hat{\rho} = e^{(\mathcal{F} - \hat{H}_0 - \hat{H}_{\text{ext}})\beta} \quad (1.2.4)$$

gebildet, wobei die freie Energie $\mathcal{F} = -\beta^{-1} \ln(Z)$ durch die Zustandssumme des Gesamtsystems $Z = \text{Tr}[\exp(-\beta \hat{H})]$ bestimmt ist. Gesucht ist die Änderung des Erwartungswertes durch die äußere Störung, also

$$\Delta \hat{E}_i := \langle \hat{E}_i \rangle - \langle \hat{E}_i \rangle_0 = \text{Tr}[(\hat{\rho} - \hat{\rho}_0) \hat{E}_i]. \quad (1.2.5)$$

Es kann nun im Wechselwirkungsbild gezeigt werden, dass für kleine Störungen in linearer Ordnung

$$\hat{\rho} - \hat{\rho}_0 \approx \frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt' [\hat{H}_{\text{ext}}(t'), \hat{\rho}_0] \Theta(t - t') \quad (1.2.6)$$

gilt, wobei die eckige Klammer den Kommutator und $\Theta(t - t')$ die Heaviside-Distribution kennzeichnen. Mit dieser Näherung kann man die gesuchte Änderung des Erwartungswertes in Gl. (1.2.5) bestimmen, und bekommt mit der Einsteinschen Summenkonvention

$$\begin{aligned} \Delta \hat{E}_i &= \frac{1}{i\hbar} \int dt' \langle [\hat{E}_i, \hat{H}_{\text{ext}}(t')] \rangle_0 \Theta(t - t') \\ &= -\frac{1}{i\hbar} \int dt' \int d^3r' P_{k,\text{ext}}(\mathbf{r}', t') \langle [\hat{E}_i(\mathbf{r}, t), \hat{E}_k(\mathbf{r}', t')] \rangle_0 \Theta(t - t') \\ &= \int dt' \int d^3r' P_{k,\text{ext}}(\mathbf{r}', t') \chi_{EE}^{ik}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t - t') \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

mit der generalisierten Suszeptibilität

$$\chi_{EE}^{ik}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t - t') := -\frac{1}{i\hbar} \langle [\hat{E}_i(\mathbf{r}, t), \hat{E}_k(\mathbf{r}', t')] \rangle_0 \Theta(t - t'). \quad (1.2.8)$$

Definiert man nun die Korrelationsfunktion des elektrischen Feldes in symmetrisierter Form, also

$$\Psi_E^{\alpha\beta}(t - t') := \frac{1}{2} \langle \Delta \hat{E}_\alpha(t) \Delta \hat{E}_\beta(t') + \Delta \hat{E}_\beta(t') \Delta \hat{E}_\alpha(t) \rangle_0, \quad (1.2.9)$$

dann folgt aus dem Fluktuations-Dissipations-Theorem [22], dass

$$\Psi_E^{\alpha\beta}(\omega) = \frac{E_0(\omega, T)}{i\omega} [\chi_{EE}^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) - \overline{\chi}_{EE}^{\beta\alpha}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, \omega)] \quad (1.2.10)$$

für die Fouriertransformierte

$$\Psi_E^{\alpha\beta}(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} d(t - t') e^{i\omega(t-t')} \Psi_E^{\alpha\beta}(t - t') \quad (1.2.11)$$

der Korrelationsfunktion gilt. Man kann nun die generalisierte Suszeptibilität in Gl. (1.2.8) direkt durch die retardierte dyadische Greensche Funktion des elektrischen Feldes ausdrücken. Schließlich ist jede zeitliche Änderung der äußeren Störung direkt mit einem Polarisationsstrom verbunden, da $-i\omega \mathbf{P}_{\text{ext}} = \mathbf{j}_{\text{ext}}$ gilt. Somit stimmt die Gleichung (1.2.7) im Fourier-Raum mit Gl. (1.1.4) formal überein, sodass

$$\mathbf{G}_{\alpha\beta}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{\omega^2 \mu_0} \chi_{EE}^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) \quad (1.2.12)$$

gilt. Somit kann man die Korrelationsfunktion in Gl. (1.2.10) mit der Symmetrierelation in Gl. (1.1.6) in der Form

$$\Psi_E^{\alpha\beta}(\omega) = 2E_0(\omega, T) \omega \mu_0 \text{Im} \mathbf{G}_{\alpha\beta}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) \quad (1.2.13)$$

angeben. Daraus ergibt sich durch Fouriertransformation die Korrelationsfunktion

$$\begin{aligned}\Psi_E^{\alpha\beta}(t-t') &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} \Psi_E^{\alpha\beta}(\omega) \\ &= \int_0^{\infty} d\omega e^{-i\omega(t-t')} E_0(\omega, T) \frac{\omega\mu_0}{\pi} \text{Im} \mathbb{G}_{\alpha\beta}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) + \text{c.c.}\end{aligned}\quad (1.2.14)$$

Diese quantenmechanische Korrelationsfunktion für das elektrische Feld im thermodynamischen Gleichgewicht stimmt offenbar nur dann mit der entsprechenden Korrelationsfunktion aus der Rytovschen fluktuierenden Elektrodynamik überein, wenn die Relation

$$\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_r''(\omega) \int d^3r' \left(\mathbb{G}^E(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}') \mathbb{G}^{E\dagger}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}') \right)_{\alpha\beta} = \text{Im} \mathbb{G}_{\alpha\beta}^E(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) \quad (1.2.15)$$

mit $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0$ erfüllt ist, die auch als optisches Theorem [7, 13] bezeichnet wird. Es wird in Abschnitt (1.9) noch gezeigt, dass im Falle eines globalen thermodynamischen Gleichgewichtes dieses optische Theorem gilt, und damit die Korrelationsfunktionen der Rytovschen Theorie in die Korrelationsfunktionen der Linear-Response-Theorie in Gl. (1.2.14) übergehen. Dass die semi-klassische und quantenmechanische Beschreibung im globalen Gleichgewicht äquivalent sind, hat Eckhardt [25] bereits 1984 gezeigt.

1.2.2 Makroskopische Quanten-Elektrodynamik

Eine quantenmechanische Beschreibung, die der fluktuierenden Elektrodynamik sehr nahe kommt und eine explizite Quantisierung der Felder vornimmt, ist die sogenannte makroskopische Quanten-Elektrodynamik [7, 13]. Der Ausgangspunkt dieser Theorie sind die makroskopischen Maxwell-Gleichungen in (1.1.1), wobei die Felder und Quellenströme durch Operatoren zu ersetzen sind, d.h. $\mathbf{E} \rightarrow \hat{\mathbf{E}}$, $\mathbf{H} \rightarrow \hat{\mathbf{H}}$ und $\mathbf{j} \rightarrow \hat{\mathbf{j}}$. Die mikroskopischen Eigenschaften des Dielektrikums werden ebenso wie in der fluktuierenden Elektrodynamik durch die phänomenologische Permittivität $\epsilon(\omega)$ beschrieben. Um eine Quantisierung der Felder herbeizuführen, wird der Quellenstromoperator durch

$$\hat{\mathbf{j}}(\mathbf{r}, \omega) = 2\omega \sqrt{\hbar\pi\epsilon''(\omega)} \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{r}, \omega) \quad (1.2.16)$$

ausgedrückt, wobei $\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{r}, \omega)$ ein bosonisches Vektorfeld darstellt, das die Kommutatorrelationen

$$\begin{aligned}[\hat{f}_\alpha(\mathbf{r}, \omega), \hat{f}_\beta^\dagger(\mathbf{r}', \omega')] &= \delta_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(\omega - \omega'), \\ [\hat{f}_\alpha(\mathbf{r}, \omega), \hat{f}_\beta(\mathbf{r}', \omega')] &= 0, \\ [\hat{f}_\alpha^\dagger(\mathbf{r}, \omega), \hat{f}_\beta^\dagger(\mathbf{r}', \omega')] &= 0\end{aligned}\quad (1.2.17)$$

erfüllt.

Da die Feldoperatoren über die klassische Greensche Funktion entsprechend Gl. (1.1.4) mit den Stromoperatoren verknüpft sind, ist zunächst klar, dass die Erwartungswerte der Felder verschwinden, da die Felder linear in den Erzeugungs- bzw.

Vernichtungsoperatoren $\hat{\mathbf{f}}^\dagger$ bzw. $\hat{\mathbf{f}}$ sind. Zusätzlich erhält man die richtigen Feldkommutatoren der Quantenelektrodynamik [7],

$$\begin{aligned} [\hat{E}_\alpha(\mathbf{r}, t), \hat{E}_\beta(\mathbf{r}', t)] &= 0, \\ [\hat{B}_\alpha(\mathbf{r}, t), \hat{B}_\beta(\mathbf{r}', t)] &= 0, \\ [\epsilon_0 \hat{E}_\alpha(\mathbf{r}, t), \hat{B}_\beta(\mathbf{r}', t)] &= -i\hbar \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \partial_\gamma \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \end{aligned} \quad (1.2.18)$$

wobei für nicht-magnetische Materialien $\hat{\mathbf{B}} = \mu_0 \hat{\mathbf{H}}$ gilt und $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ der Levi-Civita-Tensor ist. Diese Feldkommutatoren erhält man allerdings nur unter der Annahme, dass das optische Theorem in Gl. (1.2.15) erfüllt ist, dessen Gültigkeit in einem eigenen Abschnitt diskutiert wird.

Die Kommutatorrelationen für die Stromoperatoren bzw. die Kommutatoren für das bosonische Feld $\hat{\mathbf{f}}$ in Gl. (1.2.17) stellen außerdem sicher, dass die Korrelationsfunktionen der Felder im globalen Gleichgewichtsfall mit denen aus der Rytovschen Theorie in Gl. (1.1.13) und damit auch mit denen der Linear-Response-Theorie in Gl. (1.2.14) übereinstimmen. Denn mit Gl. (1.1.4) und der Definition des Stromoperators in Gl. (1.2.16) erhält man für das elektrische Feld

$$\hat{E}_\alpha(\mathbf{r}, \omega) = i\omega\mu_0 \int d^3r' \mathbf{G}_{\alpha\gamma}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}') 2\omega \sqrt{\hbar\pi\epsilon''(\mathbf{r}')} \hat{f}_\gamma(\mathbf{r}', \omega), \quad (1.2.19)$$

sodass schließlich

$$\hat{E}_\alpha(\mathbf{r}, t) = \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \hat{E}_\alpha(\mathbf{r}, \omega) + \text{h.c.} \quad (1.2.20)$$

gilt, wobei h.c. für das hermitesch konjugierte des ersten Terms steht.

Nimmt man an, dass das bosonische Feld im thermodynamischen Gleichgewicht ist, kann man die Erwartungswerte mittels der Spur über den Dichte-Operator

$$\hat{\rho} = \frac{e^{-\hat{H}\beta}}{\text{Tr}[e^{-\hat{H}\beta}]} \quad (1.2.21)$$

berechnen, wobei der Hamilton-Operator des Systems durch

$$\hat{H} = \int d\omega \int d^3r \hbar\omega \hat{\mathbf{f}}^\dagger(\mathbf{r}, \omega) \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{r}, \omega) \quad (1.2.22)$$

gegeben ist. Damit kann man die symmetrisierte Korrelationsfunktion des elektrischen Feldes aus Gl. (1.2.9) bestimmen und bekommt zunächst

$$\begin{aligned} \Psi_E^{\alpha\beta}(t - t') &= \frac{1}{2} \langle \hat{E}_\alpha(\mathbf{r}, t) \hat{E}_\beta(\mathbf{r}', t') + \hat{E}_\beta(\mathbf{r}', t') \hat{E}_\alpha(\mathbf{r}, t) \rangle \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty d\omega' e^{-i(\omega t - \omega' t')} \omega \omega' \mu_0^2 \int d^3r' \int d^3r'' \frac{\omega \omega' \hbar}{\pi} \sqrt{\epsilon''(\mathbf{r}') \epsilon''(\mathbf{r}'')} \\ &\quad \times \left(\mathbf{G}_{\alpha\gamma}^E(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}') \overline{\mathbf{G}_{\beta\delta}^E}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}'') \langle \hat{f}_\gamma(\mathbf{r}', \omega) \hat{f}_\delta^\dagger(\mathbf{r}'', \omega') \rangle \right. \\ &\quad \left. + \overline{\mathbf{G}_{\alpha\gamma}^E}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}') \mathbf{G}_{\beta\delta}^E(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}'') \langle \hat{f}_\gamma^\dagger(\mathbf{r}', \omega) \hat{f}_\delta(\mathbf{r}'', \omega') \rangle \right) \\ &\quad + (\mathbf{r}_1 \leftrightarrow \mathbf{r}_2, t \leftrightarrow t'), \end{aligned} \quad (1.2.23)$$

wobei $(\mathbf{r}_1 \leftrightarrow \mathbf{r}_2, t \leftrightarrow t')$ symbolisch für einen zweiten Term steht, der sich aus dem ersten durch Vertauschung der Orts- und Zeitvariablen ergibt. Außerdem wurden bereits die Beziehungen $\langle \hat{f}_\gamma \hat{f}_\delta \rangle = \langle \hat{f}_\gamma^\dagger \hat{f}_\delta^\dagger \rangle = 0$ verwendet. Nutzt man noch aus, dass die Erwartungswerte der bosonischen Feldoperatoren in (1.2.23) nur einen Wert ungleich Null liefern, falls $\gamma = \delta$, $\omega = \omega'$ und $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ gelten, erhält man mit dem optischen Theorem in Gl. (1.2.15)

$$\begin{aligned} \Psi_E^{\alpha\beta}(t-t') &= \frac{1}{2} \int_0^\infty d\omega e^{-i\omega(t-t')} \omega^2 \mu_0 \frac{\hbar}{\pi} \left(\text{Im} \mathbf{G}_{\alpha\beta}^E(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \langle \hat{f}_\gamma \hat{f}_\delta^\dagger \delta_{\gamma\delta} \rangle \right. \\ &\quad \left. + \text{Im} \mathbf{G}_{\beta\alpha}^E(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) \langle \hat{f}_\gamma^\dagger \hat{f}_\delta \delta_{\gamma\delta} \rangle \right) + (\mathbf{r}_1 \leftrightarrow \mathbf{r}_2, t \leftrightarrow t'). \end{aligned} \quad (1.2.24)$$

Verwendet man nun noch die Symmetrierelation in Gl. (1.1.6) und die Tatsache, dass $E_0(\omega, T) = \hbar\omega \langle \hat{f}_\gamma^\dagger \hat{f}_\delta \delta_{\gamma\delta} + \frac{1}{2} \rangle$ der Erwartungswert eines harmonischen Oszillators im thermodynamischen Gleichgewicht ist, so bekommt man schließlich

$$\begin{aligned} \Psi_E^{\alpha\beta}(t-t') &= \frac{1}{2} \int_0^\infty d\omega e^{-i\omega(t-t')} \omega^2 \mu_0 \frac{\hbar}{\pi} \text{Im} \mathbf{G}_{\alpha\beta}^E(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) 2 \left\langle \hat{f}_\gamma^\dagger \hat{f}_\delta \delta_{\gamma\delta} + \frac{1}{2} \right\rangle + \text{c.c.} \\ &= \int_0^\infty d\omega e^{-i\omega(t-t')} \frac{\omega \mu_0}{\pi} \text{Im} \mathbf{G}_{\alpha\beta}^E(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) E_0(\omega, T) + \text{c.c.}, \end{aligned}$$

die bekannte Korrelationsfunktion aus Gl. (1.2.14) für das thermodynamische Gleichgewicht. Damit liefert die makroskopische Quantenelektrodynamik im thermodynamischen Gleichgewicht die gleichen Ergebnisse wie die Rytovsche Theorie und die Linear-Response-Theorie basierend auf dem Fluktuations-Dissipations-Theorem, wobei aber eine explizite Quantisierung der Felder durchgeführt wurde. Allerdings erscheint unklar, wie man die Rytovschen Ergebnisse — wie die Bestimmung des Strahlungswärmetransportes zwischen zwei dielektrischen Köpern mit verschiedener Temperatur — innerhalb dieser Theorie reproduzieren kann.

1.2.3 Janowicz-Beschreibung

Eine Klärung dieser Frage wurde innerhalb einer Theorie gegeben, die die Wechselwirkung zwischen dem Feld und dem Dielektrikum sowie die Wechselwirkung zwischen dem Dielektrikum und seinem Reservoir explizit berücksichtigt. Solch eine Beschreibung wurde durch Janowicz *et al.* [8] gegeben, wobei man eine genaue Darstellung dieser Theorie in [26] finden kann. Der Startpunkt dieser Beschreibung ist die Lagrange-Funktion des Gesamtsystems

$$L = L_D + L_{EM} + L_{WW} + L_{RD} \quad (1.2.25)$$

mit der Lagrange-Funktion des Dielektrikums L_D , des elektromagnetischen Feldes L_{EM} , der Wechselwirkung zwischen Dielektrikum und elektromagnetischem Feld L_{WW} und der Lagrange-Funktion L_{RD} der Wechselwirkung zwischen dem Dielektrikum und dem Reservoir. Dabei beschreibt die Lagrange-Funktion L_D das Dielektrikum im Hopfield-Modell [27] als ein Polarisationsfeld harmonischer Oszillatoren, das linear an ein Reservoir koppelt, das selbst durch ein kontinuierliches Feld harmonischer Oszillatoren gegeben ist. Innerhalb dieses Modells haben bereits Huttner und

Barnett [28] gezeigt, dass die zur Lagrange-Funktion (1.2.25) gehörige Hamilton-Funktion des Gesamtsystems eine Quantisierung und Diagonalisierung erlaubt.

Janowicz *et al.* haben nun mithilfe der Variation der Lagrange-Funktion (1.2.25) die Heisenberg-Gleichung für die beteiligten Feldgrößen aufgestellt und das Anfangswertproblem für inhomogene Dielektrika gelöst und somit den Poynting-Vektor, d.h. im Wesentlichen die Korrelationsfunktion $\langle \hat{E}_\alpha \hat{H}_\beta \rangle$ für das gegebene System im stationären Fall für $t \rightarrow \infty$ bestimmt. Innerhalb dieses Ansatzes stellt sich heraus, dass die Korrelationsfunktion der Felder bzw. der Poynting-Vektor direkt von den Anfangswerten der Reservoirvariablen abhängen. Nimmt man an, dass diese im thermodynamischen Gleichgewicht sind — d.h. man geht auch hier wie in der fluktuierenden Elektrodynamik von einer lokalen Gleichgewichtssituation aus — so erhält man die Korrelationsfunktion aus der Rytovschen Theorie in Gl. (1.1.13), wobei die Bose-Einstein-Funktion vom Erwartungswert der Reservoir-Oszillatoren herrührt. Suttorp und Wubs [29] haben schließlich gezeigt, dass man innerhalb dieser Theorie die phänomenologische Theorie der makroskopischen Quanten-Elektrodynamik ableiten kann, indem man die entsprechenden Größen mit der Permittivität des Dielektrikums und dem Quellenstromoperator identifiziert.

1.3 Freie dyadische Greensche Funktion

Um das klassische elektrodynamische Problem der Bestimmung der elektrischen Greenschen Funktion \mathbb{G}^E zu lösen, ist es unerlässlich, zunächst die freie dyadische Greensche Funktion für ein gegebenes Koordinatensystem zu konstruieren. Die freie dyadische Greensche Funktion selbst ist eine Grundlösung der inhomogenen Helmholtz-Gleichung (1.1.5) innerhalb eines unbegrenzten dielektrischen Mediums mit der Permittivität $\epsilon(\omega)$, die über die Wellenzahl $k^2 = \mu_0 \epsilon(\omega) \omega^2$ in die Helmholtz-Gleichung eingeht. In diesem Abschnitt soll insbesondere die freie dyadische Greensche Funktion im Vakuum bestimmt werden, sodass $\epsilon(\omega) = \epsilon_0$ und damit $k = k_0$ gilt.

Zur Konstruktion der dyadischen Greenschen Funktion geht man zunächst von der skalaren Greenschen Funktion aus, die ihrerseits eine Lösung der inhomogenen Wellengleichung

$$(\Delta + k_0^2)g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (1.3.1)$$

mit $k_0^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 = \omega^2 / c^2$ ist. Die gesuchte Lösung dieser Differentialgleichung soll auslaufende Wellen beschreiben, sodass als physikalische Randbedingung die Sommerfeldsche Ausstrahlbedingung

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left[\frac{\partial g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial r} - ik_0 g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right] = 0 \quad (1.3.2)$$

gestellt werden muss. Die gesuchte Lösung ist eine auslaufende Kugelwelle

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{ik_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \quad (1.3.3)$$

Mit dieser Lösung für die inhomogene Wellengleichung (1.3.1) kann man die dyadische Greensche Funktion konstruieren, indem man den Ansatz

$$\mathbb{G}_0^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \left(\mathbb{1} + \frac{1}{k_0^2} \nabla \otimes \nabla \right) g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (1.3.4)$$

wählt, wobei \otimes für das äußere bzw. Tensor-Produkt und $\mathbb{1}$ für den Identitätsoperator stehen. Mithilfe der Identität $\nabla \times \nabla \times = \nabla \otimes \nabla - \Delta$ kann man zeigen, dass der Ansatz in Gl. (1.3.4) eine Lösung der inhomogenen Helmholtz-Gleichung (1.1.5) ist, denn

$$\begin{aligned} \left(\nabla \times \nabla \times - k_0^2 \mathbb{1} \right) \mathbb{G}_0^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= - \left(k_0^2 \mathbb{1} - \nabla \times \nabla \times \right) \left(\mathbb{1} + \frac{1}{k_0^2} \nabla \otimes \nabla \right) g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\ &= -k_0^2 \left(\mathbb{1} + \frac{1}{k_0^2} \nabla \otimes \nabla \right) g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \nabla \times \nabla \times g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbb{1} \\ &= -(k_0^2 + \Delta) g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbb{1} \\ &= \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbb{1}. \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

Daher kann man die freie dyadische Greensche Funktion durch die Bestimmungsgleichung

$$\mathbb{G}_0^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \left(\mathbb{1} + \frac{1}{k_0^2} \nabla \otimes \nabla \right) \frac{e^{ik_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad (1.3.6)$$

angeben.

Um die Eigenschaften der freien Greenschen Funktion etwas genauer zu studieren, lohnt es sich, die freie dyadische Greensche Funktion im \mathbf{k} -Raum zu betrachten. Im Fourrier Raum hat die inhomogene Helmholtz-Gleichung (1.1.5) für das Vakuum die Form

$$-[k_0^2 \mathbb{1} + \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} - k^2 \mathbb{1}] \mathbb{G}_0^E(\mathbf{k}, \omega) = \mathbb{1}, \quad (1.3.7)$$

sodass man die freie Greensche Funktion im Fourrier Raum durch

$$\mathbb{G}_0^E(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{\mathbb{1}}{(k_0^2 - k^2) \mathbb{1} + \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}} \quad (1.3.8)$$

angeben kann. Die dyadische Greensche Funktion kann nun leicht in ihre longitudinalen und transversalen Anteile zerlegt werden, d.h. in die Anteile proportional zu $\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_k = \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}/k^2$ bzw. $(\mathbb{1} - \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_k)$. Man erhält dann

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_0^E(\mathbf{k}, \omega) &= -\frac{1}{k_0^2 - k^2} (\mathbb{1} - \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_k) - \frac{1}{k_0^2} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_k \\ &=: \mathbb{G}_{0,t}^E(\mathbf{k}, \omega) + \mathbb{G}_{0,l}^E(\mathbf{k}, \omega). \end{aligned} \quad (1.3.9)$$

Der transversale Anteil $\mathbb{G}_{0,t}^E(\mathbf{k}, \omega)$ beschreibt die propagierenden Transversalmoden und hat Pole bei $k = \pm k_0$, wobei man für auslaufende Wellen nur den Pol bei $k = k_0$ zu berücksichtigen hat. Man beachte, dass $\mathbb{G}_{0,t}^E(\mathbf{k}, \omega)$ im Wesentlichen die Greensche Funktion für Photonen im Vakuum ist [23]. Der longitudinale Anteil $\mathbb{G}_{0,l}^E(\mathbf{k}, \omega)$ beschreibt dagegen die elektrostatischen Moden und hat einen Pol zweiter Ordnung bei $k_0 = 0$.

Führt man nun die Rücktransformation in den Ortsraum durch, so erhält man für die Greensche Funktion [9, 30] mit $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ und $\mathbf{e}_\rho = \boldsymbol{\rho}/\rho$

$$\mathbb{G}_0^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = -\mathbb{H}_v(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \frac{1}{3k_0^2} \delta(\boldsymbol{\rho}) \mathbb{1}, \quad (1.3.10)$$

wobei

$$\mathbb{H}_v(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{ik_0\rho}}{4\pi k_0^2 \rho^3} [a(-ik_0\rho) \mathbb{1} - b(-ik_0\rho) \mathbf{e}_\rho \otimes \mathbf{e}_\rho] \quad (1.3.11)$$

und

$$\begin{aligned} a(x) &= 1 + x + x^2, \\ b(x) &= 3 + 3x + x^2 \end{aligned} \quad (1.3.12)$$

gelten. Eine Fourier-Transformation der longitudinalen und transversalen Greenschen Funktion führt auf [9]

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_{0,t}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) &= \frac{\mathbb{1} - 3\mathbf{e}_\rho \otimes \mathbf{e}_\rho}{4\pi k_0^2 \rho^3} - \mathbb{H}_v(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\ \mathbb{G}_{0,l}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) &= -\frac{\mathbb{1} - 3\mathbf{e}_\rho \otimes \mathbf{e}_\rho}{4\pi k_0^2 \rho^3} - \frac{1}{3k_0^2} \delta(\boldsymbol{\rho}) \mathbb{1}. \end{aligned} \quad (1.3.13)$$

Die Delta-Funktion, die zur longitudinalen Greenschen Funktion gehört, stellt sicher, dass das über eine kleine Kugel, die einen statischen Dipol enthält, gemittelte elektrische Feld nicht Null ist. Der erste Term ergibt das bekannte Dipolfeld für einen statischen Dipol, was man leicht sehen kann, indem man beispielsweise von einem statischen Dipol bei $\mathbf{r}' = \mathbf{0}$ mit dem Dipolmoment \mathbf{d} ausgeht und in Gl. (1.1.4) einsetzt. Das ergibt das statische Dipolfeld [31]

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) &= i\omega\mu_0 \int d^3r' \left(-\frac{\mathbb{1} - 3\mathbf{e}_\rho \otimes \mathbf{e}_\rho}{4\pi k_0^2 \rho^3} - \frac{1}{3k_0^2} \delta(\boldsymbol{\rho}) \mathbb{1} \right) (-i\omega) \mathbf{d} \delta(\mathbf{r}') \\ &= \frac{3\mathbf{e}_r(\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{d}) - \mathbf{d}}{4\pi\epsilon_0 r^3} - \frac{\delta(\mathbf{r})}{3\epsilon_0} \mathbf{d}, \end{aligned} \quad (1.3.14)$$

wobei wieder $\mathbf{e}_r = \mathbf{r}/r$ ist. Dass die transversale Greensche Funktion $\mathbb{G}_{0,t}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)$ keine statischen Anteile enthält, kann man leicht sehen, da für $\omega \rightarrow 0$

$$\mathbb{H}_v(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rightarrow \frac{\mathbb{1} - 3\mathbf{e}_\rho \otimes \mathbf{e}_\rho}{4\pi k_0^2 \rho^3} \quad (1.3.15)$$

und somit $\mathbb{G}_{0,t} = 0$ im statischen Grenzfall gilt.

1.4 Die freie dyadische Greensche Funktion in Zylinderkoordinaten

Nachdem die freie dyadische Greensche Funktion (1.3.10) für das Vakuum in kartesischen Koordinaten bestimmt und diskutiert wurde, soll nun der entsprechende Ausdruck in Zylinderkoordinaten für ein beliebiges Dielektrikum mit der Permittivität

$\epsilon(\omega)$ bestimmt werden. Gesucht werden dazu die Vektorwellenfunktionen $\mathbf{V} = \mathbf{M}, \mathbf{N}$, die die homogene Helmholtz-Gleichung

$$(\nabla \times \nabla \times - k^2)\mathbf{V} = \mathbf{0} \quad (1.4.1)$$

erfüllen. Solche Vektorwellenfunktionen lassen sich ganz allgemein aus einer skalaren Funktion $\psi = \psi(\mathbf{r}, \omega)$ konstruieren, die ihrerseits eine Lösung der Wellengleichung

$$(\Delta + k^2)\psi = 0 \quad (1.4.2)$$

ist. Wählt man einen geeigneten konstanten Pilotvektor \mathbf{a} , so erhält man die zwei linear unabhängigen Lösungen der Helmholtz-Gleichung (1.4.1)

$$\mathbf{M} = \nabla \times (\mathbf{a}\psi) \quad \text{und} \quad \mathbf{N} = \frac{1}{k}\nabla \times \nabla \times (\mathbf{a}\psi). \quad (1.4.3)$$

Man kann sich durch Einsetzen dieser Relationen in die Helmholtz-Gleichung (1.4.1) mithilfe der Identität $\nabla \times \nabla \times = \nabla \otimes \nabla - \Delta$ und der homogenen Wellengleichung (1.4.2) leicht davon überzeugen, dass die Vektorwellenfunktionen \mathbf{V} Lösungen der Gl. (1.4.1) sind.

Aus den Bestimmungsgleichungen der Vektorwellenfunktionen (1.4.3) folgen sofort die nützlichen Beziehungen [10]

$$\nabla \times \mathbf{M} = k\mathbf{N} \quad \text{und} \quad \nabla \times \mathbf{N} = k\mathbf{M}. \quad (1.4.4)$$

Anhand dieser Beziehungen ist klar, dass die Vektorwellenfunktionen eine verschwindende Divergenz haben, da sie als reine Rotationsfelder darstellbar sind. Daher kann man mit diesen Vektorwellenfunktionen nur transversale Felder beschreiben. Außerdem ist leicht zu sehen, dass die beiden Vektorwellenfunktionen senkrecht aufeinander stehen, da im Fourier-Raum $\mathbf{M} \cdot \mathbf{N} = ik^{-1}\mathbf{M} \cdot \mathbf{k} \times \mathbf{M} = 0$ gilt.

Man beachte außerdem, dass die longitudinale Vektorwellenfunktion [32]

$$\mathbf{L} = \nabla\psi \quad (1.4.5)$$

keine Lösung der homogenen Helmholtz-Gleichung in (1.4.1) für $k \neq 0$ ist, denn es gilt

$$(\nabla \times \nabla \times - k^2)\mathbf{L} = -k^2\nabla\psi = -k^2\mathbf{L}. \quad (1.4.6)$$

Die longitudinale Vektorwellenfunktion \mathbf{L} muss also nur für die Wellenzahlen $k = 0$ berücksichtigt werden, d.h. im Medium für $\epsilon(\omega) = 0$ bzw. im Vakuum für $\omega = 0$, wobei sie für alle anderen Frequenzen keine physikalische Bedeutung hat. Daher benötigt man die longitudinale Vektorwellenfunktion für die Beschreibung der longitudinalen Moden in Festkörpern [33] bzw. der statischen Felder im Vakuum [34]. Im Weiteren werden die longitudinalen Lösungen vernachlässigt und nur die dynamischen Transversalfelder betrachtet, sodass nur die transversalen Vektorwellenfunktionen \mathbf{M}, \mathbf{N} berücksichtigt werden, die von transversalen Quellenströmen mit $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ herrühren. Man beachte aber, dass man damit nur physikalische Situationen richtig beschreiben kann, in denen die statischen Felder und longitudinalen Moden in Festkörpern vernachlässigt werden können.

Da im Weiteren nur Geometrien geschichteter planarer Medien betrachtet werden, bei denen die Schichten der verschiedenen Materialien entlang der z -Achse aufgereiht sind, ist es sinnvoll Zylinderkoordinaten (r, φ, z) einzuführen, wobei bezüglich der z -Achse eine Rotationssymmetrie besteht. Die Lösungen der Wellengleichung (1.4.2) haben dann die Gestalt [10]

$$\psi_{\pm n\lambda}(r, \varphi, z) = J_n(\lambda r) \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} (n\varphi) e^{ihz} \quad (1.4.7)$$

mit der Wellenzahl

$$k^2 = \lambda^2 + h^2. \quad (1.4.8)$$

Der kontinuierliche Parameter $\lambda \in [0, \infty[$ entspricht hier dem parallelen Anteil des Wellenzahlvektors \mathbf{k} und h dem senkrechten Anteil, wobei sich parallel und senkrecht auf die Trennfläche zwischen zwei Schichten bezieht. Man beachte, dass die senkrechte Wellenzahl h selbst für reelle Wellenzahlen k und λ komplexe Werte annehmen kann. Für Dielektrika mit einer komplexen Permittivität $\epsilon(\omega)$ ist allerdings die Wellenzahl k im Medium selbst eine komplexe Zahl. Der diskrete Parameter n , der auch als Index in die Besselfunktion $J_n(\lambda r)$ eingeht, kommt aus der 2π -Periodizität bezüglich des Azimutwinkels φ und kann ganzzahlige Werte aus dem Intervall $[0, \infty[$ annehmen. Wählt man nun noch den Einheitsvektor \mathbf{e}_z der Symmetrieachse als Pilotvektor \mathbf{a} , so erhält man für die Vektorwellenfunktionen

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\pm n\lambda}(h) &= \nabla \times (\psi_{\pm n\lambda}(r, \varphi, z) \mathbf{e}_z) \quad \text{und} \\ \mathbf{N}_{\pm n\lambda}(h) &= \frac{1}{k} \nabla \times \nabla \times (\psi_{\pm n\lambda}(r, \varphi, z) \mathbf{e}_z). \end{aligned} \quad (1.4.9)$$

Betrachtet man die Vektorwellenfunktionen wieder im Fourier-Raum, so wird an dieser Stelle ersichtlich, dass \mathbf{M} senkrecht zu \mathbf{e}_z und \mathbf{k} und damit senkrecht zur Einfallsebene ist, die durch die beiden Vektoren \mathbf{e}_z und \mathbf{k} aufgespannt wird. Daher kann man mit der Vektorwellenfunktion \mathbf{M} die TE-polarisierten Moden in der Schichtgeometrie beschreiben. Die Vektorwellenfunktion \mathbf{N} hingegen ist senkrecht auf \mathbf{M} und \mathbf{k} , wodurch diese Vektorwellenfunktion innerhalb der Einfallsebene liegt, sodass sich mit \mathbf{N} die TM-polarisierten Moden beschreiben lassen. Das elektrische und magnetische Feld sind dabei durch eine Linearkombination beider Anteile gegeben.

Man erhält aus Gl. (1.4.9) die Vektorwellenfunktionen für die Zylinderkoordinaten [10, 35]

$$\mathbf{M}_{\pm n\lambda}(h) = \left(\mp n \frac{J_n(\lambda r)}{r} \begin{Bmatrix} \sin \\ \cos \end{Bmatrix} (n\varphi) \mathbf{e}_r - \frac{\partial J_n(\lambda r)}{\partial r} \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} (n\varphi) \mathbf{e}_\varphi \right) e^{ihz}, \quad (1.4.10)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{\pm n\lambda}(h) &= \left(\frac{ih}{k} \frac{\partial J_n(\lambda r)}{\partial r} \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} (n\varphi) \mathbf{e}_r \mp \frac{ihn}{k} \frac{J_n(\lambda r)}{r} \begin{Bmatrix} \sin \\ \cos \end{Bmatrix} (n\varphi) \mathbf{e}_\varphi \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda^2}{k} J_n(\lambda r) \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} (n\varphi) \mathbf{e}_z \right) e^{ihz}. \end{aligned} \quad (1.4.11)$$

Diese Vektorwellenfunktionen erfüllen die Orthogonalitätsrelationen

$$\begin{aligned}
 \int_{z' < 0} d^3 r' \mathbf{M}'_{\pm n \lambda}(-h_1) \cdot \overline{\mathbf{M}}'_{\pm n' \lambda'}(-h_1) &= \frac{\pi \lambda}{2h_1''} \delta(\lambda - \lambda') (1 + \delta_{n,0}) \delta_{n,n'}, \\
 \int_{z' < 0} d^3 r' \mathbf{N}'_{\pm n \lambda}(-h_1) \cdot \overline{\mathbf{N}}'_{\pm n' \lambda'}(-h_1) &= \frac{\pi \lambda}{2h_1''} \delta(\lambda - \lambda') (1 + \delta_{n,0}) \delta_{n,n'} \frac{\lambda^2 + |h_1|^2}{|k_1|^2}, \\
 \int_{z' < 0} d^3 r' \mathbf{N}'_{\pm n \lambda}(-h_1) \cdot \overline{\mathbf{M}}'_{\pm n' \lambda'}(-h_1) &= \int_{z' < 0} d^3 r' \mathbf{M}'_{\pm n \lambda}(-h_1) \overline{\mathbf{N}}'_{\pm n' \lambda'}(-h_1) = 0,
 \end{aligned} \tag{1.4.12}$$

die hier für komplexwertige Wellenzahlen h eine kompliziertere Form als in [10] annehmen. Man beachte, dass sich die Volumenintegration über das Quellvolumen erstreckt, das hier durch den Halbraum für alle $z < 0$ gegeben sein soll.

Die dyadische Greensche Funktion kann nun anhand der Vollständigkeitsrelation konstruiert werden, wobei der an den Details interessierte Leser auf das Buch von Chen-To-Tai [10] verwiesen wird. Man erhält dann für die freie dyadische Greensche Funktion als Lösung der inhomogenen Wellengleichung (1.1.5) für $z > z'$ [10]

$$\begin{aligned}
 \mathbb{G}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \frac{i}{4\pi} \int_0^\infty d\lambda \sum_{n=0}^\infty \frac{(2 - \delta_{n,0})}{\lambda h} \left\{ \mathbf{M}_{\pm n \lambda}(h) \otimes \mathbf{M}'_{\pm n \lambda}(-h) \right. \\
 &\quad \left. + \mathbf{N}_{\pm n \lambda}(h) \otimes \mathbf{N}'_{\pm n \lambda}(-h) \right\}.
 \end{aligned} \tag{1.4.13}$$

Hierbei kennzeichnen die Striche an den Vektorwellenfunktionen, dass hier die Koordinaten des Quellpunktes \mathbf{r}' zu benutzen sind, wohingegen bei den ungestrichelten Vektorwellenfunktionen die Koordinaten des Beobachtungspunktes \mathbf{r} zu verwenden sind. Außerdem muss das dyadische Produkt zweier Vektorwellenfunktionen $\mathbf{M}_{\pm n \lambda}(h) \otimes \mathbf{M}'_{\pm n \lambda}(-h)$ als Summe der Produkte der Vektorwellenfunktion mit dem oberen und dem unteren Vorzeichen gelesen werden, d.h.

$$\mathbf{M}_{\pm n \lambda}(h) \otimes \mathbf{M}'_{\pm n \lambda}(-h) \equiv \mathbf{M}_{+n \lambda}(h) \otimes \mathbf{M}'_{+n \lambda}(-h) + \mathbf{M}_{-n \lambda}(h) \otimes \mathbf{M}'_{-n \lambda}(-h). \tag{1.4.14}$$

Die freie Greensche Funktion aus Gl. (1.4.13) erfüllt die Sommerfeldsche Ausstrahlbedingung

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left[\nabla \times \mathbb{G}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - ik \mathbf{e}_r \times \mathbb{G}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right] = 0 \tag{1.4.15}$$

und stellt damit eine Grundlösung der dyadischen Wellengleichung für auslaufende Transversalwellen dar. (Sie erfüllt offensichtlich die homogene Helmholtz-Gleichung (1.4.1), da auch die Präfaktoren im äußeren Produkt Lösungen dieser Gleichung sind.) Außerdem kann man anhand der Konstruktion leicht sehen, dass die Symmetrierelation in Gl. (1.1.6) erfüllt wird. Die entsprechende freie Greensche Funktion für $z < z'$ kann man hieraus durch das Umkehren der Vorzeichen der Wellenzahl h in allen Argumenten der vier Vektorwellenfunktionen erhalten. Mittels dieser freien Greenschen Funktion, die ja die Lösung der Helmholtz-Gleichung für eine Delta-Inhomogenität darstellt, können die Greenschen Funktionen für beliebige Schichtgeometrien [35] durch Linearkombination erzeugt werden, wobei die entsprechenden Randbedingungen (1.1.7) zu implementieren sind, um die Koeffizienten und damit die eindeutige Lösung zu bestimmen.

1.5 Greensche Funktion für eine Halbraumgeometrie

Die Konstruktion der Greenschen Funktion in einer planaren Geometrie geschichteter Medien mit der freien dyadischen Greenschen Funktion in Gl. (1.4.13) soll nun anhand der einfachsten Geometrie dieser Klasse von Geometrien durchgeführt werden, der Halbraumgeometrie in Abb. 1.1. Daher sei der Halbraum für alle $z < 0$ durch ein Dielektrikum mit der Permittivität ϵ_1 gegeben und der Halbraum für alle $z > 0$ durch ein Dielektrikum mit der Permittivität ϵ_2 . Da in den folgenden Abschnitten das fluktuierende Feld im Dielektrikum 2 bestimmt werden soll, das durch die fluktuierenden Quellenströme im Dielektrikum 1 erzeugt wird, ist es zunächst notwendig, die dyadische Greensche Funktion \mathbb{G}_{21} im Dielektrikum 2 mit den Quellenströmen im Dielektrikum 1 zu bestimmen.

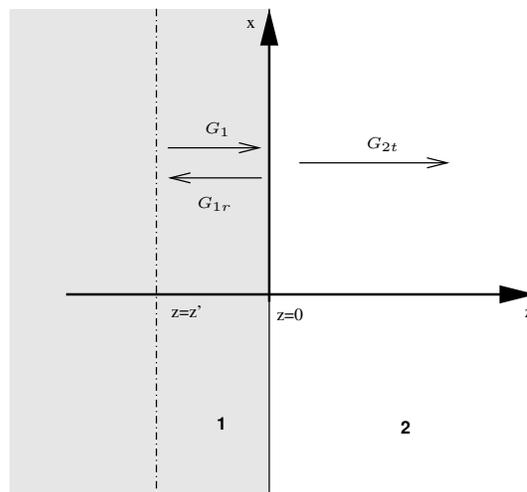


Abbildung 1.1: Skizze zur Konstruktion der Greenschen Funktionen für die Halbraumgeometrie.

Anschaulich ist klar, dass ein Quellenstrom bei z' im Dielektrikum 1 ein propagierendes Feld erzeugt, das an der Grenzfläche bei $z = 0$ teilweise reflektiert und teilweise in das Dielektrikum 2 transmittiert wird. Der mathematische Ansatz für die Greenschen Funktionen hat dementsprechend die Form

$$\mathbb{G}_{11} = \mathbb{G}_1 + \mathbb{G}_{1r} \quad (1.5.1)$$

$$\mathbb{G}_{21} = \mathbb{G}_{2t}. \quad (1.5.2)$$

Die dyadische Greensche Funktion \mathbb{G}_{11} im Dielektrikum 1 mit den Quellenströmen im Dielektrikum 1 setzt sich in diesem Ansatz aus der freien Greenschen Funktion \mathbb{G}_1 im Dielektrikum 1, die den auslaufenden Anteil des elektrischen Feldes beschreibt, und dem an der Grenzfläche bei $z = 0$ reflektierten Anteil \mathbb{G}_{1r} zusammen. Die dyadische Greensche Funktion \mathbb{G}_{21} im Dielektrikum 2 mit den Quellenströmen im Dielektrikum 1 ist dagegen allein durch den transmittierten Anteil \mathbb{G}_{2t} der ursprünglichen Welle gegeben. Drückt man den reflektierten Anteil durch die dyadische Greensche

Funktion in Gl. (1.4.13) mithilfe der Koeffizienten r_{\perp}^{12} für die TE-Moden und r_{\parallel}^{12} für die TM-Moden aus, so kann man den Ansatz [10]

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_{11}^E = & \frac{i}{4\pi} \int_0^{\infty} d\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2 - \delta_{n,0})}{\lambda h_1} \left\{ (\mathbf{M}_{\pm n\lambda}(h_1) + r_{\perp}^{12} \mathbf{M}_{\pm n\lambda}(-h_1)) \otimes \mathbf{M}'_{\pm n\lambda}(-h_1) \right. \\ & \left. + (\mathbf{N}_{\pm n\lambda}(h_1) + r_{\parallel}^{12} \mathbf{N}_{\pm n\lambda}(-h_1)) \otimes \mathbf{N}'_{\pm n\lambda}(-h_1) \right\} \end{aligned} \quad (1.5.3)$$

machen. Die Vorzeichen in den Präfaktoren bestimmen, ob es sich um auslaufende oder einlaufende Lösungen handelt. Außerdem sind die Postfaktoren für \mathbb{G}_1 und \mathbb{G}_{1r} die gleichen, da beide Wellen den gleichen Ursprung haben. Entsprechend kann man den transmittierten Anteil mithilfe der Koeffizienten t_{\perp}^{21} für die TE-Moden und t_{\parallel}^{21} für die TM-Moden ansetzen [10] und bekommt

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_{21}^E = & \frac{i}{4\pi} \int_0^{\infty} d\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2 - \delta_{n,0})}{\lambda h_1} \left\{ t_{\perp}^{21} \mathbf{M}_{\pm n\lambda}(h_2) \otimes \mathbf{M}'_{\pm n\lambda}(-h_1) \right. \\ & \left. + t_{\parallel}^{21} \mathbf{N}_{\pm n\lambda}(h_2) \otimes \mathbf{N}'_{\pm n\lambda}(-h_1) \right\}. \end{aligned} \quad (1.5.4)$$

Auch hier bestimmen die Präfaktoren den Charakter der auslaufenden Wellen, allerdings handelt es sich diesmal um Wellen im Medium 2. Man beachte, dass bei dieser Konstruktion der Ursprung der Welle nicht nur in die Postfaktoren eingeht, die mit denen in \mathbb{G}_{11}^E übereinstimmen, sondern auch in den Nenner unter dem Integral, der proportional zu h_1 ist.

Die magnetische dyadische Greensche Funktion \mathbb{G}_{21}^H kann mittels des Faradayschen Induktionsgesetzes in Gl. (1.1.8) und den Relationen zwischen \mathbf{N} und \mathbf{M} in Gl. (1.4.4) direkt bestimmt werden, sodass man im Dielektrikum 2

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_{21}^H = & \frac{1}{i\omega\mu_0} \nabla \times \mathbb{G}_{21}^E \\ = & \frac{k_2}{4\pi\omega\mu_0} \int_0^{\infty} d\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2 - \delta_{n,0})}{\lambda h_1} \left\{ t_{\perp}^{21} \mathbf{N}_{\pm n\lambda}(h_2) \otimes \mathbf{M}'_{\pm n\lambda}(-h_1) \right. \\ & \left. + t_{\parallel}^{21} \mathbf{M}_{\pm n\lambda}(h_2) \otimes \mathbf{N}'_{\pm n\lambda}(-h_1) \right\} \end{aligned} \quad (1.5.5)$$

erhält.

Zur Lösung des klassischen elektrodynamischen Problems für die gegebene Geometrie müssen nur noch die richtigen Randbedingungen für das elektrische Feld implementiert werden. Dabei können die beiden Randbedingungen in Gl. (1.1.7) bei $z = 0$ mit $\mathbf{n} = \mathbf{e}_z$ für die TE- und TM-Moden einzeln angewendet werden, da \mathbf{N} und \mathbf{M} linear unabhängig sind. Man erhält daher vier Bestimmungsgleichungen für die vier unbekanntenen Koeffizienten in den dyadischen Greenschen Funktionen, die man leicht auflösen kann. Es ergeben sich die Fresnelschen Amplitudenreflexionskoeffizienten [31]

$$r_{\perp}^{12} = \frac{h_1 - h_2}{h_1 + h_2} \quad \text{und} \quad r_{\parallel}^{12} = \frac{h_1\epsilon_2 - h_2\epsilon_1}{h_1\epsilon_2 + h_2\epsilon_1} \quad (1.5.6)$$

und die Amplitudentransmissionskoeffizienten

$$t_{\perp}^{21} = \frac{2h_1}{h_2 + h_1} \quad \text{und} \quad t_{\parallel}^{21} = \frac{2h_1\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2}}{h_2\epsilon_1 + h_1\epsilon_2} \quad (1.5.7)$$

für die Transmission bzw. Reflexion ebener elektromagnetischer Wellen an einer planaren Oberfläche. Anhand dieser Gleichungen kann man leicht sehen, dass die Fresnel-Koeffizienten für die TE-Moden die Beziehung $t_{\perp} + r_{\perp} = 1$ erfüllen, wohingegen dies für die TM-Moden nicht gilt. Die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten für die Reflexion bzw. Transmission einer ebenen elektromagnetischen Welle an einer planaren Oberfläche sind für die TE- und TM-Moden durch [36]

$$R = |r|^2 \quad \text{und} \quad T = 1 - |r|^2 \quad (1.5.8)$$

definiert, sodass offensichtlich

$$R + T = 1 \quad (1.5.9)$$

gilt. Man beachte, dass $T \neq |t|^2$ ist.

1.6 Die propagierenden Moden des fluktuierenden Feldes

Nachdem die Greenschen Funktionen für die Halbraumgeometrie in Abb. 1.1 für Zylinderkoordinaten bekannt sind, kann man nunmehr die fluktuierende Elektrodynamik auf diese Geometrie anwenden. Dazu geht man davon aus, dass im Dielektrikum 1 ein lokales thermodynamisches Gleichgewicht bei der Temperatur T_1 vorliegt. Das Dielektrikum 2 hingegen habe die Temperatur T_2 , es liegt hier also ebenfalls ein lokales thermodynamisches Gleichgewicht, allerdings bei $T = T_2$ vor. Im Rahmen der fluktuierenden Elektrodynamik kann es einen Energieaustausch zwischen den beiden Medien nur durch die fluktuierenden elektromagnetischen Felder geben, sodass das lokale thermodynamische Gleichgewicht in den beiden Dielektrika von außen durch Energiezufuhr bzw. Energieabfuhr aufrecht gehalten werden muss.

Um den Energieaustausch bzw. den Strahlungswärmetransport zwischen den beiden Medien angeben zu können, muss man die Energie pro Fläche und Zeit bestimmen, die durch die Grenzfläche beider Dielektrika bei $z = 0$ geht. Die zentrale Größe ist daher in diesem Fall der Poynting-Vektor

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \langle \mathbf{E} \times \mathbf{H} \rangle, \quad (1.6.1)$$

wobei die spitzen Klammern wieder das Ensemble-Mittel symbolisieren. Der Energiefluss von Dielektrikum 1 in das Dielektrikum 2 durch eine Fläche parallel zur Grenzfläche zwischen beiden Dielektrika ist durch die z -Komponente des Poynting-Vektors gegeben, wobei man das Ensemble-Mittel derjenigen Felder im Dielektrikum 2 zu nehmen hat, die durch die Quellenströme im Dielektrikum 1 erzeugt werden.

Man bekommt somit entsprechend (1.1.13) die Gleichung

$$\begin{aligned} \langle S_{21,z} \rangle &= \epsilon_{\alpha\beta z} \langle E_\alpha H_\beta \rangle \\ &= \epsilon_{\alpha\beta z} \int_0^\infty d\omega E_0(\omega, T_1) \frac{\mu_0^2 \omega^3 \epsilon_1''(\omega)}{\pi} \\ &\quad \times \int_{z' < 0} d^3 r' \left(\mathbf{G}_{21}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{G}_{21}^{H\dagger}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right)_{\alpha\beta} + \text{c.c.} \end{aligned} \quad (1.6.2)$$

mit dem Levi-Civita-Tensor $\epsilon_{\alpha\beta z}$. Um diesen Ausdruck auszuwerten, muss vor allem das Integral über das Quellenvolumen bei $z < 0$ berechnet werden. Setzt man die dyadischen Greenschen Funktionen aus den Gl. (1.5.4) und Gl. (1.5.5) in das Integral über das Quellenvolumen in Gl. (1.6.2) ein, so erhält man unter Verwendung der Orthogonalitätsrelationen in Gl. (1.4.12)

$$\begin{aligned} \int d^3 r' \mathbf{G}_{21}^E \mathbf{G}_{21}^{H\dagger} &= \frac{i\bar{k}_2}{(4\pi)^2 \omega \mu_0} \int d\lambda \int d\lambda' \sum_{n,n'} \frac{(2 - \delta_{n,0})^2}{\lambda^2 |h_1|^2} \left\{ \right. \\ &\quad |t_\perp^{21}|^2 \mathbf{M}_{\pm n\lambda}(h_2) \otimes \bar{\mathbf{N}}_{\pm n'\lambda'}(h_2) \int d^3 r' \mathbf{M}'_{\pm n\lambda}(-h_1) \bar{\mathbf{M}}'_{\pm n'\lambda'}(-h_1) \\ &\quad \left. + |t_\parallel^{21}|^2 \mathbf{N}_{\pm n\lambda}(h_2) \otimes \bar{\mathbf{M}}_{\pm n'\lambda'}(h_2) \int d^3 r' \mathbf{N}'_{\pm n\lambda}(-h_1) \bar{\mathbf{N}}'_{\pm n'\lambda'}(-h_1) \right\} \\ &= \frac{i\bar{k}_2}{(4\pi)^2 \omega \mu_0} \int d\lambda \sum_n \frac{\pi(2 - \delta_{n,0})}{\lambda |h_1|^2 h_1''} \left\{ |t_\perp^{21}|^2 \mathbf{M}_{\pm n\lambda}(h_2) \otimes \bar{\mathbf{N}}_{\pm n\lambda}(h_2) \right. \\ &\quad \left. + |t_\parallel^{21}|^2 \frac{\lambda^2 + |h_1|^2}{|k_1|^2} \mathbf{N}_{\pm n\lambda}(h_2) \otimes \bar{\mathbf{M}}_{\pm n\lambda}(h_2) \right\}. \end{aligned} \quad (1.6.3)$$

Bevor man die z -Komponente des Poynting-Vektors in Gl. (1.6.2) angeben kann, müssen die Relationen

$$\begin{aligned} \epsilon_{\alpha\beta z} (\mathbf{M}_{\pm n\lambda}(h_2) \otimes \bar{\mathbf{N}}_{\pm n\lambda}(h_2))_{\alpha\beta} &= \mathbf{M}_{\pm n\lambda}^r(h_2) \bar{\mathbf{N}}_{\pm n\lambda}^\varphi(h_2) - \mathbf{M}_{\pm n\lambda}^\varphi(h_2) \bar{\mathbf{N}}_{\pm n\lambda}^r(h_2) \\ &= -\frac{i\bar{h}_2}{k_2} e^{-2h_2''z} \left[\frac{n^2 J_n^2(\lambda r)}{r^2} + \left(\frac{\partial J_n(\lambda r)}{\partial r} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (1.6.4)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{\alpha\beta z} (\mathbf{N}_{\pm n\lambda}(h_2) \otimes \bar{\mathbf{M}}_{\pm n\lambda}(h_2))_{\alpha\beta} &= \mathbf{N}_{\pm n\lambda}^r(h_2) \bar{\mathbf{M}}_{\pm n\lambda}^\varphi(h_2) - \mathbf{N}_{\pm n\lambda}^\varphi(h_2) \bar{\mathbf{M}}_{\pm n\lambda}^r(h_2) \\ &= -\frac{i h_2}{k_2} e^{-2h_2''z} \left[\frac{n^2 J_n^2(\lambda r)}{r^2} + \left(\frac{\partial J_n(\lambda r)}{\partial r} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (1.6.5)$$

bekannt sein. Diese kann man wegen der Translationssymmetrie des Systems quer zur z -Achse vereinfachen, denn aufgrund dieser Symmetrie muss der Poynting-Vektor für alle Punkte auf einer Ebene parallel zur Grenzfläche zwischen den beiden Halbräumen den gleichen Beitrag liefern. Dementsprechend kann ein beliebiger Punkt auf solch einer Ebene gewählt werden, wobei sich die Gleichungen gerade für die spezielle Wahl $r = 0$ stark vereinfachen, sodass sich die Gleichungen

$$\begin{aligned} \epsilon_{\alpha\beta z} (\mathbf{M}_{\pm n\lambda}(h_2) \otimes \bar{\mathbf{N}}_{\pm n\lambda}(h_2))_{\alpha\beta} &= -\frac{i\bar{h}_2}{k_2 2} [\delta_{n,1} + \delta_{n,-1}] \lambda^2 e^{-2h_2''z}, \\ \epsilon_{\alpha\beta z} (\mathbf{N}_{\pm n\lambda}(h_2) \otimes \bar{\mathbf{M}}_{\pm n\lambda}(h_2))_{\alpha\beta} &= -\frac{i h_2}{k_2 2} [\delta_{n,1} + \delta_{n,-1}] \lambda^2 e^{-2h_2''z} \end{aligned} \quad (1.6.6)$$

ergeben. Mithilfe diesen Gleichungen erhält man nun für das Integral über das Quellenvolumen den Ausdruck

$$\begin{aligned} \epsilon_{\alpha\beta z} \int d^3 r' \left(\mathbf{G}_{21}^E \mathbf{G}_{21}^{H\dagger} \right)_{\alpha\beta} + \text{c.c.} &= \frac{1}{8\pi\omega\mu_0} \int d\lambda \frac{\lambda e^{-2h_2''z}}{|h_1|^2 h_1''} \\ &\times \left\{ |t_{\perp}^{21}|^2 \text{Re}(h_2) + |t_{\parallel}^{21}|^2 \frac{\lambda^2 + |h_1|^2}{|k_1|^2} \frac{\text{Re}(h_2 \bar{k}_2^2)}{|k_2|^2} \right\}. \end{aligned} \quad (1.6.7)$$

Setzt man schließlich in diese Lösung für das Integral über das Quellenvolumen die Amplitudentransmissionskoeffizienten aus Gl. (1.5.7) ein, erhält man unter Verwendung der Beziehungen

$$\epsilon_1'' = \frac{2\epsilon_0}{k_0^2} \text{Re}(h_1) \text{Im}(h_1) \quad \text{und} \quad \frac{1}{k_0^2} (\lambda^2 + |h_1|^2) \text{Re}(h_1) = \text{Re}(h_1 \bar{\epsilon}_{r1}) \quad (1.6.8)$$

den Poynting-Vektor

$$\langle S_{21,z} \rangle = \int_0^\infty d\omega \frac{E_0(\omega, T_1)}{(2\pi)^2} \int_0^\infty d\lambda \lambda e^{-2h_2''z} \left\{ \frac{4\text{Re}(h_1)\text{Re}(h_2)}{|h_1 + h_2|^2} + \frac{4\text{Re}(h_1 \bar{\epsilon}_{r1})\text{Re}(h_2 \bar{\epsilon}_{r2})}{|h_2 \epsilon_{r1} + h_1 \epsilon_{r2}|^2} \right\}. \quad (1.6.9)$$

Anhand dieser Formel kann man bereits einige wichtige Eigenschaften des Poynting-Vektors diskutieren. Der Integrand ist invariant bei Vertauschung der Materialeigenschaften $1 \leftrightarrow 2$, was eine direkte Folge der Spiegelsymmetrie der geometrischen Anordnung des Systems ist. Daher stimmen $\langle S_{21,z}(z) \rangle$ und $\langle S_{12,z}(-z) \rangle$ vom Betrage her überein, wenn beide Dielektrika die gleiche Temperatur haben. Es ist daher auch sichergestellt, dass im globalen thermodynamischen Gleichgewicht, wenn also $T_1 = T_2$ gilt, eine Balance zwischen den beiden Energieflüssen herrscht, sodass es insgesamt im Mittel keinen Energietransfer gibt. Für $T_1 \neq T_2$ ist der Nettoenergiefluss vom Dielektrikum 1 ins Dielektrikum 2 daher

$$\begin{aligned} \langle S_z \rangle &= \langle S_{21,z}(z=0, T_1) \rangle - \langle S_{21,z}(z=0, T_2) \rangle \\ &= \int d\omega \frac{[E_0(\omega, T_1) - E_0(\omega, T_2)]}{(2\pi)^2} \\ &\quad \int d\lambda \lambda e^{-2h_2''z} \left\{ \frac{4\text{Re}(h_1)\text{Re}(h_2)}{|h_1 + h_2|^2} + \frac{4\text{Re}(h_1 \bar{\epsilon}_{r1})\text{Re}(h_2 \bar{\epsilon}_{r2})}{|h_2 \epsilon_{r1} + h_1 \epsilon_{r2}|^2} \right\} \end{aligned} \quad (1.6.10)$$

bzw. in abgekürzter Schreibweise

$$\langle S_z \rangle = \int d\omega \frac{[E_0(\omega, T_1) - E_0(\omega, T_2)]}{(2\pi)^2} \int d\lambda \lambda e^{-2h_2''z} (T_{\perp}^{21} + T_{\parallel}^{21}) \quad (1.6.11)$$

mit den Transmissionskoeffizienten

$$T_{\perp}^{21} = \frac{4\text{Re}(h_1)\text{Re}(h_2)}{|h_1 + h_2|^2} \quad \text{und} \quad T_{\parallel}^{21} = \frac{4\text{Re}(h_1 \bar{\epsilon}_{r1})\text{Re}(h_2 \bar{\epsilon}_{r2})}{|h_2 \epsilon_{r1} + h_1 \epsilon_{r2}|^2}. \quad (1.6.12)$$

Offensichtlich enthält der Nettoenergieübertrag in Gl. (1.6.11) keine Nullpunktsanteile. Da bei der Bestimmung des Gesamtenergieübertrages im Prinzip immer Differenzen von Poynting-Vektoren betrachtet werden und somit auch Differenzen von

Bose-Einstein-Funktionen, kürzt sich der Nullpunktsbeitrag $\hbar\omega/2$ stets heraus. Daher braucht dieser Anteil bei der Bestimmung des Strahlungswärmetransportes generell nicht berücksichtigt zu werden.

Um nun die Abstrahlung des Dielektrikums 1 in das Vakuum bei $T_2 = 0$ zu betrachten, wird der Grenzfall $\epsilon'_{r2} \rightarrow 1$ und $\epsilon''_{r2} \rightarrow 0$ ausgeführt. Damit konvergiert h_2 gegen $\sqrt{k_0^2 - \lambda^2}$, sodass man den λ -Integranden in Gl. (1.6.11) in den propagierenden Anteil für alle $\lambda \in [0, k_0]$ und in den evaneszenten Anteil für alle $\lambda \in [k_0, \infty[$ aufteilen kann. Für die propagierenden Moden ist h_2 rein reell, sodass man oszillierende Felder proportional zu $\exp(ih_2 z)$ hat. Für die evaneszenten Moden ist $h_2 \rightarrow i\sqrt{\lambda^2 - k_0^2} =: i\gamma$ rein imaginär, sodass man gedämpfte Felder proportional zu $\exp(-\gamma z)$ hat. Da der Integrand in Gleichung (1.6.11) für $\epsilon'_{r2} \rightarrow 1$ und $\epsilon''_{r2} \rightarrow 0$ proportional zu $\text{Re}(h_2)$ ist, tragen nur die propagierenden Moden zum Poynting-Vektor bei. Damit verliert der Poynting-Vektor seine z -Abhängigkeit und man kann die in das Vakuum abgestrahlte Energie pro Fläche und Zeit durch

$$\begin{aligned} \langle S_z \rangle &= \int_0^\infty d\omega \frac{[E_0(\omega, T_1) - \frac{\hbar\omega}{2}]}{(2\pi)^2} \int_0^{k_0} d\lambda \lambda \left\{ \frac{4\text{Re}(h_1)h_2}{|h_1 + h_2|^2} + \frac{4\text{Re}(h_1\bar{\epsilon}_{r1})h_2}{|h_2\epsilon_{r1} + h_1|^2} \right\} \\ &= \int_0^\infty d\omega \frac{E(\omega, T_1)}{(2\pi)^2} \int_0^{k_0} d\lambda \lambda (T_{\text{pr},\perp}^{21} + T_{\text{pr},\parallel}^{21}) \end{aligned} \quad (1.6.13)$$

mit dem thermischen Anteil der Bose-Einstein-Funktion

$$E(\omega, T_1) := E_0(\omega, T_1) - \frac{\hbar\omega}{2} \quad (1.6.14)$$

angeben. Es kann gezeigt werden (siehe Anhang C), dass die Transmissionskoeffizienten für die propagierenden Moden mit

$$T_{\text{pr},\perp}^{21} = 1 - |r_{\perp}^{21}|^2 \quad \text{und} \quad T_{\text{pr},\parallel}^{21} = 1 - |r_{\parallel}^{21}|^2 \quad (1.6.15)$$

übereinstimmen, wobei $\epsilon_{r2} = 1$ und $h_2 = \sqrt{k_0^2 - \lambda^2}$ gelten. Damit hat man das bekannte Kirchhoff-Plancksche Strahlungsgesetz für einen Wärmestrahler abgeleitet [22].

Natürlich kann man aus Gl. (1.6.13) auch das Stefan-Boltzmann-Gesetz für einen schwarzen Strahler ableiten. Dazu beachte man zunächst, dass für die propagierenden Moden stets $|r_{\parallel}|, |r_{\perp}| \in [0, 1]$ gilt. Somit bekommt man formal die maximal abgestrahlte Energie, falls $|r_{\parallel}| = |r_{\perp}| = 0$ für alle lateralen Wellenzahlen λ und alle Frequenzen ω gilt, sodass an der Oberfläche des Dielektrikums 1 keine Reflexion, sondern vollständige Transmission stattfindet. Man erhält dann das Stefan-Boltzmann-Gesetz

$$\begin{aligned} \langle S_{BB} \rangle &= \int_0^\infty d\omega \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega\beta} - 1} \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \frac{c}{4} \\ &= \sigma_{BB} T^4 \end{aligned} \quad (1.6.16)$$

für den schwarzen Strahler (*black body*) mit $\sigma_{BB} = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$.

Man beachte an dieser Stelle, dass man zwar durch das Setzen von $\epsilon_1 = \epsilon_0$ das Stefan-Boltzmann-Gesetz erhält, es aber sinnvoller ist, den Grenzfall $\epsilon'_{r1} \rightarrow 1$ und

$\epsilon''_{r1} \rightarrow 0$ zu betrachten. Schließlich gibt es dem Fluktuations-Dissipations-Theorem in Gl. (1.1.10) zufolge nur für endliche ϵ''_{r1} überhaupt fluktuierende Quellenströme und damit die Wärmestrahlung. Allerdings reicht ein unendlich kleines ϵ''_{r1} aus, um jegliche Strahlung, die in das Dielektrikum 1 eindringt, zu absorbieren, da das Dielektrikum 1 unendlich groß ist. Somit hat man zumindest formal eine Realisierung des schwarzen Strahlers.

Das genaue Gegenteil eines schwarzen Strahlers ist das ideale Metall, das dadurch charakterisiert ist, dass es jegliche Strahlung reflektiert, d.h. es wird keine Strahlung absorbiert und es gilt $|r_{\parallel}| = |r_{\perp}| = 1$ für alle Frequenzen. Setzt man diese Reflexionskoeffizienten in Gl. (1.6.13) ein, erhält man einen Nettoenergie transfer von Null. Somit strahlt ein ideal absorbierender Halbraum die maximale durch das Stefan-Boltzmann-Gesetz gegebene Energie ab, wohingegen ein ideal reflektierender Halbraum ohne jegliche Absorption keinerlei Energie abstrahlt.

1.7 Die evaneszenten Moden des fluktuierenden Feldes

Der Poynting-Vektor in Gl. (1.6.13) enthält selbst keine Informationen über die evaneszenten Moden, sondern nur über die propagierenden Moden. Um für die gegebene Geometrie dennoch Informationen über die evaneszenten Moden zu erhalten, ist es notwendig, die Energiedichte

$$\langle u \rangle = \frac{\epsilon_0}{2} \langle \mathbf{E}^2 \rangle + \frac{\mu_0}{2} \langle \mathbf{H}^2 \rangle \quad (1.7.1)$$

im Dielektrikum 2 zu bestimmen, das durch das Vakuum gegeben sein soll, sodass $\epsilon_2 = \epsilon_0$ und $h_2 = \sqrt{k_0^2 - \lambda^2}$ gelten. Die Berechnung der Energiedichte setzt entsprechend der Definition in Gl. (1.7.1) die Bestimmung der Korrelationsfunktionen des elektrischen und magnetischen Feldes $\langle E_{\alpha} E_{\beta} \rangle$ und $\langle H_{\alpha} H_{\beta} \rangle$ voraus. Die Berechnung der Korrelationsfunktion des elektrischen Feldes soll nun exemplarisch durchgeführt werden.

Gesucht ist entsprechend Gleichung (1.1.13)

$$\begin{aligned} \langle E_{\alpha}(\mathbf{r}, t) E_{\beta}(\mathbf{r}, t) \rangle &= \int_0^{\infty} d\omega E_0(\omega, T_1) \frac{\omega \epsilon''(\omega)}{\pi} (\mu_0^2 \omega^2) \\ &\times \int d^3 r' \left(\mathbf{G}_{21}^E \mathbf{G}_{21}^{E\dagger} \right)_{\alpha\beta} + \text{c.c.} \end{aligned} \quad (1.7.2)$$

mit der Greenschen Funktion \mathbf{G}_{21}^E aus Gl. (1.5.4) für die Felder im Dielektrikum 2, die durch die Quellenströme im Dielektrikum 1 erzeugt werden. Betrachtet man zuerst nur das Integral über das Quellenvolumen, so bekommt man mit den Orthogonalitätsrelationen für die Vektorwellenfunktionen in Gl. (1.4.12), den Ausdruck

$$\begin{aligned} \int d^3 r' \left(\mathbf{G}_{21}^E \mathbf{G}_{21}^{E\dagger} \right)_{\alpha\beta} &= \frac{1}{16\pi^2} \int d\lambda \sum_n \frac{\pi(2 - \delta_{n,0})}{\lambda |h_1|^2 h_1''} \left\{ |t_{\perp}^{21}|^2 \left(\mathbf{M}_{\pm n\lambda}(h_2) \otimes \overline{\mathbf{M}}_{\pm n\lambda}(h_2) \right)_{\alpha\beta} \right. \\ &\quad \left. + |t_{\parallel}^{21}|^2 \frac{\lambda^2 + |h_1|^2}{|k_1|^2} \left(\mathbf{N}_{\pm n\lambda}(h_2) \otimes \overline{\mathbf{N}}_{\pm n\lambda}(h_2) \right)_{\alpha\beta} \right\}. \end{aligned} \quad (1.7.3)$$

Dieser Tensorausdruck ist noch sehr allgemein und kann wieder dadurch vereinfacht werden, dass man wegen der Translationssymmetrie quer zur z -Achse keinen ausgezeichneten Punkt hat und somit die besonders einfache Wahl $r = 0$ treffen kann. Da die Bestimmung der Energiedichte insbesondere die Bestimmung der Spur des Tensorausdruckes in Gl. (1.7.6) voraussetzt, führen die Relationen

$$\left(\mathbf{M}_{\pm n\lambda}(h_2) \otimes \overline{\mathbf{M}}_{\pm n\lambda}(h_2) \right)_{\alpha\alpha} = \frac{\lambda^2 e^{-2h_2''z}}{2} [\delta_{n,1} + \delta_{n,-1}] \quad (1.7.4)$$

$$\left(\mathbf{N}_{\pm n\lambda}(h_2) \otimes \overline{\mathbf{N}}_{\pm n\lambda}(h_2) \right)_{\alpha\alpha} = \frac{\lambda^2 e^{-2h_2''z}}{2} \left[(\delta_{n,1} + \delta_{n,-1}) \frac{|h_2|^2}{|k_2|^2} + \delta_{n,0} \frac{2\lambda^2}{|k_2|^2} \right] \quad (1.7.5)$$

für $r = 0$ zunächst auf

$$\int d^3r' \left(\mathbf{G}_{21}^E \mathbf{G}_{21}^{E\dagger} \right)_{\alpha\alpha} = \frac{1}{16\pi} \int d\lambda \frac{\lambda e^{-2h_2''z}}{|h_1|^2 h_1''} \left\{ |t_{\perp}^{21}|^2 + |t_{\parallel}^{21}|^2 \frac{\lambda^2 + |h_1|^2}{|k_1|^2} \frac{\lambda^2 + |h_2|^2}{|k_2|^2} \right\}. \quad (1.7.6)$$

Mit den gleichen Umformungen wie bei der Berechnung des Poynting-Vektors kann man nun direkt die Korrelationsfunktion des elektrischen Feldes in Gl. (1.7.2) bestimmen und erhält

$$\langle \mathbf{E}^2 \rangle = \frac{2}{\epsilon_0} \int_0^\infty d\omega \frac{E_0(\omega, T_1)}{(2\pi)^2} \int_0^\infty d\lambda \lambda e^{-2h_2''z} \frac{\omega}{2c^2} \left\{ \frac{T_{\perp}^{21}}{\operatorname{Re}(h_2)} + \frac{T_{\parallel}^{21}}{\operatorname{Re}(h_2 \bar{\epsilon}_{r2})} \frac{\lambda^2 + |h_2|^2}{|k_2|^2} \right\}, \quad (1.7.7)$$

wobei die Transmissionskoeffizienten T_{\perp}^{21} und T_{\parallel}^{21} mit denen für den Poynting-Vektor in Gleichung (1.6.12) übereinstimmen. Der entsprechende Ausdruck für die Korrelationsfunktion des magnetischen Feldes kann auf die gleiche Weise berechnet werden und man erhält

$$\langle \mathbf{H}^2 \rangle = \frac{2}{\mu_0} \int_0^\infty d\omega \frac{E_0(\omega, T_1)}{(2\pi)^2} \int_0^\infty d\lambda \lambda e^{-2h_2''z} \frac{\omega}{2c^2} \left\{ \frac{T_{\perp}^{21}}{\operatorname{Re}(h_2)} \frac{\lambda^2 + |h_2|^2}{|k_2|^2} + \frac{T_{\parallel}^{21}}{\operatorname{Re}(h_2 \bar{\epsilon}_{r2})} \right\}. \quad (1.7.8)$$

Man beachte an dieser Stelle, dass die Korrelationsfunktionen $\langle \mathbf{E}^2 \rangle$ und $\langle \mathbf{H}^2 \rangle$ genau wie der Poynting-Vektor die Transmissionskoeffizienten T_{\perp} und T_{\parallel} enthalten, wobei diesmal die Proportionalität der Transmissionskoeffizienten zu $\operatorname{Re}(h_2)$ bzw. $\operatorname{Re}(h_2 \bar{\epsilon}_{r2})$ herausdividiert wird. Dementsprechend ergeben diese Korrelationsfunktionen für $\epsilon_2 = \epsilon_0$ auch einen Wert für die evaneszenten Moden mit $\lambda \geq k_0$, für die dann

$$h_2 = i\sqrt{\lambda^2 - k_0^2} =: i\gamma \quad (1.7.9)$$

rein imaginär ist. Außerdem kann man hier bereits sehen, dass im stark evaneszenten Bereich, in welchem $k_0 z \ll 1$ und $\lambda \gg k_0$ und damit $h_2 \approx i\lambda$ gilt, für die Korrelationsfunktion $\langle \mathbf{E}^2 \rangle$ der Hauptbeitrag von den evaneszenten TM-Moden herrührt. Schließlich wird der Transmissionskoeffizient T_{\parallel}^{21} im Gegensatz zu T_{\perp}^{21} mit λ^2 gewichtet, sodass für große λ der TM-Moden-Beitrag das λ -Integral dominiert. Für die Korrelationsfunktion des magnetischen Feldes $\langle \mathbf{H}^2 \rangle$ ist diese Situation genau umgekehrt, sodass der Hauptbeitrag im stark evaneszenten Nahfeld durch die evaneszenten TE-Moden geliefert wird.

Mithilfe der Korrelationsfunktionen in Gl. (1.7.7) und (1.7.8) kann man nun problemlos die Energiedichte in Gl. (1.7.1) angeben, wobei man für $\epsilon_2 = \epsilon_0$ und $h_2 = h_0$

$$\langle u \rangle = \int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega} \frac{E_0(\omega, T_1)}{(2\pi)^2} \int_0^\infty d\lambda \lambda e^{-2h_2'z} \frac{\lambda_s^2}{2} \left\{ \frac{T_\perp^{01}}{\text{Re}(h_0)} + \frac{T_\parallel^{01}}{\text{Re}(h_0)} \right\} \quad (1.7.10)$$

bekommt, wobei die Wellenzahl

$$\lambda_s^2 := \lambda^2 + |h_0|^2 + k_0^2 = \begin{cases} 2k_0^2, & \text{für } \lambda < k_0 \\ 2\lambda^2, & \text{für } \lambda > k_0 \end{cases} \quad (1.7.11)$$

eingeführt wurde. Um diese Formel für die Energiedichte besser interpretieren zu können, ist es sinnvoll, die Transmissionskoeffizienten T_\perp^{01} und T_\parallel^{01} durch die Fresnelschen Amplitudenreflexionskoeffizienten in Gl. (1.5.6) auszudrücken. Dazu ist es notwendig, das λ -Integral in den propagierenden und evaneszenten Teil aufzuspalten und die Relationen (siehe Anhang C)

$$\frac{T}{\text{Re}(h_0)} = \begin{cases} \frac{1-|r|^2}{h_0}, & \text{für } \lambda < k_0 \\ \frac{2\text{Im}(r)}{\gamma}, & \text{für } \lambda > k_0 \end{cases} \quad (1.7.12)$$

für die TE- bzw. TM-Moden anzuwenden. Man erhält dann für die Energiedichte den Ausdruck

$$\langle u \rangle = \int_0^\infty d\omega \frac{E_0(\omega, T_1)}{\omega} \frac{1}{\pi^2} \left\{ \int_0^{k_0} d\lambda \frac{\lambda k_0^2}{4h_0} [(1 - |r_\perp^{01}|^2) + (1 - |r_\parallel^{01}|^2)] \right. \\ \left. + \int_{k_0}^\infty d\lambda \frac{\lambda^3 e^{-2\gamma z}}{2\gamma} [\text{Im}(r_\perp^{01}) + \text{Im}(r_\parallel^{01})] \right\}. \quad (1.7.13)$$

Entsprechende Ausdrücke erhält man für $\langle \mathbf{E}^2 \rangle$ und $\langle \mathbf{H}^2 \rangle$.

Betrachtet man nun wieder den Spezialfall $\epsilon_{r1}' \rightarrow 1$ und $\epsilon_{r1}'' \rightarrow 0$, der für die propagierenden Moden zum Stefan-Boltzmann-Gesetz führt, so werden die Reflexionskoeffizienten rein reell und konvergieren betragsmäßig gegen Null, sodass der Beitrag der evaneszenten Moden zur Energiedichte verschwindet und der propagierende Anteil maximal ist. Man bekommt dann

$$\langle u \rangle = \frac{1}{2} \int d\omega E_0(\omega, T_1) \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3}; \quad (1.7.14)$$

die Hälfte der Energiedichte des Vakuums und der Schwarzkörperstrahlung. Das liegt daran, dass die abgeleitete Energiedichte auch nur die propagierenden Moden berücksichtigt, die in Richtung Dielektrikum 2 abgestrahlt werden. In einer globalen Gleichgewichtssituation gäbe es den gleichen Anteil an Strahlung in die entgegengesetzte Richtung, sodass man in diesem Fall den vollen Ausdruck für die Energiedichte des Vakuums und der Schwarzkörperstrahlung erhielte. Dementsprechend gilt in diesem Fall auch $\langle u \rangle = 2\langle S \rangle/c$, statt $\langle u \rangle = 4\langle S \rangle/c$. Weiterhin sieht man sofort, dass die Nullpunktsschwingungen einen unendlich großen Wert zur Energiedichte beitragen, falls keine Regularisierung beispielsweise durch die Einführung eines Cutoffs im Frequenzintegral durchgeführt wird.

Bevor einige numerischen Auswertungen für die Energiedichte oberhalb des Dielektrikums diskutiert werden, soll die lokale Zustandsdichte $D(\omega, z)$ eingeführt werden. Diese Größe erlaubt es, die Energiedichte als reines Frequenz-Integral

$$\langle u \rangle = \int_0^\infty d\omega E(\omega, T) D(\omega, z) \quad (1.7.15)$$

zu schreiben. Ist der gesamte Raum durch das Vakuum erfüllt, so ist die lokale Zustandsdichte im thermodynamischen Gleichgewicht beispielsweise durch

$$D_0 = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \quad (1.7.16)$$

gegeben und doppelt so groß wie der in Gl. (1.7.14) abgeleitete Wert.

Aufgrund der Definition der Energiedichte ist klar, dass die lokale Zustandsdichte vom elektrischen und magnetischen Anteil der Energiedichte abhängt, sodass man entsprechend D_E und D_H definieren kann, wobei $D = D_E + D_H$ gilt. Es kann zusätzlich gezeigt werden [12], dass im globalen Gleichgewicht die lokale Zustandsdichte $D(\omega, z)$ proportional zum Imaginärteil der Spur der elektrischen und magnetischen Greenschen Funktion ist, da die Korrelationsfunktionen der Felder in diesem Fall die Form (1.2.14) haben. Außerdem dominiert im evaneszenten Nahfeld mit $k_0 z \ll 1$ die lokale Zustandsdichte der evaneszenten Moden über die der propagierenden Moden, sodass $D_{ev} \gg D_{pr}$ bzw. $D_{ev} \gg D_0$ gilt. Wie bereits anhand der Gleichungen (1.7.7) und (1.7.8) diskutiert wurde, gelten im evaneszenten Nahfeld näherungsweise die Beziehungen $D_E \approx D_{\parallel}$ und $D_H \approx D_{\perp}$. Für $k_0 z \ll 1$ kann man die lokale Zustandsdichte mithilfe der Näherung

$$\text{Im}(r_{\parallel}^{01}) \approx \frac{2\epsilon_{r1}''}{|\epsilon_{r1} + 1|^2} \quad \text{und} \quad \text{Im}(r_{\perp}^{01}) \approx \frac{\epsilon_{r1}''}{4\lambda^2} \quad (1.7.17)$$

approximieren und erhält

$$\begin{aligned} D_E(\omega, z) &\approx D_{\parallel}(\omega, z) \approx \frac{1}{4} \frac{D_0(\omega)}{(k_0 z)^3} \frac{\epsilon_{r1}''}{|\epsilon_{r1} + 1|^2}, \\ D_H(\omega, z) &\approx D_{\perp}(\omega, z) \approx \frac{1}{16} \frac{D_0(\omega)}{k_0 z} \epsilon_{r1}'' \end{aligned} \quad (1.7.18)$$

Man bekommt also im Nahfeld relativ einfache Potenzgesetze derart, dass $\langle u_{\perp} \rangle \propto z^{-1}$ und $\langle u_{\parallel} \rangle \propto z^{-3}$ gelten.

1.8 Energiedichte für verschiedene Materialien

In diesem Abschnitt sollen einige numerische Auswertungen der Gl. (1.7.13) für den thermischen Anteil angeführt werden, die es erlauben, die Beiträge der TE- und TM-Moden zur Gesamtenergiedichte für verschiedene Materialien zu diskutieren. Dabei soll insbesondere der Unterschied zwischen der Nahfeldenergiedichte für ein polares Dielektrikum und ein Metall herausgestellt werden. Die numerisch berechneten Ergebnisse werden auf die Energiedichte $\langle u_{BB} \rangle$ eines schwarzen Strahlers normiert, die

man mit der lokalen Zustandsdichte des Vakuums in Gl. (1.7.16) und dem thermischen Anteil der Energiedichte in Gl. (1.7.15) leicht bestimmen kann. Man kann die Energiedichte des schwarzen Strahlers aber auch direkt aus dem Stefan-Boltzmann-Gesetz (1.6.16) ableiten, sodass

$$\langle u_{BB} \rangle = \frac{4}{c} \langle S_{BB} \rangle = \frac{4}{c} \sigma_{BB} T^4 \quad (1.8.1)$$

gilt. Für die numerische Auswertung wird angenommen, dass das Dielektrikum 1 Zimmertemperatur hat, sodass $T_1 = 300$ K ist. Bei dieser Temperatur beträgt die Energiedichte der Schwarzkörperstrahlung $\langle u_{BB} \rangle \approx 6,1 \cdot 10^{-6} \text{ Jm}^{-3}$.

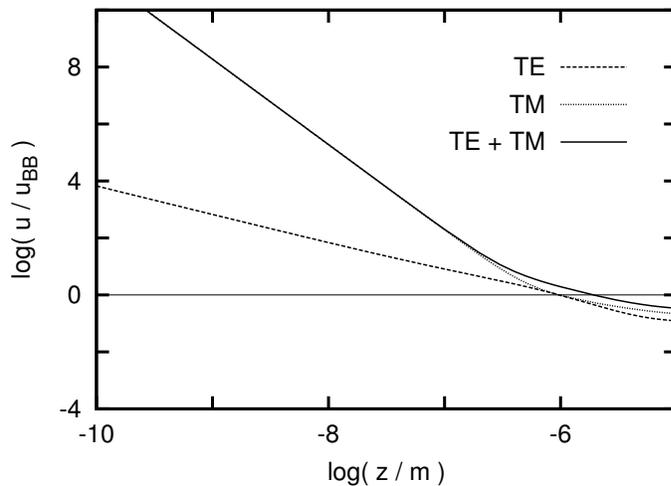


Abbildung 1.2: Numerische Ergebnisse für die Energiedichte oberhalb eines GaN-Halbraumes, dessen Permittivität durch die Reststrahlenformel gegeben ist.

Benutzt man für die Permittivität die Drude- bzw. die Reststrahlenformel (siehe Anhang A), kann man die Energiedichte für ein Metall bzw. Dielektrikum bestimmen. Um die Energiedichte eines GaN-Halbraumes zu bestimmen, wird die Reststrahlenformel benutzt, wobei nach Adachi [37] die Parameter $\omega_l = 1,4 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}$, $\omega_t = 1,1 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}$, $\gamma = 1,5 \cdot 10^{12} \text{ s}^{-1}$ und $\epsilon_\infty = 5,35$ gelten. Das Ergebnis der numerischen Berechnung ist in Abb. 1.2 geplottet. Man sieht, dass die TM- bzw. TE-Moden bereits für Abstände unter $1 \mu\text{m}$ den Schwarzkörperwert übersteigen und in die entsprechenden Potenzgesetze

$$\langle u_\perp \rangle \propto z^{-1} \quad \text{und} \quad \langle u_\parallel \rangle \propto z^{-3} \quad (1.8.2)$$

übergehen. Somit divergiert die Energiedichte für sehr kleine Abstände oberhalb des dielektrischen Halbraumes. Es ist dabei zu beachten, dass die fluktuierende Elektrodynamik eine makroskopische Theorie ist, sodass für Abstände weit unterhalb von 100 nm die Aussagekraft dieser Theorie kritisch zu hinterfragen ist. Eine bedeutende Eigenschaft der Energiedichte oberhalb eines nichtleitenden Materials bzw. eines schlechten Leiters ist die Dominanz der TM-Moden, die die Gesamtenergiedichte praktisch für alle Abstände dominiert, wohingegen der TE-Moden-Anteil im Nahfeld einen eher unbedeutenden Beitrag zur Energiedichte liefert.

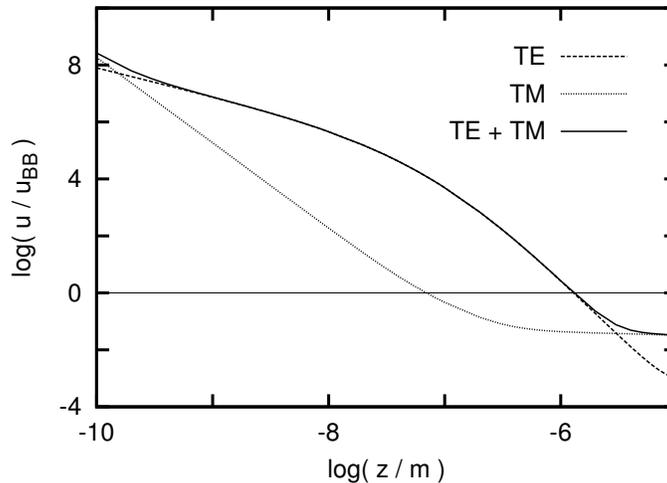


Abbildung 1.3: Numerische Ergebnisse für die Energiedichte oberhalb eines Au-Halbraumes, dessen Permittivität durch das Drude-Modell gegeben ist.

Im Vergleich dazu betrachte man die Energiedichte im Nahfeld eines Halbraumes aus Gold. Für die Permittivität wird die Drude-Formel mit den Parametern $\omega_p = 1,4 \cdot 10^{16} \text{ s}^{-1}$ und $\tau = 3 \cdot 10^{-14} \text{ s}$ aus dem Standardwerk von Ashcroft und Mermin [38] verwendet. Das Ergebnis der numerischen Berechnung ist in Abb. 1.3 aufgetragen. Wieder ist gut zu sehen, dass für Abstände unterhalb von $1 \mu\text{m}$ der Schwarzkörperwert deutlich überschritten wird, wobei die TE- und TM-Moden diesmal erst für Abstände kleiner als 100 nm in die Potenzgesetze (1.8.2) übergehen. Außerdem sieht man, dass die Gesamtenergiedichte fast für den gesamten Abstandsbe- reich durch die TE-Moden dominiert ist, statt durch die TM-Moden, wie es bei GaN der Fall ist. Außerdem ist die Nahfeld-Energiedichte oberhalb eines Au-Halbraumes bei Abständen über 100 nm weit größer als die Energiedichte oberhalb des GaN-Halbraumes. Man beachte aber, dass trotzdem der TM-Moden-Beitrag oberhalb eines Au-Halbraumes um Größenordnungen geringer ist als der entsprechende TM-Moden-Beitrag oberhalb eines GaN-Halbraumes, was man gut an dem Schnittpunkt dieser Beiträge mit der Geraden $\langle u \rangle / \langle u_{BB} \rangle = 1$ festmachen kann.

1.9 Das optische Theorem

Die Berechnung der Korrelationsfunktionen (1.1.13) der fluktuierenden Elektrodynamik beinhaltet stets eine Integration über das Quellenvolumen. Diese Integration ist bei der Berechnung des Poynting-Vektors und der Energiedichte für eine Halb- raumgeometrie noch relativ einfach, sie wird aber für kompliziertere Geometrien sehr aufwendig. Das optische Theorem in Gl. (1.2.15),

$$\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_r''(\omega) \int d^3r' \left(\mathbf{G}^E(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}') \mathbf{G}^{E\dagger}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}') \right)_{\alpha\beta} = \text{Im} \mathbf{G}_{\alpha\beta}^E(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega),$$

erlaubt es nun, die Integration über das Quellenvolumen zu eliminieren und damit die Berechnung der Feldkorrelationen enorm zu vereinfachen. Daher soll nun dieses Theorem bewiesen und sein Anwendungsbereich genauer diskutiert werden.

Dazu wird die Helmholtz-Gleichung (1.1.5) in Komponentenschreibweise unter Verwendung der Einsteinschen Summenkonvention

$$[\partial_l \partial_n - \delta_{ln}(\Delta + k^2)] \mathbb{G}_{ni}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta_{li} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (1.9.1)$$

angegeben. Multipliziert man diese Gleichung nun von rechts mit $\overline{\mathbb{G}}_{lj}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}'')$ und integriert über \mathbf{r} , erhält man

$$\begin{aligned} \overline{\mathbb{G}}_{ij}^E(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') &= -k_0^2 \int d^3 r \epsilon_r(\mathbf{r}) \mathbb{G}_{li}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \overline{\mathbb{G}}_{lj}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}'') \\ &\quad + \int d^3 r [\partial_l \partial_n \mathbb{G}_{ni}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \overline{\mathbb{G}}_{lj}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}'') - \Delta \mathbb{G}_{li}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \overline{\mathbb{G}}_{lj}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}'')]. \end{aligned} \quad (1.9.2)$$

Führt man eine partielle Integration im zweiten Integral auf der rechten Gleichungsseite aus, bekommt man

$$\begin{aligned} \overline{\mathbb{G}}_{ij}^E(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') &= -k_0^2 \int d^3 r \epsilon_r(\mathbf{r}) \mathbb{G}_{li}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \overline{\mathbb{G}}_{lj}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}'') \\ &\quad - \int d^3 r [\partial_l \mathbb{G}_{ni}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \partial_n \overline{\mathbb{G}}_{lj}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}'') + \partial_k \mathbb{G}_{li}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \partial_k \overline{\mathbb{G}}_{lj}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}'')]. \end{aligned} \quad (1.9.3)$$

Die Randterme verschwinden für $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$, da die Greensche Funktion im Unendlichen verschwindet. Vertauscht man nun in dieser Gleichung j durch i und \mathbf{r}' durch \mathbf{r}'' und konjugiert das Ergebnis komplex, erhält man

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_{ji}^E(\mathbf{r}'', \mathbf{r}') &= -k_0^2 \int d^3 r \bar{\epsilon}_r(\mathbf{r}) \overline{\mathbb{G}}_{lj}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}'') \mathbb{G}_{li}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\ &\quad - \int d^3 r [\partial_l \overline{\mathbb{G}}_{nj}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}'') \partial_n \mathbb{G}_{li}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \partial_k \overline{\mathbb{G}}_{lj}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}'') \partial_k \mathbb{G}_{li}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}')]. \end{aligned} \quad (1.9.4)$$

Zieht man diese Gleichung von der vorherigen ab, bekommt man schließlich das optische Theorem aus Gleichung (1.2.15).

Auf ähnliche Weise kann man die entsprechende Gleichung

$$k_0^2 \int d^3 r' \epsilon_r''(\mathbf{r}') \left(\mathbb{G}^E(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}') \mathbb{G}^{H\dagger}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}') \right)_{\alpha\beta} = i \text{Re}(\mathbb{G}_{\alpha\beta}^H(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)) \quad (1.9.5)$$

ableiten, sodass man mithilfe dieser Gleichungen für die Korrelationsfunktionen (1.1.13) der Rytovschen Theorie

$$\langle E_\alpha(\mathbf{r}, t) E_\beta(\mathbf{r}', t') \rangle = \int_0^\infty d\omega e^{-i\omega(t-t')} E_0(\omega, T) \frac{\omega \mu_0}{\pi} \text{Im}(\mathbb{G}_{\alpha\beta}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) + \text{c.c.}, \quad (1.9.6)$$

$$\langle E_\alpha(\mathbf{r}, t) H_\beta(\mathbf{r}', t') \rangle = 0 \quad (1.9.7)$$

bekommt. Diese Gleichungen stimmen mit den Korrelationsfunktionen für das thermodynamische Gleichgewicht (vgl. (1.2.14)) überein. Dass es sich bei diesen Gleichungen um die Gleichgewichtsvarianten handelt, wird sofort klar, wenn man die

Korrelationsfunktion $\langle E_\alpha H_\beta \rangle = 0$ betrachtet. Diese besagt nichts anderes, als dass der Poynting-Vektor im Mittel verschwindet, es also im Mittel keinen Energiefluss gibt, was für eine Gleichgewichtssituation charakteristisch ist. In der Tat ist das optische Theorem eine rein elektrodynamische Beziehung, sodass es im Allgemeinen nur für Gleichgewichtssituationen gelten kann.

Es stellt sich nun die Frage, ob man man das optische Theorem nicht auch in einer Nicht-Gleichgewichtssituation anwenden kann. Um diese Frage zu beantworten, wird nun die elektrische Korrelationsfunktion $\langle \mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t) \rangle$ oberhalb eines Halbraumes mithilfe des optischen Theorems berechnet und das Ergebnis mit dem entsprechenden Gegenstück, das die fluktuierende Elektrodynamik liefert, verglichen. Gesucht ist Gl. (1.9.7) zufolge der Imaginärteil der Greenschen Funktion $\mathbb{G}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ mit $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ im Dielektrikum 2. Für diesen Fall, dass Beobachtungs- und Quellort in der Greenschen Funktion übereinstimmen, ist die Greensche Funktion im Allgemeinen divergent, was man anhand der freien Greenschen Funktion in Gl. (1.3.10) leicht sehen kann. Deshalb ist es notwendig, eine Renormierung durchzuführen, wobei hier die Renormierung [23]

$$\mathbb{G}_{\text{ren}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}) := \lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}'} [\mathbb{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \mathbb{G}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] \quad (1.9.8)$$

verwendet werden soll. Da sich die Greensche Funktion für eine gegebene Geometrie stets aus dem freien und dem gestreuten Anteil zusammensetzt, ist sofort klar, dass die renormierte Greensche Funktion mit der Streulösung übereinstimmt. Daher hat man für die renormierte Greensche Funktion oberhalb des Dielektrikums 1

$$\mathbb{G}_{\text{ren}}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}) = \frac{i}{4\pi} \int_0^\infty d\lambda \sum_{n=0}^\infty \frac{2 - \delta_{n,0}}{\lambda h_2} \left\{ r_\perp \mathbf{M}(h_2) \otimes \mathbf{M}(h_2) + r_\parallel \mathbf{N}(h_2) \otimes \mathbf{N}(h_2) \right\}. \quad (1.9.9)$$

Diese Greensche Funktion kann man leicht in propagierende und evaneszente Moden zerlegen, wobei für die evaneszenten Moden mit $\lambda > k_0$ die Wellenzahl durch $h_2 = i\gamma := i\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}$ und für die propagierenden Moden mit $\lambda < k_0$ die Wellenzahl durch $h_2 = \sqrt{k_0^2 - \lambda^2}$ gegeben ist. Man beachte, dass h_2 für die propagierenden Moden und γ für die evaneszenten Moden rein reell sind. Es gelten somit die Beziehungen

$$\mathbb{G}_{\text{ren,pr}}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}) = \frac{i}{4\pi} \int_0^{k_0} d\lambda \sum_{n=0}^\infty \frac{2 - \delta_{n,0}}{\lambda h_2} \left\{ r_\perp \mathbf{M}(h_2) \otimes \mathbf{M}(h_2) + r_\parallel \mathbf{N}(h_2) \otimes \mathbf{N}(h_2) \right\} \quad (1.9.10)$$

und

$$\mathbb{G}_{\text{ren,ev}}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{k_0}^\infty d\lambda \sum_{n=0}^\infty \frac{2 - \delta_{n,0}}{\lambda \gamma} \left\{ r_\perp \mathbf{M}(i\gamma) \otimes \mathbf{M}(i\gamma) + r_\parallel \mathbf{N}(i\gamma) \otimes \mathbf{N}(i\gamma) \right\}. \quad (1.9.11)$$

Dieser Ausdruck soll nun mit den entsprechenden Ausdrücken der Rytovschen Theorie verglichen werden. Dazu wird der Ausdruck in Gl. (1.7.3) zunächst mit $k_0^2 \epsilon_r''$ multipliziert. Mithilfe der Beziehungen in Gl. (1.6.8) und (1.6.12) erhält man dann

$$k_0^2 \epsilon_r'' \int d^3 r' \mathbb{G}^E \mathbb{G}^{E\dagger} = \frac{1}{8\pi} \int_0^\infty d\lambda \sum_{n=0}^\infty \frac{2 - \delta_{n,0}}{\lambda \text{Re}(h_2)} \left\{ T_\perp \mathbf{M}(h_2) \otimes \overline{\mathbf{M}}(h_2) + T_\parallel \mathbf{N}(h_2) \otimes \overline{\mathbf{N}}(h_2) \right\}. \quad (1.9.12)$$

Man beachte nun entsprechend Gl. (1.7.12), dass für die propagierenden Moden, d.h. falls $\lambda < k_0$, für den Transmissionskoeffizienten $T = 1 - |r|^2$ gilt, wohingegen im evaneszenten Bereich, d.h. $\lambda > k_0$, für den Transmissionskoeffizienten $T = 2\text{Im}(r)\text{Re}(h_2)/\gamma$ gilt. Für den propagierenden Anteil erhält man daher

$$\begin{aligned} \left(k_0^2 \epsilon_{r1}'' \int d^3 r' \mathbf{G}^E \mathbf{G}^{E\dagger} \right)_{\text{prop}} &= \frac{1}{8\pi} \int_0^{k_0} d\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 - \delta_{n,0}}{\lambda\gamma} \left\{ (1 - |r_{\perp}|^2) \mathbf{M}(h_2) \otimes \overline{\mathbf{M}}(h_2) \right. \\ &\quad \left. + (1 - |r_{\parallel}|^2) \mathbf{N}(h_2) \otimes \overline{\mathbf{N}}(h_2) \right\} \end{aligned} \quad (1.9.13)$$

und für den evaneszenten Anteil

$$\begin{aligned} \left(k_0^2 \epsilon_{r1}'' \int d^3 r' \mathbf{G}^E \mathbf{G}^{E\dagger} \right)_{\text{ev}} &= \frac{1}{4\pi} \int_{k_0}^{\infty} d\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 - \delta_{n,0}}{\lambda\gamma} \left\{ \text{Im}(r_{\perp}) \mathbf{M}(i\gamma) \otimes \mathbf{M}(i\gamma) \right. \\ &\quad \left. + \text{Im}(r_{\parallel}) \mathbf{N}(i\gamma) \otimes \mathbf{N}(i\gamma) \right\}. \end{aligned} \quad (1.9.14)$$

Der so abgeleitete Ausdruck für den evaneszenten Bereich in Gl. (1.9.14) stimmt direkt mit dem Imaginärteil von Gl. (1.9.11) überein, was sofort klar wird, wenn man sich an die Definition der Vektorwellenfunktionen erinnert und erkennt, dass die Vektorwellenfunktionen $\mathbf{M}(i\gamma)$ und $\mathbf{N}(i\gamma)$ reelle Größen sind. Die Ausdrücke für die propagierenden Moden in Gl. (1.9.13) und Gl. (1.9.10) stimmen dagegen *nicht* überein. Schließlich sind die Ausdrücke $\mathbf{M}(h_2) \otimes \overline{\mathbf{M}}(h_2)$ und $\mathbf{N}(h_2) \otimes \overline{\mathbf{N}}(h_2)$ in Gl. (1.9.13) unabhängig von z , da die Exponentialfunktionen in diesem Produkt von Vektorwellenfunktionen im Argument den Imaginärteil von h_2 enthalten, der für propagierende Moden verschwindet. Andererseits enthält der Imaginärteil von $ir_{\perp} \mathbf{M}(h_2) \otimes \mathbf{M}(h_2)$ bzw. $ir_{\parallel} \mathbf{N}(h_2) \otimes \mathbf{N}(h_2)$ in Gl. (1.9.10) Kosinus- und Sinusoszillationen bzgl. des Argumentes $h_2 z$.

Für die Halbraumgeometrie stimmen somit die Ergebnisse, die man bei Verwendung des optischen Theorems und der renormierten Greenschen Funktion erhält, für die evaneszenten Moden mit denen aus der Rytovschen Theorie überein. Für die propagierenden Moden ergeben sich allerdings signifikante Unterschiede. Aus physikalischer Sicht ist dieser Sachverhalt klar: In der Rytovschen Theorie sind das Dielektrikum 1 bei $T_1 \neq 0$ und das Dielektrikum 2 bei $T_2 = 0$ im lokalen Gleichgewicht. Wie gezeigt wurde, führt das zu einer effektiven Abstrahlung des Dielektrikums 1 gemäß dem Kirchhoff-Planckschen Strahlungsgesetz durch die propagierenden Moden. Die evaneszenten Moden selbst tragen nichts zum Energiefluss zwischen beiden Dielektrika bei. Um eine globale Gleichgewichtssituation mit $T_2 = T_1$ zu erhalten, muss es den gleichen Energiefluss von Dielektrikum 2 zu Dielektrikum 1 geben, sodass es im Mittel keinen Energiefluss gibt. Beide Situationen unterscheiden sich also nur in den propagierenden Moden, sodass die Energiedichte oberhalb eines Mediums beliebiger Geometrie für die evaneszenten Moden auch für $T_1 \neq T_2$ mit dem optischen Theorem bestimmt werden kann.

1.10 Eigenschaften des Nahfeldes

Das thermische Nahfeld hat neben der Eigenschaft, dass die lokale Zustandsdichte bzw. Energiedichte um Größenordnungen über den Schwarzkörperwert liegen kann, noch zwei weitere faszinierende Eigenschaften: Es ist zeitlich und räumlich kohärent [18]. Das sind zwei zunächst sehr unerwartete Eigenschaften [17], da Strahlung einer thermischen Quelle wie etwa einer Glühbirne als ein Paradebeispiel für inkohärentes Licht gilt. Diese besonderen Nahfeldeigenschaften lassen sich letztendlich auf thermisch angeregte Oberflächen-Polaritonen zurückführen und sollen hier nur kurz behandelt werden. Eine ausführliche Darstellung findet man in [16, 18, 39].

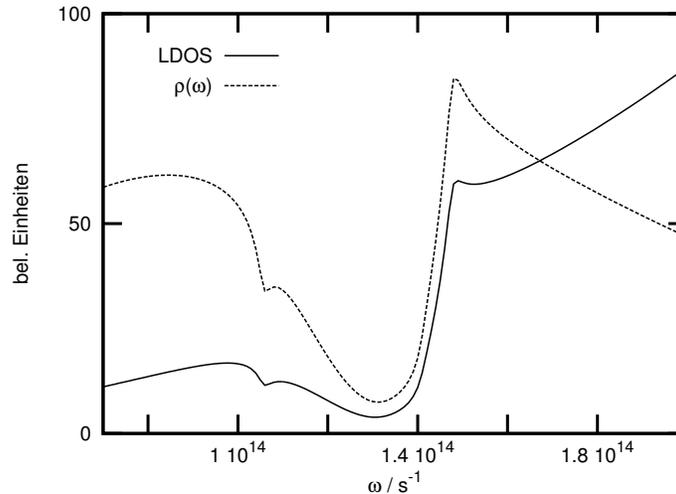


Abbildung 1.4: Skalierte lokale Zustandsdichte (LDOS) und skalierte spektrale Energiedichte $\rho(\omega)$ (bei $T_1 = 300\text{ K}$) oberhalb eines GaN-Halbraumes im Fernfeld bei $z = 10^{-5}\text{ m}$.

Es soll nun zunächst die zeitliche Kohärenz untersucht werden. Es ist bekannt, dass monochromatisches Licht im Prinzip eine unendliche Kohärenzzeit hat. In der Natur findet man stattdessen nur sogenanntes quasi-monochromatisches Licht [40], d.h. Licht mit einer mittleren Frequenz ν und einer Bandbreite $\Delta\nu \ll \nu$, das eine Kohärenzzeit von $\Delta t \approx \Delta\nu^{-1}$ hat. Um also zu zeigen, dass das Nahfeld zeitlich kohärent ist, reicht es aus, zu zeigen, dass das Spektrum der Energiedichte bzw. die lokale Zustandsdichte in dem thermisch zugänglichen Bereich quasi-monochromatisch ist. Der thermisch zugängliche Bereich ist der bei einer festen Temperatur T durch die Bose-Einstein-Funktion $E(\omega, T)$ „ausgewählte“ Frequenzbereich, d.h. der Frequenzbereich nahe der thermischen Frequenz $\omega_{\text{th}} \approx 2,8(\hbar\beta)^{-1}$.

Dazu betrachte man die lokale Zustandsdichte $D(\omega)$ aus Gl. (1.7.15) bzw. die spektrale Energiedichte $\rho(\omega) = E(\omega, T_1)D(\omega)$ oberhalb eines GaN-Halbraumes mit der Temperatur $T_1 = 300\text{ K}$ im Fernfeld bei $z = 10^{-5}\text{ m}$ in Abb. 1.4 und im Nahfeld bei $z = 10^{-7}\text{ m}$ in Abb. 1.5, wobei der spektrale Bereich um $\omega_{\text{th}} \approx 10^{14}\text{ s}^{-1}$ von besonderem Interesse ist. Für das Fernfeld ist sehr deutlich das Reststrahlenband zwischen $\omega_t = 1,1 \cdot 10^{14}\text{ s}^{-1}$ und $\omega_l = 1,4 \cdot 10^{14}\text{ s}^{-1}$ zu erkennen. Das ist der Frequenzbereich zwischen ω_t und ω_l , in dem es keine Polariton-Anregungen im GaN gibt und damit auch nur wenige Moden in der lokalen Zustandsdichte. Offenbar gibt es im

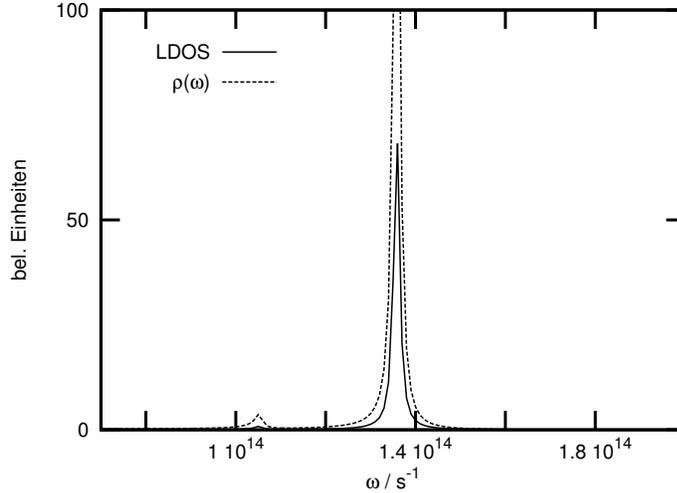


Abbildung 1.5: Skalierte lokale Zustandsdichte (LDOS) und skalierte spektrale Energiedichte $\rho(\omega)$ (bei $T_1 = 300$ K) oberhalb eines GaN-Halbraumes im Nahfeld bei $z = 10^{-7}$ m.

Fernfeld keine erhöhte Zustandsdichte für eine bestimmte Frequenz und damit kein quasi-monochromatisches Licht. Folglich ist die Strahlung im Fernfeld wie erwartet zeitlich inkohärent. Im Nahfeld ist das Spektrum allerdings vollkommen von dem Fernfeldspektrum verschieden [14] und man erkennt eine deutlich erhöhte Zustandsdichte bei der Frequenz des Oberflächen-Phonon-Polaritons, $\omega_s = 1,36 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}$, in Abb. 1.5. Daher hat man im Nahfeld ein quasi-monochromatisches Spektrum und damit auch ein zeitlich kohärentes Feld [14]. Für Metalle gilt eine ähnliche Feststellung, nur dass in diesem Fall das quasi-monochromatische Spektrum von der Oberflächen-Plasmon-Polariton-Resonanz herrührt, die bei der Frequenz $\omega_s = \omega_p/\sqrt{2}$ liegt.

Nachdem somit die zeitliche Kohärenz für das evaneszente Nahfeld bestätigt wurde, soll die räumliche Kohärenz [15] untersucht werden. Bekannt ist [40], dass eine planare Quelle thermischer Strahlung mit der Wellenlänge λ eine Kohärenzlänge von $\lambda/2$ aufweist. Um den Grad der räumlichen Kohärenz zu bestimmen, betrachtet man im Allgemeinen den Kreuzkorrelationstensor $W_{\alpha\beta}$, der durch

$$\langle E_\alpha(\mathbf{r}, \omega) \overline{E}_\beta(\mathbf{r}', \omega') \rangle = W_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) \delta(\omega - \omega') \quad (1.10.1)$$

definiert ist. Damit ist $W_{\alpha\beta}$ entsprechend Gl. (1.1.4) und (1.1.10) durch

$$W_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = E(\omega, T) 4\pi\omega\epsilon''(\omega) (\mu_0\omega)^2 \int d^3r' \left(\mathbf{G}_{21}^E \mathbf{G}_{21}^{E\dagger} \right)_{\alpha\beta} \quad (1.10.2)$$

gegeben, wobei man die Integralausdrücke über das Quellenvolumen mittels der Gln. (1.9.13) und (1.9.14) auswerten kann.

Wertet man den Kreuzkorrelationstensor $W_{\alpha\beta}$ für $z = z'$ und $\varphi = \varphi'$ oberhalb eines Halbraumes aus, zeigt sich, dass man im Fernfeld die Korrelation von $\lambda/2$ wiederfindet, d.h. die elektrische Felder, die auf einer Ebene oberhalb des betrachteten Halbraumes um den Abstand $\rho := |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| < \lambda/2$ auseinanderliegen, sind korreliert. Für das Nahfeld ist das Element des Kreuzkorrelationstensor $W_{rr}(\rho)$ in

Abb. 1.6 oberhalb eines GaN-Halbraumes aufgetragen, wobei dieser auf $W_{rr}(0)$ normiert wurde. Man sieht anhand dieser Abbildung sehr gut, dass man im Nahfeld bei $z = 1\lambda = 14\mu\text{m}$ eine Korrelationslänge hat, die mehrere λ beträgt. Im stark evaneszenten Nahfeld (es wird nur der Nahfeld-Anteil von W_{rr} betrachtet) bei $z = 0,01\lambda$ findet man hingegen eine Korrelationslänge, die bei weitem kleiner ist als $\lambda/2$.

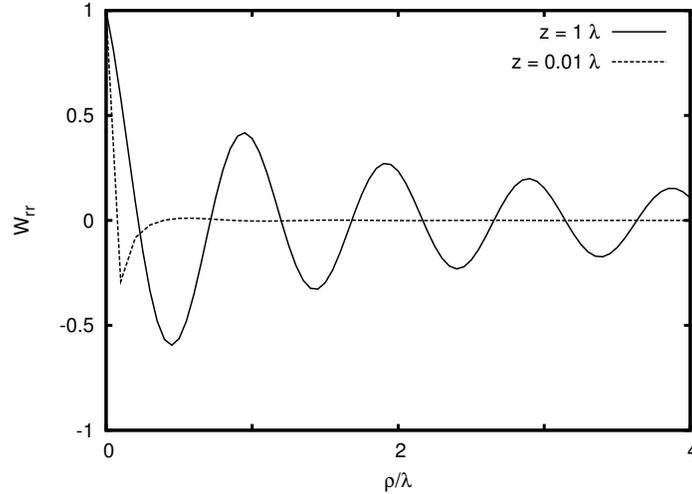


Abbildung 1.6: Normierter Kreuzkorrelationstensor W_{rr} im Nahfeld oberhalb eines GaN-Halbraumes aufgetragen über den lateralen Abstand $\rho = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ mit $\lambda = 14\mu\text{m}$.

Dieses Phänomen ist zunächst überraschend, da die Felder von räumlich unkorrelierten Quellenströmen erzeugt werden. Erwartungsgemäß erhält man daher im stark evaneszenten Bereich keine Korrelation des elektromagnetischen Feldes, da das quasistatische Feld der fluktuierenden Quellenströme in diesem Abstandsbereich den Hauptbeitrag liefert. Dieser quasistatische Beitrag liefert, wie bereits gezeigt, eine Energiedichte $\langle u_{\parallel} \rangle \propto z^{-3}$. Die Kohärenz des Feldes ist im Fernfeld durch den bekannten Schwarzkörperwert von $\lambda/2$ gegeben. Für dielektrische Körper mit einer endlichen Ausdehnung l nimmt die Korrelation der Felder für Abstände $z \gg l$ gemäß dem Cernike-van Zitter-Theorem [40] weiter zu [16]. Diese Kohärenz trotz unkorrelierter Quellen für $z \gg l$ kann man dadurch erklären, dass das Feld für $z \gg l$ an zwei räumlich getrennten Beobachtungsorten von einer einzigen Quelle herrühren kann und somit korreliert ist, auch wenn die Quellen untereinander räumlich unkorreliert sind.

Die starke Kohärenz im Nahfeld, d.h. zwischen dem quasistatischen und dem Fernfeldbereich, mit „riesigen“ Kohärenzlängen von mehreren λ kann wie die zeitliche Kohärenz auf die Oberflächen-Phononen-Polaritonen zurückgeführt werden, bei denen es sich um kollektive Ionenschwingungen an der Oberfläche des Halbraumes handelt, die an das elektromagnetische Feld gekoppelt sind. Man beachte dazu, dass in Abb. 1.6 die Wellenlänge des Oberflächen-Phonon-Polaritons $\lambda = (2\pi c)/\omega_s = 14\mu\text{m}$ gewählt wurde. Somit ist klar, dass die Abklinglänge des Oberflächen-Polaritons die räumliche Kohärenzlänge im Nahfeld [15], die bei GaN bei ca. $2,4\lambda \gg \lambda/2$ liegt, bestimmt. Eine genaue Analyse der räumlichen Korrelation mit einer detaillierten Angabe der relevanten Abstandsbereiche findet man in [16].

Das thermische Nahfeld dielektrischer Körper ist also im Gegensatz zum thermischen Fernfeld derselben zeitlich und räumlich kohärent und teilweise polarisiert. Interessante Messungen dieser faszinierenden Nahfeldeigenschaften wurden in den letzten Jahren durchgeführt und können in [17, 19, 20] nachgelesen werden.

Teil II

Das thermische Nahfeld eines beschichteten Mediums

In diesem zweiten Teil meiner Dissertation sollen die propagierenden und evaneszenten Moden des fluktuierenden Feldes oberhalb eines beschichteten Halbraumes mit der Schichtdicke d untersucht werden. Dazu wird zunächst eine frei stehende dielektrische Platte der Dicke d untersucht. Es wird gezeigt, dass der Poynting-Vektor und die Nahfeldenergiedichte ein zunächst unerwartetes Verhalten bei Verringerung der Plattendicke zeigen: Für den Poynting-Vektor, d.h. für die propagierenden Moden, kann man zeigen, dass es eine Schichtdicke gibt, bei der die abgestrahlte Energie maximal wird, bevor sie für sehr dünne Platten linear mit d gegen Null geht. Für die Nahfeldenergiedichte oberhalb einer Metallschicht, d.h. für die evaneszenten Moden, zeigt sich ein stark nichtmonotones Verhalten bei Verringerung der Schichtdicke, wobei insbesondere der TM-Moden-Anteil für $d \rightarrow 0$ gegen einen universellen materialunabhängigen und von Null verschiedenen Wert strebt.

Diese Untersuchung wird im zweiten Kapitel dieses Teils auf beschichtete Halbräume ausgeweitet, wobei besonderes Augenmerk dem evaneszenten Nahfeld und dem abstandsabhängigen Verhalten der Energiedichte für verschiedene Plattendicken bei verschiedenen Materialkombinationen gilt. Es zeigt sich, dass die für den frei stehenden Metallfilm abgeleiteten Aussagen auch auf solch eine Schichtgeometrie übertragbar sind, solange man ein polares Material als Substrat verwendet. Für ein metallisches Substrat hingegen zeigt sich ein vollkommen anderes Verhalten.

Im letzten Kapitel wird schließlich versucht, das Verhalten der Energiedichte oberhalb einer Schichtgeometrie auf die Beiträge der Oberflächenplasmonen- und Oberflächenphononen-Polaritonen in solch einer Geometrie zurückzuführen. Dazu wird zunächst das Konzept der Oberflächenmoden eingeführt und gezeigt, dass das zunächst merkwürdig anmutende Verhalten der Nahfeldenergiedichte für $d \rightarrow 0$ eine Konsequenz der Oberflächenmodenkopplung innerhalb des Metallcoatings ist.

Meines Wissens gibt es eine Untersuchung des thermischen Nahfeldes dieser Art in der zugänglichen Literatur noch nicht. Es gibt zwar Untersuchungen, die die elektrische spektrale Energiedichte ρ_E für eine dielektrische Schicht [41] sowie die elektrische lokale Zustandsdichte D_E der propagierenden Moden oberhalb solch einer Schicht [42] bzw. zwischen zwei Halbräumen [43] untersuchen, allerdings geben diese Arbeiten weder Aufschluss über die Abstandsabhängigkeit der Nahfeldenergiedichte oberhalb einer dielektrischen Schicht noch über die physikalischen Mechanismen, die in solchen Schichtgeometrien zu diesen Abstandsabhängigkeiten führen.

Es ist in den folgenden Kapiteln zu beachten, dass die Ausdrücke für den Poynting-Vektor und die Energiedichte zwar allgemeingültig sind, die abgeleiteten Näherungen und die numerischen Berechnungen jedoch auf dem Drude-Modell basieren. Es ist bekannt, dass für Filme mit einer Dicke d kleiner als die mittlere Weglänge des Elektrons l bzw. als die de Broglie-Wellenlänge des Elektrons im Metall im allgemeinen klassische und quantenmechanische Effekte [44, 45, 46] zu berücksichtigen sind, die auf eine Leitfähigkeit linear in d und damit auch auf eine Permittivität führen, die von d abhängt. Außerdem muss man für Abstände und Schichtdicken kleiner als die mittlere freie Weglänge auch nichtlokale Effekte [47, 48] berücksichtigen. Daher können die hier abgeleiteten Ergebnisse für sehr dünne Platten höchstens qualitativ richtig sein, zumal die phononischen Eigenschaften [49] und die gebundenen Ladungen im Drude-Modell ganz außer Acht gelassen und nur die elektrischen Eigenschaften berücksichtigt werden.

Innerhalb einer vollständigen nichtlokalen Beschreibung [47] wird unter anderem auch die Ankopplung an longitudinale Polarisationswellen berücksichtigt, die in dünnen Metallfilmen bzw. Schichten aus polaren Medien optisch angeregt werden [50] und zu einem Absorptionsmechanismus führen, der durch die lokalen Fresnelschen Reflexionskoeffizienten in Kombination mit der Drude- bzw. Reststrahlenformel nicht berücksichtigt wird [33, 51]. Für die gegebene Schichtgeometrie kann man die Ankopplung an diese longitudinalen Polarisationswellen dadurch berücksichtigen, dass man die longitudinale Vektorwellenfunktion \mathbf{L} in der dyadischen Greenschen Funktion ergänzt. Neben den üblichen Randbedingungen muss in diesem Fall zusätzlich die Stetigkeit der Normalkomponente der dielektrischen Verschiebung \mathbf{D} gefordert werden. Mit dieser Vorgehensweise erhält man schließlich allgemeinere Formulierungen für die Fresnel-Koeffizienten der TM-Moden [33]. Werden die Polarisationswellen, d.h. die Volumenplasmonen im Metall bzw. die longitudinalen optischen Phononen im polaren Medium, auf diese Weise berücksichtigt, so erhält man ein ausgeprägtes Resonanzspektrum in der lokalen Zustandsdichte für $\omega > \omega_p$ im Metall und für $\omega_t < \omega < \omega_l$ im polaren Medium. Da die thermische Frequenz ω_{th} für Drude-Metalle in der Regel sehr viel kleiner ist als die Plasmafrequenz ω_p , kann man für Metalle den Einfluss der Polarisationswellen vernachlässigen. Für polare Medien können die ausgeprägten Resonanzen allerdings im Infrarot-Bereich liegen, sodass in diesem Fall der Einfluss der Polarisationswellen im allgemeinen mit zu berücksichtigen ist. Allerdings wurde am Beispiel von LiF in [51] gezeigt, dass für Filmdicken $d > 10$ nm die zusätzlichen Resonanzen im Reststrahlenband vernachlässigbar sind.

Daher sind die folgenden Betrachtungen für Metalle und thermische Frequenzen $\omega_{\text{th}} \ll \omega_p$ quantitativ nur richtig, solange Abstände und Schichtdicken größer als die freie Weglänge des Elektrons l und die de Broglie-Wellenlänge betrachtet werden. Für Abstände und Schichtdicken kleiner als die mittlere freie Weglänge des Elektrons können die Ergebnisse dagegen nur qualitativ richtig sein. Daher werden die numerischen Berechnungen für dünne Schichten in diesem Teil zumeist mit Wismut durchgeführt, da man hier eine sehr geringe Relaxationszeit von $\tau = 2,3 \cdot 10^{-16} \text{ s}^{-1}$ und damit eine sehr geringe mittlere freie Weglänge von $l \approx 0,4$ nm hat. Das hat weiterhin zur Folge, dass die hier beschriebenen theoretischen Effekte für dieses Material besonders gut ausgeprägt sind. Man beachte aber, dass sich bei Wismut aufgrund der relativ großen de Broglie-Wellenlänge der Elektronen bereits bei Schichtdicken von 20 nm quantenmechanische Effekte [52] zeigen können. Daher ist eventuell Mangan ein geeigneteres Material, um den hier gezeigten theoretischen Effekt in zukünftigen Experimenten zu bestätigen. Da die Drude-Parameter für das Metall Mangan nahe bei denen für Wismut liegen, ist zu erwarten, dass die numerischen Ergebnisse für Wismut und Mangan im Drude-Modell vergleichbar sind. Für polare Medien gelten ähnliche Einschränkungen wie für Metalle, wobei für Schichtdicken im Nanometerbereich die Reststrahlenformel akzeptable Ergebnisse liefern sollte.

Kapitel 2

Das evaneszente Nahfeld einer dielektrischen Platte

In diesem Kapitel werden zunächst die propagierenden und evaneszenten Moden des fluktuierenden Feldes oberhalb einer frei stehenden dielektrischen Platte mit einer Dicke d untersucht. Obwohl die gegebenen Ableitungen eine Untersuchung sowohl für die propagierenden als auch für die evaneszenten Moden erlauben, gilt besonderes Augenmerk dem evaneszenten Nahfeld und dem abstandsabhängigen Verhalten der Energiedichte für verschiedene Plattendicken.

Im ersten Abschnitt wird eine Diskussion der auftretenden Längenskalen gegeben, die es ermöglicht, eine erste Abschätzung der zu erwartenden Effekte zu geben. Um die Korrelationsfunktionen der Felder zu bestimmen, ist es wieder notwendig, die dyadischen Greenschen Funktionen zu bestimmen. Wie im zweiten Abschnitt gezeigt wird, ist die Implementierung der Randbedingungen für die Plattengeometrie bereits relativ kompliziert und wird schnell unübersichtlich, sodass in diesem Abschnitt nur die Ableitung der Transmissionskoeffizienten für die TE-Moden explizit angegeben wird. Die Berechnung für die TM-Moden kann man analog ausführen. Mithilfe der abgeleiteten dyadischen Greenschen Funktionen können wieder die Korrelationsfunktionen der Felder berechnet werden.

Im dritten Abschnitt wird der Poynting-Vektor oberhalb der dielektrischen Platte bestimmt, wobei im Gegensatz zum Halbraumergebnis acht statt zwei Integrale über das Quellenvolumen ausgewertet werden müssen. Der Poynting-Vektor hat aber trotz der etwas schwierigeren Rechnung die gleiche Form wie in der Halbraumgeometrie, wobei die Transmissionskoeffizienten in diesem Fall natürlich komplizierter sind. Es wird gezeigt, dass man im Grenzfall dicker Platten das Halbraumergebnis zurückbekommt, wohingegen man für sehr dünne Platten eine lineare Abhängigkeit $\langle S \rangle \propto d$ erhält, sodass die propagierenden Moden bei Verringerung des Quellenvolumens in einer Dimension verschwinden. Für Drude-Metalle in der Hagen-Rubens-Näherung wird gezeigt, dass es zwischen diesen beiden Grenzfällen ein Maximum für den Poynting-Vektor bei der sogenannten Woltersdorff-Dicke d_W gibt. Dieses Phänomen ist wohl bekannt und bereits experimentell untersucht [53, 54, 55, 56], sodass man somit für die propagierenden Moden ein bekanntes Ergebnis innerhalb der fluktuierenden Elektrodynamik reproduzieren kann.

Die Untersuchung der Wärmestrahlung für dünne Schichten scheint zwar immer

noch ein aktives Forschungsthema [57] zu sein, doch ist in dieser Arbeit vor allem das evaneszente Nahfeld von Interesse, das im vierten Abschnitt anhand der Energiedichte oberhalb der dielektrischen Schicht detailliert untersucht wird. Es wird gezeigt, dass es für die evaneszenten Moden einen ähnlichen Effekt wie für die propagierenden Moden gibt, der dazu führt, dass es für bestimmte Beobachtungsabstände z oberhalb der dielektrischen Platte einen Anstieg der Energiedichte geben kann, obwohl die Plattendicke verringert wird. Der physikalische Mechanismus, der hinter diesem Effekt steht, ist der Oberflächenpolaritonenkopplung auf den beiden Oberflächen der dielektrischen Platte zuzuschreiben und wird in einem eigenen Kapitel ausführlich diskutiert. Neben diesem Effekt, der zu einem nicht-monotonen Verhalten der Energiedichte bei Verringerung der Plattendicke führt, wird außerdem gezeigt, dass es für Platten, die dünner als eine charakteristische Dicke d_{uni} sind, ein universelles, d.h. materialunabhängiges, Potenzgesetz für die Energiedichte gibt. In einem eigenen Abschnitt wird gezeigt, dass das universelle Verhalten ebenfalls mithilfe der Oberflächenmoden erklärt werden kann.

2.1 Die Plattengeometrie

Es sollen nun die propagierenden und evaneszenten Moden oberhalb einer dielektrischen Platte (siehe Abb. 2.1) der Dicke d untersucht werden. Genau wie im einführenden ersten Kapitel muss zuerst die dyadische Greensche Funktion außerhalb der dielektrischen Platte mit den Quellenströmen innerhalb der Platte bestimmt werden. Da sowohl die evaneszenten als auch die propagierenden Moden untersucht werden sollen, kann das optische Theorem nicht angewandt werden, da es nur für die evaneszenten Moden die richtigen Ausdrücke für die Korrelationsfunktionen der elektromagnetischen Felder liefert. Daher müssen bei der Bestimmung des Poynting-Vektors und der Energiedichte oberhalb der Platte die Volumenintegrationen über das Quellenvolumen explizit ausgeführt werden.

Es ist anzunehmen, dass neben der Plattendicke d die Skintiefe

$$d_s = \frac{1}{k_0 \text{Im}(\sqrt{\epsilon_r})}, \quad (2.1.1)$$

als zweite Längenskala eine erhebliche Bedeutung haben wird. Betrachtet man eine ebene Welle $\exp(\mathbf{ik} \cdot \mathbf{r})$ in einem unbegrenzten Medium mit $k^2 = \epsilon_r k_0^2$, so wird sofort klar, dass die Skintiefe d_s in Gl. (2.1.1) die Abklinglänge der ebene Welle aufgrund der dissipativen Eigenschaften des Mediums beschreibt. Die elektromagnetischen Felder mit der Frequenz $\omega \approx \omega_{\text{th}}$, die durch die fluktuierenden Quellenströme im Dielektrikum bei der Temperatur T erzeugt werden, werden daher auf der Längenskala d_s exponentiell gedämpft. Demzufolge sollte das fluktuierende Feld oberhalb eines Dielektrikums lediglich von einer Schicht der Dicke d_s an der Oberfläche des Dielektrikums herrühren. Betrachtet man nun eine dielektrische Schicht der Dicke d , so darf man erwarten, dass sich für Schichtdicken $d \geq d_s$ die Nahfeldeigenschaften von denen des Halbraumes nicht unterscheiden. Für $d \leq d_s$ und schließlich $d \rightarrow 0$ hingegen wird das Volumen, das die Quellenströme enthält, stark verringert, sodass man erwarten könnte, dass in diesem Grenzfall ebenso das fluktuierende Nahfeld verschwindet.

In den folgenden Abschnitten wird gezeigt, dass diese naive Vorstellung für den Grenzfall $d \rightarrow 0$ im propagierenden Bereich zwar zutreffend ist, eine Verringerung des Quellenvolumens aber für Drude-Metalle zunächst zu einem Maximum in der thermischen Abstrahlung führt, bevor der Anteil der propagierenden Moden linear mit d verschwindet. Im evaneszenten Nahfeld ist die naive Vorstellung dagegen überhaupt nicht zutreffend, da sie die Beiträge der Oberflächen-Polaritonen zum evaneszenten Nahfeld unberücksichtigt lässt. Es wird vielmehr gezeigt, dass für die evaneszenten Moden im Grenzfall $d \rightarrow 0$ die Energiedichte für die TM-Moden ansteigt und zu einem universellen, d.h. materialunabhängigen, Potenzgesetz für die Energiedichte führt.

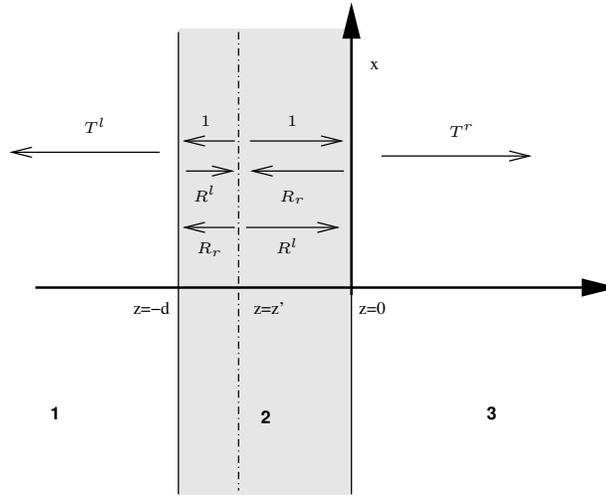


Abbildung 2.1: Skizze zur Konstruktion der Greenschen Funktionen für die Plattengeometrie.

2.2 Konstruktion der Greenschen Funktion

Für die Plattengeometrie in Abb. 2.1 muss der Ansatz für die Greenschen Funktionen, der für die Halbraumgeometrie gemacht wurde, verändert werden. Es werden jetzt vier statt zwei Raumgebiete unterschieden: Gebiet *I* für $z < -d$, Gebiet *II* für $-d < z < z'$, Gebiet *III* für $z' < z < 0$ und schließlich Gebiet *IV* für $z > 0$. Für das Gebiet *I* im Medium 1 macht man den Ansatz

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_I^E = \frac{i}{4\pi} \int d\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2 - \delta_{n,0})}{\lambda h_2} \left\{ T_{TE}^l \mathbf{M}_{\pm n\lambda}(-h_1) \otimes \mathbf{M}'_{\pm n\lambda}(h_2) \right. \\ \left. + T_{TM}^l \mathbf{N}_{\pm n\lambda}(-h_1) \otimes \mathbf{N}'_{\pm n\lambda}(h_2) \right\}. \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

Für die Gebiete *II* und *III* innerhalb des Mediums 2, in dem sich die Quellen der Felder befinden, ist der Ansatz etwas schwieriger, da die reflektierten Anteile richtig

berücksichtigt werden müssen. Es gelten:

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_{II}^E &= \frac{i}{4\pi} \int d\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2 - \delta_{n,0})}{\lambda h_2} \left\{ \left(\mathbf{M}_{\pm n\lambda}(-h_2) + R_{TE}^l \mathbf{M}_{\pm n\lambda}(h_2) \right) \otimes \mathbf{M}'_{\pm n\lambda}(h_2) \right. \\ &\quad + \left(\mathbf{N}_{\pm n\lambda}(-h_2) + R_{TM}^l \mathbf{N}_{\pm n\lambda}(h_2) \right) \otimes \mathbf{N}'_{\pm n\lambda}(h_2) \\ &\quad + R_{TE}^r \mathbf{M}_{\pm n\lambda}(-h_2) \otimes \mathbf{M}'_{\pm n\lambda}(-h_2) \\ &\quad \left. + R_{TM}^r \mathbf{N}_{\pm n\lambda}(-h_2) \otimes \mathbf{N}'_{\pm n\lambda}(-h_2) \right\}, \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_{III}^E &= \frac{i}{4\pi} \int d\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2 - \delta_{n,0})}{\lambda h_2} \left\{ \left(\mathbf{M}_{\pm n\lambda}(h_2) + R_{TE}^r \mathbf{M}_{\pm n\lambda}(-h_2) \right) \otimes \mathbf{M}'_{\pm n\lambda}(-h_2) \right. \\ &\quad + \left(\mathbf{N}_{\pm n\lambda}(h_2) + R_{TM}^r \mathbf{N}_{\pm n\lambda}(-h_2) \right) \otimes \mathbf{N}'_{\pm n\lambda}(-h_2) \\ &\quad + R_{TE}^l \mathbf{M}_{\pm n\lambda}(h_2) \otimes \mathbf{M}'_{\pm n\lambda}(h_2) \\ &\quad \left. + R_{TM}^l \mathbf{N}_{\pm n\lambda}(h_2) \otimes \mathbf{N}'_{\pm n\lambda}(h_2) \right\}. \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

Für das Gebiet IV innerhalb des Mediums 3 macht man den Ansatz entsprechend Gebiet I :

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_{IV}^E &= \frac{i}{4\pi} \int d\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2 - \delta_{n,0})}{\lambda h_2} \left\{ T_{TE}^{rr} \mathbf{M}_{\pm n\lambda}(h_3) \otimes \mathbf{M}'_{\pm n\lambda}(-h_2) \right. \\ &\quad \left. + T_{TM}^{rr} \mathbf{N}_{\pm n\lambda}(h_3) \otimes \mathbf{N}'_{\pm n\lambda}(-h_2) \right\}. \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

Aufgrund dieser Konstruktion, die bereits die Stetigkeit der dyadischen Greenschen Funktion an der Stelle $z = z'$ beinhaltet, bleiben vier Reflexionskoeffizienten $R_{TE, TM}^{l,r}$ und vier Transmissionskoeffizienten $T_{TE, TM}^{l,r}$ durch die Implementierung der vier Randbedingungen in Gl. (1.1.7) für die TE- und der TM-Moden zu bestimmen.

Die Implementierung der Randbedingungen gestaltet sich allerdings diesmal sehr viel schwieriger als im Falle des Halbraumes, da man nicht nur bei $z = 0$, sondern auch bei $z = -d$ die Randbedingungen erfüllen muss. Deshalb beachte man zunächst folgende Relationen

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_z \times \mathbf{N} &= \begin{pmatrix} -N_\phi \\ N_r \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{i\hbar}{k} e^{i\hbar z} \mathbf{M}(z=0) =: -\frac{i\hbar}{k} e^{i\hbar z} \mathbf{M}^0, \\ \mathbf{e}_z \times \mathbf{M} &= \begin{pmatrix} -M_\phi \\ M_r \\ 0 \end{pmatrix} =: e^{i\hbar z} \mathbf{N}^0, \quad \text{und} \quad \mathbf{e}_z \times \mathbf{N}^0 = -\mathbf{M}^0, \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

die für die weitere Rechnung von großer Bedeutung sein werden, da sie es erlauben, die z -Abhängigkeit in den Vektorwellenfunktionen durch einen bloßen Faktor vor

den z -unabhängigen Vektorwellenfunktionen \mathbf{M}^0 und \mathbf{N}^0 auszudrücken. Weiterhin sei daran erinnert, dass nach Gl. (1.4.4) die beiden Beziehungen $\nabla \times \mathbf{N} = k\mathbf{M}$ und $\nabla \times \mathbf{M} = k\mathbf{N}$ gelten, sodass man die Beziehungen

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_z \times \nabla \times \mathbf{M} &= \mathbf{e}_z \times \mathbf{N}k = -ih e^{ihz} \mathbf{M}^0, \\ \mathbf{e}_z \times \nabla \times \mathbf{N} &= \mathbf{e}_z \times \mathbf{M}k = k e^{ihz} \mathbf{N}^0 \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

erhält.

Um die Übersichtlichkeit zumindest halbwegs zu bewahren, werden nun die Randbedingung in Gl. (1.1.7) bei $z = -d$ und $z = 0$ nur für die TE-Moden implementiert; das entsprechende Ergebnis für die TM-Moden wird dagegen ohne Ableitung angegeben. Gesucht sind die Transmissionskoeffizienten der Greenschen Funktion (2.2.4) im Gebiet IV , da das fluktuierende Nahfeld in diesem Gebiet untersucht werden soll. Bei $z = -d$ erhält man die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} T_{TE}^l \mathbf{e}_z \times \mathbf{M}(-h_1) \Big|_{z=-d} \otimes \mathbf{M}'(h_2) &= \left(\mathbf{e}_z \times \mathbf{M}(-h_2) \Big|_{z=-d} \right. \\ &\quad \left. + R_{TE}^l \mathbf{e}_z \times \mathbf{M}(h_2) \Big|_{z=-d} \right) \otimes \mathbf{M}'(h_2) \\ &\quad + R_{TE}^r \mathbf{e}_z \times \mathbf{M}(-h_2) \Big|_{z=-d} \otimes \mathbf{M}'(-h_2), \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

$$\begin{aligned} T_{TE}^l \mathbf{e}_z \times \nabla \times \mathbf{M}(-h_1) \Big|_{z=-d} \otimes \mathbf{M}'(h_2) &= \left(\mathbf{e}_z \times \nabla \times \mathbf{M}(-h_2) \Big|_{z=-d} \right. \\ &\quad \left. + R_{TE}^l \mathbf{e}_z \times \nabla \times \mathbf{M}(h_2) \Big|_{z=-d} \right) \otimes \mathbf{M}'(h_2) \\ &\quad + R_{TE}^r \mathbf{e}_z \times \nabla \times \mathbf{M}(-h_2) \Big|_{z=-d} \otimes \mathbf{M}'(-h_2). \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

Mittels der Gleichungen (2.2.5) und (2.2.6) erhält man daher

$$\begin{aligned} T_{TE}^l e^{ih_1 d} \mathbf{M}^0 \otimes \mathbf{M}'(h_2) &= \left(e^{ih_2 d} \mathbf{M}^0 + R_{TE}^l e^{-ih_2 d} \mathbf{M}^0 \right) \otimes \mathbf{M}'(h_2) \\ &\quad + R_{TE}^r e^{ih_2 d} \mathbf{M}^0 \otimes \mathbf{M}'(-h_2), \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

$$\begin{aligned} T_{TE}^l e^{ih_1 d} \mathbf{M}^0 \otimes \mathbf{M}'(h_2) &= \frac{h_2}{h_1} \left\{ \left(e^{ih_2 d} \mathbf{M}^0 - R_{TE}^l e^{-ih_2 d} \mathbf{M}^0 \right) \otimes \mathbf{M}'(h_2) \right. \\ &\quad \left. + R_{TE}^r e^{ih_2 d} \mathbf{M}^0 \otimes \mathbf{M}'(-h_2) \right\}. \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

Subtrahiert man diese beiden Gleichungen und stellt sie nach R_{TE}^l um, so bekommt man

$$\begin{aligned} a_{\perp}^{12} R_{TE}^l e^{-ih_2 d} \mathbf{M}^0 \otimes \mathbf{M}'(h_2) &= - \left[b_{\perp}^{12} e^{ih_2 d} \mathbf{M}^0 \otimes \mathbf{M}'(h_2) \right. \\ &\quad \left. + b_{\perp}^{12} e^{ih_2 d} R_{TE}^r \mathbf{M}^0 \otimes \mathbf{M}'(-h_2) \right], \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

mit

$$a_{\perp}^{12} := h_1 + h_2 \quad \text{und} \quad b_{\perp}^{12} := h_1 - h_2. \quad (2.2.12)$$

Diese Gleichung enthält noch zwei Unbekannte, was nicht verwunderlich ist, weil nur die Randbedingungen bei $z = -d$ benutzt wurden.

Mit den Randbedingungen bei $z = 0$ erhält man für die TE-Moden die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} T_{TE}^r \mathbf{e}_z \times \mathbf{M}(h_3) \Big|_{z=0} \otimes \mathbf{M}'(-h_2) &= \left(\mathbf{e}_z \times \mathbf{M}(h_2) \Big|_{z=0} \right. \\ &\quad \left. + R_{TE}^r \mathbf{e}_z \times \mathbf{M}(-h_2) \Big|_{z=0} \right) \otimes \mathbf{M}'(-h_2) \\ &\quad + R_{TE}^l \mathbf{e}_z \times \mathbf{M}(h_2) \Big|_{z=0} \otimes \mathbf{M}'(h_2) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} T_{TE}^r \mathbf{e}_z \times \nabla \times \mathbf{M}(h_3) \Big|_{z=0} \otimes \mathbf{M}'(-h_2) &= \left(\mathbf{e}_z \times \nabla \times \mathbf{M}(h_2) \Big|_{z=0} \right. \\ &\quad \left. + R_{TE}^r \mathbf{e}_z \times \nabla \times \mathbf{M}(-h_2) \Big|_{z=0} \right) \otimes \mathbf{M}'(-h_2) \\ &\quad + R_{TE}^l \mathbf{e}_z \times \nabla \times \mathbf{M}(h_2) \Big|_{z=0} \otimes \mathbf{M}'(h_2). \end{aligned}$$

Nutzt man wieder die Relationen in Gl. (2.2.5) und Gl. (2.2.6), erhält man dann

$$T_{TE}^r \mathbf{M}^0 \otimes \mathbf{M}'(-h_2) = \left(\mathbf{M}^0 + R_{TE}^r \mathbf{M}^0 \right) \otimes \mathbf{M}'(-h_2) + R_{TE}^l \mathbf{M}^0 \otimes \mathbf{M}'(h_2), \quad (2.2.13)$$

$$T_{TE}^r \mathbf{M}^0 \otimes \mathbf{M}'(-h_2) = \frac{h_2}{h_3} \left\{ \left(\mathbf{M}^0 - R_{TE}^r \mathbf{M}^0 \right) \otimes \mathbf{M}'(-h_2) + R_{TE}^l \mathbf{M}^0 \otimes \mathbf{M}'(h_2) \right\}. \quad (2.2.14)$$

Subtraktion dieser Gleichungen ergibt

$$b_{\perp}^{32} R_{TE}^l \mathbf{M}^0 \otimes \mathbf{M}'(h_2) = - \left[b_{\perp}^{32} \mathbf{M}^0 \otimes \mathbf{M}'(-h_2) + a_{\perp}^{32} R_{TE}^r \mathbf{M}^0 \otimes \mathbf{M}'(-h_2) \right], \quad (2.2.15)$$

wobei

$$a_{\perp}^{32} := h_3 + h_2 \quad \text{und} \quad b_{\perp}^{32} := h_3 - h_2 \quad (2.2.16)$$

gelten.

Zusammen mit Gleichung (2.2.11) kann man nun R_{TE}^r bestimmen und schließlich T_{TE}^r berechnen, wobei man dafür den Ausdruck

$$T_{TE}^r \mathbf{M}^0 \otimes \mathbf{M}'(-h_2) = - \frac{2h_2}{b_{\perp}^{32}} R_{TE}^r \mathbf{M}^0 \otimes \mathbf{M}'(-h_2) \quad (2.2.17)$$

verwenden kann, der durch Addition der obigen Gleichungen (2.2.13) und (2.2.14) folgt. Die beiden Gleichungen (2.2.11) und (2.2.15) können also nach R_{TE}^r aufgelöst werden. Man erhält

$$R_{TE}^r \mathbf{M}^0 \otimes \mathbf{M}'(-h_2) = \frac{b_{\perp}^{32}}{C_{\perp}} \left[b_{\perp}^{12} e^{ih_2 d} \mathbf{M}^0 \otimes \mathbf{M}'(h_2) - a_{\perp}^{12} e^{-ih_2 d} \mathbf{M}^0 \otimes \mathbf{M}'(-h_2) \right] \quad (2.2.18)$$

mit

$$C_{\perp} := a_{\perp}^{12} a_{\perp}^{32} e^{-ih_2 d} - b_{\perp}^{12} b_{\perp}^{32} e^{ih_2 d}. \quad (2.2.19)$$

Damit lässt sich der Transmissionskoeffizient aus (2.2.17) bestimmen und man bekommt

$$\begin{aligned} T_{TE}^r \mathbf{M}^0 \otimes \mathbf{M}'(-h_2) &= -\frac{2h_2}{b_{\perp}^{32}} R_{TE}^r \mathbf{M}^0 \otimes \mathbf{M}'(-h_2) \\ &= \frac{2h_2}{C_{\perp}} \left[a_{\perp}^{12} e^{-ih_2 d} \mathbf{M}^0 \otimes \mathbf{M}'(-h_2) - b_{\perp}^{12} e^{ih_2 d} \mathbf{M}^0 \otimes \mathbf{M}'(h_2) \right]. \end{aligned} \quad (2.2.20)$$

Benutzt man zusätzlich die Eigenschaft der Vektorwellenfunktion \mathbf{M} , dass

$$\mathbf{M}(h_3) = \mathbf{M}^0 e^{ih_3 z}, \quad (2.2.21)$$

erhält man die endgültige Formulierung für den Transmissionskoeffizienten der TE-Moden:

$$\begin{aligned} T_{TE}^r \mathbf{M}(h_3) \otimes \mathbf{M}'(-h_2) &= \frac{2h_2}{C_{\perp}} \left[a_{\perp}^{12} e^{-ih_2 d} \mathbf{M}(h_3) \otimes \mathbf{M}'(-h_2) \right. \\ &\quad \left. - b_{\perp}^{12} e^{ih_2 d} \mathbf{M}(h_3) \otimes \mathbf{M}'(h_2) \right]. \end{aligned} \quad (2.2.22)$$

Analog zu dieser Rechnung kann man den entsprechenden Ausdruck für die TM-Moden bekommen. Führt man eine ähnliche Prozedur unter Benutzung von \mathbf{N}^0 aus Gl. (2.2.5) und (2.2.6) mit den richtigen Randbedingungen für die TM-Moden aus, erhält man

$$\begin{aligned} T_{TM}^r \mathbf{N}(h_3) \otimes \mathbf{N}'(-h_2) &= \frac{2h_2 k_2}{k_3 C_{\parallel}} \left[a_{\parallel}^{12} e^{-ih_2 d} \mathbf{N}(h_3) \otimes \mathbf{N}'(-h_2) \right. \\ &\quad \left. - b_{\parallel}^{12} e^{ih_2 d} \mathbf{N}(h_3) \otimes \mathbf{N}'(h_2) \right], \end{aligned} \quad (2.2.23)$$

wobei in diesem Fall

$$C_{\parallel} := a_{\parallel}^{12} a_{\parallel}^{32} e^{-ih_2 d} - b_{\parallel}^{12} b_{\parallel}^{32} e^{ih_2 d} \quad (2.2.24)$$

und

$$\begin{aligned} a_{\parallel}^{32} &:= h_3 \frac{\epsilon_2}{\epsilon_3} + h_2, & a_{\parallel}^{12} &:= h_1 \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} + h_2, \\ b_{\parallel}^{32} &:= h_3 \frac{\epsilon_2}{\epsilon_3} - h_2, & b_{\parallel}^{12} &:= h_1 \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - h_2 \end{aligned} \quad (2.2.25)$$

gelten.

Es ist nun ein Leichtes, die Greensche Funktion im Gebiet IV , also im Medium 3 anzugeben, indem man (2.2.22) und (2.2.23) in Gleichung (2.2.4) einsetzt. Für die

elektrische Greensche Funktion ergibt sich damit

$$\begin{aligned}
\mathbb{G}_{IV}^E &= \frac{i}{4\pi} \int d\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2 - \delta_{n,0})}{\lambda h_2} \left\{ T_{TE}^r \mathbf{M}_{\pm n\lambda}(h_3) \otimes \mathbf{M}'_{\pm n\lambda}(-h_2) \right. \\
&\quad \left. + T_{TM}^r \mathbf{N}_{\pm n\lambda}(h_3) \otimes \mathbf{N}'_{\pm n\lambda}(-h_2) \right\} \\
&= \frac{i}{2\pi} \int d\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2 - \delta_{n,0})}{\lambda} \left\{ \frac{1}{C_{\perp}} \left[a_{\perp}^{12} e^{-ih_2 d} \mathbf{M}_{\pm n\lambda}(h_3) \otimes \mathbf{M}'_{\pm n\lambda}(-h_2) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - b_{\perp}^{12} e^{ih_2 d} \mathbf{M}_{\pm n\lambda}(h_3) \otimes \mathbf{M}'_{\pm n\lambda}(h_2) \right] + \parallel\text{-Anteil} \right\}.
\end{aligned}$$

Aus der elektrischen dyadischen Greenschen Funktion (2.2.26) kann sofort durch Bildung der Rotation nach Gl. (1.1.8) die magnetische dyadische Greensche Funktion bestimmt werden. Man erhält

$$\begin{aligned}
\mathbb{G}_{IV}^H &= \frac{1}{i\omega\mu_0} \nabla \times \mathbb{G}_{IV}^E \\
&= \frac{k_3}{2\pi\omega\mu_0} \int d\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2 - \delta_{n,0})}{\lambda} \left\{ \frac{1}{C_{\perp}} \left[a_{\perp}^{12} e^{-ih_2 d} \mathbf{N}_{\pm n\lambda}(h_3) \otimes \mathbf{M}'_{\pm n\lambda}(-h_2) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - b_{\perp}^{12} e^{ih_2 d} \mathbf{N}_{\pm n\lambda}(h_3) \otimes \mathbf{M}'_{\pm n\lambda}(h_2) \right] + \parallel\text{-Anteil} \right\}, \quad (2.2.26)
\end{aligned}$$

da $\nabla \times \mathbf{M}(h_i) = k_i \mathbf{N}(h_i)$ gilt. Mithilfe dieser dyadischen Greenschen Funktionen lassen sich nun wieder die Korrelationsfunktionen der Feldgrößen bestimmen. Da wie im Fall der Halbraumgeometrie wieder die propagierenden und evaneszenten Moden untersucht werden sollen, werden nun der Poynting-Vektor und die Energiedichte im Bereich IV bestimmt.

2.3 Die propagierenden Moden

Um die z -Komponente des Poynting-Vektors aus Gl. (1.6.1),

$$\langle S_z \rangle = \epsilon_{\alpha\beta z} \langle E_{\alpha} H_{\beta} \rangle, \quad (2.3.1)$$

mit der entsprechenden Korrelationsfunktion in Gl. (1.1.13) zu bestimmen, muss zunächst das Volumenintegral über das Produkt der elektrischen und magnetischen

Greenschen Funktion

$$\begin{aligned}
\int d^3 r' \mathbf{G}_{IV}^E \overline{\mathbf{G}_{IV}^H}^t + \text{c.c.} &= \frac{i\bar{k}_3}{(2\pi)^2 \omega \mu_0} \int d\lambda \int d\lambda' \sum_{n,n'} \frac{(2 - \delta_{n,0})(2 - \delta_{n',0})}{\lambda \lambda'} \left\{ \frac{1}{|C_\perp|^2} \left[\right. \right. \\
&|a_\perp^{12}|^2 e^{2h_2'' d} \mathbf{M}(h_3) \otimes \overline{\mathbf{N}}(h_3) \int d^3 r' \mathbf{M}'(-h_2) \overline{\mathbf{M}}'(-h_2) \\
&+ |b_\perp^{12}|^2 e^{-2h_2'' d} \mathbf{M}(h_3) \otimes \overline{\mathbf{N}}(h_3) \int d^3 r' \mathbf{M}'(h_2) \overline{\mathbf{M}}'(h_2) \\
&- (a_\perp^{12} \overline{b_\perp^{12}} e^{-2ih_2' d} \mathbf{M}(h_3) \otimes \overline{\mathbf{N}}(h_3) \int d^3 r' \mathbf{M}'(-h_2) \overline{\mathbf{M}}'(h_2) \\
&- b_\perp^{12} \overline{a_\perp^{12}} e^{2ih_2' d} \mathbf{M}(h_3) \otimes \overline{\mathbf{N}}(h_3) \int d^3 r' \mathbf{M}'(h_2) \overline{\mathbf{M}}'(-h_2)) \left. \right] \\
&+ \|\text{-Anteil}\} + \text{c.c.}
\end{aligned} \tag{2.3.2}$$

bekannt sein. Die Integrale über die Quellen innerhalb der dielektrischen Platte bei \mathbf{r}' ergeben (vgl. [10]) diesmal

$$\begin{aligned}
\int_{-d < z' < 0} d^3 r' \mathbf{M}'(-h_2) \cdot \overline{\mathbf{M}}'(-h_2) &= \pi \lambda \delta(\lambda - \lambda') (1 + \delta_{n,0}) \delta_{n,n'} \frac{1}{2h_2''} (1 - e^{-2h_2'' d}), \\
\int_{-d < z' < 0} d^3 r' \mathbf{M}'(h_2) \cdot \overline{\mathbf{M}}'(h_2) &= \pi \lambda \delta(\lambda - \lambda') (1 + \delta_{n,0}) \delta_{n,n'} \frac{1}{2h_2''} (e^{2h_2'' d} - 1), \\
\int_{-d < z' < 0} d^3 r' \mathbf{M}'(-h_2) \cdot \overline{\mathbf{M}}'(h_2) &= \pi \lambda \delta(\lambda - \lambda') (1 + \delta_{n,0}) \delta_{n,n'} \frac{1}{2ih_2'} (e^{2ih_2' d} - 1), \\
\int_{-d < z' < 0} d^3 r' \mathbf{M}'(h_2) \cdot \overline{\mathbf{M}}'(-h_2) &= \pi \lambda \delta(\lambda - \lambda') (1 + \delta_{n,0}) \delta_{n,n'} \frac{1}{2ih_2'} (1 - e^{-2ih_2' d}),
\end{aligned} \tag{2.3.3}$$

da sich das Volumen von Medium 2 in z -Richtung nur von $-d$ bis 0 erstreckt. Für den Fall $d \rightarrow \infty$ bekommt man wieder die entsprechenden Integrale aus Gln. (1.4.12). Damit erhält man für das Quellenintegral

$$\begin{aligned}
\int d^3 r' \mathbf{G}_{IV}^E \overline{\mathbf{G}_{IV}^H}^t + \text{c.c.} &= \frac{i\bar{k}_3}{8\pi \omega \mu_0} \int d\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(2 - \delta_{n,0})}{\lambda} \left\{ \frac{\mathbf{M}(h_3) \otimes \overline{\mathbf{N}}(h_3)}{|C_\perp|^2} \left[\right. \right. \\
&\frac{1}{h_2''} \{ |a_\perp^{12}|^2 e^{2h_2'' d} (1 - e^{-2h_2'' d}) + |b_\perp^{12}|^2 e^{-2h_2'' d} (e^{2h_2'' d} - 1) \} \\
&- \frac{1}{ih_2'} \{ a_\perp^{12} \overline{b_\perp^{12}} e^{-2ih_2' d} (e^{2ih_2' d} - 1) + b_\perp^{12} \overline{a_\perp^{12}} e^{2ih_2' d} (1 - e^{-2ih_2' d}) \} \left. \right] \\
&+ \|\text{-Anteil}\} + \text{c.c.}
\end{aligned} \tag{2.3.4}$$

In der betrachteten Schichtgeometrie herrscht wieder Translationsinvarianz bzgl. der Ebenen senkrecht zur z -Achse, sodass es auf diesen Ebenen keinen ausgezeichneten Punkt gibt. Wählt man daher als Beobachtungspunkt $r = 0$, so vereinfachen

sich die Ausdrücke in Gl. (2.3.4) wieder stark. Da nun

$$\begin{aligned}
\epsilon_{\alpha\beta z} \left(\mathbf{M}(h_i) \otimes \overline{\mathbf{N}}(h_j) \Big|_{r=0} \right)_{\alpha\beta} &= \left(\mathbf{M}_r(h_i) \overline{\mathbf{N}}_\varphi(h_j) - \mathbf{M}_\varphi(h_i) \overline{\mathbf{N}}_r(h_j) \right) \Big|_{r=0} \\
&= -\frac{i\overline{h}_j}{k_j} e^{i(h_i - \overline{h}_j)z} \left[\left(\frac{\partial J_n(\lambda r)}{\partial r} \right)^2 + \frac{n^2 J_n^2(\lambda r)}{r^2} \right] \Big|_{r=0} \\
&= -\frac{i\overline{h}_j}{2k_j} e^{i(h_i - \overline{h}_j)z} \lambda^2 \delta_{n,1}
\end{aligned} \tag{2.3.5}$$

und somit

$$\begin{aligned}
\epsilon_{\alpha\beta z} \int d^3 r' \left(\mathbf{G}_{IV}^E \overline{\mathbf{G}_{IV}^H}{}^t \right)_{\alpha\beta} + \text{c.c.} &= \frac{1}{2\pi\omega\mu_0} \int d\lambda \lambda h'_3 \left\{ \frac{e^{-2h'_3 z}}{|C_\perp|^2} \left[\frac{1}{h''_2} \{ |a_\perp^{12}|^2 (e^{2h''_2 d} - 1) \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + |b_\perp^{12}|^2 (1 - e^{-2h''_2 d}) \right\} - \frac{1}{ih''_2} \{ a_\perp^{12} \overline{b_\perp^{12}} (1 - e^{-2ih''_2 d}) \right. \\
&\quad \left. \left. + b_\perp^{12} \overline{a_\perp^{12}} (e^{2ih''_2 d} - 1) \right\} \right] + \text{||-Anteil} \left. \right\} \\
&= \frac{1}{2\pi\omega\mu_0} \int d\lambda \lambda h'_3 \left\{ \frac{e^{-2h'_3 z}}{|C_\perp|^2} \left[\frac{1}{h''_2} \{ |a_\perp^{12}|^2 (e^{2h''_2 d} - 1) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - |b_\perp^{12}|^2 (e^{-2h''_2 d} - 1) \right\} + \frac{2}{h'_2} \text{Im} \left(a_\perp^{12} \overline{b_\perp^{12}} (e^{-2ih''_2 d} - 1) \right) \right] \right. \\
&\quad \left. + \text{||-Anteil} \right\},
\end{aligned} \tag{2.3.6}$$

erhält man für den Poynting-Vektor

$$\begin{aligned}
\langle S_r \rangle &= \epsilon_{\alpha\beta z} \int d\omega \frac{\mu_0^2 \omega^3}{\pi} E(\omega, T_2) \frac{2\epsilon_0}{k_0^2} h''_2 h'_2 \int d^3 r' \left(\mathbf{G}_{IV}^E \overline{\mathbf{G}_{IV}^H}{}^t \right)_{\alpha\beta} + \text{c.c.} \\
&= \int d\omega \frac{E(\omega, T_2)}{\pi^2} \int d\lambda \lambda h'_3 \left\{ \frac{e^{-2h'_3 z}}{|C_\perp|^2} \left[h'_2 \{ |a_\perp^{12}|^2 (e^{2h''_2 d} - 1) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - |b_\perp^{12}|^2 (e^{-2h''_2 d} - 1) \right\} + 2h''_2 \text{Im} \left(a_\perp^{12} \overline{b_\perp^{12}} (e^{-2ih''_2 d} - 1) \right) \right] \right. \\
&\quad \left. + \text{||-Anteil} \right\}
\end{aligned} \tag{2.3.7}$$

bzw. in Kurzschreibweise

$$\langle S_r \rangle = \int d\omega \frac{E(\omega, T_2)}{(2\pi)^2} \int d\lambda \lambda e^{-2h'_3 z} (T_\perp^{32} + T_\parallel^{32}), \tag{2.3.8}$$

wobei die Transmissionskoeffizienten durch

$$\begin{aligned}
T_\perp^{32} &= \frac{4\text{Re}(h_3)}{|C_\perp|^2} \left[\text{Re}(h_2) A_\perp + 2\text{Im}(h_2) B_\perp \right] \\
T_\parallel^{32} &= \frac{4\text{Re}(h_3 \overline{\epsilon}_{r3})}{|C_\parallel|^2 |\epsilon_{r3}|^2} \left[\text{Re}(h_2 \overline{\epsilon}_{r2}) A_\parallel + 2\text{Im}(h_2 \overline{\epsilon}_{r2}) B_\parallel \right]
\end{aligned} \tag{2.3.9}$$

gegeben sind und die Beziehungen

$$A = |a^{12}|^2(e^{2h_2''d} - 1) - |b^{12}|^2(e^{-2h_2''d} - 1), \quad (2.3.10)$$

$$B = \text{Im} \left(a^{12} \overline{b^{12}} (e^{-2ih_2'd} - 1) \right), \quad (2.3.11)$$

$$C = a^{12} a^{32} e^{-ih_2d} - b^{12} b^{32} e^{ih_2d} \quad (2.3.12)$$

mit den entsprechenden a_{\perp} , b_{\perp} bzw. a_{\parallel} , b_{\parallel} , also

$$a_{\perp}^{ij} := h_i + h_j, \quad (2.3.13)$$

$$a_{\parallel}^{ij} := h_i \frac{\epsilon_j}{\epsilon_i} + h_j, \quad (2.3.14)$$

$$b_{\perp}^{ij} := h_i - h_j, \quad (2.3.15)$$

$$b_{\parallel}^{ij} := h_i \frac{\epsilon_j}{\epsilon_i} - h_j \quad (2.3.16)$$

gelten. Der Poynting-Vektor hat also die gleiche Struktur wie im Falle des Halbraumes (1.6.11), nur dass die Transmissionskoeffizienten eine kompliziertere Gestalt haben. Zusätzlich sind die Transmissionskoeffizienten wie im Fall des Halbraumes proportional zum Realteil der Wellenzahl h im Beobachtungsmedium, also zu $\text{Re}(h_3)$. Ist $\epsilon_3 = \epsilon_0$, d.h. das Beobachtungsmedium ist das Vakuum, enthält der Poynting-Vektor wieder nur propagierende Moden, da für die evaneszenten Moden mit $\lambda > k_0$ die Wellenzahl $h_3 = h_0 = \sqrt{k_0^2 - \lambda^2}$ rein imaginär wird. Daher verschwinden die Transmissionskoeffizienten in Gl. (2.3.9) für die evaneszenten Moden und der Poynting-Vektor in Gl. (2.3.8) wird abstandsunabhängig. Dieser Fall soll nun im Weiteren betrachtet werden, es gelten daher $\epsilon_3 = \epsilon_0$ und $h_3 = h_0$.

Für sehr dicke Platten, d.h. Platten, deren Dicke d größer als die Skintiefe d_s ist, sollte man das Halbraumergebnis reproduzieren können. Setzt man also $h_2''d \gg 1$, erhält man sowohl für die TE- als auch für die TM-Moden

$$\frac{A}{|C|^2} \approx \frac{1}{|a^{32}|^2} \quad \text{und} \quad \frac{B}{|C|^2} \approx 0. \quad (2.3.17)$$

Dabei ist zu berücksichtigen, dass der Imaginärteil von h_2 stets größer als Null sein muss, sodass die exponentiellen Terme für $d \rightarrow \infty$ verschwinden. Als Konsequenz erhält man für die Transmissionskoeffizienten in den Gln. (2.3.9) die Ausdrücke

$$T_{\perp}^{32} \approx \frac{4\text{Re}(h_3)\text{Re}(h_2)}{|a_{\perp}^{32}|^2} \quad \text{und} \quad T_{\parallel}^{32} \approx \frac{4\text{Re}(h_3)\text{Re}(h_2\bar{\epsilon}_{r2})}{|a_{\parallel}^{32}|^2}. \quad (2.3.18)$$

Diese stimmen exakt mit den Ausdrücken für den Halbraum in (1.6.12) überein, wenn man berücksichtigt, dass in diesem Fall Medium 2 dem Halbraum 1 und Medium 3 dem Halbraum 2 entspricht.

In dem entgegengesetzten Grenzfall $d \ll d_s$ bzw. $h_2''d \ll 1$ führt eine relativ lange, aber elementare Rechnung auf

$$T_{\perp}^{32} \approx \frac{h_3' \epsilon_{r2}'' k_0^2}{|h_3|^2} d, \quad (2.3.19)$$

$$T_{\parallel}^{32} \approx \frac{h_3' \epsilon_{r2}'' d}{|h_3|^2 |\epsilon_{r2}|^2} \left(|h_3|^2 |\epsilon_{r2}|^2 + \lambda^2 \right). \quad (2.3.20)$$

Für Platten sehr viel dünner als die Skintiefe d_s erhält man somit den Poynting-Vektor

$$\langle S_z \rangle \approx \int d\omega \frac{E(\omega, T_2)}{(2\pi)^2} \epsilon''_{r2} k_0^3 d \left(\frac{4}{3} + \frac{2}{3} \frac{1}{|\epsilon_{r2}|^2} \right). \quad (2.3.21)$$

Für Platten mit $d \ll d_s$ ist der Poynting-Vektor daher direkt proportional zur Plattendicke d und geht damit linear mit d gegen Null. Der Poynting-Vektor verhält sich also für die beiden Grenzfälle erwartungsgemäß: Für $d \gg d_s$ erhält man das Halbraumergebnis zurück, wohingegen für $d \ll d_s$ das strahlende Volumen in einer Dimension linear bei Verringerung der Plattendicke abnimmt und damit auch die abgestrahlte Energie pro Einheitsfläche.

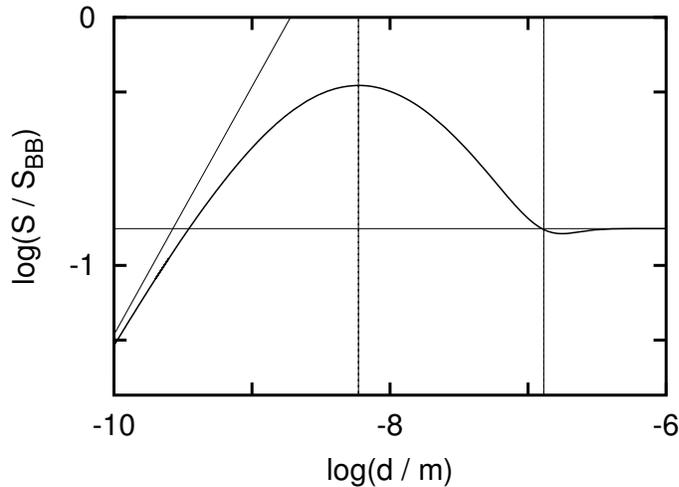


Abbildung 2.2: Plot des Poynting-Vektors $\langle S \rangle$ in Abhängigkeit von der Plattendicke d im Fall von Wismut bei $T_2 = 300 \text{ K}$. Zusätzlich sind die Skintiefe d_s und die Woltersdorff-Dicke d_W aus Gleichung (2.4.17) eingezeichnet, ebenso die Näherung aus Gl. (2.3.21) für dünne Platten.

Nachdem nun geklärt ist, wie sich der Poynting-Vektor für sehr dünne und sehr dicke Platten verhält, muss noch die Frage geklärt werden, ob in dem Übergangsbereich zwischen diesen beiden Grenzfällen noch irgendetwas „Unerwartetes“ passiert. Der Plot des Poynting-Vektors für eine Wismut-Platte mit den Drude-Parametern [38] $\omega_p = 2.3 \cdot 10^{16} \text{ s}^{-1}$ und $\tau = 2.1 \cdot 10^{-16} \text{ s}$ in Abb. 2.2 zeigt, dass für $d \gg d_s$ der Poynting-Vektor der Metallplatte gegen seinen Halbraumwert konvergiert. Für $d \ll d_s$ konvergiert der Poynting-Vektor gegen den in Gl. (2.3.21) angegebenen Wert, allerdings erst für sehr unrealistische Plattendicken.

Bemerkenswert ist, dass für Metalle im Drude-Modell zwischen den beschriebenen Grenzfällen ein Maximum auftritt, dessen Lage explizit angegeben werden kann. Die Lage dieses Maximums ist durch die sogenannte Woltersdorff-Dicke d_W (siehe [53, 54]) gegeben, die in den nächsten Abschnitten aus den gegebenen Formeln abgeleitet werden wird.

Für typische Drude-Metalle wie Aluminium [38] — $\omega_p = 2,4 \cdot 10^{16} \text{ s}^{-1}$ und $\tau = 0,8 \cdot 10^{-14} \text{ s}$ — und Silber (siehe Abb. 2.3) — $\omega_p = 1,4 \cdot 10^{16} \text{ s}^{-1}$ und $\tau = 4 \cdot 10^{-14} \text{ s}$

— liegt dieses Maximum bei sehr viel kleineren Plattendicken, also weit außerhalb des Gültigkeitsbereiches der makroskopischen Elektrodynamik, so dass eine quantitative Übereinstimmung mit dem Experiment nicht zu erwarten ist. Außerdem sind die Materialeigenschaften dünner Schichten von den Materialeigenschaften für ausgedehnte Materialien verschieden [44, 45, 46]. Dennoch kann man erwarten, dass das Phänomen der Zunahme der thermischen Abstrahlung bei verringerten Schichtdicken zumindest qualitativ beobachtbar ist. Tatsächlich haben Absorptionmessungen [55] gezeigt, dass das Absorptionsvermögen für dünne Metallschichten ein Maximum bei der Woltersdorff-Dicke d_W aufweist. Da nach dem Kirchhoffschen Gesetz Absorptionsvermögen und Emissionsvermögen gleich sind, kann das Experiment [55] als eine indirekte Bestätigung des hier abgeleiteten Verhaltens des Poynting-Vektors angesehen werden. Mithilfe der Rytovschen fluktuierenden Elektrodynamik lassen sich also bereits bekannte Ergebnisse reproduzieren.

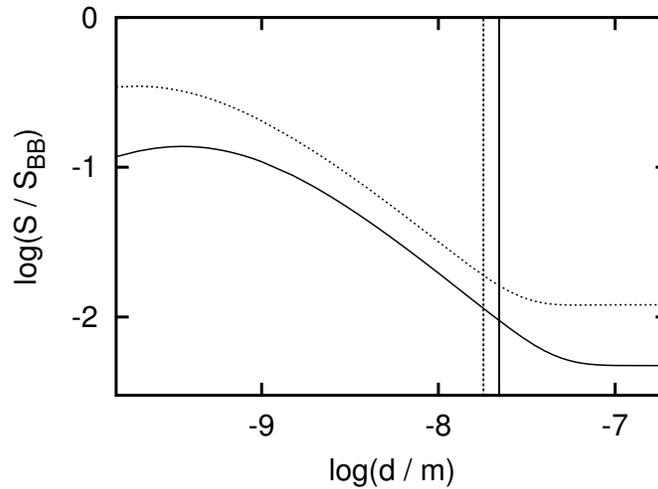


Abbildung 2.3: Plot des Poynting-Vektors $\langle S \rangle$ in Abhängigkeit von der Plattendicke d im Fall von Aluminium (gepunktete Linie) und Silber (durchgezogene Linie) bei $T_2 = 300$ K. Zusätzlich ist die Skintiefe d_s aus Gleichung (2.1.1) eingezeichnet.

2.4 Die evaneszenten Moden

Der Poynting-Vektor enthält für den Fall $h_3 = h_0$ wiederum nur Informationen über den propagierenden Anteil des fluktuierenden Nahfeldes. Um Informationen über den evaneszenten Teil des Nahfeldes zu erhalten, muss wieder die Energiedichte betrachtet werden. Eine Rechnung analog der Berechnung des Poynting-Vektors für die Plattengeometrie ergibt, dass die Energiedichte ebenfalls die Form des Halbraumergebnisses in Gl. (1.7.10),

$$\langle u(z) \rangle = \int d\omega \frac{E(\omega, T_2)}{(2\pi)^2} \int d\lambda \lambda \frac{\lambda_s^2}{2\omega} e^{-2h_3'z} \frac{(T_{\perp}^{32} + T_{\parallel}^{32})}{\text{Re}(h_3)}, \quad (2.4.1)$$

hat, wobei die Transmissionskoeffizienten durch (2.3.9) gegeben sind. Da neben der Plattendicke d und der Skintiefe d_s noch der Beobachtungsabstand z als dritte Längenskala in der Energiedichte auftritt, ist die Bestimmung der Grenzfälle für dünne und dicke Platten hier sehr viel komplizierter als bei den propagierenden Moden. Außerdem ist das Auftreten des Maximums im Poynting-Vektor eng mit den Eigenschaften der Transmissionskoeffizienten T_\perp und T_\parallel und der Woltersdorff-Dicke d_W verbunden, sodass noch eine zusätzliche Längenskala zu beachten ist. Bevor das Maximum im Poynting-Vektor und das Verhalten der Energiedichte für verschiedene Grenzfälle näher untersucht wird, sollen die Transmissionskoeffizienten (2.3.9) auf die Fresnel-Koeffizienten (1.5.6) zurückgeführt werden.

2.4.1 Umformulierung der Transmissionskoeffizienten

In diesem Abschnitt sollen die Transmissionskoeffizienten aus dem letzten Abschnitt (2.3.9) mittels der Fresnelschen Amplitudenreflexionskoeffizienten (1.5.6) ausgedrückt werden, welche durch

$$r^{ij} := \frac{b^{ij}}{a^{ij}} \quad (2.4.2)$$

definiert sind. Diese Formulierung gilt wieder sowohl für die TE- als auch für die TM-Moden, wobei a^{ij} und b^{ij} durch Gleichung (2.3.13) bis (2.3.16) gegeben sind.

Benutzt man diese Definition der Fresnelschen Reflexionskoeffizienten in den Gleichungen (2.3.9), erhält man zunächst

$$T_\perp^{32} = \frac{4h'_3 e^{-2h'_2 d}}{|1 - r_\perp^{12} r_\perp^{32} e^{2ih_2 d}|^2} \left[\frac{\operatorname{Re}(h_2)}{|a_\perp^{32}|^2} \frac{A_\perp}{|a_\perp^{12}|^2} + \frac{2\operatorname{Im}(h_2)}{|a_\perp^{32}|^2} \frac{B_\perp}{|a_\perp^{12}|^2} \right], \quad (2.4.3)$$

$$T_\parallel^{32} = \frac{4h'_3 e^{-2h'_2 d}}{|1 - r_\parallel^{12} r_\parallel^{32} e^{2ih_2 d}|^2} \left[\frac{\operatorname{Re}(h_2 \bar{\epsilon}_{r2})}{|a_\parallel^{32}|^2} \frac{A_\parallel}{|a_\parallel^{12}|^2} + \frac{2\operatorname{Im}(h_2 \bar{\epsilon}_{r2})}{|a_\parallel^{32}|^2} \frac{B_\parallel}{|a_\parallel^{12}|^2} \right] \quad (2.4.4)$$

wobei

$$\begin{aligned} \frac{A}{|a^{12}|^2} &= (e^{2h'_2 d} - 1) - |r^{12}|^2 (e^{-2h'_2 d} - 1), \\ \frac{B}{|a^{12}|^2} &= \operatorname{Im} \left(\bar{r}^{12} (e^{-2ih'_2 d} - 1) \right) \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

gelten.

Bevor man den Ausdruck für die Transmissionskoeffizienten weiter umschreiben kann, ist es unausweichlich, einige Nebenrechnungen zu machen, um die Terme, die den Imaginär- bzw. Realteil von h_2 enthalten, mittels der Fresnel-Koeffizienten anzugeben. Diese Nebenrechnungen werden im Anhang C durchgeführt und man erhält für die TE-Moden

$$\frac{2\operatorname{Im}(h_2)}{|a_\perp^{32}|^2} = \begin{cases} -\operatorname{Im}(r_\perp^{32}) \frac{1}{h_3} & , \lambda < k_0 \\ (1 - |r_\perp^{32}|^2) \frac{1}{2\gamma} & , \lambda > k_0 \end{cases} \quad (2.4.6)$$

und

$$\frac{\operatorname{Re}(h_2)}{|a_\perp^{32}|^2} = \begin{cases} (1 - |r_\perp^{32}|^2) \frac{1}{4h_3} & , \lambda < k_0 \\ \operatorname{Im}(r_\perp^{32}) \frac{1}{2\gamma} & , \lambda > k_0 \end{cases}. \quad (2.4.7)$$

Für die TM-Moden erhält man hingegen

$$\frac{2\text{Im}(h_2\bar{\epsilon}_{r2})}{|a_{\parallel}^{32}|^2} = \begin{cases} -\text{Im}(r_{\parallel}^{32})\frac{1}{h_3} & , \lambda < k_0 \\ (1 - |r_{\parallel}^{32}|^2)\frac{1}{2\gamma} & , \lambda > k_0 \end{cases} \quad (2.4.8)$$

und

$$\frac{\text{Re}(h_2\bar{\epsilon}_{r2})}{|a_{\parallel}^{32}|^2} = \begin{cases} (1 - |r_{\parallel}^{32}|^2)\frac{1}{4h_3} & , \lambda < k_0 \\ \text{Im}(r_{\parallel}^{32})\frac{1}{2\gamma} & , \lambda > k_0 \end{cases}. \quad (2.4.9)$$

Nun kann man die Transmissionskoeffizienten für die TE- und TM-Moden mittels der entsprechenden Fresnel-Koeffizienten r in die gleiche Form bringen. Diesen Vorteil gegenüber der Formulierung in (2.3.9) muss man sich aber durch den Nachteil erkaufen, dass man nun die propagierenden, d.h. $\lambda < k_0$, und evaneszenten Moden, d.h. $\lambda > k_0$, getrennt betrachten muss. Man erhält

$$T_{\text{pr}}^{32} = \frac{1}{|1 - r^{12}r^{32}e^{2ih_2d}|^2} \left[(1 - |r^{32}|^2) f - 4\text{Im}(r^{32}) g \right], \quad (2.4.10)$$

$$T_{\text{ev}}^{32} = \frac{2h'_3}{\gamma} \frac{1}{|1 - r^{12}r^{32}e^{2ih_2d}|^2} \left[\text{Im}(r^{32}) f + (1 - |r^{32}|^2) g \right], \quad (2.4.11)$$

wobei

$$f := \frac{A}{|a^{12}|^2} e^{-2h''_2d} \quad \text{und} \quad g := \frac{B}{|a^{12}|^2} e^{-2h''_2d} \quad (2.4.12)$$

durch die Gleichungen (2.4.5) bestimmt sind.

2.4.2 Transmissionskoeffizienten für verschiedene Grenzfälle

Es sollen nun die Transmissionskoeffizienten für die beiden natürlichen Grenzfälle dicker und dünner Platten untersucht werden, d.h. für Platten sehr viel dicker als die Skintiefe, $d \gg d_s$ bzw. $h''_2d \gg 1$, und für Platten sehr viel dünner als die Skintiefe, $d \ll d_s$ bzw. $h''_2d \ll 1$. Insbesondere soll für den Fall dünner Platten das Maximum für die propagierenden Moden in T_{pr}^{32} bestimmt werden, das zu dem Maximum im Poynting-Vektor in Abb. 2.2 bzw. 2.3 führt. Es wird weiterhin ein entsprechendes Maximum in den Transmissionskoeffizienten T_{ev}^{32} für die evaneszenten Moden abgeleitet.

Der Grenzfall dicker Platten kann nun mit $h''_2d \gg 1$ sofort implementiert werden. Offenbar gelten dann die Beziehungen

$$f \approx 1 \quad \text{und} \quad g \approx 0. \quad (2.4.13)$$

Außerdem gilt

$$|1 - r^{12}r^{32}e^{2ih_2d}|^2 \approx 1, \quad (2.4.14)$$

sodass man schließlich die Transmissionskoeffizienten

$$T_{\text{pr}}^{32} \approx (1 - |r^{32}|^2) \quad \text{und} \quad T_{\text{ev}}^{32} \approx \frac{2\text{Re}(h_3)\text{Im}(r^{32})}{\gamma} \quad (2.4.15)$$

erhält. Das sind erwartungsgemäß genau die Transmissionskoeffizienten für die Halbraumgeometrie in Gl. (1.7.12). Daher bekommt man auch für die Energiedichte für Plattendicken $d \gg d_s$ das Halbraumergebnis zurück.

Im Grenzfall dünner Platten mit Plattendicken unterhalb der Skintiefe d_s kann man für die propagierenden und evaneszenten Moden Dicken angeben, bei denen die Transmissionskoeffizienten maximal sind. Da die Bestimmung dieser maximierenden Dicken aufgrund der Materialeigenschaften relativ kompliziert ist, werden in diesem Abschnitt nur Drude-Metalle betrachtet, für die die Hagen-Rubens-Näherung [58] $\omega \tau \ll 1$ erfüllt ist, sodass diese Materialien durch die Permittivität

$$\epsilon_{r2} \approx 1 - \omega_p^2 \tau^2 + i \frac{\omega_p^2 \tau}{\omega} \quad (2.4.16)$$

beschreibbar sind. Für die propagierenden Moden lässt sich dann für $\lambda = 0$ die sogenannte Woltersdorff-Dicke [53, 54]

$$d_W \approx \frac{2c}{\omega_p^2 \tau} \quad (2.4.17)$$

ableiten. Diese maximierende Dicke gilt gleichermaßen für die TE- als auch für die TM-Moden, was damit zu erklären ist, dass bei normal einfallendem Licht, d.h. $\lambda = 0$, die Reflexionskoeffizienten für die TE- und TM-Moden ineinander übergehen. Für die evaneszenten Moden lassen sich im stark evaneszenten Bereich für $\lambda \gg k_0$ allgemeinere Dicken für die Maxima der Transmissionskoeffizienten herleiten, wobei man in diesem Fall unterschiedliche Werte für die TE- und TM-Moden bekommt, was sich in einem unterschiedlichen Verhalten für die Energiedichtebeiträge der TE- und TM-Moden äußert.

Setzt man also für den Grenzfall dünner Platten $h_2'' d \ll 1$ und noch zusätzlich $h_2' d \ll 1$ voraus, dann gelten unabhängig vom Material und von propagierenden bzw. evaneszenten Moden die beiden Gleichungen

$$f \approx 2h_2'' d (1 + |r^{12}|^2) \quad (2.4.18)$$

und

$$g \approx (1 - 2h_2'' d) \text{Im}(\bar{r}^{12}(-2ih_2' d)) \approx -2h_2' d \text{Re}(r^{12}). \quad (2.4.19)$$

Um nun noch weitere Näherungen anzustellen, benötigt man eine Relation zwischen h_2'' und h_2' . Für die evaneszenten Moden ist klar, dass für $\lambda \gg k_0$ die Wellenzahl im Medium $h_2 \approx i\lambda$ ist. Damit gilt $h_2'' \gg h_2'$ im evaneszenten Bereich. Um eine ähnliche Aussage für die propagierenden Moden zu erhalten, müssen die Materialeigenschaften der Platte berücksichtigt werden. Da in der Hagen-Rubens-Näherung die Permittivität durch Gl. (2.4.16) gegeben ist, gilt wegen $\omega \approx \omega_{\text{th}} \ll \omega_p$ die Beziehung $\epsilon_{r2}'' \gg |\epsilon_{r2}'|$. Mit der Definition $h_2 = \sqrt{k_0^2 \epsilon_{r2} - \lambda^2}$ folgt dann, dass auch $h_2'' \gg h_2'$ im evaneszenten Bereich gilt. Für Drude-Metalle ist also stets $h_2'' \gg h_2'$, sodass

$$f \gg |g| \quad (2.4.20)$$

gilt und zusätzlich auch

$$|1 - r^{12} r^{32} e^{2ih_2 d}|^2 \approx |1 - r^{12} r^{32} (1 - 2h_2'' d)|^2 \quad (2.4.21)$$

erfüllt ist. Man kann also in der Hagen-Rubens-Näherung die Transmissionskoeffizienten für die propagierenden und evaneszenten Moden im Falle $h_2''d \ll 1$ und $h_2'd \ll 1$ angeben als

$$T_{\text{pr}}^{32} \approx \frac{2h_2''d(1 + |r^{12}|^2)(1 - |r^{32}|^2)}{|1 - r^{12}r^{32}(1 - 2h_2''d)|^2}, \quad (2.4.22)$$

$$T_{\text{ev}}^{32} \approx \frac{2h_3' 2h_2''d(1 + |r^{12}|^2)\text{Im}(r^{32})}{\gamma |1 - r^{12}r^{32}(1 - 2h_2''d)|^2}. \quad (2.4.23)$$

Setzt man $\xi := 2h_2''d$, ist leicht zu sehen, dass die Abhängigkeit der Transmissionskoeffizienten von der Plattendicke d bzw. vom Parameter ξ bis auf einen Faktor durch die Funktion

$$F(\xi) := \frac{\xi}{|1 - a(1 - \xi)|^2} = \frac{\xi}{(1 - a'(1 - \xi))^2 + a''^2(1 - \xi)^2} \quad (2.4.24)$$

gegeben ist, wobei $a := r^{12}r^{32}$ gilt.

Es wird nun das Maximum für die propagierenden Moden für den Fall $\lambda = 0$ bestimmt, d.h. es gilt $r_{\perp} = r_{\parallel}$. Damit wird das abgeleitete Maximum von $F(\xi)$ für die TE- und TM-Moden übereinstimmen. Außerdem soll davon ausgegangen werden, dass eine metallische Platte im Vakuum vorliegt, womit $r^{12} = r^{32}$ gilt. Da bei Metallen für die senkrecht einfallenden Moden $|r'| \approx 1$ und $|r''| \ll 1$ gilt, muss auch $a' = r'^2 - r''^2 \approx 1$ und $|a''| = |2ir'r''| \ll 1$ gelten, und man bekommt

$$F^{\text{pr}} \approx \frac{\xi}{\xi^2 + a''^2(1 - \xi)^2}. \quad (2.4.25)$$

Dessen Maximum ist elementar bestimmbar und es ergibt sich $\xi_{\text{max}} \cong |a''|$, sodass

$$d_{\text{max}}^{\text{pr}} \approx \frac{|a''|}{2h_2''} = \frac{|\text{Im}(r^2)|}{2h_2''}. \quad (2.4.26)$$

Diese Plattendicke, bei der die Transmissionskoeffizienten maximal werden, lässt sich leicht angeben, wenn man a'' bzw. $\text{Im}(r^2)$ für $\lambda = 0$, d.h. für senkrecht einfallendes Licht, berechnet. Man erhält für $\lambda = 0$

$$\begin{aligned} r^2 &= \left(\frac{1 - \sqrt{\epsilon_r}}{1 + \sqrt{\epsilon_r}} \right)^2 \\ &= \left(\frac{1 - \sqrt{\epsilon_r}}{1 + \sqrt{\epsilon_r}} \frac{1 + \sqrt{\epsilon_r}}{1 + \sqrt{\epsilon_r}} \right)^2 \\ &= \left(\frac{1 - |\epsilon_r| - 2i\text{Im}(\sqrt{\epsilon_r})}{|\epsilon_r| + 2\text{Re}(\sqrt{\epsilon_r}) + 1} \right)^2, \end{aligned} \quad (2.4.27)$$

sodass

$$a'' \approx -\frac{4\text{Im}(\sqrt{\epsilon_r})(1 - |\epsilon_r|)}{(|\epsilon_r| + 2\text{Re}(\sqrt{\epsilon_r}) + 1)^2} \approx \frac{4\text{Im}(\sqrt{\epsilon_r})}{\epsilon_r''} \quad (2.4.28)$$

ist, wobei im letzten Schritt wieder die Eigenschaft der Drude-Metalle genutzt wurde, dass $|\epsilon_r| \gg 1$ und $|\epsilon_r| \approx \epsilon_r'' \gg \text{Re}(\sqrt{\epsilon_r})$ gelten. Somit kann man die Plattendicke für

das gesuchte Maximum unter Berücksichtigung der Tatsache, dass $h_2 = k_0\sqrt{\epsilon_r}$ für $\lambda = 0$ ist, angeben als

$$d_{\max}^{\text{pr}} \approx \frac{4\text{Im}\sqrt{\epsilon_r}}{2h_2''\epsilon_r''} \approx \frac{2}{k_0\epsilon_r''} = \frac{2c}{\omega_p^2\tau}. \quad (2.4.29)$$

Damit hat man die Woltersdorff-Dicke d_W aus Gleichung (2.4.17) für sehr dünne Drude-Metalle in der Hagen-Rubens-Näherung abgeleitet. Setzt man beispielsweise $\omega_p = 2,3 \cdot 10^{16} \text{ s}^{-1}$ und $\tau = 2,1 \cdot 10^{-16} \text{ s}$ — die Drude-Parameter für Wismut [38] — ein, bekommt man $d_W \approx 5,4 \cdot 10^{-9} \text{ m}$ für die Dicke, bei der die Transmissionskoeffizienten für die propagierenden Moden maximal werden. Dieses Maximum ist in recht guter Übereinstimmung mit dem Maximum für den Poynting-Vektor in Abb. 2.2. Eine experimentelle Bestätigung für solch ein Maximum findet man bei [55].

Da die Transmissionskoeffizienten auch für die evaneszenten Moden bekannt sind, ist es möglich, eine maximierende Dicke wie die Woltersdorff-Dicke im evaneszenten Bereich zu bestimmen. Die Bestimmung der Maxima für die Transmissionskoeffizienten muss allerdings für die TM- und TE-Moden getrennt durchgeführt werden, da die Fresnel-Koeffizienten im stark evaneszenten Bereich mit $\lambda \gg k_0$ sehr unterschiedlich sind. Es ist bekannt, dass man in diesem Bereich [59] die Fresnel-Koeffizienten durch

$$r_{\parallel} \approx \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} \quad \text{und} \quad r_{\perp} \approx \frac{k_0^2 \epsilon_r - 1}{\lambda^2 \frac{4}{\epsilon_r}} \quad (2.4.30)$$

approximieren kann.

Für die TM-Moden lassen sich im Bereich der Hagen-Rubens-Näherung mit $\omega \ll \omega_p$ (siehe Anhang C) die Relationen

$$\text{Im}(r_{\parallel}^2) \approx 4 \frac{\omega}{\omega_p^2 \tau} \ll 1 \quad \text{und} \quad \text{Re}(r_{\parallel}^2) \approx 1 \quad (2.4.31)$$

ableiten. Damit gelten wieder die Beziehungen $|a''| \ll 1$ und $a' \approx 1$, sodass man die gleiche Approximation für $F(\xi)$ wie im Bereich der propagierenden Moden bekommt. Daher kann man für die evaneszenten TM-Moden die maximierende Dicke mit Gl. (2.4.26) sofort angeben, und bekommt

$$d_{\parallel}^{\text{ev}} \approx \frac{\text{Im}(r_{\parallel}^2)}{2h_2''}. \quad (2.4.32)$$

Mit Gl. (2.4.31) und der Näherung $h_2'' \approx \lambda$ für $\lambda \gg k_0$ hat man schließlich

$$d_{\parallel}^{\text{ev}} \approx \frac{2\omega}{\omega_p^2 \tau} \frac{1}{\lambda}. \quad (2.4.33)$$

In Abb. 2.4 sieht man die sehr gute Übereinstimmung der Lage des Maximums von $F(\xi)$ aus Gl. (2.4.24) für $a = r_{\parallel}$ mit der abgeleiteten Größe d_{\parallel} aus Gl. (2.4.32).

Um eine Dicke für die spektrale Energiedichte angeben zu können, muss außerdem noch berücksichtigt werden, dass der Integrand in der Energiedichte in Gl. (2.4.1) für das λ -Integral im stark evaneszenten Bereich im Wesentlichen durch $\lambda^2 \exp(-2\lambda z) F(\xi)$ bestimmt ist, wobei der Abstand z der Beobachtungsabstand

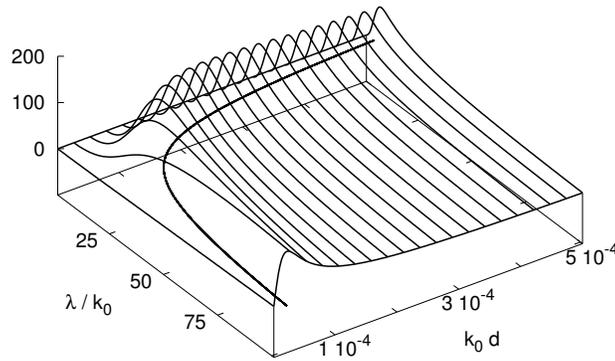


Abbildung 2.4: Plot der Funktion $F(\xi)$ aus Gl. (2.4.24) mit der Wahl $a = r_{\parallel}^2$ in Abhängigkeit von den dimensionslosen Größen λ/k_0 und $k_0 d$ für $\omega = 10^{14} \text{ s}^{-1}$, der thermischen Frequenz bei $T = 300 \text{ K}$. Als Materialparameter dienen die Drude-Parameter von Wismut. Zusätzlich ist noch die Lage des Maximums aus Gleichung (2.4.32) geplottet.

oberhalb der Platte ist. Die Hauptbeiträge dieses Integranden liegen bei $\lambda \approx z^{-1}$, sodass man das Maximum für die spektrale Energiedichte $\rho_{\parallel}(\omega, d, z)$ sofort durch

$$d_{\parallel}^{\text{ev}} \approx \frac{2\omega z}{\omega_p^2 \tau} \quad (2.4.34)$$

abschätzen kann.

In Abb. 2.5 ist $\rho_{\parallel}(\omega, d)$ für Wismut, d.h. $\omega_p = 2,3 \cdot 10^{16} \text{ s}^{-1}$ und $\tau = 2,1 \cdot 10^{-16} \text{ s}$, bei $z = 10^{-6} \text{ m}$ in Abhängigkeit von der Plattendicke d abgebildet. Außerdem findet man in der Abbildung Graphen für verschieden gewählte Frequenzen ω . Man sieht ziemlich gut das ausgeprägte Maximum bei $d_{\parallel}^{\text{ev}}$ aus Gl. (2.4.32). Offensichtlich bewegt sich das Maximum für $\omega \rightarrow 0$ zu $d \rightarrow 0$. Dieses Verhalten wird später in einem gesonderten Abschnitt genauer untersucht und führt auf ein universelles Potenzgesetz für die Energiedichte dünner Drude-Platten.

Nachdem nun die maximierende Dicke für die evaneszenten TM-Moden bestimmt ist, soll die entsprechende Dicke für die TE-Moden in der Hagen-Rubens-Näherung abgeleitet werden. Im stark evaneszenten Bereich gelten für die TE-Moden (siehe Anhang C) die Relationen

$$\text{Im}(r_{\perp}^2) \approx 2\omega\tau \text{Re}(r_{\perp}^2) \quad \text{und} \quad \text{Re}(r_{\perp}^2) \approx -\frac{k_0^4}{\lambda^4} \frac{1}{16} \left(\frac{\omega_p^2 \tau}{\omega} \right)^2. \quad (2.4.35)$$

Für die TE-Moden gilt somit in der Hagen-Rubens-Näherung $|a'| \gg |a''|$, sodass

$$F(\xi) \approx \frac{\xi}{1 + 2a'(\xi - 1) + a'^2(\xi - 1)^2} \quad (2.4.36)$$

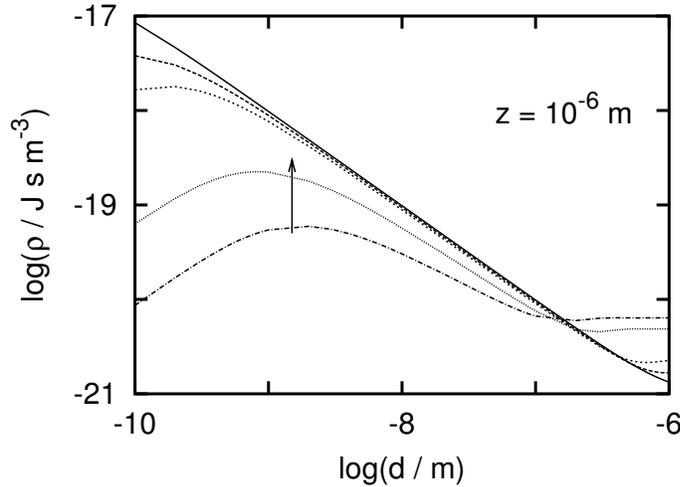


Abbildung 2.5: Plot der spektralen Energiedichte $\rho_{\parallel}(\omega, d)$ für die Platte im Fall von Wismut bei $T = 300$ K in Abhängigkeit von der Plattendicke d für verschiedene Frequenzen $\omega = 10^{14} \text{ s}^{-1}, 5 \cdot 10^{13} \text{ s}^{-1}, 10^{13} \text{ s}^{-1}, \dots$, wobei der Pfeil die Richtung anzeigt, in die sich die Graphen zu kleineren Frequenzen hin bewegen.

ist. Das Maximum dieser Funktion kann man wieder elementar bestimmen und man erhält

$$\xi_{\max} = \left| \frac{a' - 1}{a'} \right|, \quad (2.4.37)$$

womit die Plattendicke, bei der der Beitrag der evaneszenten TE-Moden maximal wird, durch

$$d_{\perp}^{\text{ev}} \approx \frac{1}{2h_2''} \left| \frac{\text{Re}(r_{\perp}^2) - 1}{\text{Re}(r_{\perp}^2)} \right| \quad (2.4.38)$$

angegeben werden kann, da $a' = \text{Re}(r_{\perp}^2)$ ist. Setzt man $\text{Re}(r_{\perp}^2)$ mit $|\text{Re}(r_{\perp}^2)| \ll 1$ aus Gleichung (2.4.35) ein, bekommt man schließlich mit $h_2'' \approx \lambda$

$$k_0 d_{\perp}^{\text{ev}} \approx 8 \left(\frac{\omega}{\omega_p^2 \tau} \right)^2 \left(\frac{\lambda}{k_0} \right)^3 \quad (2.4.39)$$

im stark evaneszenten Bereich, in dem $\lambda \gg k_0$ gilt.

In Abb. 2.6 findet man einen Plot der Funktion $F(\xi)$ aus Gl. (2.4.24) für das Drude-Metall Wismut mit $a = r_{\perp}^2$. Man sieht das ausgeprägte Maximum bzgl. $k_0 d$ und λ/k_0 , das im stark evaneszenten Bereich in guter Übereinstimmung mit d_{\perp}^{ev} aus Gleichung (2.4.38) ist.

Da genau wie bei den evaneszenten TM-Moden das λ -Integral für die Energiedichte in Gl. (2.4.1) im stark evaneszenten Nahfeld durch Werte bei $\lambda \approx z^{-1}$ dominiert ist, kann die maximierende Plattendicke diesmal durch

$$d_{\perp}^{\text{ev}} \approx \frac{8}{k_0} \left(\frac{\omega}{\omega_p^2 \tau} \right)^2 \left(\frac{1}{k_0 z} \right)^3 \quad (2.4.40)$$

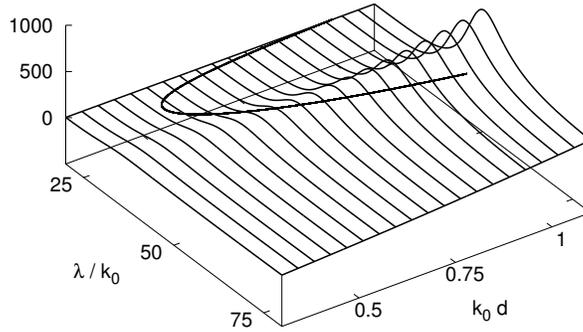


Abbildung 2.6: Plot der Funktion $F(\xi)$ aus Gl. (2.4.24) mit der Wahl $a = r_{\perp}^2$ in Abhängigkeit von den dimensionslosen Größen λ/k_0 und k_0d für $\omega = 10^{14} \text{ s}^{-1}$, der thermischen Frequenz bei $T = 300 \text{ K}$. Als Materialparameter dienen die Drude-Parameter von Wismut. Zusätzlich ist noch die Lage des Maximums aus Gleichung (2.4.38) geplottet.

abgeschätzt werden. Der wesentliche Unterschied zu $d_{\parallel}^{\text{ev}}$ besteht nun darin, dass $d_{\perp}^{\text{ev}} \propto \omega^{-2}z^{-3}$ ist, wohingegen $d_{\parallel}^{\text{ev}} \propto (\omega z)$ ist. Betrachtet man den Plot der spektralen Energiedichte $\rho_{\perp}(\omega, d)$ bei $z = 10^{-6} \text{ m}$ in Abb. 2.7, sieht man wiederum ein ausgeprägtes Maximum, das gut durch die Größe d_{\perp}^{ev} aus Gleichung (2.4.38) an der Stelle $\lambda = z^{-1}$ anzugeben ist. Für Frequenzen $\omega \rightarrow 0$ wandert dieses Maximum zu $d \rightarrow \infty$. Die Näherung für den stark evaneszenten Bereich aus Gleichung (2.4.40) ist dagegen eher schlecht, was daran liegt, dass der TE-Moden-Anteil der Energiedichte bei $z = 10^{-6} \text{ m}$ noch nicht das Verhalten des stark evaneszenten Bereiches zeigt. Das qualitative Verhalten — die Proportionalität $d_{\perp}^{\text{ev}} \propto \omega^{-2}z^{-3}$ — wird dennoch von Gl. (2.4.40) richtig beschrieben.

2.4.3 Abstandsabhängigkeit der Energiedichte

Es soll nun die genaue Abstandsabhängigkeit der Energiedichte untersucht werden, wobei neben der Plattendicke d als Längenskala vor allem der Beobachtungsabstand z als zweite Längenskala zu berücksichtigen ist.

Der Ausgangspunkt für diese Untersuchung ist der Ausdruck der Energiedichte aus Gl. (2.4.1) für die evaneszenten Moden,

$$\langle u^{\text{ev}} \rangle = \int_0^{\infty} d\omega \frac{E(\omega, T_2)}{(2\pi)^2} \int_{k_0}^{\infty} d\lambda \frac{\lambda^3 T_{\text{ev}}^{32}}{\omega h_3'} e^{-2\gamma z}, \quad (2.4.41)$$

wobei T_{ev}^{32} in Gl. (2.4.11) gegeben ist. Führt man die Variablentransformation $y := \lambda z$ aus und setzt die Bedingung für das evaneszente Nahfeld $k_0 z \ll 1$ voraus, erhält man

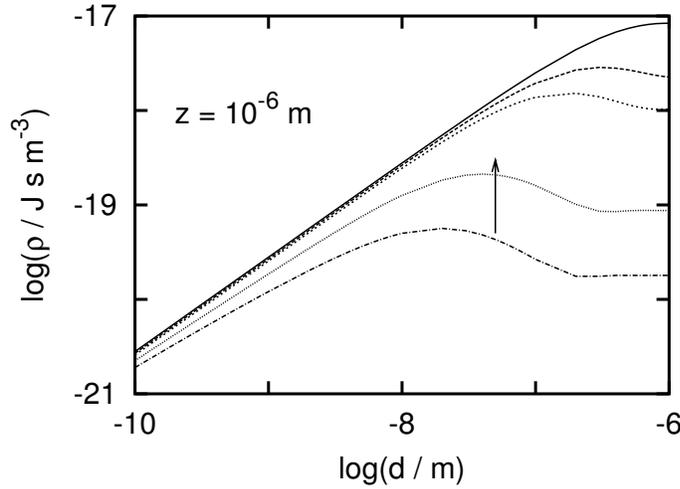


Abbildung 2.7: Plot der spektralen Energiedichte $\rho_{\perp}(\omega, d)$ für die Platte im Fall von Wismut bei $T = 300$ K in Abhängigkeit von der Plattendicke d für verschiedene Frequenzen $\omega = 10^{14} \text{ s}^{-1}, 5 \cdot 10^{13} \text{ s}^{-1}, 10^{13} \text{ s}^{-1}, \dots$, wobei der Pfeil die Richtung anzeigt, in die sich die Graphen zu kleineren Frequenzen hin bewegen.

wegen

$$h_2 \approx i \frac{y}{z} \quad \text{und} \quad \gamma \approx \frac{y}{z} \quad (2.4.42)$$

die Beziehungen

$$g \approx 0 \quad \text{und} \quad f = (1 - e^{-2y\frac{d}{z}}) + |r^{12}|^2 (e^{-2y\frac{d}{z}} - e^{-4y\frac{d}{z}}), \quad (2.4.43)$$

sodass

$$\begin{aligned} \langle u^{\text{ev}} \rangle \approx & \frac{2}{z^3} \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\omega} \frac{E(\omega, T_2)}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} dy y^2 \frac{\text{Im}(r^{32}) e^{-2y}}{|1 - r^{12} r^{32} e^{-2y\frac{d}{z}}|^2} \\ & \times \left[(1 - e^{-2y\frac{d}{z}}) + |r^{12}|^2 (e^{-2y\frac{d}{z}} - e^{-4y\frac{d}{z}}) \right] \end{aligned} \quad (2.4.44)$$

ist, wobei aufgrund der Bose-Einstein-Funktion im Frequenzintegral die Bedingung $k_0 z \ll 1$ mit $z \ll \lambda_{\text{th}}$ gleichbedeutend ist. Der Beobachtungsabstand z muss also kleiner sein als die charakteristische thermische Wellenlänge

$$\lambda_{\text{th}} = \frac{\hbar c}{k_B T_2}, \quad (2.4.45)$$

die bei $T_2 = 300$ K einen Wert von $7,2 \cdot 10^{-6}$ m annimmt. Im evaneszenten Nahfeld ist diese Bedingung sehr gut erfüllt. Die Entwicklung in Gl. (2.4.44) ist noch sehr allgemein und es erscheint in natürlicher Weise das Verhältnis von d und z , sodass sich die beiden Grenzfälle $d \ll z$ und $d \gg z$ anbieten.

Betrachtet man zuerst den Grenzfall $d \gg z$, dann erhält man sofort

$$\langle u^{\text{ev}} \rangle \approx \frac{2}{z^3} \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\omega} \frac{E(\omega, T_2)}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} dy y^2 \text{Im}(r^{32}) e^{-2y}. \quad (2.4.46)$$

Die Energiedichte oberhalb einer dielektrischen Platte mit $z \ll d$ stimmt also mit der Energiedichte oberhalb eines Halbraumes in Gl. (1.7.13) überein. Mit anderen Worten: Beobachtet man die Energiedichte oberhalb einer Platte bei Abständen, die kleiner als die Plattendicke sind, erscheint die Platte wie ein Halbraum. Dieses Ergebnis ist physikalisch sehr plausibel, da im stark evaneszenten Nahfeld $\gamma \approx \lambda$ gilt, und somit bei gegebenem Abstand z im Wesentlichen nur die Wellenzahlen $\lambda \approx z^{-1}$ zur Energiedichte in Gl. (2.4.41) beitragen. Bei Abständen $z \ll d$ ist das Nahfeld daher durch Wellenlängen der Größenordnung z bestimmt, die selbst keine Information über die Plattendicke d enthalten können. Dementsprechend ist in diesem Abstandsbereich keine Abweichung vom Halbraumergebnis beobachtbar.

Für Drude-Materialien können die bereits abgeleiteten Ergebnisse

$$\text{Im}(r_{\perp}^{32}) \approx \frac{k_0^2 \epsilon_{r2}''}{\lambda^2 4} \approx \frac{z^2 k_0^2 \omega_p^2 \tau}{y^2 4\omega}, \quad (2.4.47)$$

$$\text{Im}(r_{\parallel}^{32}) \approx \frac{2\epsilon_{r2}''}{|\epsilon_{r2} + 1|^2} \approx \frac{2\omega}{\omega_p^2 \tau} \quad (2.4.48)$$

aus den Gleichungen (2.4.31) und (2.4.35) verwendet werden und man erhält dann für die Energiedichte im Nahfeldbereich (vgl. mit Gln. (1.7.18))

$$\langle u_{\perp}^{\text{ev}} \rangle \approx \frac{1}{4c^2 z} \int d\omega \frac{E(\omega, T_2)}{(2\pi)^2} \omega \epsilon_{r2}'' \approx \frac{1}{96c^2 z} \frac{(k_B T_2)^2}{\hbar} \omega_p^2 \tau, \quad (2.4.49)$$

$$\langle u_{\parallel}^{\text{ev}} \rangle \approx \frac{1}{z^3} \int d\omega \frac{E(\omega, T_2)}{(2\pi)^2} \frac{1}{\omega} \frac{\epsilon_{r2}''}{|\epsilon_{r2} + 1|^2} \approx \frac{1}{24z^3} \frac{(k_B T_2)^2}{\hbar} \frac{1}{\omega_p^2 \tau}, \quad (2.4.50)$$

wobei der erste Ausdruck in der jeweiligen Gleichung allgemein gilt und der letzte für Drude-Metalle in der Hagen-Rubens-Näherung richtig ist.

Für den entgegengesetzten Grenzfall $z \gg d$ findet man zunächst den allgemeinen Ausdruck

$$\langle u^{\text{ev}} \rangle \approx \frac{2}{z^3} \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\omega} \frac{E(\omega, T_2)}{(2\pi)^2} \int dy y^2 \frac{\text{Im}(r^{32}) e^{-2y}}{|1 - r^{12} r^{32} (1 - 2y \frac{d}{z})|^2} \left[2y \frac{d}{z} (1 + |r^{12}|^2) \right]. \quad (2.4.51)$$

Da für die TE-Moden im Nahfeld $r_{\perp} \propto y^{-2} k_0^2 z^2 \ll 1$ (vgl. Gl. (2.4.30)) gilt, kann der Nenner durch 1 approximiert werden und man erhält

$$\langle u_{\perp}^{\text{ev}} \rangle \approx \frac{d}{z^2 16\pi^2 c^2} \int d\omega E(\omega, T_2) \omega \epsilon_{r2}'' \approx \frac{d}{96c^2 z^2} \frac{(k_B T_2)^2}{\hbar} \omega_p^2 \tau. \quad (2.4.52)$$

Der erste Ausdruck gilt wieder allgemein, wohingegen der zweite Ausdruck für Drude-Metalle in der Hagen-Rubens-Näherung gültig ist. Der TE-Moden-Beitrag zur Energiedichte im Nahfeld für $z \gg d$ unterscheidet sich demnach von dem Beitrag für $z \ll d$ lediglich durch den Faktor d/z .

Für die TM-Moden gilt zunächst auch der allgemeine Zusammenhang aus Gl. (2.4.51), allerdings ist r_{\parallel} im Nahfeld unabhängig von λ bzw. y . Es ist somit nicht möglich, eine weitere Vereinfachung dieses Ausdruckes zu finden, ohne spezielle Materialeigenschaften zu Rate zu ziehen. Man benutzt also neben der materialunabhängigen Relation

$$\text{Im}(r_{\parallel}^{32}) \approx \frac{2\epsilon_{r2}''}{|\epsilon_{r2} + 1|^2} \quad (2.4.53)$$

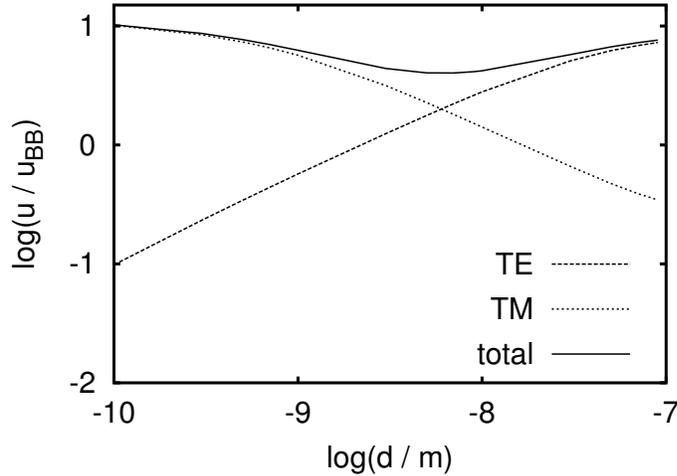


Abbildung 2.8: Plot der Energiedichte für die Platte im Fall von Wismut bei $T = 300$ K in Abhängigkeit von der Plattendicke d für $z = 10^{-6}$ m. Zusätzlich sind noch die Anteile der TE- und TM-Moden eingetragen, die ein gegensätzliches Verhalten in Abhängigkeit von der Plattendicke d zeigen.

die materialabhängigen Relationen

$$\text{Im}(r_{\parallel}^2) \approx \frac{4\omega}{\omega_p^2 \tau} \ll 1 \quad \text{und} \quad \text{Re}(r_{\parallel}^2) \approx 1 - \frac{4\omega^2}{\omega_p^4 \tau^4} \approx 1 \quad (2.4.54)$$

mit $r_{\parallel} = r_{\parallel}^{12} = r_{\parallel}^{32}$ und $|r_{\parallel}|^2 \approx 1$. Mithilfe dieser Relationen erhält man zunächst für den Nenner des y -Integranden

$$\left| 1 - r_{\parallel}^2 \left(1 - 2y \frac{d}{z} \right) \right|^2 \approx \left| 2y \frac{d}{z} - i \text{Im}(r_{\parallel}^2) \right|^2. \quad (2.4.55)$$

Berücksichtigt man, dass der Integrand im y -Integral durch die Werte bei $y \approx 1$ dominiert ist, ergeben sich zwei mögliche Approximationen für $z \gg d$, und zwar

$$\frac{d}{z} \gg \frac{1}{2} \text{Im}(r_{\parallel}^2) = \frac{2\omega}{\omega_p^2 \tau} = \frac{d_{\parallel}^{\text{ev}}}{z} \quad \text{und} \quad \frac{d}{z} \ll \frac{d_{\parallel}^{\text{ev}}}{z} \quad (2.4.56)$$

mit der maximierenden Dicke $d_{\parallel}^{\text{ev}}$ aus Gl. (2.4.34). Da außerdem das Frequenzintegral durch die Frequenzen mit $\omega \lesssim k_B T / \hbar = c / \lambda_{\text{th}}$ bestimmt ist, kann man diese beiden Fälle mithilfe der Woltersdorff-Dicke $d_W = 2c / (\omega_p^2 \tau)$ auch durch

$$1 \gg \frac{d}{z} \gg \frac{d_W}{\lambda_{\text{th}}} \quad \text{und} \quad \frac{d}{z} \ll \frac{d_W}{\lambda_{\text{th}}} \ll 1 \quad (2.4.57)$$

ausdrücken, wobei zu beachten ist, dass $d_W / \lambda_{\text{th}} = d_{\parallel}^{\text{ev}}(\omega = k_B T / \hbar) / z \ll 1$ gilt. Betrachtet man nicht allzu dünne Schichten, so tritt der erste Fall mit $z \gg d \gg d_{\parallel}^{\text{ev}}$ ein, wohingegen man für sehr dünne Platten den zweiten Fall mit $d \ll d_{\parallel}^{\text{ev}} \ll z$ berücksichtigen muss. Es soll nun zunächst nur der erste Fall untersucht werden,

während der zweite Fall für sehr dünne Schichten im nächsten Abschnitt ausführlich diskutiert wird. Der Nenner im y -Integranden kann dann durch

$$|1 - r^{12} r^{32} (1 - 2y \frac{d}{z})|^2 \approx 4y^2 \frac{d^2}{z^2} \quad (2.4.58)$$

genähert werden. Für die Energiedichte erhält man damit

$$\langle u_{\parallel}^{\text{ev}} \rangle \approx \frac{1}{dz^2 4\pi^2} \int d\omega E(\omega, T_2) \frac{1}{\omega} \frac{\epsilon''_{r2}}{|\epsilon_{r2} + 1|^2} \approx \frac{1}{24dz^2} \frac{(k_B T_2)^2}{\hbar} \frac{1}{\omega_p \tau}. \quad (2.4.59)$$

Der Anteil der TM-Moden zur Energiedichte für $z \gg d$ unterscheidet sich also vom entsprechenden Beitrag bei $z \ll d$ durch den Faktor $z/d \gg 1$ und nicht durch den Faktor $d/z \ll 1$, wie es bei den TE-Moden der Fall ist, wobei dieser Ausdruck nur für Abstände

$$1 \gg \frac{d}{z} \gg \frac{d_W}{\lambda_{\text{th}}} \quad (2.4.60)$$

Gültigkeit besitzt.

Man erhält zusammengefasst also folgende Aussagen: Für jede dielektrische Platte — also unabhängig vom Material in Medium 1 — stimmt die Energiedichte im Nahfeld für $z \ll d$ mit der Energiedichte des Halbraumes überein. Für $z \gg d$ ist das Abstandsverhalten der Energiedichte für die TE- und TM-Moden proportional zu $1/z^2$, wobei man für eine Drude-Platte im Vakuum den TE-Moden-Anteil durch Multiplikation mit d/z aus dem Nahfeldwert der Energiedichte für einen Halbraum erhält, aber den TM-Moden-Anteil aus dem entsprechenden Nahfeldwert durch Multiplikation mit z/d . Es ist anzunehmen, dass die Näherungen für $z \gg d$ für das Medium 2 auch gelten, wenn Medium 1 durch ein polares Medium gegeben ist, bei dem sich die Annahme $\epsilon_{r1} = 1$ nicht so dramatisch auswirkt, wie etwa Glas. Ist Medium 1 dagegen durch ein Drude-Metall gegeben, so ist die Annahme $\epsilon_{r1} = 1$ bzw. $\epsilon_{r1} \approx 1$ nicht mehr haltbar, sodass die Näherung in Gl. (2.4.59) in diesem Fall nicht mehr gültig ist. Die Auswirkungen eines Substrat-Mediums mit $\epsilon_{r1} \neq 1$ werden im nächsten Kapitel genauer untersucht.

Da nun das Abstandsverhalten der Energiedichte im Nahfeld für verschiedene Plattendicken bekannt ist, kann man sich folgende Fragen stellen: Was geschieht eigentlich für $d \rightarrow 0$? Geht die Energiedichte linear mit d gegen Null, wie es für den Poynting-Vektor der Fall ist? Klar ist, dass man sich für $d \rightarrow 0$ stets im Bereich $z \gg d$ befinden wird. Betrachtet man die berechneten Grenzfälle in Gl. (2.4.52) und (2.4.59), scheint zunächst einmal klar, dass $\langle u_{\perp}^{\text{ev}} \rangle$ linear mit d gegen Null gehen wird. Andererseits ist $\langle u_{\parallel}^{\text{ev}} \rangle$ proportional zu d^{-1} ! Heißt das etwa, dass der TM-Moden-Anteil der Energiedichte divergiert? Wirft man einen Blick auf den allgemeinen Ausdruck der Transmissionskoeffizienten in Gl. (2.4.11), so verschwinden diese aber für $d = 0$. In Abb. 2.8 ist die Energiedichte für Wismut in Abhängigkeit von der Plattendicke d bei einem festen Beobachtungsabstand z aufgetragen. Man sieht anhand dieses numerischen Ergebnisses, dass sich der Beitrag der TE-Moden erwartungsgemäß verhält und für $d \rightarrow 0$ linear mit d gegen Null geht. Der Beitrag der TM-Moden dagegen verhält sich unerwartet und scheint für $d \rightarrow 0$ einen konstanten Wert zu erreichen, obwohl das Quellenvolumen in diesem Grenzfall verschwindet. Im folgenden Abschnitt soll der Grenzfall $d \rightarrow 0$ für die TM-Moden genauer untersucht und der Grenzwert für die TM-Moden bestimmt werden.

2.4.4 Universelles Verhalten der Energiedichte

Betrachtet man die spektrale Energiedichte für die TM-Moden in Abb. 2.5 und wählt eine feste Plattendicke d , dann sieht man, dass sehr hohe Frequenzen nur einen unwesentlichen Beitrag zur Energiedichte liefern. Wählt man immer kleinere Frequenzen, steigt der Beitrag dieser Frequenzen zur Energiedichte schätzungsweise solange, bis das Maximum $d_{\parallel}^{\text{ev}}$ mit dem gewählten d übereinstimmt. Damit kann die maximale Frequenz durch

$$d_{\parallel}(\omega_{\text{max}}) \equiv d \Rightarrow \omega_{\text{max}} \approx \frac{\lambda d}{2} \omega_p^2 \tau \quad (2.4.61)$$

abgeschätzt werden, wobei die Wellenzahlen $\lambda \approx z^{-1}$ den wesentlichen Beitrag zur Energiedichte liefern, sodass

$$\omega_{\text{max}} \approx \frac{d}{2z} \omega_p^2 \tau \quad (2.4.62)$$

gilt. Für Frequenzen kleiner als ω_{max} wird der Beitrag zur Energiedichte konstant. Dieses Verhalten kann man in Abb. 2.9 für den Fall von Wismut sehen. Wie man der Abb. 2.9 entnehmen kann, nimmt der Wert der spektralen Energiedichte für $d \rightarrow 0$ entsprechend Gl. (2.4.59) mit $1/d$ zu, wohingegen ω_{max} , und damit der Frequenzbereich, der wesentlich zur Energiedichte beiträgt, linear in d ist. Es scheint so, als ob damit die Energiedichte für $d \rightarrow 0$ einen konstanten Wert annimmt. Dieser Diskussion folgend sollte es möglich sein, die Energiedichte durch

$$\langle u_{\parallel}^{\text{ev}} \rangle = \int d\omega \rho_{\parallel}^{\text{ev}} \approx \rho_{\parallel}^{\text{ev}}(\omega_{\text{max}}, d) \omega_{\text{max}} \quad (2.4.63)$$

abzuschätzen. Den Grenzfall einer unendlich dünnen Platte, $d \rightarrow 0$, kann man dann aufgrund von Gleichung (2.4.62) direkt durch $\omega_{\text{max}} \rightarrow 0$ realisieren.

Entnimmt man die spektrale Energiedichte aus Gl. (2.4.59) und benutzt Gl. (2.4.48), so erhält man

$$\langle u_{\parallel}^{\text{ev}} \rangle \approx \rho_{\parallel}^{\text{ev}}(\omega_{\text{max}}, d) \omega_{\text{max}} = \frac{1}{dz^2 4\pi^2} E(\omega_{\text{max}}, T_2) \frac{1}{\omega_p^2 \tau} \omega_{\text{max}}. \quad (2.4.64)$$

Für den Grenzfall $d \rightarrow 0$ erhält man somit

$$\langle u_{\parallel}^{\text{ev}} \rangle \approx \frac{k_B T_2}{4\pi^2 z^3}, \quad (2.4.65)$$

also einen universellen, d.h. materialunabhängigen Beitrag für die evaneszenten TM-Moden im Grenzfall unendlich dünner Platten.

Anstelle dieses Verfahrens wird nun ein etwas direkterer Ansatz gewählt, um den Grenzfall unendlich dünner Platten zu realisieren. Als Ausgangspunkt bietet sich die Näherung aus Gleichung (2.4.51) für $z \gg d$ an, die ja im Grenzfall $d \rightarrow 0$ mit Sicherheit erfüllt sein wird. Ausserdem werden nur die TM-Moden betrachtet, wobei weiterhin angenommen wird, dass $r_{\parallel}^{12} = r_{\parallel}^{32} = r_{\parallel}$ gilt. Somit erhält man

$$\langle u^{\text{ev}} \rangle \approx \int d\omega \frac{E(\omega, T_2)}{(2\pi)^2} \frac{2}{z^3 \omega} \int dy y^2 \frac{\text{Im}(r_{\parallel}) e^{-2y}}{|1 - r_{\parallel}^2 (1 - 2y \frac{d}{z})|^2} \left[2y \frac{d}{z} (1 + |r_{\parallel}|^2) \right]. \quad (2.4.66)$$

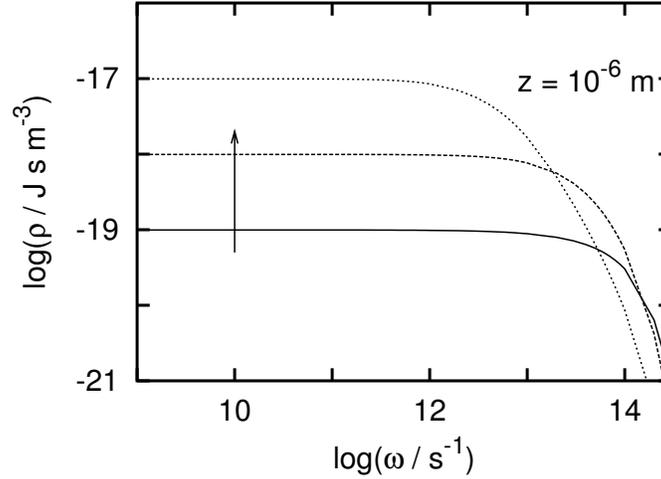


Abbildung 2.9: Plot der spektralen Energiedichte $\rho_{\parallel}(\omega)$ für die Platte im Fall von Wismut bei $T = 300\text{ K}$ und $z = 10^{-6}\text{ m}$ in Abhängigkeit von der Frequenz ω für verschiedene Plattendicken d , wobei die Graphen in Pfeilrichtung für die Plattendicken 10^{-8} m , 10^{-9} m und 10^{-10} m angegeben sind.

In der Hagen-Rubens-Näherung kann der Nenner unter dem Integral durch

$$\left| 1 - r_{\parallel}^2 \left(1 - 2y \frac{d}{z} \right) \right|^2 \approx \left(2y \frac{d}{z} \right)^2 + \left(\frac{4\omega}{\omega_p^2 \tau} \right)^2 \quad (2.4.67)$$

approximiert werden und es gilt $|r_{\parallel}|^2 \approx 1$. Da nun der Grenzwert für unendlich dünne Platten gesucht ist, gilt entsprechend Gl. (2.4.57)

$$\left(2 \frac{d}{z} \right)^2 \gg \left(\frac{4\omega}{\omega_p^2 \tau} \right)^2 \quad \text{bzw.} \quad \frac{d}{z} \ll \frac{d_W}{\lambda_{\text{th}}} \ll 1. \quad (2.4.68)$$

Es müssen in diesem Fall beide Summanden im Nenner berücksichtigt werden, da der zweite Summand für sehr dünne Platten nicht vernachlässigt werden kann. Eine Vernachlässigung des ersten Summanden hingegen würde den Nenner im y -Integral abstandsunabhängig machen, sodass der Ausdruck für die Energiedichte (2.4.66) linear in d wäre und damit für $d \rightarrow 0$ verschwinden würde. Berücksichtigt man daher beide Summanden und die Näherungsausdrücke für die Reflexionskoeffizienten, bekommt man den Ausdruck

$$\langle u^{\text{ev}} \rangle \approx \int d\omega \frac{E(\omega, T_2)}{(2\pi)^2} \frac{2}{z^2 d} \frac{2}{\omega_p^2 \tau} \int dy y^3 \frac{e^{-2y}}{y^2 + \left(\frac{d_{\parallel}^{\text{ev}}}{d} \right)^2}, \quad (2.4.69)$$

wobei die Größe

$$d_{\parallel}^{\text{ev}}(\omega) = \frac{2z\omega}{\omega_p^2 \tau} \quad (2.4.70)$$

aus Gl. (2.4.34) eingeführt wurde. Da Gl. (2.4.69) wieder durch die Frequenzen $\omega \lesssim k_B T_2 / \hbar$ dominiert ist, ergibt sich mit $\lambda = z^{-1}$ für die Energiedichte die Längenskala

$$d_{\text{uni}} := d_{\parallel}^{\text{ev}} \left(\omega = \frac{k_B T_2}{\hbar} \right) = z \frac{d_W}{\lambda_{\text{th}}}. \quad (2.4.71)$$

Für $d \gg d_{\text{uni}}$ ergibt das Integral (2.4.69) das in Gleichung (2.4.59) abgeleitete $1/z^2$ -Verhalten des TM-Moden-Beitrages zur Energiedichte. Für $d \ll d_{\text{uni}}$ hingegen sollte sich das bereits abgeschätzte universelle Verhalten ergeben. Dementsprechend gibt diese Längenskala an, für welche Plattendicken man solch ein universelles Verhalten erwarten kann. Betrachtet man also $d \ll d_{\text{uni}}$, bekommt man zunächst

$$\langle u^{\text{ev}} \rangle \approx \frac{2}{z^2 d} \frac{2}{\omega_p^2 \tau} \int d\omega \frac{E(\omega, T_2)}{(2\pi)^2} \left(\frac{d_{\parallel}^{\text{ev}}}{d} \right)^2 \int d\eta \eta^3 \frac{e^{-2\eta \frac{d_{\parallel}^{\text{ev}}}{d}}}{\eta^2 + 1}. \quad (2.4.72)$$

Da — wie zu Beginn dieses Abschnittes diskutiert wurde — bei sehr kleinen Plattendicken der ω -Integrand für kleine Frequenzen dominant wird, kann die Bose-Einstein-Funktion durch

$$E(\omega, T_2) \approx k_B T_2 \quad (2.4.73)$$

approximiert werden. Man erhält dann für die Energiedichte der TM-Moden

$$\begin{aligned} \langle u^{\text{ev}} \rangle &\approx \frac{2}{z^3 d} \frac{k_B T_2}{(2\pi)^2} \int d d_{\parallel}^{\text{ev}} \left(\frac{d_{\parallel}^{\text{ev}}}{d} \right)^2 \int d\eta \eta^3 \frac{e^{-2\eta \frac{d_{\parallel}^{\text{ev}}}{d}}}{\eta^2 + 1} \\ &= \frac{2}{z^3 d} \frac{k_B T_2}{(2\pi)^2} \int d\eta \frac{\eta^3}{\eta^2 + 1} \int d d_{\parallel}^{\text{ev}} \left(\frac{d_{\parallel}^{\text{ev}}}{d} \right)^2 e^{-2\eta \frac{d_{\parallel}^{\text{ev}}}{d}} \\ &= \frac{2}{z^3 d} \frac{k_B T_2}{(2\pi)^2} \int d\eta \frac{\eta^3}{\eta^2 + 1} d \frac{\Gamma(3)}{(2\eta)^3} \\ &= \frac{2}{z^3} \frac{k_B T_2}{(2\pi)^2} \frac{\Gamma(3)}{2^3} \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{k_B T_2}{16\pi z^3}. \end{aligned} \quad (2.4.74)$$

Diese Ableitung führt offenbar wieder auf ein universelles Verhalten, das gut mit der Schätzung in Gl. (2.4.65) übereinstimmt. Für den Grenzfall $d \rightarrow 0$ bzw. für $d \ll d_{\text{uni}}$ nimmt der Beitrag der TM-Moden zur Energiedichte einen konstanten, materialunabhängigen Wert ungleich Null an. Das ist verblüffend und erscheint auf den ersten Blick verwunderlich. Der physikalische Mechanismus, der hinter diesem Verhalten steckt, ist anhand der hier gegebenen Rechnung nicht klar. Es kann aber gezeigt werden, dass das Ansteigen des TM-Moden-Beitrages zur Energiedichte für dünne Platten sowie das hier abgeleitete Verhalten der Oberflächenplasmonenkopplung auf den beiden Seiten der Platte zugeschrieben werden muss. Diese Kopplung führt zu einer Aufspaltung des Oberflächenplasmonenzweiges in einen hochfrequenten und einen niedrigfrequenten Zweig (siehe [60, 61]). Macht man die Platte ausreichend dünn, gelangt der niedrigfrequente Zweig in den thermisch zugänglichen Bereich um $\omega \lesssim k_B T / \hbar$ und kann dadurch zum thermischen Anteil der Energiedichte beitragen, wodurch diese erhöht wird und für beliebig dünne Platten einen universellen Beitrag annimmt. Aufgrund der Ableitung des Wertes in Gl. (2.4.74), bei der die Bose-Einstein-Funktion explizit durch $k_B T_2$ approximiert wurde, könnte angenommen werden, dass der abgeleitete Wert für das universelle Verhalten die Anteile beider Plasmonenzweige enthält, da in dem Frequenzintegral im Prinzip alle

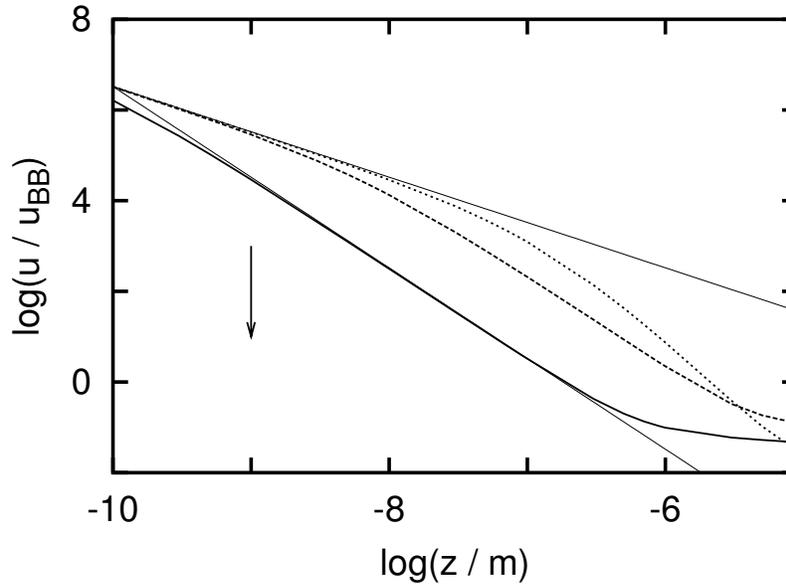


Abbildung 2.10: Plot der Energiedichte $\langle u_{\perp} \rangle$ für die Platte im Fall von Wismut bei $T = 300\text{ K}$ in Abhängigkeit vom Beobachtungspunkt z oberhalb der Platte für verschiedene Plattendicken $d = 10^{-6}\text{ m}$ (gepunktete Linie), $7 \cdot 10^{-7}\text{ m}$ (gestrichelte Linie) und 10^{-10} m (durchgezogene Linien). Der Pfeil zeigt das Verhalten der Energiedichte mit abnehmender Plattendicke an. Außerdem sind die Näherungen für den stark evaneszenten Bereich (dünne durchgezogene Linie) für den Halbraum aus Gleichung (2.4.49) und für die Platte aus Gleichung (2.4.52) geplottet.

Frequenzen berücksichtigt werden. Eine genaue Diskussion der Oberflächenplasmonbeiträge in Kapitel 4 wird allerdings zeigen, dass der universelle Beitrag in Gl. (2.4.74) richtig ist und allein von dem niedrigfrequenten Zweig ω_- herrührt.

Die Größe

$$d_{\text{uni}} = z \frac{d_{\text{W}}}{\lambda_{\text{th}}} = z \frac{k_{\text{B}} T_2}{\hbar c} \frac{2c}{\omega_p^2 \tau} \quad (2.4.75)$$

gibt eine ungefähre Dicke an, ab der das universelle Verhalten zu erwarten ist, wobei wie in den vorherigen Rechnungen die Hagen-Rubens-Näherung vorausgesetzt wird. Berechnet man diese Dicke im Falle von Wismut — $\omega_p = 2,1 \cdot 10^{16}\text{ s}^{-1}$ und $\tau = 2,3 \cdot 10^{-16}\text{ s}$ — für $z = 10^{-6}\text{ m}$ und $T = 300\text{ K}$, erhält man $d_{\text{uni}}^{\text{Bi}} \approx 8 \cdot 10^{-10}\text{ m}$, was erklärt, warum man so unphysikalische Plattendicken wie $d = 10^{-10}\text{ m}$ betrachten muss, um diesen Effekt überhaupt zu sehen (Siehe zum Beispiel Abb. 2.11). Für bessere Drude-Metalle wie zum Beispiel Aluminium mit $\omega_p = 2,4 \cdot 10^{16}\text{ s}^{-1}$ und $\tau = 8 \cdot 10^{-15}\text{ s}$ sieht die Lage noch viel schlechter aus, da die Relaxationszeit größer ist als bei Wismut. Für andere Drude-Metalle liegt die Relaxationszeit sogar bei 10^{-14} s , sodass für besonders gute Drude-Metalle das abgeleitete universelle Verhalten unmöglich zu realisieren ist. Aber: Offenbar ist die Größe d_{uni} direkt proportional zu $z T_2 \rho$, wobei $\rho = 1/(\epsilon_0 \omega_p^2 \tau)$ den elektrischen Widerstand darstellt. Bei großen Temperaturen und schlechter Leitfähigkeit, wobei Drude-Verhalten vorausgesetzt ist, nimmt also die Dicke d_{uni} zu, ab der das universelle $1/z^3$ -Verhalten einsetzt.

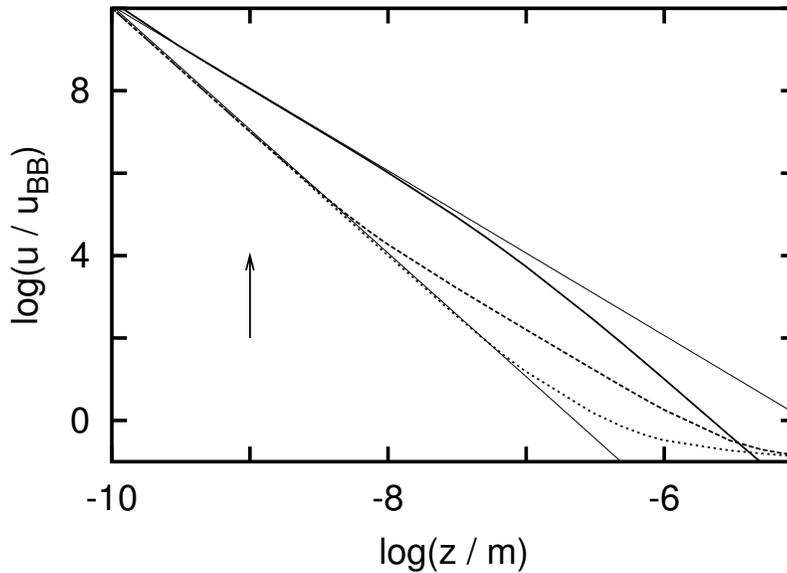


Abbildung 2.11: Plot der Energiedichte $\langle u_{\parallel} \rangle$ für die Platte im Fall von Wismut bei $T = 300\text{ K}$ in Abhängigkeit vom Beobachtungspunkt z oberhalb der Platte für verschiedene Plattendicken $d = 10^{-6}\text{ m}$ (gepunktete Linie), $7 \cdot 10^{-7}\text{ m}$ (gestrichelte Linie) und 10^{-10} m (durchgezogene Linie). Der Pfeil zeigt das Verhalten der Energiedichte mit abnehmender Plattendicke an. Außerdem sind die Näherungen für den stark evaneszenten Bereich (dünne durchgezogene Linie) für den Halbraum aus Gleichung (2.4.50) und für die Platte aus Gleichung (2.4.59) geplottet. Man erkennt für die unrealistisch dünne Platte mit $d = 10^{-10}\text{ m}$ das universelle $1/z^3$ -Verhalten bei $z \approx 10^{-6}\text{ m}$.

Da offenbar in natürlicher Weise bei dünnen Filmen/Platten der Gleichstromwiderstand zunimmt [44], könnte sich das universelle Verhalten bereits bei etwas größeren Plattendicken zeigen als d_{uni} angibt. Eventuell sind auch Materialien wie zum Beispiel Polypyrrol [PPy(PF₆)] — ein dotiertes Polymer — oder dotierte Halbleiter [62, 63], die ein Drude-Verhalten mit einer besonders kleinen Plasmafrequenz zeigen, gute Kandidaten, um dieses universelle $1/z^3$ -Verhalten zumindest qualitativ zu zeigen.

2.5 Zusammenfassung

In diesem Abschnitt wurde das fluktuierende Nahfeld in der Nähe einer dielektrischen Platte untersucht, wobei man erwartungsgemäß für Plattendicken d kleiner als die Skintiefe d_s Abweichungen von den Halbraumergebnissen bekommt. Für die propagierenden Moden äußert sich diese Abweichung darin, dass man für Drude-Metalle im Grenzfall $d \rightarrow 0$ zunächst bei $d \approx d_W$ ein Maximum im Poynting-Vektor und damit in der thermischen Abstrahlung der Platte erhält. Für unrealistisch dünne Platten geht der Poynting-Vektor dann linear mit d gegen Null. Da die Woltersdorff-Dicke $d_W \propto (\omega_p^2 \tau)^{-1} = \rho$ ist, kann man erwarten, dass für Metalle mit einer schlechten

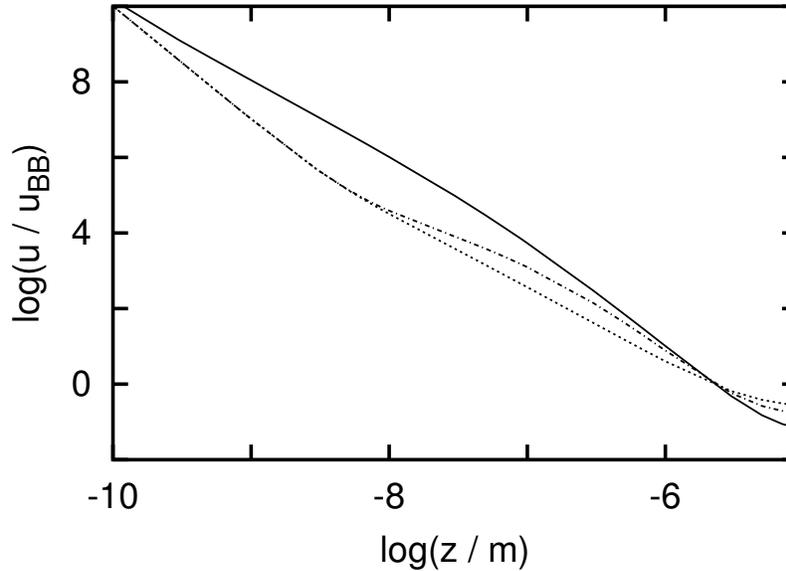


Abbildung 2.12: Plot der gesamten Energiedichte $\langle u_{\text{ges}} \rangle$ für die Platte im Fall von Wismut bei $T = 300\text{ K}$ in Abhängigkeit vom Beobachtungspunkt z oberhalb der Platte für verschiedene Plattendicken $d = 10^{-6}\text{ m}$ (gepunktete Linie), $7 \cdot 10^{-7}\text{ m}$ (gestrichelte Linie) und 10^{-10} m (durchgezogene Linie). Man sieht gut das nicht-monotone Verhalten der Energiedichte für $d \rightarrow 0$, das mit dem Ansteigen des TM-Moden-Anteils und dem Absinken des TE-Moden Anteils für $z \gg d$ verknüpft ist.

Leitfähigkeit dieses Maximum bei moderaten Plattendicken auftritt.

Für die evaneszenten Moden erhält man ebenfalls die Halbraumergebnisse zurück, wenn man Plattendicken betrachtet, die die Skintiefe überschreiten. Für Plattendicken $d \leq d_s$ spielt neben der Skintiefe auch das Verhältnis von der Plattendicke d zum Beobachtungsabstand z eine wesentliche Rolle. Da die evaneszenten Moden im Abstand z durch Wellenlängen der Größenordnung z dominiert sind, ist es plausibel, dass man für Abstände $z \ll d$ das Halbraumergebnis zurückbekommt, da die entsprechenden evaneszenten Moden mit $\lambda^{-1} \approx z \ll d$ die Beschränkung durch die endliche Plattendicke nicht „spüren“ können. Für Abstände $z \geq d$ erhält man dagegen eine erhebliche Abweichung vom Halbraumwert, die sich darin äußert, dass die Halbraum-Potenzgesetze

$$\langle u_{\perp} \rangle \propto z^{-1} \quad \text{und} \quad \langle u_{\parallel} \rangle \propto z^{-3} \quad (2.5.1)$$

für die TE- und TM-Moden in ein Potenzgesetz proportional zu z^{-2} übergehen. Zusätzlich findet man für die evaneszenten TM-Moden im klassischen Bereich, d.h. für hohe Temperaturen bzw. große Abstände, ein universelles Verhalten, das sich bei üblichen Drude-Metallen wie Au, Ag oder Wismut allerdings erst für unrealistisch dünne Platten bemerkbar macht. Wie bereits diskutiert, sollte man für spezielle Materialien solch ein universelles Verhalten sehen können, wobei die Plattendicke, ab der dieses universelle Verhalten eintritt, durch d_{uni} aus Gl. (2.4.75) gegeben ist.

Die TE- und TM-Moden können im Nahfeld also ausschließlich durch Potenzge-

setze beschrieben werden. Ein Plot der numerischen Ergebnisse von $\langle u_{\perp} \rangle$ für Wismut zusammen mit den Approximationen in (2.4.49) und (2.4.52) ist in Abb. 2.10 dargestellt. Man findet eine sehr gute Übereinstimmung der Energiedichte mit den entsprechenden Näherungen, d.h. mit den abgeleiteten Potenzgesetzen.

Der entsprechende Plot von $\langle u_{\parallel} \rangle$ für Wismut ist in Abb. 2.11 zu finden und auch hier stimmen die Näherungen aus den Gln. (2.4.50) und (2.4.59) sehr gut mit der numerisch berechneten Energiedichte überein. Außerdem macht sich für sehr dünne Platten das universelle Verhalten aus Gl. (2.4.74) bei $z \approx 1 \mu\text{m}$ bemerkbar.

In Abb. 2.12 ist noch ein Plot für die gesamte Energiedichte $\langle u \rangle = \langle u_{\parallel} \rangle + \langle u_{\perp} \rangle$ für Wismut-Platten verschiedener Dicken gezeigt, um das nicht-monotone Verhalten der Gesamtenergiedichte bei Veränderung der Plattendicke zu veranschaulichen. Die Energiedichte für die Platte mit der Dicke $d = 10^{-6} \text{ m}$ sollte in guter Übereinstimmung mit dem Halbraumergebnis sein, da diese Dicke die Skintiefe von $d_s \approx 1,3 \cdot 10^{-7} \text{ m}$ übersteigt. Für diese Plattendicke erkennt man den für Metalle typischen Verlauf, bei denen im Bereich von $z = 10^{-8} \text{ m}$ bis $z = 10^{-6} \text{ m}$ die TE-Moden-Beiträge die Energiedichte dominieren. Für $z \ll 10^{-8} \text{ m}$ dominiert der TM-Moden-Beitrag und führt zu der charakteristischen $1/z^3$ -Abhängigkeit der Energiedichte. Bei einer Plattendicke von $d = 7 \cdot 10^{-9} \text{ m}$ wird der TE-Moden-Anteil schwächer und der TM-Moden-Anteil vergleichsweise stark im Bereich von $z \gg d$. Bei dieser Dicke liefern die TE- und TM-Moden ungefähr den gleichen Beitrag zur Gesamtenergiedichte, wie man in Abb. 2.8 sehen kann. Es setzt sich in diesem Bereich daher ein $1/z^2$ -Verhalten der Energiedichte durch, das allerdings durch die TE- und TM-Moden gleichermaßen gegeben ist. Für $z \ll d$ ist erwartungsgemäß alles beim „alten“.

Wie bereits diskutiert wurde, kann man das universelle Verhalten der Nahfeldenergiedichte für reale Drude-Metalle und damit auch für Wismut nicht erreichen, da man die Schichtdicke so dünn machen müsste, dass sie höchstens durch eine Monolage des Materials realisiert werden könnte. Um dennoch zumindest prinzipiell zu zeigen, dass man für sehr dünne Schichten das abgeleitete universelle Potenzgesetz erhält, ist es daher notwendig, für Wismut eine Plattendicke von $d = 10^{-10} \text{ m}$ zu wählen. In diesem Fall (siehe Abb. 2.12) dominiert im Bereich $z \ll d$ und $z \gg d$ nur noch der TM-Moden-Beitrag die Energiedichte mit seinem $1/z^3$ - bzw. $1/z^2$ -Verhalten. Außerdem wird für $z \gg 10^{-7} \text{ m}$ das universelle Verhalten der TM-Moden sichtbar, das ebenfalls eine $1/z^3$ -Abhängigkeit aufweist.

Kapitel 3

Das evaneszente Nahfeld eines beschichteten Mediums

In diesem Kapitel wird das fluktuierende Nahfeld eines beschichteten Halbraumes untersucht, wobei der Beitrag der Schicht bzw. des Coatings im Prinzip im vorherigen Kapitel ausführlich diskutiert wurde. Für die vollständige Beschreibung eines beschichteten Materials muss allerdings noch der Beitrag der Quellen im Bulk-Medium berücksichtigt werden. Dementsprechend ist dieses Kapitel die natürliche Fortsetzung des vorherigen Kapitels und gibt damit eine vollständige Diskussion der Abstandsabhängigkeit der Energiedichte im evaneszenten Nahfeld, die es in der mir bekannten Literatur so noch nicht gibt.

Es ist wieder unerlässlich, für die gegebene Geometrie die Greenschen Funktionen zu konstruieren und mithilfe der Randbedingungen eindeutig zu bestimmen. Die Resultate werden diesmal ohne die Angabe der Rechnung im ersten Abschnitt angegeben, da die Rechnungen analog zu den Rechnungen aus den vorherigen Kapiteln ausgeführt werden können. Aus dem gleichen Grund werden die Berechnungen des Poynting-Vektors und der Energiedichte in den darauf folgenden Abschnitten ebenfalls weggelassen und nur die Ergebnisse angegeben. Die Beiträge des Bulks und der Schicht in der gegebenen Schichtgeometrie werden anhand numerischer Beispiele ausführlich diskutiert.

Wie im vorherigen Kapitel werden auch hier nur die lokalen Bulk-Permittivitäten verwendet, sodass die gegebenen Ergebnisse den gleichen Einschränkungen wie die entsprechenden Ergebnisse aus dem vorherigen Kapitel unterliegen und für sehr dünne Schichten und sehr kleine Beobachtungsabstände nur qualitativ richtig sein können.

3.1 Konstruktion der Greenschen Funktion

Es wird nun die gleiche Geometrie wie im vorherigen Abschnitt (siehe Abb. 2.1) betrachtet, nur dass sich die Quellenströme diesmal bei $z < -d$ befinden. Die zu betrachtenden Raumgebiete können diesmal in drei verschiedene Gruppen eingeteilt werden: Das Gebiet für alle $z' < z < -d$ wird mit *I*, das für alle $-d < z < 0$ mit *II* und das für alle $0 < z$ mit *III* bezeichnet. Genau wie bei den zuvor betrachteten Geometrien können die Greenschen Funktionen für die einzelnen Gebiete durch

Superposition der freien Lösung mit den entsprechenden Streulösungen konstruiert werden. Man erhält für die drei Gebiete die elektrischen dyadischen Greenschen Funktionen

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_I^E &= \frac{i}{4\pi} \int d\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2 - \delta_{n,0})}{\lambda h_1} \left\{ \left(\mathbf{M}_{\pm n\lambda}(h_1) + R_{TE}^1 \mathbf{M}_{\pm n\lambda}(-h_1) \right) \otimes \mathbf{M}'_{\pm n\lambda}(-h_1) \right. \\ &\quad \left. + \left(\mathbf{N}_{\pm n\lambda}(h_1) + R_{TM}^1 \mathbf{N}_{\pm n\lambda}(-h_1) \right) \otimes \mathbf{N}'_{\pm n\lambda}(-h_1) \right\}, \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_{II}^E &= \frac{i}{4\pi} \int d\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2 - \delta_{n,0})}{\lambda h_1} \left\{ \left(T_{TE}^2 \mathbf{M}_{\pm n\lambda}(h_2) + R_{TE}^2 \mathbf{M}_{\pm n\lambda}(-h_2) \right) \otimes \mathbf{M}'_{\pm n\lambda}(-h_1) \right. \\ &\quad \left. + \left(T_{TM}^2 \mathbf{N}_{\pm n\lambda}(h_2) + R_{TM}^2 \mathbf{N}_{\pm n\lambda}(-h_2) \right) \otimes \mathbf{N}'_{\pm n\lambda}(-h_1) \right\}, \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_{III}^E &= \frac{i}{4\pi} \int d\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2 - \delta_{n,0})}{\lambda h_1} \left\{ T_{TE}^3 \mathbf{M}_{\pm n\lambda}(h_3) \otimes \mathbf{M}'_{\pm n\lambda}(-h_1) \right. \\ &\quad \left. + T_{TM}^3 \mathbf{N}_{\pm n\lambda}(h_3) \otimes \mathbf{N}'_{\pm n\lambda}(-h_1) \right\}. \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

Die Implementierung der Randbedingungen (1.1.7) bei $z = -d$ und $z = 0$ führt auf die gesuchten Transmissionskoeffizienten im Gebiet *III*:

$$T_{TE}^3 = \frac{4h_1 h_2 e^{-ih_1 d}}{C_{\perp}} \quad \text{und} \quad T_{TM}^3 = \frac{4h_1 h_2 k_2^2 e^{-ih_1 d}}{k_1 k_3 C_{\parallel}} \quad (3.1.4)$$

mit den Koeffizienten C_{\perp} und C_{\parallel} aus Gl. (2.3.12). Damit sind die elektrische und die magnetische Greensche Funktion im Gebiet *III* eindeutig bestimmt.

3.2 Die propagierenden Moden

Die Berechnung des Poynting-Vektors und der Energiedichte kann nun ganz analog zu den vorherigen Rechnungen durchgeführt werden und man erhält wieder Gleichungen der Gestalt (1.6.11) bzw. (2.3.8):

$$\langle S_z^{31} \rangle = \int d\omega \frac{E(\omega, T_1)}{(2\pi)^2} \int d\lambda \lambda e^{-2h_3'' z} (T_{\perp}^{31} + T_{\parallel}^{31}), \quad (3.2.1)$$

wobei diesmal

$$T_{\perp}^{31} = 16|h_2|^2 \frac{\text{Re}(h_3)\text{Re}(h_1)}{|C_{\perp}|^2}, \quad (3.2.2)$$

$$T_{\parallel}^{31} = 16|h_2|^2 \frac{|k_2|^4 \text{Re}(h_3)\text{Re}(h_1 \bar{\epsilon}_{r1})}{|k_1|^4 |C_{\parallel}|^2} \quad (3.2.3)$$

gelten. Wiederum wurde vorausgesetzt, dass $\epsilon_3 = \epsilon_0$ gilt, sodass der Poynting-Vektor nur Informationen über die propagierenden Moden enthält, da die Transmissionskoeffizienten proportional zu $\text{Re}(h_3)$ sind. Um Informationen über das evaneszente Nahfeld zu erlangen, muss dagegen wieder die Energiedichte betrachtet werden.

Für den Poynting-Vektor können die Transmissionskoeffizienten für dünne und dicke Beschichtungen, d.h. für $h_2''d \ll 1$ und $h_2''d \gg 1$, leicht abgeleitet werden. Für dünne Platten mit $h_2''d \ll 1$ erhält man

$$T_{\perp}^{31} \approx 4 \frac{\operatorname{Re}(h_1)\operatorname{Re}(h_3)}{|a_{\perp}^{31}|^2} \quad (3.2.4)$$

und

$$\begin{aligned} T_{\parallel}^{31} &\approx 4 \frac{|\epsilon_{r3}|^2 \operatorname{Re}(h_1 \bar{\epsilon}_{r1}) \operatorname{Re}(h_3)}{|\epsilon_{r1}|^2 |a_{\parallel}^{13}|^2} \\ &\approx 4 \frac{\operatorname{Re}(h_1 \bar{\epsilon}_{r1}) \operatorname{Re}(h_3)}{|a_{\parallel}^{31}|^2}, \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

da $|C|^2 \approx 4|h_2|^2|a^{31}|^2$ gilt. Diese beiden Transmissionskoeffizienten stimmen wieder mit den Transmissionskoeffizienten aus Gl. (1.6.12) für die Halbraumgeometrie überein, bei der Dielektrikum 1 an Dielektrikum 3 grenzt, was sehr plausibel ist. Schließlich werden die Beiträge des Dielektrikums 1 in diesem Fall nur unwesentlich durch das Dielektrikum 2 gedämpft, da $d \ll d_s$ gilt.

Andererseits erhält man für Beschichtungen mit Dicken d , die sehr viel größer als die Skintiefe sind (d.h. es gilt $h_2''d \gg 1$), für den Nenner der Transmissionskoeffizienten

$$|C|^2 \approx |a^{21}|^2 |a^{32}|^2 \exp(2h_2''d), \quad (3.2.6)$$

sodass die Transmissionskoeffizienten exponentiell gedämpft und damit vernachlässigbar klein werden. Für Plattendicken $d \gg d_s$ werden die Beiträge des Dielektrikums 1 offenbar so stark durch das Dielektrikum 2 gedämpft, dass sie oberhalb der Schichtgeometrie einen vernachlässigbaren Beitrag liefern.

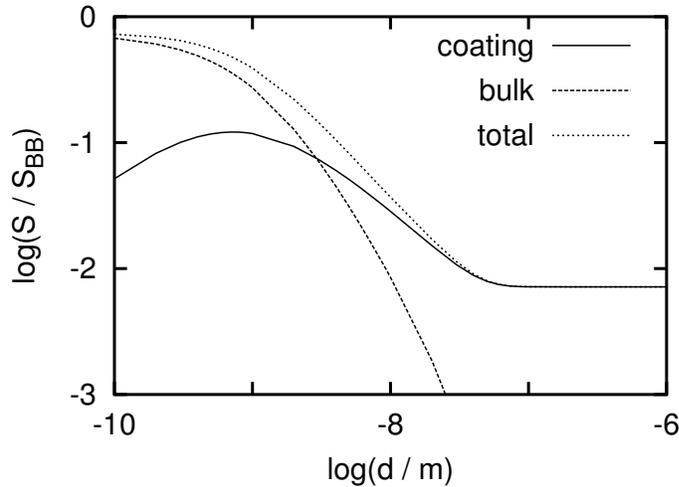


Abbildung 3.1: Numerisches Ergebnis für den Poynting-Vektor eines GaN-Halbraumes, der mit einer Goldschicht bedeckt ist, in Abhängigkeit von der Schichtdicke d , wobei die Temperatur auf $T = 300$ K festgesetzt ist.

Der Poynting-Vektor für die gesamte Schichtgeometrie, die auf einer festen Temperatur $T_1 = T_2 = T$ gehalten wird, setzt sich additiv aus dem Beitrag zusammen, der durch die Quellenströme in Dielektrikum 1 und dem Beitrag, der durch die Quellenströme in Dielektrikum 2 erzeugt wird. Der Poynting-Vektor der gesamten Schichtgeometrie kann dann durch die Summe der beiden Beiträge angegeben werden und erhält die Form

$$\langle S_z \rangle = \int d\omega \frac{E(\omega, T)}{(2\pi)^2} \int d\lambda \lambda e^{-2h_3''z} (T_{\perp}^{\text{ges}} + T_{\parallel}^{\text{ges}}), \quad (3.2.7)$$

wobei die Transmissionskoeffizienten T^{ges} durch die Summe des Bulkanteils T^{31} aus Gl. (3.2.3) und des Anteils der Beschichtung T^{32} aus Gl. (2.3.9) gegeben sind.

Für die Transmissionskoeffizienten T^{32} aus Gl. (2.3.9) wurden die Grenzfälle dicker und dünner Beschichtungen bereits im vorigen Kapitel erörtert, wobei festgestellt wurde, dass für $d \ll d_s$ diese Transmissionskoeffizienten linear mit d verschwinden, wohingegen für $d \gg d_s$ diese Transmissionskoeffizienten gegen das Halbraumergebnis für Dielektrikum 2 konvergieren, das an Dielektrikum 3 grenzt. Somit kann man zusammenfassend das Verhalten des Poynting-Vektors für einen beschichteten Halbraum angeben: Der Poynting-Vektor der gesamten Schichtgeometrie gibt Werte in Abhängigkeit der Schichtdicke, die zwischen den Halbraumwerten des Bulkmediums und der Beschichtung liegen, wobei für $d \gg d_s$ der Halbraumwert der Beschichtung bzw. des Coatings erreicht wird und für $d \ll d_s$ der Halbraumwert des Bulkmaterials. Dabei ist Dielektrikum 3 durch das Vakuum gegeben.

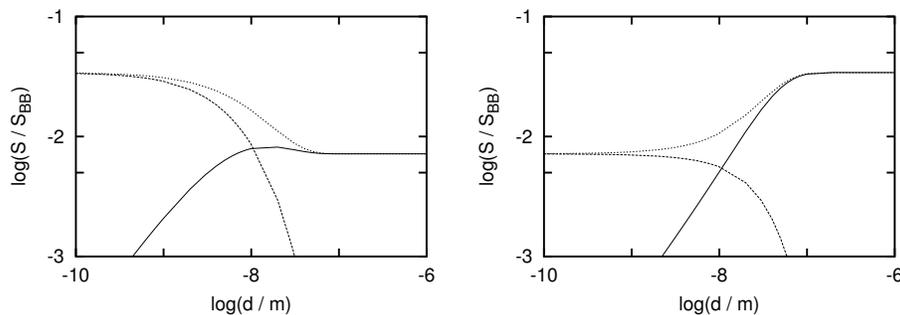


Abbildung 3.2: Links: Numerisches Ergebnis für den Poynting-Vektor eines Gold-Halbraumes, der mit Platin beschichtet ist, in Abhängigkeit von der Schichtdicke d , wobei die Temperatur auf $T = 300$ K festgesetzt ist. Im zweiten Bild ist die gleiche Situation für einen Platin-Halbraum, der mit Gold beschichtet ist, dargestellt.

In Abb. 3.1 ist der Poynting-Vektor für eine Schichtgeometrie geplottet, bei der das Material des Bulk-Mediums durch GaN gegeben ist und das Material des Coatings durch Gold. Die Permittivität für Gold ist wieder durch die Drude-Permittivität und die Permittivität des GaN-Bulks durch die Reststrahlenformel gegeben. Man sieht gut, wie der Poynting-Vektor für sehr dünne Schichten gegen den Halbraumwert von GaN strebt, der nahe bei dem Wert des schwarzen Strahlers liegt. Bei Schichtdicken dagegen, die weit größer als die Skintiefe der Goldschicht sind, strebt der Poynting-Vektor der gesamten Anordnung gegen den Halbraumwert von Gold,

der um zwei Größenordnungen kleiner als der Wert des schwarzen Strahlers ist. Durch die Variation der Schichtdicke kann die Wärmeabstrahlung dieser Anordnung um bis zu zwei Größenordnungen erhöht bzw. verringert werden! Übrigens ist das im vorherigen Abschnitt abgeleitete Maximum im Poynting-Vektor für die Beschichtung erhalten, aber es wird vollständig durch den Beitrag des darunter liegenden Halbraumes überdeckt, wie man in Abb. 3.1 sieht.

Natürlich gilt hier auch der umgekehrte Schluss: Würde man einen Halbraum aus Gold mit GaN beschichten, würde sich die Wärmeabstrahlung bei Verringerung der GaN-Schicht ebenfalls um bis zu zwei Größenordnungen verringern. Dass diese Umkehrung richtig ist, erkennt man sehr schön an den beiden Plots in Abb. 3.2, bei denen zum einen ein Goldhalbraum mit Platin und zum anderen ein Platinhalbraum mit Gold beschichtet wird. Der Wert des Poynting-Vektors für die Schichtgeometrie liegt stets zwischen den entsprechenden Halbraumwerten, wobei der Übergang im Bereich der Skintiefe einsetzt, die bei $\omega_{\text{th}} \approx 10^{14} \text{ s}^{-1}$ für Platin bei $d_s^{\text{Pt}} = 47 \text{ nm}$ und für Gold bei $d_s^{\text{Au}} = 22 \text{ nm}$ liegt.

3.3 Die evaneszenten Moden

Auch die Berechnung des Beitrages zur Energiedichte, der durch die Felder mit den Quellenströmen in Dielektrikum 1 — also des Substratmediums — verursacht wird, führt wieder auf die bereits bekannte Form aus Gl. (1.7.10) bzw. (2.4.1):

$$\langle u^b(z) \rangle = \int d\omega \frac{E(\omega, T)}{(2\pi)^2} \int d\lambda \lambda \frac{\lambda_s^2}{2\omega} e^{-2h_3'' z} \frac{(T_{\perp}^{31} + T_{\parallel}^{31})}{\text{Re}(h_3)}, \quad (3.3.1)$$

wobei die Transmissionskoeffizienten in den Gln. (3.2.3) gegeben sind. Die Größe λ_s^2 wurde in Gl. (1.7.11) definiert und ist im propagierenden Bereich, d.h. $\lambda < k_0$, durch $2k_0^2$ und im evaneszenten Bereich, d.h. $\lambda > k_0$, durch $2\lambda^2$ gegeben.

Die Bestimmung der Grenzwerte der Energiedichte für dünne und dicke Platten ist für den Beitrag des Substrats bzw. Bulks harmlos, da der Zähler und der Nenner in den Transmissionskoeffizienten T in Gl. (3.2.3) nicht in Abhängigkeit von $h_2'' d$ konkurrieren. Die Grenzfälle können daher für $h_2'' d \ll 1$ und $h_2'' d \gg 1$ genauso wie für den Poynting-Vektor im vorherigen Abschnitt bestimmt werden, sodass für $h_2'' d \gg 1$ der Beitrag des Bulkmaterials zur Energiedichte verschwindet, wohingegen für den entgegengesetzten Grenzfall $h_2'' d \ll 1$ der Beitrag des Bulkmaterials dem eines Halbraumes gleicht, der aus dem Dielektrikum 1 besteht, d.h. die Beschichtung vernachlässigbaren Einfluss auf die Energiedichte des Bulkmediums hat.

Um nun die gesamte Anordnung des beschichteten Halbraumes zu diskutieren, muss dem Energiedichtebeitrag des Bulkmaterials auch der Beitrag der Beschichtung bzw. des Coatings aus Gl. (2.4.1),

$$\langle u^c(z) \rangle = \int d\omega \frac{E(\omega, T)}{(2\pi)^2} \int d\lambda \lambda \frac{\lambda_s^2}{2\omega} e^{-2h_3'' z} \frac{(T_{\perp}^{32} + T_{\parallel}^{32})}{\text{Re}(h_3)}, \quad (3.3.2)$$

mit den Transmissionskoeffizienten aus Gl. (2.3.9) bzw. (2.4.11) hinzuaddiert werden. Für die Energiedichte oberhalb eines beschichteten Halbraumes erhält man

daher genau wie für den Poynting-Vektor einen Beitrag des Substrats entsprechend Gl. (3.3.1) und einen Beitrag des Coatings entsprechend Gl. (3.3.2).

Der Beitrag des Coatings wurde bereits in dem vorherigen Kapitel ausführlich für Metalle in der Hagen-Rubens-Näherung diskutiert, allerdings hauptsächlich für den Spezialfall, dass $\epsilon_1 = \epsilon_3 = \epsilon_0$ gilt. Bei Anwesenheit eines Substrats mit $\epsilon_1 \neq \epsilon_0$ kann der Beitrag des Coatings jedoch stark von den bereits diskutierten Grenzfällen für eine frei stehende Metallschicht abweichen. Betrachtet man beispielsweise den Nahfeldbeitrag der TM-Moden für die Beschichtung im Bereich $z \gg d$, dann gilt der Gl. (2.4.51) folgend

$$\langle u_{\parallel}^{\text{c, ev}} \rangle \approx \int d\omega \frac{E(\omega, T)}{(2\pi)^2} \frac{2}{z^3 \omega} \int dy y^2 \frac{\text{Im}(r_{\parallel}^{32}) e^{-2y}}{|1 - r_{\parallel}^{12} r_{\parallel}^{32} (1 - 2y \frac{d}{z})|^2} \left[2y \frac{d}{z} (1 + |r_{\parallel}^{12}|^2) \right]. \quad (3.3.3)$$

Für den Fall, dass $\epsilon_1 = \epsilon_3 = \epsilon_0$, folgt dann, dass die Reflexionskoeffizienten betragsmäßig gleich sind, d.h., dass $|r_{\parallel}^{12}| = |r_{\parallel}^{32}|$ gilt, wobei für gut leitende Metalle zusätzlich $|r_{\parallel}^{12}| \approx 1$ und damit auch $|r_{\parallel}^{32}| \approx 1$ erfüllt ist, sodass man näherungsweise

$$\langle u_{\parallel}^{\text{c, ev}} \rangle \approx \int d\omega \frac{E(\omega, T)}{(2\pi)^2} \frac{4}{z^2 d \omega} \int dy y \text{Im}(r_{\parallel}^{32}) e^{-2y} \quad (3.3.4)$$

erhält, also die $1/z^2$ -Abhängigkeit, die im Zusammenhang mit der Plattengeometrie diskutiert wurde. Wählt man als Beschichtung ein Drude-Metall und als Bulkmedium ein polares Dielektrikum, so kann man erwarten, dass $|r_{\parallel}^{12}| = |r_{\parallel}^{32}|$ in guter Näherung erfüllt bleibt. Daher ist zu erwarten, dass in solchen Konfigurationen für den Beitrag der Schicht in der Schichtgeometrie die im vorherigen Kapitel diskutierten Effekte erhalten bleiben.

Geht man allerdings davon aus, dass das Bulkmaterial auch ein Metall ist, dann ist anzunehmen, dass der Fresnel-Koeffizient $|r_{\parallel}^{12}|$ annähernd vernachlässigt werden kann, da der Unterschied zwischen den Materialeigenschaften im Dielektrikum 1 und im Dielektrikum 2 dann sehr gering ist. Somit kann der Nenner im Integranden in Gl. (3.3.3) in einer sehr groben Approximation

$$\langle u_{\parallel}^{\text{c, ev}} \rangle \approx \int d\omega \frac{E(\omega, T)}{(2\pi)^2} \frac{4d}{z^4 \omega} \int dy y^3 \text{Im}(r_{\parallel}^{32}) e^{-2y} \quad (3.3.5)$$

durch 1 ersetzt werden und man erhält eine $1/z^4$ -Abhängigkeit. Nun ist eine rein theoretische Diskussion, die klärt, in welchem Beobachtungsbereich z in Abhängigkeit von der Plattendicke d welcher Beitrag die Energiedichte dominiert, aufgrund der Materialabhängigkeiten sehr mühsam. Einfacher ist es, numerische Berechnungen der Energiedichte durchzuführen und auf dieser Grundlage das Wechselspiel von Bulkbeitrag und dem Beitrag der Beschichtung zu diskutieren. Diese Vorgehensweise wird im Weiteren verfolgt.

In Abb. 3.3 ist der TM-Moden-Anteil der Energiedichte $\langle u_{\parallel}^{\text{c}} \rangle$ für einen beschichteten Halbraum in Abhängigkeit vom Beobachtungsabstand z aufgetragen, wobei nur der Anteil der Wismut-Schicht geplottet ist. Die Temperatur beträgt $T = 300$ K. Um den Einfluss des Bulkmaterials auf den Energiedichtebeitrag der Schicht zu untersuchen, wurden für verschiedene Schichtdicken die Bulkmaterialien GaN und Al

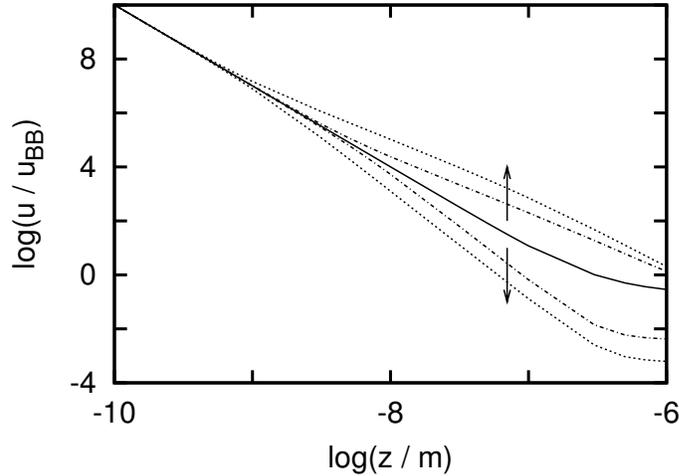


Abbildung 3.3: Numerische Ergebnisse der Energiedichte $\langle u_{\parallel}^c \rangle$ einer Bi-Schicht für einen beschichteten GaN- bzw. einen Al-Halbraum in Abhängigkeit vom Beobachtungsabstand z bei fester Temperatur $T = 300\text{ K}$ und variierenden Schichtdicken d . Die durchgezogene Linie ist die Energiedichte für einen reinen Bi-Halbraum, die gestrichelte Linie steht für eine 5 nm dicke Bi-Schicht auf GaN bzw. Al und die gepunktete Linie steht für eine 1 nm dicke Bi-Schicht ebenfalls auf GaN bzw. Al, wobei die Werte für den GaN-Bulk für $d \rightarrow 0$ größer und für den Al-Bulk kleiner werden.

gewählt. Für GaN als Bulkmaterial erkennt man in Abb. 3.3 gut, wie der Energiedichtebeitrag für $z \gg d$ über den Halbraumwert (durchgezogene Linie) steigt, wenn die Schichtdicke verringert wird, und in das im vorherigen Kapitel abgeleitete $1/z^2$ -Verhalten übergeht. Würde man die Schichtdicke noch kleiner als d_{uni} machen, könnte man sehen, wie der Energiedichtebeitrag wieder in ein $1/z^3$ -Verhalten überginge. Für Al als Bulkmaterial verändert sich diese Situation vollkommen. Bei Verringerung der Schichtdicke sinkt der Beitrag zur Energiedichte der Schicht für $z \gg d$ unter den Energiedichtebeitrag des Halbraumes und geht in ein $1/z^4$ -Verhalten über, wie es im vorhergehenden Absatz diskutiert wurde. Wie man in Abb. 3.3 sieht, ist bei fester Schichtdicke $d < d_s$ und festem Beobachtungsabstand $k_0 z \ll 1$ und $z \gg d$ der Energiedichtebeitrag der Bi-Schicht für die TM-Moden für einen GaN-Bulk vollkommen von dem für einen Al-Bulk verschieden. Vergleicht man beispielsweise in Abb. 3.3 die Werte bei $z = 10^{-7}\text{ m}$ für eine Schichtdicke von $d = 5 \cdot 10^{-9}\text{ m}$, so liegen diese um ca. drei Größenordnungen auseinander.

Der TE-Moden-Anteil der Energiedichte für einen beschichteten Halbraum verhält sich dagegen folgendermaßen: In Abb. 3.4 sieht man, wie für kleiner werdende Schichtdicken der Beitrag der TE-Moden zur Energiedichte $\langle u_{\perp}^c \rangle$ zunächst unabhängig vom Bulkmaterial für $z \gg d$ unter den Halbraumwert (durchgezogene Linie) des Coatingmaterials fällt. Bei $z \approx 10^{-8}\text{ m}$ zeigt sich ein Aufspalten der Energiedichtebeiträge bei fester Schichtdicke in Abhängigkeit vom Bulkmaterial. Betrachtet man beispielsweise den Graphen für $d = 1\text{ nm}$ (gepunktete Linie), so stimmen die Gra-

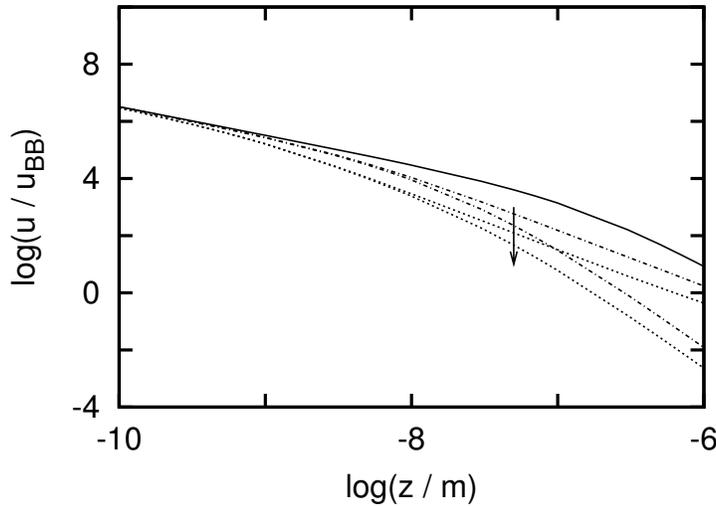


Abbildung 3.4: Numerisches Ergebnis der Energiedichte $\langle u_{\perp}^c \rangle$ der Bi-Schicht für einen beschichteten GaN- bzw. einen Al-Halbraum in Abhängigkeit vom Beobachtungsabstand z bei fester Temperatur $T = 300\text{ K}$ und variierenden Schichtdicken d . Die durchgezogene Linie ist die Energiedichte für einen reinen Bi-Halbraum, die gestrichelte Linie steht für eine 5 nm dicke Bi-Schicht auf GaN bzw. Al und die gepunktete Linie steht für eine 1 nm dicke Bi-Schicht ebenfalls auf GaN bzw. Al. Dabei sind die Werte für den GaN-Bulk für $z \gg d$ stets größer als die Werte für den Al-Bulk, bzw. für Abstände $z \ll d$ genauso groß.

phen für $z < 10^{-8}\text{ m}$ unabhängig von der Wahl des Substrats sehr gut überein. Für $z > 10^{-8}\text{ m}$ geht der obere Graph, bei dem das Bulkmaterial aus GaN besteht, in die bereits bekannte $1/z^2$ -Abhängigkeit über. Der untere Graph hingegen, bei dem das Bulkmaterial aus Al besteht, scheint in eine $1/z^4$ -Abhängigkeit überzugehen. Somit verhalten sich die TE-Moden ähnlich den TM-Moden: Für polare Bulkmaterialien, zumindest für GaN, gelten die im vorherigen Kapitel abgeleiteten Potenzgesetze, wohingegen für leitende Bulkmaterialien eine $1/z^4$ -Abhängigkeit auftritt. Allerdings unterscheiden sich die TM-Moden-Beiträge von den TE-Moden-Beiträgen gerade dadurch, dass die TM-Moden für dünne Schichten Werte liefern können, die den Halbraumwert der Energiedichte des Schichtmaterials übersteigen.

Nachdem nun erörtert wurde, wie sich die Wahl des Bulkmediums auf das fluktuierende Nahfeld der Schicht auswirkt, soll nun der Frage nachgegangen werden, welchen Beitrag das Bulkmedium noch zur gesamten Energiedichte liefert. Wie bereits eingangs diskutiert wurde, geht der Beitrag des Bulkmediums $\langle u^b \rangle$ zur Energiedichte für dünne Schichten in seinen Halbraumwert über, da die Transmissionskoeffizienten in diesem Grenzfall $d \ll d_s$ durch Gl. (3.2.4) bzw. (3.2.5) gegeben sind. Bei Schichten, die sehr viel dünner als die Skintiefe d_s der Schicht sind, ist daher anzunehmen, dass der Beitrag des Bulkmediums zur Energiedichte $\langle u^b \rangle$ für gewisse Abstände Werte erreichen kann, die von der Größenordnung des Beitrages des Schichtmediums $\langle u^c \rangle$ bzw. größer als dieser sind.

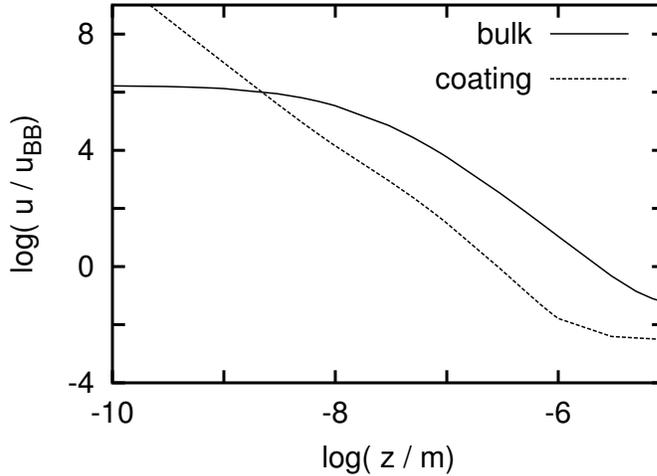


Abbildung 3.5: Numerisches Ergebnis der Energiedichte $\langle u^c \rangle$ und $\langle u^b \rangle$ für eine 5 nm-Bi-Schicht auf einem Al-Halbraum in Abhängigkeit vom Beobachtungsabstand z bei fester Temperatur $T = 300\text{ K}$.

Betrachtet man beispielsweise Abstände $z \ll d$, so erhält man für $\langle u^c \rangle$ den Halbraumwert des Coatings, da die dominanten lateralen Wellenzahlen durch die Wellenzahlen mit $\lambda z \approx 1$ gegeben sind, d.h. dass die Wellenlängen in diesem Abstandsreich kleiner als die Schichtdicke sind, da $\lambda^{-1} \ll d$ gilt, und somit keine Information über die endliche Dicke der Schicht enthalten. Für den Beitrag des Bulkmediums $\langle u^b \rangle$ oberhalb der betrachteten Schichtanordnung erhält man zunächst ebenfalls Werte, die dem Halbraumwert des Substratmediums entsprechen. Allerdings können oberhalb der Schichtgeometrie nur solche Moden zu $\langle u^b \rangle$ beitragen, deren Wellenlänge größer als die Dicke d des Schichtmediums selbst ist, da das Bulkmedium entsprechend Gl. (3.2.6) nur für $h_2''d \approx \lambda d \ll 1$ einen wesentlichen Beitrag liefert. Dementsprechend können für Abstände z kleiner als d nur die evaneszenten Moden mit lateralen Wellenzahlen $\lambda d \ll 1$ beitragen. Damit hat man eine Beschränkung der beitragenden Moden, die durch die Plattendicke d gegeben ist. Je dicker also die Schicht des Coatings ist, desto weniger Moden tragen im evaneszenten Bereich zum λ -Integral bei, sodass man für sehr kleine Beobachtungsabstände mit $z \ll d$ einen konstanten abstandsunabhängigen Beitrag für $\langle u^b \rangle$ bekommt. Daher kann man erwarten, dass für $z \ll d$ stets $\langle u^c \rangle \gg \langle u^b \rangle$ gilt. Diesen Sachverhalt kann man gut in Abb. 3.5 beobachten.

Für Abstände $z \gg d$ sieht der Sachverhalt etwas anders aus, denn die Werte für die Energiedichte des Substrats entsprechen bei diesen Abständen dem Halbraumwert des Substrats ohne Schicht, da die Einschränkung $\lambda d \ll 1$, die zu einem konstanten Bulkbeitrag für Abstände $z \ll d$ führt, nicht wirksam werden kann. Somit kann es unter Umständen sein, dass der Beitrag des Substrats Werte liefert, die größer sind als der Beitrag des Coatings. Das ist natürlich nur möglich, wenn $\langle u^c \rangle$ für diese Abstände entsprechend klein wird. Betrachtet man beispielsweise ein Metallcoating auf einem Metallsubstrat, so liefert das Substrat eine Energiedichte, die in dem betrachteten Abstandsbereich $z \gg d$ für Metalle typischerweise durch

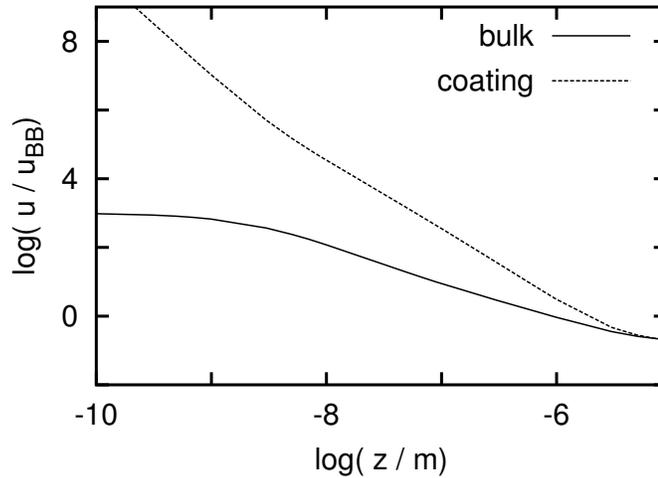


Abbildung 3.6: Numerisches Ergebnis der Energiedichte $\langle u^c \rangle$ und $\langle u^b \rangle$ für eine 5 nm-Bi-Schicht auf einem GaN-Halbraum in Abhängigkeit vom Beobachtungsabstand z bei fester Temperatur $T = 300\text{ K}$.

die TE-Moden dominiert wird. Der Beitrag des Coatings $\langle u^c \rangle$ hingegen liefert — wie in Abb. 3.3 und 3.4 gesehen werden kann — für die TE- und TM-Moden Werte, die unter dem entsprechenden Halbraumwert des Coatingmaterials liegen. Insofern kann für Abstände $z \gg d$ und Plattendicken $d \ll d_s$ der Beitrag des Substrats zur Energiedichte Werte liefern, die größer sind als die Werte des Coatingmaterials; man kann also $\langle u^b \rangle \gg \langle u^c \rangle$ bekommen. Die Nahfeldenergiedichte ist in diesem Fall — wie man in Abb. 3.5 anhand numerischer Ergebnisse sehen kann — durch die Eigenschaften des unter der Schicht liegenden Mediums bestimmt, was an sich sehr interessant ist. Schließlich könnte man somit zumindest prinzipiell mit einer Apparatur, die es ermöglicht, die Nahfeldenergiedichte oberhalb eines beschichteten Mediums zu vermessen, durch die Wahl des Abstandsbereiches $z \ll d$ bzw. $z \gg d$ Eigenschaften des Schichtmediums bzw. des Bulkmediums vermessen.

Nimmt man als Bulkmedium allerdings ein polares Medium, so sieht der Sachverhalt etwas anders aus, da der Beitrag der dünnen Schicht in diesem Fall für die TM-Moden Werte liefert, die weit oberhalb des Halbraumwerts des Schichtmediums liegen — wie man in Abb. 3.3 sieht. Außerdem ist die Energiedichte $\langle u^b \rangle$ in dem gesamten Abstandsbereich durch die TM-Moden dominiert. Daher erscheint es eher unwahrscheinlich, dass $\langle u^b \rangle \gg \langle u^c \rangle$ erreicht werden kann. Vielmehr ist zu erwarten, dass für den gesamten Abstandsbereich im Nahfeld der Beitrag des Coatings $\langle u^c \rangle$ dominiert. Da sich die Nahfeldenergiedichte des Coatings für Schichtdicken d kleiner als die Skintiefe d_s nicht monoton verhält, kann man diese Aussage nicht genauer fassen. In Abb. 3.6 findet man einen Plot für eine 5 nm-Wismut-Schicht auf einem GaN-Halbraum, wobei in diesem Fall $\langle u^c \rangle$ nahezu im gesamten Abstandsbereich größer als $\langle u^b \rangle$ ist.

Die in Abb. 3.5 und 3.6 dargestellten Plots geben Auskunft über den Beitrag des

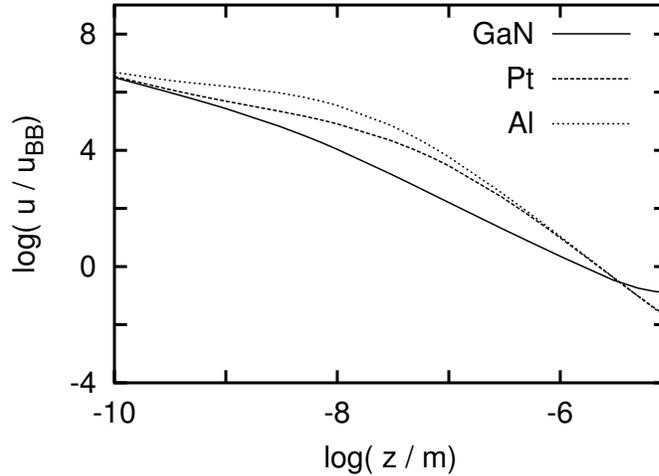


Abbildung 3.7: Numerisches Ergebnis der Energiedichte $\langle u_{\perp}^{\text{ges}} \rangle$ für eine 5 nm-Bi-Schicht auf einem GaN-, Pt- oder Al-Halbraum in Abhängigkeit vom Beobachtungsabstand z bei fester Temperatur $T = 300\text{ K}$.

Bulks und des Coatings zur Gesamtenergiedichte, die durch die Summe

$$\langle u^{\text{ges}} \rangle = \langle u^{\text{b}} \rangle + \langle u^{\text{c}} \rangle \quad (3.3.6)$$

gegeben ist. Zu guter Letzt sollen die TE- und TM-Moden-Anteile der Gesamtenergiedichte $\langle u^{\text{ges}} \rangle$ diskutiert werden, die im Nahfeld in sehr guter Näherung mit $\langle u_{\text{H}} \rangle$ bzw. $\langle u_{\text{E}} \rangle$ übereinstimmen. Dazu betrachte man die Abbildungen 3.7 und 3.8, die die Beiträge der TE- und TM-Moden zur Gesamtenergiedichte oberhalb eines mit Wismut beschichteten Halbraumes darstellen. Die Dicke der Wismut-Schicht liegt bei 5 nm und die Temperatur ist wieder auf $T = 300\text{ K}$ festgelegt. In den jeweiligen Abbildungen findet man drei verschiedene Graphen für die drei Bulkmaterialien GaN, Pt und Al. Ein Vergleich der beiden Abbildungen 3.7 und 3.8 macht zunächst deutlich, dass die Gesamtenergiedichte für $z \gg d$ durch die TE-Moden dominiert ist. Für $z \ll d$ wird die Gesamtenergiedichte dagegen durch die TM-Moden dominiert, wobei in diesem Abstandsbereich der Wert der Gesamtenergiedichte durch den Halbraumwert der Wismut-Schicht gegeben ist.

Im Beobachtungsbereich $z \gg d$ zeigt sich für GaN als Bulkmaterial in beiden Abbildungen ein $1/z^2$ -Verhalten, das für die TE-Moden und TM-Moden von gleicher Größenordnung ist. Nimmt man als Bulkmaterial hingegen ein Metall (Pt oder Al), unterscheiden sich die Anteile der TE-Moden und TM-Moden zur Gesamtenergiedichte für $z \gg d$ drastisch. Der Energiedichtebeitrag der TE-Moden $\langle u_{\perp}^{\text{ges}} \rangle$ in Abb. 3.7 geht für $z \gg d_{\text{s}}$ aus einem nahezu konstanten Verhalten für $z \ll d_{\text{s}}$ in ein $1/z^4$ -Verhalten bei $z > 1\ \mu\text{m}$ über. Der Energiedichtebeitrag der TM-Moden $\langle u_{\parallel}^{\text{ges}} \rangle$ in Abb. 3.8 geht für $z \gg d_{\text{s}}$ von einem $1/z^4$ -Verhalten für $z \ll d_{\text{s}}$ in ein von z unabhängiges Verhalten für $z > 1\ \mu\text{m}$ über. Abgesehen von der verschiedenen z -Abhängigkeit unterscheiden sich im Bereich $d \ll z < 1\ \mu\text{m}$ die Werte für $\langle u_{\perp}^{\text{ges}} \rangle$ und $\langle u_{\parallel}^{\text{ges}} \rangle$ um ca. vier Größenordnungen.

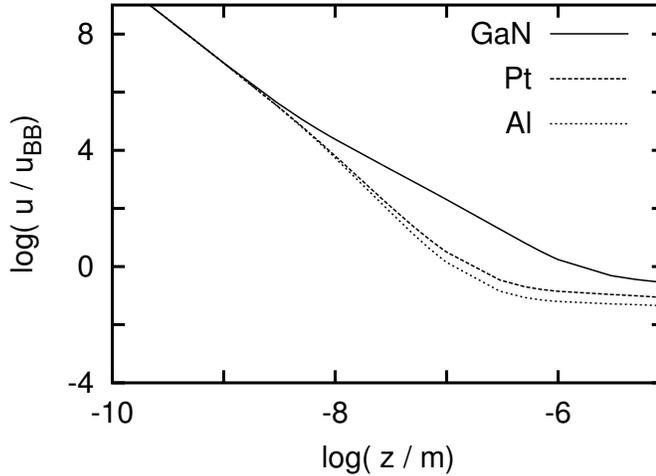


Abbildung 3.8: Numerisches Ergebnis der Energiedichte $\langle u_{\parallel}^{\text{ges}} \rangle$ für eine 5 nm-Bi-Schicht auf einem GaN-, Pt- oder Al-Halbraum in Abhängigkeit vom Beobachtungsabstand z bei fester Temperatur $T = 300 \text{ K}$.

3.4 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden die propagierenden und evaneszenten Moden oberhalb eines beschichteten Halbraumes für verschiedene Materialkombinationen anhand numerischer Ergebnisse ausführlich diskutiert. Es zeigt sich für die propagierenden Moden, dass der Betrag des Poynting-Vektors und damit die abgestrahlte Energie pro Fläche und Zeit zwischen den Halbraumergebnissen des Bulk- und des Schichtmaterials liegen. Das im vorherigen Kapitel abgeleitete Maximum für freistehende Platten konnte in einer Schichtgeometrie nicht beobachtet werden, da für Plattendicken $d \ll d_s$ der Poynting-Vektor nicht durch den Beitrag der Schicht, sondern durch den Beitrag des Bulkmaterials dominiert wird.

Die evaneszenten Moden zeigen im Gegensatz zu den propagierenden Moden für bestimmte Materialkombinationen das Verhalten einer frei stehenden Schicht, wie es im vorherigen Kapitel abgeleitet wurde. Beschichtet man ein polares Medium mit einer Metallschicht, so ergeben sich offenbar nur kleine Änderungen in der Energiedichte im Vergleich zur frei stehenden metallischen Platte, weil in diesem Fall $|r^{12}| \approx |r^{02}|$ gilt und zusätzlich der Beitrag des Bulkmediums durch die metallische Schicht stark gedämpft ist. Daher gelten in diesem Fall auch die im vorherigen Kapitel abgeleiteten Potenzgesetze für die verschiedenen Grenzfälle. So erhält man für Schichten dünner als die Skintiefe, $d \ll d_s$, für $z \gg d$ die charakteristischen Potenzgesetze $\langle u_{\perp} \rangle \propto z^{-2}$ und $\langle u_{\parallel} \rangle \propto z^{-2}$ für die TE- und TM-Moden.

Wählt man dagegen ein Drude-Metall als Bulkmedium, so ergeben sich erhebliche Unterschiede. Dabei ist interessant, dass in diesem Fall für $d \ll d_s$ und $z \gg d$ die Gesamtenergiedichte durch den Beitrag des Bulkmediums dominiert sein kann. Außerdem ändert sich für die TM-Moden das entsprechende Potenzgesetz drastisch, wobei man statt $\langle u_{\parallel} \rangle \propto z^{-2}$ die Abhängigkeit $\langle u_{\parallel} \rangle \propto z^{-4}$ findet. Daher unterscheiden sich die numerischen Werte für die Energiedichte im Nahfeld mit $z \gg d$ in

Abhängigkeit von der Wahl des Bulkmediums um Größenordnungen.

Dementsprechend erhält man oberhalb eines mit einem bestimmten Drude-Metall beschichteten Halbraumes (siehe Abb. 3.7 und 3.8) sehr unterschiedliche Ergebnisse: Für ein polares Bulkmedium ist bei ausreichend dünner Schicht eine Proportionalität zu z^{-2} im evaneszenten Nahfeld zu erwarten, die gleichermaßen von den evaneszenten TE- und TM-Moden der Energiedichte der Drude-Schicht herrührt. Für ein metallisches Bulkmedium dagegen muss man ein nahezu z -unabhängiges Verhalten erwarten, das für relativ große Abstände im Nahfeld in ein Potenzgesetz proportional zu z^{-4} übergeht, wobei dieser Beitrag allein vom Bulkmaterial stammen kann.

Kapitel 4

Oberflächenmoden

In diesem Abschnitt wird der Beitrag der Oberflächenmoden zur Energiedichte des Nahfeldes in einer Schichtgeometrie genauer untersucht. Es soll vor allem gezeigt werden, dass sowohl der Anstieg der Energiedichte für Metallschichten als auch das abgeleitete universelle Verhalten eine Folge der Oberflächenplasmonenkopplung an den beiden Schichtgrenzen ist.

Dazu werden in den ersten beiden Abschnitten zunächst die notwendigen theoretischen Grundlagen in einer Weise dargestellt, die es ermöglicht, den Einfluss der Oberflächenmoden auf die Energiedichte genauer zu studieren. Die Oberflächenmoden in einer Halbraum- bzw. Plattengeometrie sind in der Vergangenheit für Metalle und polare Medien bereits eingehend untersucht worden [60, 64, 65, 66, 67, 68], wobei man eine relativ ausführliche Darstellung beispielsweise in [61, 69, 70] finden kann. In dem darauf folgenden Abschnitt wird eine ausführliche Diskussion der Auswirkung der Oberflächenmodenkopplung auf die lokale Zustandsdichte gegeben bzw. die Energiedichte anhand numerischer Berechnungen für verschiedene Materialkombinationen untersucht. Schließlich werden im letzten Abschnitt explizit die Beiträge der Oberflächenplasmonen für den Fall dünner Platten bestimmt und das universelle Verhalten für die Energiedichte bestätigt.

4.1 Oberflächenmoden in einer Halbraumgeometrie

Zuerst soll der einfachste Fall einer Halbraumgeometrie betrachtet werden. Es gibt daher nur eine planparallele Schnittstelle zwischen zwei unbegrenzten Medien, an der die sogenannten Oberflächenmoden auftreten können. Das Hauptmerkmal der Oberflächenmoden ist die Eigenschaft, dass diese Moden exponentiell zu beiden Seiten der Schnittstelle abklingen. Es handelt sich daher für beide Seiten der Schnittstelle um rein evaneszente Moden.

Gegeben sei also ein Halbraum bei $z < 0$ mit der Permittivität ϵ_1 und daran angrenzend ein zweiter Halbraum bei $z > 0$ mit der Permittivität ϵ_2 , wobei die Einfallsebene durch die x - z -Ebene gegeben ist. Der Einfachheit wegen soll davon ausgegangen werden, dass die Permittivitäten rein reelle Größen sind. Für den TE-

polarisierten Anteil der Oberflächenmoden wird der Ansatz

$$E_{y,1} = Ae^{\gamma_1 z} \quad \text{und} \quad E_{y,2} = Be^{-\gamma_2 z} \quad (4.1.1)$$

gemacht, wobei die Wellenvektorkomponente in z -Richtung durch $\gamma_i = \sqrt{\lambda^2 - k_0^2 \epsilon_{ri}}$ gegeben ist, wobei $\gamma_i^2 > 0$ gilt. Implementiert man nun die Randbedingungen bei $z = 0$, d.h. E_y sowie die Ableitung $\partial_z E_y$ sind stetig, da $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ gilt, so bekommt man die Bedingung

$$\gamma_1 = -\gamma_2 \quad \text{bzw.} \quad \epsilon_1 = \epsilon_2 \quad (4.1.2)$$

für die Existenz der Oberflächenmoden. Da diese Bedingung für zwei verschiedene Medien mit ϵ_1 und ϵ_2 im Allgemeinen nicht erfüllt sein kann, kann man die Schlussfolgerung ziehen, dass es keine TE-polarisierten evaneszenten Oberflächenmoden in einer Halbraumgeometrie mit nicht-permeablen Materialien gibt.

Für die TM-polarisierten evaneszenten Oberflächenmoden kann man den Ansatz

$$H_{y,1} = Ae^{\gamma_1 z} \quad \text{und} \quad H_{y,2} = Be^{-\gamma_2 z} \quad (4.1.3)$$

machen. Implementiert man auch für diesen Fall die Randbedingungen bei $z = 0$, d.h. H_y sowie die Ableitung $\epsilon_i^{-1} \partial_z H_{yi}$ sind stetig, so bekommt man die Bedingung

$$\frac{\gamma_1}{\epsilon_1} = -\frac{\gamma_2}{\epsilon_2} \quad (4.1.4)$$

für die evaneszenten Oberflächenmoden. Anhand dieser Gleichung kann man sehen, dass sie für reelle Permittivitäten nur erfüllt werden kann, falls ϵ_1 oder ϵ_2 negativ ist. Für den Spezialfall $\epsilon_2 = \epsilon_0$ ist daher die notwendige Bedingung für die Existenz von Oberflächenmoden, dass es Frequenzen gibt, bei denen ϵ_1 negativ ist. Man kann nun für den Spezialfall $\epsilon_2 = \epsilon_0$ die Dispersionsrelation in Gl. (4.1.4) durch Quadrieren beider Gleichungsseiten und Auflösen nach der Wellenvektorkomponente in x -Richtung λ in der Form

$$\lambda = k_0 \sqrt{\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r1} + 1}} \quad (4.1.5)$$

angeben. Das ist die bekannte Dispersionsrelation für die Oberflächenmoden, die in dieser Form auch für komplexe Permittivitäten ϵ_1 gültig ist, wobei der Realteil von λ die Dispersion und der Imaginärteil von λ die Dämpfung in Ausbreitungsrichtung beschreibt. Die Oberflächenmoden in einer Halbraumgeometrie für nicht-permeable Materialien sind also eine reine TM-Moden-Erscheinung mit der Dispersionsrelation (4.1.5).

Verwendet man nun für Drude-Metalle mit $\omega\tau \gg 1$ die Permittivität

$$\epsilon_{r1} \approx 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (4.1.6)$$

des Plasmamodells und setzt diese in die Dispersionsrelation (4.1.5) ein, erhält man eine Gleichung, die quadratisch in ω^2 ist, sodass man die beiden Lösungen [70]

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{1}{2}\omega_p^2 + c^2\lambda^2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{\omega_p^4 + 4c^4\lambda^4} \quad (4.1.7)$$

erhält. Allerdings ist nur die Lösung ω_- realisierbar, denn aufgrund des Ansatzes evaneszenter Moden gilt die Nebenbedingung $\gamma_1^2 > 0$, d.h.

$$\lambda^2 - k_0^2 \epsilon_{r1} > 0. \quad (4.1.8)$$

Daraus folgt durch Einsetzen der Materialeigenschaften für das Drude-Material, dass auch

$$c^2 \lambda^2 - \omega^2 + \omega_p^2 > 0 \quad (4.1.9)$$

gelten muss, sodass damit eine obere Schranke für die physikalisch sinnvollen Frequenzen existiert, die durch ω_+ im Allgemeinen verletzt wird. Daher gibt es nur einen physikalisch sinnvollen Zweig mit ω_- für die evaneszenten Oberflächenmoden, die in Metallen auch als Oberflächenplasmonen bezeichnet werden. Im Nahfeld mit $\lambda \gg k_0$ bzw. im nicht-retardierten Bereich mit $c \rightarrow \infty$ konvergiert die Dispersionsrelation (4.1.7) für ω_- gegen die Oberflächenplasmonenfrequenz

$$\omega_s = \frac{\omega_p}{\sqrt{2}}. \quad (4.1.10)$$

Man kann übrigens anhand der Dispersionsrelation in Gl. (4.1.5) leicht sehen, dass diese im nichtretardierten Bereich mit $\lambda^2/k_0^2 \rightarrow \infty$ nur für $\epsilon_{r1} \rightarrow -1$ erfüllt werden kann. Daher kann man aus der Permittivität die Oberflächenplasmonenfrequenz auch durch das Lösen der Gleichung $\epsilon_r(\omega_s) = -1$ erhalten.

Der Plot der Dispersionsrelation aus Gl. (4.1.7) in Abb. 4.1 für den Zweig ω_- zeigt sehr schön, wie sich der Graph für $\lambda \gg k_p := \omega_p/c$ an die horizontale Linie bei $\omega = \omega_s$ anschmiegt, sodass man für die lokale Zustandsdichte — wie man es beispielsweise für die Phononendispersionsrelation kennt — eine Art van Hove-Singularität bzw. eine Oberflächenplasmonenresonanz bei der Oberflächenplasmonenfrequenz ω_s zu erwarten hat. Außerdem kann man die vorausgesetzte Eigenschaft, dass es sich hier um eine rein evaneszente Mode handelt, in Abb. 4.1 daran festmachen, dass der Graph der Dispersionsrelation (4.1.7) rechts der Lichtlinie mit $\omega = c\lambda$ liegt, d.h. es gilt stets $\lambda > k_0$.

Die Interpretation der Oberflächenmoden ist nun folgende [61]: Bei diesen Moden handelt es sich um kollektive Elektronenschwingungen an der Metalloberfläche, die an das elektromagnetische Feld koppeln und sich in λ -Richtung ausbreiten. Es handelt sich also streng genommen bei den Oberflächenplasmonen um Quasiteilchen, die für $\lambda \ll k_p$ „lichtartig“ sind, da sich die Dispersionsrelation (siehe Abb. 4.1) an die Dispersionsrelation des Lichtes $\omega = \lambda c$ anschmiegt. Für $\lambda \gg k_p$ konvergiert die Dispersionsrelation gegen die Oberflächenplasmonenfrequenz ω_s ; das Oberflächenplasmon kann somit als „plasmonenartig“ angesehen werden. Man spricht daher auch von Oberflächenplasmonen-Polaritonen, um den Quasiteilchencharakter hervorzuheben. Übrigens wird mit dieser Interpretation anschaulich klar, warum Oberflächenmoden reine TM-Moden-Erscheinungen sind: Die kollektiven Elektronenschwingungen gegen den positiv geladenen Hintergrund im Metall erzeugen Oberflächenladungen an der Metalloberfläche. Diese Oberflächenladungen koppeln an das elektrische Feld, was mit einer Unstetigkeit in der Normalkomponente E_z verbunden ist. Nur ein TM-polarisiertes elektrisches Feld, also ein elektrisches Feld, das Feldkomponenten

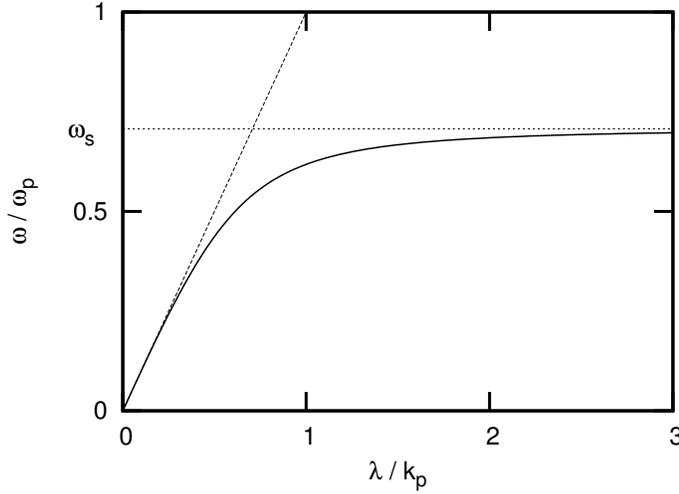


Abbildung 4.1: Dispersionsrelation für den Oberflächenplasmonenzweig ω_- aus Gl. (4.1.7), wobei die Lichtlinie mit $\omega = \lambda c$ und die Oberflächenplasmonenfrequenz $\omega_s = \omega_p/\sqrt{2}$ eingezeichnet sind. Die Wellenzahl λ ist in Einheiten von $k_p = \omega_p/c$ angegeben.

senkrecht zur Metalloberfläche des Mediums hat, kann daher an diese Oberflächenladungen koppeln. Ein TE-polarisiertes Feld kann dagegen selbst keine Oberflächenladungen erzeugen oder an diese koppeln, da es keine Komponente senkrecht zur Metalloberfläche hat.

Für ein polares Medium gilt nun ebenfalls die Dispersionsrelation aus Gl. (4.1.5), was mit der Permittivität

$$\epsilon_{r1} = \epsilon_\infty \left(1 + \frac{\omega_l^2 - \omega_t^2}{\omega_t^2 - \omega^2} \right), \quad (4.1.11)$$

d.h. der Reststrahlenformel ohne Dämpfung, schließlich auf [70]

$$\omega_\pm^2 = \frac{1}{2} \left(\omega_l^2 + \frac{c^2 \lambda^2}{\epsilon_\infty} \right) \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\omega_l^2 + \frac{c^2 \lambda^2}{\epsilon_\infty} \right)^2 - 4 \frac{c^2 \lambda^2}{\epsilon_\infty} \left(\omega_l^2 \epsilon_\infty + \omega_t^2 (1 - \epsilon_\infty) \right)} \quad (4.1.12)$$

führt. Da wieder die Nebenbedingung $\gamma_1^2 > 0$ gilt, muss mit der Permittivität für das polare Medium die Ungleichung

$$\lambda^2 - k_0^2 \epsilon_\infty \left(1 + \frac{\omega_l^2 - \omega_t^2}{\omega_t^2 - \omega^2} \right) > 0 \quad (4.1.13)$$

erfüllt sein. Daraus folgt, da infolge der Lydanne-Sachs-Teller-Relation $\omega_l > \omega_t$ gelten muss, dass notwendigerweise $\omega > \omega_t$ gilt, um für alle $\lambda \geq 0$ einen positiven Ausdruck auf der linken Gleichungsseite zu erhalten. Wie im Falle des Drude-Metalls führt nur der Zweig ω_- zu einer physikalisch sinnvollen Lösung [70], wobei nach Gl. (4.1.13) natürlich $\omega_- > \omega_t$ gelten muss. Die Oberflächenmoden, die diese Dispersionsrelation erfüllen, werden Oberflächenphononen genannt. Im Nahfeld mit $\lambda \gg k_0$ bzw.

im nicht-retardierte Bereich mit $c \rightarrow \infty$ strebt die Dispersionsrelation gegen die Oberflächenphononenfrequenz

$$\omega_s = \sqrt{\frac{\omega_t^2 + \omega_l^2 \epsilon_\infty}{1 + \epsilon_\infty}}, \quad (4.1.14)$$

was wieder zu einer Art van Hove-Singularität bzw. einer Resonanz in der lokalen Zustandsdichte (siehe Abb. 1.5) bei ω_s führt. Man kann übrigens leicht nachprüfen, dass man die Oberflächenphononenfrequenz ω_s im quasistatischen Grenzfall wieder direkt durch Lösen der Gleichung $\epsilon_r(\omega_s) = -1$ mit der Permittivität aus Gl. (4.1.11) bestimmen kann.

Die Interpretation ist diesmal ähnlich: Bei diesen Moden handelt es sich um kollektive Phononenschwingungen an der Grenzfläche bei $z = 0$, die an das elektromagnetische Feld koppeln und sich in λ -Richtung ausbreiten. Es handelt sich hier also streng genommen wieder um Quasiteilchen, die auch als Oberflächenphononen-Polaritonen bezeichnet werden. Wie im Falle der Oberflächenplasmonen können die Polarisierungen an der Oberfläche des polaren Mediums an die TM-polarisierten Felder koppeln, da diese eine Feldkomponente senkrecht zur Oberfläche aufweisen. Die Dispersionsrelation, die hier nicht eigens geplottet wird, zeigt einen ähnlichen Verlauf wie die Dispersionsrelation für die Oberflächenplasmonen, nur mit dem Unterschied, dass die Dispersionsrelation für die Oberflächenphononen erst bei ω_t beginnt und für $\lambda \gg k_l = \omega_l/c$ gegen $\omega_s < \omega_l$ konvergiert. Der Oberflächenphononenzweig ist daher auf das Reststrahlenband zwischen ω_t und ω_l beschränkt.

4.2 Oberflächenmoden in einer Plattengeometrie

Genau wie im vorherigen Abschnitt soll nun die Dispersionsrelation für die Oberflächenmoden in einer Plattengeometrie (siehe Abb. 2.1) abgeleitet werden. Da die Oberflächenmoden rein TM-polarisierte Moden sind, wird die Ableitung hier nur für die TM-Moden gegeben, d.h. es wird nicht eigens gezeigt, dass es in einer Plattengeometrie ebenfalls keine TE-polarisierten Oberflächenmoden geben kann. Analog zur Halbraumgeometrie wird der Ansatz

$$H_{y,1} = Ae^{\gamma_1 z} \quad (4.2.1)$$

$$H_{y,2} = Be^{-\gamma_2 z} + Ce^{\gamma_2 z} \quad (4.2.2)$$

$$H_{y,3} = De^{-\gamma_3 z} \quad (4.2.3)$$

für die TM-Moden gewählt, wobei wieder $\gamma_i = \sqrt{\lambda^2 - \epsilon_{ri} k_0^2}$ mit $\gamma_i^2 > 0$ gilt. Das Implementieren der Randbedingungen bei $z = -d$ und $z = 0$ liefert schließlich die Dispersionsrelation für die evaneszenten Moden in der Form

$$1 = r_{\parallel}^{12} r_{\parallel}^{32} e^{-2\gamma_2 d}, \quad (4.2.4)$$

wobei r_{\parallel}^{12} und r_{\parallel}^{32} die üblichen Fresnelschen Amplitudenreflexionskoeffizienten sind. Diese Dispersionsrelation kann auch in der Form

$$N_{\parallel} := 1 - r_{\parallel}^{12} r_{\parallel}^{32} e^{-2\gamma_2 d} = 0 \quad (4.2.5)$$

geschrieben werden. Diese Relation gilt in dieser Form für alle Materialkombinationen in der Plattengeometrie und stimmt mit dem Nenner der Energiedichte (vgl. dazu die Transmissionskoeffizienten in Gl. (2.4.11)) überein, sodass gerade die Oberflächenmoden im evaneszenten Bereich einen erheblichen Beitrag zur Energiedichte liefern. Man beachte, dass die Relation in Gl. (4.2.5) in dieser Form für reelle λ und ω nur für reelle Permittivitäten erfüllt werden kann, sodass in diesem Fall die Polstellen der Transmissionskoeffizienten durch die Oberflächenmoden bestimmt sind. Für Medien mit Dissipation, d.h. mit komplexwertigen Permittivitäten, liegt dieser Pol nicht mehr auf der Integrationsachse, sodass man in diesem Fall Resonanzen erhält.

Es soll nun der Spezialfall $\epsilon_1 = \epsilon_3 = \epsilon_0$ einer freistehenden Platte betrachtet werden. Man kann für diesen symmetrischen Fall Gl. (4.2.5) auch in der Form

$$r_{\parallel}^{02} e^{-\gamma_2 d} = \pm 1 \quad (4.2.6)$$

angeben. Daher bekommt man im Nahfeld mit $\lambda \gg k_0$ mit den entsprechenden Reflexionskoeffizienten aus Gl. (2.4.30) die beiden Gleichungen

$$\frac{1 - \epsilon_{r2}}{1 + \epsilon_{r2}} e^{-\lambda d} = \pm 1. \quad (4.2.7)$$

Anhand dieser Dispersionsrelation kann man sehen, dass sie wiederum nur erfüllt werden kann, falls $\epsilon_{r2} < 0$ ist, weil nur in diesem Fall die linke Gleichungsseite vom Betrag her mit der rechten Gleichungsseite übereinstimmen kann. Man beachte, dass für den Reflexionskoeffizienten $|r_{\parallel}| > 1$ gelten muss, um die Dispersionsrelation für die Oberflächenmoden in Gl. (4.2.6) überhaupt erfüllen zu können. Man kann anhand von Gl. (4.2.7) auch sehen, dass diese Bedingung für Materialien mit einer negativen Permittivität im evaneszenten Nahfeld erfüllt ist, sodass die physikalische Randbedingung $|r| \leq 1$ nur für propagierende Moden gültig ist. Die Dispersionsrelation in Gl. (4.2.7) soll nun wieder für Drude-Metalle und polare Medien näher betrachtet werden.

Geht man von einem Drude-Metall ohne Dämpfung (Plasmapmodell) mit der Permittivität $\epsilon_{r2} = 1 - \omega_p^2/\omega^2$ aus Gl. (4.1.6) aus, bekommt man nach Einsetzen in Gl. (4.2.7) und Auflösen nach ω die Gleichungen

$$\omega_{\pm} = \frac{\omega_p}{\sqrt{2}} \sqrt{1 \pm e^{-\lambda d}}. \quad (4.2.8)$$

Man erhält somit zwei Oberflächenplasmonenzweige mit $\omega_+ > \omega_s$ und $\omega_- < \omega_s$ (siehe Abb. 4.2), die für den Fall dicker Platten, d.h. es gilt $\lambda d \gg 1$, die Oberflächenplasmonenfrequenz ω_s für die Halbraumgeometrie haben. Man beachte, dass die Gln. (4.2.8) nur im nicht-retardierte Bereich mit $\lambda \gg k_0$ gelten, d.h. nahe der Lichtlinie $\omega = \lambda c$ nicht richtig sind. Zusätzlich kann man anhand der Gln. (4.2.8) leicht sehen, dass für unendlich dünne Platten, d.h. $\lambda d \rightarrow 0$, die beiden Oberflächenplasmonenmoden gegen die Werte $\omega_+ \rightarrow \omega_p$ und $\omega_- \rightarrow 0$ streben, d.h. bei festem λ hat man in diesem Fall zwei Resonanzen in der lokalen Zustandsdichte bei ω_p und $\omega \approx 0$ zu erwarten.

Die Interpretation ist jetzt die folgende [61]: Ist die metallische Platte sehr viel dicker als die Skintiefe d_s , so hat man auf beiden Plattenseiten, also bei $z = -d$

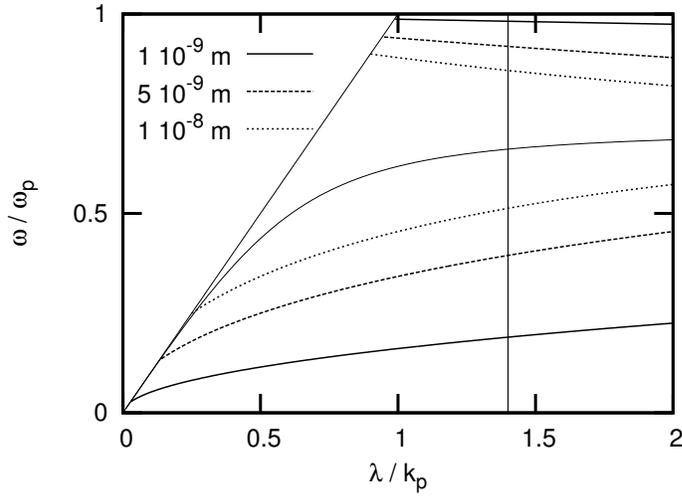


Abbildung 4.2: Dispersionsrelation für den hoch- und den niedrigfrequenten Oberflächenplasmonenzweig ω_+ und ω_- aus Gl. (4.2.8) für $d = 10^{-8}$ m, $5 \cdot 10^{-9}$ m und $d = 10^{-9}$ m. Außerdem ist die Dispersionsrelation für einen Halbraum (dünne durchgezogene Linie), die für $\lambda \gg k_p$ gegen die Oberflächenplasmonenresonanz bei $\omega = \omega_p / \sqrt{2}$ konvergiert, aufgetragen. Zusätzlich ist eine vertikale Linie bei $\lambda = z^{-1}$ für einen Beobachtungsabstand $z = 10^{-8}$ m eingezeichnet. Man beachte, dass diese Graphen nur für $\lambda d \gg k_0$ Gültigkeit haben, sodass sie die Dispersionsrelation in der Nähe der Lichtlinie $\omega = c\lambda$ und damit auch für $\lambda \ll k_p$ nicht richtig wiedergeben.

und $z = 0$, die bereits diskutierten Oberflächenmoden für eine Halbraumgeometrie. Für Metallschichten, die Dicken im Bereich der Skintiefe d_s haben, können die kollektiven Elektronenschwingungen auf beiden Plattenseiten aneinander koppeln, sodass die zweifache Entartung des Oberflächenplasmonenzweiges aufgehoben wird und es auf beiden Plattenseiten Oszillationen mit ω_+ bzw. ω_- geben kann. Die beiden Oberflächenplasmonenzweige unterscheiden sich dadurch, dass sich bei den kollektiven Elektronenschwingungen auf den beiden Plattenseiten entweder Ladungen mit unterschiedlichem Vorzeichen gegenüberstehen, sodass die Schwingungen „entgegengesetzt“ sind, oder sich die Ladungen mit gleichem Vorzeichen gegenüberliegen, sodass die Schwingungen „gleichgerichtet“ sind. Man beachte dazu, dass die hochfrequente Lösung ω_+ die Lösung für $r_{\parallel}^{20} \exp(-\gamma_2 d) = -1$ und die niedrigfrequente Lösung ω_- die Lösung für $r_{\parallel}^{20} \exp(-\gamma_2 d) = +1$ ist. Im Fall $\epsilon_1 = \epsilon_3 = \epsilon_0$ erhält man durch Implementierung der Randbedingungen in Gl. (4.2.3) leicht das Zwischenergebnis

$$D = r_{\parallel}^{20} e^{-\gamma_2 d} A e^{-\gamma_1 d}, \quad (4.2.9)$$

sodass $H_{y,1}(z = -d) = \pm H_{y,3}(z = 0)$ gilt. Die hochfrequente Lösung ω_+ führt also auf ein symmetrisches Magnetfeld H_y auf beiden Plattenseiten, wohingegen die niedrigfrequente Lösung ω_- auf ein anti-symmetrisches Magnetfeld H_y auf beiden Plattenseiten führt. Dabei ist das \mathbf{E} -Feld für ω_+ auf beiden Plattenseiten anti-

symmetrisch und für ω_- symmetrisch. Daher stehen sich bei den hochfrequenten Oberflächenmoden Ladungsträger mit entgegengesetztem Vorzeichen und bei den niedrigfrequenten Oberflächenmoden Ladungsträger mit gleichem Vorzeichen gegenüber. Man beachte aber, dass man für die inverse Konfiguration, d.h. man hat ein Vakuumgap zwischen zwei unendlich ausgedehnten Metall-Halbräumen, statt Gl. (4.2.6) die Relation

$$r_{\parallel}^{20} e^{-\gamma_2 d} = \pm 1 \quad (4.2.10)$$

erhält, sodass in diesem Fall die hochfrequente Mode anti-symmetrisch bzgl. H_y ist und die niedrigfrequente symmetrisch bzgl. H_y . Es stehen sich also dann bei den hochfrequenten Oberflächenmoden Ladungsträger mit gleichem Vorzeichen und bei den niedrigfrequenten Oberflächenmoden Ladungsträger mit entgegengesetztem Vorzeichen gegenüber.

Für polare Medien gilt ebenfalls die Dispersionsrelation aus Gl. (4.2.8) im Nahfeld mit $\lambda \gg k_0$. Mit der Permittivität aus Gl. (4.1.11) und der Dispersionsrelation aus Gl. (4.2.8) erhält man

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{\omega_l^2 \epsilon_{\infty} (\mp 1 - e^{\lambda d}) - \omega_t^2 (\mp 1 + e^{\lambda d})}{\epsilon_{\infty} (\mp 1 - e^{\lambda d}) - (\mp 1 + e^{\lambda d})}. \quad (4.2.11)$$

Es gibt also auch für die polaren Medien eine Kopplung der beiden Oberflächenmoden, die zu zwei Oberflächenphononenzweigen mit den Frequenzen ω_+ und ω_- führt. Wie man leicht sieht, konvergieren für sehr dünne Platten, d.h. $\lambda d \rightarrow 0$, die Frequenzen der beiden Oberflächenphononenzweige gegen die Werte $\omega_+ \rightarrow \omega_l$ und $\omega_- \rightarrow \omega_t$. Das heißt, dass man bei festem λ für dünne Platten zwei Oberflächenphononenresonanzen bei ω_l und ω_t in der lokalen Zustandsdichte zu erwarten hat.

4.3 Energiedichte und Oberflächenmoden

Um den Einfluss der Oberflächenmoden auf die Energiedichte untersuchen zu können, soll nun die lokale Zustandsdichte $D(\omega, d, z)$ aus Gl. (1.7.15),

$$\langle u(d, z) \rangle =: \int d\omega E(\omega, T) D(\omega, d, z), \quad (4.3.1)$$

näher untersucht werden, wobei $\langle u(d, z) \rangle$ die Energiedichte im Abstand z von einer Schicht der Dicke d darstellt. Da die Oberflächenmoden ein reiner TM-Moden-Effekt sind, soll im Weiteren nur der TM-Moden-Anteil der lokalen Zustandsdichte D_{\parallel} betrachtet werden, sodass immer, wenn in diesem Abschnitt die Rede von der lokalen Zustandsdichte ist, nur der TM-Moden-Anteil der lokalen Zustandsdichte gemeint ist.

Man betrachte zunächst die lokale Zustandsdichte bzw. die *local density of states* (LDOS) oberhalb einer Bi-Platte bei $z = 10^{-8}$ m, wie sie in Abb. 4.3 abgebildet ist. Für die Plattendicke $d = 5 \cdot 10^{-7}$ m, d.h. $d \gg d_s$ und $z \ll d$, erwartet man das Halbraumergebnis für die Energiedichte. Dementsprechend ist es folgerichtig, dass es für diesen Abstand in Abb. 4.3 nur eine Oberflächenplasmonenresonanz bei $\omega_p/\sqrt{2} \approx 0,71 \omega_p$ gibt. Für Plattendicken $d \ll d_s$ koppeln die beiden Oberflächenplasmonen auf den Plattenoberflächen miteinander und es bilden sich zwei

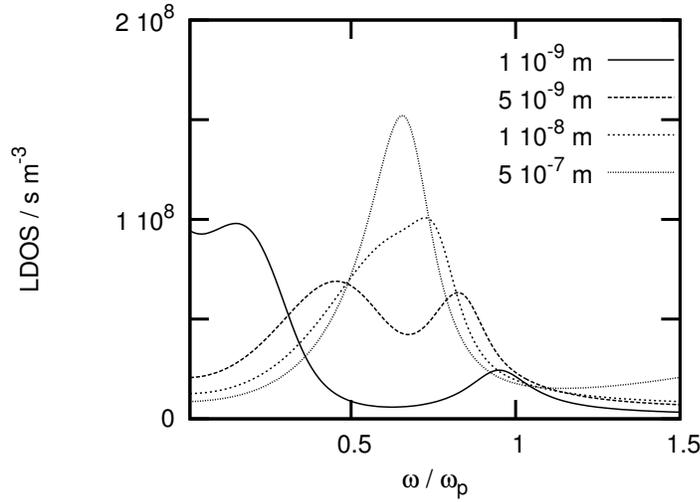


Abbildung 4.3: Die lokale Zustandsdichte oberhalb einer Bi-Platte bei $z = 10^{-8}$ m für verschiedene Plattendicken d .

Oberflächenplasmonenzweige mit den Frequenzen ω_+ und ω_- gemäß Gl. (4.2.7) bzw. Abb. 4.2 heraus. Wie bereits diskutiert wurde, ist das λ -Integral der Energiedichte bzw. der lokalen Zustandsdichte durch die Beiträge bei $\lambda = z^{-1}$ bestimmt, sodass bei $z = 10^{-8}$ m und $\omega_p^{\text{Bi}} = 2,1 \cdot 10^{16} \text{ s}^{-1}$ gerade Beiträge bei $\lambda = 1,43 k_p$ die Energiedichte dominieren. In Abb. 4.2 ist für $\lambda = 1,43 k_p$ eine vertikale Linie geplottet. Man kann anhand Abb. 4.2 sehr schön sehen, wie die Schnittpunkte der Oberflächenplasmonenzweige mit $\lambda = 1,43 k_p$ für dünner werdende Platten gemäß $\omega_+ \rightarrow \omega_s$ und $\omega_- \rightarrow 0$ konvergieren. Das entspricht genau dem Verhalten der Resonanzen in der lokalen Zustandsdichte in Abb. 4.3. Bestimmt man für die abgebildeten Plattendicken aus Gl. (4.2.7) mit $\lambda \approx 1/z = 10^8 \text{ m}^{-1}$ die entsprechenden Oberflächenplasmonenfrequenzen, bekommt man die in Tabelle 4.1 dargestellten Werte. Diese Werte stimmen sehr gut mit Resonanzen in Abb. 4.3 überein.

d/m	$5 \cdot 10^{-10}$	10^{-9}	$5 \cdot 10^{-9}$	10^{-8}
ω_+/ω_p	0,99	0,98	0,82	0,85
ω_-/ω_p	0,16	0,22	0,44	0,55

Tabelle 4.1: Werte für ω_{\pm} , die sich für verschiedene Plattendicken aus Gl. (4.2.7) ergeben.

Da die Bose-Einstein-Funktion Frequenzen größer als ω_{th} stark dämpft, kann die hochfrequente Oberflächenplasmonenresonanz ω_+ nur geringe Beiträge zur Energiedichte bei $T = 300 \text{ K}$ liefern. Die niedrigfrequente Oberflächenplasmonenresonanz bei ω_- hingegen bewegt sich für dünner werdende Platten zu niedrigeren Frequenzen und erzeugt, da die Resonanz breit ist, ein Ansteigen der Energiedichte auch bei Frequenzen nahe ω_{th} . Macht man die Platten noch dünner, wandert diese Resonanz in den thermisch anregbaren Bereich, um schließlich gegen $\omega = 0$ zu konvergieren. Man kann in Abb. 4.3 gut sehen, wie sich für sehr dünne Platten bei $\omega = 0$ eine star-

ke Resonanz ausbildet, die letztendlich für das universelle Verhalten in Gl. (2.4.74), das für die Energiedichte dünner Drude-Materialien abgeleitet wurde, verantwortlich gemacht werden muss. Schließlich gilt für alle Drude-Materialien gleichermaßen, dass bei festem λ bzw. festem Beobachtungsabstand ω_- gegen $\omega = 0$ für dünne Platten konvergiert, ganz unabhängig von den speziellen Materialeigenschaften des Drude-Metalle.

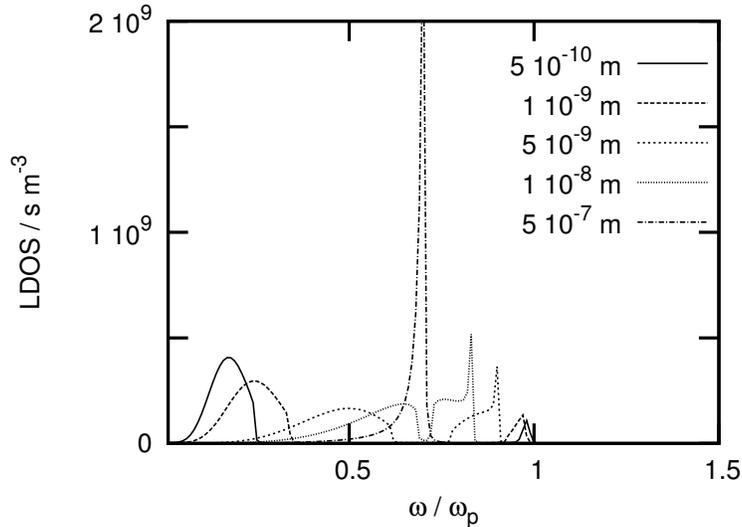


Abbildung 4.4: Die lokale Zustandsdichte oberhalb einer Au-Platte bei $z = 10^{-8}$ m für verschiedene Plattendicken d .

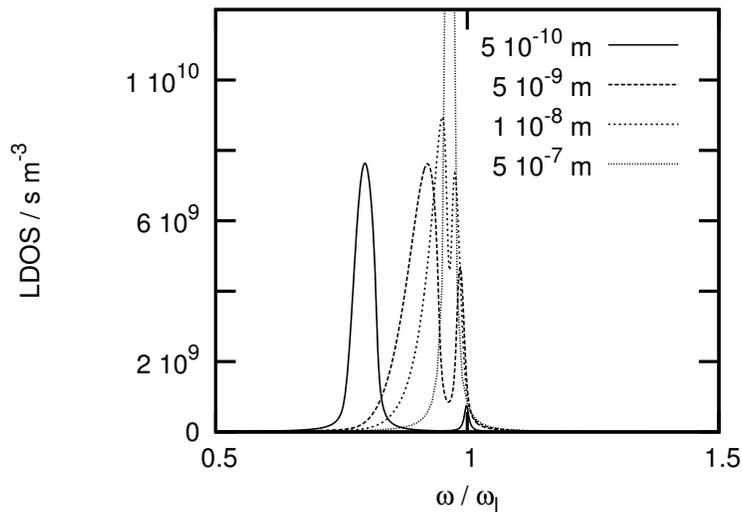


Abbildung 4.5: Die lokale Zustandsdichte oberhalb einer GaN-Platte bei $z = 10^{-8}$ m für verschiedene Plattendicken d .

Es stellt sich aber die Frage, warum das Verhalten der Energiedichte für eine Goldschicht nicht das gleiche ist wie für die Bi-Schicht, denn schließlich sind die

Plasmafrequenzen für Gold und Wismut nahezu identisch, d.h. die Lage der Oberflächenresonanz ω_{\pm} ist in beiden Fällen gleich. (Es gilt ja stets Gl. (4.2.7).) Da sich beide Drude-Materialien hauptsächlich durch die Relaxationszeiten unterscheiden, die selbst um zwei Größenordnungen auseinander liegen, muss auch die Relaxationszeit eine wichtige Rolle für das Einsetzen des universellen Verhaltens spielen. Betrachtet man die lokale Zustandsdichte für eine Goldschicht bei $z = 10^{-8}$ m in Abb. 4.4, sieht man, dass die Lage der Oberflächenplasmonen ω_+ und ω_- im wesentlichen mit denen für eine Wismut-Schicht übereinstimmen. Allerdings sind die Resonanzen im Fall einer Goldschicht viel schärfer. Das ist darauf zurückzuführen, dass die Relaxationszeit von Gold sehr viel größer ist als für Wismut, d.h. es gilt $\tau_{\text{Au}} \gg \tau_{\text{Bi}}$. Die Oberflächenplasmonen in einer Wismut-Schicht sind also viel stärker gedämpft als in einer Goldschicht, sodass die Resonanz bei Wismut sehr viel breiter ist. Das hat zur Folge, dass die lokale Zustandsdichte im Bereich thermischer Frequenzen ω_{th} für eine Bi-Schicht durch die „breiten Ausläufer“ der Resonanz bei ω_- bereits für Frequenzen $\omega_- \gg \omega_{\text{th}}$ stark erhöht wird. Für Gold sind die Resonanzen nicht so breit, sodass man sehr viel dünnere Goldschichten herstellen müsste, um das gleiche universelle Verhalten wie für die Bi-Schicht zu erhalten. Diese Schlussfolgerung ist im Einklang mit der abgeleiteten Längenskala $d_{\text{uni}} \propto 1/\tau$ aus Gl. (2.4.75), die die Schichtdicke angibt, ab der das universelle Verhalten einsetzt.

Wie sieht es denn nun mit einer Schicht aus einem polarem Material aus? Die Vermutung ist, dass man für $d \gg d_s$ eine Oberflächenphononenresonanz bei ω_s aus Gl. (4.1.14) erhält. Für Plattendicken bei $d \ll d_s$ erhält man zwei Oberflächenphononenzweige mit ω_+ bzw. ω_- gemäß Gl. (4.2.11). Daher hat man bei einem festen Beobachtungsabstand $\lambda = z^{-1}$ wieder zwei Resonanzen zu erwarten, die bei den entsprechenden Frequenzen ω_+ bzw. ω_- für dieses feste λ liegen und für sehr dünne Platten gegen $\omega_+ \rightarrow \omega_l$ und $\omega_- \rightarrow \omega_t$ streben. Abb. 4.5 zeigt genau dieses Verhalten; schließlich liegt ω_t für GaN bei $0,75\omega_l$. Allerdings ist die niedrigfrequente Resonanz bei ω_t sehr viel stärker ausgeprägt als die hochfrequente Resonanz bei ω_l , sodass das Energiedichtespektrum im Nahfeld für dünne Schichten polarer Medien gerade durch die Resonanz nahe ω_t geprägt ist.

Zu guter Letzt soll noch untersucht werden, wie sich das Vorhandensein eines Bulkmediums auf das Verhalten der Oberflächenplasmonen in einer darüber liegenden Metallschicht auswirkt. Man geht also davon aus, dass $\epsilon_1 \neq \epsilon_0$ gilt. Für eine Bi-Schicht auf einem GaN-Bulk zeigt Abb. 4.6, dass sich erwartungsgemäß an dem generellen Verhalten nicht besonders viel ändert. Die Energiedichte wird im Wesentlichen ähnliche Werte liefern wie die Energiedichte der freien Bi-Schicht, wie es bereits bei der Diskussion der Energiedichte für beschichtete Medien festgestellt wurde. Allerdings macht sich die Kopplung der Oberflächenplasmonen innerhalb der Schicht mit den Oberflächenphononen des Bulk-Mediums in der Dispersionsrelation und damit auch in der lokalen Zustandsdichte bemerkbar. Dieser Effekt kann in Abb. 4.6 aber nicht beobachtet werden, da $\omega_l \ll \omega_p$ gilt.

Nimmt man dagegen als Bulkmedium ebenfalls ein Drude-Metall, so wurde anhand der Energiedichte oberhalb des beschichteten Mediums bereits diskutiert, dass die Energiedichte für dünne Schichten mit $d \ll d_s$ im Vergleich zur freien Bi-Schicht bzw. zu einem mit Wismut beschichteten GaN-Substrat ein ganz anderes Verhalten zeigt und für $d \ll z$ weit unter dem Wert liegt, den man für mit Wismut beschichtetes

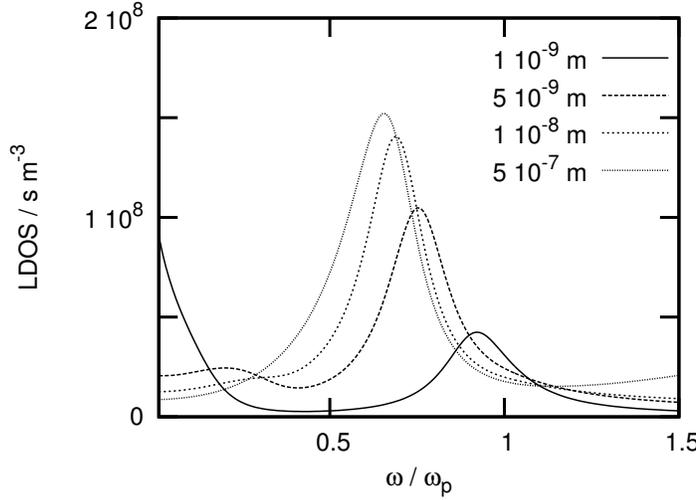


Abbildung 4.6: Die lokale Zustandsdichte oberhalb eines mit Bi beschichteten GaN-Halbraumes bei $z = 10^{-8}$ m für verschiedene Schichtdicken d .

GaN erhält. Um dieses Verhalten zu verstehen, wird nun zuerst die Dispersionsrelation aus Gl. (4.2.5) zu Rate gezogen. Mit $\epsilon_1 \neq \epsilon_0$ und $\epsilon_3 = \epsilon_0$ bekommt man im Nahfeld mit $\lambda \gg k_0$ statt Gl. (4.2.7) die Beziehung

$$\frac{\epsilon_{r2} - \epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2} + \epsilon_{r1}} \frac{\epsilon_{r2} - 1}{\epsilon_{r2} + 1} e^{-2\lambda d} = 1. \quad (4.3.2)$$

Für dünne Platten mit $\lambda d \ll 1$ und mit der Permittivität $\epsilon_{ri} = 1 - \omega_{pi}^2/\omega^2$ erhält man dann für $\lambda d \rightarrow 0$ die beiden Oberflächenplasmonenresonanzen

$$\omega_+ = \omega_{p2} \quad \text{und} \quad \omega_- = \frac{\omega_{p1}}{\sqrt{2}}. \quad (4.3.3)$$

Dementsprechend bleiben die beiden Oberflächenresonanzen in einem Bereich zwischen den Plasmafrequenzen der Schicht und der Plasmafrequenz des Substratmediums. Genauer ausgedrückt, konvergiert der „hochfrequente“ Zweig gegen die Plasmafrequenz der Schicht und der „niedrigfrequente“ Zweig gegen die Oberflächenresonanz ω_s der Substrats. Dabei ist der Zweig ω^+ natürlich nur hochfrequent, falls $\omega_{p2} > \omega_{p1}$ erfüllt ist. Mit anderen Worten: Für sehr dünne Schicht geht ein Zweig gegen die Plasmafrequenz der Schicht und der andere gegen den Oberflächenplasmonenzweig des darunterliegenden Bulkmediums, wobei es im Grenzfall $d \rightarrow 0$ zu keiner Überschneidung der beiden Zweige kommt. Insbesondere geht keiner der Zweige damit gegen Null. Es wird also weder ein universelles Verhalten in der Energiedichte noch ein Anstieg der Energiedichte zu beobachten sein, solange $\omega_{th} \ll \omega_{p1}/\sqrt{2}$ und $\omega_{th} \ll \omega_{p2}/\sqrt{2}$ gelten.

In Abb. 4.7 ist die lokale Zustandsdichte für eine Bi-Schicht auf einem Pt-Halbraum aufgetragen. Es gilt daher $\omega_{p1} = 8 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1} < \omega_{p2} = 2,1 \cdot 10^{16} \text{ s}^{-1}$. Man sieht sehr schön die Aufspaltung des Oberflächenplasmons in seine beiden Zweige, sowie die Konvergenz von $\omega_+ \rightarrow \omega_{p2}$ und $\omega_- \rightarrow 0,27 \omega_{p2}$, wobei die Plasmafrequenz des Pt-Bulks durch $0,38 \omega_{p2}$ und damit die Oberflächenplasmonenresonanz des Substratmediums durch $\omega_{p1}/\sqrt{2} = 0,27 \omega_{p2}$ gegeben ist.

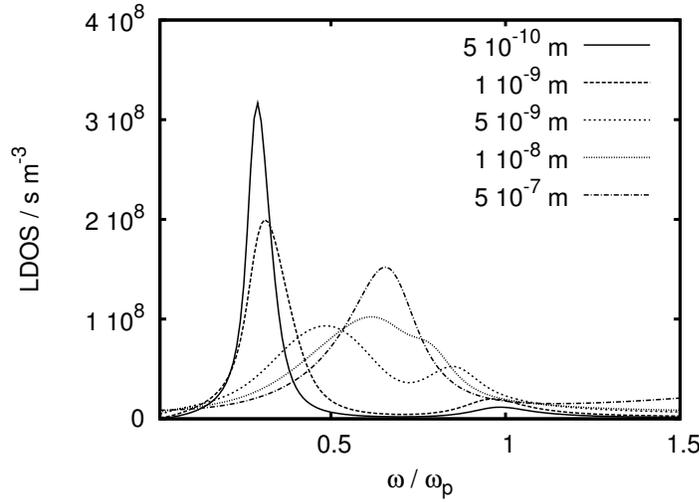


Abbildung 4.7: Die lokale Zustandsdichte oberhalb eines mit Bi beschichteten Pt-Halbraumes bei $z = 10^{-8}$ m für verschiedene Schichtdicken d , normiert auf die Plasmafrequenz ω_p von Wismut.

4.4 Der universelle Energiedichtebeitrag

In diesem Abschnitt soll der Beitrag der Oberflächenmoden zur Energiedichte direkt bestimmt werden. Dabei wird explizit gezeigt, dass der Beitrag der niedrigfrequenten Oberflächenmoden das universelle Verhalten der Energiedichte bestimmt. Es sind daher in diesem Abschnitt nur die evaneszenten Moden von Interesse, sodass das optische Theorem angewendet werden kann. Mithilfe dieses Theorems gelangt man zu einem kompakten Ausdruck für den evaneszenten Anteil der Energiedichte, der es aufgrund seiner Struktur erlaubt, die Oberflächenplasmonenbeiträge direkt mit dem Residuensatz zu bestimmen. Andererseits verliert man durch diese Herangehensweise die Information über den konkreten Beitrag des Bulkmediums bzw. der Schicht, wobei diese Information im Folgenden nicht relevant ist.

Bevor man das optische Theorem anwenden kann, ist es erforderlich, die renormierte Greensche Funktion

$$\mathbb{G}_{\text{ren}}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}) = \frac{i}{4\pi} \int d\lambda \sum_n \frac{2 - \delta_{n,0}}{\lambda h_3} \left\{ R_{\perp}^3 \mathbf{M}(h_3) \otimes \mathbf{M}(h_3) + R_{\parallel}^3 \mathbf{N}(h_3) \otimes \mathbf{N}(h_3) \right\} \quad (4.4.1)$$

im Dielektrikum 3 (siehe Abb. 2.1) mit den Quellenströmen im Dielektrikum 3 zu bestimmen. Implementiert man die Randbedingungen bei $z = 0$ und $z = -d$, so ergeben sich die Reflexionskoeffizienten

$$R^3 = \frac{r^{32} + r^{21} e^{2ih_2 d}}{1 - r^{23} r^{21} e^{2ih_2 d}} \quad (4.4.2)$$

für die TE- und TM-Moden. Man kann sich für dicke Platten leicht von der Plausibilität dieses Reflexionskoeffizienten überzeugen, denn für sehr dicke Platten können die Exponentialfunktionen vernachlässigt werden, da $h_2'' > 0$ gilt, sodass man in diesem Grenzfall $R^3 \rightarrow r^{32}$ erhält. Somit erhält man in diesem Grenzfall sofort die richtige Greensche Funktion für die evaneszenten Moden in Gl. (1.9.9).

Da die renormierte Greensche Funktion in Gl. (4.4.1) die gleiche Struktur hat wie die renormierte Greensche Funktion in Gl. (1.9.9), kann man die Energiedichte für den Spezialfall $\epsilon_3 = \epsilon_0$ ohne weitere Rechnung für die evaneszenten Moden sofort angeben; schließlich unterscheiden sich die renormierten Greenschen Funktionen nur durch die Reflexionskoeffizienten. Es genügt daher, die Reflexionskoeffizienten r^{21} für den evaneszenten Anteil der Energiedichte in Gl. (1.7.13) oberhalb einer Halbraumgeometrie durch R^3 zu ersetzen. Der evaneszente Anteil der Energiedichte oberhalb der Schichtgeometrie kann daher im evaneszenten Nahfeld durch

$$\langle u^{\text{ev}} \rangle = \int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega} \frac{E_0(\omega, T)}{\pi^2} \int_{k_0}^\infty d\lambda \frac{\lambda^3 e^{-2\gamma z}}{2\gamma} [\text{Im}(R_\perp^3) + \text{Im}(R_\parallel^3)] \quad (4.4.3)$$

angegeben werden.

Die Oberflächenmoden sind nunmehr reine TM-Moden-Erscheinungen, sodass im Folgenden nur die TM-Moden der Energiedichte, d.h. im stark evaneszenten Nahfeld mit $\lambda \gg k_0$ nur

$$\begin{aligned} \langle u_\parallel^{\text{ev}} \rangle &= \text{Im} \int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega} \frac{E_0(\omega, T)}{\pi^2} \int_{k_0}^\infty d\lambda \frac{\lambda^3 e^{-2\gamma z}}{2\gamma} R_\parallel^3 \\ &\approx \text{Im} \int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega} \frac{E_0(\omega, T)}{\pi^2} \int_{k_0}^\infty d\lambda \frac{\lambda^2 e^{-2\lambda z}}{2} R_\parallel^3 \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

betrachtet werden soll. Offensichtlich ist dieser Ausdruck für rein reelle Permittivitäten durch die Polstellen des Integranden, d.h. durch die Nullstellen im Nenner des Reflexionskoeffizienten R_\parallel^3 in Gl. (4.4.2) bestimmt. Das heißt, der Ausdruck N_\parallel aus Gl. (4.2.5) muss Null ergeben, was gerade für die Oberflächenmoden erfüllt ist. Der TM-Modenanteil der Energiedichte ist also — wie in den vorherigen Abschnitten bereits gezeigt wurde — für reelle Permittivitäten allein durch die Oberflächenmoden bestimmt.

Um nun die Beiträge der beiden Oberflächenplasmonenzweige in einer Schichtgeometrie zu bestimmen, soll der Einfachheit wegen von dem symmetrischen Spezialfall $\epsilon_1 = \epsilon_3 = \epsilon_0$ ausgegangen werden. Für die Permittivität wird aus dem gleichen Grund nicht die volle Drude-Formel, sondern das Plasmamodell aus Gl. (4.1.6) verwendet. In diesem Fall ergibt sich für den Reflexionskoeffizienten R_\parallel^3 im evaneszenten Nahfeld, d.h. es gilt $\lambda \gg k_0$, mit Gl. (2.4.30)

$$\begin{aligned} R_\parallel^3 &= \frac{r_\parallel^{02} (1 - e^{2ih_2d})}{1 - (r_\parallel^{02})^2 e^{2ih_2d}} \\ &\approx \frac{(2\omega^2 - \omega_p^2)}{\omega_p^2} (1 - e^{2\lambda d}) \left(\left[\frac{(2\omega^2 - \omega_p^2)}{\omega_p^2} e^{\lambda d} \right]^2 - 1 \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

Die Pole des Reflexionskoeffizienten sind daher erwartungsgemäß durch die beiden Plasmonenzweige aus Gl. (4.2.8) gegeben. Für Permittivitäten mit $\epsilon'' \neq 0$ liegen die Polstellen im Reflexionskoeffizienten in der unteren komplexen Frequenzebene, d.h. bei Frequenzen mit $\omega'' < 0$. Daher ist es geboten, die Pole, die für das Plasmamodell direkt auf der Integrationsachse liegen, in der oberen komplexen Frequenzebene zu umlaufen. Das Frequenzintegral für die Energiedichte in Gl. (4.4.3) kann daher

direkt mithilfe des Residuensatzes ausgeführt werden, wobei das Residuum für den Reflexionskoeffizienten

$$\text{Res}(R_{\parallel}^3) \Big|_{\omega_{\pm}} = \frac{(2\omega_{\pm}^2 - \omega_p^2)(1 - e^{2\lambda d})}{\mp 8\omega_{\pm} e^{\lambda d}} \quad (4.4.6)$$

ist. Umläuft man die Pole auf der Integrationsachse „oben herum“, so bekommt man für das Frequenzintegral

$$\begin{aligned} \text{Im} \int d\omega \frac{E(\omega, T)}{\omega} R_{\parallel}^3 &= -\pi \frac{\omega_p^2}{8} (e^{-2\lambda d} - 1) \left[\frac{E(\omega_-, T)}{\omega_-^2} - \frac{E(\omega_+, T)}{\omega_+^2} \right] \\ &= \frac{\pi}{4} [(e^{-\lambda d} + 1)E(\omega_-, T) - (e^{-\lambda d} - 1)E(\omega_+, T)]. \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

Man beachte, dass man durch die Anwendung des Residuensatzes auch die untere Integrationsgrenze des λ -Integrale festlegt, die ja zunächst durch k_0 gegeben ist und nun für die entsprechenden Residuen bei ω_- bzw. ω_+ durch ω_-/c bzw. ω_+/c ersetzt werden muss. Dieser Ausdruck kann nun für den Grenzfall dünner Platten $\lambda d \ll 1$ vereinfacht werden. Man erhält

$$\text{Im} \int d\omega \frac{E(\omega, T)}{\omega} R_{\parallel}^3 \approx \frac{\pi}{4} [2E(\omega_-, T) + \lambda d E(\omega_+, T)], \quad (4.4.8)$$

wobei der erste, d -unabhängige Term den Beitrag des niedrigfrequenten und der zweite Term, der linear in d ist, den Beitrag des hochfrequenten Oberflächenplasmonenzweiges für dünne Platten angibt. Im klassischen Grenzfall, d.h. $\hbar\omega_{\pm} \ll k_B T$ können die beiden Bose-Einstein-Funktionen durch $k_B T$ approximiert werden, sodass man schließlich für die Energiedichte in Gl. (4.4.3)

$$\begin{aligned} \langle u_{\parallel}^{\text{ev}} \rangle &= \text{Im} \int \frac{d\omega}{\omega} \frac{E(\omega, T)}{\pi^2} R_{\parallel}^3 \int_{k_0}^{\infty} d\lambda \frac{\lambda^2 e^{-2\lambda z}}{2} \\ &\approx k_B T \frac{1}{4\pi} \left[2 \int_{\omega_-/c}^{\infty} d\lambda \frac{\lambda^2 e^{-2\lambda z}}{2} + \int_{\omega_+/c}^{\infty} d\lambda \frac{\lambda^2 e^{-2\lambda z}}{2} \lambda d \right] \\ &\approx k_B T \frac{1}{4\pi} \left[2 \int_0^{\infty} d\lambda \frac{\lambda^2 e^{-2\lambda z}}{2} + \int_{\omega_p/c}^{\infty} d\lambda \frac{\lambda^2 e^{-2\lambda z}}{2} \lambda d \right] \\ &= \frac{k_B T}{16\pi z^3} + \mathcal{O}\left(\frac{k_B T d}{z^4}\right) \end{aligned} \quad (4.4.9)$$

bekommt. Der erste Term ist das bereits in Gl. (2.4.74) abgeleitete universelle Verhalten, das also allein von dem niedrigfrequenten Oberflächenplasmonenzweig herrührt. Der hochfrequente Zweig liefert für dünne Platten einen materialabhängigen Term, der allerdings linear mit d gegen Null strebt.

4.5 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden die Dispersionsrelationen für Oberflächenmoden in einer Halbraum- und einer Plattengeometrie hergeleitet. Es wurde gezeigt, dass die beiden

Oberflächenmoden auf den beiden Seiten einer Platte für Plattendicken $d \gg d_s$ die Dispersionsrelation für die Halbraumgeometrie erfüllen, sodass in diesem Fall der Oberflächenmodenzweig zweifach entartet ist. Für dünne Platten mit $d \ll d_s$ können die beiden Oberflächenmoden koppeln, sodass die Entartung aufgehoben wird und zwei Oberflächenplasmonenzweige entstehen, deren Frequenzen ω_+ bzw. ω_- oberhalb bzw. unterhalb des Halbraumergebnisses liegen.

Für Drude-Materialien wurde insbesondere der Einfluss der Oberflächenmoden — der Oberflächenplasmonen — auf die Energiedichte bzw. die lokale Zustandsdichte untersucht. Es wurde gezeigt, dass bei festem Beobachtungsabstand $z = \lambda^{-1}$ die beiden Oberflächenmodenzweige für dünne Platten $\lambda d \rightarrow 0$ zwei Resonanzen in der lokalen Zustandsdichte erzeugen, wobei die hochfrequente Oberflächenresonanz ω_+ gegen die Plasmafrequenz ω_p der Schicht und die niedrigfrequente Oberflächenresonanz ω_- gegen $\omega = 0$ konvergiert. Daher ist es bei einer gegebenen Temperatur T mit $\omega_{\text{th}} \ll \omega_p$ möglich, dass die niedrigfrequente Oberflächenplasmonenresonanz die spektrale Energiedichte im Frequenzbereich $\omega \leq \omega_{\text{th}}$ deutlich erhöht und zu dem charakteristischen $1/z^2$ -Verhalten der Energiedichte $\langle u_{\parallel} \rangle$ führt. Für sehr dünne Platten mit $d \ll d_{\text{uni}}$ macht sich eine Resonanz bei $\omega = 0$ in der lokalen Zustandsdichte bemerkbar, die für das universelle $1/z^3$ -Verhalten in der Energiedichte verantwortlich ist.

Für polare Medien ist das Verhalten der Oberflächenmoden bei Veränderung der Plattendicke ähnlich wie bei den Drude-Materialien. Für dünne Schichten koppeln die beiden Oberflächenmoden und es entstehen zwei Oberflächenphononenzweige ω_+ und ω_- , die oberhalb bzw. unterhalb des Halbraumergebnisses liegen. Allerdings besteht der entscheidende Unterschied darin, dass das niedrigfrequente Oberflächenphonon gegen ω_t , und damit gegen einen materialspezifischen Wert, konvergiert. Dementsprechend ist nicht zu erwarten, dass es für polare Medien ein universelles Verhalten in der Energiedichte gibt. Die Resonanzen in der lokalen Zustandsdichte bei festem Beobachtungsabstand $z = \lambda^{-1}$ liegen bei den entsprechenden Frequenzen ω_+ und ω_- für das gegebene λ . Die beiden Maxima für dünne Schichten mit $\lambda d \ll 1$ bewegen sich nach ω_l bzw. ω_t und werden dabei kleiner. Daher ist anzunehmen, dass die spektrale Energiedichte im Frequenzbereich zwischen ω_t und ω_l bei Verringerung der Plattendicke im Allgemeinen kleiner wird, sodass die Energiedichte selbst für dünne Platten unter den Halbraumwert sinkt.

Für beschichtete Medien konnte nun gezeigt werden, dass sich für das Verhalten einer Drude-Schicht auf einem polaren Bulk im Vergleich zu einer freien Schicht am generellen Verhalten der Oberflächenplasmonen und damit der Energiedichte nicht viel ändert. Für eine Drude-Schicht auf einem anderem Drude-Material als Bulkmedium wurde allerdings gezeigt, dass die Oberflächenplasmonenzweige stets auf das Frequenzintervall zwischen der Oberflächenplasmonenfrequenz des Bulkmediums $\omega_{p1}/\sqrt{2}$ und der Plasmafrequenz des Coatings ω_{p2} beschränkt sind. Damit wird die spektrale Energiedichte im Bereich der thermischen Frequenz ω_{th} nicht durch die Oberflächenplasmonen beeinflusst, solange $\omega_{\text{th}} \ll \omega_{p1}/\sqrt{2}$ und $\omega_{\text{th}} \ll \omega_{p2}/\sqrt{2}$ erfüllt sind. Damit ist klar, dass Drude-Metallschichten auf polaren bzw. Drude-Bulkmedien sehr unterschiedliche Energiedichten liefern müssen, weil im ersten Fall die niedrigfrequente Oberflächenplasmonenresonanz für dünne Platten in den thermisch zugänglichen Frequenzbereich rutscht, wohingegen im zweiten Fall die Ober-

flächenresonanzen nicht angeregt werden können, solange die Plasmafrequenzen des Bulk- und des Schichtmediums weit größer als die thermische Frequenz ω_{th} sind.

Im letzten Abschnitt wurde schließlich der Beitrag der Oberflächenplasmonen für eine dünne Drude-Schicht explizit berechnet. Mithilfe des optischen Theorems und des Residuensatzes wurde bestätigt, dass das universelle Verhalten allein durch den niedrigfrequenten Oberflächenplasmonenzweig verursacht wird, wohingegen der hochfrequente Zweig einen materialabhängigen Beitrag liefert, der für dünne Platten linear mit d verschwindet.

Teil III

Strahlungswärmetransport im Nahfeld

In diesem dritten Teil der Dissertation wird der Strahlungswärmetransport zwischen zwei dielektrischen Körpern mit verschiedener Temperatur für solche Abstände näher untersucht, für die Nahfeldeffekte den Energieaustausch wesentlich beeinflussen. Dazu wird im ersten Kapitel dieses dritten Teils die sogenannte Polder-van Hove-Formel [71, 72, 73, 74, 75] innerhalb der Rytovschen fluktuierenden Elektrodynamik abgeleitet, die den Strahlungswärmetransport zwischen zwei dielektrischen Halbräumen mit verschiedenen Temperaturen T_1 und T_2 , die durch einen Vakuumpalt getrennt sind, für alle Abstände a zwischen diesen Dielektrika beschreibt. Von besonderem Interesse sind hier die Abstände, für die die evaneszenten Moden in das jeweils gegenüberliegende Medium eindringen können und dadurch derart zum Strahlungswärmetransport beitragen, dass man Werte erhält, die um Größenordnungen über den Schwarzkörperwert liegen, den man mithilfe des Stefan-Boltzmann-Gesetzes bestimmen kann.

Ein wesentlicher Mechanismus, der zum Nahfeldwärmetransport beiträgt, ist dabei wieder die Oberflächenmodenkopplung, die im stark evaneszenten Nahfeld zu Resonanzen bei den beiden Oberflächenmodenfrequenzen der jeweiligen Halbräume führt [17, 76]. Somit ergibt sich im stark evaneszenten Nahfeld für dielektrische Medien ein Wärmestrom, der einem einfachen a^{-2} -Potenzgesetz gehorcht und im wesentlichen durch die TM-Moden dominiert ist. Für den Wärmestrom zwischen zwei Metallen hingegen wird numerisch gezeigt, dass dieses Potenzgesetz zumindest für sehr gute Leiter auf Abständen oberhalb 1 nm durch den Beitrag der TE-Moden überlagert wird, der für Metalle den Nahfeldwärmetransport dominiert [75]. Dieser TE-Moden-Beitrag führt für sehr kleine Abstände a zwischen den Halbräumen auf einen konstanten Wärmestrom. Es wird gezeigt, dass man dieses gegensätzliche Verhalten des Wärmestromes für Dielektrika und Drude-Materialien anhand der entsprechenden Nahfeldenergiedichten oberhalb dieser Materialien verstehen kann.

Um den Einfluss der im vorherigen Teil beschriebenen Oberflächenplasmonenkopplung innerhalb eines frei stehenden Metallfilms bzw. eines mit einem Metallcoating beschichteten Materials auf den Nahfeldwärmetransport zu untersuchen, wird der entsprechende Ausdruck für die Polder-van Hove-Formel für eine Schichtgeometrie abgeleitet. Es zeigt sich, dass die Erhöhung der Nahfeldenergiedichte für ein dünnes Metallcoating der Dicke $d \ll d_s$ auf einem Dielektrikum durch die Oberflächenplasmonenkopplung innerhalb des Coatingmaterials auf einen erhöhten Nahfeldwärmetransport mit einem charakteristischen a^{-1} -Potenzgesetz führt, wohingegen ein mit einem Metallcoating beschichtetes Drude-Metall zu einem charakteristischen a^{-3} -Potenzgesetz für $a \gg d$ führt. Solch eine Untersuchung des Nahfeldwärmetransfers innerhalb einer Schichtgeometrie gibt es meines Wissens in der bestehenden Literatur noch nicht, sodass hier erstmals gezeigt wird, dass der im vorherigen Kapitel beschriebene Mechanismus der Oberflächenplasmonenkopplung den Nahfeldwärmetransport in genau definierter Weise beeinflusst.

Anhand des sogenannten Dipolmodells [74, 77, 78] wird weiterhin verdeutlicht, dass die Geometrie einen erheblichen Einfluss auf den Nahfeldwärmetransport hat. Innerhalb dieses Dipolmodells, das den Strahlungswärmetransport zwischen einer dielektrischen Kugel und einem dielektrischen Halbraum beschreibt, zeigt sich, dass der Wärmestrom im Nahfeld proportional zur elektrischen Nahfeldenergiedichte des Halbraumes ist, die in sehr guter Näherung mit dem reinen TM-Moden-Beitrag

der Energiedichte übereinstimmt. Daher muss sich die Oberflächenplasmonenkopplung in einem Metallcoating, das auf ein Dielektrikum aufgebracht ist, direkt in den Potenzgesetzen für den Wärmestrom niederschlagen. Es wird daher hier erstmals gezeigt, dass der Nahfeldwärmestrom zwischen einer dielektrischen Kugel und einem mit Metall beschichteten Medium die Potenzgesetze reproduziert, die im vorherigen Teil für die Nahfeldenergiedichte oberhalb dieser Schichtgeometrie abgeleitet wurden.

Im zweiten Kapitel wird der Frage nachgegangen, wie die Divergenz des Wärmestroms für kleine Abstände behoben werden kann. Schließlich ist der Nahfeldwärmestrom zwischen zwei Halbräumen innerhalb der lokalen Beschreibung proportional zu a^{-2} und damit divergent. Diese Divergenz hat in der Literatur zu einer regen Diskussion über ihren physikalischen Gehalt geführt [79, 80, 81, 82], wobei bemerkt werden muss, dass diese Divergenz stark mit der z^{-3} -Divergenz der Nahfeldenergiedichte oberhalb eines lokalen dielektrischen Mediums zusammenhängt. Da eine divergente Energiedichte insgesamt zu einem divergenten Ausdruck für die Gesamtenergie des betrachteten Systems führt, muss angenommen werden, dass diese Divergenz unphysikalisch ist. Eine Lösung dieses prinzipiellen Problems kann durch die Berücksichtigung der räumlichen Dispersion — also mit einer nichtlokalen Beschreibung der Dielektrika — erreicht werden. Solch eine Beschreibung führt innerhalb des sogenannten SCIB-Modells [83] auf einen nichtdivergenten Ausdruck für die Nahfeldenergiedichte [48] und folglich auch auf einen nichtdivergenten Ausdruck für den Nahfeldwärmestrom. Obwohl diese nichtlokale Beschreibung für Metalle bereits bei Abständen a im Bereich der mittleren freien Weglänge des Elektrons berücksichtigt werden muss, so haben diese Effekte dennoch nur einen relativ geringen Einfluss auf den Nahfeldwärmestrom zwischen zwei metallischen Halbräumen, wie bereits von Volokitin und Persson [75] festgestellt wurde.

Da in der jüngsten Literatur versucht wurde, die sogenannten Leontovich-Randbedingungen [21] als die richtigen Randbedingungen für die Beschreibung der Casimir-van der Waals-Kräfte und des Nahfeldwärmestromes zwischen Metallen zu etablieren [84, 85, 86, 87], wird vor dem Hintergrund der lokalen und nichtlokalen Beschreibung gezeigt, dass diese sogenannten Leontovich-Randbedingungen für gute Leiter und Abstände größer als die Skintiefe zwar eine Berechtigung haben, aber die gleichen Werte liefern wie die lokale Theorie. Für Abstände unterhalb der Skintiefe bzw. unterhalb der mittleren freien Weglänge verlieren diese Randbedingungen ihre physikalische Aussagekraft und führen damit zu Ergebnissen, die weit von den Ergebnissen der nichtlokalen Theorie abweichen, die für solche Abstandsbereiche als richtig anzusehen ist.

Im letzten Kapitel dieses dritten Teils wird schließlich versucht, die experimentellen Daten für ein sogenanntes Rasterwärmemikroskop [88, 89] mithilfe der Polder-van Hove-Formel bzw. des Dipolmodells zu beschreiben. Es zeigt sich, dass die experimentellen Daten nicht vollständig mithilfe dieser beiden Modelle beschreibbar sind. Daher wird ein phänomenologisches Sensormodell aufgestellt, das es mithilfe einer heuristisch eingeführten Korrelationslänge ermöglicht, die Daten im gesamten Abstandsbereich gut zu beschreiben [3].

Kapitel 5

Strahlungswärmetransport

In diesem Kapitel wird der Nahfeldwärmestrom zwischen dielektrischen Medien verschiedener Temperatur untersucht, die durch das Vakuum in einem Abstand a voneinander getrennt sind. Dazu werden im ersten Abschnitt zunächst vorbereitende Überlegungen angestellt, die es erlauben, eine Längenskala anzugeben, ab der Nahfeldeffekte im Strahlungswärmeübertrag auftreten.

Im darauffolgenden Abschnitt wird der grundlegende Ausdruck für den Strahlungswärmetransport zwischen zwei dielektrischen Halbräumen hergeleitet, der bereits 1971 von Polder und van Hove [71] mithilfe der Rytovschen Theorie bestimmt wurde. Eine Erweiterung des Polder-van Hove-Ergebnisses für nicht-lokale Medien wurde 1980 von Levin *et al.* [72] gegeben, wobei von Volokitin und Persson 2001 [75] gezeigt wurde, dass die nicht-lokalen Effekte für den Strahlungswärmetransport zwischen zwei metallischen Halbräumen in physikalisch sinnvollen Abstandsbereichen vernachlässigbar sind. Bei der Diskussion des Ergebnisses im dritten Abschnitt werden daher wieder lokale Permittivitäten für die polaren Medien und Drude-Materialien verwendet und es wird numerisch gezeigt, dass sich der Nahfeldwärmestrom zwischen diesen beiden Materialarten deutlich unterscheidet [73, 75].

Um den Einfluss eines Coatings auf den Strahlungswärmetransport zu untersuchen, wird auch der Nahfeldwärmestrom zwischen einem Halbraum und einem beschichteten Halbraum studiert. Der Strahlungswärmetransport wurde zwar in solchen Geometrien bereits in anderen Zusammenhängen betrachtet [75, 90], die Abhängigkeit des Strahlungswärmetransportes von einem Metallcoating wurde jedoch noch nicht genau untersucht. Insbesondere wird hier meines Wissens erstmals gezeigt, dass die Oberflächenplasmonenkopplung innerhalb des Metallcoatings, die zu einem Anstieg in der Energiedichte oberhalb einer Schichtgeometrie führt, in einer Erhöhung des Strahlungswärmetransportes im Nahfeld mit einem charakteristischen Abstandsverhalten resultiert.

Im letzten Abschnitt wird schließlich das Dipolmodell [77, 78] eingeführt und anhand dessen gezeigt, dass der Nahfeldwärmestrom stark von der Geometrie des Systems abhängt. Dabei werden wiederum nur lokale Permittivitäten verwendet, obwohl in diesem Fall zu erwarten ist, dass die nicht-lokalen Effekte für Metalle einen erheblichen Einfluss für Abstände kleiner als die mittlere freie Weglänge l des Elektrons haben werden, da durch diese Effekte die elektrische Energiedichte im

Nahfeld stark erhöht wird [48, 91]. Es wird gezeigt, dass der Nahfeldwärmehtransport zwischen einer Kugel und einem dielektrischen Medium direkt proportional zur elektrischen lokalen Zustandsdichte oberhalb dieses Mediums bzw. zur elektrischen Energiedichte ist, wobei genauer untersucht wird, in welchen Abstandsbereichen die elektrische lokale Zustandsdichte durch den entsprechenden TM-Modenanteil der lokalen Zustandsdichte approximiert werden kann. Insbesondere werden die Ausdrücke für den Strahlungswärmehtransport zwischen einer Kugel und einem dielektrischen Halbraum bzw. einem beschichteten Halbraum angegeben, wobei die Oberflächenplasmonenkopplung innerhalb des Metallcoatings auf einem polaren Substrat wieder eine Erhöhung des Nahfeldwärmehtransportes herbeiführt.

5.1 Vorbereitende Überlegungen

Der Strahlungswärmehtransport bzw. die Energie, die pro Fläche und Zeit zwischen zwei Medien im lokalen thermodynamischen Gleichgewicht mit verschiedenen Temperaturen ausgetauscht wird, kann man für makroskopische Abstände a zwischen den betrachteten Medien mithilfe des Kirchhoff-Planckschen-Strahlungsgesetzes [22] beschreiben. Verringert man allerdings den Abstand a zwischen den beiden Medien soweit, dass er vergleichbar mit der thermischen Wellenlänge λ_{th} des kälteren Mediums wird, die selbst durch das Wiensche Verschiebungsgesetz [92]

$$\lambda_{\text{W}}T = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ mK} \quad (5.1.1)$$

gegeben ist, so kann das Kirchhoff-Plancksche-Strahlungsgesetz nicht mehr angewandt werden. Das liegt daran, dass neben den propagierenden Moden für Abstände $a < \lambda_{\text{W}}$ auch evaneszente Moden zum Strahlungswärmeübertrag zwischen den Medien beitragen. Übrigens stimmt die in Gl. (2.4.45) definierte thermische Wellenlänge in guter Näherung mit λ_{W} überein, d.h. es gilt

$$\lambda_{\text{th}} = \frac{\hbar c}{k_{\text{B}}T} \approx \lambda_{\text{W}}. \quad (5.1.2)$$

Für Abschätzungen genügt es daher, die charakteristische thermische Wellenlänge λ_{th} anstelle der genaueren Größe λ_{W} aus dem Wienschen Verschiebungsgesetz zu betrachten.

Um diesen Sachverhalt zu verstehen, betrachte man zunächst einen unendlich ausgedehnten Halbraum bei $z < 0$ mit der Temperatur T_1 und der reellen Permittivität $\epsilon_{r1} \geq 1$, an den das Vakuum bei $z > 0$ angrenzt. Aufgrund der verschiedenen Materialeigenschaften können im Medium Wellen mit Wellenzahlen

$$k_1 = \sqrt{k_{1z}^2 + \lambda^2} = k_0 \sqrt{\epsilon_{r1}} \quad (5.1.3)$$

propagieren, wohingegen im Vakuum nur elektromagnetische Transversalwellen mit $k_0 = \sqrt{k_{0z}^2 + \lambda^2}$ erlaubt sind. Da $\epsilon_{r1} \geq 1$ ist, können daher im Medium Wellen existieren, die im Vakuum nicht erlaubt sind. Aufgrund der Stetigkeitsbedingungen bei $z = 0$ führen diese Wellen im Vakuum auf exponentiell abklingende Lösungen, wohingegen die erlaubten Wellen propagierende Lösungen darstellen. Für eine ebene

Welle im Vakuum mit dem Phasenfaktor $\exp(i(k_{z0}z - \omega t))$ ist klar, dass man für $\lambda < k_0$ eine propagierende Lösung erhält, da k_{z0} rein reell ist, für $\lambda > k_0$ dagegen ist $k_{z0} = i\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}$ rein imaginär, sodass man rein evaneszente Lösungen bekommt.

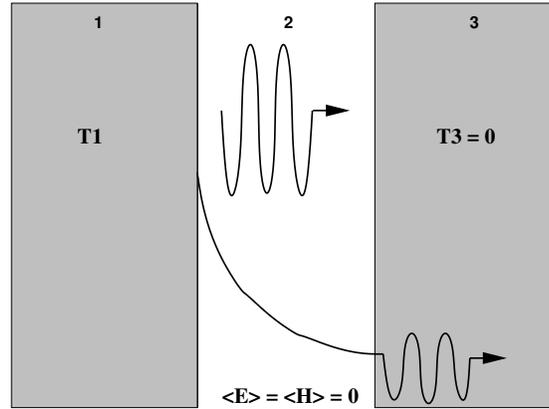


Abbildung 5.1: Skizze zur Veranschaulichung des Strahlungswärmetransportes zwischen zwei ausgedehnten Halbräumen.

Wie bereits in den vorherigen Kapiteln diskutiert wurde, führen die propagierenden Moden auf eine thermische Abstrahlung gemäß dem Kirchhoff-Planckschen Strahlungsgesetz. Die evaneszenten Moden wurden anhand der Energiedichte oberhalb eines Halbraumes, einer Platte und eines beschichteten Halbraumes ebenfalls bereits diskutiert. Da die evaneszenten Moden für $\lambda \gg k_0$ auf einem Abstand $z \approx \lambda^{-1}$ exponentiell abklingen, ist klar, dass diese nur für Abstände $k_0 z \ll 1$, d.h. im Nahfeld, wichtig sind. Bei einer festen Temperatur T_1 ist die charakteristische Wellenlänge k_0 durch die thermische Wellenlänge λ_W^{-1} bzw. λ_{th}^{-1} festgelegt, sodass das Nahfeld — also der Abstandsbereich, in dem die evaneszenten Moden eine Rolle spielen — durch Abstände $z \ll \lambda_W$ bzw. $z \ll \lambda_{th}$ mit λ_W aus Gl. (5.1.1) bzw. λ_{th} aus Gl. (5.1.2) gegeben ist. Für $T_1 = 300 \text{ K}$ hat man beispielsweise $\lambda_W \approx 9,7 \mu\text{m}$ bzw. $\lambda_{th} \approx 7,2 \mu\text{m}$.

Betrachtet man nun einen zweiten unendlich ausgedehnten Halbraum mit der Temperatur $T_3 = 0$ und der Permittivität ϵ_{r3} im Abstand a vom ersten Halbraum entfernt (siehe Abb. 5.1), so können im Fernfeld, d.h. es gilt $a \gg \lambda_{th}$, nur die propagierenden Moden des Dielektrikums 1 Beiträge zum Strahlungswärmetransport liefern, wobei dieser durch das Kirchhoff-Plancksche Strahlungsgesetz gegeben ist. Verringert man allerdings den Abstand derart, dass $a \ll \lambda_{th}$ gilt, so können die evaneszenten Moden in das zweite Medium ragen und dort weiter propagieren. Man kann also sagen, dass die Photonen, die im Nahfeld exponentiell gedämpft sind, durch den Vakuumspalt tunneln und so in das gegenüberliegende Dielektrikum gelangen. Aufgrund dieses Photonentunnelns können die evaneszenten Moden zum Strahlungswärmeübertrag beitragen und es wird sich zeigen, dass man Werte für den Strahlungswärmetransport im Nahfeld erhält, die weit über dem Schwarzkörperwert liegen, was anschaulich bereits klar ist, da die evaneszenten Moden Beiträge zur Energiedichte liefern, die den Schwarzkörperwert übersteigen. Der Poynting-Vektor muss daher für solch eine Konfiguration auch Informationen über die evaneszenten

Moden enthalten.

Da die evaneszenten Moden oberhalb des Dielektrikums 1 durch die evaneszenten Moden in der Energiedichte des Dielektrikums gegeben sind, ist außerdem zu erwarten, dass die Diskussion der Energiedichte in den vorherigen Kapiteln qualitative Aussagen über den entsprechenden Nahfeldwärmehtransport zulässt.

5.2 Ableitung der Polder-van Hove-Formel

In diesem Abschnitt soll der Energietransfer zwischen zwei dielektrischen Halbräumen (siehe Abb. 5.1) bestimmt werden, die im Abstand a durch einen Vakuumpalt, d.h. $\epsilon_2 = \epsilon_0$, voneinander getrennt sind und verschiedene Temperaturen $T_1 \neq T_3$ besitzen. Um den Energietransport von Dielektrikum 1 zu Dielektrikum 3 zu bestimmen, wird zunächst vorausgesetzt, dass sich Medium 1 im lokalen Gleichgewicht mit der Temperatur $T_1 \neq 0$ K befindet und das Vakuum sowie das Medium 3 die Temperatur $T = 0$ K haben. Die von Dielektrikum 1 in das Dielektrikum 3 abgestrahlte Energie pro Fläche und Zeit ist durch die z -Komponente des Poynting-Vektors bei $z = a$ gegeben, der durch die fluktuierenden Felder im Vakuumpalt bestimmt ist, die ihrerseits durch die Quellenströme in Dielektrikum 1 erzeugt werden. Man hat daher mit Gl. (1.1.13) für die Energie $\langle S_z^{13}(z = a) \rangle$, die pro Fläche und Zeiteinheit von Dielektrikum 1 zum Dielektrikum 3 fließt, den Ausdruck

$$\begin{aligned} \langle S_z^{13}(z = a) \rangle &= \epsilon_{\alpha\beta z} \langle E_\alpha H_\beta \rangle \\ &= \epsilon_{\alpha\beta z} \int_0^\infty d\omega E_0(\omega, T_1) \frac{\omega \epsilon''(\omega)}{\pi} (\mu_0^2 \omega^2) \int_{z' < 0} d^3 r' \left(\mathbf{G}_{21}^E \mathbf{G}_{21}^{H\dagger} \right)_{\alpha\beta} + \text{c.c.} \end{aligned} \quad (5.2.1)$$

Um den Strahlungswärmehtransport vom Dielektrikum 3 zum Dielektrikum 1 zu bestimmen, wird genau die umgekehrte Situation angenommen. Es gelte dann $T_1 = 0$ K und $T_3 \neq 0$ K und gesucht ist die z -Komponente des Poynting-Vektors $\langle S_z^{31}(z = 0) \rangle$, der durch die fluktuierenden Felder gegeben ist, die durch die Quellenströme im Dielektrikum 3 erzeugt werden. Genau wie im ersten Kapitel wird sich herausstellen, dass der Poynting-Vektor aufgrund der Spiegelsymmetrie invariant unter Vertauschung der Materialindizes $1 \leftrightarrow 3$ ist, sodass sich $\langle S_z^{13}(z = a) \rangle$ und $\langle S_z^{31}(z = 0) \rangle$ nur durch das Vorzeichen und die Bose-Einstein-Funktion unterscheiden. Der Energietransport zwischen beiden Dielektrika ist daher im Netto durch

$$\begin{aligned} \langle S_z \rangle &= \langle S_z^{13}(z = a, T_1) \rangle - \langle S_z^{13}(z = a, T_3) \rangle \\ &= \epsilon_{\alpha\beta z} \int_0^\infty d\omega \left[E_0(\omega, T_1) - E_0(\omega, T_3) \right] \frac{\omega \epsilon''(\omega)}{\pi} (\mu_0^2 \omega^2) \int_{z' < 0} d^3 r' \left(\mathbf{G}_{21}^E \mathbf{G}_{21}^{H\dagger} \right)_{\alpha\beta} + \text{c.c.} \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

gegeben. Es ist somit wieder sichergestellt, dass man für $T_1 = T_3$ keinen mittleren Wärmehstrom erhält. Man kann diesen Ausdruck also auch ohne den Rückgriff auf die Symmetrie des Systems mit dem Argument erhalten, dass im globalen Gleichgewicht der Energietransport im Mittel verschwinden muss. Man beachte aber, dass man aufgrund dieser Vorgehensweise wieder ein lokales Gleichgewicht innerhalb der

Dielektrika 1 und 3 voraussetzt und damit versucht, eine Nichtgleichgewichtssituation adäquat zu beschreiben. Für das Fernfeld — also für die propagierenden Moden — kann man diese Vorgehensweise rechtfertigen [93, 94], solange das lokale Gleichgewicht innerhalb der Dielektrika aufrecht gehalten werden kann. Im Anhang B wird daher der Versuch unternommen, den Abstandsbereich im Nahfeld abzuschätzen, für den die Annahme eines lokalen thermodynamischen Gleichgewichts sinnvoll erscheint. Es stellt sich dabei heraus, dass diese Annahme selbst für Abstände a im Nanometerbereich eine gute Beschreibung der eigentlichen Nichtgleichgewichtssituation liefern sollte.

Für die Auswertung der Formel in Gl. (5.2.2) genügt es, $\langle S_z^{13}(z = a) \rangle$ in Gl. (5.2.1) zu berechnen und daraus den Gesamtbeitrag $\langle S_z \rangle$ zu bestimmen. Wie in den vorherigen Kapiteln soll eine lokale Permittivität $\epsilon_i = \epsilon_i(\omega)$ mit $i = 1, 2, 3$ vorausgesetzt und der longitudinale Anteil in der dyadischen Greenschen Funktion vernachlässigt werden, sodass man im Vakuumpalt bzw. Medium 2 die Greenschen Funktionen

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_{21}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \frac{i}{4\pi} \int_0^\infty d\lambda \sum_{n=0}^\infty \frac{(2 - \delta_{n,0})}{\lambda h_1} \left\{ (T_{\text{TE}} \mathbf{M}_{\pm n\lambda}(h_2) \right. \\ &\quad \left. + R_{\text{TE}} \mathbf{M}_{\pm n\lambda}(-h_2)) \otimes \mathbf{M}'_{\pm n\lambda}(-h_1) + \parallel \right\} \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_{21}^H(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \frac{k_2}{4\pi\omega\mu_0} \int_0^\infty d\lambda \sum_{n=0}^\infty \frac{(2 - \delta_{n,0})}{\lambda h_1} \left\{ (T_{\text{TE}} \mathbf{N}_{\pm n\lambda}(h_2) \right. \\ &\quad \left. + R_{\text{TE}} \mathbf{N}_{\pm n\lambda}(-h_2)) \otimes \mathbf{M}'_{\pm n\lambda}(-h_1) + \parallel \right\} \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

ansetzen kann. Die Implementierung der Randbedingungen aus Gl. (1.1.7) führt für die TE-Moden auf

$$T_{\text{TE}} = \frac{2t_\perp^{21}}{N_\perp} \quad \text{und} \quad R_{\text{TE}} = r_\perp^{23} e^{2ih_2a} T_{\text{TE}}, \quad (5.2.5)$$

wobei

$$t_\perp^{21} := \frac{2h_1}{h_2 + h_1}, \quad \text{und} \quad N_\perp := 1 - r_\perp^{23} r_\perp^{21} e^{2ih_2a} \quad (5.2.6)$$

gelten. Entsprechende Beziehungen erhält man für die TM-Moden.

Mithilfe der Greenschen Funktionen in Gl. (5.2.4) und der Orthogonalitätsrelationen in Gl. (1.4.12) kann man die Volumenintegration über das Quellenvolumen bequem ausführen und bekommt zunächst

$$\begin{aligned} \int_{z' < 0} d^3r' \left(\mathbb{G}_{21}^E \mathbb{G}_{21}^{H\dagger} \right)_{\alpha\beta} &= \frac{i\bar{k}_2}{(4\pi)^2 \omega \mu_0} \int d\lambda \sum_{n=0}^\infty \frac{(2 - \delta_{n,0})^2 \pi}{|h_1|^2 h_1'' \lambda} \left\{ |T_{\text{TE}}|^2 (\mathbf{M}(h_2) \otimes \bar{\mathbf{N}}(h_2))_{\alpha\beta} \right. \\ &\quad + R_{\text{TE}} \bar{T}_{\text{TE}} (\mathbf{M}(-h_2) \otimes \bar{\mathbf{N}}(h_2))_{\alpha\beta} + \bar{R}_{\text{TE}} T_{\text{TE}} (\mathbf{M}(h_2) \otimes \bar{\mathbf{N}}(-h_2))_{\alpha\beta} \\ &\quad \left. + |R_{\text{TE}}|^2 (\mathbf{M}(-h_2) \otimes \bar{\mathbf{N}}(-h_2))_{\alpha\beta} + \parallel \right\}. \end{aligned} \quad (5.2.7)$$

Da es aufgrund der Translationssymmetrie in der Ebene senkrecht zur z -Achse wiederum keinen ausgezeichneten Punkt gibt, muss das Ergebnis unabhängig von der Wahl des Beobachtungspunktes in dieser Ebene sein. Wählt man $r = 0$, so erhält man

$$\epsilon_{\alpha\beta z}(\mathbf{M}(h_2) \otimes \overline{\mathbf{N}}(h_2))_{\alpha\beta} = -\frac{i\bar{h}_2}{2k_2}[\delta_{n,1} + \delta_{n,-1}]\lambda^2 e^{-2h_2''z}, \quad (5.2.8)$$

$$\epsilon_{\alpha\beta z}(\mathbf{M}(-h_2) \otimes \overline{\mathbf{N}}(-h_2))_{\alpha\beta} = \frac{i\bar{h}_2}{2k_2}[\delta_{n,1} + \delta_{n,-1}]\lambda^2 e^{2h_2''z}, \quad (5.2.9)$$

$$\epsilon_{\alpha\beta z}(\mathbf{M}(-h_2) \otimes \overline{\mathbf{N}}(h_2))_{\alpha\beta} = -\frac{i\bar{h}_2}{2k_2}[\delta_{n,1} + \delta_{n,-1}]\lambda^2 e^{-2ih_2'z}, \quad (5.2.10)$$

$$\epsilon_{\alpha\beta z}(\mathbf{M}(h_2) \otimes \overline{\mathbf{N}}(-h_2))_{\alpha\beta} = \frac{i\bar{h}_2}{2k_2}[\delta_{n,1} + \delta_{n,-1}]\lambda^2 e^{2ih_2'z}. \quad (5.2.11)$$

Wertet man diese Ausdrücke bei $z = a$ aus, bekommt man daher mit $k_2 = k_0$

$$\begin{aligned} \epsilon_{\alpha\beta z} \int_{z' < 0} d^3r' \left(\mathbf{G}_{21}^E \mathbf{G}_{21}^{H\dagger} \right)_{\alpha\beta} + \text{c.c.} &= \frac{1}{\omega\mu_0(4\pi)^2} \int d\lambda \frac{\pi\lambda}{|h_1|^2 h_1''} \left\{ \right. \\ &2h_0' (|T_{\text{TE}}|^2 e^{-2h_0''a} - |R_{\text{TE}}|^2 e^{2h_0''a}) \\ &\left. + 4h_0'' \text{Im}(R_{\text{TE}} \overline{T_{\text{TE}}} e^{-2ih_0'a}) + \parallel \right\}. \end{aligned} \quad (5.2.12)$$

Aufgrund dieser Darstellung bietet sich eine Aufspaltung in propagierende und evaneszente Moden an, denn für die propagierenden Moden gilt $\lambda < k_0$, sodass h_0 rein reell ist und damit $h_0'' = 0$ gilt. Daher gibt der erste Term in den geschweiften Klammern den Anteil der propagierenden Moden an. Für die evaneszenten Moden gilt dagegen $\lambda > k_0$, sodass $h_0 = i\gamma$ rein imaginär ist und damit $h_0' = 0$. Daher gibt der zweite Term innerhalb der geschweiften Klammern den Anteil der evaneszenten Moden an. Setzt man nun die Transmissions- und Reflexionskoeffizienten aus Gl. (5.2.5) ein, trennt die propagierenden und evaneszenten Moden und benutzt die Relationen aus Gl. (1.7.12), so erhält man

$$\begin{aligned} \epsilon_{\alpha\beta z} \int_{z' < 0} d^3r' \left(\mathbf{G}_{21}^E \mathbf{G}_{21}^{H\dagger} \right)_{\alpha\beta} + \text{c.c.} &= \frac{1}{\omega\mu_0(4\pi)^2} \left(\int_0^{k_0} \frac{2\pi\lambda}{h_1'' h_1'} \frac{(1 - |r_{\perp}^{23}|^2)(1 - |r_{\perp}^{21}|^2)}{|N_{\perp}|^2} \right. \\ &\left. + \int_{k_0}^{\infty} \frac{4\pi\lambda}{h_1'' h_1'} 2 \frac{\text{Im}(r_{\perp}^{23}) \text{Im}(r_{\perp}^{21}) e^{-2\gamma a}}{|N_{\perp}|^2} \right) + \parallel. \end{aligned} \quad (5.2.13)$$

Mit der Hilfsrelation $\epsilon_1'' = 2\epsilon_0 h_1' h_1'' / k_0^2$ aus Gl. (1.6.8) kann man schließlich den Poynting-Vektor aus Gl. (5.2.1) für den Energiefluss von Dielektrikum 1 zum Dielektrikum 3 durch

$$\begin{aligned} \langle S_z^{13}(z = a) \rangle &= \int_0^{\infty} d\omega \frac{E_0(\omega, T_1)}{(2\pi)^2} \left\{ \int_0^{k_0} d\lambda \lambda \frac{(1 - |r_{\perp}^{23}|^2)(1 - |r_{\perp}^{21}|^2)}{|N_{\perp}|^2} \right. \\ &\left. + \int_{k_0}^{\infty} d\lambda \lambda \frac{4\text{Im}(r_{\perp}^{23}) \text{Im}(r_{\perp}^{21}) e^{-2\gamma a}}{|N_{\perp}|^2} + \parallel \right\} \end{aligned} \quad (5.2.14)$$

angeben. Man sieht, dass dieser Ausdruck invariant bei Vertauschung der Indizes $1 \leftrightarrow 3$ ist, sodass der Gesamtenergieübertrag entsprechend Gl. (5.2.2) durch

$$\begin{aligned} \langle S_z \rangle = & \int_0^\infty d\omega \frac{E_0(\omega, T_1) - E_0(\omega, T_3)}{(2\pi)^2} \left\{ \int_0^{k_0} d\lambda \lambda \frac{(1 - |r_\perp^{23}|^2)(1 - |r_\perp^{21}|^2)}{|N_\perp|^2} \right. \\ & \left. + \int_{k_0}^\infty d\lambda \lambda \frac{4\text{Im}(r_\perp^{23})\text{Im}(r_\perp^{21})e^{-2\gamma a}}{|N_\perp|^2} + \parallel \right\} \end{aligned} \quad (5.2.15)$$

gegeben ist. Das ist die Polder-van Hove-Formel [71], die den Strahlungswärmeübertrag zwischen zwei Halbräumen mit den Temperaturen T_1 und T_3 beschreibt. Im Gegensatz zur Halbraum- bzw. Plattengeometrie enthält der Poynting-Vektor diesmal nicht nur Informationen über die propagierenden, sondern auch über die evaneszenten Moden.

5.3 Strahlungswärmetransport

Wegen ihrer Struktur kann man die Polder-van Hove-Formel in Gl. (5.2.15) wieder in der Kurzschreibweise

$$\langle S_z \rangle = \int d\omega \frac{E_0(\omega, T_1) - E_0(\omega, T_3)}{(2\pi)^2} \int d\lambda \lambda (T_\perp^{13} + T_\parallel^{13}) \quad (5.3.1)$$

angeben, wobei die Transmissionskoeffizienten T^{13} von Medium 1 nach Medium 3 auch durch die Transmissionskoeffizienten T^{12} und T^{23} aus Gl. (1.6.12) in der Form

$$T^{13} = \frac{T^{12}T^{23}e^{-2h_0''a}}{|N|^2} = \frac{T^{12}T^{23}e^{-2h_0''a}}{|1 - r^{23}r^{21}e^{2ih_2a}|^2} \quad (5.3.2)$$

ausgedrückt werden können.

Der Strahlungswärmetransport zwischen zwei Halbräumen ist für die propagierenden Moden durch die Abstrahlung der beiden Halbräume bestimmt, die durch die Transmissionskoeffizienten T^{12} und T^{23} gegeben ist, und die entsprechende Mehrfachreflexion zwischen den beiden Halbräumen, die durch den Fabry-Perot-Nenner $|N|^2$ berücksichtigt wird. Für die evaneszenten Moden gilt eine ähnliche Aussage, wobei T^{12} und T^{23} im Prinzip die Energiedichte der evaneszenten Moden in der Nähe der beiden Halbräume bestimmen und der Nenner $|N|^2$ für die evaneszenten TM-Moden die Oberflächenmodenkopplung ermöglicht. Diese Kopplung und das damit verbundene Aufspalten der Dispersionsrelation der Oberflächenmoden kann man gut in dem Contourplot für T_\parallel^{13} in Abb. 5.2 für zwei Au-Halbräume sehen, der „rechts“ der Lichtlinie erstaunlich gut mit der Dispersionsrelation in Abb. 4.2 übereinstimmt.

Die Oberflächenplasmonenkopplung mit den jeweils resultierenden Frequenzen ω_\pm aus Gl. (4.2.8) wird hier nur wirksam, solange man sich nicht im quasistatischen Bereich befindet, d.h. für Abstände größer als die Skintiefe d_s der beiden Halbräume. Betrachtet man zwei Halbräume aus dem gleichen Material mit der Permittivität $\epsilon(\omega)$, dann ist für Abstände mit $a \ll d_s$ bzw. $\lambda \gg k_0 \sqrt{|\epsilon(\omega)|}$ das evaneszente Nahfeld wie gehabt durch die Moden mit den lateralen Wellenzahlen $\lambda \approx a^{-1}$ gegeben. Daher gilt in diesem Abstandsbereich stets $\lambda a \approx 1$, sodass die hochfrequente und

die niedrigfrequente Oberflächenplasmonenresonanz aus Gl. (4.2.8) für die gegebene Geometrie im Prinzip übereinstimmen, d.h. die Entartung der beiden Frequenzen wird in dem quasistatischen Abstandsbereich nicht aufgehoben. Man erhält daher für Abstände, die kleiner als die Skintiefe sind, d.h. es gilt $a \ll d_s$, die Oberflächenplasmonenresonanzen bei $\omega_{\pm} \approx \omega_p/\sqrt{2}$. Die Oberflächenplasmonenkopplung — wie sie im vorangegangenen Kapitel beschrieben wurde — kann daher nur im Abstandsbereich $d_s \ll a \ll \lambda_{\text{th}}$ wirksam werden, wogegen man für Abstände $a \ll d_s$ stets im quasistationären Bereich ist, in dem die beiden Oberflächenresonanzen bei ihrem Halbraumwert $\omega_s = \omega_p/\sqrt{2}$ liegen. Das kann man auch direkt anhand der Transmissionskoeffizienten der beiden Halbräume T_{\parallel}^{12} bzw. T_{\parallel}^{23} sehen, für die man im stark evaneszenten Nahfeld

$$T_{\parallel} \approx \text{Im} \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} \right) \quad (5.3.3)$$

bekommt, sodass die Resonanzen bei ω_r mit $\epsilon_{r1}(\omega_{r1}) \approx -1$ bzw. $\epsilon_{r3}(\omega_{r3}) \approx -1$ im Frequenzintegral einen erheblichen Beitrag liefern. Das sind genau die Oberflächenmodenresonanzen der jeweiligen Halbräume, was man anhand der Dispersionsrelation in Gl. (4.1.5) sehen kann, die für den Fall der Oberflächenresonanzen im quasistationären Bereich mit $\lambda \rightarrow \infty$ nur für $\epsilon_r(\omega_r) \rightarrow -1$ erfüllt werden kann, sodass $\omega_r = \omega_s$ gilt.

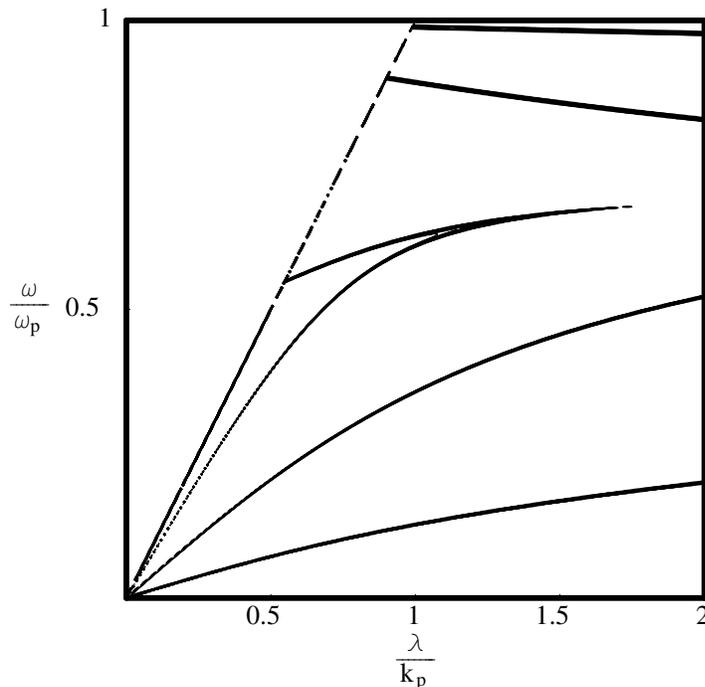


Abbildung 5.2: Contourplot der Transmissionskoeffizienten T_{\parallel}^{13} für die evaneszenten TM-Moden aus Gl. (5.3.2), wobei T_{\parallel}^{13} in den dunklen Bereichen maximal und in den weißen Bereichen ungefähr Null ist. Für den Plot wurden die Permittivität von Gold und die Abstände $d = 10^{-7} \text{ m}$, 10^{-8} m und 10^{-9} m gewählt. Man vergleiche diese Darstellung mit Abb. (4.2).

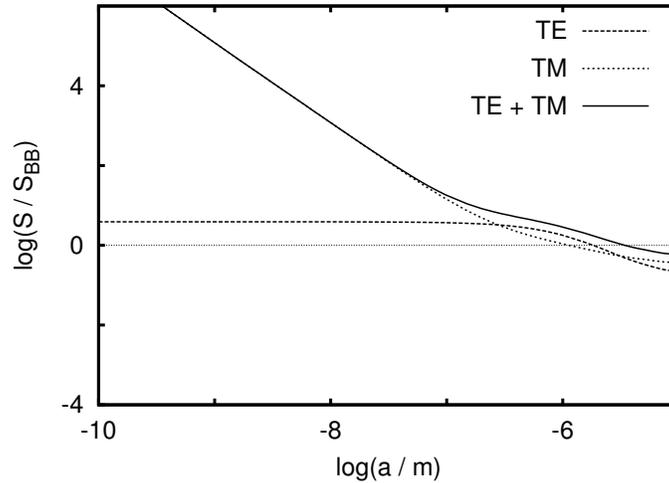


Abbildung 5.3: Numerische Ergebnisse für den Energieübertrag zwischen zwei GaN-Halbräumen mit $T_1 = 300\text{ K}$ und $T_3 = 0\text{ K}$, bestimmt mit der Reststrahlenformel für die Permittivität.

Für große Abstände mit $a \gg \lambda_{\text{th}}$ verschwindet der Beitrag der evaneszenten Moden aufgrund der exponentiellen Dämpfung im λ -Integral und nur die propagierenden Moden tragen zum Energietransport bei. Für den Idealfall $r_{\perp} = r_{\parallel} = 0$ erhält man den maximalen Wärmestrom zwischen beiden Halbräumen, der durch das Stefan-Boltzmann-Gesetz

$$\langle S_{BB} \rangle = \sigma_{BB}(T_1^4 - T_3^4) \quad (5.3.4)$$

mit $\sigma_{BB} = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$ gegeben ist. Für das ideale Metall mit $r_{\perp} = r_{\parallel} = 1$ erhält man dagegen keinen Energietransfer.

Für sehr kleine Abstände mit $a \ll \lambda_{\text{th}}$ können die evaneszenten Moden in das jeweils gegenüberliegende Medium eindringen und dort weiter propagieren. Damit tragen diese Moden erheblich zum Strahlungswärmetransport bei, der dadurch weit über dem Schwarzkörperwert in Gl. (5.3.4) liegen kann. Neben diesem Prozess des Photonentunnels können die Oberflächenmoden auf den beiden Plattenseiten miteinander koppeln, wodurch es zu resonantem Photonentunneln kommt. In diesem Fall [59] ist der Transmissionskoeffizient maximal, d.h. es gilt $T_{\parallel}^{13} = 1$.

Man kann zeigen [59, 71, 72], dass der Nahfeldwärmestrom wieder auf Potenzgesetze führt, wobei im stark evaneszenten Bereich mit $\lambda \gg k_0$

$$\langle S_{\parallel} \rangle \propto a^{-2} \quad \text{und} \quad \langle S_{\perp} \rangle \propto \text{const.} \quad (5.3.5)$$

gelten. Die Exponenten der Potenzgesetze sind für den Strahlungswärmetransport daher gegenüber den entsprechenden Exponenten der Potenzgesetze für die Energiedichte oberhalb eines Halbraumes um Eins erhöht. Das soll heißen, dass das Potenzgesetz $\langle u_{\parallel} \rangle \propto z^{-3}$ auf einen Strahlungswärmeübertrag proportional zu a^{-2} führt. Entsprechendes gilt für die TE-Moden, bei denen $\langle u_{\perp} \rangle \propto z^{-1}$ auf $\langle S \rangle \propto \text{const.}$ führt. Damit kann man qualitativ abschätzen, welche Abstandsabhängigkeit im Strahlungswärmetransport zwischen zwei Halbräumen zu erwarten ist, wenn man die Energiedichte oberhalb eines Halbraumes kennt.

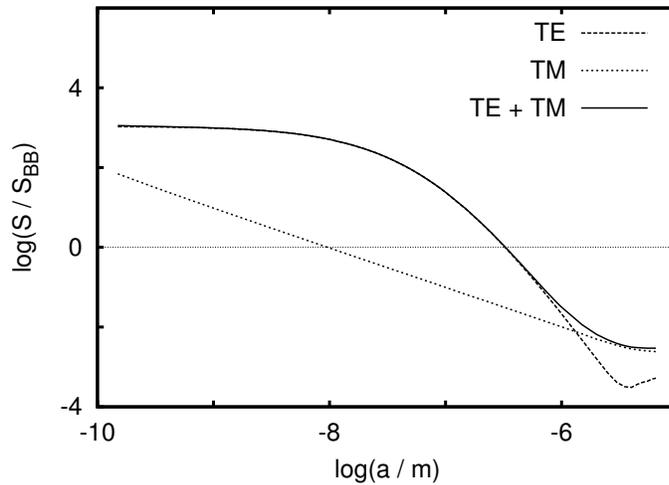


Abbildung 5.4: Numerische Ergebnisse für den Energieübertrag zwischen zwei Au-Halbräumen mit $T_1 = 300$ K und $T_3 = 0$ K im Drude-Modell.

In Abb. 5.3 ist die numerische Auswertung für zwei GaN-Halbräume mit den Temperaturen $T_1 = 300$ K und $T_3 = 0$ K geplottet, wobei die Permittivität durch die Reststrahlenformel bestimmt wurde. Man sieht, dass bereits für Abstände im Bereich von $1 \mu\text{m}$ Energieüberträge größer als der Schwarzkörperwert S_{BB} erreicht werden. Im Nahfeldbereich dominieren für dieses polare Medium hauptsächlich die TM-Moden, sodass der Energieübertrag ein sehr gut ausgeprägtes Potenzgesetz $\langle S_{\parallel} \rangle \propto a^{-2}$ zeigt. Für zwei Au-Halbräume im Drude-Modell findet man die numerischen Auswertungen der Polder-van Hove-Formel in Abb. 5.4. Für diese Konfiguration dominieren im abgebildeten Abstandsbereich die TE-Moden den gesamten Strahlungswärmeübertrag, sodass man insbesondere die Proportionalität zu a^{-2} im physikalisch zugänglichen Bereich zumindest für gute Leiter nicht finden kann. Erst für unrealistisch kleine Abstände erhält man für beide Materialkombinationen die $1/a^2$ -Proportionalität der TM-Moden, wobei der Strahlungswärmeübertrag zwischen zwei polaren Medien in diesem Fall sehr viel größer ist als für zwei Drude-Materialien. Man beachte aber an dieser Stelle, dass man für Abstände weit unter 100 nm nicht erwarten kann, dass die makroskopische und lokale Theorie quantitativ richtige Ergebnisse liefert.

Den Unterschied im Nahfeldwärmehtransport zwischen polaren Medien und Metallen kann man anhand der Energiedichte oberhalb der beiden Halbräume verstehen (vgl. Abb. 1.2 und 1.3): Betrachtet man zwei Halbräume aus dem gleichen Material, die durch einen Vakuumsplatt getrennt sind, wobei der erste eine Temperatur $T_1 \neq 0$ K und der zweite die Temperatur $T_3 = 0$ K hat, so ist zu erwarten, dass aufgrund der thermischen Fluktuation im ersten Halbraum propagierende und evaneszente Felder entstehen. Die propagierenden Felder tragen nun für alle Abstände a zum Energieübertrag bei, wogegen die evaneszenten Felder an der Grenzfläche des ersten Halbraumes exponentiell abklingen, da sie eine laterale Wellenzahl $\lambda > k_0$ haben, die eine Propagation in das angrenzende Vakuum verbietet. Für polare Medien sind diese evaneszenten Felder hauptsächlich TM-polarisiert, für Drude-Materialien

dagegen TE-polarisiert. Verkleinert man den Abstand a soweit, dass die evaneszenten Moden in den zweiten Halbraum ragen können, d.h. $a < \lambda_{\text{th}}$, so werden diese Moden zwar über den Vakuumpalt exponentiell gedämpft, können aber im zweiten Halbraum weiter propagieren. Durch dieses Photonentunneln tragen die evaneszenten Moden zum Energietransport bei. Es ist daher ausgehend von der Energiedichte bzw. lokalen Zustandsdichte oberhalb eines Halbraumes vollkommen klar, dass der Strahlungswärmetransport im evaneszenten Bereich bei polaren Medien durch die TM-Moden und bei Drude-Metallen durch die TE-Moden dominiert wird.

5.4 Nahfeldwärmehtransport für beschichtete Medien

Die im ersten Abschnitt gegebene Ableitung der Polder-van Hove-Formel kann man leicht auf eine Geometrie anwenden, bei der der Halbraum für $z > a$ durch einen Halbraum mit einer Schicht der Dicke d ersetzt wird. Für solch eine Geometrie ändert sich die Greensche Funktion im Vakuumpalt zwischen dem Halbraum und dem beschichteten Halbraum nicht. Allerdings muss man für die Schicht die richtige Greensche Funktion ansetzen. Wendet man die üblichen Randbedingungen auf diese Geometrie an, erhält man nach einer elementaren Rechnung

$$R_{\text{TE}} = T_{\text{TE}} e^{2ih_2 a} R_{\perp} \quad \text{und} \quad T_{\text{TE}} = \frac{2t_{\perp}^{12}}{N'_{\perp}}, \quad (5.4.1)$$

wobei

$$R_{\perp} = \frac{r_{\perp}^{23} + r_{\perp}^{34} e^{2ih_3 d}}{1 - r_{\perp}^{34} r_{\perp}^{32} e^{2ih_3 d}} \quad \text{und} \quad N'_{\perp} = 1 - r_{\perp}^{21} R_{\perp} e^{2ih_2 a} \quad (5.4.2)$$

gelten. Entsprechende Gleichungen gelten für die TM-Moden. Man erhält demnach das gleiche Ergebnis wie für zwei Halbräume, wobei allerdings r^{23} durch R zu ersetzen ist. Folglich bekommt man anstatt der Polder-van Hove-Formel in Gl. (5.2.15) den Ausdruck

$$\begin{aligned} \langle S_z \rangle = & \int d\omega \frac{E_0(\omega, T_1) - E_0(\omega, T_3)}{(2\pi)^2} \left\{ \int_0^{k_0} d\lambda \lambda \frac{(1 - |r_{\perp}^{21}|^2)(1 - |R_{\perp}|^2)}{|N'_{\perp}|^2} \right. \\ & \left. + \int_{k_0}^{\infty} d\lambda \lambda \frac{4\text{Im}(r_{\perp}^{21})\text{Im}(R_{\perp})e^{-2\gamma a}}{|N'_{\perp}|^2} + \parallel \right\}. \end{aligned} \quad (5.4.3)$$

Der Energietransfer ist also wieder proportional zu den Energiedichten der beiden gegenüberliegenden Halbräume. Somit sollte es möglich sein, den Strahlungswärmetransport durch die Wahl des Schicht- und Bulkmaterials zu manipulieren. Außerdem sollte sich zumindest prinzipiell das universelle Verhalten bemerkbar machen.

Da die Energiedichte oberhalb einer Schichtgeometrie neben der Schichtdicke d auch sehr empfindlich auf die Wahl des Bulkmediums sein kann, soll hier der Strahlungswärmetransport zwischen einem Goldhalbraum und einem mit Bi beschichteten GaN- bzw. Pt-Halbraum numerisch bestimmt und diskutiert werden. Da in Abbildung 5.5 für $z < 0$ Gold gewählt wurde, sollte $\langle S_z \rangle$ im Prinzip durch die TE-Moden des beschichteten Halbraumes bestimmt sein (vgl. Abb. 3.7). Entsprechend

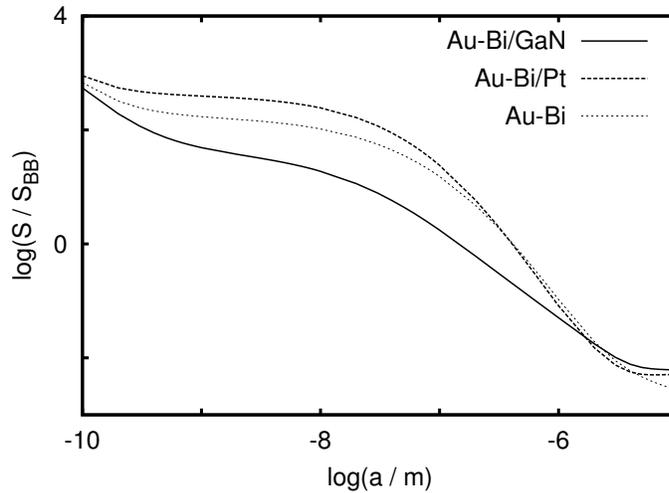


Abbildung 5.5: Numerische Ergebnisse für den Energieübertrag zwischen einem Au-Halbraum mit $T_1 = 300$ K und einem mit 5 nm Bi beschichteten GaN- bzw. Pt-Halbraum mit $T_3 = 0$ K. Für die Permittivitäten wurden die Drude- und die Reststrahlenformel verwendet.

der Abbildung 3.7 kann man dann erwarten, dass die Energiedichte oberhalb des beschichteten GaN-Halbraumes sehr viel kleiner ist als oberhalb des beschichteten Pt-Halbraumes. Dementsprechend sollte der Strahlungswärmeübertrag im ersten Fall sehr viel kleiner sein als im zweiten. Genau dieses Verhalten kann man in Abb. 5.5 für Abstände $a \ll 1 \mu\text{m}$ beobachten, bei denen die beiden Strahlungswärmeüberträge um bis zu eine Größenordnung auseinander liegen. Für Abstände $a \approx 1 \mu\text{m}$ unterscheiden sich die beiden Strahlungswärmeüberträge außerdem sehr stark durch die Steigung. Dass der Wärmestrom $\langle S_z \rangle$ in Abb. 5.5 für die Konfiguration Au-Bi/Pt oberhalb des Polder-van Hove-Ergebnisses für die Konfiguration Au-Bi liegt, lässt sich damit erklären, dass für sehr dünne Metallfilme auf einem Metallsubstrat der Bulkbeitrag für $a \gg d$ größer sein kann als der Beitrag des Coatings selbst. Insofern liegt der Anstieg im Nahfeldwärmehtransport im Absinken des Coatingbeitrages unter den Halbraumwert des Pt-Substrats begründet.

In Abb. 5.6 findet man noch zusätzlich die numerischen Ergebnisse für eine GaN-Bi/GaN- und GaN-Bi/Pt-Konfiguration. In diesem Fall ist der gesamte Strahlungswärmehtransport wieder durch die TM-Moden dominiert (vgl. 3.8). Genau wie im Fall der Energiedichte oberhalb des beschichteten Mediums in Abb. 3.8 sind die Beiträge im Strahlungswärmehtransport für $a \ll d$ unabhängig vom gewählten Bulkmaterial, wohingegen sich für $a \gg d$ zwei klare Potenzgesetze herausbilden, die sehr stark von der Wahl des Bulkmediums abhängen. Vergleicht man Abb. 5.6 für den Strahlungswärmehtransport mit Abb. 3.8 für die Energiedichte, so kann man sehen, dass sich die $1/z^3$ -Proportionalität in der Energiedichte für $a \ll d$ in eine $1/a^2$ -Proportionalität im Strahlungswärmehtransport überträgt. Entsprechend schlägt sich die $1/z^2$ - bzw. $1/z^4$ -Abhängigkeit in der Energiedichte für $a \gg d$ in einer $1/a$ - bzw. $1/a^3$ -Abhängigkeit im Strahlungswärmehtransport nieder. Offensichtlich führt die Oberflächenplasmonenkopplung innerhalb des Coatings zu einem An-

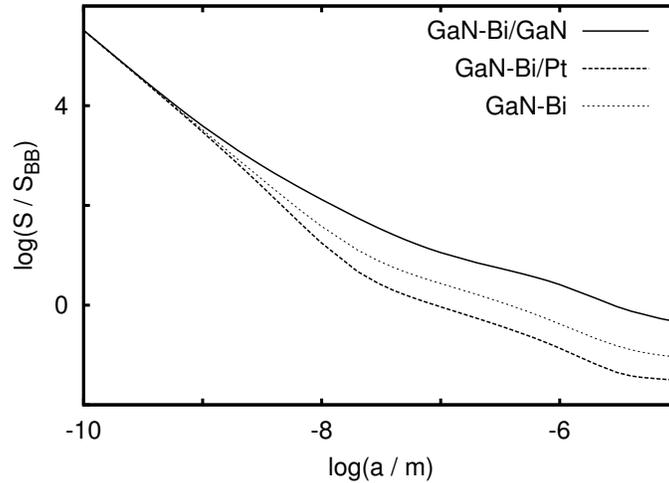


Abbildung 5.6: Numerische Ergebnisse für den Energieübertrag zwischen einem GaN-Halbraum mit $T_1 = 300$ K und einem mit 5 nm Bi beschichteten GaN- bzw. Pt-Halbraum mit $T_3 = 0$ K. Für die Permittivitäten wurden die Drude- und die Reststrahlenformel verwendet.

stieg im Nahfeldwärmehtransport, der größer ist als das entsprechende Polder-van Hove-Ergebnis für eine GaN-Bi-Konfiguration, mit einem charakteristischen $1/a$ -Potenzgesetz.

Um einen Einblick in die Wirkungsweise der Oberflächenplasmonenkopplung beim Nahfeldwärmehtransport zu bekommen, ist in Abb. 5.7 schließlich das Emissionsvermögen $e(\omega)$, das hier analog zur lokalen Zustandsdichte durch

$$\langle S_z \rangle =: \int d\omega \left(E_0(\omega, T_1) - E_0(\omega, T_3) \right) e(\omega) \quad (5.4.4)$$

definiert ist, für die GaN-Bi/GaN-Konfiguration geplottet. Da das Emissionsvermögen im Prinzip durch die entsprechenden Energiedichten bzw. lokalen Zustandsdichten oberhalb der Dielektrika gegeben ist, kann man in grober Näherung sagen, dass $e(\omega) \propto D_{\text{GaN}}(\omega) D_{\text{Bi/GaN}}(\omega)$ ist. Für die Schichtdicke $d = 5 \cdot 10^{-7}$ m hat man im Prinzip das Emissionsvermögen für einen GaN- und einen Bi-Halbraum, da $d \gg d_s$ gilt, sodass $e(\omega) \propto D_{\text{GaN}}(\omega)$ ist. Das liegt daran, dass sich $D_{\text{Bi/GaN}}(\omega) \approx D_{\text{Bi}}(\omega)$ in dem entsprechenden Frequenzbereich nur geringfügig ändert. Das Emissionsvermögen stimmt daher für $d = 5 \cdot 10^{-7}$ m in Abb. 5.7 im wesentlichen mit der lokalen Zustandsdichte für einen GaN-Halbraum im Nahfeld (vgl. Abb. 1.5) überein. Für Bi-Schichten mit $d \ll d_s$ und $d \ll a$ nimmt die lokale Zustandsdichte $D_{\text{Bi/GaN}}(\omega)$ aufgrund der niedrigfrequenten Oberflächenresonanz im betrachteten Frequenzbereich zu und erhöht so das Emissionsvermögen $e(\omega)$ in Abb. 5.7 deutlich, was effektiv zu einer Erhöhung des Strahlungswärmehtransportes führt.

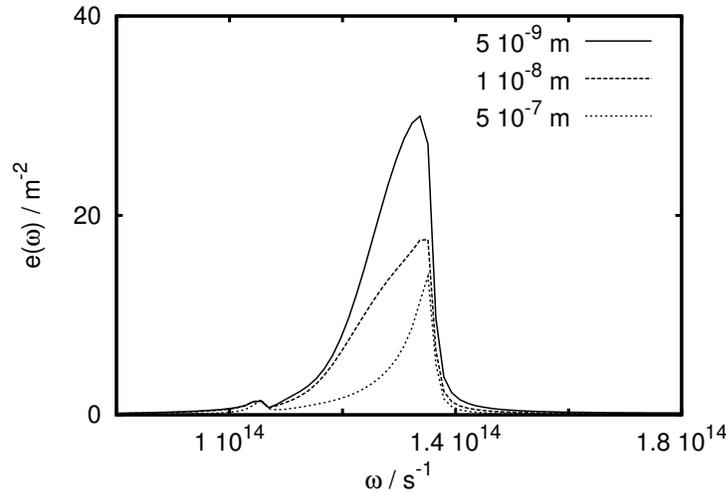


Abbildung 5.7: Emissionsvermögen $e(\omega)$ aus Gl. (5.4.4) des Poynting-Vektors für den Nahfeldwärmehtransport zwischen einem GaN-Halbraum mit der Temperatur $T_1 = 300$ K und einem mit Bi beschichteten GaN-Halbraum mit der Temperatur $T_3 = 0$ K für $a = 10^{-8}$ m und $d = 5 \cdot 10^{-7}$ m, 10^{-8} m und $d = 5 \cdot 10^{-9}$ m.

5.5 Das Dipolmodell

Es soll nun der Strahlungswärmehtransport zwischen einer dielektrischen Kugel mit einem Radius R und der Temperatur T_K und einem beliebigen Medium mit der Temperatur T bestimmt werden. Insbesondere wird der Strahlungswärmehübertrag zwischen dieser Kugel und einem dielektrischen Halbraum bzw. einem beschichteten Halbraum betrachtet. Es wird sich zeigen, dass der Strahlungswärmehübertrag in dem hier beschriebenen Modell für kleine Abstände a im Prinzip direkt proportional zur elektrischen Energiedichte $\langle u_E \rangle$ und damit im Nahfeld direkt proportional zu $\langle u_{\parallel} \rangle$ ist.

Gegeben sei nun ein dielektrisches Medium mit der Permittivität ϵ_2 und der Temperatur $T \neq 0$ K umgeben durch das Vakuum. Das fluktuierende Feld außerhalb des Dielektrikums, das durch die fluktuierenden Quellenströme im Dielektrikum erzeugt wird, ist dann durch die Beziehung (1.1.4), also

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}, \omega) = i\omega\mu_0 \int d^3r' \mathbf{G}_{02}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{j}(\mathbf{r}') \quad (5.5.1)$$

gegeben. Bringt man nun eine dielektrische Kugel mit der Permittivität ϵ_1 und der Temperatur $T_K = 0$ K derart in die Nähe des Dielektrikums, dass stets ein Abstand $a \gg R$ herrscht, wobei zusätzlich $R \ll \lambda_{\text{th}}$ gelten muss, so wird durch das fluktuierende Feld \mathbf{E}_0 ein Dipolmoment

$$\mathbf{p} = \alpha_K(\omega)\epsilon_0\mathbf{E}_0 \quad (5.5.2)$$

in der Kugel induziert, wobei die Polarisierbarkeit in diesem Fall [78] durch die

Clausius-Mosotti-Relation [95]

$$\alpha_K(\omega) = 4\pi R^3 \frac{\epsilon_{r1} - 1}{\epsilon_{r1} + 2} \quad (5.5.3)$$

gegeben ist, da für $a \gg R$ das Feld innerhalb der Kugel als homogen angenommen werden kann, falls auch $R \ll \lambda_{\text{th}}$ erfüllt ist. Die Gültigkeitseinschränkung bzgl. des Abstands kommt daher, dass das Nahfeld durch die evaneszenten Moden des Dielektrikums 2 mit Wellenzahlen $\lambda \approx a^{-1}$, d.h. durch Wellenlängen der Größenordnung a gegeben ist, sodass somit das evaneszente Feld innerhalb einer Kugel mit $a \gg R$ als homogen angesehen werden kann.

Durch die Wechselwirkung des fluktuierenden Feldes \mathbf{E}_0 mit dem induzierten Dipolmoment wird in der Kugel Energie dissipiert, wobei die mittlere dissipierte Energie bzw. Leistung durch

$$\begin{aligned} P_{D \rightarrow K} &= 2\text{Re} \int_0^\infty \frac{d\omega}{(2\pi)^2} \langle -i\omega \mathbf{p} \cdot \bar{\mathbf{E}}_0 \rangle \\ &= 2\text{Re} \int_0^\infty d\omega (-i\omega) \alpha_K(\omega) \frac{\epsilon_0}{(2\pi^2)} \langle \mathbf{E}_0(\omega) \cdot \bar{\mathbf{E}}_0(\omega) \rangle \end{aligned} \quad (5.5.4)$$

gegeben ist. Dabei wurde bereits ausgenutzt, dass wegen des Fluktuations-Dissipations-Theorems in Gl. (1.1.10) auch die Beziehungen

$$\langle \mathbf{E}_0(\omega') \cdot \bar{\mathbf{E}}_0(\omega) \rangle = \langle \mathbf{E}_0(\omega) \cdot \bar{\mathbf{E}}_0(\omega) \rangle \delta(\omega - \omega') \quad (5.5.5)$$

und

$$\langle \mathbf{E}_0(\omega') \cdot \mathbf{E}_0(\omega) \rangle = 0 \quad \text{und} \quad \langle \bar{\mathbf{E}}_0(\omega') \cdot \bar{\mathbf{E}}_0(\omega) \rangle = 0 \quad (5.5.6)$$

gelten. Da nun die elektrische Energiedichte $\langle u_E \rangle$ durch

$$\langle \mathbf{E}_0(t) \cdot \mathbf{E}_0(t) \rangle = 2 \int_0^\infty d\omega \frac{1}{(2\pi)^2} \langle \mathbf{E}_0(\omega) \cdot \bar{\mathbf{E}}_0(\omega) \rangle = \frac{2}{\epsilon_0} \langle u_E \rangle \quad (5.5.7)$$

gegeben ist und damit die spektrale elektrische Energiedichte $\langle u_E(\omega, a) \rangle$ die Relation

$$\langle u_E(\omega, a) \rangle = \frac{\epsilon_0}{(2\pi)^2} \langle \mathbf{E}_0(\omega) \cdot \bar{\mathbf{E}}_0(\omega) \rangle \quad (5.5.8)$$

erfüllt, bekommt man für die dissipierte Leistung

$$\begin{aligned} P_{D \rightarrow K} &= \int_0^\infty d\omega 2\omega \alpha_K''(\omega) \langle u_E(\omega, a) \rangle \\ &= \int_0^\infty d\omega 2\omega \alpha_K''(\omega) E(\omega, T) D_E(\omega, a). \end{aligned} \quad (5.5.9)$$

Offensichtlich hängt die dissipierte Leistung direkt von der spektralen elektrischen Energiedichte $\langle u_E(\omega, a) \rangle$ bzw. der lokalen Zustandsdichte $D_E(\omega, a)$ des fluktuierenden Feldes \mathbf{E}_0 im Abstand a vom Dielektrikum 2 ab.

Betrachtet man den umgekehrten Fall, bei dem das fluktuierende Feld durch die Quellen innerhalb der dielektrischen Kugel mit der Temperatur $T_K \neq 0\text{K}$ ein Feld erzeugen, so werden wiederum Dipole innerhalb des Dielektrikums 2, das die

Temperatur $T = 0$ K hat, erzeugt, die an das fluktuierende Feld koppeln. Dadurch wird im Dielektrikum 2 Energie dissipiert und somit fließt Energie von der Kugel in das Dielektrikum 2. Dieser Energiefluss bzw. die im Dielektrikum 2 dissipierte Energie pro Zeit $P_{K \rightarrow D}$ muss für den Spezialfall $T_K = T$ bis auf das Vorzeichen mit $P_{D \rightarrow K}$ aus Gl. (5.5.9) übereinstimmen, da es in diesem Gleichgewichtsfall keinen Nettoenergieübertrag geben kann. Somit muss

$$P_{K \rightarrow D} = - \int_0^\infty d\omega 2\omega \alpha_K''(\omega) E(\omega, T_K) D_E(\omega, a) \quad (5.5.10)$$

gelten. Der Gesamtenergieübertrag ist daher

$$\begin{aligned} P &= P_{D \rightarrow K} + P_{K \rightarrow D} \\ &= \int_0^\infty d\omega [E(\omega, T) - E(\omega, T_K)] 2\omega \alpha_K''(\omega) D_E(\omega, a). \end{aligned} \quad (5.5.11)$$

Dieser Ausdruck ist sehr allgemein und kann den Strahlungswärmetransport zwischen einer Kugel und einem beliebigen Dielektrikum beschreiben, für das man allerdings die lokale Zustandsdichte $D_E(\omega, a)$ bestimmen muss. Beispielsweise kann man aus diesem Ausdruck sofort die abgestrahlte Leistung einer dielektrischen Kugel im Vakuum bestimmen, indem man für die lokale Zustandsdichte

$$D_E \equiv \frac{D_0}{2} = \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^3 \pi^2} \quad (5.5.12)$$

einsetzt, $T = 0$ K setzt und für die Polarisierbarkeit α_K die Clausius-Mosotti-Relation aus Gl. (5.5.3) verwendet. Man erhält dann die experimentell bestätigte [96] sogenannte Planck-Mie-Formel [75, 95, 97]

$$P = - \frac{3}{\pi^2} \left(\frac{4\pi R^3}{3} \right) \int d\omega E(\omega, T_K) k_0^3 \operatorname{Im} \left(\frac{\epsilon_{r1} - 1}{\epsilon_{r1} + 2} \right). \quad (5.5.13)$$

Betrachtet man dagegen eine Kugel oberhalb eines Halbraumes, so ist bereits bekannt, dass man im stark evaneszenten Nahfeld mit $\lambda \gg k_0$ die elektrische lokale Zustandsdichte durch den TM-Moden-Anteil approximieren kann. Es gilt dann in guter Näherung $D_E(\omega, a) \approx D_{\parallel}(\omega, a)$. Mit Gl. (5.5.11) für den Energieübertrag zwischen einer Kugel und einem Dielektrikum und dem Näherungsausdruck für $D_{\parallel}(\omega, a)$ aus Gl. (1.7.18) für einen Halbraum mit der Permittivität ϵ_2 erhält man sofort

$$P \approx \int d\omega [E(\omega, T) - E(\omega, T_K)] 2\omega \alpha_K''(\omega) \frac{1}{4} \frac{D_0(\omega)}{(k_0 a)^3} \frac{\epsilon_{r2}''}{|\epsilon_{r2} + 1|^2}, \quad (5.5.14)$$

wobei $D_0 = \omega^2/(\pi^2 c^3)$ gilt. Diese Beziehung kann man übrigens direkt aus der Polder-van Hove-Formel ableiten, indem man einen der beiden Halbräume durch ein verdünntes Medium mit der entsprechenden Permittivität ersetzt [75]. Offensichtlich ist die dissipierte Energie pro Zeiteinheit im Nahfeld [77] proportional zu a^{-3} , was nicht verwunderlich ist, da dies genau das Potenzverhalten von $\langle u_{\parallel} \rangle$ ist. Außerdem kann man anhand dieser Näherung leicht erkennen, dass die Oberflächenmoden im Dielektrikum 2, für die $\epsilon_{r2}(\omega) \approx -1$ ist, einen erheblichen Beitrag zum Strahlungswärmetransport liefern, insofern sie thermisch angeregt werden können. Setzt

man nun für die Kugel noch die Clausius-Mosotti-Relation aus Gl. (5.5.3) ein, erhält man sofort

$$P \approx \frac{2}{\pi} \left(\frac{R}{a} \right)^3 \int d\omega [E(\omega, T) - E(\omega, T_K)] \frac{\epsilon_r''}{|\epsilon_r + 1|^2} \frac{3\epsilon_r''}{|\epsilon_r + 2|^2}. \quad (5.5.15)$$

Der Wärmeübertrag zwischen einem Halbraum und einer dielektrischen Kugel wird daher durch die Oberflächenmoden des Halbraumes mit $\epsilon_{r2}(\omega) \approx -1$ und die Oberflächenmoden der Kugel bei $\epsilon_{r1}(\omega) \approx -2$ geliefert [78], wenn diese innerhalb des thermisch zugänglichen Frequenzbereiches liegen.

Betrachtet man beispielsweise zwei Metalle, so liegen die Oberflächenplasmonenresonanzen [95] bei $\omega_{p2}/\sqrt{2}$ und $\omega_{p1}/\sqrt{3}$ und sind damit in der Regel außerhalb des thermisch zugänglichen Bereichs, da die Plasmafrequenz für die meisten Metalle im Bereich $10^{15} \text{ s}^{-1} - 4 \cdot 10^{16} \text{ s}^{-1}$ und die thermische Frequenz bei 300 K bei 10^{14} s^{-1} liegt. Für polare Medien dagegen können die Oberflächenresonanzen, die im Reststrahlenbereich zwischen ω_t und ω_l liegen, durchaus thermisch angeregt werden.

Für Drude-Materialien kann man Gl. (5.5.15) näherungsweise auswerten, und bekommt mit der Näherung (siehe Anhang C)

$$\frac{\epsilon_r''}{|\epsilon_r + 2|^2} \approx \frac{\epsilon_r''}{|\epsilon_r + 1|^2} \approx \frac{\omega}{\omega_p^2 \tau} \quad (5.5.16)$$

sofort den Ausdruck

$$\begin{aligned} P &\approx \frac{6}{\pi} \left(\frac{R}{a} \right)^3 \frac{1}{\omega_{p1}^2 \tau_1} \frac{1}{\omega_{p2}^2 \tau_2} \int_0^\infty d\omega [E(\omega, T) - E(\omega, T_K)] \omega^2 \\ &= \frac{2\pi^3}{5} \left(\frac{R}{a} \right)^3 \frac{1}{\omega_{p1}^2 \tau_1} \frac{1}{\omega_{p2}^2 \tau_2} \frac{k_B^4}{\hbar^3} (T^4 - T_K^4), \end{aligned} \quad (5.5.17)$$

der bereits von Pendry [74] abgeleitet wurde. Anhand dieser Näherungsformel kann man erkennen, dass sehr gut leitende Metalle, d.h. die Leitfähigkeit $\sigma = \omega_p^2 \tau$ ist groß, im Vergleich zu schlecht leitenden Metallen einen kleineren Strahlungswärmeübertrag liefern. Dementsprechend ist zu erwarten, dass der Strahlungswärmeübertrag zwischen einer Goldkugel und einem Goldhalbraum sehr viel geringer ist als zwischen einer Goldkugel und einem GaN-Halbraum. Diesen Sachverhalt kann man auch anhand der Energiedichten oberhalb eines GaN- bzw. Au-Halbraumes in den Abb. 1.2 und 1.3 verstehen. Denn der TM-Moden-Beitrag für den GaN-Halbraum liegt um Größenordnungen über dem entsprechenden Beitrag oberhalb eines Au-Halbraumes.

In Abb. 5.8 findet man die numerische Auswertung der Gl. (5.5.11) für eine Goldkugel mit $T_K = 300 \text{ K}$ und einen Au- bzw. GaN-Halbraum mit $T = 0 \text{ K}$. Für Abstände weit unter 100 nm ist das abgeleitete a^{-3} -Verhalten zu sehen, wobei die dissipierte Energie bei $a = 10 \text{ nm}$ für einen Au-Halbraum erwartungsgemäß um mehr als 3 Größenordnungen unter dem entsprechenden Wert für einen GaN-Halbraum liegt. Erst für Abstände von der Größenordnung $a \approx 10 \mu\text{m}$ sind die Energieüberträge in beiden Fällen von vergleichbarer Größenordnung.

Bevor der Energietransfer zwischen einer Kugel und einem beschichteten Halbraum betrachtet wird, soll nun noch der Anwendungsbereich zweier Näherungen

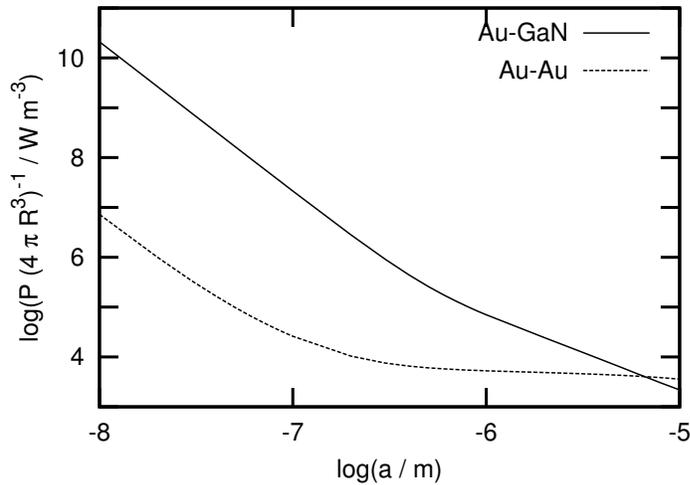


Abbildung 5.8: Strahlungswärmeübertrag zwischen einer Goldkugel und einem GaN- bzw. Au-Halbraum für $T_K = 300$ K und $T = 0$ K.

untersucht werden. Die erste Näherung, die im Nahfeld ansetzbar ist, ist die Näherung $D_E \approx D_{\parallel}$, die bereits in Gl. (5.5.14) verwendet wurde. Mit dieser Näherung bekommt man aus Gl. (5.5.11)

$$P_{\text{approx}} \approx \int d\omega [E(\omega, T) - E(\omega, T_K)] 2\omega \alpha_K''(\omega) D_{\parallel}(\omega, a). \quad (5.5.18)$$

Andererseits kann man noch einen Schritt weitergehen und für sich schwach ändernde $\omega \alpha_K''(\omega)$ im thermisch anregbaren Bereich die Polarisierbarkeit der Kugel aus dem Integral in Gl. (5.5.11) herausnehmen. Es gibt dann eine Frequenz ω_0 , sodass

$$P_{\text{dens}} \approx 2\omega_0 \alpha_K''(\omega_0) \int d\omega [E(\omega, T) - E(\omega, T_K)] D_E(\omega, a) = 2\omega_0 \alpha_K''(\omega_0) \langle u_E \rangle \quad (5.5.19)$$

gilt, wobei man erwarten kann, dass ω_0 nahe der thermischen Frequenz der höheren Temperatur liegt, d.h. es gilt $\omega_0 \approx \omega_{\text{th}}$. Diese Näherung ist sehr grob und kann offensichtlich nur dann richtig sein, wenn die Oberflächenresonanzen der Kugel thermisch nicht angeregt werden können.

In Abb. 5.9 ist der relative Fehler

$$\text{rel. Fehler} := \frac{P_{\text{approx/dens}} - P}{P} \quad (5.5.20)$$

der Näherungen in Gl. (5.5.18) und (5.5.19) im Vergleich zum Dipolmodell in Gl. (5.5.11) aufgetragen, wobei $T_K = 300$ K und $T = 0$ K gewählt wurde. Für den Vergleich mit P_{dens} wurde für die Konfiguration GaN-Au

$$\frac{2\omega_0 \alpha_K''(\omega_0)}{4\pi R^3} = 1,82 \cdot 10^{10} \text{s}^{-1} \quad (5.5.21)$$

und für Au-Au

$$\frac{2\omega_0 \alpha_K''(\omega_0)}{4\pi R^3} = 6,29 \cdot 10^9 \text{s}^{-1} \quad (5.5.22)$$

gewählt, wobei $2\omega_{\text{th}}\alpha_{\text{K}}''(\omega_{\text{th}})/(4\pi R^3)$ für $\omega_{\text{th}} = 1,1 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}$ tatsächlich bei $1,4 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1}$ liegt. Man sieht anhand der Abb. 5.9, dass der relative Fehler für Abstände kleiner als 10^{-7} m unter 20 Prozent liegt, sodass man für solche Abstände die Gültigkeit der Näherungen in Gl. (5.5.18) und (5.5.19) annehmen kann. Dabei ist die Näherung P_{approx} ungefähr genauso gut wie P_{dens} , wobei für die Konfiguration GaN-Au gerade P_{dens} auch für Abstände größer als 10^{-7} m gute Näherungswerte liefert.

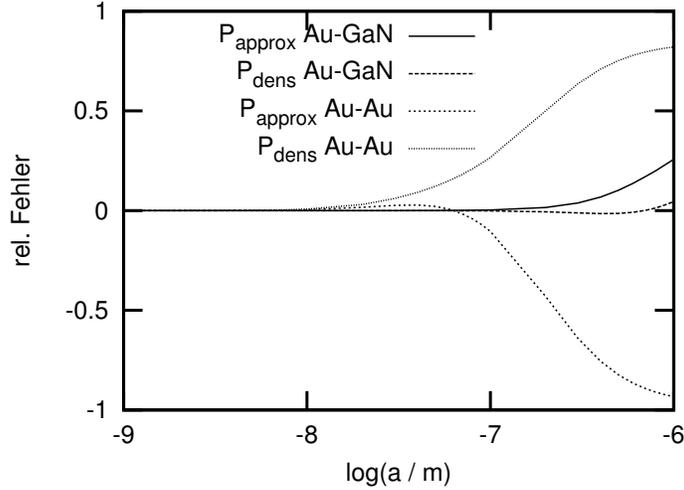


Abbildung 5.9: Relative Abweichung zwischen dem Dipolmodell in Gl. (5.5.11) und der Näherung in Gl. (5.5.18) sowie dem Dipolmodell und der Näherung durch die Nahfeld-Energiedichte in Gl. (5.5.19) für verschiedene Materialkombinationen.

Um nun schließlich den Strahlungswärmetransport zwischen einer dielektrischen Kugel und einem beschichteten dielektrischen Halbraum angeben zu können, kann man wieder von der allgemeinen Gleichung (5.5.11) ausgehen, wobei der entsprechende Ausdruck für die lokale Zustandsdichte $D_{\text{E}}(\omega, a)$ oberhalb eines beschichteten Halbraumes zu verwenden ist. Es ist aufgrund der Diskussion in den vorherigen Kapiteln klar, dass man für dünne Metall-Coatings mit $d < d_{\text{s}}$ und für Abstände $a \ll d$ die gleichen Werte wie für unendlich dicke Coatings entsprechend Gl. (5.5.15) erhält, bzw. für den Strahlungswärmetransport zwischen einer Metallkugel und einem mit Metall beschichteten polaren Substrat den Grenzfall aus Gl. (5.5.17). Für $a \gg d$ dagegen muss man den jeweiligen Ausdruck mit a/d multiplizieren, um die richtige Näherung zu bekommen. Es ergeben sich daher für den Strahlungswärmetransport zwischen einer Kugel aus einem Drude-Material und einem mit einem Drude-Metall beschichteten Halbraum mit $d \ll d_{\text{s}}$ die Näherungen

$$P \approx \begin{cases} \frac{2\pi^3}{5} \left(\frac{R}{a}\right)^3 \frac{1}{\omega_{p1}^2 \tau_1} \frac{1}{\omega_{p2}^2 \tau_2} \frac{k_{\text{B}}^4}{\hbar^3} (T^4 - T_{\text{K}}^4) & a \ll d \\ \frac{a}{d} \frac{2\pi^3}{5} \left(\frac{R}{a}\right)^3 \frac{1}{\omega_{p1}^2 \tau_1} \frac{1}{\omega_{p2}^2 \tau_2} \frac{k_{\text{B}}^4}{\hbar^3} (T^4 - T_{\text{K}}^4) & a \gg d \end{cases} \quad (5.5.23)$$

Für die numerische Berechnung wird hier $D_{\text{E}}(\omega, a)$ für die evaneszenten Moden der Einfachheit wegen mithilfe des optischen Theorems bestimmt. Man erhält mit

Gl. (4.4.1) und (4.4.2) sofort den Ausdruck

$$\begin{aligned} P_{D \rightarrow K}^{\text{ev}} &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty d\omega k_0^2 \alpha_K''(\omega) \text{Im} \mathbf{G}_{\alpha\alpha, \text{ren}}^E(\mathbf{r}_K, \mathbf{r}_K) \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty d\omega k_0^2 \alpha_K''(\omega) E(\omega, T) \int_{k_0}^\infty d\lambda \frac{\lambda e^{-2\gamma a}}{2\gamma} \left[\text{Im}(R_\perp) + \text{Im}(R_\parallel) \frac{2\lambda^2 - k_0^2}{k_0^2} \right], \end{aligned} \quad (5.5.24)$$

wobei

$$R = \frac{r^{02} + r^{23} e^{2ih_2d}}{1 - r^{23} r^{02} e^{2ih_2d}} \quad (5.5.25)$$

ist. Für den Strahlungswärmetransfer zwischen einer Kugel und einem beschichteten Halbraum gilt daher mit dem gleichen Argument wie zuvor der Ausdruck

$$\begin{aligned} P^{\text{ev}} &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty d\omega k_0^2 \alpha_K''(\omega) [E(\omega, T) - E(\omega, T_K)] \\ &\quad \times \int_{k_0}^\infty d\lambda \frac{\lambda e^{-2\gamma a}}{2\gamma} \left[\text{Im}(R_\perp) + \text{Im}(R_\parallel) \frac{2\lambda^2 - k_0^2}{k_0^2} \right], \end{aligned} \quad (5.5.26)$$

wobei im Nahfeld in sehr guter Näherung $P \approx P^{\text{ev}}$ gilt, weil der Beitrag der propagierenden Moden in diesem Abstandsbereich vernachlässigbar klein ist. Ersetzt man in diesem Ausdruck R wieder durch r^{02} , so hat man die entsprechende Lösung für den Wärmetransport zwischen einer Kugel und einem Halbraum. Man kann daher genau wie in der Polder-van Hove-Formel den entsprechenden Ausdruck für die Schichtgeometrie aus den Beziehungen für die Halbraumgeometrie erhalten, indem man einfach die Ersetzung $r \rightarrow R$ durchführt.

In Abb. 5.10 sieht man als numerisches Beispiel den Strahlungswärmeübertrag zwischen einer Goldkugel und einem mit 10 nm Bi beschichteten GaN-Halbraum mit den entsprechenden Näherungen aus Gl. (5.5.23). Es zeigt sich erwartungsgemäß das Ansteigen im Strahlungswärmetransport für $a \gg d$ durch die Oberflächenplasmonenkopplung im Bi-Coating. Insofern wirkt sich die Erhöhung der Energiedichte direkt auf den Strahlungswärmetransfer zwischen einer dielektrischen Kugel und einem beschichteten Halbraum aus, da in diesem Fall der Wärmetransfer im Nahfeld direkt proportional zu $\langle u_E \rangle \approx \langle u_\parallel \rangle$ ist.

5.6 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde die Polder-van Hove-Formel hergeleitet, die den Strahlungswärmetransport zwischen zwei lokalen dielektrischen Halbräumen mit verschiedener Temperatur, die durch das Vakuum voneinander getrennt sind, für alle Abstände a beschreibt. Es wurde anhand numerischer Beispiele verdeutlicht, dass der Strahlungswärmetransport zwischen zwei polaren Medien im Nahfeld durch die TM-Moden dominiert ist, für die $\langle S_\parallel \rangle \propto a^{-2}$ gilt. Für den Strahlungswärmetransport zwischen zwei Drude-Materialien ist das Nahfeld für physikalisch sinnvolle Abstände dagegen durch den TE-Moden-Beitrag dominiert, wobei $\langle S_\perp \rangle \propto \text{const.}$ gilt. Für sehr kleine Abstände ist der Nahfeldwärmetransport dagegen allein durch den divergenten TM-Moden-Beitrag gegeben. Wie im folgenden Kapitel gezeigt wird, kann diese

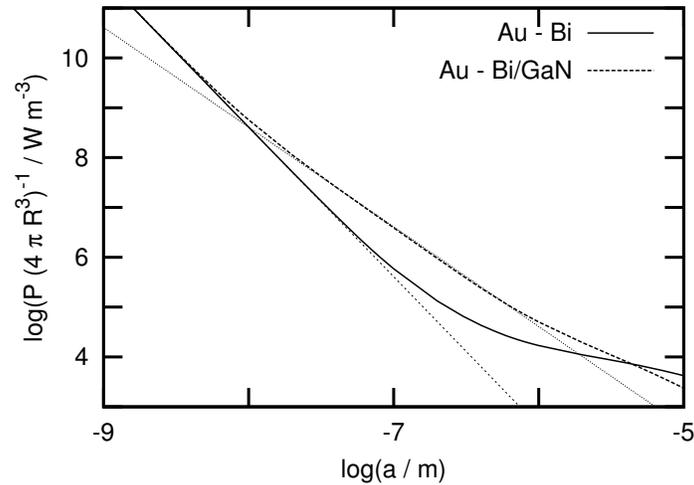


Abbildung 5.10: Strahlungswärmetransport aus Gl. (5.5.26) zwischen einer Goldkugel mit $T_K = 300 \text{ K}$ und einem mit 10 nm Bi beschichteten GaN-Halbraum mit $T = 0 \text{ K}$ im Vergleich zum Nahfeldwärmestrom zwischen einer Goldkugel und einem Bi-Halbraum nach Gl. (5.5.11). Zusätzlich ist die Näherung aus Gl. (5.5.17) für $a \ll d$ (dünne gestrichelte Linie) und die gleiche Näherung multipliziert mit a/d für $a \gg d$ (dünne gepunktete Linie) geplottet.

Divergenz, die eng mit der $1/z^3$ -Divergenz in der Nahfeldenergiedichte verknüpft ist, durch eine nicht-lokale Beschreibung behoben werden.

Um die Auswirkung eines Metallcoatings auf den Strahlungswärmeübertrag im Nahfeld zu studieren, wurde die entsprechende Polder-van Hove-Formel in einer Schichtgeometrie bestimmt, in der ein Halbraum einem beschichteten Halbraum mit einem Metallcoating der Dicke d in einem Abstand a gegenübersteht. Anhand numerischer Ergebnisse wurde verdeutlicht, dass man durch die Wahl des Materials für den unbeschichteten Halbraum im Prinzip bestimmen kann, ob man den TE-Moden- oder den TM-Modenanteil der Energiedichte oberhalb des beschichteten Halbraumes „misst“, da für die Wahl eines Drude-Halbraumes der Wärmestrom durch die TE-Moden und für einen polaren Halbraum durch die TM-Moden im physikalisch sinnvollen Bereich dominiert ist. Es wurde numerisch bestätigt, dass man für den Strahlungswärmetransport zwischen einem polaren Halbraum und einem mit einem dünnen Metallcoating beschichteten polaren Substrat eine Erhöhung des Nahfeldwärmestromes erhält, die in der Erhöhung der Nahfeldenergiedichte aufgrund der Oberflächenplasmonenkopplung innerhalb des Metallcoatings begründet liegt.

Im letzten Kapitel wurde das Dipolmodell eingeführt und der Strahlungswärmetransport zwischen einer dielektrischen Kugel mit einem Radius R und einem dielektrischen Medium im Abstand a bestimmt. Dabei ist die Gültigkeit dieses Modells auf Abstände $a \gg R$ und Radien $R \ll \lambda_{\text{th}}$ beschränkt. Es wurde am konkreten Beispiel des Wärmestroms zwischen einer dielektrischen Kugel und einem dielektrischen Halbraum gezeigt, dass der Wärmestrom für Abstände a unter 100 nm im Prinzip

proportional zur elektrischen Energiedichte $\langle u_E \rangle$ bzw. zum TM-Moden-Anteil der Energiedichte $\langle u_{\parallel} \rangle$ ist. Somit kann man den Nahfeldwärmehtransport zwischen einer dielektrischen Kugel und einem dielektrischen Medium als „Messung“ der Nahfeldenergiedichte oberhalb des Mediums ansehen. Der Strahlungswärmehtransport unterscheidet sich in dieser Geometrie dementsprechend sehr stark vom Polder-van Hove-Ergebnis. Außerdem wurde gezeigt, dass die Erhöhung der Nahfeldenergiedichte, die durch die Oberflächenplasmonenkopplung innerhalb des Metallcoatings hervorgerufen wird, für ein mit einem Drude-Metall beschichtetes polares Substrat sich direkt auf den Nahfeldwärmehtransport zwischen einer Kugel und einem beschichteten Halbraum auswirkt. Anhand eines numerischen Beispiels wurde bestätigt, dass diese Sichtweise den physikalischen Sachverhalt korrekt wiedergibt, und man für den Wärmehstrom zwischen einer Metallkugel und einem mit einem Metall beschichteten polaren Substrat die Potenzgesetze für die Nahfeldenergiedichte oberhalb eines beschichteten Substrats bekommt.

Kapitel 6

Räumliche Dispersion

In diesem Kapitel wird der Frage nachgegangen, wie sich die Berücksichtigung der räumlichen Dispersion für Metalle, d.h. der Abhängigkeit der Permittivität von der Wellenzahl k , auf den Nahfeldwärmehtransport auswirkt und welche Schlussfolgerungen daraus für die Nahfeldenergiedichte gezogen werden können.

Dazu wird im ersten Abschnitt die räumliche Dispersion formal eingeführt und im zweiten Abschnitt werden dann die üblichen Randbedingungen verallgemeinert, indem man die Reflexionskoeffizienten mithilfe der Oberflächenimpedanzen ausdrückt. Im darauf folgenden Abschnitt wird speziell auf die sogenannten Leontovich-Randbedingungen eingegangen, da in der jüngsten Literatur versucht wurde, die thermodynamischen Probleme, die man bei der Beschreibung des thermischen Anteils der Casimir-Kraft hat, dadurch zu lösen, dass man diese Leontovich-Randbedingungen einführt und als die einzig richtigen Randbedingungen postuliert [84, 85, 86]. Infolge dieser Diskussion wurde der Leontovich-Ansatz 2006 von Bimonte [87] auch auf den Nahfeldwärmehtransport angewandt, wobei solch eine Beschreibung des Nahfeldwärmehtransportes bereits 1980 bereits von Levin *et al.* [72] gegeben wurde. Im dritten Abschnitt wird der Anwendungsbereich der Leontovich-Randbedingungen diskutiert und es wird gezeigt, dass dieser Ansatz nur einen Spezialfall der lokalen Beschreibung darstellt, der gerade für die Abstandsbereiche, auf denen die räumliche Dispersion bzw. nichtlokale Effekte bedeutsam werden, nicht mehr gültig ist.

Um eine Beschreibung dieser nichtlokalen Effekte zu ermöglichen, wird im vierten Abschnitt die dyadische Greensche Funktion innerhalb eines nichtlokalen Mediums bestimmt und im darauf folgenden Abschnitt das Modell der Spiegelreflexion eingeführt, wodurch die Oberflächenimpedanzen als Funktionen der nichtlokalen Permittivität dargestellt werden können. Im vorletzten Abschnitt wird die nichtlokale Permittivität selbst innerhalb einer semiklassischen Beschreibung, dem sogenannten SCIB-Modell [83], angegeben. Es wird gezeigt, dass man für Abstände kleiner als die mittlere freie Weglänge l des Elektrons nichtlokale Effekte berücksichtigen muss.

Im letzten Abschnitt werden schließlich anhand numerischer Ergebnisse für den Nahfeldwärmehtransport die drei verschiedenen Ansätze — der Leontovich-Ansatz, die lokale Beschreibung im Drude-Modell und die nichtlokale Beschreibung im SCIB-Modell — diskutiert.

6.1 Zeitliche und räumliche Dispersion

In einem dielektrischen Medium kann der Zusammenhang zwischen der dielektrischen Verschiebung $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ und dem elektrischen Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ für kleine Feldstärken durch die lineare Relation [21]

$$\begin{aligned} D_i(\mathbf{r}, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \epsilon_{ij}(\mathbf{r}, \tau) E_j(\mathbf{r}, t - \tau) \\ &= \epsilon_0 E_i(\mathbf{r}, t) + \int_0^{\infty} d\tau \chi_{ij}(\mathbf{r}, \tau) E_j(\mathbf{r}, t - \tau) \end{aligned} \quad (6.1.1)$$

ausgedrückt werden, wobei $\epsilon_{ij}(\mathbf{r}, t)$ die Permittivität und $\chi_{ij}(\mathbf{r}, t)$ die elektrische Suszeptibilität des betrachteten Mediums darstellen und durch die Beziehung

$$\epsilon_{ij}(\mathbf{r}, \tau) = \epsilon_0 (\delta_{ij} \delta(\tau) + \chi_{ij}(\mathbf{r}, \tau)) \quad (6.1.2)$$

miteinander verknüpft sind. Im zweiten Schritt in Gl. (6.1.1) wurde aus Kausalitätsgründen vorausgesetzt, dass $\chi_{ij}(\mathbf{r}, \tau) = 0$ für $\tau < 0$ ist, sodass die dielektrische Verschiebung am Ort \mathbf{r} und zur Zeit t vom elektrischen Feld am gleichen Ort \mathbf{r} zu allen vorherigen Zeiten $t' \leq t$ abhängt. Im Fourier-Raum übersetzt sich die Faltung bzgl. der Zeit in ein Produkt, sodass man

$$D_i(\mathbf{r}, \omega) = \epsilon_{ij}(\mathbf{r}, \omega) E_j(\mathbf{r}, \omega) \quad (6.1.3)$$

erhält. Es wird daher mit Gl. (6.1.1) die Dispersion, oder um genauer zu sein, die zeitliche Dispersion in einem dielektrischen Medium beschrieben. Durch die Berücksichtigung der zeitlichen Dispersion erhält man bekanntermaßen eine frequenzabhängige Permittivität und damit auch frequenzabhängige optische Eigenschaften des beschriebenen Mediums.

Die in Gl. (6.1.1) gegebene Beziehung kann dadurch verallgemeinert werden, dass man für die dielektrische Verschiebung neben der zeitlichen auch die räumliche Dispersion berücksichtigt. Die dielektrische Verschiebung hängt dann nicht nur von den Feldern \mathbf{E} zu den vorherigen Zeiten, sondern auch von den Feldern in einer Umgebung mit dem Radius r_0 um den Punkt \mathbf{r} ab. Daher tragen die Felder $\mathbf{E}(\mathbf{r}', t)$ am Ort \mathbf{r}' mit einem Abstand $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \leq r_0$ zur dielektrischen Verschiebung $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ am Ort \mathbf{r} bei. Man erhält dann die lineare Relation [21]

$$\begin{aligned} D_i(\mathbf{r}, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_V d^3 r' \epsilon_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \tau) E_j(\mathbf{r}', t - \tau) \\ &= \epsilon_0 E_i(\mathbf{r}, t) + \int_0^{\infty} d\tau \int_V d^3 r' \chi_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \tau) E_j(\mathbf{r}', t - \tau). \end{aligned} \quad (6.1.4)$$

Dabei erstreckt sich das Volumen V im Prinzip über das gesamte dielektrische Medium, wobei die nichtlokale Suszeptibilität $\chi_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \tau)$ das Volumenintegral auf einen Abstandsbereich mit dem Radius r_0 um \mathbf{r} beschränkt, d.h. $\chi_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \tau) \approx 0$ für $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \gg r_0$.

In einem Dielektrikum ist r_0 im Allgemeinen von der Größenordnung des atomaren Abstandes. Auf dieser Längenskala ändert sich das makroskopische Feld

nur geringfügig, sodass man in guter Näherung das Feld unter dem Integral durch $E_j(\mathbf{r}', t - \tau) \approx E_j(\mathbf{r}, t - \tau)$ ersetzen und aus dem Integral herausnehmen kann. Somit gelangt man mit

$$\chi_{ij}(\mathbf{r}, \tau) = \int_V d^3 r' \chi_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \tau) \quad (6.1.5)$$

wieder zu Gl. (6.1.1) — die räumliche Dispersion bzw. Nichtlokalität des Mediums macht sich in diesem Fall kaum bemerkbar und kann vernachlässigt werden. Für Metalle hingegen kann sich die Suszeptibilität $\chi_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \tau)$ auf einer Längenskala ändern, die auf der makroskopischen Skala, auf der sich die Felder ändern, nicht mehr als klein angesehen werden kann. Das hängt damit zusammen, dass die freien Ladungsträger relativ große Abstände im Metall zurücklegen können, wobei eine Kenngröße für diese Abstände durch die mittlere freie Weglänge l des Elektrons gegeben ist. Um ein Zahlenbeispiel zu nennen: Die mittlere freie Weglänge eines Elektrons in Gold bei $T = 300$ K liegt bei ca. 42 nm.

Betrachtet man ein unendlich ausgedehntes homogenes Medium, d.h. in diesem gilt die Beziehung $\epsilon_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \tau) = \epsilon_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \tau)$, so bekommt man für Gl. (6.1.4) im Fourier-Raum

$$D_i(\mathbf{k}, \omega) = \epsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega) E_j(\mathbf{k}, \omega). \quad (6.1.6)$$

Die Permittivität hängt also nicht nur von der Frequenz ω des Lichtes, sondern auch von der Wellenzahl \mathbf{k} ab. Nimmt man weiterhin an, dass das betrachtete Medium isotrop ist, so gilt dennoch nicht $\epsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \epsilon(\mathbf{k}, \omega) \delta_{ij}$, da durch die Richtung von \mathbf{k} immer noch eine Vorzugsrichtung vorgegeben ist. Daher ist es in diesem Fall ratsam, den Tensor der Permittivität in seinen longitudinalen Anteil $\epsilon_l(k, \omega)$ in Richtung von \mathbf{k} und seinen transversalen Anteil $\epsilon_t(k, \omega)$ senkrecht zu \mathbf{k} aufzuteilen. Mithilfe der Tensoren

$$\mathbb{L} := \frac{\mathbf{k} \otimes \mathbf{k}}{k^2} \quad \text{und} \quad \mathbb{T} := \mathbf{1} - \frac{\mathbf{k} \otimes \mathbf{k}}{k^2} \quad (6.1.7)$$

kann man daher den Permittivitätstensor in der Form

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_l(k, \omega) \mathbb{L}_{ij} + \epsilon_t(k, \omega) \mathbb{T}_{ij} \quad (6.1.8)$$

schreiben. Man beachte, dass für $\mathbf{k} \rightarrow 0$ die Abhängigkeit von der Vorzugsrichtung, die \mathbf{k} vorgibt, verschwinden und die Permittivität gegen ihren lokalen Ausdruck konvergieren muss, sodass $\epsilon_l(0, \omega) = \epsilon_t(0, \omega) = \epsilon(\omega)$ gilt. Diesen Sachverhalt kann man für ein unendlich ausgedehntes homogenes Medium, in dem $\chi_{ij}(\mathbf{r}, \omega) = \chi_{ij}(\omega)$ gilt, direkt mit der Gl. (6.1.5) ableiten, denn in diesem Fall ist

$$\begin{aligned} \chi_{ij}(\omega) &= \int_V d^3 r' \chi_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \omega) \\ &= \int_V d^3 r' \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \chi_{ij}(\mathbf{k}, \omega) \\ &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \chi_{ij}(\mathbf{k}, \omega) \int_V d^3 r' e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}'} \\ &= \chi_{ij}(\mathbf{k} = 0, \omega). \end{aligned} \quad (6.1.9)$$

6.2 Oberflächenimpedanz

Um die nichtlokale Antwort eines Mediums auf eine einfallende ebene Welle in einer Halbraumgeometrie — wie sie in Abb. 6.1 skizziert ist — zu beschreiben, werden anstatt der üblichen Randbedingungen in Gl. (1.1.7), die auf die Fresnelschen Reflexionskoeffizienten aus Gl. (1.5.6), also auf

$$r_{F,\parallel}^{10} = \frac{h_1 \epsilon_1 - h_0}{h_1 \epsilon_1 + h_0} \quad \text{und} \quad r_{F,\perp}^{10} = \frac{h_1 - h_0}{h_1 + h_0} \quad (6.2.1)$$

führen, die Randbedingungen mithilfe der sogenannten Oberflächenimpedanzen formuliert. Dadurch erhält man allgemeine Ausdrücke für die Reflexionskoeffizienten für nichtlokale Medien, die es erlauben, nichtlokale Effekte für den Nahfeldwärmehtransport [75] zu untersuchen, indem man die entsprechenden Ausdrücke für die Reflexionskoeffizienten in die Polder-van Hove-Formel in Gl. (5.2.15) einsetzt.

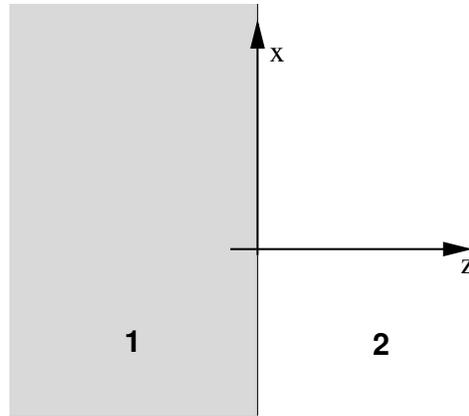


Abbildung 6.1: Skizze der Halbraumgeometrie.

Es soll ein Halbraum für $z \leq 0$ mit der Permittivität ϵ_1 betrachtet werden, der an das Vakuum für $z > 0$ grenzt (siehe Abb. 6.1). In diesem rotationssymmetrischen System sei die Einfallsebene durch den Einheitsvektor \mathbf{e}_x , der parallel zur Oberfläche des Halbraumes ist, und \mathbf{e}_z , der senkrecht zur Oberfläche des Halbraumes ist, aufgespannt, wobei aufgrund der Symmetrie $k_y = 0$ angenommen wird.

Für eine TM-polarisierte Welle, die von $z > 0$ auf den Halbraum trifft und bei $z = 0$ reflektiert und transmittiert wird, kann man die Randbedingung mithilfe der Oberflächenimpedanz $Z_{\parallel}(k_x, \omega)$ formulieren und erhält die Bestimmungsgleichung [83]

$$Z_{\parallel}(k_x, \omega) = -\frac{1}{c} \frac{\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{E}}{(\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x) \cdot \mathbf{B}} \Big|_{z=0-\eta} \quad (6.2.2)$$

mit $\eta \rightarrow 0$. Um diese Bestimmungsgleichung zu erfüllen, müssen daher die Oberflächenimpedanz Z_{\parallel} selbst und die Felder innerhalb des Halbraumes bei $z = 0 - \eta$ bekannt sein. Da allerdings wieder vorausgesetzt wird, dass die Transversalkomponenten der Felder bei $z = 0$ stetig sind, sodass die Transversalkomponenten der Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} in Gl. (6.2.2) nahe der Grenzfläche bei $z = 0 - \eta$ mit den Feldern für $z = 0 + \eta$ übereinstimmen, genügt es, die Felder für $z > 0$ zu kennen. Somit

stellt die Gl. (6.2.2) eine Randbedingung für die Felder außerhalb des nichtlokalen Mediums bei $z = 0$ dar. Man beachte, dass sich in der Gleichung (6.2.2) für eine von $z < 0$ auf ein nichtlokales Medium einfallende Welle das Vorzeichen ändert, da in diesem Fall der Normaleneinheitsvektor durch $-\mathbf{e}_z$ statt durch \mathbf{e}_z gegeben ist.

Für eine TE-polarisierte Welle, die von $z > 0$ auf den Halbraum trifft, kann man die entsprechende Randbedingung mit der Oberflächenimpedanz $Z_{\perp}(k_x, \omega)$ durch [83]

$$Z_{\perp}(k_x, \omega) = \frac{1}{c} \frac{(\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x) \cdot \mathbf{E}}{\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{B}} \Big|_{z=0-\eta} \quad (6.2.3)$$

mit $\eta \rightarrow 0$ angeben. Auch hier gilt wieder, dass sich das Vorzeichen ändert, falls man eine TE-polarisierte Welle betrachtet, die von $z < 0$ auf die Grenzfläche trifft.

Um nun die Reflexionskoeffizienten abzuleiten, wird zunächst von einer TM-polarisierten ebenen Welle ausgegangen, die von $z > 0$ auf die Grenzfläche bei $z = 0$ trifft, und dort transmittiert und reflektiert wird. Das magnetische Feld kann in diesem Fall für $z > 0$ in kartesischen Koordinaten durch

$$\mathbf{B} = B_0 e^{i(k_x x - \omega t)} \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x (e^{-ik_{z0}z} + r_{Z,\parallel} e^{ik_{z0}z}) \quad (6.2.4)$$

ausgedrückt werden, wobei

$$k_{z0} = \sqrt{k_0^2 - k_x^2} \quad (6.2.5)$$

mit $\text{Im}(k_{z0}) > 0$ gilt. Man kann daher die entsprechenden Ausdrücke für die Zylinderkoordinaten erhalten, indem man die Ersetzungen $k_x \rightarrow \lambda$ und $k_{z0} \rightarrow h_0$ durchführt. Für das elektrische Feld gilt dann aufgrund des Ampèreschen Gesetzes mit dem Nabla-Operator $\nabla = (ik_x, 0, \partial_z)$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\frac{c^2}{i\omega} \nabla \times \mathbf{B} \\ &= -\frac{c^2}{i\omega} B_0 e^{i(k_x x - \omega t)} \left([ik_x \mathbf{e}_z + ik_{z0} \mathbf{e}_x] e^{-ik_{z0}z} r_{Z,\parallel} + [ik_x \mathbf{e}_z - ik_{z0} \mathbf{e}_x] e^{ik_{z0}z} \right). \end{aligned} \quad (6.2.6)$$

Implementiert man die Randbedingung für TM-polarisierte Wellen aus Gl. (6.2.2), so erhält man zunächst

$$Z_{\parallel}(k_x, \omega) = \frac{k_{z0}}{k_0} \frac{1 - r_{Z,\parallel}}{1 + r_{Z,\parallel}} \quad (6.2.7)$$

und damit den allgemeinen Amplitudenreflexionskoeffizienten

$$r_{Z,\parallel} = \frac{k_{z0} - k_0 Z_{\parallel}(k_x, \omega)}{k_{z0} + k_0 Z_{\parallel}(k_x, \omega)} \quad (6.2.8)$$

der nur noch von der Oberflächenimpedanz Z_{\parallel} abhängt.

Auf gleiche Weise kann man den allgemeinen Amplitudenreflexionskoeffizienten für die TE-Moden bestimmen. Geht man daher von einer TE-polarisierten ebenen Welle aus, die von $z > 0$ auf die Grenzfläche bei $z = 0$ trifft und dort transmittiert und reflektiert wird, so kann man das elektrische Feld für $z > 0$ durch

$$\mathbf{E} = E_0 e^{i(k_x x - \omega t)} \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x (e^{-ik_{z0}z} + r_{Z,\perp} e^{ik_{z0}z}) \quad (6.2.9)$$

beschreiben. Das magnetische Feld kann dann mithilfe des Faradayschen Induktionsgesetzes aus dem elektrischen Feld bestimmt werden, und man bekommt

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{1}{i\omega} \nabla \times \mathbf{E} \\ &= \frac{1}{i\omega} E_0 e^{i(k_x x - \omega t)} \left([ik_x \mathbf{e}_z + ik_{z0} \mathbf{e}_x] e^{-ik_{z0} z} r_{Z,\perp} + [ik_x \mathbf{e}_z - ik_{z0} \mathbf{e}_x] e^{ik_{z0} z} \right). \end{aligned} \quad (6.2.10)$$

Mit der Randbedingung aus Gl. (6.2.3) bekommt man zunächst

$$Z_{\perp}(k_x, \omega) = \frac{k_0}{k_{z0}} \frac{1 + r_{z,\perp}}{1 - r_{z,\perp}}. \quad (6.2.11)$$

Der allgemeine Amplitudenreflexionskoeffizient kann daher für die TE-Moden durch

$$r_{Z,\perp} = \frac{k_{z0} Z_{\perp}(k_x, \omega) - k_0}{k_{z0} Z_{\perp}(k_x, \omega) + k_0} \quad (6.2.12)$$

ausgedrückt werden, wobei dieser von der Oberflächenimpedanz Z_{\perp} abhängt.

6.3 Leontovich-Randbedingungen

Die allgemeinen Amplitudenreflexionskoeffizienten in den Gln. (6.2.8) und (6.2.12) sind solange unbestimmt, solange die Oberflächenimpedanzen nicht festgelegt werden. Bevor in den folgenden Abschnitten ein Ausdruck für die Oberflächenimpedanzen innerhalb des Modells der Spiegelreflexion abgeleitet wird, soll an dieser Stelle ein besonderer Spezialfall diskutiert werden, der in der Literatur verwendet wurde, um den Wärmestrom [72, 87] und die thermische Korrektur für die Casimir-Kraft [84] zu bestimmen. Da es sich hier allerdings nur um einen Spezialfall handelt, sollen die für diesen Fall resultierenden Reflexionskoeffizienten im Vergleich zu den Fresnelschen Ausdrücken diskutiert werden, wodurch der Gültigkeitsbereich dieses Spezialfalles geklärt wird.

Für diesen Spezialfall werden die obigen Randbedingungen in Gl. (6.2.2) und (6.2.3) in Kombination mit den Oberflächenimpedanzen [21]

$$Z_{\parallel} = Z_{\perp} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{r1}}} \quad (6.3.1)$$

verwendet. Diese sogenannten Leontovich-Randbedingungen sind laut Lehrbuch [21] für eine Halbraumgeometrie dann anwendbar, falls die Skintiefe d_s sehr viel kleiner als die Wellenlänge des Lichtes $2\pi c/\omega$ ist. Für thermische Strahlung bei $T = 300$ K liegt die Wellenlänge im Mikrometerbereich, wogegen die Skintiefe für gute Metalle unter 100 nm liegt. Daher müssen die Leontovich-Randbedingungen für die propagierenden Moden bei gut leitenden Metallen anwendbar sein, d.h. das gleiche Ergebnis liefern wie die üblichen Fresnelschen Randbedingungen. Im Abstand z im fluktuierenden Nahfeld oberhalb eines Halbraumes sind die evaneszenten Moden dagegen auf einer Längenskala $1/z$ exponentiell gedämpft, sodass die Leontovich-Randbedingungen in diesem Fall nur richtig sein können, solange die betrachteten

Abstände sehr viel größer als die Skintiefe d_s sind. Diese Einschränkung des Anwendungsbereiches kann man etwas präzisieren, indem man die resultierenden Reflexionskoeffizienten für den Leontovich-Ansatz mit den Fresnelschen Reflexionskoeffizienten in Gl. (6.2.1) vergleicht.

Setzt man die Oberflächenimpedanz in Gl. (6.2.8) und (6.2.12) ein, so ergeben sich für den Leontovich-Ansatz die Amplitudenreflexionskoeffizienten

$$r_{L,\parallel} = \frac{h_0 \epsilon_{r1} - k_0 \sqrt{\epsilon_{r1}}}{h_0 \epsilon_{r1} + k_0 \sqrt{\epsilon_{r1}}} \quad \text{und} \quad r_{L,\perp} = \frac{h_0 - k_0 \sqrt{\epsilon_{r1}}}{h_0 + k_0 \sqrt{\epsilon_{r1}}}. \quad (6.3.2)$$

Vergleicht man diese Reflexionskoeffizienten mit den entsprechenden Fresnelschen Ausdrücken in Gl. (6.2.1), so kann man sehen, dass die Ausdrücke für $\lambda \ll k_0 \sqrt{|\epsilon_{r1}|}$ bzw. $\lambda d'_s \ll 1$ übereinstimmen, wobei d'_s durch

$$d'_s := \frac{1}{k_0 \sqrt{|\epsilon_{r1}|}} \quad (6.3.3)$$

definiert ist. Für die propagierenden Moden mit $\lambda < k_0$ gilt die Übereinstimmung

$$r_L \approx r_F \quad (6.3.4)$$

daher stets, solange $\sqrt{|\epsilon_{r1}|} \gg 1$. Da für Drude-Metalle in der Regel $|\epsilon_{r1}| \gg 1$ für $\omega \ll \omega_p$ gilt, liefern die Leontovich-Randbedingungen eine sehr gute Näherung und damit auch die gleichen Ergebnisse wie die üblichen Fresnelschen Randbedingungen für Frequenzen weit unterhalb der Plasmafrequenz. Daher sollten die thermische Korrektur zur Casimir-Kraft und der Nahfeldwärmehtransport für die propagierenden Moden unabhängig von der Wahl der beiden Randbedingungen sein, solange man gut leitende Metalle betrachtet.

Für die evaneszenten Moden gilt nun $\lambda > k_0$, sodass die Leontovich- und Fresnelschen Reflexionskoeffizienten in diesem Fall nur übereinstimmen, solange $\lambda d'_s \ll 1$ vorausgesetzt werden kann. Da das evaneszente Nahfeld durch die Moden mit $\lambda \approx z^{-1}$ bestimmt ist, kann man erwarten, dass man für die Energiedichte oberhalb eines Halbraumes und für den Nahfeldwärmehtransport bei Verwendung der Leontovich- bzw. Fresnel-Randbedingungen nur für Abstände $z \gg d'_s$ bzw. $a \gg d'_s$ übereinstimmende Resultate erhält. Für $T = 300 \text{ K}$ bekommt man für die entsprechende thermische Frequenz $\omega_{\text{th}} \approx 1,1 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}$ mit der Permittivität für Gold

$$d'_s{}^{\text{Au}} \approx 22,3 \text{ nm}. \quad (6.3.5)$$

Dieser Wert stimmt für Gold sehr gut mit der Skintiefe $d_s^{\text{Au}} \approx 22 \text{ nm}$ überein, sodass die Leontovich- bzw. Fresnelschen Reflexionskoeffizienten nur für Abstände $z \gg d'_s$ bzw. $a \gg d_s$ gleiche Werte für die Nahfeldenergiedichte bzw. den Nahfeldwärmehtransport liefern.

Man beachte dazu, dass es sich bei den Fresnelschen Reflexionskoeffizienten um die richtigen Reflexionskoeffizienten für lokale Medien handelt, wohingegen der Leontovich-Ansatz ein Spezialfall ist, der aus den Fresnelschen Randbedingungen hervorgeht und für sehr gut leitende Metalle für die propagierenden Moden gleichwertige Ergebnisse liefert. Für die evaneszenten Moden sind die approximativen

Leontovich-Randbedingungen allerdings für gute Metalle nur bei Abständen $a \gg d'_s \approx d_s$ anwendbar, sodass die Verwendung dieser Randbedingung keine physikalisch sinnvollen Ergebnisse für Abstände kleiner als d'_s liefern kann. Daher ist der Versuch sinnlos, Probleme, die bei der thermischen Korrektur der Casimir-Kraft auftreten, durch Verwendung der Leontovich-Randbedingungen [84, 86, 98] zu lösen, genauso wie deren Verwendung bei der Berechnungen des Nahfeldwärmehtransportes [87] keinen allgemeingültigen Ausdruck liefert, sondern nur einen Näherungsausdruck, der gerade im Nahfeldbereich nicht mehr gültig ist.

6.4 Greensche Funktion im Medium

Um die wellenzahlabhängige Oberflächenimpedanz für ein nichtlokales Medium zu bestimmen, muss zunächst die Greensche Funktion innerhalb solcher Medien abgeleitet werden. Wie im nächsten Abschnitt gezeigt wird, genügt es, die dyadische Greensche Funktion für ein unendlich ausgedehntes Medium mit der Permittivität $\epsilon_{ij}(\omega, k)$ zu kennen, um die Oberflächenimpedanz für eine Halbraumgeometrie, wie sie in Abb. 6.1 dargestellt ist, bestimmen zu können. Um die dyadische Greensche Funktion abzuleiten, werden nun die gleichen Schritte, die zur Bestimmung der freien Greenschen Funktion in Gl. (1.3.9) führen, durchgeführt. Insbesondere ist klar, dass der Ausdruck für die dyadische Greensche Funktion im nichtlokalen Medium für die spezielle Wahl der Permittivität $\epsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \epsilon_0 \delta_{ij}$ in den entsprechenden Ausdruck für die freie dyadische Greensche Funktion aus Gl. (1.3.9) übergeht.

Der Ausgangspunkt für die Ableitung der dyadischen Greenschen Funktion sind die Maxwell-Gleichungen (1.1.1) im Fourier-Raum,

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \times \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) &= \omega \mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{k}, \omega) \\ i\mathbf{k} \times \mathbf{H}(\mathbf{k}, \omega) &= \mathbf{j}_{\text{ext}} - i\omega \epsilon_0 (\epsilon_{r1,l}(k, \omega) \mathbb{L} + \epsilon_{r1,t}(k, \omega) \mathbb{T}) \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega), \end{aligned} \quad (6.4.1)$$

wobei die Permittivität mithilfe der Ausdrücke

$$\mathbb{L} := \frac{\mathbf{k} \otimes \mathbf{k}}{k^2} \quad \text{und} \quad \mathbb{T} := \mathbb{1} - \frac{\mathbf{k} \otimes \mathbf{k}}{k^2} \quad (6.4.2)$$

in ihren longitudinalen Anteil $\epsilon_{r1,l}(k, \omega)$ und transversalen Anteil $\epsilon_{r1,t}(k, \omega)$ aufgeteilt wurde.

Aus den Maxwell-Gleichungen (6.4.1) folgt die Helmholtz-Gleichung

$$\left((k^2 - k_0^2 \epsilon_{r1,t}) \mathbb{T} - k_0^2 \epsilon_{r1,l} \mathbb{L} \right) \mathbf{E} = i\omega \mu_0 \mathbf{j}_{\text{ext}}. \quad (6.4.3)$$

Mit der Definition der elektrischen dyadischen Greenschen Funktion in Gl. (1.1.4) erhält man die Helmholtz-Gleichung

$$\left((k^2 - k_0^2 \epsilon_{r1,t}) \mathbb{T} - k_0^2 \epsilon_{r1,l} \mathbb{L} \right) \mathbb{G}^E(\mathbf{k}, \omega) = \mathbb{1} \quad (6.4.4)$$

für die dyadische Greensche Funktion, sodass diese durch

$$\begin{aligned}
 \mathbb{G}^E(\mathbf{k}, \omega) &= \frac{1}{(k^2 - k_0^2 \epsilon_{r1,t}) \mathbb{T} - k_0^2 \epsilon_{r1,l} \mathbb{L}} \\
 &= \frac{1}{k^2 - k_0^2 \epsilon_{r1,t}} \mathbb{T} - \frac{1}{k_0^2 \epsilon_{r1,l}} \mathbb{L} \\
 &= \mathbb{G}_t^E(\mathbf{k}, \omega) + \mathbb{G}_l^E(\mathbf{k}, \omega)
 \end{aligned} \tag{6.4.5}$$

gegeben ist. Die dyadische Greensche Funktion kann also in ihren longitudinalen und transversalen Anteil aufgeteilt werden, wobei man anhand dieser Darstellung sieht, dass man für $\epsilon_{r1,t} = \epsilon_{r1,l} = 1$ wieder die freie dyadische Greensche Funktion aus Gl. (1.3.9) erhält. Für $\epsilon_{1,t}(k = 0, \omega) = \epsilon_{1,l}(k = 0, \omega) = \epsilon_1(\omega)$ erhält man dagegen die dyadische Greensche Funktion innerhalb eines unendlich ausgedehnten lokalen Mediums.

6.5 Modell der Spiegelreflexion

In diesem Abschnitt wird endlich die Oberflächenimpedanz für einen nichtlokalen Halbraum bei $z < 0$, der an das Vakuum für $z > 0$ grenzt, im Modell der Spiegelreflexion (*specular reflection*) bestimmt, wobei die Permittivität $\epsilon_{ij}(k, \omega)$ noch nicht weiter spezifiziert wird. Man geht nun von der Annahme aus, dass eine elektromagnetische Welle (siehe Abb. 6.2), die innerhalb eines nichtlokalen Halbraumes am Ort $\mathbf{r}' = (x', y', z')$ mit $z' < 0$ durch einen Quellenstrom erzeugt wird, im Medium weiter propagiert und schließlich an der Grenzfläche bei $z = 0$ derart reflektiert wird, dass bei der Reflexion an der Grenzfläche keine Phasenverschiebung auftritt. Die Atome in der Nähe der Oberfläche verhalten sich in diesem Modell daher genauso wie die Atome tief innerhalb der Mediums. Außerdem wird in diesem Modell angenommen, dass das elektrische Feld der reflektierten Welle dem an der Grenzfläche bei $z = 0$ gespiegelten Feld der ursprünglichen Welle entspricht.

Mit dieser Annahme der Spiegelreflexion kann man daher die gegebene Geometrie eines dielektrischen Halbraumes bei $z < 0$, der an das Vakuum bei $z > 0$ grenzt, durch ein Hilfssystem ersetzen, bei dem der gesamte Raum durch das nichtlokale Dielektrikum gefüllt ist. Setzt man dieses Hilfssystem voraus, so kann man die an der Grenzfläche reflektierte Welle durch eine frei im Medium propagierende Welle ersetzen, die im Spiegelpunkt $\overline{\mathbf{r}'} = (x', y', -z')$ durch einen Spiegelstrom (siehe Abb. 6.2) erzeugt wird. Allerdings haben bei Verwendung dieses Hilfssystems nur die Felder für $z < 0$ eine physikalische Bedeutung.

Setzt man nun voraus, dass der gesamte Raum durch das nichtlokale Dielektrikum gefüllt ist, so sind daher im Falle der Spiegelreflexion die Lösungen der Maxwell-Gleichungen gesucht, bei denen die elektrischen Felder bzgl. der Grenzfläche spiegelsymmetrisch und die magnetischen Felder antisymmetrisch bzgl. einer Spiegelung bei $z = 0$ sind. Man kann daher das Spiegelstromproblem dahingehend vereinfachen, dass nur die Lösungen für einen Hilfsstrom innerhalb der Grenzschicht $z = 0$ bestimmt werden, da die dadurch verursachten Felder bereits die gewünschte Symmetrie aufweisen.

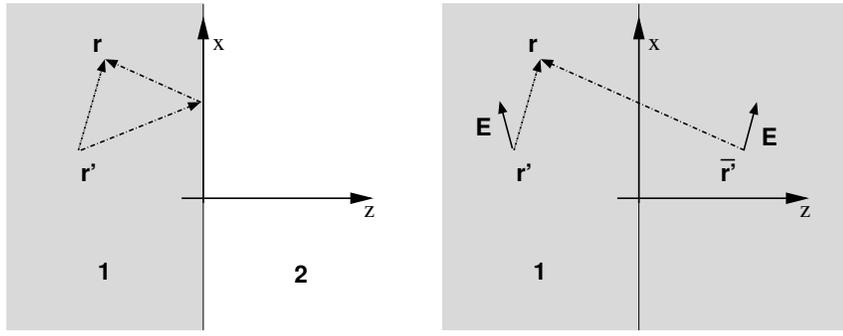


Abbildung 6.2: Die linke Grafik skizziert eine ebene Welle, die bei $\mathbf{r}' = (x', y', z')$ erzeugt wird und direkt zum Beobachtungsort \mathbf{r} propagiert, sowie eine ebene Welle, die bei \mathbf{r}' erzeugt wird und erst nach einer Reflexion an der Grenzfläche bei $z = 0$ den Beobachtungsort \mathbf{r} erreicht. In der rechten Grafik wird das Modell der Spiegelreflexion skizziert, bei dem die reflektierte Welle durch eine frei propagierende Welle modelliert werden kann, die im Spiegelpunkt $\bar{\mathbf{r}}' = (x', y', -z')$ durch einen Spiegelstrom erzeugt wird.

Geht man für die TM-Moden von einer Stromschicht bei $z = 0$ aus, die durch

$$\mathbf{j}_{\text{ext}} = J_0 \mathbf{e}_x \delta(z) e^{i(k_x x - \omega t)} \quad (6.5.1)$$

gegeben ist, so wird dadurch ein spiegelsymmetrisches elektrisches Feld

$$E_x = i\omega\mu_0 \mathbb{G}_{xx}^E(k_x, z) J_0 e^{i(k_x x - \omega t)} \quad (6.5.2)$$

in x -Richtung erzeugt, wobei $\mathbb{G}_{xx}^E(k_x, z)$ die Fourier-Transformierte der Greenschen Funktion aus Gl. (6.4.5) bzgl. k_z ist. Für die Transversalkomponente des magnetischen Feldes, die selbst antisymmetrisch ist, d.h. es gilt $H_y(z) = -H_y(-z)$, folgt aus $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_{\text{ext}}$ sofort

$$-\partial_z H_y = J_0 \delta(z) e^{i(k_x x - \omega t)}. \quad (6.5.3)$$

Integriert man diese Gleichung senkrecht zur Grenzfläche bei $z = 0$, so erhält man

$$\begin{aligned} \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{0-\eta}^{0+\eta} dz \partial_z H_y &= -2H_y(-\eta) \\ &= -J_0 e^{i(k_x x - \omega t)}. \end{aligned} \quad (6.5.4)$$

Mithilfe der Feldkomponenten E_x und H_y kann man die Oberflächenimpedanz innerhalb des physikalisch sinnvollen Bereiches, d.h. für $z < 0$ bestimmen. Mit der entsprechenden Randbedingung aus Gl. (6.2.2), also

$$Z_{\parallel}(k_x, \omega) = -\frac{1}{c\mu_0} \left. \frac{E_x}{H_y} \right|_{z=0-\eta} = -2ik_0 \mathbb{G}_{xx}^E(k_x, z=0), \quad (6.5.5)$$

kann man daher die Oberflächenimpedanz Z_{\parallel} mithilfe der dyadischen Greenschen Funktion ausdrücken. Berücksichtigt man noch, dass für die TM-Moden

$$\mathbb{L}_{xx} = \frac{k_x^2}{k^2} \quad \text{und} \quad \mathbb{T}_{xx} = 1 - \frac{k_x^2}{k^2} = \frac{k_z^2}{k^2} \quad (6.5.6)$$

gilt, so bekommt man mit der Greenschen Funktion aus Gl. (6.4.5) die Impedanz für die TM-Moden:

$$\begin{aligned} Z_{\parallel}(k_x, \omega) &= 2ik_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_z}{2\pi} \frac{1}{k^2} \left(\frac{k_z^2}{k_0^2 \epsilon_{r1,t} - k^2} + \frac{k_x^2}{k_0^2 \epsilon_{r1,l}} \right) \\ &= \frac{2ik_0}{\pi} \int_0^{\infty} dk_z \frac{1}{k^2} \left(\frac{k_z^2}{k_0^2 \epsilon_{r1,t} - k^2} + \frac{k_x^2}{k_0^2 \epsilon_{r1,l}} \right). \end{aligned} \quad (6.5.7)$$

Dabei wurde ausgenutzt, dass der Integrand nur von k_z^2 abhängt, da die longitudinale und transversale Permittivität nur von $k = \sqrt{k_x^2 + k_z^2}$ abhängt, und damit symmetrisch in k_z ist.

Für die TE-Moden wird eine Stromschicht bei $z = 0$ der Art

$$\mathbf{j}_{\text{ext}} = J_0 \mathbf{e}_y \delta(z) e^{i(k_x x - \omega t)} \quad (6.5.8)$$

vorausgesetzt. Das elektrische Feld in y -Richtung ist dann

$$E_y = i\omega\mu_0 \mathbf{G}_{yy}^E(k_x, z) J_0 e^{i(k_x x - \omega t)} \quad (6.5.9)$$

und für das Magnetfeld erhält man nun

$$-2H_x(-\eta) = J_0 e^{i(k_x x - \omega t)}. \quad (6.5.10)$$

Dementsprechend ist die Oberflächenimpedanz (vgl. Gl. (6.2.2)) dann durch

$$Z_{\perp}(k_x, \omega) = \frac{1}{c\mu_0} \frac{E_y}{H_x} \Big|_{z=0-\eta} = -2ik_0 \mathbf{G}_{yy}^E(k_x, z) \quad (6.5.11)$$

bestimmt. Da für die TE-Moden der longitudinale Anteil verschwindet, hat man reine Transversalmoden, d.h. es gelten

$$\mathbf{T}_{yy} = 1 \quad \text{und} \quad \mathbf{L}_{yy} = 0. \quad (6.5.12)$$

Man bekommt damit für die Oberflächenimpedanz der TE-Moden

$$Z_{\perp}(k_x, \omega) = \frac{2ik_0}{\pi} \int_0^{\infty} dk_z \frac{1}{k_0^2 \epsilon_{r1,t} - k^2}. \quad (6.5.13)$$

Somit sind die Oberflächenimpedanzen für die TM- und TE-Moden in Gl. (6.5.7) und Gl. (6.5.13) in Abhängigkeit von der Permittivität bestimmt. Man beachte, dass der longitudinale Anteil der Permittivität nur in Z_{\parallel} eingeht, weil nur TM-Moden eine elektrische Feldkomponente senkrecht zur Oberfläche des Halbraumes haben und dadurch an die longitudinalen Moden koppeln können.

Es soll nun anhand der TE-Moden gezeigt werden, dass man für lokale Permittivitäten wieder die Fresnelschen Reflexionskoeffizienten erhält, sodass die mit der Oberflächenimpedanz formulierten Reflexionskoeffizienten im Fall der Spiegelreflexion eine Verallgemeinerung der Fresnelkoeffizienten darstellen. Sei also $\epsilon_{r1,t}(\omega, k) = \epsilon_{r1}(\omega)$, dann erhält man aus Gleichung (6.5.13) mit $k^2 = k_x^2 + k_z^2$ sofort

$$Z_{\perp}(k_x, \omega) = \frac{ik_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \frac{1}{k_0^2 \epsilon_{r1}(\omega) - k_x^2 - k_z^2}. \quad (6.5.14)$$

Der Integrand hat Polstellen bei

$$k_z = \pm \sqrt{k_0^2 \epsilon_{r1}(\omega) - k_x^2} =: \pm h_1, \quad (6.5.15)$$

wobei nur der Pol $+h_1$ mit $\text{Im}(h_1) > 0$ aufgrund der Konstruktion der ebenen Wellen entsprechend Gl. (6.2.4) physikalisch sinnvoll ist, da nur dieser Pol für $z \rightarrow \pm\infty$ auf exponentiell abfallende Lösungen führt. Der zweite Pol bei $-h_1$ hat dagegen einen negativen Imaginärteil und liegt deshalb in der unteren Halbebene der komplexen Ebene. Somit kann man das Integral mithilfe des Residuensatzes berechnen, indem man den Integrationsweg in der oberen Halbebene schließt. Man erhält

$$\begin{aligned} Z_{\perp}(k_x, \omega) &= -\frac{ik_0}{\pi} \lim_{\eta \rightarrow 0} \int dk_z \frac{e^{ik_z \eta}}{(k_z - h_1)(k_z + h_1)} \\ &= -\frac{ik_0}{\pi} \lim_{\eta \rightarrow 0} \left(2\pi i \frac{e^{ih_1 \eta}}{2h_1} \right) \\ &= \frac{k_0}{h_1}. \end{aligned} \quad (6.5.16)$$

Mit einer ähnlichen Rechnung erhält man für die TM-Moden

$$Z_{\parallel}(k_x, \omega) = \frac{h_1}{k_0 \epsilon_{r1}}. \quad (6.5.17)$$

Setzt man diese Ergebnisse in den Amplitudenreflexionskoeffizienten in Gl. (6.2.8) bzw. (6.2.12) ein, so bekommt man die entsprechenden Ausdrücke für die Fresnelschen Reflexionskoeffizienten aus Gl. (6.2.1). Für den bereits diskutierten Spezialfall $k_x d'_s \gg 1$ bzw. $\lambda d'_s \gg 1$ stimmen diese mit den Leontovich-Ausdrücken in Gl. (6.3.2) überein.

6.6 Das SCIB-Modell

Das einfachste Modell für die Wechselwirkung von Licht mit einer unendlich ausgedehnten Metalloberfläche, das nichtlokale Effekte mitberücksichtigt, ist das sogenannte *semiclassical infinite barrier* Modell bzw. SCIB-Modell [83]. In diesem Modell wird vorausgesetzt, dass die Leitungselektronen an der Metalloberfläche wie Licht an einem perfekten Spiegel reflektiert werden, wobei die Leitungselektronen als ein ideales Gas, das der Fermi-Statistik gehorcht, beschrieben werden. Da die Felder mit dieser Annahme wieder spiegelsymmetrisch sind, ist diese Bedingung äquivalent zu der Annahme der Spiegelreflexion für die Felder innerhalb des Metalles, die von einer Oberflächenstromschicht bei $z = 0$ herrühren, wie sie in Gl. (6.5.1) bzw. (6.5.8) vorausgesetzt wurde. Für dieses semi-klassische Modell erhält man für den transversalen Anteil der Permittivität [83, 99] mit $u := v_F k(\omega + i\omega_{\tau})^{-1}$

$$\epsilon_{r1,t}(\omega, k) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\omega_{\tau})} f_t(u) \quad (6.6.1)$$

und für den longitudinalen Anteil

$$\epsilon_{r1,l}(\omega, k) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\omega_{\tau})} f_l(u), \quad (6.6.2)$$

wobei die Funktionen $f_t(u)$ und $f_l(u)$ durch die Gleichungen

$$f_t(u) := \frac{3}{2u^3} \left[u - \frac{1}{2}(1 - u^2) \log \left(\frac{1+u}{1-u} \right) \right] \quad (6.6.3)$$

und

$$f_l(u) := \frac{3}{u^3} \frac{\frac{1}{2} \log \left(\frac{1+u}{1-u} \right) - u}{1 + i \frac{\omega_\tau}{\omega} - \frac{i \omega_\tau}{2u\omega} \log \left(\frac{1+u}{1-u} \right)} \quad (6.6.4)$$

gegeben sind. Dabei ist $\omega_\tau = \tau^{-1}$ die inverse Relaxationszeit und v_F Fermi-Geschwindigkeit. Eine ausführliche Berechnung dieser Permittivität mithilfe der Boltzmann-Gleichung findet man in [100].

Entwickelt man den Logarithmus für $|u| \ll 1$, bekommt man

$$\log \left(\frac{1+u}{1-u} \right) = 2u + \frac{2}{3}u^3 + \mathcal{O}(u^4). \quad (6.6.5)$$

Setzt man diese Entwicklung für $f_t(u)$ und $f_l(u)$ ein, so erhält man daher für $|u| \ll 1$

$$f_t(u) \approx 1 \quad \text{und} \quad f_l(u) \approx 1 \quad (6.6.6)$$

und damit die lokale Permittivität $\epsilon_{r1,t} = \epsilon_{r1,l} = \epsilon^D$ für das Drude-Modell. Somit gibt die Längenskala

$$\frac{|u|}{k} = \left| \frac{v_F}{\omega + i\omega_\tau} \right| \quad (6.6.7)$$

an, für welche Abstände nichtlokale Korrekturen zu erwarten sind. Für $\omega_\tau \gg \omega$ stimmt diese Längenskala in etwa mit der mittleren freien Weglänge $l = v_F \tau$ des Elektrons überein. Hier ein Zahlenbeispiel: Bei einer Temperatur von 300 K liegt die inverse Relaxationszeit für Gold bei $\omega_\tau \approx 3,3 \cdot 10^{13} \text{ s}^{-1}$ und die Fermi-Geschwindigkeit bei $v_F \approx 1,4 \cdot 10^6 \text{ m s}^{-1}$, sodass man eine mittlere freie Weglänge von $l^{\text{Au}} \approx 42 \text{ nm}$ bekommt.

Für Frequenzen mit $\omega_\tau \ll \omega$ dagegen stimmt die Längenskala $|u|/k$ im Wesentlichen mit der Größe v_F/ω überein, die mit der Anregung von Elektron-Loch-Paaren im Metall verknüpft ist: Für Wellenzahlen $k = \sqrt{k_x^2 + k_z^2}$ mit

$$\sqrt{\frac{2m_e\omega}{\hbar} + k_F^2} - k_F < k < \sqrt{\frac{2m_e\omega}{\hbar} - k_F^2} - k_F, \quad (6.6.8)$$

wobei m_e für die Elektronenmasse steht, ist die Elektronenstreuung in einem Metall durch die Anregung von Elektron-Loch-Paaren dominiert. Die Elektron-Loch-Paar-Anregungen können nur mithilfe der quantenmechanischen Lindhardt-Permittivität [83] richtig beschrieben werden, die für die Elektron-Loch-Paare auf die Dispersionsrelation

$$\omega = v_F k + \frac{\hbar k^2}{2m_e} \quad (6.6.9)$$

führt. Verwendet man daher die quantenmechanischen Ausdrücke für die Permittivität in Gl. (6.6.1) bzw. (6.6.2) innerhalb des Modells der Spiegelreflexion, so

kann man mit dem SCIB-Modell quantitativ bessere Resultate erzielen. Die semi-klassische Permittivität hingegen berücksichtigt nur den linearen Term der Dispersionsrelation der Elektron-Loch-Paar-Anregungen, d.h. man erhält

$$\omega = v_F k. \quad (6.6.10)$$

Aus der quadratischen Dispersionsrelation in Gl. (6.6.9) folgt aber, dass man für $k \ll 2k_F$ den quadratischen Term vernachlässigen kann; die Dispersion kann daher für Wellenzahlen viel kleiner als $k_F = m_e v_F / \hbar$ in sehr guter Näherung als linear angesehen werden. Es genügt folglich auf Längenskalen, die viel größer als k_F^{-1} sind, die rein semi-klassischen Ausdrücke im SCIB-Modell zu verwenden. Da nun k_F in der Größenordnung von 10^{10} m^{-1} liegt, wird im Weiteren das SCIB-Modell mit den semi-klassischen Permittivitäten in Gl. (6.6.1) bzw. (6.6.2) verwendet.

Man beachte, dass man im SCIB-Modell für $k > \omega/v_F$ nichtlokale Effekte durch die Anregungen von Elektron-Loch-Paaren erhält, sodass man neben der mittleren freien Weglänge l noch zusätzlich die Längenskala $l_{\text{TL}} = v_F/\omega$ zu berücksichtigen hat. Schließlich erhält man die Gleichungen (6.6.6) und damit das lokale Ergebnis, falls $|u| \ll 1$ gilt. Das ist aber für $\omega \ll \omega_\tau$ dann erfüllt, wenn

$$|u| \approx lk \ll 1 \quad (6.6.11)$$

gilt und für den umgekehrten Fall mit $\omega \gg \omega_\tau$, wenn

$$|u| \approx l_{\text{TL}} k \ll 1 \quad (6.6.12)$$

gilt. Man beachte, dass für $\omega \ll \omega_\tau$ zusätzlich $l_{\text{TF}} \gg l$ gilt, wohingegen für $\omega \gg \omega_\tau$ die Beziehung $l_{\text{TF}} \ll l$ gilt. Die kleinere der beiden Längenskalen l bzw. l_{TL} ist daher die entscheidende Längenskala für das Eintreten nichtlokaler Effekte. Setzt man wieder $T = 300 \text{ K}$ voraus, so hat man eine thermische Frequenz von $\omega_{\text{th}} \approx 1,1 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}$ und erhält somit für Gold mit $v_F = 1,4 \cdot 10^6 \text{ m s}^{-1}$ die Längenskala $l_{\text{TL}}^{\text{Au}} \approx 13 \text{ nm}$, für die die Anregung von Elektron-Loch-Paaren relevant wird. Dementsprechend ist für gute Leiter bei Raumtemperatur nicht l , sondern l_{TL} die Längenskala, ab der nichtlokale Effekte zu berücksichtigen sind. Für schlechte Leiter mit relativ großen ω_τ ist dagegen $l \ll l_{\text{TL}}$ die entscheidende Längenskala. Da allerdings beide Längenskalen l und l_{TL} für gute Leiter wie Gold in der gleichen Größenordnung sind, kann weiterhin für alle normalen Drude-Materialien die mittlere freie Weglänge l des Elektrons als die Längenskala vorausgesetzt werden, ab der nichtlokale Effekte berücksichtigt werden müssen.

Für sehr große Wellenzahlen k bzw. $|u|$ kann man leicht sehen, dass $f_t(u)$ in Gl. (6.6.3) bzw. $f_l(u)$ in Gl. (6.6.4) gegen Null konvergieren, sodass die Permittivität gegen die Permittivität des Vakuums strebt. Dementsprechend werden die Reflexionskoeffizienten für große Wellenzahlen k verschwinden. Man kann zeigen [48], dass die Reflexionskoeffizienten im SCIB-Modell für $\lambda l_{\text{TF}} \gg 1$ mit der Thomas-Fermi-Abschirmlänge $l_{\text{TF}} = v_F/(\sqrt{3}\omega_p)$ vernachlässigbar klein werden, sodass man dadurch im nichtlokalen Fall eine Beschränkung bezüglich der Wellenzahl erhält. Dementsprechend erhält man dadurch für sehr viel kleinere Abstände als l_{TF} keine zusätzlichen Beiträge und damit einen konstanten abstandsunabhängigen Wert. Mit anderen Worten: Die Energiedichte und der Strahlungswärmetransport sind im

nichtlokalen SCIB-Modell für beliebig kleine Abstände nicht mehr divergent, so dass diese unphysikalischen Unendlichkeiten innerhalb einer nichtlokalen Beschreibung prinzipiell ausgeschlossen werden. Das gilt auch, wenn man die angesprochene quantenmechanische Lindhardt-Permittivität aus Referenz [83] verwendet, die gerade für sehr große Wellenzahlen quantitative bessere Werte liefert, sich aber qualitativ nicht vom SCIB-Modell unterscheidet. Setzt man zur Abschätzung von l_{TF} die Plasmafrequenz für Gold von $\omega_p = 1,4 \cdot 10^{16} \text{ s}^{-1}$ und die Fermi-Geschwindigkeit $v_F = 1,4 \cdot 10^6 \text{ ms}^{-1}$ ein, so erhält man $l_{\text{TF}} \approx 5,7 \cdot 10^{-11} \text{ m}$. Damit liegt die Längenskala, auf der die physikalischen Größen konstant werden, wieder weit unterhalb des physikalisch zugänglichen Abstandsbereiches.

6.7 Vergleich der Modelle

In diesem letzten Abschnitt soll anhand numerischer Ergebnisse gezeigt werden, wie sich die Verwendung der lokalen Fresnelschen Reflexionskoeffizienten, der Leontovich-Randbedingungen und der nichtlokalen Reflexionskoeffizienten auf den Nahfeldwärmehtransport auswirkt. Dazu wird der Nahfeldwärmehtransport zwischen zwei Goldhalbräumen und zwischen einem Gold- und einem GaN-Halbraum gemäß der Polder-van Hove-Formel aus Gl. (5.2.15) bestimmt. Im ersten Fall ist der Nahfeldwärmehtransport durch die TE-Moden dominiert und im zweiten Fall durch die TM-Moden, sodass man durch die Wahl des Materials Auskunft über die Veränderung in den TE- bzw. TM-Moden für die verschiedenen Beschreibungen erhält. Für die Permittivität des polaren GaN-Halbraumes wird wieder die Reststrahlenformel verwendet.

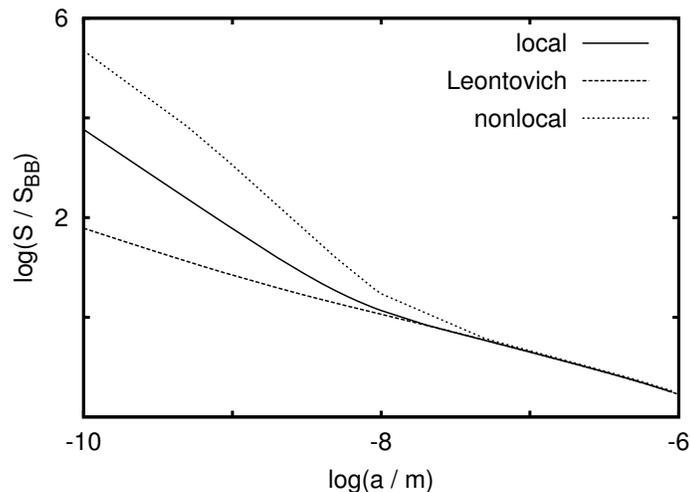


Abbildung 6.3: Der Strahlungswärmehtransport im Nahfeld zwischen einem Goldhalbraum bei $T_1 = 300 \text{ K}$ und einem GaN-Halbraum bei $T_3 = 0 \text{ K}$ gemäß der Polder-van Hove-Formel, normiert auf den Schwarzkörperwert. Für die Beschreibung des Goldhalbraumes wurden die lokale Permittivität (Drude-Modell), die Leontovich-Randbedingung und das nichtlokale SCIB-Modell verwendet.

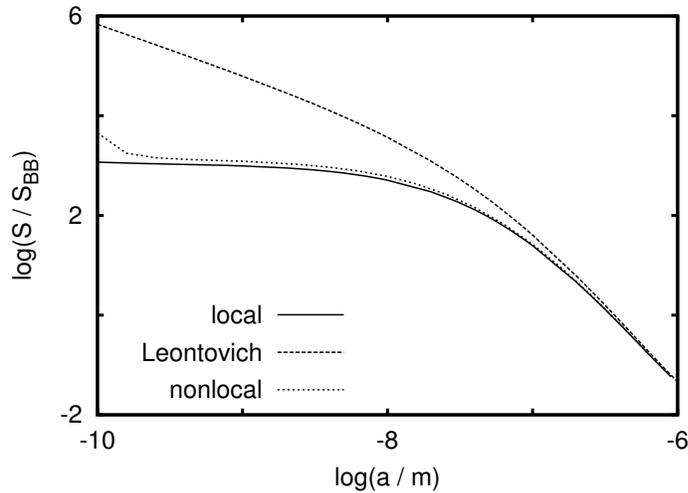


Abbildung 6.4: Der Strahlungswärmetransport im Nahfeld zwischen zwei Goldhalbräumen bei $T_1 = 300$ K bzw. bei $T_3 = 0$ K gemäß der Polder-van Hove-Formel, normiert auf den Schwarzkörperwert. Für die Beschreibung des Goldhalbraumes wurden die lokale Permittivität (Drude-Modell), die Leontovich-Randbedingung und das nichtlokale SCIB-Modell verwendet.

Zuerst betrachte man den Strahlungswärmetransport im Nahfeld zwischen einem Au-Halbraum bei $T_1 = 300$ K und einem GaN-Halbraum bei $T_3 = 0$ K in Abb. 6.3. Man kann in dieser Abbildung sehr gut sehen, dass für große Abstände alle drei Beschreibungen zum gleichen Ergebnis führen und somit äquivalent sind. Für Abstände kleiner als $d_s^{\text{Au}} \approx 22$ nm ist der Nahfeldwärmestrom für die Leontovich-Randbedingungen dagegen sehr viel kleiner als der Wärmestrom für die lokalen Fresnel-Randbedingungen. Wie bereits diskutiert wurde, kann man die Verwendung des Leontovich-Ansatzes für solche Abstände nicht als physikalisch sinnvoll erachten. Im Vergleich dazu ist zu erwarten, dass gerade der nichtlokale Ansatz für Abstände, die kleiner als die mittlere freie Weglänge $l^{\text{Au}} \approx 42$ nm sind, zu bevorzugen ist. Wie man in Abb. 6.3 sieht, steigen die Werte für den Nahfeldwärmestrom um bis zu eine Größenordnung über die entsprechenden Werte, die man mittels der lokalen Beschreibung erhält, was mit der Elektron-Loch-Paar-Erzeugung zusammenhängt, die im lokalen Drude-Modell nicht richtig beschrieben wird. Außerdem nähert sich der Nahfeldwärmestrom — was man in der Abb. 6.3 nicht sehen kann — erwartungsgemäß für Abstände weit unter 10^{-10} m aufgrund des „Cutoffs“ im λ -Integral einem konstanten abstandsunabhängigen Wert. Da der Wärmestrom im vorliegenden Fall durch die TM-Moden dominiert ist, kann man weiterhin schlussfolgern, dass auch die Werte des TM-Moden-Beitrages der Energiedichte für Abstände kleiner l oberhalb der lokalen Werte liegen (siehe Abb. 6.5), wie auch in [48] gezeigt wurde. Daraus kann man wiederum erschließen, dass der Nahfeldwärmestrom im Dipolmodell für nichtlokale Metalle bis zu eine Größenordnung über den lokalen Werten liegen kann.

Der Nahfeldwärmestrom zwischen zwei Au-Halbräumen mit $T_1 = 300$ K und $T_3 = 0$ K ist für die drei verschiedenen Modelle in Abb. 6.4 geplottet. Man kann

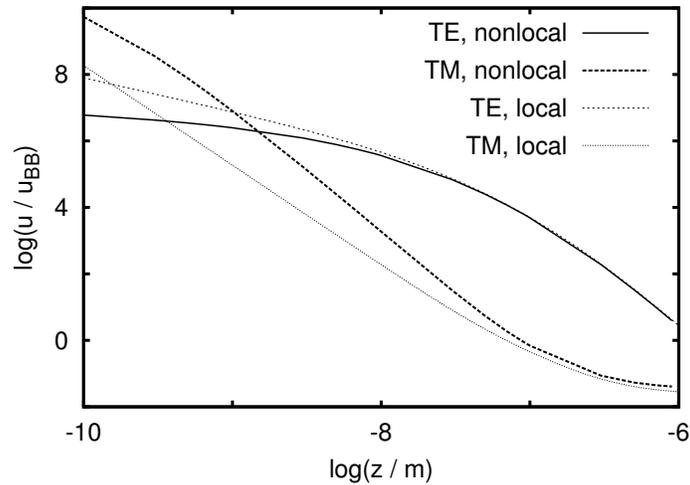


Abbildung 6.5: Die Energiedichte oberhalb eines Goldhalbraumes bei $T_1 = 300$ K gemäß Gl. (1.7.13), normiert auf den Schwarzkörperwert. Für die Beschreibung des Goldhalbraumes wurde die lokale Permittivität (Drude-Modell) und das nichtlokale SCIB-Modell verwendet.

in diesem Fall sehr gut erkennen, dass der Leontovich-Ansatz bereits für Abstände größer als $d_s^{\text{Au}} \approx 22$ nm Werte liefert, die größer sind als die Werte, die man mit den lokalen Fresnel-Koeffizienten erhält. Für diese Abstände gehorcht der Nahfeldwärmehtransport im Leontovich-Fall einem $1/a$ -Potenzgesetz und divergiert für Abstände $a \rightarrow 0$. Auch hier muss man erwarten, dass nur der nichtlokale Ansatz für $a \ll l$ physikalisch sinnvolle Ergebnisse liefert und damit der lokalen Beschreibung vorzuziehen ist, weil gerade bei diesen Abständen nichtlokale Effekte relevant werden. Man sieht in Abb. 6.4 sehr gut, dass die Werte, die man mit der lokalen Beschreibung erhält, für nahezu alle Abstände in guter Übereinstimmung mit den nichtlokalen Werten sind, wobei die lokalen Werte für den Nahfeldwärmehtransport für $a \ll l$ etwas unterhalb der entsprechenden nichtlokalen Werte liegen. Das „Sättigungsverhalten“ in den TE-Moden ist allerdings für kleine Abstände innerhalb der nichtlokalen Beschreibung etwas stärker als innerhalb der lokalen Beschreibung (siehe Abb. 6.5), was man aber in Abb. 6.4 nicht sehen kann, da sich hier der TE-Moden-Beitrag mit dem Beitrag der TM-Moden überlagert. Der Unterschied zwischen beiden Beschreibungen ist aber in diesem Fall gering, wie bereits in [75] beobachtet wurde. Da nun der Wärmestrom zwischen zwei Gold-Halbräumen durch die TE-Moden dominiert wird, kann man schlussfolgern, dass der TE-Moden-Beitrag in der Energiedichte für die lokale und nichtlokale Beschreibung ähnliche Werte liefert, wobei man für sehr kleine Abstände in der Größenordnung l_{TF} zu erwarten hat, dass der TE-Moden-Beitrag zur Energiedichte für das nichtlokale Modell im Gegensatz zum lokalen Modell konstant wird. Dieser Sachverhalt wird sehr gut in Abb. 6.5 illustriert.

6.8 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde der Einfluss nichtlokaler Effekte auf den Nahfeldwärmtransport untersucht. Es wurde gezeigt, dass der Anteil der TM-Moden für den Nahfeldwärmtransport bzw. die Energiedichte für Abstände kleiner als die mittlere freie Weglänge l des Elektrons innerhalb der nichtlokalen Beschreibung Werte ergibt, die bis zu einer Größenordnung über den entsprechenden Werten für die lokale Beschreibung liegen. Dieser Anstieg kann auf die Erzeugung von Elektronen-Loch-Paaren zurückgeführt werden, die durch das Drude-Modell nicht korrekt beschrieben wird, aber einen wesentlichen Dissipationsmechanismus innerhalb des Metalles darstellt.

Außerdem führt die nichtlokale Beschreibung stets auf abstandsunabhängige Ausdrücke für Abstände kleiner als die Thomas-Fermi-Länge l_{TF} , sodass die unphysikalische Divergenz der Energiedichte bzw. des Strahlungswärmtransportes im Nahfeld für sehr kleine Abstände behoben wird, wie auch von Henkel und Joulain [48] gezeigt wurde. Dieser Effekt kann auf einem „Cutoff“ im λ -Integral zurückgeführt werden, der dadurch bedingt ist, dass die Streuung der Elektronen für große Wellenzahlen durch Abschirmeffekte stark verringert wird und somit für solche Wellenzahlen die Dissipation durch die Streuung der Elektronen vernachlässigbar wird.

Für die TE-Moden ergeben die lokale und die nichtlokale Beschreibung für den Nahfeldwärmtransport nahezu gleiche Resultate, sodass der Nahfeldwärmtransport zwischen zwei Metallen durch die nichtlokalen Beiträge nur gering beeinflusst wird, wie bereits von Volokitin und Persson [75] herausgestellt wurde. Daher kann man die räumliche Dispersion für die Bestimmung des Nahfeldwärmtransportes zwischen zwei unendlich ausgedehnten Halbräumen in guter Näherung vernachlässigen, solange dieser im betrachteten Abstandsbereich im wesentlichen durch die TE-Moden gegeben ist, was für gut leitende Metalle wie Gold und Silber bis auf Abstände im Bereich von 1 nm erfüllt ist. Man beachte jedoch, dass die Abschirmeffekte innerhalb der Metalle eine „Sättigung“ des TE-Modenbeitrags bereits für Abstände im Bereich der mittleren freien Weglänge hervorrufen, die für die Nahfeldenergiedichte im Bereich von l oberhalb eines Metalls nicht vernachlässigbar ist.

Da in der jüngsten Literatur versucht wurde, die thermodynamischen Probleme, die sich bei der Beschreibung des thermischen Anteils der Casimir-Kraft ergeben, dadurch zu lösen, dass man die sogenannten Leontovich-Randbedingungen einführt und als die richtigen Randbedingungen postuliert [84, 85, 86], wurde auch der Nahfeldwärmtransport für diese Randbedingungen diskutiert. Dabei wurde gezeigt, dass es sich bei diesem Ansatz nur um einen Spezialfall der lokalen Beschreibung handelt, der nur für Abstände größer d'_s aus Gl. (6.3.3) anwendbar ist und damit keine Alternative zur lokalen bzw. nichtlokalen Beschreibung solcher Phänomene wie die Casimir-Kraft oder den Strahlungswärmtransport im Nahfeld darstellt.

Kapitel 7

Ein phänomenologisches Sensormodell

Das Ziel dieses Kapitels besteht darin, ein phänomenologisches Sensormodell aufzustellen, das es ermöglicht, die experimentellen Daten für den Nahfeldwärmestromtransport in einem Rasterwärmemikroskop [89] zu beschreiben.

Dazu wird im ersten Abschnitt der experimentelle Aufbau und die experimentelle Durchführung kurz vorgestellt, wobei der interessierte Leser für eine detaillierte Beschreibung auf die Dissertation von Wolfgang Müller-Hirsch [88] verwiesen sei. Im darauffolgenden Abschnitt wird gezeigt, dass sich die experimentellen Daten nicht mit dem Polder-van Hove-Ergebnis beschreiben lassen, wobei aufgrund der nicht gänzlich bekannten Materialeigenschaften der Probe und des Sensors noch ein gewisser Spielraum für Spekulationen übrigbleibt, sodass diese Aussage nicht mit voller Gewissheit gemacht werden kann.

Trotzdem liegt die Vermutung nahe, dass die Daten aufgrund der speziellen Sensor-Probe-Geometrie von dem Polder-van Hove-Ergebnis abweichen müssen. Da das einzige analytisch zugänglich Modell, das solch einer Geometrie nahe kommt, das Dipolmodell [74, 75, 77, 78] aus Kapitel 5.5 ist, werden im dritten Abschnitt die experimentellen Daten mit dem Dipolmodell verglichen. Es zeigt sich, dass dieses Modell mindestens zwei Schwächen aufweist, die es für die Beschreibung der experimentellen Daten unbrauchbar machen.

Dementsprechend wird in den darauf folgenden beiden Abschnitten ein phänomenologisches Sensormodell vorgestellt, das diese beiden Schwächen beseitigt und zu Werten für den Wärmestrom führt, die gut mit den experimentellen Daten übereinstimmen. Dieses Modell wurde in der Referenz [3] benutzt, um die Messwerte von Müller-Hirsch [88] zu beschreiben, wobei dieses Modell hier in etwas allgemeinerer Form eingeführt wird.

7.1 Experimenteller Aufbau und Ergebnisse

Die Messapparatur, die den Strahlungswärmestromtransport zwischen zwei dielektrischen Medien messen soll, besteht aus einem umgebauten Rastertunnelmikroskop, dessen Mikroskopspitze durch einen speziellen Sensor ersetzt wird. Dieser Sensor ist in Abb. 7.1 schematisch dargestellt und besteht aus einem winzigen Thermoele-

ment, das durch einen Platindraht gegeben ist, der mit einer 20 – 25 nm dicken Goldschicht bedampft wurde. Der Spitzenradius R_{Sensor} beträgt ca. 60 – 100 nm. Mithilfe dieses Sensors ist es möglich, die Thermospannung ΔV_{th} zwischen der Sensorspitze und dem zweiten Kontakt in der Sensorhalterung zu vermessen. Ist der Seebeck-Koeffizient $S_{\text{Pt/Au}}$ für das Thermopaar Platin-Gold bekannt, so kann man über die lineare Relation $\Delta V_{\text{th}} = S_{\text{Pt/Au}} \Delta T$ auf den Temperaturunterschied ΔT zwischen der Sensorspitze und der Sensorhalterung schließen. Da die Sensorhalterung während der Messung auf konstant 300 K gehalten wird, ist es daher möglich auf die Temperaturverteilung im Sensor zu schließen. Aufgrund des Messaufbaus kann der Sensor aber weiterhin als Rastertunnelmikroskop bedient werden, sodass man die Abstandsmessung im Tunnelabstand sehr genau vornehmen kann und mithilfe einer Piezo-Steuerung vom Tunnelabstand ausgehend größere Abstände mit ausreichender Präzision einstellen kann.

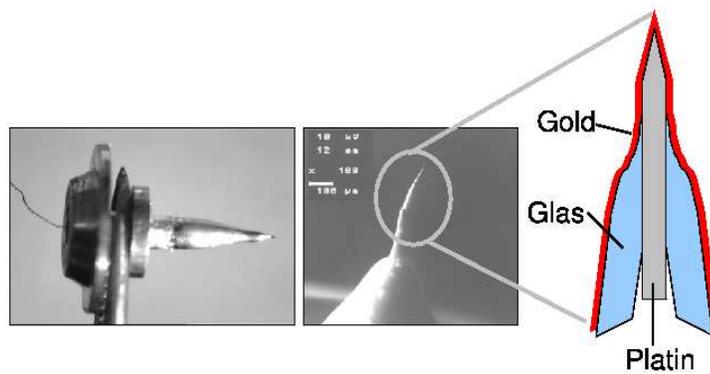


Abbildung 7.1: Die im Experiment verwendete Sensorspitze (links), eine Rastermikroskopaufnahme der Spitze (Mitte), und eine schematische Darstellung der Sensorspitze (rechts). Das Bild wurde mit freundlicher Genehmigung von Achim Kittel aus [89] entnommen.

Man kann daher die Thermospannung für variable Abstände oberhalb einer Probe vermessen. Dabei wird die Probe auf 100 K herabgekühlt und der Sensor auf Raumtemperatur gehalten. Die gemessene Thermospannung des Sensors hängt daher direkt vom Wärmestrom von dem „heißen“ Sensor zur gekühlten Probe ab. Mit einem geeigneten Kalibrierungsexperiment kann man den Zusammenhang zwischen der gemessenen Thermospannung und der abgestrahlten Energie pro Zeiteinheit messtechnisch erfassen, sodass man die gemessenen Thermospannungen in Temperaturwerte und danach in einen Wärmestrom umrechnen kann. Da die Messungen im Ultrahochvakuum durchgeführt werden, wird dieser Wärmestrom allein durch die elektromagnetischen Felder verursacht; es handelt sich daher um einen reinen Strahlungswärmetransport. Die Messungen wurden in einem Abstandsbereich von 1 – 200 nm für eine Gold- und eine GaN-Probe durchgeführt, sodass sie Auskunft über den Strahlungswärmetransport zwischen einem mit Gold bedampften Pt-Sensor und einer Gold- bzw. GaN-Probe im Nahfeld geben. Eine ausführliche Diskussion des experimentellen Aufbaus und der Durchführung des Experiments findet man in

der Dissertation von Müller-Hirsch [88].

In seiner Dissertation hat Müller-Hirsch aus den gemessenen Daten geschlossen, dass sie nicht mit dem Polder-van Hove-Gesetz in Gl. (5.2.15) beschrieben werden können, weil sie keinem ausgezeichneten a^{-4} -Potenzgesetz folgen, das man für sehr gute Leiter für Abstände a im Bereich der Skintiefe d_s erwarten kann [71]. Es soll nun im Folgenden gezeigt werden, dass die Polder-van Hove-Formel die Werte für die Gold-Probe qualitativ gut beschreiben kann, wohingegen die Werte für die GaN-Probe nicht durch die Polder-van Hove-Formel beschrieben werden können. Allerdings muss berücksichtigt werden, dass zumindest die GaN-Probe nicht ausreichend charakterisiert ist und somit die Permittivität für das GaN nicht eindeutig angegeben werden kann, sodass die numerischen Werte für den Nahfeldwärmehtransport in diesem Fall Spielraum für Spekulationen lassen. Außerdem ist — wie bereits von Müller-Hirsch [88] diskutiert wurde — anzunehmen, dass die Sensor-Geometrie, die nur für sehr kleine Abstände durch einen Halbraum beschrieben werden kann, einen erheblichen Einfluss auf die gemessenen Werte hat. Daher wird ein phänomenologisches Modell für die Sensor-Probe-Geometrie aufgestellt, das es ermöglicht, die gemessenen Werte für beide Proben zu beschreiben.

7.2 Vergleich mit der Polder-van Hove-Formel

In dem gegebenen Experiment wird für Abstände a weit unter 100 nm die Beziehung $R_{\text{Sensor}} \gg a$ erfüllt, sodass anzunehmen ist, dass die Messergebnisse für diese Abstände und in erster Näherung darüber hinaus durch die Polder-van Hove-Formel in Gl. (5.2.15) beschreibbar sind. Da der Sensor aus einem mit Gold beschichteten Platindraht besteht, sollte man die erweiterte Polder-van Hove-Formel für Schichtgeometrien in Gl. (5.4.3) verwenden. Allerdings ist zu erwarten, dass die Korrekturen aufgrund der endlichen Schichtdicke vernachlässigbar klein sind, da $d \approx 20 - 25$ nm ist und die Skintiefe für Gold bei $T = 300$ K bei ca. 22 nm liegt, sodass sich die endliche Schichtdicke für $a \gg d$ nur geringfügig auf die numerischen Werte für den Strahlungswärmehtransport auswirkt.

Einen bei weitem größeren Einfluss haben die Permittivitäten, die im Allgemeinen temperaturabhängig sind. In den vorherigen Kapiteln wurden für die Berechnung des Strahlungswärmehtransportes mit $T_1 \neq T_3$ für beide Medien stets die Permittivitäten für $T = 273$ K aus [38] verwendet, um die betrachteten Effekte nicht noch zusätzlich durch die veränderten Materialabhängigkeiten zu überlagern. Um den gemessenen Wärmestrom zwischen zwei Materialien mit verschiedenen Temperaturen korrekt zu beschreiben, ist es allerdings notwendig, die Temperaturabhängigkeit der Permittivitäten mit zu berücksichtigen.

7.2.1 Au-Probe

In diesem Fall kann man für die Permittivitäten der Probe und des Sensors wieder das Drude-Modell verwenden, wobei allerdings die Temperaturabhängigkeit der Relaxationszeit berücksichtigt werden muss. Diese Temperaturabhängigkeit kann — wenn man lediglich die Streuung der Elektronen an den Phononen berücksichtigt —

mithilfe der sogenannten Bloch-Grüneisen-Relation [58] in der Form

$$\frac{1}{\tau(T)} = C \left(\frac{T}{\Theta_D} \right)^5 \int_0^{\frac{\Theta_D}{T}} dx \frac{x^5}{(e^x - 1)^2} \quad (7.2.1)$$

angegeben werden, wobei Θ_D für die Debye-Temperatur des Mediums steht und C hier als eine Konstante mit der Einheit s^{-1} angesehen wird. Anhand dieser Relation lässt sich sofort zeigen, dass

$$\frac{1}{\tau} \propto \begin{cases} T^5, & T \ll \Theta_D \\ T, & T \gg \Theta_D \end{cases} \quad (7.2.2)$$

gilt. Legt man die Daten aus dem Standardwerk von Ashcroft und Mermin [38] für $T = 273 \text{ K}$ und $\Theta_D = 175 \text{ K}$ aus [101] zugrunde, d.h. es gilt $\tau_{273}^{\text{Au}} = 3 \cdot 10^{-14} \text{ s}$, so kann man die Konstante C aus Gl. (7.2.1) bestimmen, wobei man zunächst $C = 8,7 \cdot 10^{13} \text{ s}^{-1}$ erhält. Für die Relaxationszeiten bei $T = 100 \text{ K}$ und $T = 300 \text{ K}$ bekommt man damit

$$\tau_{100}^{\text{Au}} \approx 9,5 \cdot 10^{-14} \text{ s} \quad \text{und} \quad \tau_{300}^{\text{Au}} \approx 2,7 \cdot 10^{-14} \text{ s} \approx \tau_{273}^{\text{Au}}. \quad (7.2.3)$$

In Abb. 7.2 findet man einen Plot des Strahlungswärmetransportes zwischen zwei Au-Halbräumen bei $T_1 = 300 \text{ K}$ und $T_3 = 0 \text{ K}$, wobei die Relaxationszeiten für $T = 300 \text{ K}$ verwendet wurden. Im Vergleich dazu ist der entsprechende Strahlungswärmetransport für den Fall aufgetragen, den man für einen mit 20 nm Au beschichteten Pt-Halbraum bei $T_1 = 300 \text{ K}$ und einen Au-Halbraum bei $T_3 = 100 \text{ K}$ erhält, wenn man die entsprechenden Relaxationszeiten aus Gl. (7.2.3) verwendet. Es ergibt sich dadurch ein Wärmestrom, der für nahezu alle Abstände um einen Faktor $1/2$ kleiner ist als der Wärmestrom zwischen den beiden Au-Halbräumen. Dabei ist die Abweichung durch die Berücksichtigung der endlichen Au-Schicht und der Temperatur der Probe von 100 K im Vergleich zum Einfluss der veränderten Relaxationszeit bzw. Leitfähigkeit gering.

Um diese theoretischen Werte mit den experimentellen Daten vergleichen zu können, wurden diese mit einer effektiven Fläche $A_{\text{eff}} = \pi r_{\text{eff}}^2$ multipliziert, wobei $r_{\text{eff}} = 2,8 \mu\text{m}$ gesetzt wurde. Dieser Wert für den Radius liegt allerdings weit über dem tatsächlichen Radius der Sensorspitze von $60 - 100 \text{ nm}$ und ist damit unrealistisch groß, wenn man davon ausgeht, dass der Nahfeldwärmestrom hauptsächlich durch die Sensorspitze erfolgt. Man sieht anhand des Plots in Abb. 7.2, dass die theoretischen Werte zwar das Saturieren des Wärmestromes für sehr kleine Abstände beschreiben können, aber für Abstände größer als 10 nm eine andere Steigung aufweisen. Trotzdem liegen die theoretischen Daten in diesem Fall für alle Abstände relativ nahe bei den experimentellen Werten und können zumindest qualitativ den Verlauf der Messdaten beschreiben.

7.2.2 GaN-Probe

In diesem Fall ist die Bestimmung der korrekten Materialkonstanten unmöglich, da die GaN-Probe, die im Experiment benutzt wurde, nicht ausführlich genug charakterisiert war. Man kann zwar den Beitrag der Phononen zur Permittivität mithilfe

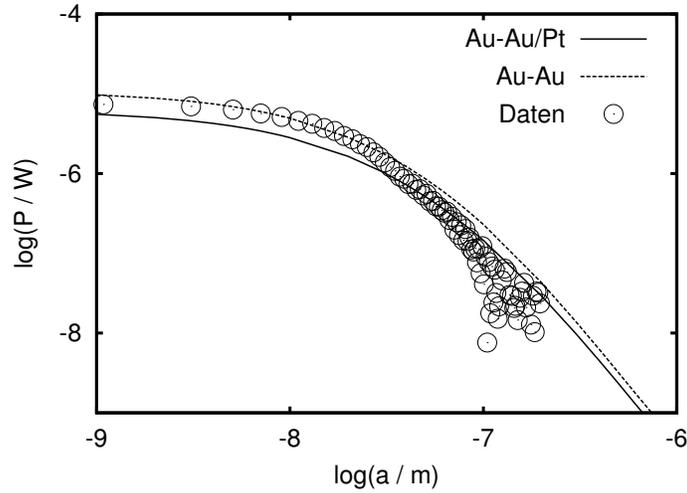


Abbildung 7.2: Strahlungswärmetransport zwischen zwei Halbräumen aus Au mit $T_1 = 300$ K und $T_3 = 0$ K für eine effektive Fläche πr_{eff}^2 mit dem effektiven Radius $r_{\text{eff}} = 2,8 \mu\text{m}$, wobei für beide Au-Halbräume die Permittivitäten bei $T = 300$ K verwendet wurden. Zum Vergleich dazu ist der Strahlungswärmetransport zwischen einem mit 20 nm Au beschichteten Pt-Halbraum bei $T_1 = 300$ K und einem Au-Halbraum bei $T_3 = 100$ K aufgetragen, wobei in diesem Fall die Materialeigenschaften für die entsprechenden Temperaturen verwendet wurden. Außerdem sind zum Vergleich von Theorie und Experiment die Messdaten für die Goldprobe aus [88] eingetragen.

der Reststrahlenformel relativ genau angeben, allerdings handelt es sich bei GaN um einen intrinsischen Halbleiter. Es muss daher neben dem Anteil der Phononen zur Permittivität auch der Anteil der freien Ladungsträger durch das Hinzufügen eines Drude-Terms berücksichtigt werden. Da nun die Ladungsträgerkonzentration bei GaN je nach Herstellungsverfahren zwischen 10^{16}cm^{-3} und 10^{20}cm^{-3} schwanken kann, ist es nicht möglich, den Beitrag der Ladungsträger zur Permittivität für die verwendete Probe eindeutig zu bestimmen, da die Ladungsträgerkonzentration innerhalb der Probe nicht angegeben wurde.

Um dennoch zumindest prinzipiell zu sehen, wie sich die Hinzunahme eines Drude-Terms auf den Strahlungswärmetransport zwischen der GaN-Probe und dem Gold/Pt-Sensor auswirkt, werden im Weiteren die experimentellen Werte aus [102] verwendet, die für eine Ladungsträgerkonzentration von $5,7 \cdot 10^{19} \text{cm}^{-3}$ bei $T = 300$ K durch

$$\epsilon_{r1}(\omega) = \epsilon_{\infty} + \frac{S\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma} - \frac{\omega_n^2}{\omega^2 + i\omega\omega_c} \quad (7.2.4)$$

mit

$$\begin{aligned} \omega_n &= 9,1 \cdot 10^{14} \text{s}^{-1} & \omega_c &= 1,3 \cdot 10^{14} \text{s}^{-1} & \epsilon_{\infty} &= 5,4 \\ \Gamma &= 3,1 \cdot 10^{12} \text{s}^{-1} & \omega_0 &= 1,0 \cdot 10^{14} \text{s}^{-1} & S &= 5,1 \end{aligned} \quad (7.2.5)$$

gegeben sind. Im Vergleich mit der Reststrahlenformal (A.2.9) im Anhang A kann man sehen, dass $\omega_0 = \omega_t$, $\Gamma = \gamma$, $S = \epsilon_\infty(\omega_l^2 - \omega_t^2)/\omega_t^2$ gelten. Für den Beitrag der freien Ladungsträger kann man die angegebene Permittivität mit der Drude-Formel (A.1.9) im Anhang A vergleichen und ω_n mit der Plasmafrequenz ω_p sowie ω_c mit der inversen Relaxationszeit τ^{-1} der freien Ladungsträger identifizieren.

Um nun die entsprechenden Werte für $T = 100$ K zu bekommen, kann man im Allgemeinen nicht wie bei einem Metall ω_n einfach als konstant ansehen und die Bloch-Grüneisen-Relation auf die inverse Relaxationszeit ω_c anwenden. Schließlich nimmt die Leitfähigkeit in Halbleitern bei höheren Temperaturen zu, wohingegen sie für Metalle abnimmt. Das liegt daran, dass die Ladungsträgerkonzentration in Halbleitern temperaturabhängig ist und für große Temperaturen zunimmt. Um dennoch einen ungefähren Schätzwert für $T = 100$ K zu erhalten, soll davon ausgegangen werden, dass sich die Ladungsträgerkonzentration nur geringfügig ändert, also ω_n als nahezu konstant angenommen werden kann. (Im Prinzip muss die Ladungsträgerkonzentration für kleine Temperaturen abnehmen, sodass ω_n für $T = 100$ K kleiner ist als der entsprechende Wert für $T = 300$ K.) Für kleine Temperaturen kann man die Relaxationszeit durch die Relation [103]

$$\tau \approx \tau_{300} \left(\frac{T}{300} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (7.2.6)$$

annähern, sodass man mit $\omega_c^{-1} = \tau_{300} = 7,5 \cdot 10^{-15}$ s eine Relaxationszeit von

$$\tau_{100} \approx 1,4 \cdot 10^{-15} \text{ s} \quad (7.2.7)$$

erhält. Die Leitfähigkeit nimmt daher bei kleinen Temperaturen ab. Der Beitrag der freien Ladungsträger zur Permittivität wird zwar wegen der gemachten Annahmen und der Unwissenheit über die tatsächliche Konzentration an Ladungsträgern nicht völlig richtig abgeschätzt. Trotzdem werden in den numerischen Ergebnissen neben den Werten, die nur den phononischen Anteil enthalten (Reststrahlenformel), auch die Werte angegeben, die den hier abgeschätzten Beitrag der freien Ladungsträger zur Permittivität (Reststrahlenformel + Drude-Modell) berücksichtigen.

Für den phononischen Anteil der Permittivität ändern sich im Allgemeinen neben der Dämpfung Γ auch die Frequenzen der transversalen und longitudinalen Phononen ω_t und ω_l bzw. S und ω_0 aus Gl. (7.2.4). Allerdings sind diese Änderungen im betrachteten Temperaturbereich vernachlässigbar klein [104, 105], sodass nur die Temperaturabhängigkeit der Dämpfung Γ berücksichtigt werden muss. Die Temperaturabhängigkeit der Dämpfung kann durch [105, 106]

$$\Gamma(\omega_0, T) = \frac{C'}{\omega_0^3} \left(\frac{1}{e^{\hbar\omega_0\beta} - 1} + \frac{1}{2} \right) \quad (7.2.8)$$

bestimmt werden, womit man für $T = 300$ K die Konstante C' bestimmen kann und $C' = 5,4 \cdot 10^{54} \text{ s}^{-4}$ erhält. Damit lässt sich Γ für $T = 100$ K berechnen und es ergibt sich

$$\Gamma_{100} = 2,7 \cdot 10^{12} \text{ s}^{-1}, \quad (7.2.9)$$

also nur ein geringfügig veränderter Wert im Vergleich zu $\Gamma_{300} = 3,1 \cdot 10^{12} \text{ s}^{-1}$ aus Gl. (7.2.5). Entsprechend der Diskussion in [105] ist anzunehmen, dass die experimentell

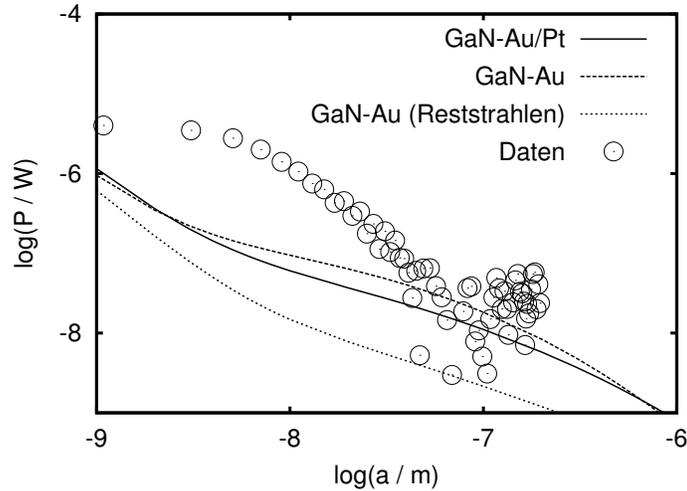


Abbildung 7.3: Strahlungswärmetransport zwischen zwei Halbräumen aus GaN (Reststrahlenformel + Drude) und Au bzw. GaN (Reststrahlenformel) und Au mit $T_1 = 300$ K und $T_3 = 0$ K für eine effektive Fläche πr_{eff}^2 mit dem Radius $r_{\text{eff}} = 2,8 \mu\text{m}$, wobei die Permittivitäten für $T = 300$ K verwendet wurden. Zum Vergleich dazu ist der Strahlungswärmetransport zwischen einem mit 20 nm Au beschichteten Pt-Halbraum bei $T_1 = 300$ K und einem GaN-Halbraum (Reststrahlen + Drude) bei $T_3 = 100$ K aufgetragen, wobei in diesem Fall die Materialeigenschaften für die entsprechenden Temperaturen verwendet wurden. Außerdem sind die experimentellen Daten für die GaN-Probe aus [88] eingetragen.

relevante Dämpfung Γ_{100} eher noch kleiner als dieser rechnerisch bestimmte Wert ist.

In Abb. 7.3 kann man sehen, wie sich die Verwendung der entsprechenden Materialparameter aus Gl. (7.2.7) und (7.2.9) auswirkt. Neben dem Plot des Wärmestromes zwischen einem Au- und einem GaN-Halbraum (Reststrahlenformel + Drude) bei $T_1 = 300$ K und $T_3 = 0$ K unter Verwendung der Permittivitäten bei 300 K findet man zusätzlich einen Plot für den Wärmestrom zwischen einem mit 20 nm Au beschichteten Pt-Halbraum bei $T_1 = 300$ K und einem GaN-Halbraum bei $T_3 = 100$ K, wobei hier die Materialparameter aus Gl. (7.2.7) und (7.2.9) verwendet wurden. Um zu sehen, wie stark sich der Anteil der freien Ladungsträger im GaN auf den Wärmestrom auswirkt, wurden auch die numerischen Ergebnisse für einen Gold-Halbraum bei 300 K und einen GaN-Halbraum (Reststrahlenformel) bei $T = 0$ K geplottet. Man sieht sehr gut, dass der Drude-Term in der Permittivität einen erheblichen Einfluss auf den gesamten Wärmestrom hat.

Um diese theoretischen Werte mit den experimentellen Daten vergleichen zu können, wurden diese mit einer effektiven Fläche $A_{\text{eff}} = \pi r_{\text{eff}}^2$ multipliziert, wobei wieder der effektive Radius $r_{\text{eff}} = 2,8 \mu\text{m}$ gewählt wurde. Man sieht anhand des Plots in Abb. 7.3, dass die theoretischen Werte des Wärmestroms die experimentellen Daten im gesamten Abstandsbereich *nicht* einmal qualitativ beschreiben können.

Außerdem zeigen die theoretischen Daten kein Saturieren für Abstände kleiner als 10 nm, weil in diesem Bereich die TM-Moden, die für Dielektrika den Nahfeldwärmehtransport dominieren, zu einem a^{-2} -Potenzgesetz führen. Die Messdaten und die theoretischen Werte liegen daher weit auseinander. Man muss allerdings berücksichtigen, dass aufgrund der unzulänglichen Charakterisierung der GaN-Probe noch etwas Spielraum in der theoretischen Beschreibung bleibt, da die Ladungsträgerkonzentration einen erheblichen Einfluss auf den Nahfeldwärmehtransport hat.

7.3 Vergleich mit dem Dipolmodell

Da die experimentellen Daten vor allem für die GaN-Probe nicht mit den theoretischen Werten übereinstimmen, liegt die Vermutung nahe, dass die Abweichung zwischen Theorie und Experiment durch die Sensor-Probe-Geometrie erklärt werden kann. Schließlich weicht diese sehr stark von dem Fall zweier sich gegenüberstehender Halbräume ab, wie es in der Polder-van Hove-Formel vorausgesetzt wird. Die analytische Bestimmung des Nahfeldwärmehtransportes für eine realistische Sensor-Probe-Geometrie ist indes unmöglich, da das elektrodynamische Randwertproblem für solch eine Geometrie nicht gelöst werden kann. Daher wurde von Dorofeyev *et al.* [107] mithilfe der Methode der konformen Abbildungen versucht, den Nahfeldwärmehtransport für veränderte Geometrien aus der Polder-van Hove-Formel abzuleiten. Allerdings funktioniert diese Methode nur für die Abstandsbereiche, in denen sich ein ausgeprägtes Potenzgesetz im Nahfeldwärmehtransport ergibt. Ein analytischer Ausdruck für eine Sensor-Probe-Geometrie, bei der der Sensor als eine dielektrische Kugel oberhalb eines dielektrischen Halbraumes modelliert wurde, wurde im quasistatischen Bereich von Volokitin und Persson [75] bestimmt, wobei sich eine sehr schwach konvergente Dreifachsumme ergibt, die selbst numerisch schwer auszuwerten ist. Für den Grenzfall einer sehr kleinen Kugel ergibt sich dagegen wieder das Dipolmodell [74, 75, 77, 78] aus Kapitel 5.5.

Für Abstände $a \gg R_{\text{Sensor}}$ sollte statt der Polder-van Hove-Formulierung gerade das Dipolmodell zu richtigen Werten führen, bei dem die vorderste Sensorspitze durch eine Kugel modelliert wird. Ist nun a' der Abstand vom Halbraum zum Mittelpunkt der Kugel, so kann man für $a \gg R_{\text{Sensor}}$ in sehr guter Näherung $a' \approx a$ voraussetzen. Für den Wärmestrom vom Sensor mit der Temperatur T_S zur Probe mit der Temperatur T_P erhält man im Dipolmodell mit Gl. (5.5.11) den Ausdruck

$$P_{\text{el}}^{\text{ev}} = \int d\omega [E(\omega, T_S) - E(\omega, T_P)] 2\omega \alpha''(\omega) D_{\text{E}}^{\text{ev}}(\omega, a), \quad (7.3.1)$$

wobei α durch die Clausius-Mosotti-Formel in Gl. (5.5.3), also durch

$$\alpha''(\omega) = 4\pi R_{\text{Sensor}}^3 \text{Im} \left(\frac{\epsilon_{r,S}(\omega) - 1}{\epsilon_{r,S}(\omega) + 2} \right) \quad (7.3.2)$$

und die elektrische lokale Zustandsdichte für die evaneszenten Moden durch

$$D_{\text{E}}^{\text{ev}}(\omega, a) = \frac{\omega}{2\pi^2 c^2} \int_{k_0}^{\infty} d\lambda \frac{\lambda e^{-2\gamma a}}{2\gamma} \left[\text{Im}(r_{\perp}^{01}) + \text{Im}(r_{\parallel}^{01}) \frac{2\lambda^2 - k_0^2}{k_0^2} \right] \quad (7.3.3)$$

gegeben sind, wobei ϵ_1 die Permittivität der Probe darstellt und $\gamma = \sqrt{\lambda^2 - k_0^2}$ gilt.

Da das Dipolmoment im Dipolmodell nur an die elektrische lokale Zustandsdichte D_E koppelt, die im Nahfeld mit dem TM-Moden-Beitrag D_{\parallel} übereinstimmt, kann das Dipolmodell den Wärmestrom zwischen dem Sensor und der Goldprobe nicht völlig richtig beschreiben, da dieser — wie man anhand des Polder-van Hove-Ergebnisses sehen kann — gerade durch die TE-Moden-Beiträge dominiert wird. Wie man bereits in Abb. 5.8 sehen konnte, hat dieses Fehlen der TE-Moden-Beiträge zur Konsequenz, dass die Werte für den Wärmestrom zwischen einer Goldkugel und einer Goldprobe um bis zu drei Größenordnungen unterhalb der Werte liegen, die man für den Wärmestrom zwischen einer Goldkugel und einer GaN-Probe erhalten würde. Man erhält daher im Dipolmodell im Abstandsbereich von 1 – 1000 nm einen sehr viel geringeren Wärmestrom für die Gold- als für die GaN-Probe. Die experimentellen Daten zeigen dagegen genau den umgekehrten Trend. Selbst unter Berücksichtigung nichtlokaler Effekte für die Gold-Probe erhält man nicht einmal annähernd einen Wärmestrom, der mit den experimentellen Daten vereinbar ist.

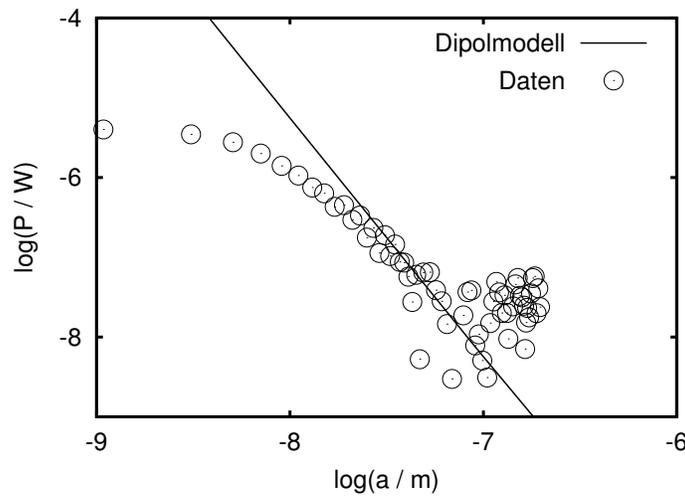


Abbildung 7.4: Strahlungswärmetransport zwischen einer Goldkugel bei $T_S = 300$ K und einem GaN-Halbraum (Reststrahlenformel + Drude) bei $T_P = 100$ K für einen effektiven Radius $r_{\text{eff}} = 2,8 \mu\text{m}$, wobei die Materialeigenschaften für die entsprechenden Temperaturen verwendet wurden. Außerdem sind die experimentellen Daten für die GaN-Probe aus [88] eingetragen.

Für die GaN-Probe hingegen kann man erwarten, dass der Wärmestrom innerhalb des Dipolmodells für $a \gg R_{\text{Sensor}}$ richtige Werte liefert. Schließlich ist der Nahfeldwärmetransport in diesem Fall durch die TM-Moden dominiert, die ja im Dipolmodell berücksichtigt werden. Wählt man wieder einen effektiven Radius $r_{\text{eff}} = 2,8 \mu\text{m}$, so kann man in Abb. 7.4 sehen, dass die numerischen Werte für den Wärmestrom für sehr große Abstände zumindest von der Größenordnung her mit den experimentellen Werten übereinstimmen, wobei für GaN wieder die Permittivität aus Gl. (7.2.5) mit den entsprechenden Parametern für $T = 100$ K verwendet wurde. Diese Übereinstimmung von Theorie und Experiment ist allerdings mit Vorsicht zu genießen, da in dem Bereich, in dem diese „Übereinstimmung“ herrscht, die

experimentellen Daten stark verrauscht sind. Für kleine Abstände dagegen kann das Dipolmodell aus mehreren Gründen nicht richtig sein: Erstens gilt die Dipolnäherung für $a \ll R_{\text{Sensor}}$ nicht mehr, zweitens müsste man für $a \ll l$ die Probe und den Sensor durch ein nichtlokales Modell beschreiben.

7.4 Phänomenologisches Sensormodell

Das Dipolmodell hat zwei offensichtliche Schwachstellen, die nun mithilfe eines phänomenologischen Modells behoben werden sollen. Die erste Schwachstelle ist das Fehlen des TE-Moden-Anteils im Wärmestrom und die zweite Schwachstelle ist das fehlende Sättigungsverhalten für kleine Abstände. In diesem Abschnitt soll nun die erste Schwachstelle — das Fehlen des TE-Moden-Beitrages — mit einem sehr einfachen Modell behoben werden.

Die Polder-van Hove-Formel legt nahe, dass die TE-Moden und die TM-Moden zu gleichen Teilen zum Wärmestrom beitragen. Betrachtet man zwei durch einen Vakuumsplatt voneinander getrennte Halbräume im Abstand a , so ist aufgrund der vorangegangenen Diskussion klar, dass der Nahfeldwärmestrom proportional zur lokalen Zustandsdichte $D(\omega, a)$ beider Halbräume sein muss. Man könnte auch sagen, dass der Wärmestrom zwischen zwei Halbräumen proportional zur Energiedichte im Abstand a oberhalb der jeweiligen Halbräume ist. Taucht nun ein Sensor in das Nahfeld eines einzelnen Halbraumes ein, so muss auch das Signal für den Wärmestrom proportional zur Energiedichte des Sensors und des Halbraumes sein. Ist der Sensor klein, so kann man vermuten, dass für nicht allzu kleine Abstände der Wärmestrom im wesentlichen proportional zur Energiedichte oberhalb des Halbraumes ist, d.h.

$$\langle P \rangle \propto \langle u^{\text{ev}} \rangle = \langle u_{\text{E}}^{\text{ev}} \rangle + \langle u_{\text{H}}^{\text{ev}} \rangle. \quad (7.4.1)$$

Im Dipolmodell ist für den Wärmestrom im Nahfeld bereits sichergestellt, dass der Wärmestrom im Großen und Ganzen proportional zu $\langle u_{\text{E}}^{\text{ev}} \rangle$ ist. Allerdings kann das Dipolmodell gerade die Ankopplung an das magnetische Feld nicht beschreiben, das für den Wärmestrom zwischen Metallen wesentlich ist. Man beachte, dass dieser Sachverhalt nichts mit echten magnetischen Momenten zu tun hat, da stets $\mu = \mu_0$ gewählt wurde, sondern vielmehr mit Jouleschen Verlusten aufgrund induzierter Kreisströme, die proportional zu $\langle \mathbf{H}^2 \rangle$ sind. Um diese Kopplung an das Magnetfeld herzustellen, wird daher an dieser Stelle ein effektives magnetisches Moment

$$\mathbf{m}_{\text{eff}} = \mu_{\text{eff}}(\omega) \mu_0 \mathbf{H} \quad (7.4.2)$$

eingeführt, das — genau wie das Dipolmoment im Dipolmodell — durch das fluktuierende Feld \mathbf{H} oberhalb der Probe im Sensor induziert wird und an dieses Feld koppelt, wodurch es zu einer Energiedissipation

$$\begin{aligned} \langle P_{\text{mag,Probe} \rightarrow \text{Sensor}} \rangle &= \langle \dot{\mathbf{m}}_{\text{eff}}(t) \cdot \mathbf{H}(t) \rangle \\ &= \int d\omega 2\omega \mu_{\text{eff}}''(\omega) \langle u_{\text{H}}(\omega, a) \rangle \\ &= \int d\omega 2\omega \mu_{\text{eff}}''(\omega) E(\omega, T_{\text{P}}) D_{\text{H}}(\omega, a) \end{aligned} \quad (7.4.3)$$

innerhalb des Sensors kommt. Mit der gleichen Argumentation wie für die Dipolan-
kopplung erhält man für den Gesamtwärmestrom zwischen Sensor und Probe auf-
grund dieser Kopplung an das Magnetfeld den Ausdruck

$$\langle P_{\text{mag}} \rangle = \int d\omega [E(\omega, T_S) - E(\omega, T_P)] 2\omega \mu_{\text{eff}}''(\omega) D_H(\omega, a), \quad (7.4.4)$$

wobei die magnetische lokale Zustandsdichte für die evaneszenten Moden durch

$$D_H^{\text{ev}}(\omega, a) = \frac{\omega}{2\pi^2 c^2} \int_{k_0}^{\infty} d\lambda \frac{\lambda e^{-2\gamma a}}{2\gamma} \left[\text{Im}(r_{\parallel}^{01}) + \text{Im}(r_{\perp}^{01}) \frac{2\lambda^2 - k_0^2}{k_0^2} \right] \quad (7.4.5)$$

gegeben ist.

Fügt man nun diesen Anteil zum elektrischen Beitrag des Dipolmodells aus Gl.
(5.5.11) hinzu, bekommt man für die evaneszenten Moden schließlich den Ausdruck

$$\langle P_{\text{ges}}^{\text{ev}} \rangle = \int d\omega [E(\omega, T_S) - E(\omega, T_P)] \left(2\omega \mu_{\text{eff}}''(\omega) D_H(\omega, a) + 2\omega \alpha''(\omega) D_E(\omega, a) \right). \quad (7.4.6)$$

Dieser Ausdruck kann nicht weiter ausgewertet werden, solange $\mu_{\text{eff}}''(\omega)$ unbekannt
ist. Man beachte, dass in $\alpha''(\omega)$ und $\mu_{\text{eff}}''(\omega)$ jegliche Sensoreigenschaften einfließen,
d.h. in diesen Parametern stecken die optischen Eigenschaften sowie das Volumen
des Sensors. Für sich schwach ändernde $2\omega \alpha''(\omega)$ bzw. $2\omega \mu_{\text{eff}}''(\omega)$ gibt es jeweils ein
 ω_0 , sodass man diese Größen aus dem Frequenzintegral herausnehmen und durch
einen festen unbekanntem Parameter

$$\alpha_{0,\text{eff}} := 2\omega_0 \alpha''(\omega_0) \quad \text{bzw.} \quad \mu_{0,\text{eff}} := 2\omega_0 \mu_{\text{eff}}''(\omega_0) \quad (7.4.7)$$

ersetzen kann. Mit diesen Parametern, die die Dimension Volumen pro Zeit bzw.
 m^3s^{-1} haben, kann man den Wärmestrom durch

$$\langle P_{\text{ges}}^{\text{ev}} \rangle \approx \int d\omega [E(\omega, T_S) - E(\omega, T_P)] \left(\mu_{0,\text{eff}}'' D_H(\omega, a) + \alpha_{0,\text{eff}}'' D_E(\omega, a) \right) \quad (7.4.8)$$

approximieren. Für eine kalte Probe mit $T_P \ll T_S$ kann man in erster Näherung
den Wärmestrom von der Probe zum Sensor vernachlässigen, weil dieser sehr viel
geringer ist als der Wärmestrom vom warmen Sensor zur Probe, sodass man

$$\begin{aligned} \langle P_{\text{ges}}^{\text{ev}} \rangle &\approx \mu_{0,\text{eff}} \int d\omega E(\omega, T_S) D_H(\omega, a) + \alpha_{0,\text{eff}} \int d\omega E(\omega, T_S) D_E(\omega, a) \\ &= \mu_{0,\text{eff}} \langle u_H(T_S, a) \rangle + \alpha_{0,\text{eff}} \langle u_E(T_S, a) \rangle \end{aligned} \quad (7.4.9)$$

erhält. Der Wärmestrom ist daher in erster Näherung in diesem Modell proportional
zum elektrischen und magnetischen Anteil der Energiedichte im Abstand a oberhalb
der Probe mit den Materialeigenschaften der Probe bei T_P , wobei man allerdings die
Temperatur des Sensors T_S in der Bose-Einstein-Funktion zu verwenden hat. Für den
Spezialfall $\mu_{0,\text{eff}} = \alpha_{0,\text{eff}}$ stimmt dieser Ausdruck bis auf einen Proportionalitätsfaktor
mit der gesamten Energiedichte überein, sodass man für eine dielektrische Probe, bei
der das Nahfeld durch das elektrische Feld dominiert ist, per Konstruktion wieder

das Dipolmodell zurückbekommt. Um den Ausdruck für den Wärmestrom in Gl. (7.4.9) nicht allzusehr einzuschränken, sollen $\mu_{0,\text{eff}}$ und $\alpha_{0,\text{eff}}$ als freie Fitparameter, die in gewisser Weise die Sensoreigenschaften und das Sensorvolumen auf eine Zahl reduzieren, zunächst unbestimmt bleiben, da diese Parameter entscheiden, ob der Gesamtwärmestrom im Nahfeld eher durch die TE-Moden $\langle u_{\text{H}} \rangle \approx \langle u_{\perp} \rangle$ oder durch die TM-Moden $\langle u_{\text{E}} \rangle \approx \langle u_{\parallel} \rangle$ dominiert wird. Allerdings sollte man beachten, dass die gemachten Näherungen nur für $T_{\text{S}} \gg T_{\text{P}}$, $R_{\text{Sensor}} \ll a$ und für $a \ll 200$ nm richtig sein können. Die letzte Einschränkung ist eine Schlussfolgerung aus den numerischen Daten in Abb. 5.9, mit deren Hilfe gezeigt wurde, dass die gemachten Näherungen bei $T_{\text{S}} = 300$ K nur für Abstände $a \ll 200$ nm eine gute Übereinstimmung mit den ungenäherten Ausdrücken liefern.

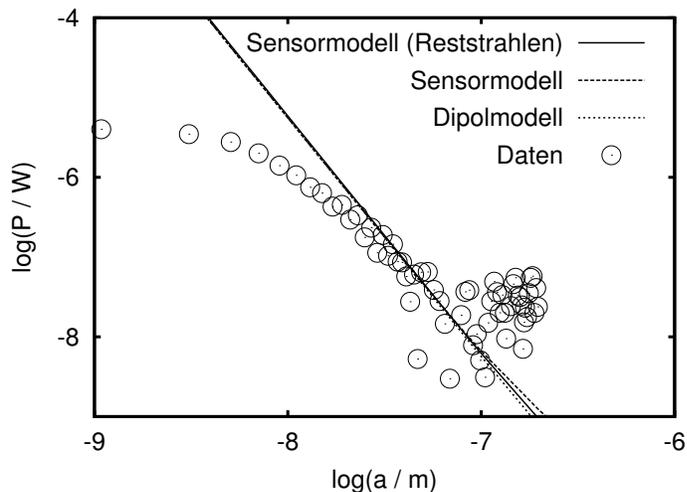


Abbildung 7.5: Strahlungswärmetransport zwischen einer Goldkugel bei $T_{\text{S}} = 300$ K und einem GaN-Halbraum (Reststrahlenformel) bei $T_{\text{P}} = 100$ K, einem GaN-Halbraum (Reststrahlenformel + Drude) und dem Dipolmodell entsprechend Abb. 7.4, wobei die Materialeigenschaften für die entsprechenden Temperaturen verwendet wurden. Außerdem sind die experimentellen Daten für die GaN-Probe aus [88] eingetragen.

In Abb. 7.5 findet man die numerischen Ergebnisse für das phänomenologische Sensormodell aus Gl. (7.4.8) im Vergleich zu den experimentellen Daten und dem Dipolmodell aufgetragen, wobei für das Dipolmodell diesmal ein effektiver Radius von $r_{\text{eff}} = 2,6 \cdot 10^{-6}$ m gewählt wurde (vgl. Abb. 7.4). Für das Sensormodell wurde die GaN-Probe zum einen nur mithilfe der Reststrahlenformel mit den Parametern bei $T = 100$ K beschrieben, wobei in diesem Fall

$$\alpha_{0,\text{eff}} = \mu_{0,\text{eff}} = 5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} \quad (7.4.10)$$

gesetzt wurde. Zum anderen wurde für das Sensormodell die GaN-Probe mithilfe der Reststrahlenformel plus Drude-Term aus Gl. (7.2.4) mit den entsprechenden Parametern bei $T = 100$ K beschrieben, wobei in diesem Fall

$$\alpha_{0,\text{eff}} = 1,4 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} \quad \text{und} \quad \mu_{0,\text{eff}} = 5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} \quad (7.4.11)$$

gewählt wurden. Man kann in Abb. 7.5 erwartungsgemäß eine sehr gute Übereinstimmung der numerischen Ergebnisse für die verschiedenen Modelle sehen. Schließlich reproduziert das Sensormodell das Dipolmodell in dem Bereich, in dem die TM-Moden den Hauptbeitrag zum Nahfeldwärmestrom liefern, was für nicht-metallische Proben der Fall ist.

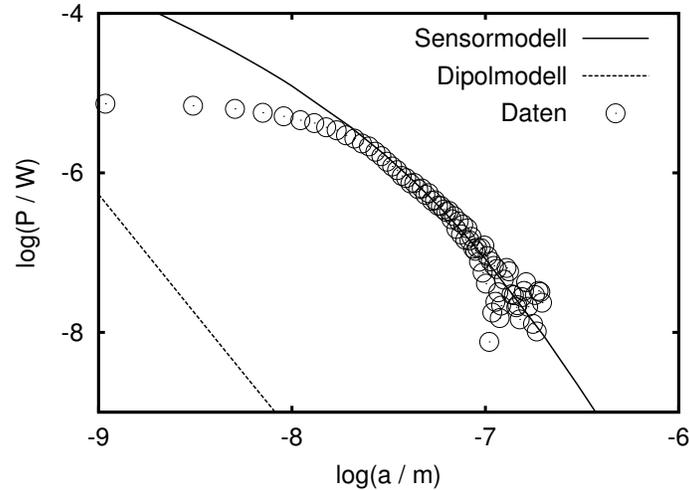


Abbildung 7.6: Strahlungswärmestrom zwischen einer Goldkugel bei $T_S = 300$ K und einem Au-Halbraum (Drude-Modell) bei $T_P = 100$ K für das Sensormodell und das Dipolmodell, wobei die Materialeigenschaften für die entsprechenden Temperaturen verwendet wurden. Außerdem sind die experimentellen Daten für die Au-Probe aus [88] eingetragen.

Die numerischen Ergebnisse für den Wärmestrom zwischen einer Goldkugel bei $T_S = 300$ K und einer Goldprobe bei $T_P = 100$ K für das Dipolmodell mit $r_{\text{eff}} = 2,6 \cdot 10^{-6}$ m und für das Sensormodell aus Gl. (7.4.8) mit

$$\alpha_{0,\text{eff}} = \mu_{0,\text{eff}} = 5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} \quad (7.4.12)$$

findet man in Abb. 7.6. Es wird in dieser Abbildung noch einmal deutlich, dass das Dipolmodell für den Nahfeldwärmestrom zwischen einer Goldprobe und einer Goldkugel um etliche Größenordnungen zu niedrige Werte liefert. Das Sensormodell hingegen liefert mit den gleichen Parametern $\alpha_{0,\text{eff}}$ und $\mu_{0,\text{eff}}$, die auch für die GaN-Probe (Reststrahlenformel) verwendet wurden, Werte in der richtigen Größenordnung. Außerdem stimmen diese Werte für Abstände größer als 10 nm sehr gut mit den experimentellen Daten überein.

7.5 Die Korrelationslänge

Die zweite Schwachstelle des Dipolmodells ist das Fehlen des Sättigungsverhaltens im Wärmestrom für sehr kleine Abstände. Wie bereits in Kapitel 6 diskutiert wurde, bekommt man innerhalb einer nichtlokalen Theorie für Metalle solch ein Sättigungsverhalten. Es soll daher versucht werden, den Zusammenhang zwischen einer

nichtlokalen Permittivität und diesem Sättigungsverhalten hier etwas klarer herauszustellen und schließlich in das phänomenologische Sensormodell eine heuristische Korrelationslänge einzuführen, die das Sättigungsverhalten bestimmt und als weiterer Parameter in das phänomenologische Sensormodell einfließt.

Für ein lokales und isotropes Medium kann man die Suszeptibilität in der Form

$$\epsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \epsilon_1(\omega) \delta_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (7.5.1)$$

ausdrücken, sodass die allgemeine Integralbeziehung zwischen der dielektrischen Verschiebung und dem elektrischen Feld in Gl. (6.1.4) im Fourier-Raum in die Gleichung

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) = \epsilon_1(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (7.5.2)$$

übergeht. Dementsprechend kann man das Fluktuations-Dissipations-Theorem für die Quellenströme in Gl. (1.1.10) auch in der allgemeineren Form

$$\langle j_\alpha(\mathbf{r}, \omega) \bar{j}_\beta(\mathbf{r}', \omega') \rangle = 4\pi\omega E_0(\omega, T) \text{Im}(\epsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)) \delta(\omega - \omega') \quad (7.5.3)$$

ausdrücken. Die räumliche Korrelation der fluktuierenden Quellen ist daher durch die räumliche Dispersion im Medium selbst bestimmt, d.h. der Abstand $L = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, für den die Felder $\mathbf{E}(\mathbf{r}', \omega)$ noch wesentlich zur dielektrischen Verschiebung am Ort \mathbf{r} beitragen, gibt eine Längenskala vor, auf der die fluktuierenden Quellenströme korreliert sind. Daher soll diese Längenskala im weiteren als Korrelationslänge bezeichnet werden. Da L für polare dielektrische Medien in der Größenordnung atomarer Abstände im Dielektrikum liegt, kann man für die betrachteten makroskopischen Längenskalen stets eine Deltakorrelation der Quellenströme voraussetzen und somit eine lokale Beschreibung wählen. Für Metalle wurde in Kapitel 6 gezeigt, dass L im Bereich der mittleren freien Weglänge des Elektrons liegt, d.h. dass man bereits bei Abständen im Bereich dieser Längenskala nichtlokale Effekte berücksichtigen muss.

Es soll nun ein einfaches Modell eingeführt werden, das es ermöglicht, die Auswirkungen der Korrelationslänge L auf den Nahfeldwärmehtransport zu berücksichtigen. Dazu wird der Ansatz

$$\epsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \epsilon_0 [\delta_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \chi_1(\omega) \delta_{\alpha\beta} f(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] \quad (7.5.4)$$

gewählt, wobei $\chi_1(\omega)$ die lokale Suszeptibilität des Mediums und $f(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ eine heuristische reellwertige Korrelationsfunktion ist, die im Moment nicht näher bestimmt werden soll. Für ein isotropes Medium kann die Korrelationsfunktion nur noch eine Funktion vom Abstand sein, sodass $f(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = f(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$ gilt. Zusätzlich wird weiter vorausgesetzt, dass die Korrelationsfunktion für Abstände $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \ll L$ gegen einen konstanten Wert geht und für Abstände $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \gg L$ verschwindet, sodass stets

$$\int_V d^3r' f(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 1 \quad (7.5.5)$$

erfüllt ist. Damit bestimmt diese Funktion das Volumen, in dem das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r}', \omega)$ einen Beitrag zur dielektrischen Verschiebung $\mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega)$ liefert. Außerdem sollte die Korrelationsfunktion für $L \rightarrow 0$ gegen die Delta-Distribution konvergieren,

d.h. es gilt in diesem Grenzfall $f(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \rightarrow \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$. Daher erhält man für makroskopisch vernachlässigbar kleine L die lokalen Ausdrücke und damit die lokalen Ergebnisse zurück.

Aufgrund dieses Ansatzes ist klar, dass es sich hier um kein Modell handelt, das es erlaubt, räumliche Dispersion vollständig zu berücksichtigen. Da mit dem Ansatz in Gl. (7.5.4) im Prinzip die Delta-Distribution im lokalen Ausdruck für die Permittivität durch eine „aufgeweichte“ Delta-Distribution ersetzt wurde — der Korrelationsfunktion $f(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$ —, kann dieser Ansatz lediglich dazu dienen aufzuzeigen, wie sich eine endliche räumliche Korrelation der Quellenströme auf der Längenskala L auf den Nahfeldwärmehtransport auswirkt. Setzt man den Ansatz aus Gl. (7.5.4) in Gl. (7.5.3) ein, erhält man

$$\langle j_\alpha(\mathbf{r}, \omega) \overline{j_\beta(\mathbf{r}', \omega')} \rangle = 4\pi\omega E_0(\omega, T) \text{Im}(\chi_1(\omega)) f(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \delta_{\alpha\beta} \delta(\omega - \omega'). \quad (7.5.6)$$

Die räumliche Korrelation der Quellenströme wird also direkt durch die Funktion $f(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$ ausgedrückt, was die Namensgebung „Korrelationsfunktion“ rechtfertigt. Außerdem ist die Längenskala, auf der die Quellenströme korreliert sind, damit per Konstruktion durch die Korrelationslänge L festgelegt. Wie bereits erwähnt, sollte L für Dielektrika in der Größenordnung atomarer Abstände liegen und für Metalle durch die mittlere freie Weglänge gegeben sein.

Mithilfe der eingeführten Korrelationsfunktion könnte man wieder im Modell der Spiegelreflexion die entsprechenden Oberflächenimpedanzen aus Gl. (6.5.7) bzw. Gl. (6.5.13) bestimmen, wobei aufgrund der gemachten Annahmen $\epsilon_{r,t}$ und $\epsilon_{r,l}$ übereinstimmen, da im Prinzip mit dem Ansatz in Gl. (7.5.4) der Spezialfall $f_l = f_t = f$ gewählt wurde. Um die Ausdrücke für die Oberflächenimpedanzen bzw. Reflexionskoeffizienten erheblich zu vereinfachen, soll eine weitere Annahme bzgl. der Korrelationsfunktion gemacht werden. Diese Annahme besteht darin, dass die Korrelationen senkrecht zur Oberfläche des Mediums stets als deltaförmig angesehen werden sollen, wohingegen die Korrelationen parallel zur Oberfläche auf der Längenskala L wirksam sind, es gelte also

$$f(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \equiv f_{||}(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) \delta(z - z') \quad (7.5.7)$$

mit dem lateralen Vektor $\mathbf{x} = (x, y, 0)^t$. Diese Annahme scheint im Bereich der Oberfläche eines Materials eine gewisse Berechtigung zu haben, wird an dieser Stelle aber eingeführt, um ohne große Rechnungen zu sehen, welchen Effekt die endliche Korrelation auf den Nahfeldwärmehtransport hat. Aufgrund dieser Annahme hängt die Permittivität im Fourier-Raum nicht von k_z bzw. h_1 ab, sodass man für die Oberflächenimpedanzen wieder die lokalen Ausdrücke mit $\chi_1(\omega) f(\lambda)$ statt $\chi_1(\omega)$ erhält, wobei $f(\lambda)$ die Fourier-Transformierte der Korrelationsfunktion $f(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$ darstellt. Deshalb bekommt man dank dieser Annahme ohne weitere Rechnung wieder die Fresnelschen Reflexionskoeffizienten, wobei allerdings stets $\chi_1(\omega)$ durch $\chi_1(\omega) f(\lambda)$ zu ersetzen ist, d.h.

$$r_{\text{kor},||} = \frac{h_0 \chi_1(\omega) f(\lambda) + h_0 - h_{\text{kor},1}}{h_0 \chi_1(\omega) f(\lambda) + h_0 + h_{\text{kor},1}} \quad \text{und} \quad r_{\text{kor},\perp} = \frac{h_0 - h_{\text{kor},1}}{h_0 + h_{\text{kor},1}} \quad (7.5.8)$$

mit $h_{\text{kor},1} = \sqrt{k_0^2 \chi_1(\omega) f(\lambda) + k_0^2 - \lambda^2}$.

Benutzt man wieder die Näherungen für den Imaginärteil der Reflexionskoeffizienten im stark evaneszenten Nahfeld mit $\lambda \gg k_0$, so erhält man

$$\operatorname{Im}(r_{\text{kor},\parallel}) \approx \frac{2\epsilon''_{r1}(\omega)f(\lambda)}{|\chi_1(\omega)f(\lambda) + 2|^2} \quad \text{und} \quad \operatorname{Im}(r_{\text{kor},\perp}) \approx \frac{\epsilon''_{r1}(\omega)f(\lambda)k_0^2}{4\lambda^2}. \quad (7.5.9)$$

Die Ausdrücke sind also zunächst einmal proportional zur Fourier-Transformierten $f(\lambda)$ der Korrelationsfunktion $f(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$. Ist die Korrelationslänge verschwindend klein, hat man $f(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, sodass man in diesem Fall $f(\lambda) = 1$ bekommt, und somit wieder die lokalen Ausdrücke. Für endliche L ist nun die Korrelationsfunktion $f(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ auf Abständen $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| < L$ von Null verschieden, sodass auch $f(\lambda)$ im Fourier-Raum bzgl. der lateralen Wellenzahl $\lambda < L^{-1}$ beschränkt ist. Daher können bei Berücksichtigung einer Korrelation der Quellenströme im Wesentlichen nur laterale Wellenzahlen beitragen, die kleiner als die inverse Korrelationslänge sind. Das hat für die Energiedichte oberhalb eines Halbraumes bzw. für den Nahfeldwärmehtransport die Konsequenz, dass die λ -Integrale für Abstände $z < L$ bzw. $a < L$ keine neuen Beiträge liefern, sodass die Energiedichte bzw. der Nahfeldwärmehtransport für solche Abstände abstandsunabhängig werden. Die räumliche Korrelation der Quellenströme führt also eine Art „Cutoff“ für die λ -Integrale ein, der bei $\lambda \approx L^{-1}$ liegt.

Man beachte jedoch, dass man für Metalle für die TM-Moden eine Resonanz im Imaginärteil des Reflexionskoeffizienten eingeführt hat. Denn für Metalle ist der Realteil der Permittivität im Drude-Modell negativ, sodass man für jedes ω eine laterale Wellenzahl λ finden kann, sodass der Nenner für $|\epsilon''_{r1}(\omega)| \ll 1$ beliebig klein werden kann, d.h. es gilt

$$|\chi_1(\omega)f(\lambda) + 2| \approx 0. \quad (7.5.10)$$

Für das Plasma-Modell, in dem der Imaginärteil der Permittivität nicht berücksichtigt wird, erhielte man sogar einen Pol, sodass der TM-Moden-Anteil in diesem Modell auf Werte für die Nahfeldenergiedichte bzw. den Nahfeldwärmehtransport führt, die weit größer sind als die Werte, die man im lokalen Modell erzielt. Diese Resonanz bzw. dieser Pol ist aber unphysikalisch und eine Folge der starken Vereinfachungen, die in dem Ansatz gemacht wurden. Da dieses Problem aber nur für die TM-Moden bei Metallen auftritt, die ja für gute Metalle einen unwesentlichen Beitrag zur Nahfeldenergiedichte bzw. zum Nahfeldwärmehstrom liefern, soll im Weiteren der Reflexionskoeffizient für die TM-Moden derart abgeändert werden, dass die Ersetzung $\chi_1(\omega) \rightarrow \chi_1(\omega)f(\lambda)$ nur für den Zähler durchgeführt wird, sodass man im stark evaneszenten Nahfeld die Ausdrücke

$$\operatorname{Im}(r_{\text{kor},\parallel}) \approx \frac{2\epsilon''_{r1}(\omega)f(\lambda)}{|\epsilon_{r1}(\omega) + 1|^2} \quad \text{und} \quad \operatorname{Im}(r_{\text{kor},\perp}) \approx \frac{\epsilon''_{r1}(\omega)f(\lambda)k_0^2}{4\lambda^2} \quad (7.5.11)$$

bekommt. Die endliche räumliche Korrelation der Quellenströme führt daher im stark evaneszenten Nahfeld auf

$$\operatorname{Im}(r_{\text{kor}}) = \operatorname{Im}(r)f(\lambda) \quad (7.5.12)$$

für die TE- und die TM-Moden.

Betrachtet man nun die Polder-van Hove-Formel in Gl. (5.2.15), so sieht man, dass stets Produkte $\text{Im}(r^{10})\text{Im}(r^{20})$ auftauchen, da die Energiedichte beider beteiligter Halbräume (mit den Permittivitäten $\epsilon_1(\omega)$ bzw. $\epsilon_2(\omega)$) zum Wärmestrom beiträgt. Bei endlicher Korrelation der Quellenströme hatte man daher unter dem λ -Integral stets das Produkt $f_1(\lambda, L_1)f_2(\lambda, L_2)$ der Korrelationsfunktionen für die beiden Medien mit den entsprechenden Halbräumen. Entsprechend müssen in einer Sensor-Probe-Geometrie auch die Korrelationen innerhalb des Sensors und der Probe berücksichtigt werden, sodass auch hier das Produkt $f_1(\lambda, L_1)f_2(\lambda, L_2)$ hinzugefügt werden muss. Für das phänomenologische Sensormodell in Gl. (7.4.8) bzw. (7.4.9) erhält man daher bei Hinzunahme der heuristisch eingeführten Korrelation

$$\begin{aligned} \langle P_{\text{ges}}^{\text{ev}} \rangle &\approx \mu_{0,\text{eff}} \int d\omega [E(\omega, T_S) - E(\omega, T_P)] D_{\text{H}}(\omega, a) \\ &+ \alpha_{0,\text{eff}} \int d\omega [E(\omega, T_S) - E(\omega, T_P)] D_{\text{E}}(\omega, a) \end{aligned} \quad (7.5.13)$$

mit

$$D_{\text{H}}^{\text{ev}}(\omega, a) = \frac{\omega}{2\pi^2 c^2} \int_{k_0}^{\infty} d\lambda \frac{\lambda e^{-2\gamma a}}{2\gamma} f_1(\lambda, L_1) f_2(\lambda, L_2) \left[\text{Im}(r_{\parallel}^{01}) + \text{Im}(r_{\perp}^{01}) \frac{2\lambda^2 - k_0^2}{k_0^2} \right] \quad (7.5.14)$$

und

$$D_{\text{E}}^{\text{ev}}(\omega, a) = \frac{\omega}{2\pi^2 c^2} \int_{k_0}^{\infty} d\lambda \frac{\lambda e^{-2\gamma a}}{2\gamma} f_1(\lambda, L_1) f_2(\lambda, L_2) \left[\text{Im}(r_{\perp}^{01}) + \text{Im}(r_{\parallel}^{01}) \frac{2\lambda^2 - k_0^2}{k_0^2} \right]. \quad (7.5.15)$$

Um nun dieses Modell mit den experimentellen Daten vergleichen zu können, soll für den Sensor und die Probe die gleiche Korrelationsfunktion gewählt werden, d.h. man nimmt $f_1 = f_2 \equiv f$ an, wobei hier die Wahl auf die Korrelationsfunktion

$$f_{\parallel}(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) := \frac{1}{4\pi L^2} e^{-\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2}{4L^2}} \quad (7.5.16)$$

fällt. Man hat daher eine Korrelation der Quellenströme auf einer Skala, die mit der Korrelationslänge übereinstimmt, wobei die Korrelationsfunktion in dieser Form auch der Idee einer „aufgeweichten“ Delta-Distribution entspricht und für $L \rightarrow 0$ gegen $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ konvergiert. Im Fourier-Raum bekommt man damit für die Korrelationsfunktion den Ausdruck

$$f(\lambda) = e^{-\lambda^2 L^2}. \quad (7.5.17)$$

Setzt man nun die Korrelationsfunktion aus Gl. (7.5.17) in die Gleichung (7.5.13) für das Sensormodell ein, kann man den Wärmestrom zwischen einer Goldkugel bei $T_S = 300$ K und einem GaN-Halbraum bei $T_P = 100$ K numerisch bestimmen. Fittet man die theoretische Kurve an die experimentellen Daten, erhält man die Korrelationslängen

$$L_1 = L_{\text{Probe}} = 0,1 \text{ nm} \quad \text{und} \quad L_2 = L_{\text{Sensor}} = 12 \text{ nm}. \quad (7.5.18)$$

Die numerischen Ergebnisse für diese Korrelationslängen sind zusammen mit den experimentellen Daten in Abb. 7.7 dargestellt. In dieser Abbildung wurde für die

Permittivität der GaN-Probe die Reststrahlenformel mit dem Anteil der freien Ladungsträger aus Gl. (7.2.5) verwendet, wobei zum einen die Materialparameter für $T = 100$ K und zum anderen die Materialparameter für $T = 300$ K benutzt wurden. Im ersten Fall wurde wieder

$$\alpha_{0,\text{eff}} = 1,4 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3\text{s}^{-1} \quad \text{und} \quad \mu_{0,\text{eff}} = 5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3\text{s}^{-1} \quad (7.5.19)$$

gewählt und im zweiten Fall

$$\alpha_{0,\text{eff}} = \mu_{0,\text{eff}} = 5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3\text{s}^{-1}. \quad (7.5.20)$$

Zusätzlich findet man den entsprechenden Plot der Werte für eine GaN-Probe, deren Permittivität lediglich durch die Reststrahlenformel gegeben ist, wobei wieder die Parameter aus Gl. (7.5.20) verwendet wurden. Zum Vergleich mit den vorherigen Abbildungen sind auch die Werte geplottet, die sich mit dem Dipolmodell ergeben. In der Abb. 7.7 kann man für alle Modelle (bis auf das einfache Dipolmodell) eine relativ gute Übereinstimmung mit den experimentellen Daten über den gesamten Abstandsbereich erkennen. Es sieht daher so aus, als ob das phänomenologische Sensormodell aus Gl. (7.5.13) mit der Korrelationsfunktion aus Gl. (7.5.17) die Messdaten qualitativ und quantitativ gut beschreiben kann. Außerdem sind die Korrelationslängen von der Größenordnung, in der man sie auch erwarten würde, denn L_{Probe} liegt in der Größenordnung atomarer Abstände und L_{Sensor} liegt in der Größenordnung der mittleren freien Weglänge, die für Gold bei Zimmertemperatur ca. 42 nm beträgt.

Für die Goldprobe findet man in Abb. 7.8 einen Plot der numerischen Werte für das Sensormodell mit

$$L_1 = L_{\text{Probe}} = L_2 = L_{\text{Sensor}} = 12 \text{ nm} \quad (7.5.21)$$

und den Parametern

$$\alpha_{0,\text{eff}} = \mu_{0,\text{eff}} = 5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3\text{s}^{-1}. \quad (7.5.22)$$

Auch hier findet man eine relativ gute qualitative und quantitative Übereinstimmung der Sensormodellwerte mit den experimentellen Ergebnissen über den gesamten Abstandsbereich. Zum Vergleich sind die Werte für das Sensormodell ohne Korrelation bzw. mit der Korrelationslänge $L = 0$ abgebildet. Man beachte aber, dass die Korrelationslänge für die Probe L_{Probe} im Prinzip etwas größer sein müsste als die Korrelationslänge des Sensors, da die mittlere freie Weglänge in Gold für $T = 100$ K größer als bei Raumtemperatur ist.

Da das phänomenologische Sensormodell in Gl. (7.5.13) die experimentellen Daten für beide Proben gut beschreiben kann, kann man hoffen, dass dieses Modell auch für die Daten zukünftiger Messungen eine gute Beschreibung liefert. Man beachte, dass man bei Vernachlässigung des Leitfähigkeitsterms für die GaN-Probe die gleichen Parameterwerte $\alpha_{0,\text{eff}} = \mu_{0,\text{eff}}$ wählen kann wie für die Au-Probe, sodass in diesem Fall der Wärmestrom direkt proportional zur Nahfeldenergiedichte oberhalb der Probe ist, wobei man in der Bose-Einstein-Funktion die Temperatur des Sensors einzusetzen hat. Allerdings sollte man berücksichtigen, dass das hier vorgestellte Sensormodell nur eine phänomenologische Beschreibung liefert, die das Saturieren

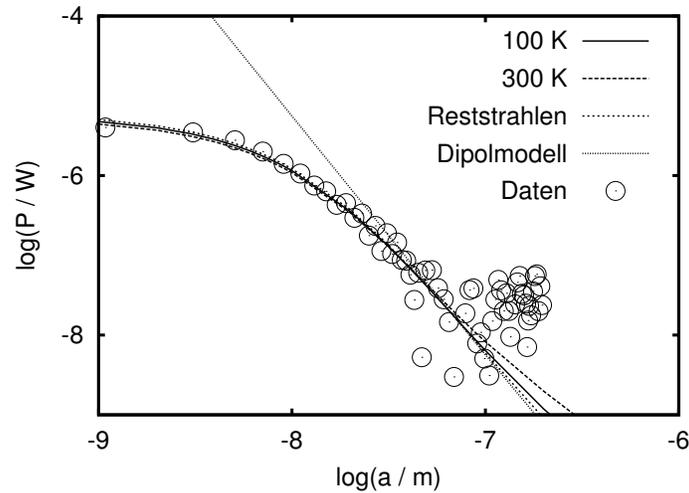


Abbildung 7.7: Strahlungswärmetransport zwischen einer Goldkugel bei $T_S = 300$ K und einem GaN-Halbraum (Reststrahlenformel + Drude) bei $T_P = 100$ K mit den Materialparametern bei 100 K und 300 K. Zusätzlich sind die Werte für einen GaN-Halbraum (Reststrahlenformel) mit den Materialparametern bei 100 K und das Dipolmodell entsprechend Abb. 7.4 aufgetragen. Für die Korrelationslängen wurden $L_1 = L_{\text{Probe}} = 0,1$ nm und $L_2 = L_{\text{Sensor}} = 12$ nm gewählt. Außerdem sind die experimentellen Daten für die GaN-Probe aus [88] eingetragen.

des Wärmestroms mithilfe eines heuristisch motivierten „Cutoffs“ im λ -Integral herstellt. Dementsprechend sollte die Aussagekraft dieses Modells nicht überbewertet werden. Vielmehr ist es notwendig, ein theoretisch gut fundiertes Modell für den Wärmestrom in der Sensor-Probe-Geometrie zu erarbeiten, das die Geometrie und die räumliche Dispersion ausreichend berücksichtigt.

7.6 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde gezeigt, dass die experimentellen Daten [88] für den Wärmestrom in einem Rasterwärmemikroskop nicht mithilfe des Polder-van Hove-Ergebnisses beschreibbar sind, wobei zwar die Messwerte für die Goldprobe qualitativ recht gut beschrieben werden, die entsprechenden Werte für die GaN-Probe dagegen überhaupt nicht beschrieben werden können. Trotzdem ist die Aussage, dass das Polder-van Hove-Modell die Messwerte überhaupt nicht wiedergeben kann, nur mit Einschränkungen richtig, da es noch Unsicherheiten bzgl. der Materialparameter der verwendeten Materialien gibt, die die Werte für den Nahfeldwärmestrom stark beeinflussen.

Da die Sensor-Probe-Geometrie in dem experimentellen Aufbau des Rasterwärmemikroskopes dennoch stark von der Geometrie zweier sich gegenüberstehender Halbräume abweicht, liegt die Vermutung nahe, dass gerade diese veränderte Geometrie die Ursache für die Abweichung der theoretischen Ergebnisse von den experi-

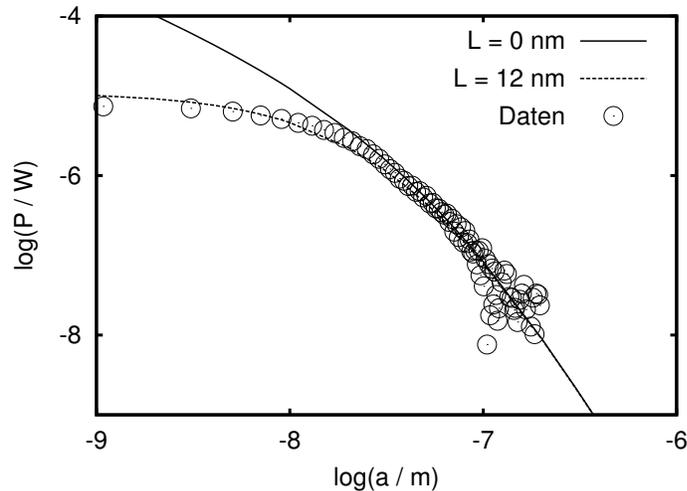


Abbildung 7.8: Strahlungswärmetransport zwischen einer Goldkugel bei $T_S = 300$ K und einem Au-Halbraum bei $T_P = 100$ K mit den Materialparametern bei 100 K, wobei die Korrelationslängen $L_{\text{Probe}} = L_{\text{Sensor}} = 0$ nm bzw. $L_{\text{Probe}} = L_{\text{Sensor}} = 12$ nm gewählt wurden. Außerdem sind die experimentellen Daten für die Au-Probe aus [88] eingetragen.

mentellen Daten ist. Daher wurden die experimentellen Daten mit dem Dipolmodell verglichen. Es hat sich gezeigt, dass nur der Wärmestrom für die GaN-Probe für große Abstände halbwegs gut beschrieben wird, wohingegen der Wärmestrom für die Goldprobe um einige Größenordnungen unter dem Wärmestrom der GaN-Probe und den experimentellen Werten liegt. Diese starke Abweichung kann darauf zurückgeführt werden, dass das Dipolmodell nur den elektrischen Anteil der Energiedichte berücksichtigt, der Wärmestrom zwischen zwei Metallen aber gerade durch den magnetischen Anteil bzw. durch die TE-Moden dominiert ist. Das zweite Problem ist die Tatsache, dass der experimentell gemessene Wärmestrom für sehr kleine Abstände gegen einen konstanten Wert konvergiert bzw. saturiert, wohingegen das Dipolmodell ein klares a^{-3} -Potenzgesetz für den Wärmestrom liefert.

Um diese beiden Probleme zu lösen, wurde zunächst ein phänomenologisches Sensormodell aufgestellt. Bei diesem wird ein effektives magnetisches Dipolmoment eingeführt, das es erlaubt, das Dipolmodell durch einen weiteren Beitrag zu ergänzen, der die TE-Moden bzw. die magnetische Energiedichte berücksichtigt. Dieses Modell ist in der Lage, die experimentellen Daten für beide Proben für große Abstände zu beschreiben. Um nun noch das Saturieren des Wärmestromes zu berücksichtigen, müsste man ein genuin nichtlokales Modell für die gegebene Geometrie aufstellen, was sehr kompliziert, wenn nicht gar unmöglich ist. Daher wurde eine heuristische Korrelationslänge L eingeführt, die die räumliche Korrelation der fluktuierenden Quellen beschreibt und auf einen „Cutoff“ im λ -Integral des Sensormodells führt. Das so abgeänderte Sensormodell ist in der Lage, für realistische Korrelationslängen L die experimentellen Daten für beide Proben im gesamten Abstandsbereich relativ gut zu beschreiben.

Trotzdem bedarf es einerseits weiterer Experimente mit gut charakterisierten

Proben und Sensoren, die die verschiedenen Modelle entweder bestätigen oder falsifizieren können. Andererseits ist es notwendig, ein theoretisch besser fundiertes Sensormodell aufzustellen, das auch die räumliche Dispersion ausreichend berücksichtigt. Der Wert des hier vorgestellten Sensormodells liegt gerade darin, dass es aufzeigt, dass erstens der magnetische und elektrische Anteil zum Wärmestrom zwischen dem Sensor und der Probe beitragen. Zweitens weist die heuristisch motivierte Korrelationslänge und Korrelationsfunktion darauf hin, dass nichtlokale Effekte zu berücksichtigen sind, die letztlich zu einem Saturieren des Wärmestromes beitragen.

Teil IV

Casimir-Kräfte im thermischen Nahfeld

In den letzten Jahren wurden die experimentellen Apparaturen zur Messung des Casimir-Effektes [108] enorm verbessert [109, 110, 111], sodass es sogar möglich scheint, die thermische Korrektur zur Casimir-Kraft zwischen Metallen experimentell zu überprüfen [112, 113]. Diese thermische Korrektur wurde bereits von Lifshitz [114] für beliebige Dielektrika angegeben und von Mehra [115] und Brown und Maclay [116] für ideale Metalle bestimmt. Schwinger, DeRaad und Milton [117] leiteten das Lifshitz-Ergebnis im Jahr 1978 erneut ab und bestätigten die entsprechenden thermischen Korrekturen für Dielektrika und ideale Metalle.

Angelehnt an die neuen experimentellen Ergebnisse gibt es seit einigen Jahren eine rege Diskussion über den thermischen Beitrag zur Casimir-Kraft, wobei in der Literatur verschiedene Ansätze mit verschiedenen Temperaturkorrekturen gemacht wurden. So benutzten Boström und Sernelius [118] die Lifshitz-Formel in Kombination mit dem Drude-Modell und stellten fest, dass der $n = 0$ -Term für die TE-Moden keinen Beitrag zur Casimir-Kraft liefert. Innerhalb dieses Ansatzes gibt es einerseits keinen stetigen Übergang zum idealen Metall [101, 119, 120, 121, 122] und andererseits stehen die vorhergesagten Temperaturkorrekturen scheinbar mit dem Experiment von Lamoereaux [111] im Widerspruch. Daher wurden weitere Ansätze gesucht, um diese beiden „Makel“ zu beseitigen. Die Gruppe um Bordag *et al.* [123] benutzte die Lifshitz-Formel in Kombination mit dem Plasma-Modell. Sie fand heraus, dass innerhalb dieses Modells der $n = 0$ -Term für die TE-Moden zur thermischen Korrektur einen Beitrag liefert, der selbst relativ gut mit der thermischen Korrektur für das ideale Metall übereinstimmt. Als dritte Gruppe etablierten Svetovoy und Lokhanin [124, 125] einen Ansatz, der für den $n = 0$ -Term der TE- und TM-Moden die sogenannte SDM-Behandlung (Schwinger-DeRaad-Milton) vorsieht, bei der zuerst der Grenzfall $\epsilon \rightarrow \infty$ durchgeführt und dann $\omega = 0$ gesetzt wird. Innerhalb dieses Ansatzes ist sichergestellt, dass es einen stetigen Übergang zwischen realem und idealem Metall gibt.

Um zu entscheiden, welcher dieser Ansätze nun physikalisch sinnvoll ist, wurde der Nernstsche Satz zu Rate gezogen, d.h. es wurde geprüft, ob die jeweiligen Ansätze auf eine Entropie führen, die für $T \rightarrow 0$ gegen Null geht. Es wurde gezeigt [85], dass das Drude-Modell in Kombination mit der Lifshitz-Formel auf eine Verletzung des Nernstschen Theorems führt, sobald die inverse Relaxationszeit gegen den Grenzwert $\omega_\tau(T) \rightarrow 0$ für $T \rightarrow 0$ geht, wohingegen das Nernstsche Theorem auch im Drude-Modell gilt, sofern $\omega_\tau \neq 0$ für alle T [101, 119]. Dieses prinzipielle Problem sollte mithilfe der Leontovich-Randbedingungen [126] gelöst werden [84, 86, 98]. Dieser Ansatz ist aber eine sehr vereinfachende Beschreibung, die die räumliche Dispersion nicht berücksichtigt und eine korrekte Beschreibung nur für die propagierenden Moden für sehr gute Leiter liefert. Trotz dieser Defizite kann die durch diesen Ansatz gegebene thermische Korrektur die Daten neuerer Messungen [112, 113, 127] dem Anschein nach gut beschreiben. Allerdings wurde die Vermutung geäußert, dass die durchgeführten Experimente noch nicht genau genug sein könnten, um wirklich Schlüsse über die thermische Korrektur treffen [128] zu können. Eine Berücksichtigung der räumlichen Dispersion [129, 130] hingegen führt auf ein gänzlich anderes Ergebnis, wobei das Nernstsche Theorem zwar erfüllt ist, aber eine formal negative Entropie auftritt [120].

Neben der Diskussion über das Nernstsche Theorem gab es zusätzlich eine Kon-

troverse darüber, ob der $n = 0$ -Term in der Lifshitz-Formel für die TE-Moden einen Beitrag zur thermischen Korrektur bei realen Metallen liefert oder nicht [101, 119, 120, 121, 122]. Dabei liefert das Plasma-Modell stets einen $n = 0$ -Term ungleich Null für die TE-Moden, da der entsprechende Reflexionskoeffizient für unendlich große Plasmafrequenzen $\omega_p \rightarrow \infty$ gegen Eins geht, wohingegen für das Drude-Modell der $n = 0$ -Term für die TE-Moden für alle $\omega_\tau \neq 0$ stets Null ist [124, 125]. Daher kann es keinen stetigen Übergang vom Drude- zum Plasma-Modell geben, indem man die Grenzfälle $\omega_\tau \rightarrow 0$ und $\omega_p \rightarrow \infty$ ausführt. Solch ein stetiger Übergang wäre nur möglich, wenn man *a priori* für den $n = 0$ -Term für die TE-Moden einen Reflexionskoeffizienten von Eins verwenden würde [131]. Ein wenig Licht in das Dunkel brachte schließlich die Arbeit von Svetovoy und Esquivel [132], in der gezeigt wurde, dass die Unstetigkeit beim Übergang vom Drude-Metall zum idealen Metall direkt mit den evaneszenten TE-Moden verknüpft ist.

Das Ziel dieses letzten Teils meiner Dissertation ist es daher, den Übergang von einem Drude-Material zum idealen Metall genauer zu untersuchen, wobei die Methode der Wick-Rotation angewendet wird, um die Beiträge der propagierenden und evaneszenten Moden mit den entsprechenden Summanden der Lifshitz-Formel zu identifizieren. Besonderes Augenmerk wird dabei auf den klassischen Beitrag bzw. den $n = 0$ -Term der Lifshitz-Formel gelegt. Diese Untersuchung habe ich in enger Zusammenarbeit mit Oliver Huth durchgeführt, der diese Problematik detailliert in seiner Diplomarbeit studiert. Daher sollte der an dieser Problematik interessierte Leser auch die Diplomarbeit von Oliver Huth [4] zu Rate ziehen.

Kapitel 8

Die Lifshitz-Formel

In diesem Kapitel werden die Kräfte zwischen zwei dielektrischen Halbräumen im Rahmen der fluktuierenden Elektrodynamik bestimmt. Dazu wird im ersten Abschnitt ähnlich wie bei der Ableitung des Poynting-Vektors, d.h. der Polder-van Hove-Formel, der Spannungstensor berechnet. Es wird gezeigt, dass man für den Fall, dass die Temperaturen beider Halbräume gleich sind und damit eine globale Gleichgewichtssituation vorliegt, die berühmte Lifshitz-Formel [114] für die Casimir- und van der Waals-Kräfte erhält. Die Ableitung der entsprechenden Formel für die Kräfte in einer Nicht-Gleichgewichtssituation ist mithilfe der gegebenen Relationen ebenso möglich. Der richtige Ausdruck für diesen Fall wurde erst 1998 von Dorofeyev [133] abgeleitet und wird hier nicht explizit angegeben, da im Weiteren nur der Fall des globalen Gleichgewichts betrachtet wird. Neben der Integralformel für die Casimir- und van der Waals-Kräfte wird ebenso die Summenformel — die sogenannte Lifshitz-Formel — angegeben, die man mithilfe der Wick-Rotation bzgl. der Wellenzahl und der Frequenz aus der Integralformel ableiten kann [114]. Da solche Wick-Rotationen im zweiten Abschnitt im Detail studiert werden, wird die allgemeine Ableitung der Lifshitz-Formel an dieser Stelle weggelassen.

Im zweiten Abschnitt dieses Kapitels wird schließlich das ideale Metall betrachtet und es wird gezeigt, dass sowohl der Integralausdruck als auch die Lifshitz-Formel auf die gleichen Grenzwerte im Hoch- und Tieftemperaturlimit [114, 115, 116, 117] führen, also in jeglicher Hinsicht äquivalent sind. Dabei wird anhand der Rechnungen klar, dass die analytische und numerische Auswertung der Integralformel im Allgemeinen schwierig ist, da der Integrand im Frequenzbereich stark oszilliert. Die Auswertung der Summenformel hingegen ist einfacher. Allerdings hat sie den Nachteil, dass man die Beiträge der propagierenden und der evaneszenten Moden nicht mehr identifizieren kann.

8.1 Ableitung der Lifshitz-Formel

In diesem Abschnitt soll die Kraft bestimmt werden, die zwischen zwei dielektrischen Halbräumen wirkt, die selbst wieder durch einen Vakuumpalt im Abstand a voneinander getrennt sind. Dabei wird zunächst davon ausgegangen, dass beide Halbräume verschiedene Temperaturen haben, wobei wie zuvor ein lokales thermodynamisches Gleichgewicht innerhalb der jeweiligen Halbräume angenommen wird.

Man steht daher vor einem ähnlichen Problem wie bei der Bestimmung des Strahlungswärmetransportes — der Polder-van Hove-Formel — innerhalb der gleichen geometrischen Anordnung, nur dass diesmal nicht der Poynting-Vektor, sondern der Spannungstensor die gesuchte physikalische Größe ist.

Man nimmt also wieder an, dass der Halbraum bei $z < 0$ mit der Permittivität ϵ_1 eine Temperatur T_1 hat, sodass die fluktuierenden Quellen innerhalb dieses Halbraumes ein fluktuierendes elektromagnetisches Feld erzeugen, das bis in den gegenüberliegenden Halbraum bei $z > a$ mit der Permittivität ϵ_3 und der Temperatur T_3 dringen kann. Die Kraft pro Fläche bzw. der Druck, der durch diese Felder auf den Halbraum bei $z > a$ verursacht wird, ist durch den Spannungstensor an der Oberfläche dieses Halbraumes bei $z = a$ gegeben. Da der Normaleneinheitsvektor auf dieser Oberfläche in negativer z -Richtung orientiert und die gesuchte Kraftkomponente die z -Komponente ist, ist der Druck in Zylinderkoordinaten durch

$$\begin{aligned} P^{13} &= -\langle T_{zz}(z = a) \rangle \\ &= -\frac{\epsilon_0}{2} (\langle E_z^2 \rangle - \langle E_r^2 \rangle - \langle E_\varphi^2 \rangle) - \frac{\mu_0}{2} (\langle H_z^2 \rangle - \langle H_r^2 \rangle - \langle H_\varphi^2 \rangle) \end{aligned} \quad (8.1.1)$$

gegeben. Wobei hier die Felder einzusetzen sind, die durch die Quellenströme im Halbraum 1 erzeugt werden, d.h. es müssen letztendlich die Korrelationsfunktionen des elektrischen Feldes

$$\langle E_\alpha E_\beta \rangle = \int_0^\infty d\omega E_0(\omega, T_1) \frac{\omega \epsilon''(\omega)}{\pi} (\mu_0^2 \omega^2) \int d^3 r' \left(\mathbf{G}_{21}^E \mathbf{G}_{21}^{E\dagger} \right)_{\alpha\beta} + \text{c.c.} \quad (8.1.2)$$

und des magnetischen Feldes

$$\langle H_\alpha H_\beta \rangle = \int_0^\infty d\omega E_0(\omega, T_1) \frac{\omega \epsilon''(\omega)}{\pi} (\mu_0^2 \omega^2) \int d^3 r' \left(\mathbf{G}_{21}^H \mathbf{G}_{21}^{H\dagger} \right)_{\alpha\beta} + \text{c.c.} \quad (8.1.3)$$

innerhalb des Vakuumpaltes, d.h. es gilt $\epsilon_2 = \epsilon_0$, bestimmt werden. Man beachte, dass aufgrund dieser Definition ein negativer Druck die Halbräume zusammenpresst, also attraktiv ist, wohingegen ein positiver Druck die Halbräume auseinanderdrückt und damit repulsiv ist. Die Greenschen Funktionen für den Bereich $0 < z < a$ sind in der gegebenen Geometrie bereits bestimmt und in den Gln. (5.2.4) angegeben worden. Sie haben die Gestalt

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{21}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \frac{i}{4\pi} \int_0^\infty d\lambda \sum_{n=0}^\infty \frac{(2 - \delta_{n,0})}{\lambda h_1} \left\{ (T_{\text{TE}} \mathbf{M}_{\pm n\lambda}(h_2) \right. \\ &\quad \left. + R_{\text{TE}} \mathbf{M}_{\pm n\lambda}(-h_2)) \otimes \mathbf{M}'_{\pm n\lambda}(-h_1) + \parallel \right\}, \end{aligned} \quad (8.1.4)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{21}^H(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \frac{k_2}{4\pi\omega\mu_0} \int_0^\infty d\lambda \sum_{n=0}^\infty \frac{(2 - \delta_{n,0})}{\lambda h_1} \left\{ (T_{\text{TE}} \mathbf{N}_{\pm n\lambda}(h_2) \right. \\ &\quad \left. + R_{\text{TE}} \mathbf{N}_{\pm n\lambda}(-h_2)) \otimes \mathbf{M}'_{\pm n\lambda}(-h_1) + \parallel \right\}. \end{aligned} \quad (8.1.5)$$

Die Transmissionskoeffizienten wurden für die gegebene Geometrie ebenfalls bereits bestimmt und haben für die TE-Moden die Form (vgl. Gl. (5.2.5))

$$T_{\text{TE}} = \frac{2t_\perp^{21}}{N_\perp} \quad \text{und} \quad R_{\text{TE}} = r_\perp^{23} e^{2ih_2 a} T_{\text{TE}}, \quad (8.1.6)$$

wobei

$$t_{\perp}^{21} := \frac{h_1}{h_2 + h_1}, \quad \text{und} \quad N_{\perp} := 1 - r_{\perp}^{23} r_{\perp}^{21} e^{2ih_2 a} \quad (8.1.7)$$

gelten. Für die TM-Moden gelten ähnliche Beziehungen.

8.1.1 Die Korrelationsfunktion des elektrischen Feldes

Um nun zunächst die elektrische Korrelationsfunktion in Gl. (8.1.2) zu bestimmen, wird das Integral über das Quellenvolumen bestimmt und es ergibt sich mit den Orthogonalitätsrelationen in Gl. (1.4.12) der Ausdruck

$$\begin{aligned} \int_{z' < 0} d^3 r' \mathbf{G}_{21}^E \mathbf{G}_{21}^{E\dagger} &= \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{\pi}{2} \int d\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2 - \delta_{n,0})^2 (1 + \delta_{n,0})}{|h_1|^2 h_1'' \lambda} \left\{ \right. \\ &\quad |T_{\text{TE}}|^2 \mathbf{M}(h_2) \otimes \overline{\mathbf{M}}(h_2) + |R_{\text{TE}}|^2 \mathbf{M}(-h_2) \otimes \overline{\mathbf{M}}(-h_2) \quad (8.1.8) \\ &\quad \left. + 2\text{Re}[T_{\text{TE}} \overline{R_{\text{TE}}} \mathbf{M}(h_2) \otimes \overline{\mathbf{M}}(-h_2)] \right\} + \parallel . \end{aligned}$$

Hierbei wurden die Indizes an den Vektorwellenfunktionen der Übersichtlichkeit wegen weggelassen. Die Abkürzung \parallel symbolisiert wieder die entsprechenden Terme für die TM-Moden.

Aufgrund der Translationssymmetrie senkrecht zur z -Achse kann der Spannungstensor nicht von der Wahl des Beobachtungspunktes innerhalb solch einer Ebene abhängen. Wählt man daher wieder $r = 0$, so kann man die gegebenen Ausdrücke sehr stark vereinfachen, da man

$$[\mathbf{M}(h_2) \otimes \overline{\mathbf{M}}(h_2)]_{rr} = [\mathbf{M}(h_2) \otimes \overline{\mathbf{M}}(h_2)]_{\varphi\varphi} = \frac{\lambda^2}{4} \delta_{n,1} e^{-2h_2'' z} \quad (8.1.9)$$

und

$$[\mathbf{M}(h_2) \otimes \overline{\mathbf{M}}(h_2)]_{zz} = 0 \quad (8.1.10)$$

erhält. Ähnliche Relationen bekommt man für die entsprechenden Ausdrücke mit $\pm h_2$ im Argument. Daher gelten zunächst die Beziehungen

$$\langle E_r^2 \rangle = \langle E_{\varphi}^2 \rangle \quad \text{und} \quad \langle E_z^2 \rangle = 0, \quad (8.1.11)$$

sodass man für die Bestimmung des elektrischen Anteils des Spannungstensors aus Gl. (8.1.1) nur $\langle E_r^2 \rangle$ berechnen muss. Schließlich gilt für diesen mit Gl. (8.1.11)

$$\langle T_{zz}^E \rangle = -\frac{\epsilon_0}{2} (\langle E_z^2 \rangle - \langle E_r^2 \rangle - \langle E_{\varphi}^2 \rangle) = \epsilon_0 \langle E_r^2 \rangle. \quad (8.1.12)$$

Es genügt daher vollkommen, die rr -Komponente der Korrelationsfunktion zu kennen, um den elektrischen Anteil des Spannungstensors angeben zu können. Man bekommt bei $r = 0$ für das Integral über das Quellenvolumen

$$\begin{aligned} \int_{z' < 0} d^3 r' \left(\mathbf{G}_{21}^E \mathbf{G}_{21}^{E\dagger} \right)_{rr} &= \frac{1}{32\pi} \int d\lambda \frac{\lambda}{|h_1|^2 h_1''} \left\{ |T_{\text{TE}}|^2 e^{-2h_2'' z} + |R_{\text{TE}}|^2 e^{2h_2'' z} \right. \\ &\quad \left. + 2\text{Re}[T_{\text{TE}} \overline{R_{\text{TE}}} e^{2ih_2 z}] \right\} + \parallel . \quad (8.1.13) \end{aligned}$$

Mit der Relation

$$\epsilon_1'' = 2\epsilon_0 \frac{h_1' h_1''}{k_0^2} \quad (8.1.14)$$

kann man somit den elektrischen Anteil des Spannungstensors mithilfe von Gl. (8.1.2) und Gl. (8.1.13) sofort bestimmen und es ergibt sich

$$\begin{aligned} \langle T_{zz}^E(z=a) \rangle &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty d\omega \frac{E_0(\omega, T_1)}{\omega} \int d\lambda \frac{h_1' \lambda}{|h_1|^2} \left\{ \right. \\ &\quad \left. \frac{k_0^2}{8} (|T_{\text{TE}}|^2 e^{-2h_2'' a} + |R_{\text{TE}}|^2 e^{2h_2'' a}) + \frac{k_0^2}{4} \text{Re}[T_{\text{TE}} \bar{R}_{\text{TE}} e^{2ih_2'' a}] \right\} + \parallel . \end{aligned} \quad (8.1.15)$$

8.1.2 Die Korrelationsfunktion des magnetischen Feldes

Die Berechnung des magnetischen Anteils wird nun auf die gleiche Weise durchgeführt. Bestimmt man zuerst das Integral über das Quellenvolumen, so erhält man diesmal mit den Gln. (1.4.12)

$$\begin{aligned} \int_{z' < 0} d^3 r' \mathbf{G}_{21}^H \mathbf{G}_{21}^{H\dagger} &= \frac{|k_2|^2}{(4\pi)^2 \omega^2 \mu_0} \frac{\pi}{2} \int d\lambda \sum_{n=0}^\infty \frac{(2 - \delta_{n,0})^2 (1 + \delta_{n,0})}{|h_1|^2 h_1'' \lambda} \left\{ \right. \\ &\quad |T_{\text{TE}}|^2 \mathbf{N}(h_2) \otimes \bar{\mathbf{N}}(h_2) + |R_{\text{TE}}|^2 \mathbf{N}(-h_2) \otimes \bar{\mathbf{N}}(-h_2) \quad (8.1.16) \\ &\quad \left. + 2\text{Re}[T_{\text{TE}} \bar{R}_{\text{TE}} \mathbf{N}(h_2) \otimes \bar{\mathbf{N}}(-h_2)] \right\} + \parallel . \end{aligned}$$

Aufgrund der Translationssymmetrie kann nun wieder der spezielle Beobachtungspunkt $r = 0$ gewählt werden, sodass man für die entsprechenden Komponenten der Vektorwellenfunktionen Ausdrücke der Art

$$[\mathbf{N}(h_2) \otimes \bar{\mathbf{N}}(h_2)]_{rr} = [\mathbf{N}(h_2) \otimes \bar{\mathbf{N}}(h_2)]_{\varphi\varphi} = \frac{|h_2|^2}{|k_2|^2} \frac{\lambda^2}{4} \delta_{n,1} e^{-2h_2'' z} \quad (8.1.17)$$

und

$$[\mathbf{N}(h_2) \otimes \bar{\mathbf{N}}(h_2)]_{zz} = \frac{\lambda^4}{|k_2|^2} \delta_{n,0} e^{-2h_2'' z} \quad (8.1.18)$$

erhält. Für die Korrelationsfunktionen des magnetischen Feldes gilt daher

$$\langle H_r^2 \rangle = \langle H_\varphi^2 \rangle, \quad (8.1.19)$$

sodass man den magnetischen Anteil des Spannungstensors durch

$$\langle T_{zz}^H \rangle = -\frac{\mu_0}{2} (\langle H_z^2 \rangle - \langle H_r^2 \rangle - \langle H_\varphi^2 \rangle) = -\mu_0 \left(\frac{1}{2} \langle H_z^2 \rangle - \langle H_r^2 \rangle \right) \quad (8.1.20)$$

angeben kann. Diesmal muss man also die rr - und die zz -Komponente der Korrelationsfunktion des magnetischen Feldes kennen, um den magnetischen Anteil des

Spannungstensors angeben zu können. Daher betrachtet man die entsprechenden Integrale über das Quellenvolumen bei $r = 0$ und erhält

$$\int_{z' < 0} d^3 r' \left(\mathbf{G}_{21}^H \mathbf{G}_{21}^{H\dagger} \right)_{rr} = \frac{1}{32\pi\omega^2\mu_0^2} \int d\lambda \frac{\lambda|h_2|^2}{|h_1|^2 h_1''} \left\{ |T_{\text{TE}}|^2 e^{-2h_2''z} + |R_{\text{TE}}|^2 e^{2h_2''z} - 2\text{Re}[T_{\text{TE}}\bar{R}_{\text{TE}}e^{2ih_2'z}] \right\} + \parallel \quad (8.1.21)$$

und

$$\int_{z' < 0} d^3 r' \left(\mathbf{G}_{21}^H \mathbf{G}_{21}^{H\dagger} \right)_{zz} = \frac{1}{16\pi\omega^2\mu_0^2} \int d\lambda \frac{\lambda^3}{|h_1|^2 h_1''} \left\{ |T_{\text{TE}}|^2 e^{-2h_2''z} + |R_{\text{TE}}|^2 e^{2h_2''z} + 2\text{Re}[T_{\text{TE}}\bar{R}_{\text{TE}}e^{2ih_2'z}] \right\} + \parallel. \quad (8.1.22)$$

Somit kann man den magnetischen Anteil des Spannungstensors an der Stelle $z = a$ auswerten und bekommt

$$\langle T_{zz}^H(z = a) \rangle = -\frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty d\omega \frac{E_0(\omega, T_1)}{\omega} \int d\lambda \frac{h_1' \lambda}{|h_1|^2} \left\{ \frac{\lambda^2 - |h_2|^2}{8} (|T_{\text{TE}}|^2 e^{-2h_2''a} + |R_{\text{TE}}|^2 e^{2h_2''a}) + \frac{\lambda^2 + |h_2|^2}{4} \text{Re}[T_{\text{TE}}\bar{R}_{\text{TE}}e^{2ih_2'a}] \right\} + \parallel. \quad (8.1.23)$$

8.1.3 Die Lifshitz-Formel

Man kann nun die Kraft pro Fläche auf den Halbraum bei $z > a$ bestimmen, indem man in Gl. (8.1.1) die beiden Ergebnisse für den elektrischen Anteil und den magnetischen Anteil aus den Gln. (8.1.15) und (8.1.23) einsetzt. Es ergibt sich dann

$$P^{13} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty d\omega \frac{E_0(\omega, T_1)}{\omega} \int d\lambda \frac{h_1' \lambda}{|h_1|^2} \left\{ \frac{k_0^2 - \lambda^2 + |h_2|^2}{8} (|T_{\text{TE}}|^2 e^{-2h_2''a} + |R_{\text{TE}}|^2 e^{2h_2''a}) + \frac{k_0^2 - \lambda^2 - |h_2|^2}{4} \text{Re}[T_{\text{TE}}\bar{R}_{\text{TE}}e^{2ih_2'a}] + \parallel \right\}. \quad (8.1.24)$$

Setzt man nun noch die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten aus Gl. (8.1.6) ein, erhält man

$$P^{13} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty d\omega \frac{E_0(\omega, T_1)}{\omega} \int d\lambda \frac{h_1' \lambda}{|h_1 + h_2|^2 |N_\perp|^2} \left\{ \frac{k_0^2 - \lambda^2 + |h_2|^2}{2} (e^{-2h_2''a} + |r_\perp^{23}|^2) + \frac{k_0^2 - \lambda^2 - |h_2|^2}{2} \text{Re}(r_\perp^{23}) e^{-2h_2''a} \right\} + \parallel. \quad (8.1.25)$$

Man beachte nun, dass es sich wieder in natürlicher Weise anbietet, die propagierenden und evaneszenten Terme zu trennen, denn es gelten

$$k_0^2 - \lambda^2 + |h_2|^2 = \begin{cases} 2(k_0^2 - \lambda^2), & \lambda < k_0 \\ 0, & \lambda > k_0 \end{cases} \quad (8.1.26)$$

und

$$k_0^2 - \lambda^2 - |h_2|^2 = \begin{cases} 0, & \lambda < k_0 \\ 2(k_0^2 - \lambda^2), & \lambda > k_0 \end{cases}. \quad (8.1.27)$$

Wendet man noch zusätzlich die bereits mehrfach verwendete Relation

$$\frac{h_1'}{|h_1 + h_2|^2} = \begin{cases} \frac{1 - |r_{\perp}^{21}|^2}{4\sqrt{k_0^2 - \lambda^2}}, & \lambda < k_0 \\ \frac{\text{Im}(r_{\perp}^{21})}{2\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}}, & \lambda > k_0 \end{cases} \quad (8.1.28)$$

an, bekommt man schließlich

$$P^{13} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\infty} d\omega \frac{E_0(\omega, T_1)}{\omega} \left\{ \int_0^{k_0} d\lambda \frac{\lambda \sqrt{k_0^2 - \lambda^2}}{4|N_{\perp}|^2} (1 + |r_{\perp}^{23}|^2)(1 - |r_{\perp}^{21}|^2) - \int_{k_0}^{\infty} d\lambda \frac{\lambda \sqrt{\lambda^2 - k_0^2}}{2|N_{\perp}|^2} \text{Re}(r_{\perp}^{23}) \text{Im}(r_{\perp}^{21}) e^{-2h_2''a} \right\} + \parallel. \quad (8.1.29)$$

Anhand dieser Formel kann man leicht sehen, dass P^{13} nicht symmetrisch bei Vertauschung der Indizes ist, sodass die Kraft P^{31} auf den ersten Halbraum bei $z < 0$ durch die fluktuierenden Felder, die im zweiten Halbraum bei $z > a$ erzeugt werden, nicht exakt mit P^{13} übereinstimmt. Dennoch kann man aufgrund der Symmetrie im betrachteten System diese Kraft P^{31} durch Vertauschen der Indizes in P^{13} erhalten, wobei diesmal das Vorzeichen nicht umgedreht werden muss. Das liegt daran, dass die Kräfte P^{13} und P^{31} , die die beiden Halbräume beispielsweise zusammendrücken, zwar ein umgekehrtes Vorzeichen haben, weil P^{13} den zweiten Halbraum in diesem Fall nach „links“ und P^{31} den ersten Halbraum nach „rechts“ zieht, aber trotzdem beide Kräfte additiv gewertet werden. Im Gegensatz zum Nahfeldwärmehtransport werden hier daher nicht Differenzen von Poynting-Vektoren, sondern Summen von Spannungstensoren betrachtet. Somit ist klar, dass die Kraft im Gegensatz zum Nahfeldwärmehtransport einen Vakuumanteil enthält. Vertauscht man nun die Indizes in Gl. (8.1.29), erhält man die Kraft

$$P^{31} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\infty} d\omega \frac{E_0(\omega, T_3)}{\omega} \left\{ \int_0^{k_0} d\lambda \frac{\lambda \sqrt{k_0^2 - \lambda^2}}{4|N_{\perp}|^2} (1 + |r_{\perp}^{21}|^2)(1 - |r_{\perp}^{23}|^2) - \int_{k_0}^{\infty} d\lambda \frac{\lambda \sqrt{\lambda^2 - k_0^2}}{2|N_{\perp}|^2} \text{Re}(r_{\perp}^{21}) \text{Im}(r_{\perp}^{23}) e^{-2h_2''a} \right\} + \parallel. \quad (8.1.30)$$

Dabei bleibt der Nenner $|N|^2$ stets unverändert, da dieser invariant bei Vertauschung der Indizes ist. Im Prinzip hat man damit die Kraft zwischen zwei Halbräumen mit verschiedener Temperatur innerhalb der Rytovschen Theorie bestimmt, wobei diese Kraft pro Fläche bzw. der Druck durch

$$P = P^{31} + P^{13} \quad (8.1.31)$$

gegeben ist. Eine entsprechende Rechnung für die Kraft zwischen zwei Halbräumen mit verschiedener Temperatur wurde von Dorofeyev [133] erst im Jahre 1998, also 42 Jahre nach der berühmten Lifshitz-Rechnung, mithilfe der Rytovschen Theorie ausgeführt.

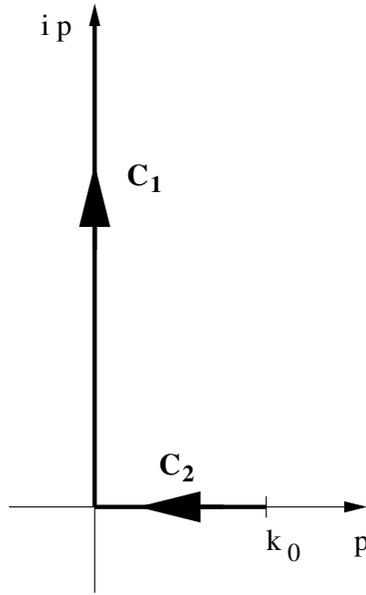


Abbildung 8.1: Skizze des Integrationsweges für die Lifshitz-Integral-Formel.

Geht man nun von einer Gleichgewichtssituation mit $T_1 = T_3 = T$ aus, so sollte man das von Lifshitz bereits 1956 [114] abgeleitete Ergebnis erhalten. Setzt man daher beide Temperaturen gleich, so bekommt man

$$P = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty d\omega \frac{E_0(\omega, T)}{\omega} \left\{ \int_0^{k_0} d\lambda \frac{\lambda \sqrt{k_0^2 - \lambda^2}}{2} \frac{1 - |r_\perp^{21}|^2 |r_\perp^{23}|^2}{|N_\perp|^2} - \int_{k_0}^\infty d\lambda \lambda \sqrt{\lambda^2 - k_0^2} e^{-2h_2'' a} \frac{\text{Im}(r_\perp^{21} r_\perp^{23})}{|N_\perp|^2} \right\} + \parallel . \quad (8.1.32)$$

Um dieses Ergebnis mit dem Lifshitz-Ergebnis vergleichen zu können, müssen noch einige Umformungen durchgeführt werden. Dazu werden zuerst die Integrationsvariablen $p := \sqrt{k_0^2 - \lambda^2}$ für die propagierenden und $\gamma := \sqrt{\lambda^2 - k_0^2}$ für die evaneszenten Moden eingeführt. Damit erhält man zunächst

$$P = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty d\omega \frac{E_0(\omega, T)}{\omega} \left\{ \int_{k_0}^0 dp \frac{p^2}{2} \frac{1 - |r_\perp^{21}|^2 |r_\perp^{23}|^2}{|N_\perp|^2} - \int_0^\infty d\gamma \gamma^2 e^{-2\gamma a} \frac{\text{Im}(r_\perp^{21} r_\perp^{23})}{|N_\perp|^2} \right\} + \parallel . \quad (8.1.33)$$

Berücksichtigt man nun noch die beiden Beziehungen

$$\frac{1 - |r_\perp^{21}|^2 |r_\perp^{23}|^2}{|N|^2} = \frac{r_\perp^{21} r_\perp^{23} e^{2ipa}}{N} + \text{c.c.} + 1 \quad (8.1.34)$$

$$\frac{\text{Im}(r_\perp^{21} r_\perp^{23}) e^{-2\gamma a}}{N} = \frac{1}{2i} \frac{r_\perp^{21} r_\perp^{23} e^{-2\gamma a}}{N} + \text{c.c.}, \quad (8.1.35)$$

so kann man die Kraft im Gleichgewichtsfall relativ kompakt durch die Formel

$$P = \frac{1}{\pi^2} \operatorname{Re} \int d\omega \frac{E_0(\omega, T)}{\omega} \int_{C_1+C_2} dp p^2 \frac{r_{\perp}^{21} r_{\perp}^{23} e^{2ipa}}{N_{\perp}} + \parallel + \frac{1}{\pi^2} \int d\omega \frac{E_0(\omega, T)}{\omega} \int_0^{k_0} dp p^2 \quad (8.1.36)$$

angeben, wobei der Integrationsweg $(C_1 + C_2)$ bzgl. der Variablen p in Abb. 8.1 dargestellt ist. Der letzte Term in diesem Ausdruck ist ein rein abstandsunabhängiger Term, der von den propagierenden Moden stammt und einen unendlichen Beitrag zum Druck P für $T = 0$ liefert. Diesen Term würde man nicht erhalten, wenn man von vornherein Platten endlicher Dicke statt unendlich ausgedehnter Halbräume betrachtet hätte, denn dann würde sich dieser Beitrag mit dem Druck auf die Platten von außen aufheben [134, 135]. Um hier dennoch insgesamt einen endlichen Ausdruck zu erhalten, wird eine Renormierung durchgeführt, die äquivalent zu der Renormierungsprozedur in Gl. (1.9.8) ist. Die renormierte Kraft pro Fläche wird durch [114]

$$P_{\text{ren}}(a) := P(a) - \lim_{a \rightarrow \infty} P(a) \quad (8.1.37)$$

definiert, sodass man im globalen Gleichgewicht

$$P_{\text{ren}} = \frac{1}{\pi^2} \operatorname{Re} \int d\omega \frac{E_0(\omega, T)}{\omega} \int_{C_1+C_2} dp p^2 \frac{r_{\perp}^{21} r_{\perp}^{23} e^{2ipa}}{N_{\perp}} + \parallel \quad (8.1.38)$$

erhält. Das ist das berühmte Lifshitz-Ergebnis [114], das die Kraft zwischen zwei dielektrischen Halbräumen beschreibt, wobei diese Formel sowohl den $T = 0$ -Beitrag als auch den $T \neq 0$ -Beitrag berücksichtigt. Übrigens ist es nicht notwendig, eine Regularisierung durchzuführen, da der Integrand unter dem Frequenzintegral stets nach oben beschränkt ist. Das liegt daran, dass für $\omega \rightarrow \infty$ die Permittivität gegen Eins konvergiert, d.h. es gilt $\epsilon(\omega) \rightarrow 1$, und somit die Reflexionskoeffizienten und damit auch der Integrand für hohe Frequenzen verschwinden.

Trotzdem ist es im Allgemeinen numerisch nicht einfach, das Integral für den renormierten Ausdruck in Gl. (8.1.38) auszuwerten, da der Integrand im Frequenzraum stark oszilliert. Dieses Problem kann man beheben, indem man eine Wick-Rotation bzgl. p und ω durchführt. Da diese Transformation in Spezialfällen im nächsten Kapitel durchgeführt wird, sei der interessierte Leser für die allgemeine Durchführung dieser Transformation auf die grundlegende Arbeit von Lifshitz [114] verwiesen. Nach dieser Transformation, bei der die Integration über reelle Frequenzen im Prinzip durch eine Summe über komplexwertige Frequenzen ersetzt wird, erhält man die sogenannte Lifshitz-Formel

$$P_{\text{ren}} = -\frac{1}{\pi\beta} \sum_{n=0}' \int_{\zeta_n/c}^{\infty} dp p^2 [((r_{\perp,n}^{21})^{-1} (r_{\perp,n}^{23})^{-1} e^{2pa} - 1)^{-1} + \parallel], \quad (8.1.39)$$

mit den sogenannten Matsubara-Frequenzen $\zeta_n = 2\pi n/\hbar\beta$. Der Apostroph an der Summe zeigt an, dass der nullte Summand nur halbfach gezählt wird. Die Reflexi-

onskoeffizienten für die TE- und TM-Moden sind für $\epsilon_2 = \epsilon_0$

$$r_{\perp,n}^{2i} = \frac{p - \sqrt{\frac{\zeta_n^2}{c^2}(\epsilon_{ri}(i\zeta_n) - 1) + p^2}}{p + \sqrt{\frac{\zeta_n^2}{c^2}(\epsilon_{ri}(i\zeta_n) - 1) + p^2}} \quad \text{und} \quad (8.1.40)$$

$$r_{\parallel,n}^{2i} = \frac{p\epsilon_{ri}(i\zeta_n) - \sqrt{\frac{\zeta_n^2}{c^2}(\epsilon_{ri}(i\zeta_n) - 1) + p^2}}{p\epsilon_{ri}(i\zeta_n) + \sqrt{\frac{\zeta_n^2}{c^2}(\epsilon_{ri}(i\zeta_n) - 1) + p^2}}.$$

Diese Summendarstellung hat den Vorteil, dass sie relativ schnell konvergiert und damit numerisch leicht auszuwerten ist. Allerdings wird dieser Vorteil durch den Nachteil erkauft, dass anhand dieser Formulierung die Beiträge der evaneszenten und propagierenden Moden nicht mehr getrennt werden können.

8.2 Das ideale Metall

In diesem Abschnitt sollen nun der Hoch- und der Tieftemperaturimes mithilfe der Lifshitz-Ausdrücke in Gl. (8.1.38) und Gl. (8.1.39) für ein ideales Metall bestimmt werden. Diese Grenzfälle wurden bereits von Lifshitz [114] betrachtet, wobei sich in der Rechnung für den Beitrag der thermischen Photonen zur Kraft im Tieftemperaturimes ein Vorzeichenfehler eingeschlichen hat, sodass dieser Beitrag in dem Lifshitz-Papier repulsiv erscheint. Mehra [115] und Brown und Maclay [116] erhielten dagegen für ein Photonengas zwischen zwei idealen Metallplatten ein davon abweichendes Ergebnis, d.h. einen attraktiven Beitrag der thermischen Photonen. Schließlich zeigten Schwinger, DeRaad und Milton [117], dass die Lifshitz-Formel richtig ist und bei korrekter Ausführung der Grenzfälle auch die richtigen Grenzwerte für das ideale Metall liefert, die von Mehra [115] bzw. Brown und Maclay [116] abgeleitet wurden.

Ein ideales Metall ist nun dadurch gekennzeichnet, dass die Ladungsträger an der Oberfläche des Metalls so beweglich sind, dass bei Anwesenheit elektromagnetischer Felder im Prinzip instantan Oberflächenladungen und Oberflächenströme derart erzeugt werden, dass die Felder innerhalb des idealen Metalls verschwinden. Dementsprechend kann eine elektromagnetische Welle, die auf ein ideales Metall trifft, nicht in dieses Medium eindringen und wird daher vollständig reflektiert. Die Reflexionskoeffizienten haben also den Betrag 1. Die richtigen Reflexionskoeffizienten kann man formal aus den Fresnelschen Reflexionskoeffizienten in Gl. (8.1.40) durch Ausführen des Grenzfalles $\epsilon_1 \rightarrow \infty$ erhalten, sodass für ein ideales Metall die Amplitudenreflexionskoeffizienten durch

$$r_{\parallel}^{21} = 1 \quad \text{und} \quad r_{\perp}^{21} = -1 \quad (8.2.1)$$

gegeben sind. Elektromagnetische Wellen, die auf ein ideales Metall auftreffen, werden also vollständig reflektiert, wobei die TE-Moden eine Phasenverschiebung um π erfahren. Man beachte, dass es für ein ideales Metall keine evaneszenten Moden gibt. Schließlich lässt solch ein Metall keinerlei Verluste zu, da ja jegliche einfallende

Welle vollständig reflektiert wird, sodass die Permittivität solch eines fiktiven Mediums rein reell ist. Damit verschwindet die lokale Zustandsdichte der evaneszenten Moden in Gl. (1.7.18) und damit auch das evaneszente Nahfeld.

Setzt man die Reflexionskoeffizienten aus Gl. (8.2.1) für das ideale Metall in die Summenformel in Gl. (8.1.39) ein, so bekommt man

$$\begin{aligned} P_{\text{IM}} &= -\frac{2}{\pi\beta} \sum_{n=0}^{\infty'} \int_{\zeta_n/c}^{\infty} dp \frac{p^2}{e^{2pa} - 1} \\ &= -\frac{2}{\pi\beta} \sum_{n=0}^{\infty'} \frac{\zeta_n^3}{c^3} \int_1^{\infty} dp \frac{p^2}{e^{2pa\zeta_n/c} - 1}, \end{aligned} \quad (8.2.2)$$

wobei die TE- und TM-Moden zu gleichen Anteilen beitragen. Man beachte, dass man aufgrund dieser Vorgehensweise für den nullten Term im Prinzip die SDM-Behandlung ausgeführt hat, da man erst den Grenzfall $\epsilon \rightarrow \infty$ und darauf erst den zweiten Grenzfall $\omega \rightarrow 0$ ausgeführt hat. Im Übrigen wurde der Index, der anzeigt, dass es sich hier um den renormierten Ausdruck handelt, weggelassen. Er wird auch im Weiteren nicht explizit angegeben, da nur die renormierten Ausdrücke verwendet werden.

Im sogenannten Hochtemperaturlimes, der durch die Bedingung $a \gg \hbar\beta c$ gegeben ist, wird die Summe durch den $n = 0$ -Term dominiert, da die p -Integranden für $n \neq 0$ in diesem Grenzfall exponentiell gedämpft sind und damit vernachlässigt werden können. Betrachtet man also große Abstände bzw. hohe Temperaturen, sodass $a \gg \hbar\beta c$ erfüllt ist, bekommt man [114, 115, 116, 117]

$$\begin{aligned} P_{\text{IM}}^{\text{cl}} &\approx -\frac{1}{\pi\beta} \int_0^{\infty} dp \frac{p^2}{e^{2pa} - 1} \\ &= -2 \frac{\zeta(3)}{8\pi\beta a^3}, \end{aligned} \quad (8.2.3)$$

wobei das Superskript cl andeuten soll, dass es sich hier um einen rein klassischen Term handelt, der proportional zu $\beta^{-1} = k_B T$ ist. Dieser klassische Term ist offenbar attraktiv und setzt sich zu gleichen Anteilen aus den TE- und TM-Moden-Beiträgen zusammen.

Die Ausführung des Tieftemperaturlimes, der durch $a \ll \hbar\beta c$ gegeben ist, ist etwas schwieriger, da im Prinzip alle Summanden in der Lifshitz-Formel in Gl. (8.2.2) berücksichtigt werden müssen. Trotzdem kann man diesen Grenzfall mithilfe der Euler-Maclaurin-Summenformel relativ leicht ausführen. Die Euler-Maclaurin-Summenformel ist durch [136]

$$\sum_{n=0}^{\infty'} f(n) = \int_0^{\infty} dn f(n) + \frac{1}{12} (f'(\infty) - f'(0)) - \frac{1}{720} (f'''(\infty) - f'''(0)) + \dots \quad (8.2.4)$$

gegeben, wobei hier

$$f(n) := -\frac{2}{\pi\beta} \int_{\zeta_n/c}^{\infty} dp \frac{p^2}{e^{2pa} - 1} \quad (8.2.5)$$

gilt. Man kann leicht nachrechnen, dass

$$f'(\infty) = f'''(\infty) = f'(0) = 0 \quad \text{und} \quad f'''(0) = -2 \frac{8\pi^2}{c^3 \hbar^3 \beta^4} \quad (8.2.6)$$

gelten und

$$\int_0^\infty dn f(n) = -\frac{\hbar c \pi^2}{240 a^4} \quad (8.2.7)$$

erfüllt ist. Setzt man diese Relationen in die Euler-Maclaurin-Summenformel ein, erhält man für den Tieftemperaturimes [114, 115, 116, 117]

$$P_{\text{IM}}^{\text{qm}} \approx -\frac{\hbar c \pi^2}{240 a^4} - \frac{\pi^2}{45 \hbar^3 c^3 \beta^4}. \quad (8.2.8)$$

Das ist ein quantenmechanischer Ausdruck, wobei der erste Term die Casimir-Kraft zwischen zwei idealen Metallplatten [134] für $T = 0$ darstellt, die durch die virtuellen Photonen zwischen den Metallplatten verursacht wird, wobei innerhalb der fluktuierenden Elektrodynamik dieser Beitrag von dem Nullpunktsbeitrag der propagierenden Moden herrührt. Der zweite Term steht für die Temperaturkorrektur, die man erhält, wenn man die thermischen Photonen zwischen den beiden idealen Metallplatten [115] mitberücksichtigt, wobei dieser Beitrag innerhalb der fluktuierenden Elektrodynamik von dem thermischen Beitrag der propagierenden Moden herrührt. Auch hier tragen die TE- und TM-Moden zu gleichen Anteilen zur Kraft bei, die selbst insgesamt attraktiv ist.

Die gleichen Grenzfälle sollen nun anhand der Integralformel in Gl. (8.1.38) diskutiert werden. Betrachtet man zunächst die evaneszenten Moden, d.h. man betrachtet nur den Beitrag des Integrales über den Weg C_1 in Abb. 8.1, so erhält man für das ideale Metall

$$P_{\text{ev}} = 2 \frac{1}{\pi^2} \text{Im} \int_0^\infty d\omega \frac{E_0(\omega, T)}{\omega} \int_0^\infty dp \frac{p^2}{e^{2pa} - 1} = 0, \quad (8.2.9)$$

da die Integranden rein reelle Funktionen sind und keine Pole auf dem Integrationsintervall haben. Die evaneszenten Moden tragen daher erwartungsgemäß nicht zur Kraft zwischen zwei idealen Metallplatten bei.

Bei der Kraft zwischen zwei idealen Metallplatten handelt es sich also um einen Effekt, der allein durch die propagierenden Moden getragen wird. Wählt man in der Integralformel in Gl. (8.1.38) den Integrationsweg C_2 , so bekommt man den Beitrag der propagierenden Moden zur Kraft, der durch die Gleichung

$$P_{\text{pr}} = -\frac{1}{\pi^2} \int d\omega \frac{E_0(\omega, T)}{\omega} \sigma(\omega) \quad (8.2.10)$$

mit

$$\sigma(\omega) := 2 \text{Re} \int_{k_0}^0 dp \frac{p^2}{e^{-2ipa} - 1} \quad (8.2.11)$$

gegeben ist. Die Funktion $\sigma(\omega)$ ist eine im Frequenzraum stark oszillierende Funktion und soll zunächst etwas umgeformt werden. Da der p -Integrand die Form des

Grenzwertes einer geometrischen Reihe hat, bietet es sich an, den Integranden durch solch eine geometrische Reihe darzustellen. Da nun der Betrag der Exponentialfunktion mit einem rein imaginären Argument eins ist, und $\exp(2ipa)$ damit nicht im Konvergenzradius der geometrischen Reihe liegt, wird aus Konvergenzgründen der reellwertige Faktor $|b| \leq 1$ eingeführt, sodass man

$$\begin{aligned}
\sigma(\omega) &= -\lim_{b \rightarrow 1} 2\operatorname{Re} \int_0^{k_0} dp \frac{p^2 b e^{2ipa}}{1 - b e^{2ipa}} \\
&= -\lim_{b \rightarrow 1} 2\operatorname{Re} \int_0^{k_0} dp p^2 \sum_{n=1}^{\infty} b^n e^{2ipan} \\
&= \lim_{b \rightarrow 1} 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial a^2} \int_0^{k_0} dp \frac{b^n \cos(2pan)}{(2n)^2} \\
&= \lim_{b \rightarrow 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial a^2} \frac{b^n \sin(2k_0 an)}{4n^3 a}
\end{aligned} \tag{8.2.12}$$

bekommt. Führt man nun die Ableitung nach dem Abstand und den Limes $b \rightarrow 1$ aus, ergibt sich

$$\sigma(\omega) = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \left(\frac{2}{a^3} \sin(2k_0 an) - \frac{4k_0 n}{a^2} \cos(2k_0 an) - \frac{4k_0^2 n^2 \sin(2k_0 an)}{a} \right). \tag{8.2.13}$$

Von diesem Ausdruck für $\sigma(\omega)$ ausgehend, sollen im Weiteren die beiden bereits bekannten Grenzfälle – der Hoch- und Tieftemperaturlimes – betrachtet werden.

Um nun den Hochtemperaturlimes in der Interalfomel auszuführen, wird das Integral aus Gl. (8.2.10) vorausgesetzt und die Variablentransformation $x = k_0 a$ durchgeführt. Man bekommt dann

$$P_{\text{pr}} = -\frac{1}{\pi^2} \int dx \frac{E_0(xc/a, T)}{x} \sigma(x). \tag{8.2.14}$$

Im Hochtemperaturlimes mit $a \gg \hbar\beta c$ kann man die Bose-Einstein-Funktion durch den klassischen Wert β^{-1} approximieren, solange die wesentlich zum Integral beitragenden x derart klein bzw. das Produkt aus Temperatur und Abstand derart groß sind, dass auch $a \gg \hbar\beta cx$ gilt. Für reale Metalle, die oberhalb der Plasmafrequenz transparent werden, liegt der größte Wert für x daher bei $x = \omega_p a/c$. Daraus folgt, dass der Hochtemperaturlimes bei realen Metallen nur für Temperaturen $\hbar\beta\omega_p \ll 1$ realisierbar ist. Den klassischen Beitrag selbst kann man nun leicht mithilfe der Beziehungen

$$\int_0^{\infty} dx \frac{\sin(2xn)}{x} = \frac{\pi}{2} \tag{8.2.15}$$

und

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{\infty} dx e^{-\alpha x} \cos(2xn) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{\infty} dx e^{-\alpha x} \sin(2xn) x = 0 \tag{8.2.16}$$

bestimmen, wobei hier durch die Einführung der exponentiellen Dämpfung unter dem Integral eine Regularisierungsprozedur eingeführt wurde, die bei der Betrachtung idealer Metalle notwendig ist und die im Folgenden noch gerechtfertigt werden

soll. Man bekommt somit für den klassischen Beitrag der propagierenden Moden

$$P_{\text{pr}}^{\text{cl}} \approx -2 \frac{1}{8\beta\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \frac{\pi}{a^3} = -2 \frac{\zeta(3)}{8\pi a^3 \beta}. \quad (8.2.17)$$

Dieser Ausdruck stimmt exakt mit dem Ausdruck in Gl. (8.2.3) überein, der mit der Summenformel bestimmt wurde.

Die Bestimmung des Tieftemperaturlimes ist nun etwas aufwendiger, da sowohl der $T = 0$ -Term der virtuellen Photonen als auch der $T \neq 0$ -Beitrag der thermischen Photonen bestimmt werden muss. Der $T = 0$ -Term kann ähnlich wie der klassische Beitrag berechnet werden: Da für diesen Term $E_0(\omega, T) = \hbar\omega/2$ gilt, erhält man aus Gl. (8.2.10) zunächst den Ausdruck

$$P_{\text{pr}}^{T=0} = -\frac{\hbar}{2\pi^2} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int d\omega \sigma(\omega) e^{-\alpha\omega}, \quad (8.2.18)$$

wobei $\sigma(\omega)$ in Gl. (8.2.13) gegeben ist. Dabei wurde durch die Einführung der Exponentialfunktion unter dem Frequenzintegral wie in den Gln. (8.2.16) eine Regularisierung eingeführt, die dafür sorgt, dass das Integral definiert ist und man endliche Ausdrücke erhält. Diese Regularisierung kann dadurch physikalisch motiviert werden, dass die Reflexionskoeffizienten $|r|^2$ für reale Metalle nur für Frequenzen kleiner als die Plasmafrequenz Eins ergeben und für Frequenzen oberhalb der Plasmafrequenz verschwinden. Somit kann man ein ideales Metall aus einem realen Metall dadurch erhalten, dass man die Plasmafrequenz gegen unendlich gehen lässt und dadurch für alle Frequenzen einen Reflexionskoeffizienten von Eins bekommt. Diese Vorstellung entspricht aber genau dem Wirken der exponentiellen Dämpfung $\exp(-\alpha\omega)$ im Frequenzintegral für den Grenzfall $\alpha \rightarrow 1$. Da nun

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int d\omega e^{-\alpha\omega} \sin(2k_0 a n) &= \frac{c}{2an}, \\ \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int d\omega e^{-\alpha\omega} \cos(2k_0 a n) \omega &= -\left(\frac{c}{2an}\right)^2, \\ \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int d\omega e^{-\alpha\omega} \sin(2k_0 a n) \omega^2 &= -2\left(\frac{c}{2an}\right)^3 \end{aligned} \quad (8.2.19)$$

gelten, kann man den $T = 0$ -Beitrag sofort bestimmen und erhält

$$\begin{aligned} P_{\text{pr}}^{T=0} &= -\frac{\hbar}{8\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \left[\frac{c}{a^4 n} + \frac{4n}{ca^2} \left(\frac{c}{2an}\right)^2 + \frac{4n^2}{c^2 a} 2 \left(\frac{c}{2an}\right)^3 \right] \\ &= -\frac{\hbar}{8\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \frac{3c}{a^4} \\ &= -\frac{\hbar c \pi^2}{240 a^4}. \end{aligned} \quad (8.2.20)$$

Das ist genau der temperaturunabhängige Casimir-Term aus dem mit der Summenformel bestimmten Tieftemperaturlimes in Gl. (8.2.8), der den Beitrag der virtuellen Photonen zur Kraft zwischen den beiden Metallplatten beschreibt.

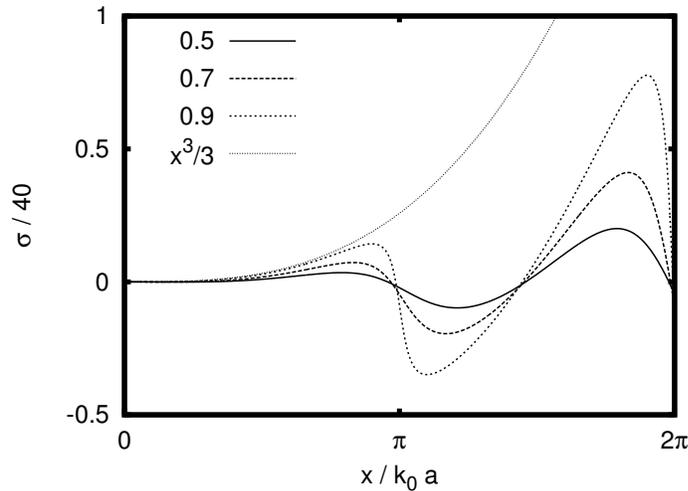


Abbildung 8.2: Plot der numerischen Ergebnisse für $\sigma(\omega)$ aus Gl. (8.2.13) für die reellen Reflexionskoeffizienten $|r_{\parallel}| = |r_{\perp}| = 0,5, 0,7$ bzw. $0,9$ und die Näherung aus Gl. (8.2.23) für $x = k_0a \ll 1$. Man sieht sehr gut, dass für $|r_{\parallel/\perp}| \rightarrow 1$, d.h. im Grenzfall eines idealen Metalls, die Amplituden der Oszillationen immer stärker und die Flanken bei den Vielfachen von π immer steiler werden, sodass man an diesen Stellen Unstetigkeiten erhält [137]. Außerdem sieht man sehr gut, wie die Funktionen in diesem Grenzfall für $x < \pi$ gegen die Näherung $\sigma \approx x^3/3$ aus Gl. (8.2.23) konvergieren.

Der Beitrag der thermischen Photonen zur Kraft kann dadurch bestimmt werden, dass man zunächst für die Bose-Einstein-Funktion nur den thermischen Anteil berücksichtigt, d.h. man verwendet nur

$$E(\omega, T) := E_0(\omega, T) - \frac{\hbar\omega}{2} = \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega\beta} - 1} \quad (8.2.21)$$

in Gl. (8.2.10). Somit tragen zum Frequenzintegral nur diejenigen Frequenzen bei, die kleiner als die thermische Frequenz ω_{th} sind, wobei diese durch $\omega_{\text{th}} \approx (\hbar\beta)^{-1}$ gegeben ist. Für die Frequenzen, die darüber liegen, wird der Integrand durch die Bose-Einstein-Funktion exponentiell gedämpft, sodass nur Beiträge mit $\omega \lesssim \omega_{\text{th}}$ berücksichtigt werden müssen. Für kleine Temperaturen mit $a \ll \hbar\beta c$ tragen daher im Wesentlichen die Frequenzen bei, für die $k_0a \ll 1$ erfüllt ist. Es genügt folglich, die Funktion $\sigma(\omega)$ nur für Frequenzen mit $k_0a \ll 1$ zu betrachten. Dazu betrachte

man die folgenden Relationen [137]:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2xn)}{n} &= \frac{\pi}{2} - x, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2xn)}{n^2} &= x^2 - \pi x + \frac{\pi^2}{6}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2xn)}{n^3} &= \frac{x}{3}(2x^2 - 3\pi x + \pi^2),\end{aligned}\tag{8.2.22}$$

die für $x = k_0 a \bmod(\pi)$ und damit insbesondere für $x \ll 1$ gelten. Man beachte, dass die Funktion $\sigma(\omega)$ — wie bereits mehrfach erwähnt — eine stark oszillierende Funktion ist, die mit positiven Werten für kleine Frequenzen startet und bei $x = \pi$ negativ wird (siehe Abb. 8.2). Es wechseln sich also positive und negative Beiträge ab, sodass es möglich ist, durch die Wahl einer bestimmten Temperatur einen Frequenz- und Abstandsbereich auszuwählen, in dem der thermische Beitrag zur Kraft attraktiv bzw. repulsiv wird. Mit anderen Worten: Der Beitrag der thermischen Photonen kann im Gegensatz zum Beitrag der virtuellen Photonen auch repulsiv sein, wenn es möglich ist, einen Frequenzbereich zu selektieren, in dem das Frequenzintegral in Gl. (8.2.10) für den thermischen Anteil negativ und der Kraftanteil damit repulsiv wird [137]. Allerdings ist der thermische Beitrag zur Casimir-Kraft im Vergleich zum $T = 0$ -Beitrag für Abstände kleiner als $1 \mu\text{m}$ vernachlässigbar, sodass die gesamte Kraft weiter attraktiv bleibt.

Setzt man nun die Beziehungen aus Gl. (8.2.22) in $\sigma(\omega)$ aus Gl. (8.2.13) ein, bekommt man

$$\sigma(\omega) \approx \frac{k_0^3}{3}\tag{8.2.23}$$

für $k_0 a \ll 1$, sodass man für den Beitrag der thermischen Photonen zur Kraft pro Fläche den Ausdruck

$$\begin{aligned}P_{\text{pr}}^T &= -\frac{\hbar}{c^3 \pi^2} \frac{1}{3} \int d\omega \frac{\omega^3}{e^{\hbar\omega\beta} - 1} \\ &= -\frac{\pi^2}{45 \hbar^3 c^3 \beta^4}\end{aligned}\tag{8.2.24}$$

erhält. Das ist genau der zweite Term des bereits abgeleiteten Tieftemperaturlimites in Gl. (8.2.8).

Man erhält insgesamt mithilfe der Integralformel dieselben Ausdrücke für den Hoch- und Tieftemperaturlimites wie mit der Summenformel, was die Äquivalenz beider Ausdrücke unterstreicht. Andererseits konnte man anhand der Auswertung der Formeln sehen, dass die Integralformel bereits für den Fall idealer Metalle viel schwieriger auszuwerten ist als die Summenformel, da die Funktion $\sigma(\omega)$ stark oszilliert. Wegen dieser Oszillationen ist allerdings klar, dass der thermische Beitrag der propagierenden Moden, der thermischen Photonen, zur Kraft zwischen zwei Halbräumen nicht zwangsläufig nur attraktiv sein muss, sondern auch repulsiv sein kann.

Zu guter Letzt sollen die numerischen Werte der Lifshitz-Formel für Drude-Materialien mit den abgeleiteten Limites für das ideale Metall verglichen werden. In

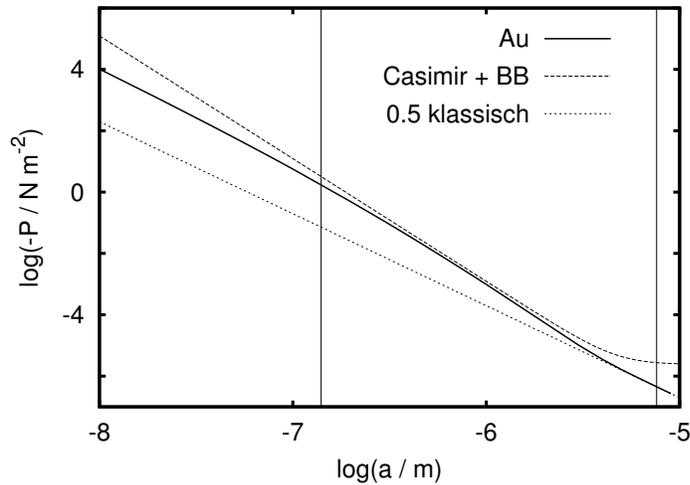


Abbildung 8.3: Die Kraft zwischen zwei Au-Halbräumen bei $T = 300$ K berechnet mit der Lifshitz-Formel in Gl. (8.1.39) für die ersten 5000 Summanden. Zusätzlich sind der Hoch- (klassisch) und Tieftemperaturimes (Casimir + BB) für ideale Metalle aus Gl. (8.2.3) bzw. Gl. (8.2.8) eingetragen.

Abb. 8.3 findet man daher einen Plot der numerischen Ergebnisse der Lifshitz-Formel in Gl. (8.1.39) für die Kraft zwischen zwei Gold-Halbräumen bei $T = 300$ K. Da der Hauptbeitrag zur Lifshitz-Formel von Frequenzen kleiner als $2k_0a \approx 1$ herrührt, müssen im Wesentlichen nur die Frequenzen berücksichtigt werden, die die sogenannte charakteristische Frequenz

$$\omega_c = \frac{c}{2a} \quad (8.2.25)$$

nicht überschreiten. Bei einem Abstand von $a = 10$ nm liegt diese Frequenz bei ca. $1,5 \cdot 10^{16} \text{ s}^{-1}$. Um eine entsprechende Matsubara-Frequenz ζ_n bei $T = 300$ K zu erreichen, muss n mindestens 60 sein, d.h. man muss bei Abständen von $a = 10$ nm mindestens die ersten 60 Terme in der Lifshitz-Formel berücksichtigen. Für die numerische Auswertung wurde $n_{\max} = 5000$ gewählt, sodass die numerischen Ergebnisse für den abgebildeten Abstandsbereich sehr genau sind. Zum Vergleich sind noch der Hoch- und Tieftemperaturimes für das ideale Metall in die Abbildung eingetragen. Außerdem sind durch die vertikalen Linien die Abstände

$$\lambda_p := \frac{2\pi c}{\omega_p} = 1,3 \cdot 10^{-7} \text{ m} \quad (8.2.26)$$

und

$$\lambda_{\text{th}} := \hbar\beta c = 7,2 \cdot 10^{-6} \text{ m} \quad (8.2.27)$$

gekennzeichnet.

Für Abstände $a \ll \lambda_p$ tragen Frequenzen zur Casimir-Kraft bei, die größer als die Plasmafrequenz des betrachteten Drude-Metalls sind. Für diese Frequenzen kann das Metall nicht mehr als ideal reflektierender Spiegel angesehen werden, sodass in diesem Abstandsbereich die Formeln für das ideale Metall nicht mehr gültig sind. Vielmehr ist das Drude-Metall für solche Frequenzen als transparent anzusehen, sodass

der Beitrag der propagierenden Moden in diesem Abstandsbereich vernachlässigt werden kann. Man kann in Abb. 8.3 gut sehen, dass die Kraft bereits für etwas größere Abstände von dem Ergebnis für das ideale Metall abweicht und von dem a^{-4} -Potenzverhalten in ein a^{-3} -Potenzverhalten übergeht, das durch die Wechselwirkung der Oberflächenplasmonen [138, 139] auf beiden Metalloberflächen hervorgerufen wird. Da die Oberflächenplasmonen, die ja evaneszente Felder erzeugen, im Modell des idealen Metalls unberücksichtigt bleiben, ist es nicht verwunderlich, dass dieser Beitrag zur Casimir-Kraft durch den Tieftemperaturlimes nicht richtig wiedergegeben werden kann. Für große Abstände mit $a \gg \lambda_{\text{th}}$ geht die Casimir-Kraft in den Hochtemperaturlimes aus Gl. (8.2.3) über. In dieser Abbildung ist allerdings nur der halbfache klassische Term eingetragen, da für reale Drude-Metalle die TE-Moden diesen klassischen Term nicht liefern. Dieser Sachverhalt führte in der jüngsten Literatur zu heftigen Diskussionen und wird im folgenden Kapitel genauer studiert.

8.3 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde die sogenannte Lifshitz-Formel für die Casimir- und van der Waals-Kräfte zwischen zwei dielektrischen Halbräumen im globalen thermodynamischen Gleichgewicht abgeleitet. Dazu wurde wiederum die Rytovsche fluktuierende Elektrodynamik angewendet, die auch in der ursprünglichen Arbeit von Lifshitz [114] benutzt wurde. Die hier abgeleiteten Ausdrücke erlauben eine Erweiterung der Theorie auf den Nicht-Gleichgewichtsfall, bei dem angenommen wird, dass beide Halbräume im lokalen thermodynamischen Gleichgewicht mit einer jeweils verschiedenen Temperatur sind. Dieser Fall wurde erstmals 1998 von Dorofeyev [133] betrachtet.

Da im folgenden Kapitel der Übergang vom realen zum idealen Metall genauer untersucht werden soll, wurden im zweiten Abschnitt die Grenzwerte für den Hoch- und Tieftemperaturlimes für den Fall zweier sich gegenüberliegender idealer Metallplatten betrachtet. Es wurde explizit gezeigt, dass die Integral- und Summenformel zu den gleichen Ergebnissen führen, wobei der Rechenaufwand bei Verwendung der Summenformel bzw. Lifshitz-Formel geringer ist. Für den Tieftemperaturlimes erhält man so den Ausdruck für die Casimir-Kraft, die temperaturunabhängig ist, und den entsprechenden Beitrag der thermischen Photonen bzw. Schwarzkörperstrahlung zwischen den Metallplatten, der selbst abstandsunabhängig ist. Für den Hochtemperaturlimes hingegen erhält man einen rein klassischen Beitrag, der zu gleichen Teilen von den TE- und TM-Moden herrührt und proportional zu $k_{\text{B}} T a^{-3}$ ist. Man beachte jedoch, dass diese Beiträge gänzlich von den propagierenden Moden stammen, da der Beitrag der evaneszenten Moden bei idealen Metallen verschwindet.

Außerdem wurden anhand einer numerischen Auswertung der Lifshitzformel für zwei Au-Halbräume im Drude-Modell gezeigt, dass die Ergebnisse für das reale Metall in dem Bereich $\lambda_p \ll a \ll \lambda_{\text{th}}$ gut mit der Casimir-Kraft für zwei ideale Metallplatten übereinstimmen. Die Abweichung zwischen dem idealen und dem Drude-Metall für $a \ll \lambda_p$ liegt darin begründet, dass für solche Abstände Frequenzen zur Lifshitz-Formel beitragen, die oberhalb der Plasmafrequenz des Drude-Materials liegen, sodass das Drude-Metall für solche Frequenzen als transparent angesehen wer-

den kann. Dementsprechend ist der Beitrag der propagierenden Moden in diesem Bereich vernachlässigbar, sodass die Anziehung der Platten nur durch die Wechselwirkung der Oberflächenplasmonen bestimmt ist. Für Abstände mit $a \gg \lambda_{\text{th}}$ zeigt sich nun, dass das Drude-Metall nur den halbfachen klassischen Beitrag aus Gleichung (8.2.3) liefert. Dieser Sachverhalt erscheint merkwürdig und hat in der jüngsten Literatur zu heftigen Diskussionen geführt. Er soll daher im nächsten Kapitel genauer untersucht werden.

Kapitel 9

Casimir-Effekt für reale und ideale Metalle

In diesem Kapitel wird der Übergang vom realen Drude-Metall zum idealen Metall mithilfe der Wick-Rotation genauer untersucht. Insbesondere wird gezeigt, dass dieser Übergang für die evaneszenten TE-Moden unstetig ist, was eine direkte Folge einer Verletzung der Kramers-Kronig-Relation ist. Demzufolge verlangt die Kramers-Kronig-Relation, dass die inverse Relaxationszeit stets einen beliebig kleinen Wert $\omega_\tau \neq 0$ haben muss, sodass das Plasmamodell und das ideale Metall daher aus physikalischen Gründen keine richtigen Ergebnisse für den Beitrag der evaneszenten TE-Moden zur thermischen Casimir-Kraft liefern können. Andererseits findet man anhand der Ableitungen keine Hinweise darauf, dass der Nernstsche Satz für eines dieser Modelle verletzt ist, sodass insbesondere das Drude-Modell dieses Theorem erfüllt.

Da es bereits Veröffentlichungen gibt, die sich eingehend mit der Freien Energie und der Entropie für die thermische Casimir-Kraft zwischen realen Metallen, d.h. für Metalle im Drude- und Plasmamodell, beschäftigen [131, 140, 141], wird hier nur kurz auf die Beiträge der propagierenden und evaneszenten Moden zur Entropie an geeigneter Stelle eingegangen. Somit ist die allgemeine Fragestellung dieses Kapitels: Wie tragen die TE- bzw. TM-polarisierten propagierenden und evaneszenten Moden zur Lifshitz-Formel bei, wenn man den Grenzfall $\omega_\tau \rightarrow 0$ und $\omega_p \rightarrow \infty$ durchführt? Von besonderem Interesse ist dabei der klassische $n = 0$ -Term in der Lifshitz-Formel.

Im ersten Abschnitt wird zunächst die thermodynamische Problematik für den thermischen Casimir-Effekt erläutert. In den darauf folgenden Abschnitten wird der Übergang vom Drude-Metall zum idealen Metall für die propagierenden Moden diskutiert, wobei die Wick-Rotation als Methode eingeführt wird. Da, um einen stetigen Übergang vom Drude-Metall zum idealen Metall zu erhalten, vor allem die Beiträge der evaneszenten Moden verschwinden müssen, werden gerade diese Moden in den darauf folgenden Abschnitten mithilfe der Wick-Rotation genauer untersucht. Besonderes Interesse gilt dabei dem klassischen Beitrag, anhand dessen die Unstetigkeit beim Übergang zum idealen Metall für die TE-Moden gezeigt wird. Für den TM-Moden-Beitrag, in dem sich der Anteil der Oberflächenplasmonen zur Casimir-Kraft widerspiegelt, wird hingegen explizit gezeigt, dass dieser im Grenzfall sehr guter Metalle stetig verschwindet.

9.1 Einführung in die Problematik

Der Ausgangspunkt für die eingangs angesprochene Diskussion in der Literatur ist die Lifshitz-Formel aus Gl. (8.1.39) für zwei Halbräume aus dem gleichen Material mit $r^{21} = r^{23} = r$, also

$$P^{\text{T}} = -\frac{1}{\pi\beta} \sum_{n=0}' \int_{\zeta_n/c}^{\infty} dp p^2 [(r_{\perp,n}^{-2} e^{2pa} - 1)^{-1} + \|\|], \quad (9.1.1)$$

wobei die Matsubara-Frequenzen durch $\zeta_n = 2\pi n/\hbar\beta$ mit der inversen Temperatur $\beta = (k_{\text{B}}T)^{-1}$ gegeben sind. Der Apostroph an der Summe zeigt wie zuvor an, dass der $n = 0$ -Term nur halbfach gezählt wird. Die Reflexionskoeffizienten für die TE- und TM-Moden sind entsprechend Gl. (8.1.40)

$$r_{\perp,n} = \frac{p - \sqrt{\frac{\zeta_n^2}{c^2}(\epsilon(i\zeta_n) - 1) + p^2}}{p + \sqrt{\frac{\zeta_n^2}{c^2}(\epsilon(i\zeta_n) - 1) + p^2}} \quad \text{und} \quad r_{\parallel,n} = \frac{p\epsilon(i\zeta_n) - \sqrt{\frac{\zeta_n^2}{c^2}(\epsilon(i\zeta_n) - 1) + p^2}}{p\epsilon(i\zeta_n) + \sqrt{\frac{\zeta_n^2}{c^2}(\epsilon(i\zeta_n) - 1) + p^2}}.$$

Diese Summendarstellung hat den Vorteil, dass sie relativ schnell konvergiert und damit numerisch leicht auszuwerten ist. Anhand dieser Darstellung kann man allerdings nicht mehr die Beiträge der evaneszenten und diejenigen der propagierenden Moden trennen.

Wie im vorherigen Kapitel gezeigt, erhält man den richtigen Grenzwert für das ideale Metall (IM), indem man $r_{\perp,n}^2 = r_{\parallel,n}^2 = 1$ für alle n setzt. Man bekommt dann

$$P_{\text{IM}}^{\text{T}} \approx -2 \frac{\zeta(3)}{8\pi\beta a^3} \quad (9.1.2)$$

für den Hochtemperaturlimes $a/c\hbar\beta \gg 1$ und

$$P_{\text{IM}}^{\text{T}} \approx -\frac{\hbar c \pi^2}{240a^4} - \frac{\pi^2}{45\hbar^3 c^3 \beta^4} \quad (9.1.3)$$

für den Tieftemperaturlimes $a/c\hbar\beta \ll 1$. Offenbar erhält man im Hochtemperaturlimes zweimal den klassischen Term $-\zeta(3)/8\pi\beta a^3$, d.h. einmal durch die TE- und einmal durch die TM-Moden. Im Tieftemperaturlimes erhält man dagegen den reinen Casimir-Term, der auch für $T = 0$ gilt, und den thermischen Beitrag, der proportional zu T^4 ist. Insbesondere gibt es daher keinen Widerspruch zum Nernst-schen Theorem für das ideale Metall: Schließlich ist die freie Energie \mathcal{F} pro Fläche mit der Relation $P = -(\partial\mathcal{F}/\partial a)_T$ aus Gl. (9.1.3) bestimmbar, wobei sich

$$\mathcal{F} = -\frac{\hbar c \pi^2}{720a^3} + \frac{\pi^2 a}{45\hbar^3 c^3 \beta^4} + f(T) \quad (9.1.4)$$

mit einer unbekanntem temperaturabhängigen Funktion $f(T)$ ergibt. Man beachte, dass $f(T)$ abstandsunabhängig ist.

Die Entropie pro Fläche, die mit der Beziehung $S = -(\partial\mathcal{F}/\partial T)_a$ aus der freien Energie bestimmt werden kann, ist daher durch

$$S = -\frac{4\pi^2 k_{\text{B}}^4 a}{45\hbar^3 c^3} T^3 - \frac{\partial f(T)}{\partial T} \quad (9.1.5)$$

gegeben. Damit verschwindet die Entropie pro Fläche, die allein durch den Beitrag der thermischen Photonen gegeben ist, für $T \rightarrow 0$, solange $\partial f(T)/\partial T$ in diesem Grenzfalle gegen Null strebt. In Ref. [101] wurde dieser Term für das ideale Metall zu

$$f(T) = -\frac{\zeta(3)k_B^3}{2\pi\hbar^2c^2}T^3 \quad \text{und somit} \quad -\frac{\partial f(T)}{\partial T} = \frac{3\zeta(3)k_B^3}{2\pi\hbar^2c^2}T^2 \quad (9.1.6)$$

bestimmt, sodass die Entropie in Gl. (9.1.5), die ja nur für den Tieftemperaturimes mit $a/\hbar c\beta \ll 1$ gilt, in diesem Fall die Form

$$S = \frac{3\zeta(3)k_B^3}{2\pi\hbar^2c^2}T^2 - \frac{4\pi^2k_B^3}{45\hbar^2c^2} \left(\frac{k_B T a}{\hbar c} \right) T^2 \quad (9.1.7)$$

annimmt. Sie ist somit positiv und erfüllt das Nernstsche Theorem.

Das Problem besteht nun darin, dass man ausgehend von einem realen Metall mit einer Permittivität

$$\epsilon^D = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\omega_\tau)} \quad (9.1.8)$$

im Drude-Modell mit der Plasmafrequenz ω_p und der Relaxationsfrequenz ω_τ für $n = 0$ die Reflexionskoeffizienten

$$r_{\perp,0}^D = 0 \quad \text{und} \quad r_{\parallel,0}^D = 1 \quad (9.1.9)$$

erhält. Es scheint also keinen stetigen Übergang vom Drude-Modell zum idealen Metall zu geben, indem man den formalen Limes $|\epsilon| \rightarrow \infty$ durch die beiden Limites $\omega_\tau \rightarrow 0$ und $\omega_p \rightarrow \infty$ ausführt, da die Beziehungen aus Gl. (9.1.9) für alle endlichen $\omega_\tau \neq 0$ erfüllt sind. Abgesehen von den Reflexionskoeffizienten bei $n = 0$ konvergieren alle anderen Reflexionskoeffizienten für $n \neq 0$ gegen Eins, wenn man die beiden Limites $\omega_\tau \rightarrow 0$ und $\omega_p \rightarrow \infty$ ausführt.

Durch diese Prozedur gelangt man daher zum sogenannten modifizierten idealen Metall (MIM), das sich vom idealen Metall nur durch das Fehlen des $n = 0$ -Terms für die TE-Moden unterscheidet. Daher erhielte man [119] ausgehend vom Drude-Modell für $|\epsilon| \rightarrow \infty$

$$P_{\text{MIM}}^T = P_{\text{IM}}^T - \left(-\frac{\zeta(3)}{8\pi\beta a^3} \right), \quad (9.1.10)$$

und damit im Hochtemperaturlimes $a/\hbar c\beta \gg 1$

$$P_{\text{MIM}}^T \approx -\frac{\zeta(3)}{8\pi\beta a^3} \quad (9.1.11)$$

und im Tieftemperaturlimes $a/\hbar c\beta \ll 1$

$$P_{\text{MIM}}^T \approx -\frac{\hbar c\pi^2}{240a^4} - \frac{\pi^2}{\beta^4 45\hbar^3 c^3} + \frac{\zeta(3)}{8\pi\beta a^3}. \quad (9.1.12)$$

Offensichtlich würde also im MIM-Modell der klassische Term auch im Tieftemperaturlimes auftreten, sodass insbesondere das Nernstsche Theorem in diesem Modell verletzt ist, da die freie Energie hier für kleine Temperaturen einen Term enthält, der

proportional zur Temperatur ist. Die durch die Integration von Gl. (9.1.12) gegebene Funktion $\tilde{f}(T)$ kann dabei unabhängig von ihrer konkreten Form diesen linearen Term in T nicht für alle Abstände a kompensieren, da diese Funktion $\tilde{f}(T)$ abstands-unabhängig ist. Daher konvergiert die Entropie für $T \rightarrow 0$ gegen einen konstanten Wert ungleich Null, d.h.

$$S_{\text{MIM}} \rightarrow -\frac{\zeta(3)k_{\text{B}}}{16\pi a^2} - \lim_{T \rightarrow 0} \frac{\partial \tilde{f}(T)}{\partial T}, \quad (9.1.13)$$

wohingegen die Entropie in Gl. (9.1.7) für das ideale Metall gegen Null strebt. Offensichtlich ist das MIM-Modell unphysikalisch, weil man einen klassischen Term im Tieftemperaturlimit erhält, der auf eine Verletzung des Nernstschen Theorems führt. Es wurde nunmehr gezeigt, dass das Nernstsche Theorem im Drude-Modell nicht verletzt ist [119, 142], sodass das MIM-Modell den Tieftemperaturlimit nicht richtig wiedergibt, solange $\omega_{\tau} \neq 0$ ist. Allerdings macht dieses Hilfsmodell deutlich, dass der $n = 0$ -Term eng mit einer möglichen Verletzung des Nernstschen Theorems zusammenhängt, da dieser einen in T linearen Beitrag zum Casimir-Druck P^{T} liefert.

Im Weiteren soll nun explizit der Übergang vom realen Drude-Metall zum idealen Metall untersucht werden. Dabei soll Wert darauf gelegt werden, dass die Beiträge der evaneszenten und propagierenden Moden für die TE- bzw. TM-Polarisierung einzeln untersucht werden und speziell der Beitrag der jeweiligen Moden zur Lifshitz-Formel bestimmt wird. Da im realen Metall propagierende und evaneszente Moden, im idealen Metall dagegen nur die propagierenden Moden zur Kraft zwischen den Platten beitragen, wird hier insbesondere das Zusammenspiel von evaneszenten und propagierenden Moden im Hochtemperaturlimit betrachtet. Neben dem un stetigen Übergang für $|\epsilon| \rightarrow \infty$ in den TE-Moden wird auch die Stetigkeit des Übergangs in den TM-Moden untersucht, und hier speziell das Verhalten des Beitrages der Oberflächenplasmonen für die Grenzfälle $\omega_{\tau} \rightarrow 0$ und $\omega_p \rightarrow \infty$, sowie deren Beitrag zur Entropie des Systems.

Da die Lifshitz-Formel selbst keine Auskunft über die propagierenden und evaneszenten Moden zulässt, startet die Untersuchung mit dem Integralausdruck für die Casimir-Kraft aus Gl. (8.1.38), also

$$P = -\frac{1}{\pi^2} \text{Re} \int d\omega \frac{E_0(\omega, T)}{\omega} k_0^3 \int_{C_1+C_2} dp p^2 [(r_{\perp}^{-2} e^{-2ipa k_0} - 1)^{-1} + \parallel]. \quad (9.1.14)$$

Die Fresnelschen Reflexionskoeffizienten nehmen in diesem Fall die Form

$$r_{\perp} = \frac{p - \sqrt{(\epsilon(\omega) - 1) + p^2}}{p + \sqrt{(\epsilon(\omega) - 1) + p^2}} \quad \text{und} \quad r_{\parallel} = \frac{p\epsilon(\omega) - \sqrt{(\epsilon(\omega) - 1) + p^2}}{p\epsilon(\omega) + \sqrt{(\epsilon(\omega) - 1) + p^2}} \quad (9.1.15)$$

an. Die Unterscheidung zwischen propagierenden und evaneszenten Moden in Gl. (9.1.14) wird durch die Wahl der Integrationswege C_1 bzw. C_2 (siehe Abb. 9.1) bestimmt, wobei die propagierenden Moden durch C_2 und die evaneszenten Moden durch C_1 gegeben sind.

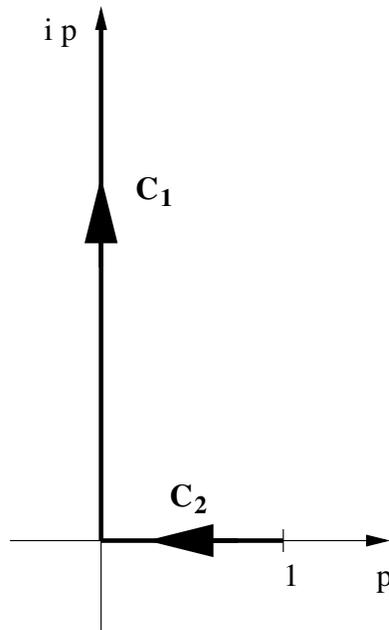


Abbildung 9.1: Skizze des Integrationsweges für die Integralformel aus Gl. (9.1.14).

9.2 Die propagierenden Moden und das ideale Metall

Wie bereits in dem vorherigen Kapitel gezeigt wurde, ist die Casimir-Kraft im idealen Metall allein durch die propagierenden Moden zwischen den Metallplatten gegeben, sodass man für die propagierenden Moden einen stetigen Übergang zum idealen Metall erwarten kann. Um die Methode der Wick-Rotation an einem bekannten Beispiel einzuführen, sollen die propagierenden Moden in diesem Abschnitt nochmals betrachtet werden, wobei besonderes Augenmerk auf den klassischen Beitrag gelegt wird.

9.2.1 Die Wick-Rotation

Um die Wick-Rotation an einem besonders einfachen Beispiel einzuführen, wird zunächst der Integral-Ausdruck aus Gl. (9.1.14) für den Beitrag der propagierenden Moden für gut leitende Metalle approximiert und dann die Wick-Rotation ausgeführt. Aufgrund der Energieerhaltung sind für die propagierenden Moden stets die Relationen $|r_{\parallel}| \leq 1$ und $|r_{\perp}| \leq 1$ erfüllt. Außerdem erhält man mit Gl. (9.1.15) im Drude-Modell (9.1.8) für $\omega_{\tau} \rightarrow 0$ und $\omega_p \rightarrow \infty$

$$|r_{\perp}|, |r_{\parallel}| \rightarrow 1. \quad (9.2.1)$$

Führt man zuerst den Limes $\omega_{\tau} \rightarrow 0$ aus, so bekommt man die Reflexionskoeffizienten für das Plasmamodell, d.h. die Reflexionskoeffizienten aus Gl. (9.1.15) mit

$$\epsilon^{\text{P}} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}. \quad (9.2.2)$$

Insbesondere gilt dann

$$|r_{\perp}^P|, |r_{\parallel}^P| \approx \begin{cases} 1, & \omega \ll \omega_p \\ 0, & \omega \gg \omega_p \end{cases}, \quad (9.2.3)$$

sodass man den Beitrag der propagierenden Moden annähernd angeben kann. Mit dem Integral aus Gl. (9.1.14) ergibt sich daher für die propagierenden Moden

$$\begin{aligned} P_{\text{pr}} &\approx \frac{2}{\pi^2} \text{Re} \int_0^{\omega_p} d\omega \frac{E_0(\omega, T)}{\omega} k_0^3 \int_0^1 dp \frac{p^2}{e^{-ip\kappa\omega} - 1} \\ &= \frac{2}{\pi^2 c^3} \text{Re} \int_0^{\omega_p} d\omega \frac{E_0(\omega, T)}{\omega} f(\omega) \end{aligned} \quad (9.2.4)$$

mit

$$\kappa := \frac{2a}{c} = \omega_c^{-1} \quad (9.2.5)$$

und

$$\begin{aligned} f(\omega) &:= \omega^3 \int_0^1 dp \frac{p^2}{e^{-ip\kappa\omega} - 1} \\ &= \frac{1}{\kappa^3} [i\kappa^2 \omega^2 \ln(1 - e^{i\kappa\omega}) + 2\kappa\omega \text{Li}_2(e^{i\kappa\omega}) + 2i \text{Li}_3(e^{i\kappa\omega}) - 2i\zeta(3)], \end{aligned} \quad (9.2.6)$$

wobei der Polylogarithmus $\text{Li}_n(x)$ durch die Gleichung (siehe Anhang D)

$$\text{Li}_n(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^n} \quad (9.2.7)$$

definiert ist. Für $\omega_p \rightarrow \infty$ erhält man — wie man in Gl. (9.2.4) leicht sieht — den Ausdruck für das ideale Metall aus Gl. (8.2.10), da man im Prinzip für alle Frequenzen $|r_{\perp}| = |r_{\parallel}| = 1$ gesetzt hat. Insofern sollte es möglich sein, aus diesem Ausdruck für $\omega_p \rightarrow \infty$ die bereits abgeleiteten Grenzfälle für das ideale Metall zurückzugewinnen.

Dazu wird nun zunächst der Fall $T = 0$ betrachtet, sodass man statt Gl. (9.2.4) den Ausdruck

$$P_{\text{pr}}^{T=0} = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \text{Re} \int_0^{\omega_p} d\omega f(\omega) \quad (9.2.8)$$

erhält. Da $f(\omega)$ im ersten Quadranten der komplexen Frequenzebene Q_{ω} analytisch ist, bekommt man durch eine Wick-Rotation im Frequenzraum, d.h. der Integrationsweg C_1 in Abb. 9.2 wird durch die Integrationswege $-(C_2 + C_3)$ ersetzt, sofort die Beziehung

$$P_{\text{pr}}^{T=0} = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \text{Re} \left[i \int_0^{\omega_p} d\zeta f(i\zeta) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi i\omega_p e^{i\varphi} f(\omega_p e^{i\varphi}) \right]. \quad (9.2.9)$$

Man erhält daher einen Ausdruck, der sowohl das Integral über die komplexen Frequenzen $i\zeta$ als auch über den Bogen C_2 enthält.

Der Beitrag des Bogens C_2 kann für große ω_p leicht ausgewertet werden, da $f(\omega)$ aus Gl. (9.2.6) in Q_{ω} durch

$$f(\omega_p e^{i\varphi}) \rightarrow -\frac{2i\zeta(3)}{\kappa^3} \quad (9.2.10)$$

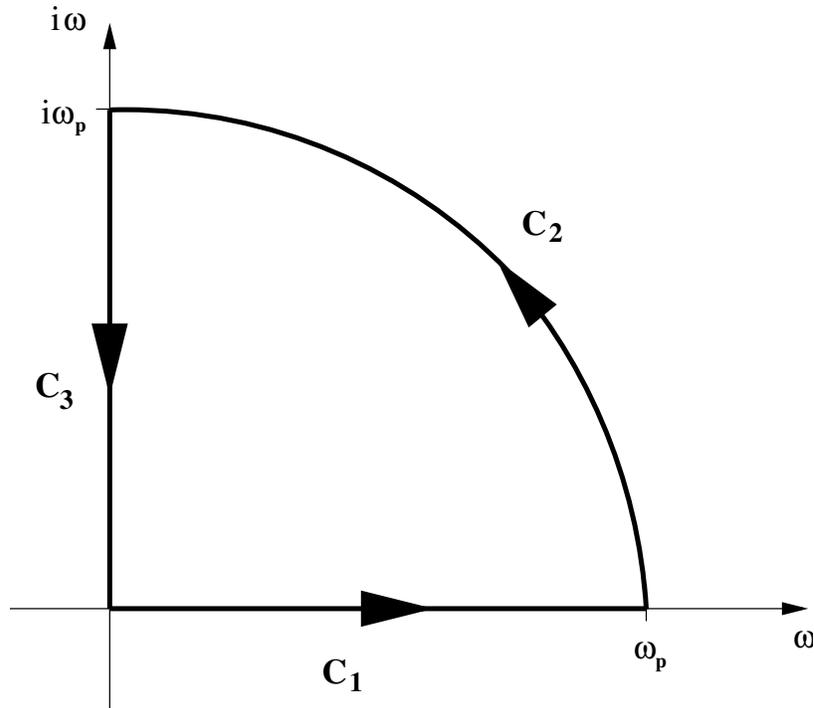


Abbildung 9.2: Skizze des Integrationsweges für die Wick-Rotation

approximiert werden kann. Daher erhält man für den Bogen

$$\frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \operatorname{Re} \left[- \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi i\omega_p e^{i\varphi} f\left(\omega_p e^{i\varphi}\right) \right] = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \left[- \frac{2\zeta(3)\omega_p}{\kappa^3} \right]. \quad (9.2.11)$$

Für beliebig große ω_p liefert der Bogen daher einen divergenten Beitrag.

Betrachtet man nun das Integral über die imaginäre Achse C_1 in Gl. (9.2.9), so kann man diesen Beitrag mithilfe der Funktion $f(\omega)$ aus Gl. (9.2.6) umschreiben, sodass man

$$\frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \operatorname{Re} \left[\int_0^{\omega_p} d\zeta \int_0^\zeta dp \frac{p^2}{e^{p\kappa} - 1} \right] = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \operatorname{Re} \left[\frac{2\omega_p \zeta(3)}{\kappa^3} - \int_0^{\omega_p} d\zeta \zeta^3 \int_1^\infty dp \frac{p^2}{e^{p\kappa} - 1} \right] \quad (9.2.12)$$

erhält. Der erste Term ist wieder divergent für beliebig große Plasmafrequenzen ω_p und stimmt bis auf das Vorzeichen genau mit dem Beitrag des Bogens überein. Der zweite Term hingegen ist endlich und liefert einen rein reellen Beitrag. Fasst man daher die Beiträge für C_2 und C_3 zusammen, ergibt sich für $\omega_p \rightarrow \infty$

$$P_{\text{pr}}^{\Gamma=0} = - \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty d\zeta \zeta^3 \int_1^\infty dp \frac{p^2}{e^{p\kappa} - 1}. \quad (9.2.13)$$

Führt man zuerst die Frequenzintegration und darauf die Integration über p aus, bekommt man somit

$$P_{\text{pr}}^{\Gamma=0} = - \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \int_1^\infty dp p^2 \frac{\Gamma(4)\zeta(4)}{\kappa^4 p^4} = - \frac{\hbar \pi^2}{15 c^3 \kappa^4}. \quad (9.2.14)$$

Setzt man zu guter Letzt noch $\kappa = \omega_c^{-1} = 2ac^{-1}$ ein, erhält man schließlich den richtigen Ausdruck für die Casimir-Kraft für $T = 0$, d.h. man bekommt

$$P_{\text{pr}}^{T=0} = -\frac{\hbar c \pi^2}{240a^4}. \quad (9.2.15)$$

Die gleiche Prozedur kann man auch für den entsprechenden Hochtemperaturlimes ausführen, der hier durch $\hbar\omega_p\beta \ll 1$ gegeben ist. Ist daher die Temperatur so hoch bzw. die Plasmafrequenz so klein, dass $\hbar\omega_p\beta \ll 1$ erfüllt ist, so kann man das Integral in Gl. (9.2.4) durch

$$P_{\text{pr}}^{\text{cl}} \approx \frac{2}{\pi^2 c^3 \beta} \text{Re} \int_0^{\omega_p} d\omega \frac{f(\omega)}{\omega} \quad (9.2.16)$$

approximieren. Da $f(\omega)/\omega$ in Q_ω und insbesondere für $\omega = 0$ analytisch ist, kann man die Integration über die reellen Frequenzen wieder mittels einer Wick-Rotation in eine Integration über komplexe Frequenzen umschreiben, wobei der Beitrag des Bogens C_2 mit zu berücksichtigen ist. Man bekommt

$$P_{\text{pr}}^{\text{cl}} = \frac{2}{\pi^2 c^3 \beta} \text{Re} \left[\int_0^{\omega_p} d\zeta \frac{f(i\zeta)}{\zeta} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi i f\left(\omega_p e^{i\varphi}\right) \right]. \quad (9.2.17)$$

Für den zweiten Term kann man wieder große Plasmafrequenzen geltend machen, sodass man die Funktion $f(\omega)$ wieder durch Gl. (9.2.10) annähern kann. Der erste Term in diesem Ausdruck für den Hochtemperaturlimes enthält ein Integral über $f(i\zeta)$, das rein imaginäre Werte liefert, da $f(i\zeta)$ rein imaginär ist. Daher verschwindet der Realteil dieses Ausdrucks und man bekommt im Hochtemperaturlimes

$$P_{\text{pr}}^{\text{cl}} = -2 \frac{\zeta(3)}{c^3 \pi \beta \kappa^3} = -2 \frac{\zeta(3)}{8\pi \beta a^3}, \quad (9.2.18)$$

erwartungsgemäß den rein klassischen Term für das ideale Metall. Man beachte, dass dieser klassische Beitrag in dem betrachteten Modell nur von dem Bogen C_2 getragen wird.

9.2.2 Der klassische Beitrag

In der vorangegangenen Rechnung wurden die Reflexionskoeffizienten zuerst durch ihre Werte für $|\epsilon| \rightarrow \infty$ approximiert und darauffolgend eine Wick-Rotation durchgeführt. Anhand der gegebenen Rechnung wurden die Grenzfälle für das ideale Metall für $T = 0$ und $\hbar\omega_p\beta \ll 1$ implementiert und gezeigt, dass der klassische Beitrag allein durch den Bogen C_2 getragen wird. In diesem Abschnitt soll der klassische Beitrag mithilfe der Methode der Wick-Rotation bei Verwendung der vollständigen Reflexionskoeffizienten für das Plasma- und Drude-Modell untersucht werden.

Wie in der vorangegangenen Rechnung genügt es wieder, nur den klassischen Beitrag des Integrals aus Gl. (9.1.14) für die propagierenden Moden zu betrachten, d.h. es gilt für alle wesentlichen Frequenzen ω in dem Metall $k_B T \gg \hbar\omega$. Diese

wesentlichen Frequenzen sind durch $\omega \leq \omega_p$ gegeben, sodass man die Bedingung $1 \gg \hbar\omega_p\beta$ für die Temperatur erhält. In diesem Bereich ist der klassische Ausdruck

$$P_{\parallel/\perp,\text{pr}}^{\text{cl}} = \frac{1}{8\pi^2 a^3 \beta} \text{Re} \int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega} \int_0^{2k_0 a} dx \frac{x^2}{r_{\parallel/\perp}^{-2} e^{-ix} - 1} \quad (9.2.19)$$

mit $x = 2pk_0 a$ gültig, wobei man für die Reflexionskoeffizienten der TM-Moden

$$r_{\parallel} = \frac{x\epsilon - \sqrt{x^2 + 4k_0^2 a^2 (\epsilon - 1)}}{x\epsilon + \sqrt{x^2 + 4k_0^2 a^2 (\epsilon - 1)}} \quad (9.2.20)$$

sowie für die TE-Moden

$$r_{\perp} = \frac{x - \sqrt{x^2 + 4k_0^2 a^2 (\epsilon - 1)}}{x + \sqrt{x^2 + 4k_0^2 a^2 (\epsilon - 1)}} \quad (9.2.21)$$

erhält. Führt man nun wieder eine Wick-Rotation durch, bekommt man

$$P_{\parallel/\perp,\text{pr}}^{\text{cl}} = \frac{1}{8\pi^2 a^3 \beta} \text{Re} \left[\int_0^\infty \frac{d\zeta}{\zeta} \int_0^{\kappa\zeta} dx \frac{x^2 (-i)}{r_{\parallel/\perp}^{-2} (i\zeta) e^x - 1} - \lim_{r \rightarrow \infty} i \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\kappa r e^{i\varphi}} dx \frac{x^2}{r_{\parallel/\perp}^{-2} (r e^{i\varphi}) e^{-ix} - 1} \right]. \quad (9.2.22)$$

Diese Verschiebung des Integrationsweges ist unproblematisch, da r_{\parallel} und r_{\perp} in Q_ω analytisch sind [114]. Dabei muss beachtet werden, dass das Integral über die komplexen Frequenzen wieder rein imaginär ist, da $r(i\zeta)$ rein reell ist. Der Beitrag der Polstellen bei $\omega = 0$ bzw. $\zeta = 0$ verschwindet, da das x -Integral an dieser Stelle Null ergibt, unabhängig davon, ob die Reflexionskoeffizienten im Plasma- oder Drude-Modell gegeben sind. Deshalb wird der gesamte klassische Beitrag durch den Bogen C_2 mit dem Radius r und nicht etwa durch den Pol bei $\omega = 0$ getragen, d.h. es gilt

$$P_{\parallel/\perp,\text{pr}}^{\text{cl}} = -\frac{1}{8\pi^2 a^3 \beta} \text{Re} \lim_{r \rightarrow \infty} i \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\kappa r e^{i\varphi}} dx \frac{x^2}{r_{\parallel/\perp}^{-2} (r e^{i\varphi}) e^{-ix} - 1}. \quad (9.2.23)$$

Man beachte, dass der x -Integrand für x aus Q_x im Wesentlichen durch die Werte mit $|x| \approx 1$ gegeben ist und für $|x| \gg 1$ exponentiell gedämpft ist. Es gelten nun für $r \rightarrow \infty$ die Beziehungen

$$r_{\perp}(r e^{i\varphi}), r_{\parallel}(r e^{i\varphi}) \rightarrow \frac{x - \sqrt{x^2 - R^2}}{x + \sqrt{x^2 - R^2}} = \begin{cases} -1, & R \gg 1 \\ 0, & R \ll 1 \end{cases}, \quad (9.2.24)$$

sowohl für das Drude- als auch für das Plasmamodell, wobei $R := \omega_p \kappa = \omega_p \omega_c^{-1}$ gilt. Beide Modelle liefern daher den gleichen klassischen Beitrag, und zwar

$$P_{\parallel/\perp,\text{pr}}^{\text{cl}} = -\frac{1}{8\pi^2 a^3 \beta} \text{Re} \lim_{r \rightarrow \infty} i \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 dy y^2 \frac{(\kappa r e^{i\varphi})^3}{e^{-iy\kappa r e^{i\varphi}} - 1} \cdot \begin{cases} 1, & R \gg 1 \\ 0, & R \ll 1 \end{cases}, \quad (9.2.25)$$

wobei die Integrationsvariable $x = y\kappa r \exp(i\varphi)$ eingeführt wurde. Das y -Integral kann nun wieder durch die Funktion $f(y)$ aus Gl. (9.2.6) ausgedrückt und für $r \rightarrow \infty$ durch

$$f(re^{i\varphi}) \rightarrow -\frac{2i\zeta(3)}{\kappa^3} \quad (9.2.26)$$

approximiert werden, sodass

$$P_{\parallel/\perp, \text{pr}}^{\text{cl}} = -\frac{\zeta(3)}{8\pi a^3 \beta} \begin{cases} 1, & R \gg 1 \\ 0, & R \ll 1 \end{cases} \quad (9.2.27)$$

gilt. Für $R = \omega_p \kappa \gg 1$ und $\hbar\omega_p \beta \ll 1$ — was dem Hochtemperaturlimes $a \gg \hbar\beta c$ entspricht — trägt der klassische Beitrag zur Casimir-Kraft bei und zwar unabhängig davon, ob man das Drude- oder Plasmamodell verwendet. Da dieser Beitrag nur für hohe Temperaturen mit $\hbar\omega_p \beta \ll 1$ gilt, kann er auch nicht den problematischen Term liefern, der zu einer Verletzung des Nernstschen Satzes führen würde. Vielmehr müsste man im Tieftemperaturlimes einen in T linearen Beitrag zur Casimir-Kraft finden, um solch eine Verletzung konstatieren zu können.

9.3 Die evaneszenten Moden und das ideale Metall

Um einen stetigen Übergang vom realen zum idealen Metall durch Ausführen der Limes $\omega_\tau \rightarrow 0$ und $\omega_p \rightarrow \infty$ zu erhalten, müssen entsprechend der vorhergehenden Diskussion die Beiträge der evaneszenten Moden in diesem Limes verschwinden, und zwar stetig. Denn nur dann wird der Druck zwischen den beiden Platten durch die propagierenden Moden allein bestimmt, die selbst die richtigen Ausdrücke für das ideale Metall liefern.

9.3.1 Evaneszente Moden und Oberflächenplasmonen

Man kann schnell sehen, dass der Beitrag der evaneszenten TE-Moden für das Plasmamodell mit $\omega_\tau = 0$ verschwindet, denn in diesem Fall bekommt man mit Gl. (9.1.14) und Gl. (9.1.15)

$$\begin{aligned} P_{\perp, \text{ev}}^{\text{P}} &= -\frac{1}{\pi^2} \text{Im} \int d\omega \frac{E_0(\omega, T)}{\omega} k_0^3 \int_0^\infty dp \frac{p^2}{r_\perp^{-2} e^{2pk_0 a} - 1} \\ &= -\frac{1}{8\pi^2 d^3} \text{Im} \int d\omega \frac{E_0(\omega, T)}{\omega} \int_0^\infty dx \frac{x^2}{e^{x \left(\frac{x+\sqrt{R^2+x^2}}{x-\sqrt{R^2+x^2}} \right)^2} - 1} \\ &= 0, \end{aligned} \quad (9.3.1)$$

wobei die Integrationsvariable $x = 2pak_0$ eingeführt wurde. Der Beitrag der evaneszenten TE-Moden zur Casimir-Kraft verschwindet, da der Integrand rein reell ist und der Nenner für kein x Null ergeben kann, d.h. es gibt keine Polstellen. Physikalisch wird dieser Sachverhalt dadurch sichergestellt, dass $r_\perp \in \mathbb{R}$ und vor allem $|r_\perp| \leq 1$

auch im evaneszenten Bereich gilt. Somit verschwindet der Beitrag der evaneszenten TE-Moden im Plasmamodell, wobei allerdings der Übergang $\omega_\tau \rightarrow 0$ unstetig ist [132], was anhand des klassischen Terms im folgenden Abschnitt diskutiert wird.

Für die evaneszenten TM-Moden ist der Übergang $\omega_\tau \rightarrow 0$ dagegen stetig, allerdings verschwindet der Beitrag der TM-Moden im Plasmamodell mit $\omega_\tau = 0$ nicht. Das liegt daran, dass dieser Term den Oberflächenplasmonen-Beitrag enthält, der auch für $\omega_\tau = 0$ vorhanden ist. Im Nahfeld mit $k_0 a \ll 1$ kann man nun den Reflexionskoeffizienten für die TM-Moden durch

$$r_{\parallel} \approx \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1} \quad (9.3.2)$$

approximieren, sodass man im Drude Modell

$$r_{\parallel}^{\text{D}} \approx \frac{1}{-\frac{2\omega^2}{\omega_p^2} - 2i\frac{\omega\tau\omega}{\omega_p^2} + 1} \quad (9.3.3)$$

erhält. Damit ergibt sich unter der Annahme $\omega_\tau \ll \omega_p$ mit Gl. (9.1.14)

$$\begin{aligned} P_{\parallel, \text{ev}} &\approx -\frac{1}{a^3 \pi^2} \text{Im} \int d\omega \frac{E_0(\omega, T)}{\omega} \int_0^\infty dx \frac{x^2}{e^{2x} \left(1 - \frac{2\omega^2}{\omega_p^2} - 2i\frac{\omega\tau\omega}{\omega_p^2}\right)^2 - 1} \\ &\approx -\frac{1}{a^3 \pi^2} \text{Im} \int d\omega \frac{E_0(\omega, T)}{\omega} \int_0^\infty dx x^2 \left[\frac{1}{e^{2x} \left(1 - \frac{2\omega^2}{\omega_p^2}\right)^2 - 1} \right. \\ &\quad \left. - \frac{4i\omega\omega_\tau}{\omega_p^2} \frac{e^{2x} \left(1 - \frac{2\omega^2}{\omega_p^2}\right)}{e^{2x} \left(1 - \frac{2\omega^2}{\omega_p^2}\right)^2 - 1} \right]. \end{aligned} \quad (9.3.4)$$

Für $\omega_\tau \rightarrow 0$ geht dieser Ausdruck stetig gegen

$$P_{\parallel, \text{ev}} \rightarrow -\frac{1}{a^3 \pi^2} \text{Im} \int d\omega \frac{E_0(\omega, T)}{\omega} \int_0^\infty dx \frac{x^2}{e^{2x} \left(1 - \frac{2\omega^2}{\omega_p^2}\right)^2 - 1}. \quad (9.3.5)$$

Der Integrand hat offensichtlich Polstellen bei

$$\omega^\pm = \frac{\omega_p}{\sqrt{2}} \sqrt{1 \pm e^{-x}}, \quad (9.3.6)$$

d.h. für die hoch- und niedrigfrequenten Oberflächenplasmonen [61], die bereits in Kapitel 4.2 diskutiert wurden. Daher verschwindet der TM-Moden-Beitrag der evaneszenten Moden nicht, obwohl der Reflexionskoeffizient rein reell ist. Bestimmt man erst den $T = 0$ -Beitrag der evaneszenten TM-Moden, so erhält man mit dem Residuensatz

$$\begin{aligned} P_{\parallel, \text{ev}}^{T=0} &= -\frac{\hbar}{2\pi a^3} \frac{\omega_p}{\sqrt{2}} \int_0^\infty dx x^2 \pi \left[\frac{e^{-x/2}}{4\sqrt{e^x - 1}} - \frac{e^{-x/2}}{4\sqrt{e^x + 1}} \right] \\ &= -\frac{\hbar}{4\pi a^3} \frac{\omega_p}{\sqrt{2}} \left[\int_0^1 dy \ln^2(1 - y^2) - \int_1^{\sqrt{2}} dy \ln^2(y^2 - 1) \right] \\ &= -0,138803 \frac{\hbar}{4\pi a^3} \frac{\omega_p}{\sqrt{2}}, \end{aligned} \quad (9.3.7)$$

wobei im zweiten Schritt die Integrationsvariable $y = \sqrt{1 + \exp(-x)}$ bzw. $y = \sqrt{1 - \exp(-x)}$ eingeführt wurde. Das ist der bekannte Beitrag für die Oberflächenplasmonen [143]. Der Temperaturbeitrag kann ebenfalls mithilfe des Residuensatzes ausgewertet werden und man erhält

$$\begin{aligned} P_{\parallel, \text{ev}}^{T \neq 0} &= -\frac{\hbar}{\pi^2 a^3} \frac{\omega_p}{\sqrt{2}} \int_0^\infty dx x^2 \pi \left[\frac{e^{-x/2}}{4\sqrt{e^x - 1}} \frac{1}{e^{\hbar\omega^+ \beta} - 1} - \frac{e^{-x/2}}{4\sqrt{e^x + 1}} \frac{1}{e^{\hbar\omega^- \beta} - 1} \right] \\ &= -\frac{\hbar}{2\pi a^3} \frac{\omega_p}{\sqrt{2}} \left[\int_0^1 dy \frac{\ln^2(1 - y^2)}{e^{by} - 1} - \int_1^{\sqrt{2}} dy \frac{\ln^2(y^2 - 1)}{e^{by} - 1} \right], \end{aligned} \quad (9.3.8)$$

wobei

$$b := \hbar\omega_p\beta/\sqrt{2} \quad (9.3.9)$$

eingeführt wurde. Man beachte, dass $b \gg 1$ tiefen Temperaturen und $b \ll 1$ hohen Temperaturen entspricht. Für $\omega_p \rightarrow \infty$ divergiert der $T = 0$ -Beitrag der Oberflächenplasmonen formal, allerdings ist er auch nur für Abstände mit $\omega_p a/c \ll 1$ gültig. Der temperaturabhängige Beitrag ergibt im Grenzfall idealer Metalle mit $\omega_p \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} P_{\parallel, \text{ev}}^{T \neq 0} &\rightarrow -\frac{\hbar}{2\pi a^3} \frac{\omega_p}{\sqrt{2}} \int_0^1 dy y^4 e^{-by} = -\frac{\hbar}{2\pi a^3} \frac{\omega_p}{\sqrt{2}} \frac{24}{b^5} \\ &\rightarrow 0. \end{aligned} \quad (9.3.10)$$

Es trägt also im Wesentlichen nur der niedrigfrequente Oberflächenplasmonenzweig bei, der thermisch angeregt werden kann, wobei dessen Beitrag für den Grenzfall guter Metalle proportional zu T^5 ist. Das bedeutet, dass die zugehörige Entropie proportional zu T^4 ist, sodass insbesondere das Nernstsche Theorem erfüllt ist. Allerdings verschwindet dieser Beitrag für $\omega_p \rightarrow \infty$ ($b \gg 1$).

Den klassischen Beitrag der Oberflächenplasmonen erhält man dagegen für hohe Temperaturen bzw. für $b \ll 1$, wobei dann

$$\begin{aligned} P_{\parallel, \text{ev}}^{\text{cl}} &\approx -\frac{\hbar}{2\pi a^3} \frac{\omega_p}{\sqrt{2}} \left[\int_0^1 dy \frac{\ln^2(1 - y^2)}{by} - \int_1^{\sqrt{2}} dy \frac{\ln^2(y^2 - 1)}{by} \right] \\ &= -\frac{\hbar}{2\pi a^3} \frac{\omega_p}{\sqrt{2}} \frac{1}{b} \left[\zeta(3) - \frac{3}{4}\zeta(3) \right] \\ &= -\frac{\zeta(3)}{8\pi a^3 \beta} \end{aligned} \quad (9.3.11)$$

gilt. Der klassische Beitrag setzt sich also aus den Beiträgen beider Oberflächenmoden zusammen und ergibt einen Wert, der mit dem klassischen Beitrag der propagierenden Moden übereinstimmt, wobei dieser ebenfalls nur einen wesentlichen Wert liefert, falls $\hbar\omega_p\beta \ll 1$ gilt. Dieser Beitrag ist zwar linear in T , aber offensichtlich nur für sehr hohe Temperaturen relevant, sodass man an diesem Beitrag keine Verletzung des Nernstschen Satzes festmachen kann.

Man kann nun wieder eine Wick-Rotation ausführen, um eine Summenformulie-

zung des Oberflächenplasmonenbeitrages zu bekommen. Dazu betrachte man

$$\begin{aligned}
P_{\text{ev},\parallel} &= -\frac{1}{a^3\pi^2}\text{Im} \int d\omega \frac{E_0(\omega, T)}{\omega} \int_0^\infty dx \frac{x^2}{e^{2x}\left(1 - \frac{2\omega^2}{\omega_p^2}\right)^2 - 1} \\
&= -\frac{\hbar}{a^3\pi^2} \frac{\omega_p}{\sqrt{2}} \text{Im} \int dy \frac{E_0(by, T)}{by} \frac{1}{4} \text{Li}_3\left(\frac{1}{(y^2 - 1)^2}\right) \\
&= -\frac{\hbar}{a^3\pi^2} \frac{\omega_p}{\sqrt{2}} \left[\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4b} \text{Li}_3\left(\frac{1}{(y_n^2 + 1)^2}\right) \right. \\
&\quad + \frac{1}{4} \text{Im} i \int_0^\infty dy \frac{E_0(iby, T)}{iby} \text{Li}_3\left(\frac{1}{(y^2 + 1)^2}\right) \\
&\quad \left. - \lim_{r \rightarrow \infty} \text{Im} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi i r e^{i\varphi} \frac{E_0(re^{i\varphi}, T)}{re^{i\varphi}} \frac{1}{4} \text{Li}_3\left(\frac{1}{(r^2 e^{2i\varphi} - 1)^2}\right) \right], \tag{9.3.12}
\end{aligned}$$

wobei $y_n = \frac{2\pi n}{b}$ und die Integraldarstellung des Trilogarithmus aus Gl. (D.7) im Anhang D verwendet wurden. Der Beitrag des Bogens verschwindet, da $\text{Li}_3(z) \rightarrow 0$ für $z \rightarrow 0$ gilt. Das Hauptwertintegral verschwindet ebenfalls, da $\text{Li}_3(z)$ für reelle $z \leq 1$ rein reell, und $E(iby, T)$ ebenfalls reell ist. Das kann man gut anhand der Relation

$$E(z, T) = \frac{z\hbar}{2} \coth\left(\frac{z\hbar\beta}{2}\right) \tag{9.3.13}$$

erkennen, denn für rein imaginäre z liefert $\coth(z)$ rein imaginäre Werte genau wie der Vorfaktor, sodass das Produkt aus beiden und damit auch $E(z, T)$ reell ist. Daher hat man im Grenzfall sehr guter Metalle einen Oberflächenplasmonenbeitrag von

$$P_{\text{ev},\parallel} \rightarrow -\frac{1}{4\pi a^3 \beta} \sum_{n=0}^{\infty} \text{Li}_3\left(\frac{1}{(y_n^2 + 1)^2}\right) \tag{9.3.14}$$

mit $y_n = \frac{2\pi n}{b}$.

Der $n = 0$ -Term enthält den klassischen Term aus Gl. (9.3.11), der hier offensichtlich nur für $y_n \gg 1$, d.h. für hohe Temperaturen mit $b = \hbar\omega_p\beta/\sqrt{2} \ll 1$, die Summe dominiert. Für tiefe Temperaturen bzw. $b \gg 1$ kann man die Summe durch ein Integral ersetzen, sodass man

$$P_{\text{ev},\parallel} \rightarrow -\frac{1}{4\pi a^3 \beta} \frac{b}{2\pi} \int_0^\infty dy_n \text{Li}_3\left(\frac{1}{(y_n^2 + 1)^2}\right) = -0,138803 \frac{\hbar}{4\pi a^3} \frac{\omega_p}{\sqrt{2}} \tag{9.3.15}$$

bekommt. Das ist genau der in Gl. (9.3.7) abgeleitete Beitrag der Oberflächenplasmonen für $T = 0$, der zwar für $\omega_p \rightarrow \infty$ beliebig groß wird, aber auch nur für Abstände $\omega_p a/c \ll 1$ gültig ist. Man beachte, dass die Summenformel in Gl. (9.3.14) gemäß der Näherung für den Reflexionskoeffizienten in Gl. (9.3.2) selbst auch nur für Abstände $\omega_p a/c \ll 1$ Gültigkeit besitzt.

Zusammenfassend erhält man nach Durchführung des Limes $\omega_\tau \rightarrow 0$, der für die evaneszenten TE-Moden — wie im nächsten Abschnitt gezeigt wird — unstetig ist, und $\omega_p \rightarrow \infty$ für die propagierenden Moden die Casimir-Kraft zwischen zwei ideal reflektierenden Spiegeln in (8.2.2) plus den Beitrag der Oberflächenplasmonen aus

Gl. (9.3.14). Dieser Beitrag der evaneszenten Moden liefert allerdings im Grenzfall einer unendlich großen Plasmafrequenz für keinen Abstand $a > 0$ einen von Null verschiedenen Wert. Außerdem findet man hier keine Verletzung des Nernst-Theorems im Grenzfall sehr guter Metalle im Plasmamodell mit $\omega_\tau = 0$, was mit der Aussage in [140] übereinstimmt, wobei in dieser Referenz die Beiträge der evaneszenten und propagierenden Moden nicht einzeln berücksichtigt werden. Für $\omega_\tau \neq 0$ dagegen wurde bereits in [119] gezeigt, dass das Nernst-Theorem nicht verletzt ist, solange $\omega_\tau \neq 0$ auch für $T = 0$ erfüllt ist. Die Unstetigkeit beim Übergang $\omega_\tau \rightarrow 0$ soll nun anhand des klassischen Beitrages der evaneszenten Moden diskutiert werden.

9.3.2 Der klassische Beitrag der TE-Moden

Es soll nun zunächst der klassische Beitrag der evaneszenten TE-Moden näher untersucht werden, wobei gezeigt wird, dass der Übergang $\omega_\tau \rightarrow 0$ unstetig ist. Diese Unstetigkeit wurde kürzlich bereits von Svetovoy und Esquivel [132] betrachtet und soll hier mithilfe der Wick-Rotation untersucht werden, die eine viel einfachere Möglichkeit zum Studium dieser Unstetigkeit bietet als die von Svetovoy und Esquivel verwendete Methode. Zugleich ist diese Methode allgemeiner und kann ebenso auf die TM-Moden angewendet werden. Man betrachte also

$$P_{\perp, \text{ev}}^{\text{cl}} = -\frac{1}{8\pi^2 a^3 \beta} \text{Im} \int \frac{d\omega}{\omega} \int dx \frac{x^2}{r_{\perp}^{-2} e^x - 1}, \quad (9.3.16)$$

dabei ist der Reflexionskoeffizient durch

$$r_{\perp} = \frac{x - \sqrt{x^2 - 4k_0^2 a^2 (\epsilon - 1)}}{x + \sqrt{x^2 - 4k_0^2 a^2 (\epsilon - 1)}} \quad (9.3.17)$$

gegeben. Eine Wick-Rotation führt nun auf

$$P_{\perp, \text{ev}}^{\text{cl}} = -\frac{1}{8\pi^2 a^3 \beta} \left[\frac{\pi}{2} \int dx \frac{x^2}{r_{\perp, \omega=0}^{-2} e^x - 1} - \lim_{r \rightarrow \infty} \text{Im} i \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int dx \frac{x^2}{r_{\perp}^{-2}(r e^{i\varphi}) e^x - 1} \right]. \quad (9.3.18)$$

Nun ist wieder im Drude- und Plasmamodell im Grenzfall $r \rightarrow \infty$

$$r_{\perp}(r e^{i\varphi})^2 \rightarrow \begin{cases} 1, & R \gg 1 \\ 0, & R \ll 1 \end{cases}. \quad (9.3.19)$$

Damit ergibt sich für den Beitrag des Bogens

$$\begin{aligned} & - \lim_{r \rightarrow \infty} \text{Im} i \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int dx \frac{x^2}{r_{\perp}^{-2}(r e^{i\varphi}) e^x - 1} \\ & = -\zeta(3)\pi \begin{cases} 1, & R \gg 1 \\ 0, & R \ll 1 \end{cases}. \end{aligned} \quad (9.3.20)$$

Im Drude-Modell gilt nun $r_{\perp, \omega=0} = 0$ solange $\omega_{\tau} \neq 0$ ist, sodass für alle $\omega_{\tau} \neq 0$ der Pol bei $\omega = 0$ nichts beiträgt und somit im Drude-Modell nur der Beitrag des Bogens zu berücksichtigen ist. Es gilt also

$$P_{\perp, \text{ev}}^{\text{cl,D}} = \frac{\zeta(3)}{8\pi a^3 \beta} \begin{cases} 1, & R \gg 1 \\ 0, & R \ll 1 \end{cases}. \quad (9.3.21)$$

Daher heben sich die $n = 0$ -Beiträge der propagierenden und der evaneszenten TE-Moden aus Gl. (9.2.27) und Gl. (9.3.21) stets exakt auf, sodass im Drude-Modell der $n = 0$ -Term in der Lifshitz-Formel immer verschwindet.

Im Plasmamodell mit $\omega_{\tau} = 0$ hat man nun für den Reflexionskoeffizienten an der Stelle $\omega = 0$ die Beziehung

$$r_{\perp, \omega=0} = \frac{x - \sqrt{x^2 + R^2}}{x + \sqrt{x^2 + R^2}} = \begin{cases} -1, & R \gg 1 \\ 0, & R \ll 1 \end{cases}, \quad (9.3.22)$$

sodass der Pol in diesem Fall einen Beitrag liefert und zwar derart, dass

$$P_{\perp, \text{ev}}^{\text{cl,P}} = 0 \quad (9.3.23)$$

für alle R ist. Der Pol sorgt im Plasmamodell also dafür, dass der Beitrag der evaneszenten TE-Moden verschwindet, der ja — wie oben gezeigt wurde — im Plasmamodell immer verschwinden muss, im klassischen Bereich verschwindet. Da der Beitrag des Pols nur für $\omega_{\tau} = 0$ vorhanden ist, gibt es keinen stetigen Übergang für $\omega_{\tau} \rightarrow 0$. Da nun also der Beitrag der evaneszenten Moden für $\omega_{\tau} = 0$ verschwindet, liefert nur der $n = 0$ -Term der propagierenden Moden einen klassischen Beitrag. Daher muss auch der $n = 0$ -Term in der Lifshitz-Formel mit dem Anteil der propagierenden Moden in Gl. (9.2.27) übereinstimmen und tut dies auch. Der unstetige Übergang ist also allein ein unstetiger Übergang in den evaneszenten TE-Moden, die für $\omega_{\tau} \neq 0$ stets vorhanden sind, aber für $\omega_{\tau} = 0$ abrupt verschwinden.

Die Unstetigkeit bzgl. $\omega_{\tau} \rightarrow 0$ kann man sehr gut anhand der Energiedichte der evaneszenten TE-Moden oberhalb eines Halbraumes studieren. Dazu betrachte man die bekannte Näherung für die Energiedichte [12] aus Gl. (1.7.15) und (1.7.18), d.h.

$$\langle u_{\perp} \rangle \approx \frac{1}{16\pi^2 c^2 z} \int_0^{\infty} d\omega E(\omega, T) \omega \text{Im}(\epsilon_r) \quad (9.3.24)$$

für die evaneszenten TE-Moden in der Entfernung z oberhalb eines Halbraumes, der durch ein Dielektrikum mit der Permittivität ϵ_r gefüllt ist. Offensichtlicherweise verschwindet die Energiedichte für $\omega_{\tau} = 0$, da im Drude-Modell

$$\text{Im}(\epsilon_r) = \frac{\omega_p^2}{\omega} \frac{\omega_{\tau}}{\omega^2 + \omega_{\tau}^2} \quad (9.3.25)$$

ist. Andererseits gilt

$$\begin{aligned} \lim_{\omega_{\tau} \rightarrow 0} \omega \text{Im}(\epsilon_r) &= \omega_p^2 \lim_{\omega_{\tau} \rightarrow 0} \frac{\omega_{\tau}}{\omega^2 + \omega_{\tau}^2} \\ &= \omega_p^2 \pi \delta(\omega). \end{aligned} \quad (9.3.26)$$

Da nun die Deltafunktion am Rand des Frequenzintegrals ausgewertet wird, hat man nur den halben Beitrag zu berücksichtigen, und es ergibt sich daher

$$\begin{aligned} \lim_{\omega_\tau \rightarrow 0} \langle u_\perp \rangle &\approx \frac{1}{16\pi^2 c^2 z} \int_0^\infty d\omega E(\omega, T) \pi \omega_p^2 \delta(\omega) \\ &= \frac{1}{16\pi c^2 z} \frac{\omega_p^2}{2\beta} \neq 0. \end{aligned} \quad (9.3.27)$$

Die Unstetigkeit kommt also daher, dass der Limes in Gl. (9.3.26) auf einen von Null verschiedenen Beitrag der evaneszenten TE-Moden zur Energiedichte führt, wobei für $\omega_\tau = 0$ dieser Beitrag verschwindet. Dass nun der Limes $\omega_\tau \rightarrow 0$ betrachtet werden muss, anstatt einfach die inverse Relaxationszeit Null zu setzen, ist eine direkte Folge der Kramers-Kronig-Relation. Denn die Kramers-Kronig-Relation verlangt [21], dass

$$\begin{aligned} \text{Re}(\epsilon_r) &= 1 + \frac{2}{\pi} \lim_{\omega_\tau \rightarrow 0} \int_0^\infty d\Omega \frac{\Omega \text{Im}(\epsilon_r)}{\Omega^2 - \omega^2} \\ &= 1 + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty d\Omega \frac{\pi \omega_p^2 \delta(\Omega)}{\Omega^2 - \omega^2} \\ &= 1 - \frac{2}{\pi} \frac{\pi \omega_p^2}{2 \omega^2} \\ &= 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \end{aligned} \quad (9.3.28)$$

gilt. Es ist daher notwendig den Limes $\omega_\tau \rightarrow 0$ zu betrachten, um den richtigen Ausdruck für das Plasmamodell zu erhalten. Das einfache Nullsetzen von ω_τ dagegen würde auf $\text{Im}(\epsilon_r)$ und daher $\text{Re}(\epsilon_r) = 1$ führen. Somit ist klar, warum der Limes $\omega_\tau \rightarrow 0$ und andererseits $\omega_\tau = 0$ zu verschiedenen Ergebnissen führen. Ausserdem ist klar, dass das Plasmamodell nicht zu richtigen Werten führen kann, wenn man einfach $\omega_\tau = 0$ setzt, sondern stets der Grenzfall $\omega_\tau \rightarrow 0$ betrachtet werden muss, damit die Kramers-Kronig-Relationen erfüllt sind. Mit anderen Worten: Das Nullsetzen der Relaxationsfrequenz kann im Allgemeinen nicht als physikalisch sinnvoll betrachtet werden, wenn man das Plasmamodell betrachten möchte. Insofern kann auch der un stetige Übergang vom Drude- zum Plasmamodell in den evaneszenten TE-Moden als eine direkte Folge der Verletzung der Kramers-Kronig-Relation im Plasmamodell mit $\text{Im}(\epsilon_r) = 0$ und $\text{Re}(\epsilon_r) = 1 - \omega_p^2/\omega^2$ betrachtet werden.

9.3.3 Der klassische Beitrag der TM-Moden

Für den TM-Moden-Anteil kann man den klassischen Beitrag mit der gleichen Methode bestimmen wie bei den evaneszenten TE-Moden, d.h. man startet mit

$$P_{\parallel, \text{ev}}^{\text{cl}} = \frac{1}{8\pi^2 a^3 \beta} \text{Im} \int \frac{d\omega}{\omega} \int dx x^2 (r_\parallel^{-2} e^x - 1)^{-1}, \quad (9.3.29)$$

wobei

$$r_\parallel = \frac{x\epsilon - \sqrt{x^2 - 4k_0^2 a^2 (\epsilon - 1)}}{x\epsilon + \sqrt{x^2 - 4k_0^2 a^2 (\epsilon - 1)}} \quad (9.3.30)$$

ist. Die Wick-Rotation ergibt diesmal

$$P_{\parallel, \text{ev}}^{\text{cl}} = -\frac{1}{8\pi^2 a^3 \beta} \left[\frac{\pi}{2} \int dx \frac{x^2}{r_{\parallel, \omega=0}^{-2} e^x - 1} - \lim_{r \rightarrow \infty} \text{Im} i \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int dx \frac{x^2}{r_{\parallel}^{-2} (r e^{i\varphi}) e^x - 1} \right]. \quad (9.3.31)$$

Da nun im Drude- und Plasmamodell für $r \rightarrow \infty$

$$r_{\parallel}(r e^{i\varphi}) \rightarrow \frac{x - \sqrt{x^2 + R^2}}{x + \sqrt{x^2 + R^2}} = \begin{cases} -1, & R \gg 1 \\ 0, & R \ll 1 \end{cases} \quad (9.3.32)$$

gilt, ergibt der Bogen den gleichen Beitrag wie für die evaneszenten TE-Moden. Der Pol hingegen ergibt

$$\frac{\zeta(3)}{8\pi a^3 \beta}, \quad (9.3.33)$$

da $r_{\parallel, \omega=0} = 1$ im Drude- und Plasmamodell ist, d.h. den klassischen Beitrag der Oberflächenplasmonen aus Gl. (9.3.11).

Zusammen hat man also für das Drude- und Plasmamodell

$$P_{\parallel, \text{ev}}^{\text{cl}} = -\frac{1}{8\pi a^3 \beta} \left[\zeta(3) - \zeta(3) \begin{cases} 1, & R \gg 1 \\ 0, & R \ll 1 \end{cases} \right] \\ = -\frac{\zeta(3)}{8\pi a^3 \beta} \begin{cases} 1, & R \ll 1 \\ 0, & R \gg 1 \end{cases}. \quad (9.3.34)$$

D.h. für $R = \omega_p a / (2c) \gg 1$ verschwindet der klassische Beitrag der beiden Oberflächenplasmonen, der allerdings für $R \ll 1$ allein den klassischen Term liefert. Der entsprechende Term für die propagierenden TM-Moden in Gl. (9.2.27) verhält sich genau umgekehrt, sodass man insgesamt mit Gl. (9.2.27) und Gl. (9.3.34) für alle R stets

$$P_{\parallel}^{\text{cl}} = P_{\parallel, \text{ev}}^{\text{cl}} + P_{\parallel, \text{pr}}^{\text{cl}} = -\frac{\zeta(3)}{8\pi a^3 \beta} \quad (9.3.35)$$

hat. Daher liefert der $n = 0$ -Term in der Lifshitz-Formel für die TM-Moden auch stets diesen klassischen Wert, wobei man anhand der Lifshitz-Formel nicht erkennen kann, dass sich dieser Beitrag durch das Zusammenspiel von propagierenden und evaneszenten Moden ergibt. Für Metalle mit einer Plasmafrequenz $\omega_p = 10^{16}$ Hz ist der Abstand, der erreicht werden muss, damit die evaneszenten Moden dominieren, tatsächlich $2c\omega_p^{-1} \approx 6 \cdot 10^{-8}$ m. Da dieser Abstand relativ klein ist, kann man sagen, dass der klassische Term für die TM-Moden im experimentell zugänglichen Bereich, der selbst im Regime von 100 nm bis 6 μ m liegt, durch ein Zusammenspiel von propagierenden und evaneszenten Moden gegeben ist. Insbesondere gilt im Limes $\omega_p \rightarrow \infty$ für alle Abstände stets $R \gg 1$, sodass im Falle eines idealen Metalls der klassische Beitrag allein durch die propagierenden Moden getragen wird.

Übrigens gibt es ähnlich wie bei den evaneszenten TE-Moden auch einen unsteitigen Übergang für die TM-Moden, allerdings für den Grenzübergang zum transparenten Medium, d.h. für $\omega_p \rightarrow 0$. Wie man an Gl. (9.2.27) und (9.3.34) sieht,

verschwindet in diesem Grenzfall der Beitrag der propagierenden Moden, wohingegen der klassische Term der evaneszenten Moden praktisch bei allen Abständen a und Temperaturen T dominiert, so dass stets $\hbar\omega_p\beta \ll 1$ und $\omega_p a/c \ll 1$ erfüllt sind. Aber erst für $\omega_p = 0$ verschwindet dieser klassische Beitrag der evaneszenten TM-Moden. Physikalisch gesehen ist klar, dass in diesem Fall keine Verletzung der Kramers-Kronig-Beziehung vorliegt, da der Grenzwert für $\omega_p \rightarrow 0$ durch $\text{Im}(\epsilon) \rightarrow 0$ und $\text{Re}(\epsilon) \rightarrow 1$ gegeben ist, den man auch durch das Nullsetzen der Plasmafrequenz erhält. Diese Unstetigkeit liegt nun daran, dass für $\omega_p \rightarrow 0$ die Oberflächenplasmone resonanzen hin zu kleinen Frequenzen verschoben, und dadurch thermisch für Temperaturen mit $\hbar\omega_p\beta \approx 1$ angeregt werden können. Für beliebig kleine Plasmafrequenzen $\omega_p \rightarrow 0$ können die Oberflächenmoden in gewisser Weise für jede Temperatur $T \neq 0$ thermisch angeregt werden. Sobald allerdings $\omega_p = 0$ ist, ist das Medium transparent und die Oberflächenmoden verschwinden, und damit auch ihr Beitrag. Somit sind die Unstetigkeiten in den evaneszenten TE- bzw. TM-Moden verschiedener Natur, wobei nach der gegebenen Ableitung klar ist, dass es von einem realen Metall ausgehend, das durch das Drude-Modell beschrieben wird, für die Casimir-Kraft weder einen stetigen Übergang zum idealen Metall noch zum transparenten Medium geben kann.

9.4 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde der Grenzübergang zum idealen Metall mittels der Implementierung der Limites $\omega_\tau \rightarrow 0$ und $\omega_p \rightarrow \infty$ für die propagierenden und evaneszenten Moden getrennt untersucht. Um eine Beziehung zur Lifshitz-Formel herzustellen, wurden an geeigneter Stelle Wick-Rotationen ausgeführt und dadurch die entsprechenden Beiträge der evaneszenten und propagierenden Moden in der Summendarstellung abgeleitet. Besonderes Augenmerk wurde dabei auf den klassischen Beitrag gerichtet, da man anhand dieses Beitrages direkt den unstetigen Übergang untersuchen kann.

Es wurde gezeigt, dass sich die propagierenden Moden beim Übergang zum idealen Metall unproblematisch und stetig verhalten, und gegen das bekannte Ergebnis der Casimir-Kraft eines Photonengases zwischen zwei ideal leitenden Spiegeln konvergieren. Um insgesamt einen stetigen Übergang vom Drude-Modell zum idealen Metall zu erhalten, müssten demnach die Beiträge der evaneszenten Moden für $\omega_\tau \rightarrow 0$ und $\omega_p \rightarrow \infty$ stetig verschwinden.

Weiterhin wurde gezeigt, dass sich die Beiträge der evaneszenten TE-Moden beim Grenzübergang $\omega_\tau \rightarrow 0$ unstetig verhalten, d.h. sie konvergieren für $\omega_\tau \neq 0$ gegen den klassischen Term $\zeta(3)/8\pi a^3$ und verschwinden für $\omega_\tau = 0$ abrupt. Anhand der Energiedichte oberhalb eines dielektrischen Halbraumes wurde verdeutlicht, dass diese Unstetigkeit eine direkte Folge einer Verletzung der Kramers-Kronig-Relation ist. Demzufolge muss man stets den Grenzfall $\omega_\tau \rightarrow 0$ betrachten, anstatt $\omega_\tau = 0$ zu setzen, um für die evaneszenten TE-Moden einen physikalisch sinnvollen Ausdruck zu erhalten, wie bereits in [132] gefordert wurde. Folglich muss der $n = 0$ -Term in der Lifshitz-Formel für die evaneszenten Moden im Drude- bzw. im richtig implementierten Plasmamodell (mit $\omega_\tau \rightarrow 0$) stets verschwinden. Daher hat man, um das

Plasmapmodell richtig anzuwenden, stets das Drude-Modell mit einer beliebig kleinen, aber endlichen inversen Relaxationszeit ω_τ zu betrachten, wobei das Nernst-Theorem in diesem Fall nicht verletzt ist [119, 142].

Zu guter Letzt wurden ebenfalls die evaneszenten TM-Moden genauer untersucht, wobei gezeigt wurde, dass der Grenzübergang $\omega_\tau \rightarrow 0$ stetig zum richtigen Ausdruck für das Plasmapmodell führt, der letztendlich nur noch die Beiträge der Oberflächenplasmonen enthält. Dieser Beitrag ist thermodynamisch gesehen für $T \rightarrow 0$ unproblematisch. Zusätzlich wurde anhand des klassischen $n = 0$ -Terms gezeigt, dass es auch für die TM-Moden einen unstetigen Übergang geben kann. Diese Unstetigkeit erhält man für den Übergang zum transparenten Medium durch den Limes $\omega_p \rightarrow 0$. Es ist klar, dass dieser unstetige Übergang durch die Anwesenheit der Oberflächenmoden bedingt ist, die für sehr kleine ω_p praktisch für jede Temperatur $T \neq 0$ thermisch anregbar sind und somit den klassischen Term liefern, der für $\omega_p = 0$ abrupt verschwindet, weil in diesem Fall die Oberflächenplasmonen ebenfalls abrupt verschwinden.

Man kann daher folgendes Fazit ziehen: Aus theoretischer Sicht lässt sich anhand des Nernstschen Satzes nicht entscheiden, ob das Plasma- oder Drude-Modell oder gar der Leontovich-Ansatz richtig ist, da in allen Modellen der Nernstsche Satz respektiert wird. Andererseits verbietet die Kramers-Kronig-Relation die Verwendung des Plasmapmodells. Außerdem gibt es theoretisch gesehen gute Gründe (siehe Kapitel 6), anstatt des Leontovich-Ansatzes einen vollkommen nichtlokalen Ansatz bzw. das Drude-Modell zu wählen. Neuere Messungen [127] lassen jedoch darauf schließen, dass das Drude-Modell die experimentellen Daten nicht ausreichend beschreiben kann, wohingegen der theoretisch unbefriedigende Leontovich-Ansatz die Messdaten sehr gut zu beschreiben scheint. Insofern bleibt aus theoretischer und experimenteller Sicht noch viel zu tun, um zu einem insgesamt konsistenten Bild zu gelangen.

Teil V
Anhang

Anhang A

Materialeigenschaften

In diesem Anhang werden die in meiner Dissertation verwendeten Permittivitäten für das Drude-Modell und polare Medien eingeführt. Dementsprechend findet man hier auch die Materialparameter aus [37, 38, 144, 145], die in den numerischen Berechnungen der Dissertation verwendet wurden. Eine genauere Ableitung der Permittivitäten findet man beispielsweise in [58, 95].

A.1 Drude-Metalle

Die optischen Eigenschaften von Metallen werden durch das sogenannte Drude-Modell relativ gut beschrieben. In der einfachsten Variante dieses Modells werden die Elektronen als klassische Teilchen mit der Masse m_e und der Ladung e beschrieben, die zunächst in Ruhe sind und durch ein äußeres elektrisches Feld beschleunigt werden. Um Dissipationsprozesse durch die Streuung der Elektronen an Phononen bzw. Störstellen innerhalb dieses klassischen Ansatzes beschreiben zu können, wird zusätzlich eine phänomenologische Reibungskonstante $1/\tau$ eingeführt, wobei die Relaxationszeit τ die mittlere Flugdauer des Elektrons bis zur Streuung angibt. Setzt man daher ein zeitlich veränderliches äußeres elektrisches Feld

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} \quad (\text{A.1.1})$$

voraus, kann man die Bewegungsgleichung innerhalb dieses klassischen Ansatzes durch

$$\dot{\mathbf{v}} + \frac{1}{\tau} \mathbf{v} = \frac{e}{m_e} \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} \quad (\text{A.1.2})$$

angeben. Dabei ist \mathbf{v} die Geschwindigkeit des Elektrons. Für die spezielle Lösung ergibt sich somit

$$\mathbf{v} = \frac{e}{m_e} \frac{1}{(-i\omega + \frac{1}{\tau})} \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} = \frac{e\tau}{m_e} \frac{1}{1 - i\omega\tau} \mathbf{E}. \quad (\text{A.1.3})$$

Für Zeitskalen $t \gg \tau$ kann man die homogene Lösung $\mathbf{v}_h = \mathbf{v}_0 \exp(-t/\tau)$ vernachlässigen, da diese exponentiell gedämpft wird, sodass man für die Stromdichte die Relation

$$\mathbf{j} = n_e e \mathbf{v} = \frac{n_e e^2 \tau}{m_e} \frac{1}{1 - i\omega\tau} \mathbf{E} \quad (\text{A.1.4})$$

erhält, wobei n_e die Elektronendichte angibt. Damit ist die frequenzabhängige Leitfähigkeit durch

$$\sigma(\omega) = \frac{n_e e^2 \tau}{m_e} \frac{1}{1 - i\omega\tau} = \frac{\sigma_0}{1 - i\omega\tau} \quad (\text{A.1.5})$$

gegeben, wobei die statische Drude-Leitfähigkeit durch

$$\sigma_0 := \frac{n_e e^2 \tau}{m_e} \quad (\text{A.1.6})$$

definiert ist. Führt man nun noch die Plasmafrequenz

$$\omega_p^2 = \frac{n_e e^2}{m_e \epsilon_0} \quad (\text{A.1.7})$$

ein, kann man die statische Drude-Leitfähigkeit auch durch

$$\sigma_0 = \epsilon_0 \omega_p^2 \tau \quad (\text{A.1.8})$$

angeben.

Mithilfe der frequenzabhängigen Leitfähigkeit lässt sich schließlich die Permittivität des Metalls angeben und man bekommt

$$\begin{aligned} \epsilon(\omega) &= \epsilon_0 \left(1 - \frac{\sigma}{i\omega\epsilon_0} \right) \\ &= \epsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2 \tau}{\omega(\omega\tau + i)} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.1.9})$$

Die optischen Eigenschaften der Metalle, die hauptsächlich durch die Metallelektronen bestimmt sind, können daher in dem einfachen Drude-Modell durch die Plasmafrequenz ω_p und die Relaxationszeit τ beschrieben werden. Einige typische Werte, die aus [38, 144] entnommen sind, findet man in Tab. A.1. Im Übrigen erhält man innerhalb einer semiklassischen Beschreibung mithilfe der Boltzmann-Gleichung (in Relaxationszeitnäherung) die gleiche Permittivität wie im Drude-Modell. Für gute Drude-Metalle mit $\omega_p \tau \gg 1$ kann man noch drei Frequenzbereiche unterscheiden:

1. Der erste Bereich ist der Niederfrequenzbereich mit $\omega\tau \ll 1$, in dem die Permittivität näherungsweise durch

$$\epsilon(\omega) \approx \epsilon_0 \left(1 - \omega_p^2 \tau^2 + i \frac{\omega_p^2 \tau}{\omega} \right) \quad (\text{A.1.10})$$

angegeben werden kann. Der Realteil der Permittivität ist in diesem Bereich also negativ und der Imaginärteil ist sehr viel größer als der Realteil, wobei $|\epsilon| \gg 1$ gilt, sodass der Reflexionskoeffizient $R = |r|^2$ nahe bei 1 liegt. In diesem Frequenzbereich, der auch als Hagen-Rubens-Bereich bezeichnet wird, ist das Metall daher stark reflektierend.

2. Im sogenannten Relaxationsbereich mit $1 \ll \omega\tau \ll \omega_p \tau$ bekommt man die Näherung

$$\epsilon(\omega) \approx \epsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} + i \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{1}{\omega\tau} \right) \quad (\text{A.1.11})$$

für die Permittivität. In diesem Bereich ist der Realteil der Permittivität wieder negativ, aber diesmal größer als der Imaginärteil.

3. Im Transparenzbereich mit $\omega \gg \omega_p$ wird der Imaginärteil vernachlässigbar klein und man bekommt für die Permittivität den Ausdruck des sogenannten Plasma-Modells

$$\epsilon(\omega) \approx \epsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right). \quad (\text{A.1.12})$$

In diesem Hochfrequenzbereich wird das Metall transparent, d.h. der Reflexionskoeffizient verschwindet.

	ω_p / s^{-1}	τ / s	$k_F / 10^{10} \text{m}^{-1}$	$v_F / 10^6 \text{ms}^{-1}$	l / nm	d_s / nm
Bi	$2,1 \cdot 10^{16}$	$2,3 \cdot 10^{-16}$	1,61	1,87	0,43	125
Au	$1,4 \cdot 10^{16}$	$3 \cdot 10^{-14}$	1,21	1,4	42	22
Al	$2,4 \cdot 10^{16}$	$8 \cdot 10^{-15}$	1,75	2	16	17
Ag	$1,36 \cdot 10^{16}$	$4 \cdot 10^{-14}$	1,2	1,39	56	23
Pt	$8 \cdot 10^{15}$	$1 \cdot 10^{-14}$				47

Tabelle A.1: Parameter für einige Drude-Metalle bei $T = 273 \text{K}$ aus [38], wobei ω_p die Plasmafrequenz, τ die Relaxationszeit, k_F die Wellenzahl an der Fermikante, v_F die Fermigeschwindigkeit, l die mittlere freie Weglänge des Elektrons und d_s die Skintiefe bei $\omega = 1,1 \cdot 10^{14} \text{s}^{-1}$ ist. Die Parameter für Platin sind der Referenz [145] entnommen. In dieser Arbeit wurden die in der Tabelle eingetragenen Werte benutzt.

A.2 Reststrahlenformel

Mit einem ähnlich einfachen klassischen Modell, wie es bei der Beschreibung der Permittivität eines Drude-Metalles verwendet wurde, kann man auch die optischen Eigenschaften eines polaren Mediums beschreiben, die im Wesentlichen durch die Phononen hervorgerufen werden. Setzt man einen Ionen-Kristall mit zwei Ionen pro Elementarzelle voraus, so erzeugt die Auslenkung der beiden Ionen in einer Elementarzelle um den Abstand \mathbf{u} durch ein äußeres elektrisches Feld \mathbf{E} mit periodischer Zeitabhängigkeit eine Polarisierung. Dabei kann die Auslenkung durch die Gleichung

$$\ddot{\mathbf{u}} = -\gamma \dot{\mathbf{u}} - \omega_t^2 \mathbf{u} + e^* \mathbf{E} \quad (\text{A.2.1})$$

beschrieben werden, wobei e^* die effektive Ionenladung, γ eine phänomenologische Dämpfungskonstante und ω_t die Frequenz der transversalen optischen Phononen ist. Neben dieser Polarisierung durch die Auslenkung der Ionenpaare in einer Elementarzelle kann es durch Verschiebung der Elektronen in den inneren Schalen auch zu einer Verschiebungspolarisierung kommen. Die Polarisierung \mathbf{P} setzt sich also aus zwei Bestandteilen zusammen und kann durch

$$\mathbf{P} = \alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{E} \quad (\text{A.2.2})$$

angegeben werden. Dabei sind die beiden Parameter α und β noch nicht weiter bestimmt. Setzt man nun ebene Wellen als Lösungen für \mathbf{E} , \mathbf{u} und \mathbf{P} an, so bekommt man für die Auslenkung der Ionen

$$\mathbf{u} = \frac{e^*}{\omega_t^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} \mathbf{E}, \quad (\text{A.2.3})$$

woraus sich dann für die Polarisierung

$$\mathbf{P} = \left(\alpha \frac{e^*}{\omega_t^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} + \beta \right) \mathbf{E} \quad (\text{A.2.4})$$

ergibt. Da allgemein die Polarisierung und das elektrische Feld über die Permittivität durch die Gleichung

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 [\epsilon(\omega) - 1] \mathbf{E} \quad (\text{A.2.5})$$

verknüpft sind, bekommt man für die Permittivität schließlich

$$\epsilon(\omega) = 1 + \epsilon_0 \left(\beta + \alpha \frac{e^*}{\omega_t^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} \right). \quad (\text{A.2.6})$$

Nun können die beiden Parameter α und β durch die statische Permittivität $\epsilon_{\text{stat}} := \epsilon(\omega = 0)$ und die Hochfrequenzpermittivität $\epsilon_\infty := \epsilon(\omega \rightarrow \infty)$ ersetzt werden, sodass man für die Permittivität in einem polarem Medium

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_\infty \left(1 + \frac{\omega_t^2 \left(\frac{\epsilon_{\text{stat}}}{\epsilon_\infty} - 1 \right)}{\omega_t^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} \right) \quad (\text{A.2.7})$$

erhält. Benutzt man noch die sogenannte Lyddane-Sachs-Teller-Relation

$$\omega_l^2 = \frac{\epsilon_{\text{stat}}}{\epsilon_\infty} \omega_t^2, \quad (\text{A.2.8})$$

die die Frequenz ω_l der longitudinalen Phononen mit derjenigen der transversalen Phononen ω_t verbindet, kann man die Permittivität auch durch die Gleichung

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_\infty \left(1 + \frac{\omega_l^2 - \omega_t^2}{\omega_t^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} \right) \quad (\text{A.2.9})$$

ausdrücken. Diese Permittivität wird auch als Reststrahlenformel bezeichnet und führt zu einem sehr großen Reflexionskoeffizienten (nahe Eins) im Frequenzbereich zwischen ω_t und ω_l , der auch als Reststrahlenband bezeichnet wird.

Typische Parameterwerte für GaN sind beispielsweise [37] für $T = 300$ K

$$\epsilon_\infty = 5,35, \quad (\text{A.2.10})$$

$$\gamma = 1,51 \cdot 10^{12} \text{ s}^{-1}, \quad (\text{A.2.11})$$

$$\omega_t = 1,06 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}, \quad (\text{A.2.12})$$

$$\omega_l = 1,41 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}. \quad (\text{A.2.13})$$

Das Reststrahlenband liegt bei GaN daher direkt in dem bei 300 K thermisch anregbaren Bereich, d.h. nahe der Frequenz $\omega_{\text{th}} \approx 1,1 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}$.

Anhang B

Abschätzung für die Gültigkeit des lokalen Gleichgewichts

Aufgrund der gemachten Voraussetzungen ist klar, dass der Ausdruck für den Strahlungswärmetransport in Gl. (5.2.2) im Allgemeinen nur für Abstände a richtig sein kann, die mit der makroskopischen Beschreibung vereinbar sind. Es gibt daher eine Längenskala, auf der die gegebene Theorie nicht mehr richtig sein kann, weil mikroskopische Effekte berücksichtigt werden müssen. Es ist außerdem sofort ersichtlich, dass die Annahme des lokalen thermodynamischen Gleichgewichts für beliebig kleine Abstände zwischen den Halbräumen nicht mehr gültig sein kann. Um eine Längenskala für die Abstände zu erhalten, für die die Annahme eines lokalen Gleichgewichts gerechtfertigt scheint, kann man folgende Abschätzung machen:

Gegeben seien zwei Halbräume aus dem gleichen Material im Abstand $a \gg \lambda_{\text{th}}$ bei verschiedenen Temperaturen T_1 und T_2 im lokalen thermodynamischen Gleichgewicht. Die Felder, die zum Wärmestrom zwischen diesen Halbräumen beitragen, werden durch Quellenströme im Bereich der Skintiefe d_s an der Oberfläche der jeweiligen Halbräume erzeugt. Verringert man nun den Abstand a zwischen den Halbräumen, so kann man annehmen, dass der Energieübertrag aufgrund der evaneszenten Moden zunehmen wird. Die Oberfläche des wärmeren Halbraumes wird sich daher etwas abkühlen und die Oberfläche des kälteren Halbraumes leicht erwärmen. Man bekommt daher in dem Bereich der Skintiefe, in dem die Felder im Medium gedämpft werden, eine Temperatur, die leicht von T_1 bzw. T_2 abweicht. Solange der Temperaturunterschied ΔT zwischen der Bulktemperatur und der Oberflächentemperatur gering ist, kann man in guter Näherung weiterhin im gesamten Halbraum ein lokales thermodynamisches Gleichgewicht bei den Temperaturen T_1 bzw. T_2 annehmen. Es soll hier angenommen werden, dass T_1 und T_2 größer als 100 K sind, sodass $\Delta T \approx 1$ K ein vertretbarer Temperaturunterschied zwischen der Oberflächen- und der Bulktemperatur ist.

Um einen Abstand abzuschätzen, auf dem die Annahme des lokalen thermodynamischen Gleichgewichts nicht mehr gerechtfertigt ist, wird vorausgesetzt, dass diese Annahme genau dann nicht mehr gilt, wenn die Energie, die pro Fläche und Zeit durch den Strahlungswärmetransport zwischen den Medien ausgetauscht wird, größer ist als der Energiebetrag \dot{Q}/A , der durch Wärmeleitung im Medium pro Fläche A und Zeit nachgeliefert werden kann. Die Grundannahme des lokalen ther-

modynamischen Gleichgewichtes ist also gerechtfertigt, solange

$$\frac{\dot{Q}}{A} \gg \langle S_{\max} \rangle \quad (\text{B.1})$$

gilt. Da nun die Wärmeleitung im Metall für den Abstand Δx durch

$$\frac{\dot{Q}}{A} = \frac{\zeta \Delta T}{\Delta x} \quad (\text{B.2})$$

mit einem Wärmeleitkoeffizienten in der Größenordnung $\zeta = 300 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ gegeben ist [146], kann man mit $\Delta T \approx 1 \text{ K}$ und $\Delta x \approx d_s \approx 50 \text{ nm}$ die Energie, die durch die Wärmeleitung pro Fläche und Zeit durch das Metall fließt, abschätzen und bekommt $\dot{Q}/A \approx 6 \cdot 10^9 \text{ Wm}^{-2}$. In einem Dielektrikum kann man dagegen die Schätzgrößen $\zeta \approx 3 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ und $d_s \approx 500 \text{ nm}$ benutzen [146], sodass in diesem Fall $\dot{Q}/A \approx 6 \cdot 10^6 \text{ Wm}^{-2}$ gilt.

Da man den maximalen Strahlungswärmetransport zwischen zwei Halbräumen durch

$$\langle S_{\max} \rangle \approx \frac{1}{3a^2} 10^{-8} \text{ W} \quad (\text{B.3})$$

abschätzen kann, indem man $T_{\parallel} = T_{\perp} = 1$ in der Polder-van Hove-Formel in Gl. (5.3.1) setzt und das λ -Integral nur bis $1/a$ ausführt, bekommt man die groben Schätzwerte

$$a \gg \begin{cases} 0,7 \text{ nm} & \text{für ein Metall} \\ 24 \text{ nm} & \text{für ein polares Medium.} \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

Die Annahme des lokalen thermodynamischen Gleichgewichtes ist daher bis auf Abstände im Nanometerbereich gerechtfertigt, d.h. für Abstände, bei denen die makroskopische Beschreibung selbst bereits kritisch zu hinterfragen ist.

Die hier entwickelte Abschätzung soll nun auf die Materialien Gold und GaN angewandt werden, um zu sehen, ob die Annahme des lokalen Gleichgewichts für die Experimente mit einem Rasterwärmemikroskop [3, 88] gerechtfertigt werden kann. Schließlich werden im Experiment Abstände von bis zu einem Nanometer erreicht. Für Gold hat man bei $T = 300 \text{ K}$ einen Wärmeleitkoeffizienten [146] von $\zeta = 317 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ und die Skintiefe beträgt $d_s = 22 \text{ nm}$, sodass man

$$\frac{\dot{Q}}{A} = 1,4 \cdot 10^{10} \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \quad (\text{B.5})$$

bekommt. Die Energie pro Fläche und Zeit durch den Nahfeldwärmeübertrag beträgt bei einem Abstand von $a = 1 \text{ nm}$ gemäß der Polder-van Hove-Formel

$$\langle S_{\text{Au/Au}}(a = 1 \text{ nm}) \rangle = 4,5 \cdot 10^5 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}, \quad (\text{B.6})$$

sodass die Energiemenge pro Fläche und Zeit, die durch die Wärmeleitung in der Skinschicht nachgeliefert wird, um fünf Größenordnungen größer ist als die Energiemenge, die pro Fläche und Zeit durch den Nahfeldwärmetransport ab- bzw. hinzugeführt wird. Man beachte, dass sich für Gold die Wärmeleitfähigkeit und die Skintiefe im Bereich von 100 K bis 300 K nur geringfügig ändern, sodass die hier

dargelegte Abschätzung nahelegt, dass die gemachte Annahme des lokalen thermodynamischen Gleichgewichtes im Fall zweier Goldmedien bis auf Abständen von einem Nanometer gerechtfertigt ist.

Für GaN ist nun der Wärmeleitfähigkeitskoeffizient [147] bei einer Temperatur von 300 K durch $\zeta = 130 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ gegeben, während dieser für $T = 100 \text{ K}$ ungefähr $\zeta = 90 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ beträgt. Für die Skintiefe ergibt sich bei $T = 300 \text{ K}$ ein Wert von $d_s^{300} = 375 \text{ nm}$ und bei $T = 100 \text{ K}$ ein Wert von $d_s^{100} = 2,3 \mu\text{m}$. Damit bekommt man

$$\left. \frac{\dot{Q}}{A} \right|^{T=300} = 3,5 \cdot 10^8 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \quad \text{bzw.} \quad \left. \frac{\dot{Q}}{A} \right|^{T=100} = 3,9 \cdot 10^7 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}. \quad (\text{B.7})$$

Für den Nahfeldwärmestrom zwischen zwei GaN-Halbräumen bekommt man nun bei einem Abstand von $a = 1 \text{ nm}$ gemäß der Polder-van Hove-Formel

$$\langle S_{\text{GaN/GaN}}(a = 1 \text{ nm}) \rangle = 2,4 \cdot 10^7 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}. \quad (\text{B.8})$$

Die Energiemenge, die pro Fläche und Zeit durch die Wärmeleitung innerhalb der Skintiefe nachgeliefert wird, ist daher bei Abständen oberhalb von einem Nanometer größer als die Energiemenge, die durch den Nahfeldwärmestrom geliefert wird. Dabei liegen die Werte diesmal ungefähr in der gleichen Größenordnung, sodass die Annahme eines lokalen Gleichgewichtes in diesem Fall problematisch sein kann. Im Experiment wird aber der Wärmestrom zwischen einem Gold- und einem GaN-Medium gemessen. Für diese Konfiguration bekommt man nun bei einem Abstand von $a = 1 \text{ nm}$ gemäß der Polder-van Hove-Formel einen deutlichen geringeren Wert von

$$\langle S_{\text{Au/GaN}}(a = 1 \text{ nm}) \rangle = 2,8 \cdot 10^4 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}. \quad (\text{B.9})$$

sodass auch in diesem Fall die Annahme eines lokalen Gleichgewichtes gerechtfertigt scheint.

Anhang C

Verschiedene Relationen für die Fresnel-Koeffizienten

In diesem Anhang werden nützliche Relationen hergeleitet, die in dieser Arbeit immer dann Verwendung finden, wenn die verschiedenen Transmissionskoeffizienten für die verschiedenen Schichtgeometrien durch die Fresnelschen Reflexionskoeffizienten ausgedrückt werden. Außerdem werden für das Drude-Modell Näherungsausdrücke für die Hagen-Rubens-Näherung gewonnen, die vor allem im zweiten Kapitel von Bedeutung sind.

C.1 Transmissionskoeffizienten

Als erstes sollen die Relationen

$$\frac{T}{\operatorname{Re}(h_0)} = \begin{cases} \frac{1-|r|^2}{h_0} & \text{für } \lambda < k_0 \\ \frac{2\operatorname{Im}(r)}{\gamma} & \text{für } \lambda > k_0 \end{cases} \quad (\text{C.1.1})$$

mit

$$T_{\parallel}^{01} = \frac{4\operatorname{Re}(h_0)\operatorname{Re}(h_1\bar{\epsilon}_{r1})}{|h_2\epsilon_{r1} + h_1|^2} \quad \text{und} \quad T_{\perp}^{01} = \frac{4\operatorname{Re}(h_0)\operatorname{Re}(h_1)}{|h_2 + h_1|^2} \quad (\text{C.1.2})$$

und $\gamma^2 = \lambda^2 - k_0^2$ bewiesen werden, die gerade für die Betrachtung von Halbraumgeometrien relevant sind. Dazu genügt es, die entsprechenden Relationen für die TM-Moden zu zeigen, da man daraus sofort die entsprechenden Relationen für die TE-Moden bestimmen kann. Man beachte, dass h_0 für die propagierenden Moden mit $\lambda < k_0$ rein reell und für die evaneszenten Moden mit $\lambda > k_0$ rein imaginär ist, wobei im letzteren Fall $h_0 = i\gamma$ gilt.

Für die propagierenden Moden muss daher

$$T_{\parallel}^{01} = 1 - |r_{\parallel}^{01}|^2 \quad (\text{C.1.3})$$

gezeigt werden. Da nun der Fresnelsche Reflexionskoeffizient bekannt ist, steht auf der rechten Gleichungsseite dieser Beziehung

$$1 - |r_{\parallel}^{01}|^2 = 1 - \frac{|h_0\epsilon_{r1} - h_1|^2}{|h_0\epsilon_{r1} + h_1|^2} = \frac{4\operatorname{Re}(h_1\epsilon_{r1})\operatorname{Re}(h_0)}{|h_0\epsilon_{r1} + h_1|^2} = T_{\parallel}^{01}, \quad (\text{C.1.4})$$

da h_0 rein reell ist und damit $h_0 = \operatorname{Re}(h_0)$ gilt.

Für die evaneszenten Moden ist der Beweis ähnlich einfach, wobei in diesem Fall die Gültigkeit der Gleichung

$$\frac{T_{\parallel}^{01}}{\operatorname{Re}(h_0)} = \frac{2\operatorname{Im}(r_{\parallel}^{01})}{\gamma} \quad (\text{C.1.5})$$

gezeigt werden muss. Die rechte Gleichungsseite kann nun wieder umgeschrieben werden, wobei man

$$\begin{aligned} \frac{2\operatorname{Im}(r_{\parallel}^{01})}{\gamma} &= \frac{1}{i\gamma} \left(\frac{h_0\epsilon_{r1} - h_1}{h_0\epsilon_{r1} + h_1} - \text{c.c.} \right) \\ &= \frac{1}{i\gamma} \frac{1}{|h_0\epsilon_{r1} + h_1|^2} \left((h_0\epsilon_{r1} - h_1)(\bar{h}_0\bar{\epsilon}_{r1} + \bar{h}_1) - \text{c.c.} \right) \\ &= \frac{1}{i\gamma} \frac{1}{|h_0\epsilon_{r1} + h_1|^2} 4i\operatorname{Im}(\bar{h}_1 h_0\epsilon_{r1}) \\ &= \frac{4\operatorname{Re}(h_1\bar{\epsilon}_{r1})}{|h_0\epsilon_{r1} + h_1|^2} \end{aligned} \quad (\text{C.1.6})$$

bekommt. Damit ist auch die zweite Relation und damit Gl. (C.1.1) für die TM-Moden gezeigt, wobei die Ableitung für die TE-Moden analog durchgeführt werden kann.

C.2 Fresnel-Koeffizienten

Im zweiten Kapitel dieser Arbeit werden die Transmissionskoeffizienten für eine dielektrische Schicht durch die entsprechenden Fresnelschen Ausdrücke angegeben. Dazu werden die Relationen

$$\frac{\operatorname{Im}(h_1\bar{\epsilon}_{r1})}{|a_{\parallel}^{01}|^2} = -\frac{\operatorname{Im}(r_{\parallel}^{01})}{2h_0} \quad (\text{C.2.1})$$

und

$$\frac{\operatorname{Im}(h_1)}{|a_{\perp}^{01}|^2} = -\frac{\operatorname{Im}(r_{\perp}^{01})}{2h_0} \quad (\text{C.2.2})$$

verwendet, wobei a^{01} durch $a^{01} := h_0\epsilon_{r1} + h_1$ definiert ist. Diese beiden Relationen sollen nun bewiesen werden.

Mit $b^{01} := h_0 \epsilon_{r1} - h_1$ gilt

$$\begin{aligned}
2i\text{Im}(r_{\parallel}^{01}) &= 2i\text{Im}\left(\frac{b_{\parallel}^{01}}{a_{\parallel}^{01}}\right) \\
&= \frac{1}{|a_{\parallel}^{01}|^2}(b_{\parallel}^{01}\bar{a}_{\parallel}^{01} - \text{c.c.}) \\
&= \frac{1}{|a_{\parallel}^{01}|^2}((h_0\epsilon_{r1} - h_1)(h_0\bar{\epsilon}_{r1} + \bar{h}_1) - \text{c.c.}) \\
&= \frac{1}{|a_{\parallel}^{01}|^2}(h_0^2|\epsilon_{r1}|^2 - |h_1|^2 - h_1h_0\bar{\epsilon}_{r1} + \bar{h}_1h_3\epsilon_{r1} - \text{c.c.}) \\
&= \frac{1}{|a_{\parallel}^{01}|^2}(h_0(\bar{h}_1\epsilon_{r1} - h_1\bar{\epsilon}_{r1}) - \text{c.c.}) \\
&= -4i\frac{\text{Im}(h_1\bar{\epsilon}_{r1})}{|a_{\parallel}^{01}|^2}h_0,
\end{aligned} \tag{C.2.3}$$

womit die erste Relation bewiesen ist.

Als zweites wird die Relation

$$\frac{\text{Im}(h_1\bar{\epsilon}_{r1})}{|a_{\parallel}^{01}|^2} = \frac{1 - |r_{\parallel}^{01}|^2}{4\gamma} \tag{C.2.4}$$

mit $\gamma = \sqrt{\lambda^2 - k_0^2}$ bewiesen. Wie im vorherigen Fall lässt sich dann wieder leicht zeigen, dass auch

$$\frac{\text{Im}(h_1)}{|a_{\perp}^{01}|^2} = \frac{1 - |r_{\perp}^{01}|^2}{4\gamma} \tag{C.2.5}$$

gilt. Diese Relationen gelten nur für die evaneszenten Moden, d.h. für $\lambda > k_0$, und damit $h_0 = i\gamma$. Damit bekommt man

$$\begin{aligned}
1 - |r_{\parallel}^{01}|^2 &= \frac{1}{|a_{\parallel}^{01}|^2} \left(|a_{\parallel}^{01}|^2 - |b_{\parallel}^{01}|^2 \right) \\
&= \frac{1}{|a_{\parallel}^{01}|^2} \left(|h_0\epsilon_{r1} + h_1|^2 - |h_0\epsilon_{r1} - h_1|^2 \right) \\
&= \frac{1}{|a_{\parallel}^{01}|^2} \left(|i\gamma\epsilon_{r1} + h_1|^2 - |i\gamma\epsilon_{r1} - h_1|^2 \right) \\
&= \frac{2}{|a_{\parallel}^{01}|^2} \left(i\gamma\epsilon_{r1}\bar{h}_1 - i\gamma\bar{\epsilon}_{r1}h_1 \right) \\
&= \frac{2}{|a_{\parallel}^{01}|^2} (-i\gamma) 2i\text{Im}(h_1\bar{\epsilon}_{r1}) \\
&= \frac{4\gamma}{|a_{\parallel}^{01}|^2} \text{Im}(h_1\bar{\epsilon}_{r1}),
\end{aligned} \tag{C.2.6}$$

was zu zeigen war.

C.3 Hagen-Rubens-Näherung

In diesem Abschnitt werden einige sehr hilfreiche Beziehungen für Drude-Materialien in der Hagen-Rubens-Näherung abgeleitet, wobei die Permittivität für Drude-Materialien durch

$$\epsilon_r = 1 - \frac{\omega_p^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2} + i \frac{\omega_p^2 \tau^2}{\omega \tau (1 + \omega^2 \tau^2)} \quad (\text{C.3.1})$$

gegeben ist. In der Hagen-Rubens-Näherung, d.h. es wird $\omega \tau \ll 1$ vorausgesetzt, erhält man dann

$$\epsilon'_r \approx 1 - \omega_p^2 \tau^2 \quad \text{und} \quad \epsilon''_r \approx \frac{\omega_p^2 \tau}{\omega}. \quad (\text{C.3.2})$$

Nimmt man noch zusätzlich an, dass $\omega \ll \omega_p$ und $\omega_p \tau \gg 1$, dann kann man relativ leicht die Beziehung

$$\frac{\epsilon''_r}{|\epsilon_r|^2} \approx \frac{\epsilon''_r}{|\epsilon_r + 1|^2} \approx \frac{\omega}{\omega_p^2 \tau} \quad (\text{C.3.3})$$

ableiten. Mithilfe dieser Beziehungen lassen sich beispielsweise die allgemeinen Ausdrücke für die Nahfeldenergiedichte für Drude-Materialien in der Hagen-Rubens-Näherung auswerten.

Nun sollen weiterhin die Ausdrücke für $\text{Re}(r^2)$ und $\text{Im}(r^2)$ im stark evaneszenten Bereich ($\lambda \gg k_0$) angegeben werden, wobei mit den Relationen für die TM-Moden begonnen wird. Man erhält

$$\begin{aligned} r_{\parallel}^2 &\approx \frac{(\epsilon_r - 1)^2}{(\epsilon_r + 1)^2} = \frac{(\epsilon_r - 1)^2 (\bar{\epsilon}_r + 1)^2}{|\epsilon_r + 1|^4} \\ &= \frac{(|\epsilon_r|^2 - \bar{\epsilon}_r + \epsilon_r - 1)^2}{|\epsilon_r + 1|^4} = \frac{(|\epsilon_r|^2 - 1 + 2i\text{Im}(\epsilon_r))^2}{|\epsilon_r + 1|^4} \\ &= \frac{(|\epsilon_r|^2 - 1)^2 - 4\epsilon_r''^2 + 4i\text{Im}(\epsilon_r)(|\epsilon_r|^2 + 1)}{|\epsilon_r + 1|^4}. \end{aligned} \quad (\text{C.3.4})$$

Damit hat man

$$\text{Im}(r_{\parallel}^2) \approx \frac{4\epsilon_r''(|\epsilon_r|^2 - 1)}{|\epsilon_r + 1|^4} \approx 4 \frac{\epsilon_r''}{|\epsilon_r + 1|^2} \approx 4 \frac{\omega}{\omega_p^2 \tau} \quad (\text{C.3.5})$$

und

$$\begin{aligned} \text{Re}(r_{\parallel}^2) &\approx \frac{(|\epsilon_r|^2 + 1)^2}{|\epsilon_r + 1|^4} - 4 \left(\frac{\epsilon_r''}{|\epsilon_r + 1|^2} \right)^2 \\ &\approx 1 - 4 \left(\frac{\omega}{\omega_p^2 \tau} \right)^2. \end{aligned} \quad (\text{C.3.6})$$

Für die TE-Moden bekommt man

$$r_{\perp}^2 \approx \left(\frac{k_0^2}{\lambda^2} \right)^2 \frac{(\epsilon_r - 1)^2}{16} = \left(\frac{k_0^2}{\lambda^2} \right)^2 \frac{(\epsilon'_r - 1)^2 + 2i(\epsilon'_r - 1)\epsilon_r'' - \epsilon_r''^2}{16}. \quad (\text{C.3.7})$$

Es folgt damit

$$\operatorname{Re}(r_{\perp}^2) \approx \left(\frac{k_0^2}{\lambda^2}\right)^2 \frac{(\epsilon_r' - 1)^2 - \epsilon_r''^2}{16} \approx -\frac{k_0^4}{\lambda^4} \frac{\epsilon_r''^2}{16} \approx -\frac{k_0^4}{\lambda^4} \frac{1}{16} \left(\frac{\omega_p^2 \tau}{\omega}\right)^2 \quad (\text{C.3.8})$$

und

$$\operatorname{Im}(r_{\perp}^2) \approx \frac{k_0^4}{\lambda^4} \frac{1}{16} 2\epsilon_r''(\epsilon_r' - 1) \approx -\frac{k_0^4}{\lambda^4} \frac{1}{8} \omega_p^2 \tau^2 \frac{\omega_p^2 \tau}{\omega} \approx 2\omega\tau \operatorname{Re}(r_{\perp}^2). \quad (\text{C.3.9})$$

Diese Ausdrücke werden im zweiten Kapitel dieser Arbeit verwendet, um Näherungsausdrücke für die Nahfeldenergiedichte oberhalb einer frei stehenden Drude-Schicht für solche Materialien zu erhalten, für die die Hagen-Rubens-Näherung erfüllt ist.

Anhang D

Polylogarithmus und Zeta-Funktion

In diesem Anhang sollen einige Formeln für die Riemannsche Zeta-Funktion und den Polylogarithmus angegeben werden, auf die in der Dissertation gelegentlich zurückgegriffen wird.

Der sogenannte Polylogarithmus ist durch [148]

$$\operatorname{Li}_n(z) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^n} \quad (\text{D.1})$$

für alle komplexen Zahlen z mit $|z| < 1$ definiert. Li_2 wird dabei auch als Dilogarithmus und Li_3 als Trilogarithmus bezeichnet. Anhand dieser Definition ist sofort ersichtlich, dass die beiden Relationen

$$\lim_{|z| \rightarrow 0} \operatorname{Li}_n(z) = 0, \quad (\text{D.2})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Li}_n(z) = z \quad (\text{D.3})$$

gelten.

Für reelle Argumente x mit $|x| \leq 1$ ist der Polylogarithmus ebenfalls rein reell und geht für $x = 1$ in die Riemannsche Zeta-Funktion über; es gilt also

$$\operatorname{Li}_n(1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n} = \zeta(n). \quad (\text{D.4})$$

Beispielsweise erhält man für $n = 2$ und $n = 4$

$$\operatorname{Li}_2(1) = \zeta(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad (\text{D.5})$$

$$\operatorname{Li}_4(1) = \zeta(4) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}. \quad (\text{D.6})$$

Diese Werte sind aus dem Standardwerk von M. Abramowitz und I. Stegun [136] entnommen.

Neben der Reihendarstellung (D.1) existieren zwei Integraldarstellungen, die gerade für Physiker nützlich sein können: Dazu gehört einerseits die Darstellung durch eine Bose-Einstein-Funktion [148],

$$\operatorname{Li}_{n+1}(z) = \frac{1}{\Gamma(n+1)} \int_0^\infty dt \frac{t^n}{e^{t/z} - 1}, \quad (\text{D.7})$$

und andererseits die Darstellung durch eine Fermi-Dirac-Funktion,

$$\operatorname{Li}_{n+1}(-z) = -\frac{1}{\Gamma(n+1)} \int_0^\infty dt \frac{t^n}{e^{t/z} + 1}. \quad (\text{D.8})$$

Zusammen mit $\operatorname{Li}_n(1) = \zeta(n)$ und der Bose-Einstein-Funktion bekommt man somit die nützliche Beziehung

$$\int_0^\infty dt \frac{t^n}{e^t - 1} = \Gamma(n+1)\zeta(n+1), \quad (\text{D.9})$$

sodass beispielsweise

$$\int_0^\infty dt \frac{t}{e^t - 1} = \frac{\pi^2}{6}, \quad (\text{D.10})$$

$$\int_0^\infty dt \frac{t^2}{e^t - 1} = 2\zeta(3), \quad (\text{D.11})$$

$$\int_0^\infty dt \frac{t^3}{e^t - 1} = \frac{\pi^4}{15} \quad (\text{D.12})$$

gelten.

Literaturverzeichnis

- [1] S.-A. Biehs, D. Reddig und M. Holthaus, *Eur. Phys. J. B* **55**, 237 (2007).
- [2] S.-A. Biehs, *Eur. Phys. J. B* **58**, 423 (2007).
- [3] A. Kittel *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 224301 (2005).
- [4] O. Huth, Diplomarbeit, Carl von Ossietzky Universität Oldenburg, 2007.
- [5] S. M. Rytov, Y. A. Kravtsov und V. I. Tatarskii, *Principles of Statistical Radiophysics 3* (Springer-Verlag, New York, 1989), Vol. 3.
- [6] G. S. Agarwal, *Phys. Rev. A* **11**, 230 (1975).
- [7] L. Knöll, S. Scheel und D.-G. Welsch, in *Coherence and Statistics of Photons and Atoms* (Wiley, New-York, 2001), Kap. aus „QED in Dispersing and Absorbing Media“, p. 1, arXiv:quant-ph/0006121.
- [8] M. Janowicz, D. Reddig und M. Holthaus, *Phys. Rev. A* **68**, 043823 (2003).
- [9] P. de Vries, D. V. van Coevorden und A. Ladendijk, *Rev. Mod. Phys.* **70**, 447 (1998).
- [10] C.-T. Tai, *Dyadic Green's Functions in Electromagnetic Theory* (Intext Educational Publishers, Scranton, 1971).
- [11] H. B. G. Casimir und D. Polder, *Phys. Rev.* **73**, 360 (1948).
- [12] K. Joulain, R. Carminati, J. P. Mulet und J. J. Greffet, *Phys. Rev. B* **68**, 1 (2003).
- [13] H. T. Dung, L. Knöll und D.-G. Welsch, *Phys. Rev. A* **57**, 3931 (1997).
- [14] A. V. Shchegrov, K. Joulain, R. Carminati und J. J. Greffet, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 1548 (2000).
- [15] R. Carminati und J. J. Greffet, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 1660 (1999).
- [16] C. Henkel, K. Joulain, R. Carminati und J.-J. Greffet, *Opt. Commun.* **186**, 57 (2000).
- [17] J.-J. Greffet *et al.*, *Nature* **416**, 61 (2002).
- [18] J.-J. Greffet *et al.*, *Topics Appl. Phys.* **88**, 163 (2003).

- [19] F. Marquier *et al.*, Phys. Rev. B **69**, 155412 (2004).
- [20] Y. D. Wilde *et al.*, Nature **444**, 740 (2006).
- [21] L. D. Landau und E. M. Lifschitz, *Elektrodynamik der Kontinua*, Band VIII aus der Reihe *Lehrbuch der theoretischen Physik* (Akademie-Verlag, Berlin, 1974).
- [22] L. D. Landau und E. M. Lifschitz, *Statistische Physik - Teil 1*, Band V aus der Reihe *Lehrbuch der theoretischen Physik* (Akademie Verlag, Berlin, 1979).
- [23] E. M. Lifshitz und L. P. Pitaevski, *Statistische Physik Teil 2*, Band IX aus der Reihe *Lehrbuch der theoretischen Physik* (Akademie Verlag, Dresden, 1992).
- [24] A. A. Abrikosov, L. P. Gorkov und I. E. Dzyaloshinski, *Methods of quantum field theory in statistical physics* (Dover Publications, New York, 1975).
- [25] W. Eckhardt, Phys. Rev. A **29**, 1991 (1984).
- [26] D. Reddig, Diplomarbeit, Carl von Ossietzky Universität Oldenburg, 2004.
- [27] J. J. Hopfield, Phys. Rev. **112**, 1555 (1958).
- [28] B. Huttner und S. M. Barnett, Phys. Rev. A **46**, 4306 (1992).
- [29] L. G. Suttorp und M. Wubs, Phys. Rev. A **70**, 013816 (2004).
- [30] S. Y. Buhmann und D.-G. Welsch, Appl. Phys. B **82**, 189 (2006).
- [31] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3. ed. (John-Wiley, New York, 1999).
- [32] J. Stratton, *Electromagnetic Theory* (McGraw-Hill Book Company, New-York, 1941).
- [33] A. R. Melnyk, Phys. Rev. B **2**, 835 (1970).
- [34] P. M. Morse und H. Feshbach, *Methods of theoretical physics*, Band II aus der Reihe *International series in pure and applied physics* (McGraw-Hill Book Company, New-York, 1953).
- [35] L. W. Li, P. S. Kooi, M. S. Leong und T. S. Yeo, Journal of Electromagnetic Waves and Applications **8**, 663 (1994).
- [36] E. Hecht, *Optik* (Oldenbourg, Muenchen, 2005).
- [37] S. Adachi, *Handbook on Physical Properties of Semiconductors* (Kluwer Academic Publisher, Boston, 2004), Vol. 2.
- [38] N. W. Ashcroft und N. D. Mermin, *Festkörperphysik* (Oldenbourg, München, 2001).
- [39] K. Joulain *et al.*, Surface Science Reports **57**, 59 (2005).

- [40] L. Mandel und E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).
- [41] I. Dorofeyev, J. Jersch und H. Fuchs, *Ann. Phys.* **12**, 421 (2003).
- [42] I. Dorofeyev, H. Fuchs und K. Sobakinskaya, *Centr. Eur. J. Phys.* **3**, 351 (2005).
- [43] I. Dorofeyev, H. Fuchs und J. Jersch, *Phys. Rev. E* **65**, 026610 (2002).
- [44] P. Fan, K. Yi, J.-D. Shao und Z.-X. Fan, *Journal of Applied Physics* **95**, 2527 (2004).
- [45] I. Vilfan und H. Pfnür, *Eur. Phys. J. B* **36**, 281 (2003).
- [46] D. V. Fedorov, P. Zahn und I. Mertig, arXiv:cond-mat/0406111 (2004).
- [47] W. E. Jones, K. L. Kliewer und R. Fuchs, *Phys. Rev.* **178**, 1201 (1969).
- [48] C. Henkel und K. Joulain, *Appl. Phys. B* **84**, 61 (2006).
- [49] L. M. Claessen, A. G. M. Jansen und P. Wyder, *Phys. Rev. B* **33**, 7947 (1986).
- [50] D. W. Berreman, *Phys. Rev.* **130**, 2193 (1963).
- [51] R. Ruppin, *Phys. Rev. B* **9**, 1908 (1974).
- [52] V. D. Renzi, M. G. Betti und C. Mariani, *Phys. Rev. B* **48**, 4767 (1993).
- [53] P. Grosse, *Freie Elektronen in Festkörpern* (Springer-Verlag, Berlin, 1979).
- [54] W. Woltersdorff, *Z. Phys.* **91**, 230 (1934).
- [55] G. D. Mahan und D. T. F. Marple, *Appl. Phys. Lett.* **42**, 219 (1982).
- [56] S. Bauer, *Am. J. Phys.* **60**, 257 (1991).
- [57] O. G. Kollyukh, A. I. Liptuga, V. O. Morozhenko und V. I. Pipa, *Semiconductor Physics, Quantum Electronics and Optoelectronics* **6**, 210 (2003).
- [58] G. Czycholl, *Theoretische Festkörperphysik*, 2nd ed. (Springer, Berlin, 2004).
- [59] S.-A. Biehs, Diplomarbeit, Carl von Ossietzky Universität Oldenburg, 2004.
- [60] K. Kliewer und R. Fuchs, *Phys. Rev.* **153**, 498 (1967).
- [61] H. Raether, *Excitation of Plasmons and Interband Transitions by Electrons*, Band 88 aus der Reihe *Springer Tracts in Modern Physics* (Springer-Verlag, New York, 1980).
- [62] R. S. Kohlmann *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 773 (1995).
- [63] T.-I. Jeon und D. Grischkowsky, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 1106 (1997).
- [64] R. Fuchs, K. Kliewer und J. Pardee, *Phys. Rev.* **150**, 589 (1966).

- [65] K. Kliewer und R. Fuchs, Phys. Rev. **144**, 495 (1966).
- [66] K. Kliewer und R. Fuchs, Phys. Rev. **159**, 573 (1966).
- [67] E. N. Economou, Phys. Rev. **182**, 539 (1969).
- [68] J. Burke, G. Stegeman und T. Tamir, Phys. Rev. B **33**, 5186 (1986).
- [69] K. Welford, Opt. Quant. Electron. **23**, 1 (1991).
- [70] F. Garcia-Moliner und F. Flores, *Introduction to the theory of solid surfaces* (Cambridge University Press, Cambridge, 1979).
- [71] D. Polder und M. van Hove, Phys. Rev. B **4**, 3303 (1971).
- [72] M. L. Levin, V. G. Polevoi und S. M. Rytov, Sov. Phys. JETP **52**, 1054 (1980).
- [73] J. J. Loomis und H. J. Maris, Phys. Rev. B **50**, 18517 (1994).
- [74] J. B. Pendry, J. Phys.: Condens. Matter **11**, 6621 (1999).
- [75] A. I. Volokitin und B. N. J. Persson, Phys. Rev. B **63**, 205404 (2001).
- [76] A. I. Volokitin und B. N. J. Persson, Phys. Rev. B **69**, 1 (2004).
- [77] I. A. Dorofeyev, J. Phys. D **31**, 600 (1998).
- [78] J. P. Mulet, K. Joulain, R. Carminati und J. J. Greffet, Appl. Phys. Lett. **78**, 2931 (2001).
- [79] J. L. Pan, Opt. Lett. **25**, 369 (2000).
- [80] J. P. Mulet, K. Joulain, R. Carminati und J. J. Greffet, Opt. Lett. **26**, 480 (2001).
- [81] J. L. Pan, Opt. Lett. **26**, 482 (2001).
- [82] C. H. Park, H. A. Haus und M. S. Weinberg, J. Phys. D: Appl. Phys. **35**, 2857 (2002).
- [83] G. Ford und W. Weber, Phys. Rep. **113**, 195 (1984).
- [84] B. Geyer, G. L. Klimchitskaya und V. M. Mostepanenko, Phys. Rev. A **67**, 062102 (2003).
- [85] V. B. Bezerra, G. L. Klimchitskaya, V. M. Mostepanenko und C. Romero, Phys. Rev. A **69**, 022119 (2004).
- [86] B. Geyer, G. Klimchitskaya und V. Mostepanenko, Phys. Rev. A **70**, 016102 (2004).
- [87] G. Bimonte, Phys. Rev. Lett. **96**, 160401 (2006).

- [88] W. Müller-Hirsch, Dissertation, Carl von Ossietzky Universität Oldenburg, Oldenburg, 2000.
- [89] A. Kittel, Phys. Unserer Zeit **2**, 58 (2006).
- [90] A. Narayanaswamy und C. Chen, Appl. Phys. Lett. **82**, 3544 (2003).
- [91] I. Dorofeyev, Phys. Lett. A **363**, 251 (2007).
- [92] T. Mayer-Kuckuk, *Atomphysik* (B. G. Teubner, Stuttgart, 1997).
- [93] H. P. Baltes, Progress in Optics **XIII**, 1 (1976).
- [94] W. Eckhardt, Physica A **128**, 467 (1984).
- [95] C. F. Bohren und D. R. Huffman, *Absorption and Scattering of Light by Small Particles* (Wiley Science, New-York, 1998).
- [96] E. A. Rohlfing, J. Chem. Phys. **89**, 6103 (1988).
- [97] S. Pieper, Diplomarbeit, Carl von Ossietzky Universität Oldenburg, 2005.
- [98] V. B. Svetovoy, Phys. Rev. A **70**, 016101 (2004).
- [99] R. Esquivel und V. B. Svetovoy, Phys. Rev. A **69**, 062102 (2004).
- [100] K. L. Kliewer und R. Fuchs, Phys. Rev. **172**, 607 (1968).
- [101] J. S. Hoye, I. Brevik, J. B. Aarseth und K. A. Milton, Phys. Rev. E **67**, 056116 (2003).
- [102] A. S. Barker und M. Ilegems, Phys. Rev. B **7**, 743 (1973).
- [103] K. Seeger, *Halbleiterphysik* (Vieweg, Braunschweig, 1992), Vol. I.
- [104] D. D. Manchon, A. S. Barker, P. J. Dean und R. B. Zetterstrom, Solid State Commun. **8**, 1227 (1970).
- [105] J. R. Jasperse, A. Kahan, J. N. Plendl und S. S. Mitra, Phys. Rev. **146**, 146 (1965).
- [106] A. A. Maradudin und R. F. Wallis, Phys. Rev. **125**, 1277 (1962).
- [107] I. A. Dorofeyev, H. Fuchs, B. Gotsmann und G. Wenning, Phys. Rev. B **60**, 9069 (1999).
- [108] H. G. B. Casimir, Proc. K. Ned. Akad. Wet. **51**, 793 (1948).
- [109] U. Mohideen und A. Roy, Phys. Rev. Lett. **81**, 4549 (1998).
- [110] G. Bressi, G. Carugno, R. Onofrio und G. Ruoso, Phys. Rev. Lett. **88**, 1 (2002).
- [111] S. K. Lamoreaux, Phys. Rev. Lett. **78**, 5 (1997).

- [112] R. S. Decca *et al.*, Phys. Rev. D **68**, 116003 (2003).
- [113] R. S. Decca *et al.*, Ann. Phys. **318**, 37 (2005).
- [114] E. M. Lifshitz, JETP **2**, 73 (1956).
- [115] J. Mehra, Physica **37**, 145 (1967).
- [116] L. S. Brown und G. J. Maclay, Phys. Rev. **184**, 1272 (1969).
- [117] J. Schwinger, L. L. DeRaad und K. A. Milton, Ann. Phys. (N.Y.) **115**, 1 (1978).
- [118] M. Bostroem und B. E. Sernelius, Phys. Rev. Lett. **84**, 4757 (2000).
- [119] K. A. Milton, J. Phys. A **37**, R209 (2004).
- [120] I. Brevik, J. Aarseth, J. S. Hoye und K. A. Milton, Phys. Rev. E **71**, 056101 (2005).
- [121] V. B. Bezerra *et al.*, Phys. Rev. E **73**, 028101 (2006).
- [122] J. S. Hoye, I. Brevik, J. B. Aarseth und L. A. Milton, J. Phys. A **39**, 6031 (2006).
- [123] M. Bordag, B. Geyer, G. L. Klimchitskaya und V. M. Mostepanenko, Phys. Rev. Lett. **85**, 503 (2000).
- [124] V. B. Svetovoy und M. V. Lokhanin, Mod. Phys. Lett. A **15**, 1437 (2000).
- [125] V. B. Svetovoy und M. V. Lokhanin, Mod. Phys. Lett. A **15**, 1013 (2000).
- [126] V. B. Bezerra, G. L. Klimchitskaya und C. Romero, Phys. Rev. A **65**, 012111 (2001).
- [127] R. S. Decca *et al.*, Phys. Rev. D **75**, 077101 (2007).
- [128] I. Brevik, S. A. Ellingsen und K. A. Milton, N. J. Phys. **8**, 236 (2006).
- [129] V. B. Svetovoy und M. V. Lokhanin, Phys. Rev. A **67**, 022113 (2003).
- [130] V. B. Svetovoy und R. Esquivel, Phys. Rev. E **72**, 036113 (2005).
- [131] V. B. Svetovoy und M. V. Lokhanin, Phys. Lett. A **280**, 177 (2001).
- [132] V. B. Svetovoy und R. Esquivel, J. Phys. A: Math. Gen. **39**, 6777 (2006).
- [133] I. A. Dorofeyev, J. Phys. A **31**, 4369 (1998).
- [134] P. W. Milonni, *The Quantum Vacuum* (Academic Press, San Diego, 1994).
- [135] R. Matloob, A. Keshavarz und D. Sedighi, Phys. Rev. A **60**, 3410 (1999).

- [136] M. Abramowitz und I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions* (Dover Publications, New York, 1972).
- [137] L. H. Ford, *Physical Review A* **48**, 2962 (1993).
- [138] C. Genet, F. Intravaria, A. Lambrecht und S. Reynaud, arXiv:quant-ph/0302072 (2004).
- [139] F. Intravaia und A. Lambrecht, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 110404 (2005).
- [140] V. B. Bezerra, G. L. Klimtchitskaya und V. M. Mostepanenko, *Phys. Rev. A* **66**, 062112 (2002).
- [141] G. L. Klimtchitskaya und V. M. Mostepanenko, *Phys. Rev. A* **63**, 062108 (2001).
- [142] J. S. Hoye, I. Brevik, S. A. Ellingsen und J. B. Aarseth, *Phys. Rev. E* **75**, 051127 (2007).
- [143] C. Henkel, K. Joulain, J.-P. Mulet und J. Greffet, *Phys. Rev. A* **69**, 023808 (2003).
- [144] H. H. Landolt und R. Börnstein, *Numerical data and functional relationships in science and technology: new series* (Springer-Verlag, New York, 1985), Vol. 15b.
- [145] J. Saxler, Diplomarbeit, Aachen University of Technology, Aachen, Germany, 2003.
- [146] C. Y. Ho, R. W. Powell und P. E. Liley, *J. Phys. Chem. Ref. Data* **1**, 279 (1972).
- [147] E. K. Sichel und J. I. Pankove, *J. Phys. Chem. Solids* **38**, 330 (1977).
- [148] O. I. Marichev, *Handbook of integral transforms of higher transcendental functions* (Ellis Horward Ltd., Chichester, 1983).

Danksagung

Zunächst einmal muss ich mich bei Martin Holthaus dafür bedanken, dass er mir die Möglichkeit zur Dissertation gab, und mir bei der Durchführung dieses Projektes viele Freiheiten einräumte. Während der sehr guten und fürsorglichen Betreuung meiner Arbeit habe ich sicherlich viel von deinem reichen Erfahrungsschatz dazugelernt und nicht zuletzt nebenbei mein *broken english* verbessert.

Zusätzlich bedanke ich mich bei Apl.-Prof. Dr. Achim Kittel und PD Dr. Heinz-Peter Breuer für ihre Bereitschaft, meine doch sehr umfangreiche Arbeit zu begutachten.

Weiterhin möchte ich mich auch bei der Arbeitsgruppe um Achim Kittel, Jürgen Parisi und Uli F.-Wischnath für die interessanten Diskussionen und die enge Zusammenarbeit in den letzten Jahren bedanken. Besonderen Dank gilt außerdem Achim Kittel für die Bereitstellung der Abbildung des Oldenburger Rasterwärmemikroskopes.

Natürlich bleibt es nicht aus, mich bei meinen Kollegen aus der Arbeitsgruppe CondMat zu bedanken, die für eine sehr nette Arbeitsatmosphäre und darüber hinaus auch bei etlichen Freizeitaktivitäten für reichlich Spaß im tristen Forscheralltag gesorgt haben. Danke liebe Kollegen! Insbesondere muss ich mich hier bei Oliver Huth, Felix Rüting, Stefan Pieper und Daniel Reddig bedanken, die mir hier und da hilfreich zur Seite standen. Und vor allem vielen Dank Oliver, dass du meine Arbeit noch einmal korrektur gelesen und auf die neue Rechtschreibung angepasst hast!

Eine mehrjährige Arbeit ist natürlich nicht möglich, ohne die nötige Unterstützung aus dem näheren Umfeld, wobei ich mich hier vor allem bei meiner lieben Freundin Nina Sondag bedanke, die mir in all der Zeit den Rücken freigehalten hat.

Außerdem möchte ich mich bei der Heinz-Neumüller-Stiftung sowie bei der Studienstiftung des deutschen Volkes für die finanzielle und ideelle Unterstützung meines Dissertationsvorhabens bedanken.

Erklärung gemäß Promotionsordnung

Hiermit versichere ich, dass ich diese Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel und Quellen benutzt habe.

Svend-Age Biehs

Lebenslauf

Persönliche Daten

Name, Vorname:

Geburtsdatum:

Geburtsort:

Staatsangehörigkeit:

Biels, Svend-Age

04. August 1977

Halle/Saale

deutsch

Schulbildung

08/84 - 07/91

08/91 - 07/93

08/93 - 07/97

07/97

Polytechnische Oberschule Glaucha, Halle/Saale

Sportgymnasium, Halle/Saale, Spezialfach: Ringen

Gymnasium an der Max-Planck-Straße, Delmenhorst

Abitur

Studium

10/98 - 10/04

12/00

10/04

Studium der Physik (Diplom) an der Carl von Ossietzky
Universität Oldenburg

Vordiplom

Abschluss des Studiums mit einer Diplomarbeit in der
theoretischen Physik mit dem Titel *Fluktuierende Elek-
trodynamik und Nahfeldwärmehtransport*.