Semantische und lexikalische Aspekte der mathematischen Fachsprache des 19. Jahrhunderts

Von der Carl von Ossietzky Universität Oldenburg
– Fakultät III: Sprach- und Kulturwissenschaften –
zur Erlangung des Grades eines

Doktors der Philosophie
(Dr. phil.)

genehmigte Dissertation

von Herrn Holger Becker
geboren am 30.11.1969 in Brake/Unterweser

Referent:

Prof. Dr. Winfried Boeder

Korreferenten:

Prof. Dr. Erhard Scholz

Prof. Dr. Klaus Gloy

Tag der Disputation: 24.06.2005

Inhaltsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Als Évariste Galois zu Beginn der 1830er Jahre das jahrhundertealte Problem der Lösbarkeit algebraischer Gleichungen, an dem sich die mathematische Forschung seit Generationen mit mäßigem Erfolg versucht hatte, in allgemeiner Form gelöst hatte, war er sich der umwälzenden Bedeutung seiner Methoden und Ergebnisse wie auch der sprachlichen Konsequenzen wohl bewußt:

> La nouveauté de cette matière a exigé l'emploi de nouvelles dénominations, de nouveaux caractères. Nous ne doutons pas que cet inconvénient ne rebute dès les premiers pas le lecteur qui a pardonné à peine aux auteurs mêmes qui ont tout son crédit, de lui parler un nouveau langage (Galois 1976: 39).[1]

Galois hat mit seinen wenigen Arbeiten nicht nur ein klassisches mathematisches Problem gelöst, sondern auch die Grundlagen sowohl für die Gruppen- als auch für die Körpertheorie gelegt und damit wesentlich zur Entwicklung einer strukturorientierten Algebra beigetragen. Er hat einen Sprung gemacht von der Betrachtung einzelner Objekte zur Untersuchung von Zusammenfassungen von Objekten, auf denen durch eine oder mehrere mathematische Operationen eine Struktur definiert wird. Dafür hat Galois eine „nouveau langage" geschaffen, eine Sprache, die im Laufe des 19. Jahrhunderts aufgenommen und stark erweitert wird.

In dieser Arbeit geht es um die Frage nach der Entstehung und Entwicklung einer Wissenschaftssprache. Sie kann nicht aus dem Nichts geschaffen werden, und wir wollen untersuchen, aus welchen Quellen die Mathematik ihre lexikalischen Elemente bezieht. Nachdem die Entwicklung einer strukturorientierten Mathematik bereits weit vorangeschritten war, „definierte" Henri Poincaré (1909:

[1] Anmerkungen zur Zitierweise folgen am Ende dieser Einleitung.

109) die Mathematik wie folgt: „La mathématique est l'art de donner le même nom à des choses différentes". Diese Aussage deutet auf ein Traditionsbewußtsein hin, auf ein Festhalten an alten Bezeichnungen, die aber mit neuen Definitionen versehen werden. Wir werden in dieser Arbeit z. B. anhand arithmetischer Termini feststellen können, daß dem in der Tat so ist, daß aber gleichzeitig auch für neuartige Begriffe neue Bezeichnungen gefunden werden, die aus der Gemeinsprache und nicht-mathematischen Fachsprachen stammen.

Wir wollen nun kurz einige verschiedenartige Beispiele vorstellen, die uns zu den anschließend näher dargelegten Fragestellungen dieser Arbeit führen sollen.

Ein Beispiel für die Übertragung eines geometrischen Ausdrucks auf die elementare Mengenlehre ist das Verb *liegen*, das in letzterem Bereich wie folgt verwendet werden kann: „Das Zeichen $a \in \mathfrak{M}$ bedeutet: a ist Element von $\mathfrak{M}$. Man sagt auch geometrisch-bildlich: a **liegt in** $\mathfrak{M}$" (van der Waerden 1930: 4). Hier liegt eine Analogie vor: So wie ein Punkt auf einer Geraden liegen kann, kann ein Element in einer Menge liegen. In diesem Beispiel ist der geometrische Anklang offensichlich. Daß dem nicht so sein muß, zeigt z. B. das Verb *contenir*, das wir in Kap. 9.3.1 untersuchen werden.

Die Bezeichnung *Raum* läßt in erster Linie an die Geometrie denken, findet sich aber auch in anderen mathematischen Bereichen.[2] Dazu gehört die lineare Algebra, die stark von geometrischen Ausdrucksweisen geprägt ist. Einen Grund dafür nennt Dorier (1995: 237): „Indeed, geometry is a central part of mathematics, potentially rich in questioning. The possibility of a geometric interpretation of algebraic results is therefore a source of enrichment as it gives to concepts an intuitive background and more consistency". Ähnliches gilt auch für die Arithmetik, wie wir in Kap. 9 und Kap. 10 sehen werden. *Raum* findet sich aber auch in analytischen Bereichen, z. B. in bezug auf Funktionen; entsprechende Bezeichnungen erscheinen zur Wende vom 19. zum 20. Jahrhundert (Krömer 1999: 95). Bei diesem Beispiel stellt sich u. a. die Frage, ob hier von der Abbildung oder von der Konstruktion einer Ähnlichkeit gesprochen werden kann. Unser Beispiel *Körper* ist in verschiedener Hinsicht von ähnlicher Art.

Die Einführung neuer mathematischer Objekte kann höchst umstritten sein, was z. B. die Geschichte der komplexen Zahlen illustriert. Carl Friedrich Gauß spielte dabei eine bedeutende Rolle, indem er ihnen eine geometrische Interpretation gab und es daher nun an der Zeit sei, diesen Zahlen „das völlig gleiche Bürgerrecht" (Gauß 1831a [1973: 171]) wie den reellen Zahlen einzuräumen, die eine nicht

[2]Zu diesem Beispiel s. a. Kap. 3.5.1.

weniger umstrittene Geschichte aufweisen. Dies kann sich auch terminologisch auswirken, denn Bezeichnungen wie *unmögliche Zahlen* versperren den Weg zu mathematischer Anerkennung: „Hat man diesen Gegenstand [die komplexen Zahlen, H. B.] bisher aus einem falschen Gesichtspunkt betrachtet und eine geheimnisvolle Dunkelheit dabei gefunden, so ist diess grossentheils den wenig schicklichen Benennungen zuzuschreiben. Hätte man $+1$, -1, $\sqrt{-1}$ nicht positive, negative, imaginäre (oder gar unmögliche) Einheit, sondern etwa directe, inverse, laterale Einheit genannt, so hätte von einer solchen Dunkelheit kaum die Rede sein können" (Gauß 1831a [1973: 177f.]). Eine ähnliche Problematik werden wir anhand der *idealen Zahlen* diskutieren (Kap. 9.4.1).

Wir geben nun einen Überblick über die im folgenden behandelten Fragestellungen, nehmen einige methodische und thematische Eingrenzungen vor und legen die Struktur dieser Arbeit dar.

In metasprachlichen Äußerungen zur Fach- und besonders zur Wissenschaftssprache wird seit Jahrhunderten die Meinung vertreten, daß Metaphern schädlich sind, da sie nur rhetorisches Mittel seien und die Erkenntnis hemmen. Dem steht die Tatsache gegenüber, daß sich bildhafter Sprachgebrauch in ebendiesen Sprachschichten zahlreich und systematisch nachweisen läßt, eine Einsicht, die erst in neueren Arbeiten auf breiteres Interesse stößt. Daraus ergeben sich für die linguistische Forschung eine Reihe von Fragen, z. B. die nach den Quellen und den Grundlagen der Übertragung. Wir werden ebenso darauf eingehen, welche Funktionen und Wirkungen Metaphern auch hinsichtlich des mathematischen Forschungsprozesses haben und welche nicht. Dabei berücksichtigen wir auch die Fragen, welche Typen von Metaphern besonders häufig sind und wie systematisch Übertragungen vorgenommen werden.

Einen weiteren Schwerpunkt bilden die semantischen Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Bedeutungen mathematischer Fachausdrücke bzw. zwischen mathematischer und denjenigen gemein- oder fachsprachlichen Bedeutungen, die für die Semantik eines mathematischen Ausdrucks relevant sind. Dabei stellt sich uns auch die Frage, wie aus der historischen Semantik gut bekannte Begrifflichkeiten geeignet sind, semantischen Wandel in einer Wissenschaftssprache zu erfassen, und zwar insbesondere hinsichtlich der verschiedenen Formen des Bedeutungswandels (wie Metaphern oder Bedeutungserweiterungen) und deren Auslösern sowie hinsichtlich von Regelmäßigkeiten.

Gleichermaßen interessiert uns die Entstehung wissenschaftlicher Begriffe. Eine wichtige Frage ist, wie sich die Bildung wissenschaftlicher Begriffe systematisch beschreiben läßt und welche Aspekte dabei zu berücksichtigen sind.

Diese Fragen sind allgemein formuliert. Es wird darauf ankommen, sie zu präzisieren und schließlich zu beantworten. Wir werden die Fragen immer auch vor dem Hintergrund systematischer Unterschiede zwischen Wissenschafts-, Fach- und Gemeinsprache betrachten.

Für die praktische Arbeit werden einige Beschränkungen des Aufgabenbereichs vorgenommen.

Es wird im folgenden nicht die Mathematik im allgemeinen, sondern hauptsächlich die Algebra als Ausgangspunkt unserer Untersuchungen gewählt. Dieser Bereich wiederum wird auf Benennungen für einige grundlegende algebraische Strukturen und damit zusammenhängenden Begriffe eingeschränkt. Die Untersuchung geht damit weniger in die Breite als vielmehr in die Tiefe. Da sich ein nicht unerheblicher Teil der hier betrachteten Ausdrücke auf Grundlage der Arithmetik entwickelt hat, stellt diese Disziplin ebenfalls einen wesentlichen Bestandteil unserer Arbeit dar (s. Kap. 9 und Kap. 10).

Eine zeitliche Einschränkung besteht darin, daß die mathematische Terminologie, wie sie im 19. und zu Beginn des 20. Jahrhunderts entwickelt wurde, im Vordergrund steht. In diesem Zeitraum wurden grundlegend neue Objekte, insbesondere „Strukturen“, in die Mathematik eingeführt und es stellt sich daher die Frage, wie diese Objekte sprachlich bezeichnet werden (s. dazu Kap. 6).

Schließlich ist hervorzuheben, daß die Untersuchung sich nicht auf Fachsprache im allgemeinen, sondern auf Wissenschaftssprache richtet (Kap. 5). Dabei wiederum steht besonders die lexikalische Semantik im Vordergrund.

Der Aufbau der Arbeit ist wie folgt.

In einem theoretischen Teil werden die Grundlagen für die weiteren Untersuchungen gelegt. In den entsprechenden Kapiteln werden, sofern es sinnvoll und möglich erscheint, mathematische Beispiele gegeben.

In Kapitel 2 diskutieren wir zwei semantische Theorien, die Merkmalsemantik und die kognitive Semantik, die in der Linguistik einen prominenten Status haben. Durch einen Vergleich der beiden Theorien soll überprüft werden, inwieweit die in den jeweiligen Theorien entwickelten Begriffe und Methoden geeignet sind, neben gemeinsprachlichen auch fachsprachliche Ausdrücke semantisch zu erfassen.

Kapitel 3 gibt einen Überblick über Metaphertheorien. Die Perspektive ist dabei zum einen historisch, d. h. es werden einige wegweisende Entwicklungen in der Metapherntheorie dargestellt. Zum anderen gehen wir gesondert auf

Metaphern in der Wissenschaft aus der Perspektive der Wissenschaftsgeschichte bzw. -philosophie ein. Im Anschluß daran diskutieren wir einige Arbeiten, die sich vorwiegend mit Metaphern in der Mathematik befassen.

Das dritte theoretische Kapitel befaßt sich mit den Grundlagen des semantischen Wandels. Es werden gemeinsprachliche wie auch fachsprachliche Beispiele diskutiert, um in späteren Kapiteln Vergleiche zwischen Gemeinsprache und Mathematik zu ermöglichen. Es folgen einige Anmerkungen zu Grundbegriffen aus der Etymologie, da wir bestrebt sind, fachsprachliche Etymologien anzugeben und daher darlegen müssen, was wir darunter verstehen wollen.

In Kapitel 5 diskutieren wir Unterschiede zwischen Fach- und Gemeinsprache, die zur Erklärung der in den Fallstudien untersuchten sprachlichen Phänomene beitragen. Wir gehen dabei ausführlich auf die Bildung wissenschaftlicher Begriffe ein und entwickeln ein Modell, in dem deren wesentliche Bestandteile enthalten sind. Das Modell bildet die Grundlage unserer Diskussionen über die Entstehung mathematischer Fachbegriffe.

An die theoretischen Teile schließen sich im zweiten Teil ausführliche Fallstudien an. Wir stellen dabei zunächst unsere Datengrundlage vor (Kap. 6.2) und geben anschließend eine kurze Darstellung der Geschichte der Algebra im Umbruch vom 18. zum 19. Jahrhundert.

Es folgen einige einführende sprachliche Anmerkungen zur Geschichte der Algebra im genannten Zeitraum sowie zu mengentheoretischen Begriffen in der Mathematik (Kap. 7). Dabei stehen historisch-erläuternde sowie für uns relevante sprachliche Aspekte im Vordergrund. Wesentliche in den Fallstudien auftretende Begriffe werden anschließend in heutigen Begrifflichkeiten erläutert (Kap. 7.5).

In den Fallstudien selbst (Kap. 8 - 11) geht es um algebraische Begriffe, die im 19. Jahrhundert zentrale Bedeutung gewinnen, als Strukturbegriffe miteinander vergleichbar sind und die gleichzeitig wegen ihrer Vorgeschichte eine gute Möglichkeit bieten, sie unter dem Gesichtspunkt der historischen Semantik zu betrachten. Spezifische Gründe für die Wahl der Fallstudien finden sich zu Beginn der jeweiligen Kapitel.

In der ersten Fallstudie (Kap. 8) wird die Herkunft und Entwicklung des Begriffs der Gruppe aus linguistischer Perspektive untersucht.

Es folgt ein Kapitel über verschiedene Termini und über Metaphorik, die einen wichtigen lexikalischen Bestandteil der mathematischen Fachsprache ausmacht (Kap. 9). Im Rahmen dieses Kapitels werden einige Fachausdrücke auf deren

Zusammenhang zu mathematischen Metaphern und deren semantische Entwicklung hin untersucht. Besondere Beachtung findet dabei eine Zerlegungsmetaphorik, die im sog. „Fundamentalsatz der Arithmetik" eine prototypische Ausprägung gefunden hat. In diesem Rahmen gehen wir u. a. auch auf ideale Zahlen ein und diskutieren Permutationen und Gruppen bei Augustin-Louis Cauchy sowie die Herkunft der Begriffe „Isomorphismus" und „Struktur".

Im Anschluß folgt eine Untersuchung über den algebraischen Begriff „Körper" (Kap. 10). Hier werden neben semantischen und lexikalischen Fragen auch eine zeitgenössische Diskussion führender Mathematiker über sprachliche Fragen sowie komplexe Analogien in Richard Dedekinds algebraischer Zahlentheorie untersucht.

Den Abschluß der Fallstudien bildet eine Untersuchung des Begriffs „Schiefkörper" (Kap. 11). Der Schwerpunkt liegt dabei auf der Semantik des Adjektivs *schief* und seinen englischen und französischen Entsprechungen.

Die Ergebnisse unserer Untersuchungen werden abschließend zusammengefaßt und diskutiert (Kap. 11.5).

Konventionen

In diesem Abschnitt sollen kurz die wichtigsten Konventionen bezüglich unserer Zitierweise dargelegt werden.

Abkürzungen von Nachschlagewerken

Die vollständigen Titel finden sich im Literaturverzeichnis.

DAF	*Dictionnaire de l'Académie françoise.* Paris: Coignard, 1694
DHLF	*Dictionnaire historique de la langue française.* Paris 1992
DUW	*Duden. Deutsches Universalwörterbuch.* Mannheim 1996
DWB	*Deutsches Wörterbuch von Jacob und Wilhelm Grimm.* Leipzig 1854-1960
FEW	*Französisches etymologisches Wörterbuch.* Tübingen 1922-1978
IEW	*Indogermanisches etymologisches Wörterbuch.* Bern 1989
OED	*The Oxford English Dictionary.* Oxford 1989
TLL	*Thesaurus Linguae Latinae.* Leipzig 1900ff.
TLF	*Trésor de la langue française.* Paris 1971-1994
WNT	*Woordenboek der nederlandsche taal.* 's-Gravenhage et al. 1882-1998

Auf häufig verwendete einschlägige Enzyklopädien des 18. Jahrhunderts wird wie folgt verwiesen:

Encyclopædia Britannica	*Encyclopædia Britannica.* Edinburg 1771
Encyclopédie	*Encyclopédie, ou Dictionnaire raisonné des arts et des métiers* [...]. 1751-1780
Zedler	*Grosses vollständiges Universal Lexicon Aller Wissenschafften und Künste.* Halle/S., Leipzig 1732-1754

Auf weitere Nachschlagewerke wird jeweils mit Namen referiert, z. B. „Kluge" = *Etymologisches Wörterbuch der deutschen Sprache.* Berlin 1989.

Auf die einzelnen Artikel wird jeweils mit „s. v." verwiesen, sofern nicht aus dem Kontext eindeutig hervorgeht, um welchen Eintrag es sich handelt; bei besonders langen Artikeln unter zusätzlicher Angabe der Seitenzahl.

Zitierweise der Primär- und Sekundärliteratur

Beim Zitieren von Primärliteratur werden Kursivsetzungen im Original grundsätzlich beibehalten. Eigene Hervorhebungen werden durch fette Buchstaben markiert.

Ebenso wird die Originalrechtschreibung beibehalten; bei Abweichungen von der heutigen Form wird nicht eigens auf diese hingewiesen.

Für Sekundärliteratur gelten diese Konventionen nicht; auf Hervorhebungen im Original wird explizit hingewiesen.

Zitierweise bei Gesammelten Werken

Zur Verkürzung der Zitierweise bei gesammelten Werken wird wie folgt zitiert: „Dedekind (1871 [1932: 223])“ bezieht sich auf den Text Dedekind (1871) nach der Paginierung von Dedekind (1932). Sofern dies zur Unterscheidung erforderlich ist, werden zusätzliche Bandangaben gemacht: Cayley (1854a [1963, II: 123]).

Die Schriften von Galois werden alle unter Bezug auf Galois (1976) zitiert. Die Zitate stammen alle aus der Zeit zwischen etwa 1829 und 1832. Da ein wesentlicher Teil seiner Schriften nicht zu Galois' Lebzeiten veröffentlicht wurde, ist eine genauere Datierung oft nicht möglich. Zusätzlich wird eine Datierung dadurch erschwert, daß Galois seine Manuskripte nachträglich mit Anmerkungen versehen hat.

Teil I

Linguistische Grundlagen

Kapitel 2

Semantische Theorien

Eine für uns wesentliche Frage sind die semantischen Eigenschaften speziell fachsprachlicher Ausdrücke. Im vorliegenden Zusammenhang sind es besonders zwei Hauptpunkte, die die Wissenschaftssprache betreffen: erstens die Terminologie, insofern sie die Definitionen der Termini beinhaltet, und zweitens die Produktivität sprachlicher Ausdrücke, insbesondere die Übertragbarkeit von Bedeutungen.

Dementsprechend befassen wir uns im folgenden mit verschiedenen semantischen Theorien, die unter den Sammelbezeichnungen *Merkmalsemantik* und *kognitive Semantik* diskutiert werden sollen. Beide Typen von Semantik sind für die vorliegende Arbeit von besonderem Interesse. Die Merkmalsemantik hat durch ihren definitorischen Charakter einen spezifischen Bezug zur Wissenschaftssprache und deren Terminologie, während die kognitive Semantik über semantische Prozesse Aufschluß gibt, die bei der Bildung und Veränderung wissenschaftlicher Termini eine Rolle spielen.

Die Merkmalsemantik ist bekanntermaßen die ältere Theorie, während die Anfänge der kognitiven Semantik, zumindest in wichtigen Teilen, auf die 1970er Jahre zurückgehen. Mit den genannten Bezeichnungen sind keine homogenen Theorien gemeint, sondern Forschungsrichtungen und Theorieansätze, die jeweils Gemeinsamkeiten aufweisen, gleichzeitig aber in unterschiedlichen Ausprägungen auftreten. Wenn hier also von *der* Merkmalsemantik bzw. *der* kognitiven Semantik die Rede ist, so ist dies als Vereinfachung zu verstehen. In bezug auf die Merkmalsemantik sind z. B. verschiedene Ansätze verbreitet, die je nach Ausprägung und theoretischem Hintergrund als *europäische strukturelle Semantik*, *amerikanische strukturelle Semantik* bzw. *Komponentenanalyse* und *generative Semantik* bezeichnet werden, wobei nicht erörtert werden soll, wie treffend diese Bezeichnungen sind.

Es kann in diesem Kapitel nicht darum gehen, beide Theorien in ihrer Gesamtheit zu erfassen. Ebensowenig wird es Ziel der Diskussion sein, eine Entscheidung für bzw. gegen eine der beiden Theorien zu treffen. Statt dessen soll hier ein Überblick über beide Theorien gegeben werden mit dem Ziel, Kritikpunkte zu bewerten und festzustellen, welche Konzepte jeweils für unsere Zwecke einsetzbar sind und wo diese in dem hier vertretenen Ansatz ihren theoretischen Platz haben. Zusätzliche Anmerkungen aus der Perspektive der Fachsprachenlinguistik folgen in Kapitel 5.

Wir gehen zunächst auf die Merkmalsemantik ein, da es sich um die ältere Theorie handelt und sie zudem mit einem engeren Bedeutungsbegriff arbeitet als die kognitive Semantik.

2.1 Merkmalsemantik

Die Merkmalsemantik ist für die Semantik auch heute noch von großer Bedeutung; sie hat allerdings seit etwa 1970 Konkurrenz durch holistisch geprägte Ansätze bekommen. Im folgenden werden die wichtigsten theoretischen Annahmen und Vorgehensweisen zusammengefaßt und diskutiert.[1]

Der Grundgedanke der Merkmalsemantik besteht in einer Übertragung theoretischer Erkenntnisse aus der Phonologieforschung auf die Semantik. Dabei wird angenommen, daß Erkenntnisse über den Aufbau der phonologischen Komponente auf die Semantik übertragbar sind. Gemeint sind damit Ansätze aus den 1930er und 1940er Jahren (Prager Schule), bei denen Phoneme in „distinktive Merkmale“ zerlegt und dadurch z. B. von anderen Phonemen unterschieden wurden. In der Semantik entspricht dem die Annahme, daß sich der Inhalt sprachlicher Zeichen in Kombinationen kleinerer Einheiten, zumeist als *Merkmale*, *Komponenten* oder *Seme* bezeichnet, zerlegen läßt.

Lüdi (1985: 65-71) faßt vier Grundannahmen der Merkmalsemantik zusammen, die seiner Meinung nach in obiger Hypothese konvergieren. Diese sollen hier kurz vorgestellt werden, um dann auf einige problematische Aspekte der Merkmalsemantik einzugehen.

Die erste dieser Grundannahmen besteht in dem „Prinzip der Kombinatorik“. In bezug auf die Semantik ist damit gemeint, daß Bedeutungen in kleinste Be-

[1] Ausführliche Übersichten geben Sprengel (1980) und Lüdi (1985), weitere Übersichtsliteratur bieten Lyons (1995: 102-130), Cruse (2000: 239-261), Busse (1992: 29-37), Lipka (1986) und Schippan (1992: 181-187).

standteile, semantische Merkmale, zerlegt werden können, ohne daß dabei ein Rest entsteht, und sich die Bedeutungen wiederum als Kombination dieser Merkmale auffassen lassen. Nun werden durch distinktive Merkmale schon in der Phonologie nicht alle Eigenschaften von Lauten beschrieben; so werden etwa die artikulatorischen Merkmale nicht im Einzelnen erfaßt. Analog dazu ist festzustellen, daß die Merkmalsemantik mit einem vergleichsweise engen theoretischen Bedeutungsbegriff arbeitet. Eine vollständige Erfassung „aller" semantischen Aspekte eines Wortes wird in der traditionellen Merkmalsemantik nicht angestrebt, weil ihre Aufgabe im Rahmen des Strukturalismus nur die Aufdeckung von Beziehungen zwischen Bedeutungen ist.

Die zweite Annahme besteht in dem „Prinzip der Analysierbarkeit", also darin, daß „Wortbedeutungen ... der semantischen Analyse zugänglich" seien (Lüdi 1985: 68). Dazu bedient man sich u. a. der eigenen Intuition und der Analyse durch Synonyme. Bei letzteren wird davon ausgegangen, daß verwandte Bedeutungen auf zumindest teilweise identische Merkmale verweisen.

Drittens gilt das „Prinzip der Paraphrasierbarkeit", das die Fähigkeit von Sprechern bezeichnet, komplexe Bedeutungen durch „primitive" sprachliche Ausdrücke zu umschreiben. Für die Merkmalsemantik ist es dabei wesentlich, die Objektsprache von der Metasprache zu trennen. Wie wir noch sehen werden, stellt dies ein Hauptproblem der Merkmalsemantik dar.

Eine vierte Grundannahme der Merkmalsemantik ist das „Prinzip der Distinktivität". Der Saussuresche Begriff der Distinktivität wurde, wie gesagt, zunächst in der Phonologie entwickelt und später auf die Semantik übertragen. Demnach können „lexikalische Bedeutungen *restfrei* in *distinktive*, aus *Oppositionsbeziehungen* gewonnene Merkmale zerlegt werden" (Lüdi 1985: 71; Hervorhebung im Original). Auch hier wird deutlich, daß es nicht um eine vollständige semantische Beschreibung von einzelnen Ausdrücken geht, sondern um deren Beziehungen (Abgrenzung usw.) zu anderen Ausdrücken.

Betrachten wir ein einfaches Beispiel.[2] Die Bedeutung von *Mann* läßt sich durch Vergleiche mit Synonymen oder verwandten Begriffen ermitteln. Der Vergleich mit *Frau*, *Junge* und *Mädchen* etwa ergibt als relevante Merkmale „menschlich", „männlich" und „erwachsen". Die Bedeutung von *Frau* unterscheidet sich durch das zweite Merkmal, die von *Junge* und *Mädchen* zusätzlich durch das dritte. Die Bedeutung von *Mann* läßt sich also in drei Merkmale zerlegen, deren Kombination die Bedeutung von *Mann* vollständig (restfrei) erfaßt.

[2]Cf. Lyons (1995: 108), Sprengel (1980: 149).

Nun sind gegen die Merkmalsemantik verschiedene Einwände erhoben worden. Im obigen Beispiel etwa, so scheint es, wurden die semantischen Merkmale durch Heranziehen semantisch verwandter Ausdrücke ermittelt. Dies ist eine relationale Vorgehensweise, für die jedoch die introspektive Intuition des Analysierenden eingesetzt wird. Auf diese Weise werden Merkmale nicht tatsächlich gefunden, sondern lediglich verwandte Ausdrücke aufgrund von bereits bekannten Merkmalen zusammengestellt. Es ergibt sich die Gefahr einer zirkulären Argumentation.[3] Letztlich kann man auf die Introspektion schwerlich verzichten, sie läßt sich aber durch den Einsatz von Korpora und – dies ist aufwendig, aber zumindest bei der Erforschung der heutigen Sprache grundsätzlich möglich – Informantenbefragungen ergänzen (Sprengel 1980: 159).

Ein weiterer Kritikpunkt betrifft die Trennung zwischen Objekt- und Metasprache. Semantische Merkmale werden gewöhnlich äußerlich kenntlich gemacht (wie in obigem Beispiel), doch die (metasprachlichen) Merkmale selbst werden mit Hilfe der Objektsprache benannt. Auf diese Weise werden Objekt- und Metasprache miteinander vermengt (Lyons 1977: 335). Dieses Problem betrifft auch die Frage, ob semantische Merkmale sprachspezifisch oder universal sind. Dies ist letztlich eine offene Frage (s. etwa Cruse 2000: 256). In dieser Arbeit wird an der weniger weitreichenden Annahme ihrer Einzelsprachlichkeit festgehalten. Ein Argument dafür ist z. B. die bekannte Tatsache, daß sich semantische Relationen wie Hyponymie und Synonymie nicht ohne weiteres von einer auf eine andere Sprache übertragen lassen.[4]

Die Annahme, daß sich Bedeutungen „restfrei“ durch semantische Merkmale angeben lassen, ist illusorisch und wird auch in dieser starken Form kaum vertreten.[5] Ein eng verwandtes Problem ist das der Zusammensetzung einer Bedeutung aus den einzelnen Merkmalen in dem Sinne, daß die betreffende Bedeutung insgesamt als Struktur vorstellbar ist. Busse (1992: 33) bemerkt dazu: „Nur wenn die einzelnen ‘Merkmale’ in einer gerichteten Beziehung zueinander stehen, kann ernsthaft von einer Bedeutungs-‘Struktur’ gesprochen werden. Viele Darstellungen

---

[3] S. Lyons (1977: 113), Sprengel (1980: 158), Busse (1992: 36).

[4] Blank (1997: 58). Dort finden sich auch weitere Argumente.

[5] Busse (1992: 33f.), Lüdi (1985: 98). Als einen Vertreter dieser Ansicht läßt sich mit Lutzeier (1985a: 91f.) z. B. Bendix (1971: 393) ansehen, der unter der Definition der Bedeutung eines sprachlichen Ausdrucks „a statement of the semantic components necessary and sufficient to distinguish the meaning paradigmatically from the meanings of all other items in the language“ versteht.

der Merkmalsemantik lassen dieses Problem jedoch unbeantwortet".[6] Schon Lyons (1977: 319-322) stellt fest, daß sich Bedeutungen im allgemeinen nicht einfach als Konjunktion von Merkmalen auffassen lassen, und daß semantische Relationen, z. B. hierarchische, wieder das Problem aufwerfen, anhand welcher Kriterien über die Relationalität entschieden werden könne.

Als vorläufiges Fazit läßt sich festhalten, daß innerhalb der Merkmalsemantik einige weitreichende theoretische Annahmen relativiert bzw. gänzlich zurückgenommen wurden. Sie wirft nach wie vor zahlreiche theoretische und methodische Probleme auf, die in der Forschung umstritten und nicht entschieden sind. Zwei Punkte seien hervorgehoben: Die Merkmalsemantik verwendet erstens einen engen Bedeutungsbegriff und will nur einen Teil des Gegenstandsbereiches der Semantik beschreiben bzw. erklären (sie erhebt insbesondere nicht den Anspruch, die Bedeutung von sprachlichen Ausdrücken vollständig zu beschreiben), und zweitens treten im Rahmen der Merkmalsemantik bei der konkreten semantischen Analyse schnell Schwierigkeiten auf, sobald man den Bereich der Lehrbuchbeispiele verläßt. Für die semantische Beschreibung von fachsprachlichen Ausdrücken kann sie jedoch durchaus herangezogen werden, wie in Kap. 5.5 ausgeführt wird.

2.2 Kognitive Semantik

Unter der Bezeichnung *kognitive Semantik* werden, wie bereits angesprochen, verschiedene semantische Theorien verstanden, die voneinander unterschieden werden müssen. Im folgenden wollen wir darunter den Ansatz verstehen, wie er z. B. von Lakoff (1987), Langacker (1987, 1988, 1998) und von Kleiber (1998) vertreten wird.[7]

Vertreter der kognitiven Semantik sehen die Ursprünge ihrer Theorie u. a. beim späten Wittgenstein (Wittgenstein 1969)[8] oder in der Experimental- und der Gestaltpsychologie. Selten wird auch auf Gemeinsamkeiten zur philologisch orientierten Forschung aufmerksam gemacht, wie sie sich im 19. Jahrhundert ent-

[6] Ähnlich äußert sich z. B. Cruse (2000: 259).

[7] S. Taylor (1995) für eine Unterscheidung zweier grundlegend verschiedener theoretischer Ansätze. Kleiber (1998) diskutiert zudem, basierend auf Entwicklungen in den Arbeiten Roschs, verschiedene Strömungen innerhalb der kognitiven Semantik im hier dargelegten Sinne, die „Standardversion" und die „erweiterte Version". S. a. Lakoff (1987: 42f.). Übersichten finden sich bei Cruse (1990, 2000: 125-142), Ungerer - Schmid (1996) und Taylor (1995). Eine kritische Bestandsaufnahme nimmt Blutner (1995) vor.

[8] Zur Frage der Berechtigung dieser Herleitung nimmt Givón (1986) kritisch Stellung.

wickelt hat (Geeraerts 1988). In bezug auf die Experimentalpsychologie werden dann gewöhnlich neben einigen Arbeiten zur Farbkategorisierung (Berlin - Kay 1969) verschiedene Arbeiten von Rosch herangezogen.[9] Rosch stellt in ihren früheren Arbeiten u. a. fest, daß Kategorien durch eine Kernbedeutung strukturiert sind und sich die Mitgliedschaft in einer bestimmten Kategorie nicht nur durch notwendige und hinreichende Bedingungen entscheidet, sondern sich durch Ähnlichkeit zum „repräsentativsten“ Exemplar der Kategorie, dem Prototyp, abstuft (Rosch 1973b: 112).

In der kognitiven Semantik werden nun derartige Ergebnisse aus der Psychologie auf die Semantik übertragen.[10] Dazu ist zunächst anzumerken, daß diese Übertragbarkeit selbst innerhalb der kognitiven Semantik keineswegs allgemein akzeptiert wird. Z. B. macht Kleiber (1998: 6) sehr deutlich, daß beide Ebenen zu trennen sind: „Die Prototypentheorie [gemeint ist die psychologische Theorie, H. B.] ist eine Theorie der Kategorisierung und daher nicht in erster Linie eine Theorie der Wortsemantik“. Zweitens wird bei dieser Übertragung zumeist auf die frühen Arbeiten Roschs Bezug genommen und nicht unbedingt auf ihre späteren Arbeiten (etwa ab 1978), in denen Rosch ihre Erkenntnisse revidiert hat (Kleiber 1998: 111, passim). Wolski (1988: 416) kritisiert in diesem Zusammenhang, daß die Ergebnisse Roschs zumeist unkritisch als gesicherte psychologische Erkenntnisse angesehen werden.

Folgende Grundannahmen liegen der kognitiven Semantik zugrunde:[11]

- Die Bedeutung sprachlicher Ausdrücke wird als kognitive Kategorie aufgefaßt bzw. als durch kognitive Kategorien bestimmt.
- Kognitive Kategorien haben eine zentrale Instanz, einen Prototypen; die anderen Mitglieder der Kategorie weisen Abstufungen dahingehend auf, wie typisch oder repräsentativ sie für die Kategorie sind.
- Kognitive Kategorien haben unscharfe Grenzen.
- Lexikon und Enzyklopädie lassen sich nicht strikt voneinander trennen.

Die Kritik an diesen Annahmen zielt auf verschiedene Aspekte: auf die Methodik der psychologischen Experimente bzw. die Interpretation der Ergebnisse, auf die Unklarheit und den Status zentraler Begriffe der Experimentalpsychologie und der

[9] Z. B. Rosch 1973a, 1975a, 1977, 1978.

[10] Keller (1995: 83), Wolski (1988: 417).

[11] Nach Blutner (1995: 237), Fritz (1998: 99), Geeraerts (1997: 11), Schmid (2000: 33).

kognitiven Semantik, insbesondere des Begriffs „Prototyp“, und drittens auf die Übertragbarkeit der Ergebnisse dieser Experimente auf die Semantik. Damit geht die Kritik in dieselbe Richtung wie bei der Merkmalsemantik, denn auch dort werden, wie wir gesehen haben, die Methodik, der Status der zentralen Begriffe und die Übertragbarkeit, in diesem Fall von der Phonologie auf die Semantik, diskutiert. Im folgenden gehen wir kurz auf einige dieser Punkte ein.

Die Kritik an der Methodik einiger psychologischer Experimente, die innerhalb der kognitiven Semantik zitiert werden, bezieht sich häufig auf die Konstruktion der Tests. So kritisiert Schmid (2000: 34f.) die Informantenbefragung bei Berlin - Kay (1969), bei der seiner Ansicht nach bereits durch die Formulierung der Aufgaben bzw. Fragen gewünschte Ergebnisse suggeriert werden. Weitere Kritik übt auch Wolski (1988: 419) in bezug auf einige Arbeiten Roschs.

Bei Rosch erscheint der Begriff „Prototyp“ (*prototype*) in Zusammenhang mit der experimentellen Untersuchung von Farben und Formen (Rosch 1973a), und zwar als „best example“ einer Kategorie. Sie vermutet, daß sich der Begriff auch auf andere Kategorien übertragen läßt (Rosch 1973a: 349), und später (Rosch 1975c: 192) wird diese Vermutung explizit auf semantische Kategorien erweitert. In einer Veröffentlichung desselben Jahres wird ebendiese Übertragbarkeit auf semantische Kategorien jedoch explizit verneint (Rosch 1975b: 223). Hier zeigt sich, daß die Unklarheiten des Prototypenbegriffs bereits in der experimentellen Psychologie angelegt sind. Es sei an dieser Stelle bereits erwähnt, daß Rosch durchgehend von dem Begriff „Merkmal“ Gebrauch macht: Der Prototyp bestimmt sich nämlich mittels der „cue validity“ (Rosch - Mervis 1975: 575). Dieser Zahlenwert gibt den „Vorhersagbarkeitsgrad einer Eigenschaft bzw. eines Attributs für ein Objekt einer Kategorie“ (Kleiber 1998: 52) an. Kleiber erläutert diesen Begriff am Beispiel der Kategorie VOGEL, bei der das Merkmal „Federn haben“ eine hohe „cue validity“ habe, „weil (fast) alle Vögel Federn haben und weil keine andere Kategorie Federn aufweist“ (Kleiber 1998: 53). Im Unterschied zu klassischen Theorien der Kategorisierung wird hier nicht vorausgesetzt, daß diese Merkmale notwendig und hinreichend sind, d. h. auch ein federnloser Vogel gehört zu dieser Kategorie. In diesem Zusammenhang spielt der Begriff der „Salienz“ (*saliency*) eine wichtige Rolle: Die Merkmale „hat Federn“ und „kann fliegen“ sind nicht notwendig für die Kategorie „Vogel“, aber sie geben dennoch Auskunft darüber, für wie typisch ein Mitglied in Relation zu einer Kategorie angesehen wird (Blank 1997: 81).

Zur kognitiven Repräsentation semantischer Kategorien meint Rosch (1975b: 222), daß „pictures may be closer to the nature of the underlying representation than are words". In der Tat können – in der Sprache der Semantik ausgedrückt – Bedeutungen eines Wortes, insbesondere im Fall von Konkreta, häufig auch eine visuelle Komponente haben. Blank (1997: 57) weist darauf hin, daß z. B. im Falle von *Tisch* die Annahme plausibel ist, daß nicht nur einzelne Merkmale, sondern auch eine visuelle Repräsentation, also eine bildhafte Vorstellung, zu dessen Bedeutung gehören. Dies schließt keineswegs aus, daß die Bedeutung von *Tisch* gleichzeitig mittels semantischer Merkmale beschreibbar ist. Diese Entwicklung in den Arbeiten Roschs führt letztlich dazu, daß sie den Begriff des Prototypen im Sinne des besten Exemplares einer Kategorie verwirft (Rosch 1978). Daraus entwickelt sich ein veränderter Prototypenbegriff, wie er bei Lakoff (1987: 68-76) und in Kleibers „Erweiterter Version" beschrieben wird (Kleiber 1998).

Wir werden im folgenden die Gleichsetzung sprachlicher und kognitiver Kategorien vermeiden und die Bezeichnung *Prototyp* für ein herausgehobenes Mitglied einer Kategorie verwenden (Cruse 1990: 383). Damit können Prototypen, zumindest bei manchen Typen von Kategorien (dazu Blutner 1995: 241f.), als Bezugspunkte für andere Kategorienmitglieder dienen. Dies gilt besonders auf der *Basisebene* (*basic level* bei Rosch et al. 1976: 382), d. h. eine im Rahmen einer Hierarchie „mittlere" Ebene. Z. B. ist es bei einer abstrakteren Kategorie wie „Tier" und auch bei einer sehr speziellen Kategorie wie „Rotkehlchen" viel schwieriger, prototypische Mitglieder anzugeben als bei der dazwischenstehenden Kategorie „Vogel" (Blank 1997: 81).

Es gibt einige weitere Begriffe aus dem Rahmen der kognitiven Semantik, die in unserem Zusammenhang etwas besser einsetzbar sind. Langacker (1988: 53) geht von der Erkenntnis aus, daß sprachliche Konzepte andere Konzepte voraussetzen können, d. h. daß sie in bezug auf sog. „Bereiche" (*domains*) charakterisiert werden (Langacker 1988: 50). Er erläutert dies am Beispiel *Hypotenuse* (*hypotenuse*). Die Bedeutung dieses Ausdrucks ist nur in bezug auf ein rechtwinkliges Dreieck charakterisierbar, und letzteres Konzept setzt wiederum die Konzepte Dreieck, Seite eines Dreiecks und Winkel voraus: Eine Hypotenuse ist diejenige (eindeutig bestimmte) Seite eines rechtwinkligen Dreiecks, die dem rechten Winkel gegenüberliegt. Sie wird dabei hervorgehoben oder „profiliert" (*profiled*), so daß sich das „Profil" (*profile*) von der „Basis" (*base*), der Menge der vorausgesetzten Konzepte, abhebt (Langacker 1988: 58f.).[12] Diese Begriffe werden mit den gestaltpsychologischen Begriffen „Figur" (*figure*) und „Hintergrund" (*ground*) in Verbin-

[12] In diesem Fall ist die Basis das Konzept „rechtwinkliges Dreieck", das Profil das Konzept „Hypotenuse".

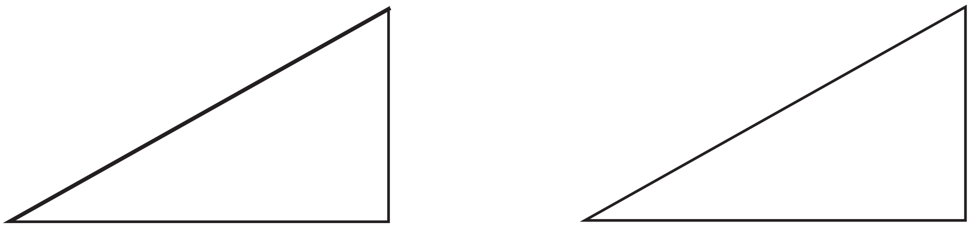

Abbildung 2.1: Hypotenuse und rechtwinkliges Dreieck (nach Langacker 1988: 59)

dung gebracht (d. h. sie werden nicht allein linguistisch begründet), nach denen sich im Fall obigen Beispiels die Hypotenuse (die Figur) vom rechtwinkligen Dreieck (dem Grund) perzeptorisch abhebt. Besonders bei der kognitiv-semantischen Analyse von Präpositionen haben sich die Bezeichnungen *trajector* und *landmark* für *figure* und *ground* eingebürgert. Der Ausdruck *landmark* wird im folgenden durch *Bezugsgröße* wiedergegeben.[13]

Obiges Beispiel führt uns auf ein Problem, denn die Relation „gegenüberliegen“ ist mit merkmaltheoretischen Mitteln nicht leicht zu erfassen. Dies zeigt schon ein Blick auf einen Lexikoneintrag zu „gegenüber“: „bezeichnet eine frontal entgegengesetzte Lage“ (DUW) bietet offenkundig keine Definition. Die schematisch-visuelle Repräsentation Langackers, in der die entsprechende Seite hervorgehoben ist (Abb. 2.1), ist hier intuitiv einleuchtender. Allerdings ist auch Langackers Darstellung nicht ausreichend, denn die Basis von ‘Hypotenuse’ ist ja ein rechtwinkliges Dreieck, doch der rechte Winkel wird in Langackers Repräsentation nicht profiliert.[14]

Gerade bei geometrischen Begriffen spielt es oft eine Rolle, wie ein- und dasselbe Objekt graphisch dargestellt und in welchen Erfahrungszusammenhang es gebracht wird. Zur Erläuterung lassen sich wiederum rechtwinklige Dreiecke heranziehen. In Abb. 2.2 sind zwei deckungsgleiche Dreiecke abgebildet (das rechte Dreieck stellt das um 90° gedrehte linke Dreieck dar). Im Anschluß an von Heron eingeführte Begrifflichkeiten wurde das Wort *Kathetete* so verwendet, daß es diejenige, eindeutig bestimmte Seite eines rechtwinkligen Dreiecks bezeichnet, die

[13] Das dt. *Landmarke* ist nur eingeschränkt gebräuchlich und semantisch nur eine ungenaue Entsprechung für *landmark*.

[14] Zudem sind in Langackers Repräsentation die Katheten, also die beiden anderen Seiten des Dreiecks, gleich lang (in obiger Abbildung nicht wiedergegeben), so daß hier eher ein rechtwinkliges *und gleichschenkliges* Dreieck profiliert wird.

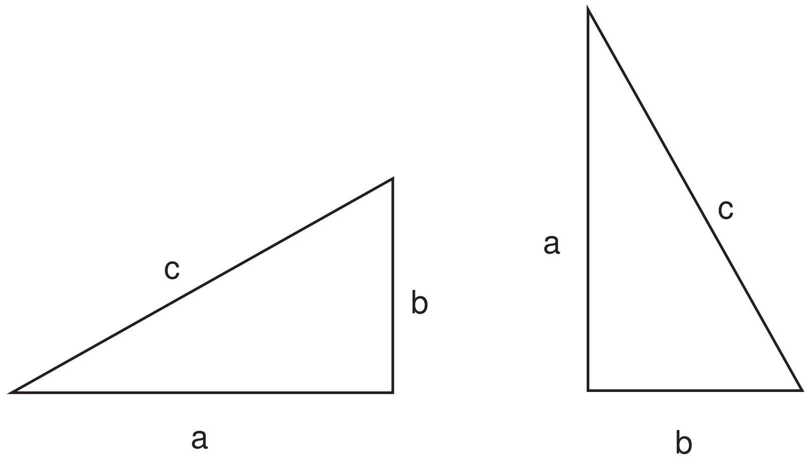

Abbildung 2.2: Rechtwinklige Dreiecke

am rechten Winkel anliegt und zudem senkrecht steht. Mit den Bezeichnungen aus Abb. 2.2 ist dann im linken Dreieck b die Kathete, im rechten Dreieck jedoch a.[15] Der Begriff „Kathete“ hing damit ursprünglich nicht alleine von dem betrachteten Dreieck ab, sondern davon, wie es gezeichnet wurde. Dies ergibt sich daraus, daß die jeweils horizontal dargestellte Seite (im linken Dreieck die Seite a, im rechten die Seite b) grundsätzlich als *Basis* bezeichnet wurde. Den Ausgangspunkt der Begriffsbildungen bildet also diejenige Seite, auf der das Dreieck „steht“, und der Begriff „Kathete“ hängt dann davon ab. Die Begrifflichkeiten erklären sich aus dem Kontext der Feldmessung, in der rechtwinklige Dreiecke eine wesentliche Rolle spielten. Die Basis entspricht dabei einer Strecke auf der Erdoberfläche, die Kathete der Höhe des Objektes (*káthetos* ist ursprünglich ein Fachausdruck für ‘Lot’), und die Hypotenuse ist die Visierlinie.[16]

2.3 Diskussion

Merkmale werden in der kognitiven Semantik nicht grundsätzlich abgelehnt, doch scheint sich in der Wahrnehmung zahlreicher Autoren genau daran der grundlegende Unterschied zwischen beiden Theorien festzumachen. Zu diesem Eindruck hat vermutlich Fillmores Aufsatz mit dem bezeichnenden, da auf die „Alternativität“

[15] Im heutigen Sprachgebrauch wären a und b bei beiden Dreiecken Katheten.
[16] S. Tropfke (1940: 83-87).

der Theorie hinweisenden Titel „An alternative to checklist theories of meaning“ (Fillmore 1975) ebenso beigetragen wie Aussagen wie die Dewells (1994: 352), der das Ziel seiner Untersuchung der Präposition *over* so formuliert: „eliminating propositional features altogether“. Tatsächlich betonen führende kognitive Semantiker durchaus die Wichtigkeit semantischer Merkmale; z. B. stellt Kleiber (1998: 47) klar, daß „die Prototypensemantik – im Gegensatz zu dem, was oft behauptet wird – in keiner Weise das Prinzip der Komponentialität der Wortbedeutung (d. h. die Berechtigung einer Analyse nach semantischen Merkmalen) in Frage stellt. ... Der Prototypenansatz ist eine Alternative zu den notwendigen und hinreichenden Merkmalen, aber nicht zu den semantischen Merkmalen schlechthin“. Geeraerts (1989: 588) geht diesbezüglich noch einen Schritt weiter, wenn er semantische Merkmale als unverzichtbar bezeichnet: „The prototypists' reaction against the featural approach had ... the negative side effect of creating the impression that prototypical theories rejected any kind of componential analysis. This is a misconception for the simple reason that there can be no semantic description without some sort of decompositional analysis“. Merkmale werden also in beiden Theorien zur Bestimmung und Beschreibung von Bedeutungen verwendet.

Wir werden am Merkmalsbegriff festhalten, auch wenn damit, wie oben gesehen, verschiedene Gefahren wie die der Zirkularität verbunden sind. Letztere scheint in gewissen Maßen aber nicht vermeidbar zu sein, zumindest bietet keine semantische Theorie einen grundlegenden Ausweg aus diesem methodischen Problem. Merkmale sind für uns deswegen wichtig, weil eine semantische Zerlegung schon aus methodischen Gründen für die linguistische Beschreibung unerläßlich ist, z. B. um semantische Beziehungen zwischen verschiedenen Bedeutungen eines Wortes herstellen zu können. Wir verwenden Merkmale nicht nur bei der Beschreibung gemeinsprachlicher Wörter, sondern verwenden sie auch deshalb, weil sie zumindest teilweise auf Termini anwendbar sind (Kap. 5.5). Auch die Einschätzung, daß semantische Merkmale „letztlich nur beschreiben [können], wie sich eine Bedeutung innerhalb eines Systems von anderen Bedeutungen abgrenzt“ (Blank 1997: 59), spricht für eine prinzipielle Relevanz für Fachsprachen, da Fachausdrücke immer Teil eines terminologischen Systems sind.

„Merkmal“ und „Prototyp“ sind Begriffe auf unterschiedlichen Abstraktionsebenen, die sich gegenseitig nicht ausschließen (Blank 1997: 60). Es gibt verschiedene Versuche, beide Theorien miteinander zu verbinden. Dabei läßt sich die Tendenz feststellen, daß eine Verteilung je nach Wortart oder auch nach Begriffsart unternommen wird. Als Grundthese formuliert schon Schwarze (1982: 7): „daß wir es im Lexikon mit ihrer Natur nach recht unterschiedlichen Arten von Bedeutung zu tun haben, und daß den verschiedenen Arten von Bedeutungen verschiedene Bedeutungsbegriffe und verschiedene Analysetechniken adäquat sind". Z. B. wird in der Literatur häufig angeführt, daß die Prototypenidee besonders bei Konkreta (Substantiven) zur Geltung kommt.[17] Gleichzeitig sind Merkmale in vielen Fällen die einzige Alternative: „Wo die völlige bildhafte Repräsentationen nicht möglich ist, z. B. bei Adjektiven oder Verben, kommt man um eine begriffliche Zerlegung – sei es in Merkmale oder andere Definitionen – gar nicht herum" (Blank 1997: 60).

Insgesamt halten wir Folgendes fest: Die beiden hier vorgestellten Ansätze, Merkmalsemantik und Prototypensemantik, sind nicht zufällig gewählt, sondern wesentlich mit der vorliegenden Fragestellung verbunden: Während die Merkmalsemantik besonders geeignet ist, definitorische Beziehungen zwischen Termini zu erfassen, haben die Prototypensemantik und verwandte Ansätze etwas zur Übertragbarkeit von Bedeutungsträgern, zu ihrem produktiven Gebrauch und zur Frage der Gewinnung neuer Einsichten durch Übertragung in andere Bereiche zu sagen.

[17] S. etwa Kleiber (1998: 94), Lipka (1986: 89).

Kapitel 3

Metapher

3.1 Einleitung

Metaphern werden häufig als Bestandteil rhetorisch ausgeschmückter Rede gesehen, nicht aber als sprachliche Erscheinung, die in praktisch jeder alltäglichen Äußerung vorkommt. Gerade die „Alltäglichkeit“ der Metapher aber ist der Ausgangspunkt von Untersuchungen besonders in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts. Dabei kommt der Arbeit von Lakoff und Johnson (1980) deswegen besondere Bedeutung zu, weil sie zu einer ungeheuren Popularisierung der Ansicht geführt hat, daß Metaphern, insbesondere in systematischen und nicht idiosynkratischen Ausprägungen, fast überall in der Sprache bzw. in der Kognition nachzuweisen sind.

In den Wissenschaftssprachen gelten Metaphern zum Teil auch heute noch als nicht wünschenswert oder sogar als schädlich, da sie in der Meinung mancher Autoren u. a. dem Objektivitätsideal der Wissenschaft widersprechen. Auch hier hat jedoch eine Neueinschätzung stattgefunden und es wurde der Nachweis geführt, daß Metaphern in der Wissenschaft reichlich vorkommen und sogar die Grundlage von Theorien bilden können. Diese Argumentationen beruhen allerdings nicht immer auf detaillierten Analysen empirischem Materials, sondern oft auf hauptsächlich intuitiven theoretischen Überlegungen. Es liegen nach wie vor nur wenige Einzeluntersuchungen einzelner Fach- oder Wissenschaftssprachen oder auch nur zu einzelnen Bildbereichen vor.

Wir geben in diesem Kapitel einen Überblick über verschiedene Theorien der Metapher und gehen dabei sowohl auf linguistische als auch auf wissenschaftshistorische bzw. -theoretische Arbeiten ein. Insbesondere werden einige spezielle Arbeiten zur bildhaften Sprache in der Mathematik diskutiert. Unser Ziel ist es dabei, eine Verständigung über den Begriff der Metapher zu erreichen und einige weitere Begrifflichkeiten wie die der Analogie und des Wortfeldes einzuführen, die wir später in den Fallstudien verwenden wollen.

3.2 Zur Metapherntheorie

Die Literatur zum Thema Metapher ist nahezu unüberschaubar und in den letzten Jahrzehnten geradezu explosionsartig angestiegen. Es kann hier also nur darum gehen, einen Überblick über die Thematik zu erlangen und davon ausgehend zu speziellen Themenbereichen, die für uns relevant sind, vorzustoßen.[1]

3.2.1 Historisches

Metaphern werden bereits seit der klassischen Antike thematisiert. Aristoteles beschäftigt sich in mehreren seiner Werke mit dem Begriff, den er als eine Übertragung eines Namens definiert (*Poetik* xxi.7). Metaphern sind für ihn im Bereich der Literatur und der Rhetorik situiert und können sowohl neue Einsichten vermitteln als auch zum Zweck der Überzeugung verwendet werden. Dies kann auch im Rahmen der Prosa geschehen, sofern die Metaphern „angemessen" sind, d. h. dem bezeichneten Gegenstand entsprechen. In seiner Theorie finden metaphorische Übertragungen auf der Wortebene statt, eine Sicht, die heute häufig kritisiert wird (s. u.). Dies gilt auch für weitere Annahmen bei Aristoteles: Metaphern stellen einen „uneigentlichen" Sprachgebrauch dar, sie können nur von wenigen sprachgewandten Einzelpersonen verwendet werden und fußen auf objektiven Ähnlichkeiten zwischen Gegenständen (*Poetik* xxii.17).[2] Aristoteles' Metapherntheorie ist bis in die heutige Zeit von großem Einfluß geblieben und bildete, in der Interpretation von anderen klassischen Autoren, auch die Grundlage für das Mißtrauen gegenüber Metaphern in der Wissenschaft bzw. für deren Ablehnung. Es muß aber deutlich gemacht werden, daß Aristoteles' Betrachtungen zur Metapher bzw. die klassische Rhetorik meist eingeschränkt rezipiert und teilweise verzerrt wurden, d. h. es wurden besonders diejenigen Äußerungen hervorgehoben, in denen Metaphern als verzichtbare „Ornamente" dargestellt wurden. Diese Interpretation wird der Rhetorik jedoch nicht gerecht, denn, wie Kittay (1987: 2-4) darlegt, hat schon Aristoteles durchaus kognitiv bedeutsamere Funktionen von Metaphern gesehen.

[1]Der folgende Überblick lehnt sich teilweise an Pulaczewska (1999: 7-16), Kittay (1987: 1-11) und Debatin (1995: 1-22) an.

[2]Zusammenfassung dieser Kritikpunkte nach Pulaczewska (1999: 8).

Spätestens seit der Renaissance wird die Metapher von zahlreichen Wissenschaftlern und Philosophen in nicht selten scharfer Ausdrucksweise verurteilt. Dies gilt bei zahlreichen Wissenschaftlern nicht nur für Metaphern, sondern für (Wissenschafts-)Sprache überhaupt. Diese sollte, um nur einen Aspekt herauszugreifen, semantisch präzise bzw. referentiell eindeutig sein, ein Kriterium, das Metaphern – in der vorherrschenden Aristotelischen Sichtweise – gerade *nicht* erfüllen.[3]

Ab dem 19. Jahrhundert finden sich vereinzelt und in verschiedenen Gebieten wie der Philosophie und der Philologie veränderte Ansichten zur Metapher. Bei Nietzsche etwa erscheinen sie als allgegenwärtiges Phänomen, nicht als Ausnahmefall, und er betrachtet sie zudem als Erkenntnisinstrument, das nicht nur auf rein sprachlicher, sondern auch auf kognitiver Ebene anzusiedeln ist (Pulaczewska 1999: 9).[4]

Auch in der philologischen Forschung des 19. Jahrhunderts werden Metaphern oft als eine weit verbreitete Erscheinung angesehen, wobei in dieser Forschungsrichtung häufig ein Zusammenhang zum semantischen Wandel hergestellt wird. Darauf gehen wir in Kap. 4.1.5 näher ein.

Richards stellt ebenfalls infrage, daß Metaphern nur auf der sprachlichen Ebene in Erscheinung treten, da sie für ihn „a borrowing between and an intercourse of thoughts“ (Richards 1979: 94) darstellen. Er führte u. a. die Terminologie *vehicle* und *tenor* ein, womit er sich auf die Bereiche bezog, die bei Metaphern miteinander in Verbindung treten. Wir werden uns terminologisch im folgenden verschiedenen Autoren anschließen (cf. Blank 1997: 158, Hums 1988: 44) und die Terminologie Weinrichs verwenden, der von *Bildempfänger* und *Bildspender* (Weinrich 1976: 297) spricht. Das *tertium comparationis* einer Metapher wollen wir in Anlehnung an Richards als *Grund* (*ground*) bezeichnen.

Black (1962a) greift einige Ideen aus Richards' Ansatz auf und begründet die „Interaktionstheorie“, die insbesondere für die Erforschung von Metaphern aus philosophischer Perspektive von großer Bedeutung gewesen ist. Für Black sind Metaphern weder Wortsubstitutionen (*substitution view*, Black 1962a: 30-34) noch implizite Vergleiche (*comparison view*, Black 1962a: 35-37), auch wenn diese Ansätze auf einige Beispiele von Metaphern anwendbar sind. In der Interaktionstheorie besteht eine Metapher, ähnlich wie bei Richards, aus einem „principal subject“ (ve-

[3] Über einige verschiedene historische Ansichten zur Sprache in der Wissenschaft s. Jones (1932), Gotti (1992), Hüllen (1989, 1999). S. a. Pulaczewska (1999: 17-21).

[4] Zu Nietzsches Ansichten zu Metaphern s. a. P. Cantor (1982).

hicle) und einem „subsidiary subject“ (tenor). Diese seien am besten als „systems of things“ zu betrachten (Black 1962a: 44). Der metaphorische Prozess funktioniert dann „by applying to the principal subject a system of ‘associated implications’ characteristic of the subsidiary subject“; diese „Implikationen“ bestehen aus den „Gemeinplätzen“ (*commonplaces*), aus dem (Alltags-)Wissen, über das der Sprecher hinsichtlich des „subsidiary subject“ verfügt (ibid.). Die Interaktion besteht darin, daß nicht nur das „primary subject“, sondern rückwirkend auch das „secondary subject“ in neuem Licht gesehen werden kann. Eine weitere wichtige Einsicht Blacks ist, daß Metaphern nicht unbedingt „objektiv“ vor ihrer Verwendung bestehende Similaritäten abbilden, sondern diese auch erst herstellen können (Black 1962a: 37). Kittay (1987: 17) illustriert dies am literarischen Beispiel „The garden was a slum of bloom“ (Wallace Stevens), bei dem eine „objektive“ Ähnlichkeit zwischen den involvierten Bereichen kaum auszumachen ist.[5]

Blumenberg führt den Ansatz, Metaphern nicht nur auf der sprachlichen Ebene zu situieren, noch etwas weiter, indem er die konzeptuelle Ebene in den Vordergrund seiner Untersuchungen stellt und konstatiert, daß Metaphern „gar nicht in der sprachlichen Ausdruckssphäre in Erscheinung zu treten brauchen“ (Blumenberg 1960 [1998: 20]). Damit nimmt er einen wesentlichen Aspekt der durch Lakoff und Johnson (1980) verbreiteten Theorie vorweg, die wir im folgenden besprechen wollen.[6]

Eine Grundannahme bei Lakoff und Johnson (1980: 153) besteht darin, daß „metaphor is primarily a matter of thought and action and only derivatively a matter of language“. Sie diskutieren „konzeptuelle“ Metaphern (*conceptual metaphors*), also „verdeckte“ Metaphern, die gewöhnlich gar nicht als solche wahrgenommen werden, und stellen die Hypothese auf, daß „[o]ur ordinary conceptual system, in terms of which we both think and act, is fundamentally metaphorical in nature“ (Lakoff - Johnson 1980: 3). Das Wesen von Metaphern fassen sie in folgende Definition: „The essence of metaphor is understanding and experiencing one kind of thing in terms of another“ (Lakoff - Johnson 1980: 5).

Ihr Standardbeispiel ist die konzeptuelle Metapher ARGUMENT IS WAR (Lakoff - Johnson 1980: 4). In Weinrichs Terminologie wird bei dieser Metapher der Bildempfänger ARGUMENT durch den Bildspender WAR erfahren und strukturiert. Sprachlich äußert sich diese Konzeptualisierung etwa in den folgenden Beispielen (Lakoff - Johnson 1980: 4; Hervorhebung im Original):

[5] S. a. Lakoff - Johnson (1980: 147-155), Koch (1994).

[6] Zu weiteren solcher Vorläufer s. Jäkel (1997).

(3.1) Your claims are *indefensible.*

(3.2) He *attacked every weak point* in my argument.

(3.3) His criticisms were *right on target.*

Solche konzeptuellen Metaphern werden zumeist gar nicht bewußt als Metapher wahrgenommen, da sie die „normale“, konventionelle Art und Weise darstellen, in der man über einen bestimmten Gegenstand oder Sachverhalt spricht (Lakoff - Johnson 1980: 5, 51). Durch die Struktur des Bildspenders können bestimmte Aspekte hervorgehoben bzw. ausgeblendet werden – als Beispiel geben Lakoff und Johnson (1980: 11) die von Reddy (1979) beschriebene Metapher LINGUISTIC EXPRESSIONS ARE CONTAINERS FOR MEANINGS an, bei der die Kontext- und Sprecherabhängigkeit von Bedeutung ausgeblendet wird.

Verschiedene konzeptuelle Metaphern können „zusammenpassen“, „kohärent“ sein. Die Metaphern LOVE IS A CAR TRIP and LOVE IS A SEA VOYAGE haben ein „major common entailment“, da sich die Bereiche CAR TRIP und SEA VOYAGE als Unterkategorien von JOURNEY auffassen lassen (Lakoff - Johnson 1980: 44). Ein „common entailment“ ist hier z. B. der Ablauf einer Reise, der durch Anfang und Ende begrenzt wird. Die Autoren klären allerdings nicht, wodurch ein „common entailment“ zu einem „*major* common entailment“ wird (Pielenz 1993: 89f.). Zudem läßt sich dieses „entailment“ in manchen Fällen kaum angeben, z. B. bei den Metaphern ARGUMENT IS WAR und bei AN ARGUMENT IS A CONTAINER. Darüber hinaus erscheint auch der Begriff der „Unterkategorie“ nicht klar definiert, wenn die Autoren als Kriterien „same kind of activity“ und „enough of the same structural features“ (Lakoff - Johnson 1980: 84) angeben.

Die Theorie der Metapher, wie wir sie hier anhand von Lakoff - Johnson (1980) dargestellt haben, ist von beiden Autoren ausgearbeitet (Lakoff 1987, 1990, 1993, Johnson 1987) und auf fachliche Bereiche angewendet worden (Lakoff - Núñez 2000 für die Mathematik, Lakoff - Johnson 1999 für die Philosophie). Die Weiterentwicklung der Theorie wurde aber bei weitem nicht nur von diesen Autoren vorgenommen; gerade im Rahmen der kognitiven Linguistik findet sich eine geradezu unüberschaubare Anzahl an Arbeiten, in denen verschiedene Aspekte der Theorie ausführlich diskutiert werden.

Gleichzeitig sind in den letzten Jahren zahlreiche weitere Metapherntheorien entstanden, die nicht direkt dem kognitiven Paradigma zuzuordnen sind. Als ein Beispiel dafür sei die Arbeit von Goatly (1997) genannt, die auf der Basis der funktionalen Linguistik im Anschluß an Halliday (s. Kap. 5.3.4) arbeitet und die pragmatische, insbesondere auch relevanztheoretische Aspekte (Sperber - Wilson 1986) von Metaphern wesentlich stärker betont als kognitive Theorien.

3.2.2 Ein Problem: Die Bedingungen der Bereichsverschiedenheit bei Metaphern

Ein grundsätzliches Problem, das die Themenbereiche Metaphorik, semantischen Wandel und wissenschaftliche Begriffsbildung betrifft, muß hier noch angesprochen werden.

Definitionen von „Metapher" ziehen, in unterschiedlicher Terminologie, zwei verschiedene Bereiche von Bildspender und -empfänger heran. Die Verschiedenheit dieser Bereiche stellt allerdings ein bisher ungelöstes Problem dar. Betrachten wir ein Zitat von Aristoteles: „Man muß aber Metaphern bilden ... von verwandten, aber auf den ersten Blick nicht offen zutage liegenden Dingen, wie es z. B. auch in der Philosophie Charakteristikum eines richtig denkenden Menschen ist, das Ähnliche auch in weit auseinander liegenden Dingen zu erkennen." (*Rhetorik* III, 11, 5, 1412a).[7] Was heißt es aber nun, daß Dinge „weit auseinander liegen"? Wir können auf dieses Problem nur hinweisen, doch ist ein Konzept von Entfernung nötig für die Unterscheidung von Metapher und Nicht-Metapher.

Man könnte versuchen, das Problem mittels semantischer Hierarchien und Merkmale zu lösen, wie sie in der älteren generativen Semantik üblich waren. Stellt man sich etwa eine Hierarchie belebter und unbelebter Dinge vor, die organische von nicht-organischen Lebewesen differenziert, so kann man die organischen Lebewesen schließlich in menschliche und tierische unterscheiden. Nun sind tierische Metaphern für Menschen sehr häufig, und die Opposition Mensch vs. Tier findet sich in der Hierarchie „weit oben". Auf unteren Ebenen sind zwar Vergleiche möglich (etwa zwischen Pudeln und Rauhhaardackeln), die aber kaum noch als Metapher genutzt werden. Kurzum, höhere Verzweigungen der Hierarchie gewährleisten in diesem Modell eher Metaphern als niedrigere. Gegen diese Interpretation müssen wir allerdings Vorbehalte anbringen: Es ist keineswegs klar, ob solche Hierarchien überhaupt überall möglich sind, und selbst wenn sie möglich sind, muß daraus nicht folgen, daß der Begriff der Entfernung auf diese Weise operationalisiert werden kann.

[7] Übersetzung von F. G. Sieveke; s. Aristoteles 1980. – In der Rhetorik wird auch von „Sprung-Tropen" gesprochen (Lausberg 1963: 65, 79f.).

Dieses Problem betrifft unmittelbar die Beurteilung unserer Beispiele, insbesondere die Beurteilung des Verhältnisses zwischen verschiedenen Bedeutungen eines Terminus. Gerade in der Wissenschaftssprache sind Gleichheit und Verschiedenheit der Bereiche nicht immer in derselben Weise erkennbar wie bei gemeinsprachlichen Konkreta. Insbesondere werden wir sehen, daß verschiedene Bereiche durch einen gemeinsamen Oberbegriff einander „angenähert" werden. Es finden sich Fälle, in denen Theoretiker diese Annäherung durch einen gemeinsamen Oberbegriff erfassen, während andere die Gemeinsamkeit lediglich als wissenschaftsfremde Bildlichkeit auffassen. Im ersten Fall würde es sich nicht um Metaphern, sondern um spezielle Anwendungen ein- und desselben Begriffs handeln; im zweiten Fall hätten wir es mit Übertragungen in verschiedene Bereiche zu tun. Kurzum, die Interpetation semantischer Entwicklungen als Metapher ist teilweise eine Frage der Perspektive. Entsprechende Beispiele werden wir in den Fallstudien betrachten (z. B. in Kap. 9.4.1, 9.9 und 10.8).

Wir gehen nun zur Diskussion von Metaphern in der Wissenschaft über. In diesem Zusammenhang wird auch die Anwendbarkeit der Ideen von Lakoff und Johnson auf den Wissenschaftsbereich und insbesondere auf die Mathematik diskutiert.

3.3 Metaphern in der Wissenschaft

Metaphern in der Wissenschaft stellen ein für verschiedene Disziplinen interessantes Thema dar. Pulaczewska (1999: 27) unterscheidet mehrere Standpunkte: „that of a linguist and lexicologist on the one hand, and that of a philosopher and historian of science on the other. Whereas the former approach focuses on the role metaphor plays, as one of many means, in the growth of vocabulary including scientific terminology, the philosophy and historiography of science focus upon the theoretical-conceptual level". Im ersten Fall lassen sich typischerweise durch die Einführung von Metaphern keine grundlegenden Folgen für die Theorie feststellen, während im zweiten Fall gerade diejenigen besonderen kognitiven Prozesse relevant sind, bei denen Metaphern eine fundamentale Rolle für die wissenschaftliche Erfassung von Realität spielen. Beide Perspektiven lassen sich jedoch in der Praxis keineswegs immer klar voneinander trennen.

Als Ausgangspunkt unserer Darstellung kommen wir kurz auf die Arbeiten Blacks zurück, die großen Einfluß auf die Philosophie ausgeübt haben bzw. dies auch heute noch tun. Die Bedeutung, die Black der Metapher für die Wissenschaft beimißt, ist u. a. in folgendem Zitat erkennbar:

> We need the metaphors in just the cases when there can be no question as yet of the precision of a scientific statement. Metaphorical statement is not a substitute for a formal comparison or any other kind of literal statement, but has its own distinctive capacities and achievements (Black 1962a: 37).

Diese „achievements“ sind nach Black eher im Bereich der Heuristik oder Pädagogik (bei der Darstellung bereits ausformulierter Theorien) zu erwarten. Bei vielen Autoren wird jedoch eine noch weitergehende Funktion von Metaphern hervorgehoben, die besonders Boyd (1979, 1993) ausführlich behandelt hat.[8]

Boyd geht es hauptsächlich um solche Metaphern in der Wissenschaft, „which play a role in the development and articulation of relatively mature sciences“ (Boyd 1993: 482). Solche Metaphern nennt er *theoriekonstitutiv* (*theory-constitutive*, Boyd 1993: 486). Dabei handelt es sich um Metaphern, „in which metaphorical expressions constitute, at least for a time, an irreplaceable part of the linguistic machinery of a scientific theory: cases in which there are metaphors which scientists use in expressing theoretical claims for which no literal paraphrase is known’ (Boyd 1993: 486). Diese Metaphern füllen terminologische Lücken, was Boyd (1993: 483) mit einem Begriff aus der klassischen Rhetorik als *Katachrese* bezeichnet. Theoriekonstitutive Metaphern leisten jedoch viel mehr, da durch sie, ohne eine Definition zu geben, auf bisher nicht durchschaute Begrifflichkeiten bzw. Entitäten Bezug genommen werden kann (Boyd 1993: 483).

Als Beispiel nennt Boyd einige Metaphern aus der kognitiven Psychologie, z. B. „thought is a kind of information processing“ und „the brain is a sort of computer“ (Boyd 1993: 486). Für diese Metaphern existiert kein wörtlicher Ersatz, im Gegensatz zu „exegetischen“ (*exegetical*, Boyd 1993: 486) Metaphern wie der des „Wurmlochs“ oder der „Elektronenwolke“ (Boyd 1993: 486). In der Literatur finden sich darüber hinaus nur wenige explizit als *theoriekonstitutiv* bezeichnete Beispiele. In bezug auf die Linguistik werden die im 19. Jahrhundert verbreitete Organismusmetapher (Gessinger 1992: 30, 33, 43) und die aus der generativen

[8]Der Artikel Boyd (1993) ist eine überarbeitete und leicht erweiterte Fassung von Boyd (1979). Im folgenden wird nach Boyd (1993) zitiert. – Einige weitere wissenschaftstheoretisch orientierte Arbeiten zu Metaphern in der Wissenschaft sind Bradie (1984), Elgin (1995), Gentner - Jeziorski (1993), Hesse (1995), Hoffman (1985), Holton (1995), Knorr Cetina (1995), Kuhn (1979), Maasen (2000), Martin Soskice - Harré (1995), Miller (1995), Montuschi (1995), Pickering (1999), Rothbart (1997) und Rudwick (1979).

Grammatik bekannte „modularity of mind“ (Niederhauser 1995: 296) genannt.[9] Lohnend ist nicht nur die Untersuchung von Metaphern für bestimmte wissenschaftliche Gegenstände, sondern auch die von Metaphern für den Forschungsprozeß selbst. Einige solcher Metaphern bei Francis Bacon, z. B. FORSCHUNG ALS REISE, haben wir in Becker (1995) untersucht.[10]

Zwei wesentliche Eigenschaften theoriekonstitutiver Metaphern sind nach Boyd die bereits angesprochene Nicht-Paraphrasierbarkeit oder, mit Black gesprochen, Nicht-Substituierbarkeit, und ihre konstitutive Rolle im Forschungsprozeß. Den zweiten Aspekt arbeitet Boyd besonders durch einen Vergleich literarischer und wissenschaftlicher Metaphern heraus. Der Unterschied zwischen diesen beruht nach Boyd auf der unterschiedlichen Art und Weise ihrer „Unabgeschlossenheit“ (*open-endedness*). Demnach kann man bei literarischen Metaphern von einer „conceptual open-endedness“ (Boyd 1993: 488) sprechen: Sie laden den Rezipienten zur Erschließung des Bildempfängers auf der Folie des Bildspenders ein, wobei die „assoziierten Gemeinplätze“ Blacks und das Vorwissen eine entscheidende Rolle spielen (Boyd 1993: 488). Theoriekonstitutiven Metaphern hingegen schreibt Boyd eine „inductive open-endedness“ zu: Sie laden dazu ein, die Ähnlichkeiten und Analogien zwischen den beteiligten Bereichen zu ergründen und eröffnen dadurch eine neue Forschungsperspektive. Die relevanten Aspekte dieser Ähnlichkeiten sind oft gar nicht bekannt, sie sind erst noch zu entdecken bzw. zu verstehen (Boyd 1993: 488f.). Theoriekonstitutive Metaphern eröffnen einen „epistemischen Zugang“ (*epistemic access*) zu einem unbekannten Gegenstand (Boyd 1993: 485).

An dieser begrifflichen Unterscheidung zeigt sich, daß Betrachtungen von Metaphern in *der* Wissenschaft dazu neigen können, von einer zu einfachen Perspektive auszugehen. Wie Debatin (1995: 146) zu Recht kritisiert, ist Boyds Unterscheidung zwischen literarischen und wissenschaftlichen Metaphern zu einfach: So werden Metaphern in den Geistes- und Sozialwissenschaften durch die starre Opposition Boyds nicht erfaßt, da hier das hermeneutische Erschließen und nicht das naturwissenschaftliche Erklären im Vordergrund steht. Debatin (ibid.) schließt daraus, daß die genannte Unterscheidung als kontinuierlich und nicht wie bei Boyd (1993: 488) als binär zu betrachten ist.

Daß Boyd diesen Punkt nicht erkennt, ist sicher auch darauf zurückzuführen, daß er nur (einige wenige) Metaphern aus der Psychologie betrachtet und daraus

---

[9] Ein Beispiel aus der Physik gibt Pulaczewska (1999: 201f.).

[10] S. a. Schildknecht (1995).

Schlüsse auf die Wissenschaft im allgemeinen zieht. Diese Vorgehensweise ist insgesamt nicht untypisch für die Erforschung von Metaphern aus Sicht von Philosophie und Wissenschaftstheorie.

Aufgrund der systematischen Ausschöpfung – die auf Boyds „induktiver Unabgeschlossenheit" beruht – haben theoriekonstitutive Metaphern einen vorläufigen Charakter, denn durch diesen Vorgang wird der semantische Gehalt einer Metapher allmählich fest umrissen, d. h. die Metapher wird zur konventionalisierten Fachterminologie, ihr metaphorischer Charakter verblaßt und ist schließlich nicht mehr bewußt (Debatin 1995: 147f.). Sie kann jedoch noch immer als Bildfeld wirken und damit zu neuen Metaphern Anlaß geben. Daher ist eine derartige verblaßte metaphorische Terminologie immer auch ein Indiz für das frühere Vorhandensein einer oder mehrerer theoriekonstitutiver Metaphern (Debatin 1995: 149f.). In diesem Zusammenhang bezeichnen Martin Soskice und Harré (1995: 302, 304) metaphorische Terminologie als *Nebenprodukt* (*spin-off*) theoriekonstitutiver Metaphern.

Die Funktionen, die Metaphern in der Wissenschaft zugeschrieben werden, sind damit nicht vollständig, aber doch im wesentlichen erfaßt.[11]

3.4 Zwischenergebnis

Wir fassen nun die bisherige Diskussion zusammen.

Metaphern treten auf verschiedenen Ebenen auf (Pulaczewska 1999: 56). Dazu gehört zunächst die Ebene der Kognition, auf der im Sinne von Lakoff und Johnson (s. o.) Metaphern dazu dienen, Erfahrungen zu strukturieren. Die weiteren Ebenen sind die lexikalisch-semantische Ebene und schließlich die sprachliche Oberfläche.

Metaphern involvieren zwei verschiedene Bereiche, den Bildspender und den Bildempfänger, wobei der Bildspender den Bildempfänger strukturieren, einzelne Aspekte hervorheben oder ausblenden kann. Das Wissen über den Bildspender trägt zur Erschließung des Bildempfängers bei; umgekehrt sind Rückwirkungen des Bildempfängers auf den Bildspender möglich. Wir haben gesehen (Kap. 3.2.2), daß die Verschiedenheit der Bereiche von Bildspender und -empfänger teilweise perspektivisch bedingt ist.

In der Linguistik werden hauptsächlich die zweite und dritte Ebene betrach-

[11] Weitere Funktionen werden in der zu Beginn dieses Kapitels genannten Literatur diskutiert.

tet. Solche *linguistischen Metaphern* (*linguistic metaphors* bei Pulaczewska 1999: 58) zeigen sich in der Wissenschaft bei der Erweiterung des Fachvokabulars (Neubildungen sowie semantische Erweiterungen bestehender Wörter).

In der Wissenschaftsphilosophie spielt hingegen die erste, konzeptuelle Ebene die wichtigste Rolle. Die betrachteten Metaphern haben grundlegende Konsequenzen für die Theorie- und Begriffsbildung. Dabei wird häufig eine weite Definition von „Metapher“ zugrundegelegt, die auch Analogien und Modelle umfaßt (Pulaczewska 1999: 31).

Da Konzeptualisierungen und deren Veränderungen Ausdruck an der sprachlichen Oberfläche finden, ist eine strikte Grenze zwischen diesen Ebenen nicht zu ziehen (Pulaczewska 1999: 57). Dennoch ist es ein Unterschied, ob Metaphern nur einzelne terminologische Lücken füllen oder ob neue Begriffe in eine weitreichende konzeptuelle Metaphorik eingebettet werden. Diesen Aspekt werden wir in unseren mathematischen Fallstudien noch ausführlich berücksichtigen.

3.5 Metaphern in der Mathematik

Folgen wir Hoffmans (1985: 330) Aussage, „Perhaps the most conceptually difficult domain to analyse rhetorically is mathematics“[12], so kann es nicht verwundern, daß eine systematische Untersuchung der Mathematik aus semantisch-lexikalischer Sicht bisher nicht vorliegt. Dies betrifft auch den Bereich der Metaphern in der Mathematik. Wir werden daher zunächst einige Beispiele besprechen und dann näher auf die Arbeiten von Lakoff und Núñez eingehen.

3.5.1 Untersuchungen zu Metaphern in der Mathematik

In seiner Arbeit über die Sprache der Mathematik beschäftigt sich Marcus (1973) auch mit Metaphern in der mathematischen Terminologie. Er klassifiziert diese „je nach dem Grad der Näherung zwischen ihrem mathematischen und nichtmathematischen Sinngehalt“ (Marcus 1973: 99f.) – ein recht vages Kriterium, das in der Praxis schwer anzuwenden ist.[13]

Beim ersten Typ von Metaphern ist nach Marcus (1973: 99) die „semantische Distanz“ zwischen der mathematischen und der gemeinsprachlichen Bedeutung

[12]Unter *rhetorically* ist hier die linguistische Analyse zu verstehen.

[13]Solch einen Ansatz verfolgen auch Kasner - Newman (1989: 3-26), Nordon (1993: 115-146) und Mertens et al. (1973), die sich bei dieser Einteilung allerdings nicht auf Metaphern beschränken, sondern mathematische Terminologie im allgemeinen betrachten.

sehr gering und der mathematische Ausdruck ist eine Präzisierung des gemeinsprachlichen. Als Beispiel nennt er (ibid.) u. a. die *Vereinigung* von Mengen. Der Terminus meint folgendes: Aus den Elementen zweier (oder mehrerer) Mengen wird eine neue Menge gebildet, die alle Elemente der gegebenen Mengen enthält. In der Gemeinsprache hat *Vereinigung* ebenfalls diese Bedeutung, wenn man etwa die Vereinigung verschiedener Interessengruppen zu einer neuen Interessengruppe betrachtet.

Beim zweiten Typ stehe „der mathematische Sinn ... dem nichtmathematischen nicht mehr so nahe" (Marcus 1973: 99). Z. B. bestehe bei dem topologischen Ausdruck *Filter* eine Ähnlichkeit zum gemeinsprachlichen Ausdruck, so daß bei diesem Typ noch von einer Gemeinsamkeit zwischen Mathematik und Gemeinsprache gesprochen werden kann. Ein Filter ist eine Menge von Mengen, die alle Teilmengen derselben gegebenen Menge sind und bestimmte Axiome erfüllen.[14] Das Benennungsmotiv beruht darauf, daß Erwünschtes von Unerwünschtem getrennt wird. Es ist keine Eigenschaft des Objekts selbst, sondern der Art, wie man damit umgeht: Es liegt im Interesse des Mathematikers, Zugehöriges von Nicht-Zugehörigem zu trennen.

Schließlich nennt Marcus (1973: 100f.) eine dritte Klasse, bei der die semantische Distanz am größten sei und keine wesentlichen Gemeinsamkeiten zwischen fachsprachlicher und gemeinsprachlicher Bedeutung mehr bestehen. Eines seiner Beispiele sind *offene* und *abgeschlossene* Mengen.[15]

Offene Mengen kann man sich anschaulich als Mengen vorstellen, bei denen jedes Element der Menge eine „Umgebung" hat, die ganz zu der Menge gehört bzw. als Menge, deren „Rand" nicht zu der Menge gehört (wobei die Begriffe „Umgebung" und „Rand" mathematisch zu präzisieren sind). Abgeschlossene Mengen hingegen sind solche, die alle ihre „Häufungspunkte" enthalten; ein Häufungspunkt ist dabei ein Punkt (ein Element einer Menge) mit der Eigenschaft, daß in jeder Umgebung des Punktes mindestens noch ein weiterer Punkt der Menge liegt.[16]

Die mathematische und die gemeinsprachliche Bedeutung stehen hier durchaus in Zusammenhang. Das DUW gibt die Bedeutung von *abgeschlossen* als „in sich geschlossen (u. deshalb für Fremde nicht ohne weiteres zugänglich)" bzw. die von

[14] Diese Axiome sind recht technisch und werden daher hier nicht ausgeführt.

[15] Der hier angesprochene Abgeschlossenheitsbegriff ist ein anderer als der in Kap. 9.5 diskutierte.

[16] D. h. nicht unbedingt, daß sich wirklich „viele" Punkte um einen Häufungspunkt herum „anhäufen", sondern nur, daß in jeder Umgebung des Häufungspunktes mindestens *ein* weiterer Punkt der Menge liegt.

offen als „so geschaffen, dass jmd., etw. heraus- oder hineingelangen kann; nicht abgeschlossen“ an. Da abgeschlossene Mengen ihren „Rand“ enthalten, offene jedoch nicht, sind zwischen gemeinsprachlichem und fachsprachlichem Ausdruck semantische Gemeinsamkeiten durchaus erkennbar. Man kann annehmen, daß Marcus dieses Beispiel zur dritten Klasse rechnet, weil sich die lexikalischen Relationen der Gemeinsprache nicht alle auf die Mathematik übertragen lassen, denn in der Mathematik gibt es erstens Mengen, die weder offen noch abgeschlossen sind und zweitens auch solche, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind – der Lexikoneintrag zu *offen* zeigt jedoch, daß etwas, das offen ist, nicht zugleich abgeschlossen sein kann.[17]

Marcus (1973: 104-107) nimmt außerdem eine Unterscheidung zwischen *inneren* und *äußeren* Metaphern vor, die darauf basiert, ob Bildempfänger und -spender beide aus der Mathematik stammen oder nicht. Dabei entsteht das Problem, daß ein Terminus wie *Ring* als maßtheoretische Struktur sowohl auf *Ring* im Sinne einer algebraischen Struktur als auch auf *Ring* in der Gemeinsprache bezogen werden kann (Marcus 1973: 106). Diese Problematik hat verschiedene Aspekte. Zunächst ist es bei der konkreten Untersuchung einzelner Beispiele keineswegs immer klar, worauf genau ein fachlicher Ausdruck semantisch zu beziehen ist, d. h. es stellt sich die Frage, ob ein solcher Bezug zu einem gemeinsprachlichen oder zu einem fachsprachlichen Ausdruck vorliegt. Es besteht des weiteren die Möglichkeit, daß ein semantischer Bezug sowohl zur Gemeinsprache als auch zur Fachsprache hergestellt werden kann, von dem man annehmen kann, daß er nicht nur eine nachträgliche linguistische Konstruktion ist, sondern daß er auch in der historischen Entwicklung wirksam gewesen ist. Das Beispiel deutet auch auf ein weiteres Problem hin, nämlich auf die Frage, ob es Unterschiede bei solchen Übergängen von der Gemeinsprache in eine Fachsprache und Übergängen von einer Fachsprache in eine weitere Fachsprache gibt (wobei es sich um verschiedene Gebiete innerhalb der Mathematik handeln kann). Dieser Problemkreis wird uns in unseren Fallstudien noch beschäftigen (Kap. 8, 9, 10, 11).

Aus pädagogischer Sicht geht Pimm (1987: 93-110) geht im Rahmen seiner Untersuchung der Mathematik und ihrer Sprache näher auf mathematische Metaphern ein. Er diskutiert zunächst einige terminologische Metaphern und nennt u. a. einige Typen von Zahlen, die schon in der Antike aufgrund einer Ähnlichkeit zu geometrischen Figuren bezeichnet wurden (Pimm 1987: 94f.). Dazu gehören z. B. die Ausdrücke *Quadratzahl* (gr. *arithmòs tetrágōnos*, lat. *numerus quadratus*),

[17] S. a. Mertens et al. (1973: 428f.).

Abbildung 3.1: Dreieckszahl und Pentagonalzahl

Dreieckszahl (gr. *arithmòs trígōnos*) und allgemeiner *Polygonalzahl* (gr. *polýgōnos arithmós*), die in Abb. 3.1 graphisch repräsentiert sind. Ein Produkt zweier Zahlen konnte als *eben* (gr. *epípedos*), eines von dreien als *körperlich* (gr. *stereoí*) bezeichnet werden, da auf diese Weise die Fläche eines Rechtecks bzw. das Volumen eines Quaders errechnet werden konnte. Diese Zahlen werden also aufgrund einer Ähnlichkeit zu geometrischen Objekten benannt, wobei den einzelnen Punkten in der Abb. auch tatsächliche Objekte, nämlich Steine, entsprechen können, die zum Rechnen verwendet wurden. Von Zahltypen, die auf diese Weise benannt wurden, gibt es eine große und differenzierte Anzahl.[18]

Pimm geht jedoch über Marcus' Arbeit hinaus: „At a deeper level, metaphor is involved in the way mathematicians discuss their objects of interest and discovery" (Pimm 1987: 95). Als Beispiel nennt er u. a. die Metapher An Equation Is A Balance (Pimm 1987: 98), die häufig in Unterrichtssituationen verwendet wird. Diese Metapher bezieht sich darauf, daß eine Waage aus dem Gleichgewicht gerät, wenn auf beide Waagschalen unterschiedliche Gewichte gelegt werden. Mathematisch bedeutet dies, daß bei der Umformung von Gleichungen darauf zu achten ist, daß auf beiden Seiten der Gleichung jeweils dieselbe Operation vorgenommen wird, denn anderenfalls ändert sich die Lösungsmenge der Gleichung. Die auf beiden Seiten einer Gleichung stehenden mathematischen Ausdrücke entsprechen also physikalischen Objekten, die Gleichheit der Ausdrücke einem Gleichgewicht der Waage, und eine mathematische Operation einer Veränderung der Gewichte (Sfard 1994: 50). Derartige Metaphern werden wir unseren Fallstudien ausführlich diskutieren (Kap. 9). Ähnlich wie Marcus nimmt Pimm eine Unterscheidung zwischen inneren und äußeren Metaphern vor und nennt diese *structural metaphors* und *extra-mathematical metaphors* (Pimm 1987: 95).

Der Begriff der Metapher wird von Marcus (1973: 107-111) und Pimm (1987: 184-188) auch auf mathematische Symbole angewendet, z. B. auf die Übertragung

[18]Für weitere Beispiele s. Hunger (1867: 18-20) und Müller (1887: 20-24).

des „-“-Symbols von Zahlen auf Mengen. Dies stellt eine wichtige Erweiterung des Begriffs der Metapher dar, da derartige symbolische Metaphern in der Heuristik dieselbe Rolle spielen können wie Metaphern im herkömmlichen Sinn. So bemerkt Leibniz eine Ähnlichkeit zwischen den Exponenten einer Summe und der Ableitung (dem Differential) eines Produktes, die hier in Leibniz’ Notation wiedergegeben ist:[19]

(3.4)

$$\boxed{1}\overline{x+y} = 1x + 1y = 1x^1y^0 + 1x^0y^1$$
$$dxy = 1ydx + 1xdy = 1d^1xd^0y + 1d^0xd^1y$$

(3.5)

$$\boxed{2}\overline{x+y} = 1xx + 2xy + 1yy$$
$$d^2xy = 1yddx + 2dydx + 1xddy$$

Die Entsprechung wird noch deutlicher, wenn die Identitäten $xx = y^0xx$ und $yddx = d^0yddx$ berücksichtigt werden. Diese symbolische Analogie spielte später eine wichtige Rolle bei der Entwicklung des Operationenkalküls.[20]

Metaphern in der Mathematik finden sich also nicht nur auf terminologischer Ebene. Dieser Aspekt wird schon bei Vaihinger (1927) in seiner *Philosophie des Als Ob* aus philosophischer Perspektive herausgearbeitet. Er legt dar, daß viele Begriffe aus verschiedenen Bereichen der Wissenschaften aufgrund eines „als ob“-Prinzips zu interpretieren sind. Dieses Prinzip umfaßt auch Metaphern (Radman 1995: 244).

Abschließend sei noch die Darstellung der sog. „Grundlagenkrise“ der Mathematik an der Wende vom 19. zum 20. Jahrhundert von Mehrtens (1990) angesprochen. In dieser Arbeit geht der Autor auf einige Aspekte mathematischer Metaphern ein, die wir bisher nicht angesprochen haben. Wichtig ist hier besonders Mehrtens’ Begriff der „Grundmetapher“ (Mehrtens 1990: 505). Er verwendet diesen Begriff in Anlehnung an Blacks (1962b) „Archetyp“ (*archetype*). Grundmetaphern erscheinen zumeist in Form sehr allgemeiner sprachlicher Ausdrücke wie

[19]In heutiger Schreibweise ließe sich das zweite Gleichungspaar wie folgt notieren:

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \quad (f \cdot g)'' = f'' \cdot g + 2 \cdot f' \cdot g' + f \cdot g''.$$

Das Symbol $'$ steht für die Ableitung (bei Leibniz d).

[20]S. Koppelman (1971/72: 158). Diesem Artikel ist auch das Beispiel entnommen.

Raum. Dieser Ausdruck läßt sich in der Mathematik seit deren Autonomisierung von der Physik kaum definieren – Mehrtens (1990: 44) weist darauf hin, daß teilweise sogar in mathematischen Lexika eine Definition unterbleibt. Der Ausdruck *Raum* wird in zahlreichen Gebieten der Mathematik wie der Funktionalanalysis oder der Topologie verwendet – semantische Gemeinsamkeiten lassen sich dabei kaum ausmachen. Entscheidend ist vielmehr die geometrische Herkunft: Der Ausdruck *Raum* eröffnet ein geometrisches Assoziationsfeld bzw. eine „heuristische Perspektive" (Mehrtens 1990: 45). Er verweist auf eine mathematische Praxis, nicht auf ein Objekt, d. h. es werden geometrische Ideen und Arbeitsweisen auf nicht-geometrische Gebiete übertragen (Mehrtens 1990: 502f.). Grundmetaphern können verschiedene Diskurse, z. B. die der Mathematik und der Physik, miteinander verbinden – eine wichtige Funktion, wenn man das Auseinanderdriften von Mathematik und Physik im 19. Jahrhundert betrachtet (Mehrtens 1990: 505).

3.5.2 *Mathematical idea analysis* in den Arbeiten von George Lakoff und Rafael Núñez

Lakoff und Núñez haben in den letzten Jahren einige Arbeiten vorgelegt, die sich ausführlich mit konzeptuellen Metaphern in der Mathematik auseinandersetzen (Lakoff-Núñez 1997, 1998, 2000, Núñez 2000). Auf diese Arbeiten soll nun näher eingegangen werden, da sie am deutlichsten den Anspruch erheben, mathematische Begriffsbildung sprachwissenschaftlich zu verstehen. Dabei beziehen wir uns in erster Linie auf die Monographie von Lakoff und Núñez (2000).

Lakoff und Núñez arbeiten nach eigener Aussage in einem völlig neuen Forschungsgebiet, das sie „mathematical idea analysis" nennen (Lakoff - Núñez 2000: xi). Sie suchen Antworten auf grundlegende Fragen, die sie detailliert anhand komplexer und fortgeschrittener mathematischer Problemstellungen erläutern. Zu ihren Beispielen gehören die Begriffe „Unendlichkeit", „Grenzwert", „transfinite Zahlen", „Kontinuum" sowie eine detaillierte Analyse der Gleichung $e^{\pi i} + 1 = 0$, in die verschiedene mathematische Begriffe aus unterschiedlichen Bereichen einfließen.[21]

Ihre Darstellung kreist um die Fragen, was mathematische Begriffe aus kognitiver Sicht überhaupt sind bzw. welche kognitive Struktur sie haben und welche kognitiven Mechanismen beim Aufbau der Mathematik eine Rolle spielen,

[21] e ist hier die „Eulersche Zahl", i die komplexe Einheit $\sqrt{-1}$, π die Kreiszahl.

wenn man davon ausgeht, daß nur ein sehr kleiner Teil der Mathematik als angeboren angesehen werden kann (s. Lakoff - Núñez 2000: 2, 15, 337).

Im folgenden werden die für unsere Zwecke wichtigsten Aspekte der Arbeiten von Lakoff und Núñez dargestellt. Die Kritik der Autoren an der Philosophie der Mathematik wird hier nicht kommentiert, es sei aber darauf hingewiesen, daß in einschlägigen Stellungnahmen Skepsis bzw. Ablehnung vorherrscht (Dubinsky 1999, Madden 2001, Paulos 2001, Gold 2001, Goldin 2001, Schiralli - Sinclair 2003, Thomas 2002, Voorhees 2004).

Lakoff und Núñez zeigen, wie die Mathematik (bzw. einige Teilbereiche der Mathematik) aus komplexen mathematischen Begriffen metaphorisch aufgebaut ist. Einen wichtigen kognitiven Mechanismus stellen dabei konzeptuelle Metaphern dar. Die Autoren gehen zunächst ausführlich auf „Fundierungsmetaphern" (*grounding metaphors*) ein, also „metaphors that ground our understanding of mathematical ideas in terms of everyday experience" (Lakoff - Núñez 2000: 150). Diese stellen einen Mechanismus dar, mit dem elementare mathematische Begriffe zu unserer Erfahrung in Bezug gesetzt werden. Mit diesen Fundierungsmetaphern wird die sehr beschränkte „innate arithmetic" auf einfache arithmetische Begriffe erweitert (Lakoff - Núñez 2000: 77; zur „innate arithmetic" s. ibid.: 15-26).

Eine dieser Fundierungsmetaphern nennen die Autoren ARITHMETIC IS OBJECT COLLECTION (Lakoff - Núñez 2000: 54-60). Nach dieser Metapher werden z. B. natürliche Zahlen als Mengen (*collections*) von Gegenständen konzeptualisiert. Die Größe der Menge überträgt sich auf die Größe von Zahlen, die kleinste Menge entspricht der Zahl 1. Sprachlich drückt sich dies u. a. dadurch aus, daß Adjektive wie *groß* nicht nur auf Mengen, sondern auch auf Zahlen angewendet werden können. Die Addition ergibt sich dadurch, daß Mengen von Gegenständen weitere Gegenstände hinzugefügt werden können. Dies zeigt sich im Englischen etwa am Verb *add*, das in der Gemeinsprache wie auch in der Arithmetik vorkommt.

Aus dieser Metapher ergeben sich zahlreiche Implikationen (*entailments*), von denen hier nur eine genannt sei: Wenn man aus einer Menge genau das entfernt, was man vorher hinzugefügt hat, dann ergibt sich wieder die Ausgangsmenge. In der Arithmetik hat dies seine Entsprechung in den sog. „inversen" Operationen: Wird von einer Zahl das subtrahiert, was vorher zu ihr addiert wurde, erhält man wieder die Ausgangszahl (Lakoff - Núñez 2000: 57).

Ein weiterer zentraler Begriff ist der der „Verbindungsmetapher" (*linking*

Tabelle 3.1: Die Boolesche Metapher

Boole's Metaphor		
Source Domain		*Target Domain*
Algebra		Classes
Abstract elements	$\rightarrow$	Classes
An abstract operation $\oplus$	$\rightarrow$	Union, symbolized by $\cup$
$A \oplus 0 = A$	$\rightarrow$	$A \cup \emptyset = A$

metaphor).[22] Darunter verstehen die Autoren „metaphors within mathematics itself that allow us to conceptualize one mathematical domain in terms of another mathematical domain" (Lakoff - Núñez 2000: 150). Als ein Beispiel von vielen sei „Boole's Metaphor" genannt, die die Autoren nach dem englischen Mathematiker und Logiker George Boole (1815-1864) benannt haben. Durch diese Metapher wird eine sehr systematische Übertragung aus der Algebra in die Logik vorgenommen; Tab. 3.1 gibt einen Ausschnitt der Metapher wieder (nach Lakoff - Núñez 2000: 128).

Im einzelnen werden Klassen als algebraische Elemente einer algebraischen Struktur konzeptualisiert, die Vereinigung von Klassen als additive Verknüpfung, und z. B. das Rechengesetz für Klassen $A \cup \emptyset = A$ als $a + 0 = a$, wenn „+" die additive Verknüpfung bezeichnet. Die Richtigkeit dieser Rechengesetze folgt nicht automatisch aus der metaphorischen Übertragung, sondern muß bewiesen werden.

Lakoff und Núñez gehen nur in ganz unzureichender Form darauf ein, ob diese Metapher im historischen Prozeß eine wie auch immer geartete Rolle gespielt hat. Es wird pauschal auf Boole (1854) verwiesen, jedoch kein einziger textlicher Beleg angegeben. Die Autoren behaupten lediglich, daß Boole „noticed certain structural similarities between arithmetic and classes" (Lakoff - Núñez 2000: 123). Diese Kritik trifft auch auf die Metapher Arithmetic Is Object Collection zu, sofern damit ein historischer Anspruch verbunden ist: Abgesehen davon, daß für die Metapher lediglich moderne Beispiele gegeben werden, gehen die Autoren z. B. nicht auf die Bedeutung quantitativer Vergleiche ein, die sich historisch in ökonomischem Kontext ergeben haben (s. etwa Kline 1972: Kap. 1, 2). Der fehlende bzw.

[22] Vgl. die im vorigen Abschnitt diskutierten Unterscheidungen bei Marcus (1973) und Pimm (1987).

mangelhaft ausgeprägte historische Anspruch und die ausschließliche Konzentration auf kognitive Mechanismen bergen die Gefahr, nachträgliche Konstruktionen vorzunehmen, die ohne eine detailliertere Analyse der konkreten Begriffsbildungen nicht zu rechtfertigen sind (s. a. Kap. 9.5). Es ist zwar legitim, das Interesse auf die „kognitive Synchronie" zu richten, wie sie sich heute darstellt. Wir sind hier jedoch gerade an historischer Rekonstruktion interessiert, da wir die mathematische Begriffsbildung nicht spekulativer Rekonstruktion überlassen wollen und nehmen vor diesem Hintergrund eine kritische Position gegenüber Lakoff und Núñez ein.

Die Unterscheidung zwischen Fundierungsmetaphern und Verbindungsmetaphern beruht hauptsächlich darauf, daß bei Verbindungsmetaphern auch der Bildspender aus der Mathematik stammt (Lakoff - Núñez 2000: 142). Die Bestimmung dieser Begriffe wird allerdings weiter fortgeführt: Durch Verbindungsmetaphern gelange man zu abstrakteren mathematischen Begriffen, die nicht mehr unmittelbar in der körperlichen Erfahrung begründet sind. Fundierungsmetaphern führen zu einem „direct grounding", durch Verbindungsmetaphern entstehe „indirect grounding": „The more indirect the grounding in experience, the more „abstract" the mathematics is" (Lakoff - Núñez 2000: 102), so daß die Unterscheidung graduell und nicht kategorial ist.

Die ursprüngliche Unterscheidung anhand der Bildspender wird damit zu einer Abstraktionsskala in Beziehung gesetzt, die kaum als eine absolute zu begreifen ist, da es einen Unterschied machen kann, wer den Abstraktionsgrad beurteilt: Für einen praktizierenden Mathematiker kann eine Verbindungsmetapher zwischen zwei mathematischen Bereichen eine Übertragung bedeuten, die aus dieser Perspektive durchaus als „direct grounding" aufzufassen sein mag, da die bei der Übertragung vorkommenden Objekte aus dem alltäglichen Umgang vertraut sind. Diese Kritik wird durch einige Anmerkungen in der Arbeit von Thomas (2002) bestätigt, der sich vorwiegend mit den algebraischen Kapiteln bei Lakoff und Núñez auseinandersetzt. Er kommt dabei am Beispiel des mathematischen Gruppenbegriffs (s. Kap. 8) zu dem Schluß: „Historically, it is likely that some of the grounding came from mathematical material", d. h. die Unterscheidung läßt sich, sofern sie zum „grounding" in Beziehung gesetzt wird, nicht aufrecht erhalten. Wenn wir die Begrifflichkeiten dennoch beibehalten, dann wollen wir sie ausschließlich in bezug auf Bildspender- und -empfänger verstanden wissen.

Verbindungsmetaphern treten häufig bei der Bildung neuer mathematischer Begriffe bzw. neuer mathematischer Bereiche auf (Lakoff - Núñez 2000: 150), wie bereits das Beispiel der Booleschen Metapher zeigt. Die Wirkung und im einzelnen

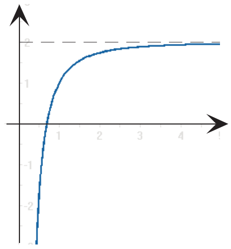

Abbildung 3.2: Grenzwert stetiger und monotoner Funktion

vielleicht auch die Funktion solcher Metaphern besteht darin, Fragen anzuregen, Hypothesen aufzustellen und die Übertragung bzw. Übertragbarkeit mathematischer Begriffe von einer Theorie auf eine andere vorzunehmen bzw. zu überprüfen. Wir werden dies an verschiedenen Beispielen noch ausführlich diskutieren (Kap. 9, 10).

Verbindungsmetaphern können auch ein Instrument der Erkenntnisgewinnung sein. Hier sei als Beispiel die berühmte Arbeit „Stetigkeit und irrationale Zahlen“ von Richard Dedekind (1831-1916) genannt (Dedekind 1872), in der dieser einen strengen, nicht auf geometrischen Anschauungen beruhenden Aufbau der Theorie der reellen Zahlen anstrebt.

Als Dedekind dazu angehalten war, eine Vorlesung über Analysis zu halten, stellte er fest, daß er manche intuitiv einleuchtenden und schon lange verwendeten Eigenschaften der reellen Zahlen nicht beweisen konnte. Er formuliert sein Dilemma an einem konkreten Beispiel: „Bei dem Begriffe der Annäherung einer veränderlichen Größe an einen festen Grenzwert und namentlich bei dem Beweise des Satzes, daß jede Größe, welche beständig, aber nicht über alle Grenzen wächst, sich gewiß einem Grenzwert nähern muß, nahm ich meine Zuflucht zu geometrischen Evidenzen“ (Dedekind 1872 [1932: 315f.]; s. Abb. 3.2). Dedekind spielt hier am Beispiel eines zentralen Satzes darauf an, daß die klassische Analysis auf geometrischen Begriffen beruhte – z. B. Tangenten und Sekanten; das einzig akzeptable Fundament, so meint er, sei aber die Arithmetik, die ihm als methodisch sicherer und strenger als die Geometrie erscheint (Dedekind 1872 [1932: 321]).[23]

In der Tat erweist sich der eben zitierte „Satz“ letztlich nur als eine Voraussetzung, die man vereinbaren muß, aber nicht als mathematische Aussage, die

[23]Diese Sichtweise wird unter dem Stichwort „Arithmetisierung der Mathematik“ diskutiert. S. Bekemeier (1982), Jahnke (1987).

sich aus den elementaren Eigenschaften der reellen Zahlen beweisen läßt. So wenig Dedekind der Geometrie für den logischen Aufbau der Theorie vertraut, so sehr zieht er sie doch dafür heran, analytische Erkenntnisse zu gewinnen und rein analytische Definitionen zu formulieren.

Dedekind nähert sich nun der „Schöpfung“ der reellen Zahlen (Dedekind 1872 [1932: 321]) durch einen Vergleich zwischen rationalen Zahlen (Bruchzahlen) und dem geometrischen Begriff der Geraden an, um herauszuarbeiten, was die reellen Zahlen von den rationalen Zahlen genau unterscheidet. So läßt sich die Vergleichsrelation „$\leq$“ mit den Lagebeziehungen von Punkten auf einer Geraden vergleichen, d. h. die Relation $\frac{4}{5} < \frac{20}{9}$ läßt sich geometrisch so interpretieren, daß ein der Zahl $\frac{20}{9}$ entsprechender Punkt „rechts“ vom „Punkt“ $\frac{4}{5}$ liegt (Dedekind 1872 [1932: 319]). Nun ist aber schon aus der klassischen Geometrie bekannt, „daß es in der Geraden L unendlich viele Punkte gibt, welche keiner rationalen Zahl entsprechen“ (Dedekind 1872 [1932: 320]) – diese Punkte entsprechen den irrationalen Zahlen. Daraus folgt: „Die Gerade L ist unendlich viel reicher an Punktindividuen, als das Gebiet R der rationalen Zahlen an Zahlindividuen“ (Dedekind 1872 [1932: 321]). Das Ergebnis dieses Vergleichs kommentiert Dedekind mit den Worten:

> Die obige Vergleichung des Gebietes R der rationalen Zahlen mit einer Geraden hat zu der **Erkenntnis** der Lückenhaftigkeit, Unvollständigkeit oder Unstetigkeit des ersteren geführt, während wir der Geraden Vollständigkeit, Lückenlosigkeit oder Stetigkeit zuschreiben (Dedekind 1872 [1932: 322]).

Dedekind stellt also die Erkenntnisfunktion seiner „Vergleichung“ explizit fest. Anschließend löst er das von ihm formulierte Problem, vereinfacht ausgedrückt, durch eine Übertragung des geometrischen Stetigkeitsbegriffs auf die reellen Zahlen, wobei der Begriff des „Schnittes“ eine zentrale Rolle spielt. Die Eigenschaft der Stetigkeit haben die rationalen Zahlen nicht.[24] Das Beispiel illustriert insgesamt eine wichtige Eigenschaft von Metaphern: Sie erlauben einen epistemischen Zugang zu einem Untersuchungsgegenstand. In diesem Fall handelt es sich nicht um ein „neues“ mathematisches Objekt, denn irrationale Zahlen waren lange zuvor bekannt, sondern um einen neuen Zugang zu einem altbekannten, aber nicht gänzlich verstandenen Gegenstand (vgl. Debatin 1995: 149).

Auf einen möglichen Zusammenhang zwischen den von ihnen beschriebenen Metaphern und den in der Wissenschaftsphilosophie entwickelten Begriffen, insbe-

[24]Für eine ausführlichere Diskussion des Begriffs „Schnitt“ bei Dedekind s. Lakoff - Núñez (2000: 292-305) und Mehrtens (1979b).

sondere den der theoriekonstitutiven Metapher, gehen Lakoff und Núñez an keiner Stelle ein, obwohl dies aufgrund der Thematik durchaus naheläge.[25] Klar ist allerdings, daß sie von mancher Seite so verstanden werden, daß auch in der Mathematik theoriekonstitutive Metaphern vorkommen. So schreibt etwa Chiu (2000: 5): „Boyd (1993) and Lakoff and Núñez (1997) argued that there are theory-constitutive metaphors in which people must use their human experiences to understand central mathematical ideas“. Problematisch dabei ist, daß Lakoff und Núñez ihre Arbeiten, wie gesagt, nicht in den wissenschaftsphilosophischen Diskurs einbetten und Boyd auf die Mathematik überhaupt nicht eingeht. Chiu selbst will zudem die Behauptungen dieser Autoren stützen, bezieht sich in ihrer Arbeit jedoch nur auf pädagogische Situationen und nicht auf den wissenschaftlichen Forschungsprozeß.

3.6 Metapher und Analogie

Der Begriff „Analogie“ wird, ähnlich dem Metaphernbegriff, auf unterschiedliche Weise definiert, und ähnlich verschiedene Sichtweisen gibt es zudem hinsichtlich des Verhältnisses beider Begriffe zueinander. Beide Punkte sind hier dementsprechend noch zu erläutern.

Nach Aristoteles' Definition ist eine Analogie (*analogía*) „eine Beziehung, in der sich die zweite Größe zur ersten ähnlich verhält wie die vierte zur dritten“, z. B. verhalte sich „eine Schale ähnlich zu Dionysus wie ein Schild zu Ares“ (*Poetik* xxi.12). Dieser Analogiebegriff beruht auf dem mathematischen Begriff: Analogien sind im klassischen mathematischen Verständnis Proportionen der Form $a : b :: c : d$. Sie sind für Aristoteles eine Unterart von Metaphern.

Den Kern des Analogie-Begriffs beschreibt Sapir (1977: 23) folgendermaßen: „Two terms are juxtaposed and, ignoring any shared features they might have, we look instead to their respective semantic domains: A is to A's domain as X is to X's domain. In this arrangement A and X are not thought of as similar; they remain ... in metonymic juxtaposition“. So lasse sich *George the lion* als Analogie verstehen, wenn nicht die gemeinsamen Merkmale in Betracht gezogen werden als vielmehr die jeweiligen Bereiche: *George* verhält sich zu *Mensch* so wie *Löwe* zu *Tier*.

[25] Auch im ausführlichen Literaturverzeichnis findet sich kein entsprechender Hinweis. Analoges gilt auch für Lakoff - Johnson (1999), wo das Gebiet der Philosophie auf ähnliche Weise behandelt wird.

Diese Sichtweise bezieht sich auf einen engen Begriff von „Analogie", der jedoch einen wesentlichen Punkt beinhaltet: Bei Analogien geht es nicht um eine Ähnlichkeit zwischen Objekten, sondern vielmehr um eine Ähnlichkeit von Relationen. Dieser Aspekt steht auch in kognitionswissenschaftlichen Definitionen im Zentrum. So definiert Gentner eine Analogie als „a kind of similarity in which the same system of relations holds across different objects" (Gentner 1998: 107). Diese Definition beinhaltet bereits eine Nähe zur Metapher, die ja ebenfalls auf Ähnlichkeit beruht. Sie wird von Gentner auch in wissenschaftshistorischem Kontext verwendet. So fassen Gentner - Jeziorski (1993: 452) Analogien, wie dies schon Aristoteles tat, als Unterart von Metaphern auf, wobei sich die Entsprechungen nicht auf die involvierten Objekte beziehen, sondern auf Relationen zwischen diesen Objekten.

Die begriffliche Nähe zwischen „Analogie" und „Metapher" läßt sich präzisieren. Schon Gentner - Jeziorski (1993: 452) machen unter Verweis auf Reddy (1979), Lakoff - Johnson (1980) und Lakoff (1993) darauf aufmerksam, daß mit diesem Verständnis von Analogie auch konzeptuelle Metaphern als Analogien aufgefaßt werden können. Nach Gentner et al. (2001; Hervorhebung im Original) ist „analogical mapping ... a process of establishing a *structural alignment* between two represented situations and then projecting inferences". Dieses *Ausrichten* (*alignment*) folgt zwei Beschränkungen, die unter der Bezeichnung *strukturelle Konsistenz* (*structural consistency*) diskutiert werden: Erstens handelt es sich um eine Eins-zu-Eins-Entsprechung, d. h. genauer, daß jedem Element eines Bereichs höchstens ein Element eines anderen Bereichs entsprechen kann. Zweitens gilt, daß bei sich entsprechenden Prädikaten sich ebenfalls deren Argumente entsprechen (*parallel connectivity*) (Gentner et al. 2001: 200). Aus der Physik ist etwa der Vergleich von Atomen mit Solarsystem bekannt. Durch die *parallel connectivity* entsprechen sich bei den Prädikationen „umkreisen (Planet, Sonne)" bzw. „umkreisen (Elektron, Atomkern)" die jeweiligen Argumente „Sonne" und „Atomkern" bzw. „Planet" und „Elektron", da sie jeweils dieselben Relationen innehaben.[26]

Daß sich diese Prozesse auch bei konzeptuellen Metaphern abspielen, ist keineswegs selbstverständlich, denn es wäre z. B. möglich, daß metaphorische Sätze, sofern sie Instantiierungen von konzeptuellen Metaphern darstellen, lokal verarbeitet werden, d. h. ohne daß semantische Verbindungen zwischen den metaphorischen Sätzen berücksichtigt werden (Gentner et al. 2001: 202f.). Experimentelle Funde deuten jedoch darauf hin, daß dies nicht der Fall ist. Genauer lassen sich die Ergeb-

[26] Beispiel nach Gentner - Wolff (2000: 298f.).

nisse so zusammenfassen: Je innovativer eine Metapher ist, desto ähnlicher sind die kognitiven Prozesse im Vergleich zur Analogie; je konventioneller eine Metapher ist, desto größer die Unterschiede.

Das bedeutet, daß bei der Verarbeitung innovativer Metaphern ein Ausrichten im oben dargelegten Sinne stattfindet, ähnlich wie im Fall der Verarbeitung von Analogien. Bei der Rezeption von Texten, in denen z. B. eine konzeptuelle Metapher wie ARGUMENT IS WAR ausgeführt wird, werden Übertragungen vom Bildspender zum Bildempfänger konstruiert und nach und nach im Einklang mit der oben genannten Beschränkung der strukturellen Konsistenz erweitert. Bei konventionellen Metaphern hingegen findet ein solches Ausrichten nicht statt, d. h. es ist damit zu rechnen, daß gar keine metaphorische Übertragung vorliegt, sondern daß lediglich die verschiedenen Bedeutungen eines polysemen Ausdrucks abgerufen werden (Gentner et al. 2001: 215-217).

Diese beiden Möglichkeiten wollen wir an einem Beispiel illustrieren: Der Satz *Ida gave Joe a great idea* würde nach der ersten Möglichkeit so verarbeitet, daß eine Übertragung von *cause a change in possession* zu *cause a change in cognitive state* stattfindet. Nach der zweiten Möglichkeit hingegen wäre anzunehmen, daß diese beiden Bedeutungen von *give* bereits lexikalisiert sind und keine Übertragung, sondern nur ein Abrufen der bildhaften Bedeutung vorliegt.

Auch in der diachronen Semantik wird eine ähnliche Kritik an der kognitiven Linguistik vorgebracht. So weist Fritz (1998: 10, 44) darauf hin, daß gerade innerhalb dieser Forschungsrichtung nicht selten die Rolle von semantischen Traditionen unterschätzt wird (s. Kap. 4.1.5).[27] Die zweite Möglichkeit ist auch bei der Untersuchung von konzeptuellen Metaphern in der Mathematik zu berücksichtigen.

Bei der Interpretation historischer mathematischer Textstellen ist zu beachten, daß der Ausdruck *Analogie* und seine europäischen Äquivalente zu verschiedenen Zeiten in jeweils unterschiedlicher Bedeutung verwendet wurden. Knobloch (1989) arbeitet verschiedene Auffassungen von „Analogie“ innerhalb der Geschichte der Mathematik heraus. So wurden Analogien von Kepler als grundlegendes Verfahren in der mathematischen Heuristik aufgefaßt, d. h. nach Kepler können durch Analogien mathematische Aussagen gefunden werden, die anschließend noch zu beweisen sind (Knobloch 1989: 37). Im 19. Jahrhundert hingegen wurden Analogien auch bewußt konstruiert, um damit bestimmte gewünschte Eigenschaften der untersuchten mathematischen Objekte zu erzwingen (Knobloch 1989: 43f.).[28]

[27]Ähnliche Kritik bringt auch Debatin (1995: 247) an.

[28]Mehrtens (1990: 490) weist darauf hin, daß es sich bei allen von Knobloch betrachteten Bei-

Als Beispiel führt Knobloch u. a. Kummers „ideale Zahlen“ an, mit deren Hilfe sich bestimmte Teilbarkeitseigenschaften der von Kummer untersuchten Zahlen wiederherstellen lassen. Wir werden dieses Beispiel in Kap. 9.4.1 genauer diskutieren.

Vergleichbares gilt auch für andere Wissenschaften. So diskutieren Gentner - Jeziorski (1993) am Beispiel der Chemie bzw. der Alchemie sich wandelnde Auffassungen des Analogiebegriffs. Wenn bei alchemistischen Forschungen mehrere Analogien für einen Gegenstand gefunden oder konstruiert wurden, dann war es z. B. üblich, diese Analogien miteinander zu vermischen. In der heutigen Wissenschaft würde man sich hingegen für eine entscheiden oder auf verschiedene Interpretationsmöglichkeiten hinweisen (Gentner - Jeziorski 1993: 466).

Aufgrund der Tatsache, daß sich der Begriff verändert hat und daß unterschiedliche kulturelle Bedingungen ein unterschiedliches Verständnis von „Analogie“ beinhalten können, stellen die beiden Autoren zwei verbreitete Hypothesen infrage, nämlich „that a faculty for analogical reasoning is an innate part of human cognition, and that the concept of a sound, inferentially useful analogy is universal“.

3.7 Wortfelder

Schließlich wollen wir noch einige Anmerkungen zum linguistischen Feldbegriff machen, da die metonymische Verbundenheit von Fachtermini ein Aspekt ist, der uns in den Fallstudien noch beschäftigen wird.

Der Feldbegriff entstand im Rahmen der strukturellen Semantik. Zu seiner Ausarbeitung und Verbreitung haben wesentlich die Arbeiten von Jost Trier beigetragen, der sich in zahlreichen Arbeiten damit auseinandergesetzt hat. Eine klassische Definition des Begriffs lautet: „Felder sind die zwischen den Einzelworten und dem Wortschatzganzen lebendigen sprachlichen Wirklichkeiten, die als Teilganze mit dem Wort das Merkmal gemeinsam haben, daß sie sich ergliedern, mit dem Wortschatz hingegen, daß sie sich ausgliedern“ (Trier 1934 [1972: 82]). Einzelne Wörter sind demnach nicht nur als Teil des gesamten Wortschatzes anzusehen, sondern auch als Bestandteil eines Teilganzen, d. h. einer Menge von Wörtern, die mindestens ein semantisches Merkmal teilen; ein Wort wie *gescheit* ist demnach

spielen um strukturelle Analogien handelt. Die Unterschiede zeigen sich z. B. darin, ob Analogien zu nicht-mathematischen Bereichen akzeptiert werden bzw. welche Funktion diesen zugesprochen wird.

immer in Abgrenzung zu semantisch verwandten Wörtern wie *klug* und *weise* zu betrachten. Ein wichtiges Ergebnis der Wortfeldforschung besteht darin, daß, wie Trier in seinen Untersuchungen zeigt, der semantische Wandel eines Wortes eines Feldes Auswirkungen auf andere Wörter des Feldes hat und damit die Realität des Feldes als strukturiertem Zusammenhang erwiesen ist.

Die Arbeiten von Trier sind in unterschiedlichen Begrifflichkeiten fortgesetzt worden.[29] Eine modernere Definition gibt z. B. Lehrer (1985: 283): „A semantic field is a set of lexemes which cover a certain conceptual domain and which bear certain specifiable relations to one another". Diese Definition ist allgemeiner als die Triers, da der Begriff der semantischen Relationen weiter gefaßt ist und z. B. auch Antonyme mit einschließt. Lehrer untersucht u. a. Regelmäßigkeiten im semantischen Wandel, in diesem Fall z. B. die Frage, wie semantisch verwandte Ausdrücke parallelen Bedeutungswandel aufweisen.

Bei der Aufstellung eines Wortfeldes muß man sich klarmachen, daß dessen Abgrenzung eine Entscheidung ist, die nicht rein sprachlich zu begründen ist, sondern letztlich auf praktischen Erwägungen basiert – sie „ist nur eine Notmaßnahme, damit die Arbeit nicht ins Unendliche wächst" (Leisi 1985: 107).[30]

Semantische Felder sehen wir nicht nur als Erscheinung der Gemeinsprache, sondern gerade auch als eine von Fachsprachen. Gehen wir etwa vom Begriff der natürlichen Zahlen aus, dann sind damit bereits weitere Begriffe verbunden. Dazu können wir verschiedene Unterarten von natürlichen Zahlen zählen, etwa gerade und ungerade Zahlen, aber z. B. auch weitere Begriffe, die mit der Teilbarkeit von Zahlen zusammenhängen, also Begriffe wie „Teiler" und „Vielfaches", „Primzahl" und „zusammengesetzte Zahl", „größter gemeinsamer Teiler" usw.

Dieses Feld werden wir in Kapitel 9 detaillierter untersuchen und dabei besonders die Systematizität der Übertragung auf andere Teilgebiete der Mathematik als die Arithmetik betrachten.

[29] Einige neuere Arbeiten zu diesem Thema, zum Teil unter Einbeziehung von Ergebnissen der kognitiven Semantik sind Lehrer - Kittay (1992) sowie Lutzeier (1992, 1995).

[30] S. a. Schneider (1988: 39).

Kapitel 4

Semantischer Wandel und Etymologie

In diesem Kapitel sollen wichtige theoretische Konzepte aus der diachronen Semantik und Etymologie besprochen und daraufhin untersucht werden, ob und inwieweit sie auf den hier untersuchten Themenkreis anwendbar sind. Angesichts des Umstandes, daß die bisher vorliegenden Theorien semantischen Wandels nicht für Fach- oder Wissenschaftssprachen konzipiert wurden, ist eine entsprechende Einschätzung für uns besonders wichtig. In bezug auf die Etymologie, die knapper abgehandelt werden kann, geht es dann darum, welche Begrifflichkeiten hier überhaupt anwendbar sind bzw. um die Frage, was unter der Etymologie eines Fachwortes verstanden werden kann.

4.1 Semantischer Wandel

4.1.1 Einleitung

Semantischer Wandel war in der philologischen Forschung des 19. Jahrhunderts ein zentrales Thema. Mit dem Aufkommen des Strukturalismus setzte eine Phase der verminderten Beschäftigung mit diesem Gegenstand ein, doch seit den 1980er Jahren ist wieder eine verstärkte Zuwendung zu semantischem Wandel zu beobachten. Dies hängt nicht zuletzt mit kognitiven semantischen Theorien zusammen, für die semantischer Wandel z. B. einen Zugang zu semantischen Regularitäten und konzeptuellen Metaphern bietet.[1]

[1] Überblicke über die Geschichte der Erforschung semantischen Wandels geben Blank (1997: 7-46) und Fritz (1998: 86-103). Für einen umfassenden Überblick über die klassische philologische

Es mag an dieser Stelle intuitiv eingewendet werden, daß es sich beim semantischen Wandel um ein Phänomen handelt, das sich lediglich in der Gemeinsprache abspielt und sich von dem Wandel der Bedeutung von Termini grundsätzlich unterscheidet. Aus diesem Grunde ist es umso wichtiger, genauer herauszuarbeiten, inwiefern Theorien des semantischen Wandels in unserem Kontext anwendbar sind. Aus Sicht der Terminologieforschung ist der angesprochene Unterschied nicht unbedingt unüberwindbar:

> Wenngleich sich die Terminologie in bezug auf Wortbildung und Bedeutungswandel nicht grundsätzlich von der übrigen Lexik unterscheidet, also zur natürlichen Sprache gehört, so ist sie doch dem lenkenden und ordnenden Eingriff des Menschen gefügiger (Hoffmann 1988: 105).

Hier wird zwar auf Unterschiede zwischen Gemein- und Fachsprache aufmerksam gemacht, doch kann man diese Passage zumindest als Ermutigung lesen, das Phänomen des semantischen Wandels auch bei der Untersuchung von Fachsprachen nicht von vornherein auszuschließen. Pulaczewska (1999: 214) geht in ihrer Arbeit über Metaphern in der Fachsprache der Physik um einiges weiter: „... in the production of new items of physical terminology by transfer of denotations, not only are the same cognitive procedures utilised as in common language ... but also the system of a natural language ... contains a set of non-lexical semantic 'stock' components which become utilised in the production of linguistic metaphors, and that the metaphorical transfer of denotation in physics also draws upon this stock". Unter „stock" sind hier z. B. konzeptuelle Metaphern und häufig vorkommende Bildspender zu verstehen, d. h. daß sich Fachsprachen bei der Produktion von Metaphern solcher gemeinsprachlicher Mittel bedienen.

Dafür, daß es sinnvoll ist, Ergebnisse der diachronen Semantik mit einzubeziehen, gibt es konkrete Anhaltspunkte. Zum einen steht die Existenz von Begriffswandel außer Frage, und es besteht kein Grund für die Annahme, daß dieses Phänomen in der Mathematik nicht vorkomme oder sogar nicht vorkommen könne. Zweitens sollen hier nicht nur Fachwörter im engen Sinne diskutiert werden, sondern auch Ausdrücke, die nicht unbedingt definiert sind und damit nicht als Termini gelten, die aber trotzdem eine wichtige Rolle in mathematischen Fachtexten spielen, insbesondere bei Prädikationen, die mit definierten Termini in Zusammenhang stehen. Drittens sind Erkenntnisse aus der Erforschung des semantischen Wandels auch da relevant, wo gar kein semantischer Wandel vorliegt. Dies betrifft

Forschung s. Nerlich (1992).

insbesondere die Abgrenzung von Homonymie und Polysemie: Selbst wenn wir in einem konkret vorliegenden Fall von Homonymie sprechen oder nicht von einem semantischen bzw. Begriffswandel ausgehen wollen, etwa bei der geometrischen und der algebraischen Bedeutung von *Körper*, so stellt sich dennoch die Frage, welche Gemeinsamkeiten die verschiedenen Bedeutungen aufweisen, und dafür stellt die diachrone Semantik geeignete Begriffe zur Verfügung.

Die in diesem Kapitel diskutierten Begrifflichkeiten werden jeweils auch anhand mathematischer Beispiele illustriert.

4.1.2 Empirische Probleme des Sprachwandels

Zuvor sollen noch einige Probleme angesprochen werden, die mit der Entstehung und Entwicklung von Sprachwandel im allgemeinen in Zusammenhang stehen. Diese wurden in einer richtungsweisenden Arbeit von Weinreich, Labov und Herzog (1968) formuliert und sind seitdem auf zahlreiche Fälle des Sprachwandels angewendet worden, die alle sprachlichen Ebenen betreffen.[2] Es sei noch angemerkt, daß die Fragen bzw. Probleme grundlegend für die allgemeine Sprachtheorie sind und auch synchron formuliert werden können. Sie haben eine strukturierende Funktion insofern, als sie eine Taxonomie und eine Orientierungshilfe bieten, die die richtigen linguistischen Fragen anregt.

Das erste Problem nennen die Autoren das *Beschränkungsproblem* (*constraints problem*).[3] Hierbei geht es um die Möglichkeiten sprachlichen Wandels bzw. um Tendenzen oder Regularitäten. In synchroner Ausprägung ist dieses Problem zentral für die generative Grammatik; in der historischen Semantik findet gerade die Frage nach den Regularitäten semantischen Wandels in den letzten Jahren wieder verstärkte Aufmerksamkeit.[4] Solche Regularitäten und Tendenzen lassen sich auch in der Entwicklung der mathematischen Fachsprache aufzeigen, insbesondere in Zusammenhang mit semantischem Wandel und in der Wahl von Bezeichnungen. Z. B. wird sich zeigen, daß die Beispiele für semantischen Wandel, die wir betrachten werden, sich vielfach nicht isoliert abspielen, sondern daß oft parallele Entwicklungen bei semantisch miteinander verwandten Ausdrücken stattfinden.

Das *Übergangsproblem* (*transition problem*) betrifft den Übergang bzw. die

[2] Damit ist selbstverständlich nicht gemeint, daß diese Probleme nicht schon zuvor bekannt gewesen wären. Die Aufstellung der Probleme bei Weinreich, Labov und Herzog ist das Ergebnis einer ausführlichen Diskussion der Literatur zum Thema Sprachwandel.

[3] Alle Bezeichnungen im folgenden nach Weinreich - Labov - Herzog (1968: 183-187).

[4] Z. B. bei Harm (2000) und in der Grammatikalisierungsforschung.

Übernahme eines sprachlichen Wandels. Gemeint sind damit insbesondere Übergänge von einer Altersgruppe oder einer sozialen Gruppe in eine andere sowie Übergänge im sprachlichen System. Lautwandel z. B. verbreiten sich im sprachlichen System nicht selten nach einem bestimmten Muster: Zunächst ist davon nur eine kleine Anzahl von Wörtern betroffen, anschließend findet eine Art „Beschleunigung" dieses Prozesses statt, die dann wieder nachläßt und auch nicht alle Wörter erreicht (s. z. B. Aitchison 1991: 83-88). Analog dazu kann man etwa untersuchen, wie sich eine Analogie, etwa die in Kap. 9 diskutierte Analogie der Algebra zur Arithmetik, im fachlich-lexikalischen System ausbreitet. Da Analogien nicht beliebig fortgeführt werden können, sie also an Grenzen stoßen, werden auch nicht alle ihre Aspekte lexikalisiert. Die Ausbreitung der Analogie ist dann beendet, ähnlich wie bei der Ausbreitung von Lautwandel. Die Gründe dafür sind allerdings andere als beim Lautwandel, u. a. weil die Überprüfung einer Analogie ein bewußter Prozess ist, was beim Lautwandel nicht der Fall ist.

In bezug auf die diachrone Semantik ist z. B. die klassische Arbeit von Meillet (1905/06) zu nennen. In dieser Arbeit stellt sich Meillet die Frage, wie sich Bedeutungswandel überhaupt abspielt. Ein bekanntes Beispiel, das Meillet diskutiert, ist frz. *arriver* 'ankommen', welches auf lat. *adripare* 'die Küste anlaufen' zurückgeht und das, wie Meillet annimmt, in der Seemannssprache verbreitet war (Meillet 1905/06 [1975: 259]). Im Rahmen seiner Übernahme in die Gemeinsprache fand dann regelmäßig eine Bedeutungserweiterung statt, womit eine allgemeine Beschränkung der Richtung des Bedeutungswandels angesprochen ist. Das Beispiel zeigt, daß die einzelnen analytisch getrennten Probleme gemeinsam auftreten können, da eine Regularität (und damit eine Beschränkung) so verstanden werden kann, daß bei Übernahme aus einer Fachsprache in die Gemeinsprache eine Bedeutungserweiterung stattfindet. Erwähnenswert für unseren Zusammenhang ist weiterhin, daß durch Meillet der Begriff der „Entlehnung" eine Neuinterpretation erfährt, denn traditionell wird darunter ein Vorgang zwischen zwei verschiedenen Sprachen verstanden.

In unserem Kontext ist das Übergangsproblem besonders dort relevant, wo es um semantische Entlehnungen geht. Betroffen sind dabei nicht nur Übergänge zwischen verschiedenen Einzelsprachen, sondern auch zwischen unterschiedlichen Teilbereichen der Mathematik.

Das *Einbettungsproblem* (*embedding problem*) hat zwei Aspekte: Es geht einerseits um die Einbettung sprachlichen Wandels in das linguistische System, und andererseits um den sozialen und kulturellen Kontext, in dem ein Sprachwandel gesehen werden kann. In der bereits in Kapitel 3.7 angesprochenen Untersuchung von Trier (1934) über das Wortfeld des Wissens zeigt sich beispielsweise, daß sich die Bedeutungen und die Veränderungen der Wörter *wîsheit*, *kunst* und *list* aus einem bestimmten sozialen Kontext, nämlich der Sicht des Hofes, ergeben. Trier untersucht gleichzeitig den zweiten Aspekt des Einbettungsproblems, die Einbettung im sprachlichen System, da für ihn jedes Wort in ein System von Wörtern eingebettet ist und daher der semantische Wandel eines Ausdrucks, der zu einem bestimmten Wortfeld gehört, Konsequenzen für die Aufteilung des Wortfeldes hat. So können sich etwa semantische Relationen innerhalb des Wortfeldes verändern, wenn ein Ausdruck des Wortfeldes seine Bedeutung ändert (s. Kap. 3.7).

Als viertes Problem nennen Weinreich - Labov - Herzog das *Bewertungsproblem* (*evaluation problem*), das der subjektiven Bewertung verschiedener Sprachvarianten durch ihre Sprecher. Beurteilt eine Gruppe von Sprechern ein bestimmtes sprachliches Phänomen negativ, dann kann man eine Prognose über das allmähliche Verschwinden dieses Phänomens treffen. Das Bewertungsproblem spielt in dieser Arbeit eine untergeordnete Rolle. Wir werden jedoch darauf eingehen, inwieweit sich Einstellungen von Mathematikern zu ihrer Disziplin auf die von ihnen gewählte Sprache auswirken können (Kap. 10), da hiervon z. B. die Wahl der Bezeichnungen betroffen sein kann.

Das letzte Problem ist schließlich das *Anstoßproblem* (*actuation problem*)[5], das als das grundlegendste der genannten Probleme aufgefaßt werden kann. Es handelt sich um die Frage nach dem Anstoß für einen bestimmten sprachlichen Wandel, d. h. das Anstoßproblem wirft die Frage nach den konkreten Ursachen eines sprachlichen Wandels im Hinblick auf die komplexen Wirkungen von sozialen und sprachlichen Faktoren auf.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß nicht nur Diskontinuitäten erklärungsbedürftig sind, sondern daß auch die Kontinuität sprachlicher Phänomene, z. B. Bedeutungen, zu betrachten sind, denn Stabilität stellt immer auch ein Element des Wandels dar (s. Fritz 1998: 83-85).

4.1.3 Ein semiotisches Modell

Definitionen des semantischen Wandels bzw. des Bedeutungswandels nehmen in der Regel Bezug auf ein allgemeines semiotisches Modell, denn die Definitionen

[5]Die Übersetzung *Anstoßproblem* lehnt sich an Windisch (1988: 126) an, der *actuation* mit *Anstoß* übersetzt.

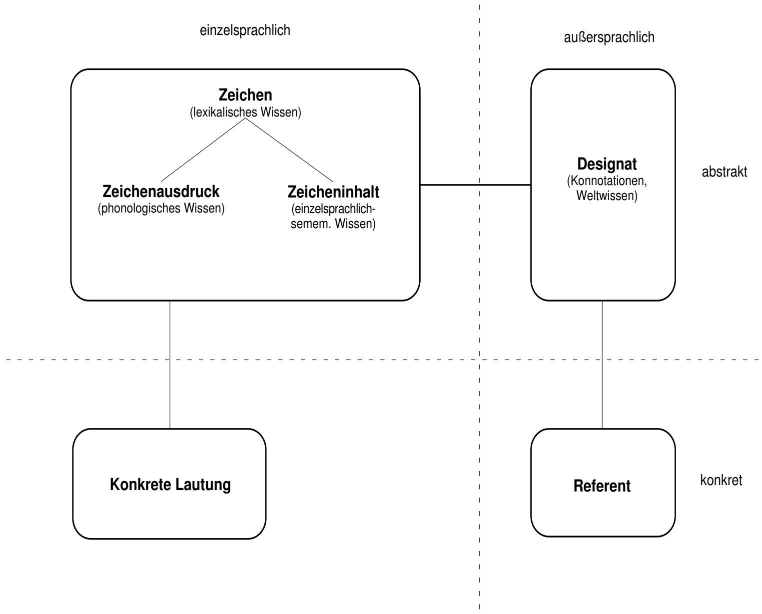

Abbildung 4.1: Ein semiotisches Modell (nach Blank 1997: 102)

hängen von der Bestimmung des Begriffs „Bedeutung" ab. Wir lehnen uns hier an Blank (1997: 96-102) an, der zweifellos die ausführlichste Untersuchung der letzten Jahre über semantischen Wandel vorgelegt hat und ein Modell entwirft, das den von ihm vorgeschlagenen Bedeutungstypen gerecht wird.

Blank (1997: 97) unterscheidet zunächst in Anlehnung an Hilty (1971) und Heger (1969: 176) eine „Ebene des Möglichen" und eine „Ebene des Wirklichen". Auf der ersten, abstrakten Ebene befinden sich der *Zeichenausdruck* und der *Zeicheninhalt*, die beide zusammen das *Zeichen* ausmachen. Ebenfalls zu dieser Ebene gehört das *Designat*, worunter Blank (1997: 98) „eine begrifflich nicht weiter gegliederte Ansammlung aller Aspekte, die mit einem bestimmten Ausdruck bezeichnete Referenten für gewöhnlich besitzen oder besitzen können" versteht. Dem Designat sind Konnotationen und Weltwissen zugeordnet.

Auf der zweiten, konkreteren Ebene befinden sich diejenigen Teile des semiotischen Prozesses, die nur im konkreten Redeakt auftreten, die konkrete Lautung und der Referent. Beiden kann man im Gegensatz zu den Elementen der Ebene des Möglichen eine materielle Realität zusprechen.

Damit ergibt sich eine Gliederung, die einerseits auf der Unterscheidung zwischen Konkretem und Abstraktem und andererseits auf der von Sprachlichem und Außersprachlichem beruht.

Dieses Modell beinhaltet alle von Blank (1997: 54-96) diskutierten Aspekte seines Bedeutungsbegriffs. Dazu zählt Blank auch einige Aspekte, die traditionell nicht unbedingt unter diesen Begriff fallen, die aber gerade auch in Zusammenhang mit der Untersuchung von Bedeutungswandel relevant sind. Er unterscheidet verschiedene „Ebenen der Bedeutung“, nämlich zunächst eine im engeren Sinne semantische Ebene, auf der die Bedeutung mit Merkmalen oder visuellen Repräsentationen erfaßt wird (vgl. Kap. 2). Zur zweiten Ebene gehören erstens lexikologische Begriffe wie die Wortart, Wortfamilie, Polysemie und Homonymie, zweitens diasystematische Markierungen (d. h. räumliche, soziale und stilistische Markierungen) und drittens Kollokationen und Selektionsbeschränkungen. Die dritte Ebene umfaßt schließlich das Weltwissen und Konnotationen.

4.1.4 Definition von semantischem Wandel

Mit diesem semiotischen Modell und den eben genannten Ebenen der Bedeutung läßt sich nun eine Bestimmung des Begriffs „semantischer Wandel“ vornehmen.

Wir unterscheiden mit Blank (1997: 112) zwischen „Bedeutungswandel im weiteren Sinn“ und „Bedeutungswandel im strengen Sinn“.[6] Unter ersterem versteht Blank „jede lexikalisierte Veränderung auf einer der sechs Ebenen der Bedeutung“. Dies ist ein allgemeiner Begriff, der nicht unbedingt das Entstehen einer neuen Bedeutung impliziert, wie etwa das Beispiel ait. *gota* ‘Wanderer’ zeigt, das im Neuitalienischen von der Gemeinsprache in das literarische Register wechselt, ohne seine Bedeutung im engeren Sinne zu verändern (Blank 1997: 107).

Bei „Bedeutungswandel im strengen Sinn“ sind alle Ebenen der Bedeutung betroffen, d. h. insbesondere auch die erste, im engeren Sinne semantische Ebene. Es können neue Merkmale entstehen oder alte wegfallen, und es ist davon auszugehen, daß es zumindest eine zeitweilige Phase der Polysemie gibt (Blank 1997: 107; s. a. Evans 1992: 477). Fritz (1998: 54) postuliert hier – allerdings nicht für jeden semantischen Wandel – ein „Prinzip der kleinen Schritte“, nach dem semantische Entwicklungen in möglichst einfache Schritte zerlegt und untersucht werden sollten. Dieses Prinzip sieht er jedoch nicht nur als ein methodisches, sondern es wird auch als im historischen Prozeß selbst wirksam angenommen. Fritz lehnt sich dabei an Paul (1894 [1998: 72]) an, der bereits von „Übergangsstufen ..., die von

[6]Blank behält die Bezeichnung *Bedeutungswandel* bei, die insofern nicht immer passend ist, als sich die Ausgangsbedeutung eines semantischen Wandels typischerweise nicht verändert (Blank 1997: 113).

einer Bedeutung zur andern hinüberleiten" gesprochen hat. Dieses Prinzip ist jedoch als problematisch anzusehen: So wie beim lautlichen Wandel sowohl Kontinua als auch Sprünge vorkommen, gilt dies auch für semantischen Wandel. Dazu ein Beispiel, bei dem „kleine Schritte" weder historisch zu belegen noch plausibel zu rekonstruieren sind: Die Bedeutung von e. *bead* hat sich von 'Gebet' zu 'Perle' entwickelt (Stern 1975: 168). Statt von kleinen Schritten ist hier vielmehr von Ambiguität auszugehen, denn, wie Stern (ibid.) darlegt, kann sich der Satz *he is counting his beads* sowohl auf das Zählen von Gebeten als auch auf das Zählen von Perlen beziehen.

Die Merkmale, die beim semantischen Wandel entstehen, können sich demnach stark von den bisher vorhandenen Merkmalen unterscheiden (s. a. Blank 1997: 107).

Aus Sicht der Gemeinsprache ist ein Wort, das eine fachsprachliche Bedeutung angenommen hat, nicht automatisch als polysem anzusehen, da die Kenntnis dieser speziellen Bedeutung bei den Sprechern der Gemeinsprache nicht gegeben sein muß. Polysemie liegt nur aus der Perspektive der Fachsprache vor.[7]

4.1.5 Formen des semantischen Wandels

Die wichtigsten Formen des semantischen Wandels sind schon in der philologischen Forschung des 19. Jahrhunderts untersucht worden. Blank (1997: 157-344) hat die dort herausgearbeiteten „klassischen" Formen (bei ihm als *Verfahren* bezeichnet) einer ausführlichen Revision unterzogen und eine Klassifikation aufgestellt, die wir im folgenden kurz diskutieren wollen. Er ergänzt und interpretiert dabei die klassischen Formen (wie sie etwa Ullmann 1962: 211-227 darlegt) neu, wobei er Bedeutungsverbesserung und -verschlechterung nicht als eigenständige Formen ansieht, da sie sich ausnahmslos den anderen Formen zuordnen lassen (Blank 1997: 333-339).

Der wichtigste und wahrscheinlich am häufigsten untersuchte Typ des semantischen Wandels ist die *Metapher* (Blank 1997: 157-190). Sie beruht nach Blank auf der Similarität der Designate (Blank 1997: 160-163). Diesen Typ haben wir bereits aus synchroner Perspektive besprochen (Kap. 3). Betrachten wir dazu den geometrischen Ausdruck *Basis*. Schon im griechischen Ausgangswort spielen sich verschiedene Formen von Bedeutungswandel ab: *básis* bedeutet eigentlich 'Schritt, Gang', dann (metonymisch) 'feste Grundlage, auf die man tritt bzw. auf der man steht'.

[7]Blank (1997: 108) spricht in solchen Fällen von „asymmetrischer Polysemie".

Daraus entsteht metaphorisch die geometrische Bedeutung 'Grundlinie, Grundfläche'. Entsprechende Metaphorik ist auch Jahrhunderte später noch üblich:

(4.1) Base, in Geometry, the lowest side of any figure. Any side of a figure may be considered as its base, according to the position in which it may be conceived as standing; but commonly it is understood of the lowest side (Hutton 1795/96, s. v. base)

Das Beispiel weist die Basis einer geometrischen Figur als das aus, worauf eine Figur oder ein Körper steht; sie ist das Fundament, das als „Stütze“ dient.[8] Dabei ist es mathematisch völlig unerheblich, welche Seite einer geometrischen Figur man sich als Stütze denkt. Da man sich aber geometrische Objekte häufig als Abstrahierungen physikalischer Objekte vorstellt, werden sie auch so dargestellt, daß sie nicht „umfallen“ können: So werden z. B. Dreiecke üblicherweise mit der längsten Seite nach unten gezeichnet. Diese Ähnlichkeit zu physikalischen Objekten bildet die Assoziation, die der Metapher zugrundeliegt.

Der semantische Wandel hat sich in diesem Beispiel bereits im Griechischen abgespielt. Das Französische und andere moderne Sprachen haben die im Griechischen vorliegende Polysemie dann übernommen. Der Kontext in obigem Zitat (z. B. das Verb *stand*) zeigt aber auch, das die Metaphorizität zumindest noch zu didaktischen Zwecken ausgeschöpft werden kann, d. h. sie läßt sich nicht nur anhand der Semantik von *base* erkennen, sondern auch anhand darüber hinausgehender kontextueller Merkmale.

Gerade innerhalb der kognitiven Semantik wird die Similarität von Designaten nicht selten als kognitiv-universelle Erscheinung interpretiert. Fritz (1998: 10, 44) weist jedoch nachdrücklich darauf hin, daß viele Metaphern eine historische Tradition haben, die nicht mit einer solchen Interpretation vereinbar ist.[9] Dieser Aspekt scheint gerade auch für die mathematische Fachsprache wichtig zu sein, da hier eine starke Tendenz besteht, an tradierten Bezeichnungen und Bildern festzuhalten (Kasner - Newman 1989: 4).

Unter *Bedeutungserweiterung* und *-verengung* wird der Wandel von Ober- zum Unterbegriff bzw. umgekehrt verstanden (Blank 1997: 192, 201). Diese Begriffe werden häufig den *Folgen* des Bedeutungswandels zugerechnet, nicht den Formen (z. B. bei Ullmann 1962: 227-231). Blank kritisiert jedoch diese Sichtweise auf der

[8] In der *Encyclopédie*, s. v. base, wird das Verb *appuyer* 'stützen' verwendet.

[9] Fritz (1998: 44) weist als Beispiel nur allgemein auf die Bedeutung „christlich-antiker Traditionen“ hin.

Grundlage einer Analyse der bisherigen Verwendung dieser Begriffe innerhalb der Linguistik. Dabei zeigt sich, daß sich die in der Literatur gegebenen Beispiele anderen Typen wie der Metapher zuordnen lassen (Blank 1997: 194) bzw. daß bei verschiedenen Autoren eine Verwechslung von erweiterter Extension und der Anzahl der Bedeutungen eines Wortes stattfindet (Blank 1997: 195f.). Mit Blanks engerer Definition von Bedeutungserweiterung und -verengung ergeben sich eigenständige Formen, wie sie sich z. B. beim Wandel von vlt. *pipio* 'junger Vogel' zu afrz. *pijon* 'junge Taube' zeigen (Blank 1997: 201-203).

Als mathematisches Beispiel für eine Bedeutungserweiterung können wir wiederum den Ausdruck *Basis* heranziehen, der im Deutschen zunächst die horizontal liegende Seite in einem *rechtwinkligen* Dreieck bezeichnete und später die horizontal liegende Seite in einem *beliebigen* Dreieck (Schirmer 1912, s. v. Basis).

Ein weiterer wichtiger Typ des semantischen Wandels ist die *Metonymie*. Diese beruht auf der Kontiguität von Designaten. It. *spina* etwa hat ausgehend von der Bedeutung 'Dorn' die Bedeutung 'stechender Schmerz' angenommen. Hier liegt Kontiguität gemäß unseres Weltwissens vor (Blank 1997: 151f.). Die Metonymie spielt eine wesentliche Rolle bei verschiedenen Aspekten der mathematischen Symbolik, scheint aber als Form semantischen Wandels nicht sehr häufig zu sein. Ein Beispiel bieten einige Ausdrücke wie *Leib* bei Kepler, die sowohl 'Körper' (in der Geometrie) als auch 'Volumen eines Körpers' bedeuten (Götze 1919: 119).

Die weiteren bei Blank genannten Formen des semantischen Wandels sollen hier nur kurz der Vollständigkeit halber aufgeführt werden. Sie spielen für unsere weitere Diskussion keine Rolle, was allerdings nicht bedeutet, daß sie grundsätzlich in Fachsprachen nicht vorkommen könnten. Diese Formen sind:

- die *kohyponymische Übertragung* (Blank 1997: 207-217), die ein seltener Vorgang ist und auf der Similarität von Designaten im Rahmen einer taxonomischen Relation beruht. Beispiele gibt Blank u. a. aus dem Bereich der Tier- und Pflanzennamen, z. B. wurde im Mittelalter (zumindest regional) spätl. *talpus* 'Maulwurf' zur Bezeichnung der Feldmaus herangezogen (Blank 1997: 207f.). Dieses Beispiel zeigt zugleich, daß die „Volks"-Taxonomie nicht auf wissenschaftlichen Maßstäben beruhen muß, da Maulwürfe und Feldmäuse sich nicht einer biologischen Familie zuordnen lassen, sondern hier offenbar eher zu einer Klasse „kleine Feldtiere" gerechnet wurden (ibid.).

- die *Antiphrasis* (Blank 1997: 220-225), ein ebenfalls seltener Typ, der auf einem antonymischen Kontrast der Designate beruht und auch klassische Fälle der Antonymie wie lat. *obesus* ‘fett, mager’ umfaßt. Ein substantivisches Beispiel ist afrz. *oste*, daß neben der Bedeutung ‘Gast’ auch die Bedeutung ‘Geisel’ entwickelt.

- die *Auto-Konverse* (Blank 1997: 269-281), die besonders bei Verben vorkommt und auf der Kontiguität (in diesem Fall: Konverse) der Designate beruht. Z. B. gibt es in den romanischen Sprachen zahlreiche Verben, die sowohl ‘mieten’ als auch ‘vermieten’ bedeuten (s. hierzu auch Koch 1991).
- die *Ellipse* (Blank 1997: 281-302), die auf der Kontiguität von Zeichen beruht.
- die *Volksetymologie* (Blank 1997: 303-317), der eine Similarität der Zeichenausdrücke und eine weitere Assoziation, zumeist eine Kontiguität der Designate, zugrunde liegt.
- *analogischer Bedeutungswandel* (Blank 1997: 317-323), bei dem z. B. aufgrund einer semantischen Parallele ein Wort eine Bedeutung eines anderen Wortes übernimmt. Blank (1997: 322) zitiert it. *stampella* ‘Krücke’, das auch die Bedeutung ‘Kleiderbügel’ aufgrund einer Assoziation zu it. *gruccia* ‘Kleiderbügel, Krücke’ annahm.

Die Systematik von Blanks Klassifikation der Formen semantischen Wandels beruht auf den Kombinationsmöglichkeiten der drei Assoziationsprinzipien Similarität, Kontrast und Kontiguität mit einigen Komponenten seines semiotischen Modells, nämlich Designaten, Zeicheninhalten, Zeichen und Zeichenausdrücken. Die Kombinationsmöglichkeiten ergeben eine größere Anzahl als die hier vorgestellten Formen semantischen Wandels; einige Kombinationsmöglichkeiten kommen jedoch nicht vor bzw. sind nicht denkbar. Dazu gehört z. B. die Similarität von ganzen Zeichen, die nach Blank (1997: 155) nur als Similarität zwischen Zeichenausdrücken oder -inhalten vorstellbar ist.

4.1.6 Diskussion

Aussagen zu semantischem Wandel in *Fachsprachen* findet man in der Literatur zur historischen Semantik nur relativ selten. Auch die sonst umfassende Arbeit von Blank macht dabei keine Ausnahme. Viele der Kategorien, die in der historischen Semantik entwickelt wurden, lassen sich aber, wie die Diskussion einiger mathematischer Beispiele gezeigt hat, auf Fach- und Wissenschaftssprache anwenden. Dies gilt insbesondere für die Formen des Bedeutungswandels; so lassen sich etwa metaphorische Ausdrücke in einer Fachsprache mit demselben Instrumentarium beschreiben wie gemeinsprachliche Ausdrücke. Stellt man die Hypothese auf, daß es nur die in Kap. 4.1.5 genannten Formen des Bedeutungswandels gibt, läßt sich festhalten, daß die historische Semantik auch in Fachsprachen zum Verständnis der Beschränkungen möglicher semantischer Veränderungen beitragen kann.

Als eines der „Motive“ bzw. Ursachen für Bedeutungswandel nennt Blank (1997: 376-379) die „Versprachlichung eines neuen Konzepts“. Darunter ist u. a. das zu verstehen, was man in der klassischen Literatur *Bezeichnungsnot* genannt hat. Mit derartigen Fällen werden wir uns in dieser Arbeit häufig beschäftigen. Wird ein neuer mathematischer Begriff gebildet, dann gehört dazu auch eine sprachliche Benennung (s. Kap. 5.7). Aus Sicht der Fachsprache der Mathematik entsteht dabei Polysemie, sofern für die Benennung ein Ausdruck herangezogen wird, der bereits in der Gemeinsprache oder in einer anderen Fachsprache existiert. Man kann vermuten, daß dieses eines der häufigsten Motive des Bedeutungswandels in Fachsprachen ist (s. a. Koch 1994: 218).

Ein grundlegender Unterschied zwischen Bedeutungswandel in der Gemeinsprache und in Fachsprachen läßt sich feststellen, wenn man die Rolle des sprachlichen Kontextes beim semantischen Wandel näher betrachtet. Schon in klassischen Darstellungen zu diesem Thema wird hervorgehoben, daß der eigentliche Ort des Bedeutungswandels der Gebrauch der Sprache ist (für ein Beispiel s. etwa Fritz 1998: 90). Das zeigt z. B. das oben diskutierte e. *bead*, dessen Bedeutung sich in Zusammenhang mit einer Ambiguität in einem speziellen sprachlichen Kontext von ‘Gebet’ zu ‘Perle’ änderte. Im Rahmen einer Wissenschaftssprache, zumindest bei definierten Termini, scheinen analoge Situationen schwer vorstellbar, weil Ambiguität dort etwas ist, das es zu vermeiden gilt, oder, allgemeiner formuliert, weil Interpretationen im Kontext dort eine geringere Rolle spielen. Ist ein neuer Terminus in einer Fach- oder Wissenschaftssprache definiert worden, so sind „Gricesche Raisonnements“ (Fritz 1998: 18), also z. B. Interpretationen einer metaphorischen Äußerung[10] mittels Implikaturen im Sinne von Grice (1975), für den Hörer nicht sachgerecht sind – es ist aber vorstellbar, daß sie Definitionen vorangehen können.

[10] D. h. hier eine Äußerung, die einen metaphorischen Terminus enthält.

4.2 Etymologie

4.2.1 Einleitung

Die Etymologie untersucht die Herkunft von Wörtern (Seebold 1981: 15). Nicht selten ist damit die Rekonstruktion nicht belegter Wortformen- und -bedeutungen verbunden, wobei besonders lautliche, aber z. B. auch semantische, morphologische und typologische Gesichtspunkte herangezogen werden. Da wir uns in dieser Arbeit vorwiegend mit fachsprachlichen Erscheinungen befassen, sollen hier auch nur die dafür relevanten Erscheinungen diskutiert werden.

Seebold (1981: 127) kommt in einem Vergleich von Gemein- und Fachsprache zu folgender Einschätzung: „Mindestens so weit Fachausdrücke auf spezieller Namensgebung oder auf Normierung beruhen, gehören sie nicht dem normalen Wortschatz an. Sie haben auch keine eigentliche Etymologie – man kann lediglich darauf verweisen, wer wann wo mit welcher Absicht die betreffende Namensgebung oder Normierung durchgeführt hat." Dem können wir zunächst entnehmen, daß zur Etymologie eines Fachwortes der Namensgeber, der Zeitpunkt der Namensgebung mit genauer Quellenangabe und das Benennungsmotiv gehören. Die etymologische Hauptmethode, die historisch-vergleichende Methode, insbesondere das Aufstellen von Wortgleichungen, ist bei Fachwörtern im allgemeinen nicht erforderlich: Diese Aufgabe fällt der gemeinsprachlichen Etymologie zu, und diese kann durch die Rekonstruktion von Lautwandel und die Bildung von Wortfamilien keine Erkenntnisse für die spezifische Verwendung eines Wortes in einer Fachsprache liefern. Seebolds Aussage, daß Fachausdrücke „keine eigentliche Etymologie" haben, können wir so allerdings nicht zustimmen – Seebold geht bei dieser Einschätzung von der Methode aus, nicht vom Gegenstandsbereich.

Aus semantischer Sicht ist es besonders wichtig, das „Benennungsmotiv" herauszuarbeiten, also festzustellen, welches semantische Merkmal bzw. welche Merkmale für die Wahl einer Benennung entscheidend ist bzw. sind (Seebold 1981: 47). Das Benennungsmotiv ist auch für die Etymologie eines Fachwortes zentral. Dies zeigt sich z. B. darin, daß Wissenschaftler, sofern sie den Ursprung eines von ihnen (oder auch von anderen) geprägten Fachwortes erläutern, typischerweise und in der Hauptsache auf das Benennungsmotiv eingehen (Drozd - Seibicke 1973: 62). Ein älteres Beispiel aus der Mathematik findet sich z. B. bei Dürer: „Die Ellipsis will ich eine Eierlinie nennen, darum sie schier einem Ei gleich ist. Die parabola sei genannt eine Brennlinie, darum so man aus ihr einen Spiegel macht, so zündet sie an." (Dürer 1525, zitiert nach Olschki 1965: 441, Fn. 1). Dadurch wird zumindest der jeweils erste Bestandteil der Wörter *Eierlinie* und *Brennlinie* erläutert: Im ersten Fall handelt es sich um eine visuelle Ähnlichkeit, im zweiten um eine Funktion, wobei diese Funktion einem physikalischen Objekt zukommt und nicht dem daraus abstrahiertem mathematischen.

Fachwörter stehen in einem engen Verhältnis zur Gemeinsprache (s. Kap. 5.1). Oft handelt es sich um terminologisierte Ausdrücke, z. B. bei *Körper*, d. h. einem aus Gemeinsprache bekannten Wort wird eine fachliche Bedeutung zugewiesen, in diesem Fall (zu unterschiedlichen Zeitpunkten) gleich in verschiedenen Fachgebieten (Physik, Geometrie, Algebra, Anatomie usw.).

4.2.2 Aufbau und Erweiterung

Für den Aufbau und die Erweiterung von Fachwortschätzen stehen verschiedene Möglichkeiten zur Verfügung, die unterschiedlich häufig genutzt werden.

Völlige Neubildungen sind in Fachsprachen (und nicht nur dort) äußerst selten (Fraas 1998: 435). Selbst das gern zitierte Beispiel *Gas* ist bekanntlich an das griechische *cháos* angelehnt. Als Beispiel aus der Mathematik kann das Wort *googol* für die Zahl 10^{100} (eine Eins mit hundert Nullen) genannt werden. Der Ausdruck kommt allerdings eher selten vor; die damit bezeichnete Zahl ist so groß, daß sich in der Natur kaum Mengen dieser Größe finden lassen (selbst die Zahl aller Partikeln im Universum ist kleiner). Über die Entstehung dieses Wortes wird berichtet, daß der Mathematiker Edward Kasner seinen neunjährigen Neffen darum bat, einen Namen für eine sehr große Zahl zu erfinden, worauf dieser die genannte Bezeichnung vorschlug (Kasner - Newman 1989: 23).[11]

Bei der Bildung von Fachwörtern ist es fast immer notwendig, von etwas Bekanntem bzw. Existierendem auszugehen. Diese Wortbestandteile stammen entweder aus der eigenen Sprache oder aus einer oder mehreren anderen Sprachen.

Werden bei der Bildung eines Wortes existierende Wortbestandteile zu einem neuen Wort zusammengesetzt, spricht man von einem *Neologismus* (s. etwa Schippan 1992: 243). Das Wort *Neologismus* gehört z. B. selbst zu dieser Kategorie. Stammen die Wortbestandteile nicht aus der Sprache, in der das Wort gebildet wird, kann man nicht oder nur in einem sehr weiten Sinne von Entlehnung sprechen (Halliday 1978: 196).[12]

[11] Für eine Eins mit *googol* Nullen, also für die Zahl $10^{(10^{100})}$, schlug besagter Neffe zugleich die Bezeichnung *googolplex* vor. In der Zwischenzeit wurden weitere Ableitungen wie *googolgon* und *googolhedron* gebildet.

[12] Einige Probleme dieses Begriffs erläutert Schippan (1992: 243-247).

Ein wichtiges Verfahren zur Bildung von Fachwörtern ist die bereits kurz angesprochene *Terminologisierung*, d. h. die Übertragung von Wörtern aus der Gemeinsprache in eine Fachsprache (Schippan 1992: 233). So hat etwa das Wort *Windung* auch eine mathematische Bedeutung (s. Kap. 5.6). Bei Terminologisierungen treten häufig Metaphern und Metonymien auf.

Wichtig sind des weiteren verschiedene Wortbildungsverfahren wie Komposition, Kürzung und Konversion (Fraas 1998: 435f.). In der Mathematik sind dabei auch Zusammensetzungen mit Abkürzungen wie *ZPE-Ring* (d. i. ein Ring, also eine algebraische Struktur, in dem für jedes Element eine eindeutige *Z*erlegung in *P*rim*e*lemente existiert) gängig (Eisenreich 1998: 1225). Darüber hinaus sind Zusammensetzungen mit einzelnen Symbolen üblich, wie z. B. *4-perfekte Zahl* oder *σ-Algebra* (eine mathematische Struktur, die u. a. in der Wahrscheinlichkeitstheorie verwendet wird) (ibid.).

Andere Fälle werden in der Literatur unterschiedlich beurteilt: Gerisch (1988: 55) zählt z. B. *Fastkörper* und *schiefsymmetrisch* zu den aus Sicht der Gemeinsprache „nicht akzeptablen“ Fällen, Mertens et al. (1973: 420) hingegen halten *Schiefkörper* für eine in der Gemeinsprache durchaus mögliche Bildung, auch ohne Kenntnis des Fachwortes. Gerisch ist insofern zuzustimmen, als Bildungen mit dem Präfix *Fast-* hauptsächlich in Fachsprachen vorkommen, allerdings ist damit die Möglichkeit einer gemeinsprachlichen Verwendung keineswegs ausgeschlossen.[13] Des weiteren treten Bildungen mit *schief* durchaus auch in der Gemeinsprache auf: *schiefmäulig*, *schief gewickelt*, *Schiefblatt* ‘Begonie’ (DUW). Es ist jedoch zu beachten, daß den formalen Ähnlichkeiten, die sich bei Komposita mit *Schief-* zeigen, keineswegs unbedingt eine semantische Ähnlichkeit entspricht. Auf diesen Punkt gehen wir in Kap. 11 ausführlicher ein.

4.2.3 Entlehnung

Bei der Bildung neuer (Fach-)Wörter bzw. bei der semantischen Erweiterung bestehender Wörter stellt sich die Frage, inwieweit Einflüsse aus anderen Sprachen bzw. Sprachvarietäten vorliegen. „Entlehnung“ (*borrowing*) wird in einer klassischen Arbeit Haugens (1950: 212) definiert als „the attempted reproduction in one language of patterns previously found in another“. Dieser Prozeß kann sich auf allen Ebenen der Sprache abspielen, ist jedoch gerade im lexikalisch-semantischen

[13] Eine Suche im Internet ergab neben Jargonausdrücken wie *Fastmensch* (Fantasy-Literatur) auch verschiedene Treffer für die Bildungen *Fastkatastrophe*, *Fasterfolg* und *Fastunfall*.

Bereich besonders häufig. Vom Bereich der Lehnwörter, bei denen Elemente aus einer anderen Sprache in fremder oder angepaßter Form übernommen werden können (Seebold 1981: 198), läßt sich der Bereich der Lehnprägungen unterscheiden. Dazu gehören semantische Entlehnungen (Lehnbedeutungen) wie im Fall von mhd. *vinden* 'finden', das unter Einfluß des gleichbedeutenden afrz. *trouver* auch dessen Bedeutung 'dichten' übernahm (Seebold 1981: 200). Zu den Lehnprägungen gehören auch Lehnübersetzungen bzw. Lehnübertragungen, bei denen jeweils (evtl. in leicht abgewandelter Form) das Benennungsmotiv übernommen wird. Bei Lehnübersetzungen wie z. B. dt. *Wolkenkratzer* aus e. *skyscraper* findet eine (nahezu) Eins-zu-Eins-Übersetzung der einzelnen Wortbestandteile statt (*sky* hatte früher auch die Bedeutung 'Wolken'), bei Lehnübertragungen ist die Entsprechung der Bestandteile nur eine teilweise, wie bei dt. *Fegefeuer*, das sich an lat. *purgatorium* 'Ort, an dem gereinigt wird' anlehnt (Seebold 1981: 198f.).

Entlehnungen im lexikalisch-semantischen Bereich sind in Fach- und Wissenschaftssprachen sehr häufig. Dies gilt auch für die Mathematik: Ältere Beispiele aus der Geometrie, die nahezu unverändert aus klassischen Sprachen übernommen wurden, sind z. B. *Prisma* oder *Hypotenuse*. Beispiele für Lehnübersetzungen aus dem Deutschen ins Englische sind z. B. *factor group* aus *Faktorgruppe* oder die Übernahme der Grassmannschen Bezeichnungen für bestimmte vektorielle Produkte *inner product* und *outer product* aus *inneres Produkt* und *äußeres Produkt* (Pfeffer - Cannon 1994: 36).

Ein Beispiel für eine Lehnbedeutung liefert der Ausdruck *Gruppe*, der unter dem Einfluß des frz. *groupe* seine Bedeutung 'Ansammlung, Zusammenstellung' eine festgelegte terminologische Bedeutung in der Algebra annahm (s. ausführlich Kap. 8).

Ein älteres Beispiel für eine Lehnübertragung, welches gleichzeitig zeigt, daß auch Interpretationsfehler bezüglich des historisches Ursprungs Auswirkungen auf die Terminologie haben können, ist *Feuerfigur* als Ersatz für *Pyramide*, das im 16. Jahrhundert gelegentlich verwendet wurde (Tropfke 1924a: 20). Hier wurde gr. *pỹr* 'Feuer' irrtümlich als Wortbestandteil von *pyramís* gedeutet.

Bei Entlehnungen stellt sich immer auch die Frage, woraus genau entlehnt wird. Man unterscheidet u. a. zwischen *äußerer* und *innerer Entlehnung* (Seebold 1981: 206), je nachdem, ob innerhalb einer Sprache entlehnt wird oder aus einer anderen Sprache. Innerhalb einer Sprache kann z. B. aus einer Fachsprache entlehnt werden (s. die Anmerkungen zu Meillet in Kap. 4.1.2).

Bei der Etymologie eines Fachwortes interessiert uns insbesondere die Namensgebung, d. h. deren Zeitpunkt und die daran beteiligten historischen Personen, sowie das Benennungsmotiv, also insbesondere semantische Zusammenhänge zwischen dem neu geprägten Terminus und dem Ausdruck oder den Ausdrücken, aus denen dieser gebildet wurde.

Kapitel 5

Fachsprachenforschung

In diesem Kapitel geht es um fachsprachentheoretische Grundbegriffe und deren Anwendung auf unseren Themenkreis. Damit sollen weitere Grundlagen für die Auswertung der Fallstudien und die Untersuchung der Spezifika der mathematischen Fachsprache gewonnen werden.

Wir wollen zunächst einige Anmerkungen zum theoretischen Stand der Fachsprachenforschung machen und uns deren zentralen Begriffen zuwenden. Das Hauptziel besteht dabei darin, eine für unsere Zwecke praktikable Definition der Fachsprache der Mathematik zu geben und eine Abgrenzung von verwandten Begriffen wie dem der Gemeinsprache vorzunehmen.

Ein weiterer Schwerpunkt liegt dann auf der Semantik fachsprachlicher Ausdrücke. Wir gehen dabei insbesondere näher auf die Arbeiten von Yves Gentilhomme ein, in denen eine Unterscheidung von gemeinsprachlicher und fachsprachlicher Bedeutung vorgenommen wird und deren jeweils unterschiedliche Funktionen herausgestellt werden.

Wir diskutieren zudem einen linguistischen Funktionsbegriff, der in direktem Zusammenhang mit unserer Definition der Fachsprache der Mathematik stehen wird und uns bei der Zuordnung von Funktionen zu einzelnen sprachlichen Ausdrücken in Fachtexten nützlich sein wird.

Diese Überlegungen gehen dann in ein Modell ein, das eine Orientierung bieten und die wesentlichen Komponenten der wissenschaftlichen Begriffsbildung in einen systematischen Zusammenhang bringen soll.

Abschließend geben wir eine Übersicht über die bisherige Erforschung der Fachsprache der Mathematik, da eine solche bisher fehlt und die entsprechende Literatur nicht als bekannt vorausgesetzt werden kann. Die bisherige Literatur soll daher gegliedert und vorgestellt werden. Schließlich sollen in diesem Abschnitt auch die von uns verwendeten Nachschlagewerke wie das *Oxford English Dictionary* genannt und hinsichtlich ihrer Leistungsfähigkeit für unsere Zwecke diskutiert werden.

5.1 Fachsprachenforschung: Gegenstand und Grundbegriffe

Die Fachsprachenforschung gilt allgemein als relativ junge Disziplin, die sich mit der Erforschung von Fachsprachen bzw., allgemeiner formuliert, mit Fachkommunikation beschäftigt. Zu den Voraussetzungen der Fachsprachenforschung zählen die Definition des Begriffs „Fachsprache“ und dessen Abgrenzung vom kontrovers diskutierten Begriff „Gemeinsprache“ bzw. von weiteren, verwandten Begriffen.[1] Weitere Aufgaben sind die linguistische Beschreibung von Fachsprachen und deren spezifischen Eigenschaften sowie die Untersuchung der „Beziehungen zwischen Fachsprachen und ihrem Verwendungsbereich in kommunikativ-pragmatischer Sicht“ (Bartha 1993: 551).

In einschlägigen Publikationen findet sich weitreichende Übereinstimmung in der Einschätzung der heutigen theoretischen Situation der Fachsprachenforschung. Am wichtigsten erscheint dabei das „schmerzliche Defizit“ der fehlenden Ausarbeitung einer konsistenten Fachsprachentheorie (Hoffmann - Kalverkämper 1998: 359). Damit einher geht die grundlegende Problematik, daß zentrale theoretische Begriffe nicht oder kaum reflektiert werden oder begrifflich nicht geklärt sind. Dieses Dilemma trifft nach Kalverkämper (1998a: 1) insbesondere auf den Begriff „Fach“ zu. Vergleichbares läßt sich auch in bezug auf die Problematik der Abgrenzung von Fachsprache und Gemeinsprache und, in etwas geringerem Ausmaß, die Definition von „Wissenschaftssprache“ feststellen.[2]

[1]Eine Übersicht über Versuche zur Abgrenzung von „Fachsprache“ und „Gemeinsprache“ gibt Hoffmann (1998a).

[2]S. etwa Hoffmann (1998a), Becker - Hundt (1998), Kalverkämper (1998b), Kretzenbacher (1998) und Roelcke (1999b: 189).

5.2 Vorüberlegungen für die Definition der Fachsprache der Mathematik

Wir werden nun im Anschluß an diese einführenden Bemerkungen so vorgehen, daß wir zunächst überlegen, welche Aspekte in eine Definition von „Fachsprache“ eingehen müßten, die für unsere Zwecke angemessen erscheint. Im Anschluß daran werden wir diese Überlegungen systematisieren und zu bisherigen Ansätzen aus der Literatur in Beziehung setzen.

Zentraler Gegenstandbereich unserer Arbeit ist die Fachsprache der Mathematik (bzw. von bestimmten Unterdisziplinen der Mathematik), wie sie vorwiegend im 19. Jahrhundert verwendet wurde. An dieser Stelle können wir zunächst präzisieren, daß wir uns auf Wissenschaftssprache konzentrieren. Entsprechend haben wir das Korpus ausgewählt, das vorwiegend aus Monographien und wissenschaftlichen Aufsätzen besteht (s. Kap. 6.2). Diese Textsorten sind u. a. dadurch gekennzeichnet, daß sie von Wissenschaftlern für (angehende oder „ausgewiesene“) Wissenschaftler produziert werden. Dies wird für eine Definition von Wissenschaftssprache insofern eine Rolle spielen, als wir bei diesen Kommunikatoren einen hohen Grad an Fachlichkeit bzw. ein hohes Maß an fachlichem Wissen annehmen können.

Eine zweiter Aspekt sind Definitionen, die als metasprachliche Akte einen integralen Bestandteil wissenschaftlicher Kommunikation darstellen. In der Mathematik etwa sind präzise Definitionen der verwendeten Begriffe unerläßlich. Dabei können sich die Standards für Definitionen historisch verändern.[3] So wurden in einigen mathematischen Arbeiten aus dem 19. Jahrhundert auch für eine Theorie zentrale Begriffe nicht unbedingt definiert. Dies gilt z. B. für Kummers „ideale Zahlen“, von denen sich in seinen Schriften keine Definition findet – Kummer erklärt lediglich, was es heißt, daß eine Zahl durch eine ideale Zahl *teilbar* ist.[4] Trotz der fehlenden Definition sind die Arbeiten Kummers nicht abgelehnt, sondern im Gegenteil ausgiebig rezipiert worden. Die Definition der Teilbarkeit durch eine ideale Zahl hat offenbar ausgereicht, um ein hinreichendes Verständnis idealer Zahlen zu erreichen und mit diesen Zahlen mathematisch zu arbeiten. Die verwendeten Begriffe sind also *hinreichend* präzise zu definieren.[5] Für den Fall der idealen Zahlen ist hinzuzufügen, daß man zwar mit ihnen rechnen konnte, daß aber

[3]In bezug auf die Mathematik s. dazu etwa Heintz (2000: 259-272).

[4]Dazu ausführlicher Kap. 9.4.1.

[5]Ein Beispiel für unterschiedliche Typen von Definitionen werden wir in Kap. 10 diskutieren.

gleichzeitig das Fehlen der Definition problematisiert wurde, d. h. die Unterlassung der Definition wird selbst zum Thema.

Fachsprachen zeichnen sich des weiteren dadurch aus, daß mit ihnen nur ein bestimmter, inhaltlich begrenzter Ausschnitt der Welt erfaßt werden kann, andere jedoch nicht; der Alltag kann z. B. nicht oder kaum fachsprachlich ausgedrückt werden.[6] In unserem Fall ist das Objekt mathematischer Art. Dieser Punkt erfaßt aber nur den Objektbereich einer speziellen Fachsprache: Die Art und Weise, die Fachlichkeit, mit der über ein Objekt kommuniziert wird, darf nicht unberücksichtigt bleiben, denn selbst über „typisch“ wissenschaftliche Objekte kann grundsätzlich auch gemeinsprachlich kommuniziert werden.

5.3 Bisherige Ansätze

Wir wollen nun bisherige Ansätze zur Definition von „Fachsprache“ und verwandter Begriffe diskutieren. Die bisher dargelegten diesbezüglichen Aspekte sind in der Literatur aus unterschiedlichen Perspektiven erörtert worden, nämlich aus einer eher soziolinguistischen Perspektive (Kap. 5.3.1), aus einer auf das Sprachinventar bezogenen Perspektive (5.3.2), aus einer funktionalen Perspektive, in der Fachsprache als „intellektualisierter“ Pol des Sprachkontinuums und als Sprache mit einer Dominanz von Referenz und Metasprache betrachtet wird (Kap. 5.3.3) und schließlich aus einer stilistisch-funktionalen Perspektive (Kap. 5.3.4).

5.3.1 Varietätenforschung

Es ist naheliegend, Fachsprachen als Varietäten aufzufassen, die ähnlich wie Dialekte bestimmte charakteristische Merkmale haben. In der linguistischen Varietätenforschung, die wir nun darstellen und hinsichtlich ihrer Relevanz für unser Thema bewerten wollen, wurden einige außersprachliche Dimensionen herausgearbeitet, die zur Definition von „Fachsprache“ herangezogen werden. Wir besprechen zunächst die in der Literatur meistgenannten Dimensionen von Variation, wie sie etwa bei Becker - Hundt (1998: 124f.) und Adamzik (1998: 182) zusammengestellt sind.

Zunächst ist hier die *diatopische Dimension* zu nennen. Darunter wird die „kommunikative Reichweite“ (Becker - Hundt 1998: 124) verstanden, also der

[6] Die Versprachlichung bestimmter Objekte kann unverständlich oder komisch wirken, wenn diese Themen nicht das originäre Gebiet dieser Fachsprache sind.

räumliche Geltungsbereich einer Varietät, d. h. etwa die Region oder auch deren Beschaffenheit. Diese Dimension bezieht sich insbesondere (aber nicht ausschließlich) auf Dialekte und lokale Varietäten. Die *diastratische Dimension* bezieht sich auf die soziale Gruppe der Sprecher. Dieser Aspekt ist vorwiegend für die Soziolinguistik interessant, da dort die Gruppenzugehörigkeit als Variable untersucht wird, die mit der sprachlichen Variation korreliert. Drittens ist die *diachrone Dimension* zu nennen, durch die die Wandelbarkeit von Sprache einbezogen wird. Alle drei bisher genannten Dimensionen sind sekundär für die Definition von „Fachsprache“. Die *diasituative Dimension* schließlich bezeichnet eine Form funktionaler Variation. Sie beinhaltet z. B. bei Nabrings (1981: 140-142) das Gesprächsthema, das Medium und den Ort der Kommunikation. Nabrings faßt diese Punkte unter den Begriff „Situation“. Das Gesprächsthema ist ein für uns relevanter Aspekt, der aber noch präziser zu bestimmen ist; das Thema allein reicht für eine Definition nicht aus, da über jeden Gegenstand fachlich oder nicht fachlich kommuniziert werden kann.

Adamzik (1998: 184) schlägt im Anschluß an ihre Diskussion der oben besprochenen varietätenlinguistischen Dimensionen vor, eine weitere, thematische Dimension einzuführen: „da das, was eine Fachsprache am eindeutigsten charakterisiert (und was bei aller Variation innerhalb einer Fachsprache gleichbleibt), weder die Situation noch die Funktion noch die Gruppe ist, sondern das Fach, das Objekt, über das kommuniziert wird, so müßte man als Variationsdimension Fachlichkeit/Thematik/Inhalt ansetzen“. Dabei wird nicht nur das Objekt selbst berücksichtigt, sondern auch der Grad der Fachlichkeit, mit dem über Objekte und Sachverhalte kommuniziert wird.

Diese Dimension muß nach dem bisher Gesagten als wesentlich für eine Definition von Fachsprache angesehen werden, auch wenn sie bei vielen Autoren nur einen, wenn auch wichtigen Aspekt unter vielen darstellt.

Auf der Basis der vier erstgenannten Dimensionen nehmen Becker - Hundt (1998: 126) eine Differenzierung der zentralen fachsprachentheoretischen Begriffe vor. Die Autoren sehen die Alltagsprache als durch die diasituative Dimension bestimmt: „Sie [die Alltagssprache, H. B.] ist die Varietät, deren Einsatzbereich und versprachlichter Weltausschnitt der Alltag ist“ (ibid.); die Standardsprache sehen sie durch eine maximale kommunikative Reichweite (im Gegensatz zu Dialekten) gekennzeichnet. Der Gemeinsprache schreiben sie eine hohe kommunikative Reichweite in Verbindung mit der Versprachlichung des Alltags zu, und Fachsprachen unterscheiden sich davon durch eine fachspezifische Semantik.

Zusammenfassend können wir feststellen, daß der Begriff der Varietät, der selbst noch einer Begründung bedarf, einen sehr allgemeinen Ansatzpunkt für die Fachsprachentheorie bietet. Innerhalb dieser Forschungsrichtung wird hervorgehoben, daß die Funktionalität, die in die diasituative Dimension eingeht, einen essentiellen Aspekt von Fachsprachen darstellt. Eine präzise Definition der Fachsprache der Mathematik ist im Rahmen dieses Ansatzes zwar grundsätzlich zu leisten, nur sehen wir die Gefahr, daß durch die Allgemeinheit spezifische Eigenschaften nicht hinreichend berücksichtigt und expliziert werden.

5.3.2 Fachsprachen und Subsprachen

Subsprachen sind Teilsysteme des gesamten Sprachsystems einer Einzelsprache, die über eingeschränkte Kommunikationsbereiche definiert werden. Im Rahmen der Subsprachenforschung geht man häufig vom Begriff der Gesamtsprache aus, die definiert wird als „das vollständige Potential aller sprachlichen Zeichen und konstitutiven Regeln für Sprachhandlungen (*langue*), aus dem ständig Teilbestände ausgewählt werden, um die entsprechenden Sprachhandlungen zu vollziehen" (Hoffmann 1998d: 190). Fachsprachen werden dann als Subsprachen gesehen, die die Kommunikation in einem gegebenen Bereich gewährleisten (ibid.). Es wird also vom Kommunikationsgegenstand ausgegangen, und die Fachlichkeit wird dabei insofern berücksichtigt, als diese für die angemessene Verständigung erforderlich ist. Auch die Gemeinsprache läßt sich als Teilsystem der Gesamtsprache betrachten (Hoffmann 1998a: 162).

Fachsprachen als Subsprachen zu betrachten heißt also insbesondere, den thematischen Aspekt in den Vordergrund der Untersuchung zu stellen und andere Aspekte, z. B. die Funktionalität, dem versprachlichten Weltausschnitt unterzuordnen. Diese Perspektive erscheint uns zu einseitig, sie muß aber nicht zwangsläufig mit dem Subsprachenansatz verbunden werden. Gemeinsprache und Fachsprachen sind ein- und derselben Instanz untergeordnet und treten jeweils als Auswahlmöglichkeiten aus dem sprachlichen Gesamtpotential auf; es kommt dann darauf an, näher zu bestimmen, was die konkrete Auswahl steuert, und dieser regulierende Aspekt kann auch in Abhängigkeit von Faktoren wie der Funktionalität betrachtet werden. Durch die Überordnung der Gesamtsprache über Fach- und Gemeinsprache ergibt sich u. a. auch die Möglichkeit, die Gemeinsamkeiten von Fach- und Gemeinsprache besser zu erfassen. Nimmt man nur letztere Opposition an und betrachtet Fachsprachen als Teilsysteme einer Gemeinsprache, dann fällt schon die sprachliche Formulierung solcher Gemeinsamkeiten schwer bzw. sie erscheint nicht sinnvoll.[7]

Wir gehen im folgenden auf stärker funktionalistisch ausgerichtete Ansätze ein.

5.3.3 Funktionalstilistik und die sprachlichen Funktionen bei Roman Jakobson

Funktionalstilistik

Aus historischer Sicht ist hier zunächst die Funktionalstilistik zu nennen, die aus der Prager Schule hervorgegangen ist. Dort wird ein Begriff von „Funktion" zugrundegelegt, der nicht nur sprachimmanente, sondern auch außersprachliche Faktoren berücksichtigt. Gerade letztere sind auch für die heutige Fachsprachenforschung wichtig. Nach Bartha (1993: 558) hat sich die Fachsprachenforschung diesen Gedanken noch nicht hinreichend zueigen gemacht.

Die Funktionalstilistik wurde hauptsächlich in der tschechischen und sowjetischen Linguistik und Literaturwissenschaft entwickelt. Ein zentraler Gedanke besteht darin, daß ein Sprachsystem kein homogenes Ganzes ist, sondern daß sich durch Aspekte des Sprachgebrauchs verschiedene „Funktionalsprachen" voneinander unterscheiden lassen.[8] Bohuslav Havránek ist als ein Hauptvertreter der tschechischen Ausprägung der Funktionalstilistik anzusehen. Auch heute noch wird seine Untersuchung über Funktionalsprachen und -stile (Havránek 1932) als Orientierungspunkt für stilistische und fachsprachliche Untersuchungen herangezogen. Wir wollen daher auf die für Fachsprachen wesentlichen Konzepte dieser Schrift näher eingehen.

Havránek nimmt für die (Schrift-)Sprache vier grundlegende Funktionen an: die kommunikative Funktion, die praktisch-fachliche Funktion, die theoretisch-fachliche Funktion und die ästhetische Funktion (Havránek 1932 [1976: 127]). Diesen Funktionen ordnet er verschiedene „Funktionalsprachen" zu: Alltagsprache, Sachsprache, Wissenschaftssprache und Dichtersprache.[9] Den Funktionalsprachen sind wiederum verschiedene „Funktionalstile" zugeordnet, die durch das Ziel einer

[7] S. a. Pulaczewska (1999: 65, Fn. 96).

[8] Durch die Einbeziehung des Sprachgebrauchs in die linguistische Untersuchung nimmt die Funktionalstilistik ein entscheidendes Charakteristikum der Pragmatik vorweg.

[9] In einer späteren Arbeit (Havránek 1969) reduziert er diese vier Funktionalsprachen auf drei: Konversationssprache, Fachsprache und Literatursprache.

Aussage bestimmt werden (Havránek 1932 [1976: 129]).

Havránek arbeitet nun die sprachlichen Mittel genauer heraus, durch die die speziellen Funktionen der Sprache realisiert werden können.

Die funktionale Betrachtung der Sprache ist nicht nur klassifkatorisch einteilend, sondern bezogen auf ein dynamisches Kontinuum von „Intellektualisierung" und „Automatisierung". Die „Intellektualisierung" (der Literatursprache) ist zentral für Fach- und Wissenschaftssprachen. Havránek versteht darunter „eine Anpassung der Sprache, die darauf abzielt, daß ihre Äußerungen bestimmt, genau und, wenn nötig, so abstrakt sind, daß sie das Denken in seinen Zusammenhängen und in seiner ganzen Kompliziertheit ausdrücken können" – sie ist „eine Stärkung der intellektuellen Komponente der Rede" (Havránek 1932 [1976: 115]). Es geht hier also darum, die Literatursprache so zu entwickeln, daß sie bestimmten kommunikativen Bedürfnissen oder Normen angepaßt ist und das bisher nicht oder anders Versprachlichte zu versprachlichen. Bei Wissenschaftssprachen, die Havránek durchgehend in seine Diskussion einbezieht, sind dabei Anforderungen wie etwa eine genaue und eindeutige sprachliche Ausdrucksweise zu berücksichtigen. Die Intellektualisierung äußert sich vorwiegend auf lexikalischer Ebene, Havránek erkennt aber auch syntaktische Ausprägungen der Intellektualisierung.

Der Begriff „Automatisierung" meint „den Gebrauch sprachlicher Mittel ..., der für eine bestimmte Aufgabe des Ausdrucks üblich und so beschaffen ist, daß der Ausdruck selbst keine Aufmerksamkeit erregt" (Havránek 1932 [1976: 120]). Es handelt sich um die Verwendung konventioneller sprachlicher Mittel, die für den Hörer bereits durch die Gegebenheiten des sprachlichen Systems verständlich sind, d. h. ohne Einbeziehung des situativen oder sprachlichen Kontextes (ibid.). Ein in einer Fachsprache verwendeter Ausdruck ist automatisiert, wenn er in dieser Fachsprache „lexikalisch geläufig" ist; der Begriff der Automatisierung hängt jedoch von der betrachteten Funktionalsprache ab, so daß ein in einer Fachsprache lexikalisierter Ausdruck seinen automatisierten Status verliert, wenn der Ausdruck z. B. gegenüber einem Laien geäußert wird.

Der Begriff „Aktualisierung" bezeichnet die gegenläufige Tendenz („Deautomatisierung"). Havránek versteht darunter „eine Verwendung sprachlicher Mittel, die so beschaffen ist, daß sie selbst Aufmerksamkeit erweckt und als ungewöhnlich aufgefaßt wird, als frei von Automatisierung, also einen disautomatisierten Gebrauch" (Havránek 1932 [1976: 121]). Hier handelt es sich um „auffällige" Ausdrücke oder sonstige sprachliche Erscheinungen, also solche, die z. B. überraschend oder ungewöhnlich wirken, etwa der Gebrauch eines Wortes in einer ungewöhnlichen Bedeutung.[10]

Havráneks Arbeiten sind auch heute noch für die Fachsprachenforschung relevant. Dies gilt zum einen für seine zahlreichen Einzelbeobachtungen, die innerhalb der Fachsprachenforschung als nahezu uneingeschränkt richtig bewertet werden (Hoffmann 1976: 69). Aus theoretischer Sicht hebt Bartha (1993: 564) hervor, daß Sprache als ein „funktionales Ganzes“ betrachtet wird, was die interdisziplinäre Erforschung von Fachkommunikation unterstützt. Insbesondere der Begriff „Intellektualisierung“ betrifft einen zentralen Aspekt von Fachsprachen, der auch heute noch Gültigkeit hat und aus diesem Grunde auch von uns im folgenden berücksichtigt wird. Des weiteren sieht Havránek Wissenschaftssprachen als besonders streng ausgeprägte Form von Fachsprachen an, eine Sichtweise, der wir uns anschließen. Durch die Konzentration auf Wissenschaftsprache in unserer Untersuchung können deren Spezifika umso deutlicher hervortreten.

Roman Jakobsons Modell sprachlicher Funktionen

In seinem Aufsatz „Linguistics and poetics“ (Jakobson 1960) stellt Jakobson ein Modell sprachlicher Funktionen vor, das auf einem Kommunikationsmodell beruht, dessen Komponenten einzelne sprachliche Funktionen zugeordnet werden. Wir stellen dieses Modell zunächst näher vor und gehen dann auf Beziehungen der dort auftretenden sprachlichen Funktionen zu Fachsprachen ein.

Jakobson postuliert sechs am Prozeß der Kommunikation beteiligte „konstitutive Faktoren“ (*constitutive factors*), die in Abb. 5.1 dargestellt sind.

context
message
addresser .... addressee
contact
code

Abbildung 5.1: Kommunikationsmodell nach Jakobson (1960 [1981: 22])

Jakobson (1960 [1981: 21f.]) geht davon aus, daß ein Sender (*adresser*) eine Nachricht (*message*) an einen Empfänger (*addressee*) sendet. Damit Kommunikation stattfinden kann, sind nach Jakobson ein Kontext, ein Code und ein Kontakt

[10] In der englischen Übersetzung (Havránek 1964) des hier behandelten Textes (Havránek 1976) wird entsprechend von *foregrounding* gesprochen.

erforderlich. Unter „Kontext“ sind hier die Referenten zu verstehen, auf die sich der Sender bezieht, aber auch weitere Handlungen und Umstände, die nicht rein sprachlich, aber sprachlich bedeutsam sind. Mit „Kontakt“ ist ein Kanal zwischen Sender und Empfänger gemeint, und „Code“ meint ein Zeichensystem, das die Kommunikation zwischen Sender und Empfänger regelt und ermöglicht.

Diese verschiedenen Faktoren bestimmen (*determine*) nach Jakobson (1960 [1981: 22]) jeweils verschiedene sprachliche Funktionen. Er fügt allerdings hinzu, daß eine sprachliche Mitteilung nur in den seltensten Fällen lediglich eine einzige dieser Funktionen erfüllt. In der Praxis gibt es meist eine Funktion, die die Nachricht „dominiert“, die anderen Funktionen können aber gleichzeitig gegeben sein.[11]

referential
poetic
emotive conative
phatic
metalingual

Abbildung 5.2: Sprachliche Funktionen nach Jakobson (1960 [1981: 27])

Die sich ergebenden Funktionen sind in Schema 5.2 dargestellt; sie sind so angeordnet, daß erkennbar wird, welchen Komponenten des Kommunikationsmodells welche Funktionen entsprechen. Danach besteht die emotive Funktion einer sprachlichen Äußerung darin, daß der Sender z. B. seine Einstellung zum Gesprächsgegenstand ausdrückt. Es können aber etwa durch die Stimme des Sprechers auch unwillkürlich weitere Informationen wie dessen Alter zum Ausdruck kommen, die ebenfalls zur emotiven Funktion zu zählen sind. Die konative Funktion ist dem Empfänger der Botschaft zugeordnet. Sie entspricht der Bühlerschen Appellfunktion, d. h. es geht z. B. um eine Anrede oder Aufforderung, etwa darum, den Empfänger zu einer Handlung zu veranlassen oder ihn von etwas zu überzeugen. Beispiele sind die Verwendung von Imperativen und Vokativen. Die referentielle Funktion (auch als *denotative* oder *kognitive* Funktion bezeichnet) ist dem Kontext zugeordnet; sie dominiert alle Sachtexte. Hinsichtlich der poetischen Funktion ist zunächst festzuhalten, daß sie der Nachrichtenform zugeordnet ist und, obwohl die Bezeichnung dies nahelegen mag, keineswegs nur in poetischen Texten auftritt. Nach Jakobson

[11] Jakobson (1960 [1981: 22]) spricht von einer „predominant function“ und „the accessory participation of other functions“.

(1960 [1981: 25]) liegt ein „focus on the message for its own sake“ vor, d. h. die „Einstellung“ (*set*) eines Textproduzenten ist vorwiegend auf den Text selbst bzw. seine sprachliche Formulierung gerichtet. Die phatische Funktion ergibt sich aus einer Orientierung auf den Kontakt. So haben z. B. Begrüßungen diese Funktion, aber auch jede Äußerung, die darauf abzielt, den Erfolg oder Mißerfolg eines kommunikativen Aktes zu überprüfen. Die metalinguistische Funktion schließlich ist auf den Code gerichtet. Sprachliche Äußerungen, die auf dessen Überprüfung oder Erläuterung abzielen, können dieser Funktion zugeordnet werden.

Da Fachsprachen eine Form von Sprache darstellen, ist davon auszugehen, daß die oben diskutierten Funktionen auch für unser Thema relevant sind. Wir wollen daher die Funktionen aus fachsprachlicher Sicht näher betrachten. Der Begriff der Funktion beinhaltet häufig, aber nicht notwendigerweise, eine Intentionalität seitens des Senders. Aus fachsprachlicher Sicht können wir Intentionalität insbesondere bei zwei sprachlichen Funktionen annehmen: der referentiellen und der metalinguistischen Funktion. Die referentielle Funktion ist zentral für Fachsprachen, da es in Fachsprachen um sachbezogene Darstellungen eines Gegenstandes oder Sachverhaltes geht.

Die anderen genannten Funktionen sind demgegenüber sekundär, z. B. die mögliche Absicht des Textproduzenten, den oder die Empfänger von der Richtigkeit seiner Argumentation zu überzeugen. Aus Sicht des Empfängers ist die referentielle Funktion ebenfalls als zentral anzunehmen, denn eine sachbezogene Darstellung gehört zu dessen Erwartungshaltung.

Die zweite für Fachsprachen zentrale Funktion ist die metalinguistische Funktion. Sie ist besonders bei Definitionen wichtig, die eine zentrale Voraussetzung fachsprachlicher Kommunikation ist. Jede Definition stellt eine sprachliche Festlegung eines Terminus dar; einem Wort wird mittels eines sprachlichen Aktes explizit oder implizit eine Definition zugewiesen.

Wir sehen diese beiden Funktionen in einem noch zu präzisierenden Sinne (Kap. 5.4) als konstitutiv für Fachsprachen an. Sie dominieren fachsprachliche Texte, doch lassen sich auch die anderen genannten Funktionen in fachsprachlicher Kommunikation nachweisen. Dabei ist nicht davon auszugehen, daß unbedingt Intentionalität vorliegt (auch wenn dies durchaus vorkommen kann), es können aber *Wirkungen* beim Empfänger auftreten, die sich mittels dieser Funktionen erfassen lassen.

Wissenschaftliche Texte können ein gruppenbildendes Element aufweisen, da ihr Verständnis beim Empfänger zu einem Zugehörigkeitsgefühl führen kann; entsprechend kann Nicht-Verständnis ausgrenzend wirken (s. dazu auch Gloy 1998). Dieser Aspekt ist zur phatischen Funktion zu zählen. Bei der wissenschaftlichen Begriffsbildung (s. Kap. 5.7) kann auch die emotive Funktion insofern wirksam sein, als der Sender subjektive Vorstellungen vom Untersuchungsobjekt übermitteln kann. Dies kann auf terminologischer Ebene zum Ausdruck kommen. So drücken der physikalische Terminus *strange particle* oder auch die mathematische Bezeichnung *imaginäre Zahl* eine subjektive Haltung zum Gegenstand der Untersuchung aus: Ein *strange particle* wird als „merkwürdig" angesehen, da seine Eigenschaften überraschend oder unverständlich sind (Pulaczewska 1999: 218), und eine imaginäre Zahl ist ein Objekt der Vorstellung, d. h. in diesem Fall, daß sie nicht als existent angesehen wird.[12] Der emotive Charakter geht aber in der Fachsprache verloren, spätestens dann, wenn z. B. die durch *strange* ausgedrückte Verwunderung nicht mehr nachempfunden wird.

5.3.4 Registertheorie

Wir kommen nun zum Begriff des „Registers" (e. *register*), der in besonders stark ausgeprägter angelsächsischer Tradition steht und heute sogar im Rahmen einer *Register Theory* diskutiert wird.[13] Der Begriff wurde insbesondere in der kontextualistischen Tradition Firths entwickelt. Bei diesem kommt die Bezeichnung *register* aber noch nicht vor; sie wird zuerst von Reid (1956) verwendet (de Beaugrande 1993).[14]

In einigen klassischen Arbeiten wird der Registerbegriff dem Begriff „Dialekt" gegenübergestellt.[15] Dabei wird *register* als „variety according to use" charakterisiert, *dialect* als „variety according to user" (Halliday - McIntosh - Strevens 1964: 77). Dies ist sicher noch keine hinreichende Charakterisierung, doch zeigt sich bereits an dieser knappen Formulierung eine Nähe zum Begriff „Varietät", der in den

[12] Die Bezeichnung stammt von René Descartes, der sie wie folgt kommentiert: „...tant les vraies racines que les fausses ne sont pas toujours réelles, mais quelquefois seulement imaginaires: c'est a dire qu'on peut bien toujours en imaginer autant que j'ai dit en chaque équation, mais qu'il n'y a quelquefois aucune quantité qui corresponde à celles qu'on imagine." (Descartes 1637 [1886: 63]).

[13] *Register Theory* ist der Titel eines Sammelbandes von Ghadessy (1993).

[14] Eine Übersicht über den Registerbegriff aus fachsprachlicher Perspektive gibt Hess-Lüttich (1998). Halliday selbst wendet den Begriff auch auf Fachsprachen an, nämlich auf die Mathematik (Halliday 1978: 194-204) und die Physik (Halliday 1988).

[15] Wobei zu beachten ist, daß e. *dialect* eine weitere Bedeutung als das deutsche *Dialekt* hat und auch Akzente und Soziolekte umfassen kann.

meisten Definitionen von „Register“ enthalten ist (Hess-Lüttich 1998: 208). Ein Register ist eine Varietät, die durch die Sprachverwendung in einem spezifischen situativen Kontext charakterisiert ist; es bildet ein sprachliches Repertoire, aus dem Sprecher eine Auswahl treffen können.

Aufschlußreicher sind die Dimensionen des Registerbegriffs, die besonders von Halliday herausgearbeitet wurden. Die Dimensionen sind hier nicht als Komponenten, sondern als Determinantien der Rede zu verstehen (Halliday 1978: 62).

Die erste Dimension – „the whole setting of relevant actions and events within which the language is functioning“ – wird bei Halliday als *field of discourse* oder kurz *field* bezeichnet (Halliday 1978: 33). Sie zielt auf konkrete Handlungssituationen wie etwa den Kauf einer Zeitung ab (Halliday 1978: 221f.). Halliday zählt dazu auch den Gegenstand der Rede, das Thema („subject matter“). In einigen Arbeiten werden weiterhin das Textgenre und das Sachgebiet, innerhalb dessen man sich bewegt, genannt (s. Hess-Lüttich 1998: 210). Die Dimension „field“ umfaßt also das Thema und die Art der Handlung, in die die Rede einbegettet ist.

Die zweite Dimension „tenor“ beruht auf dem Verhältnis der Teilnehmer eines kommunikativen Aktes zueinander: „[tenor] refers to who is taking part, to the nature of the participants, their statuses and roles“ (Halliday - Hasan 1985: 12). Es ist z. B. ein Unterschied, ob man über ein wissenschaftliches Objekt zu Experten oder zu Laien spricht.

Die Dimension „mode“ schließlich „refers to what part the language is playing, what it is that the participants are expecting the language to do for them in the situation“ (Halliday - Hasan 1985: 12). Dazu gehört z. B. die in der Fachkommunikation wirksame Unterscheidung zwischen gesprochener und geschriebener Sprache. Sie betrifft aber auch „the extent to which a text constructs or accompanies its field“ (Martin 1992: 509), oder in anderslautender Formulierung: „mode mediates the degree to which language is part of or constitutive of what is going on“ (Martin 1992: 516). Wir werden diese Unterscheidung im nächsten Abschnitt anhand von Wissenschaftssprachen näher diskutieren, wollen sie zuvor jedoch kurz illustrieren. Der sprachliche „mode“ ist z. B. „ancillary“ (Martin 1992: 518), wenn man (nicht-verbal) auf ein Objekt zeigt; besteht letztere Möglichkeit nicht, spricht man also über ein abwesendes Objekt, ist der „mode“ konstitutiv.

Die genaue Bestimmung eines Registers ergibt sich dann durch die jeweilige Ausprägung dieser Dimensionen. Sprachlich äußert sich ein Register in erster Linie durch die Wahl lexikalischer Mittel; aber untersucht werden auch etwa morphologische, syntaktische und prosodische Aspekte.

Halliday äußert sich auch zu der Frage, in welchem Zusammenhang die drei Dimensionen des Registerbegriffs zu Funktionen der Sprache stehen. Diese „Funktionen" – bei Halliday u. a. als *functions* oder *metafunctions* bezeichnet – übersetzen die Registerdimensionen in sprachliche Formen. Halliday versteht sie als „generalized functions which have as it were become built into language, so that they form the basis of the organization of the entire linguistic system" (Halliday 1978: 47).[16] Es geht hier demnach nicht um den Sprachgebrauch unter dem Gesichtspunkt der Intentionalität oder Nicht-Intentionalität; diese Begriffe kommen bei Halliday gar nicht vor, da die Funktionen bei Halliday als deskriptive Begriffe erscheinen, die darlegen sollen, was an der sprachlichen Oberfläche geschieht.

In der Registertheorie werden im Anschluß an Halliday drei Funktionen unterschieden: die *ideationale* (*ideational*), die *interpersonale* (*interpersonal*) und die *textuelle* (*textual*). Wir wollen diese Funktionen nun etwas näher betrachten. Halliday (1978: 45) versteht unter der ideationalen Funktion „language as expressing the speaker's experience of the external world, and of his own external world, that of his own consciousness", d. h. Sprache kann dazu verwendet werden, die Erfahrungen des Sprechers zu verbalisieren. Der Sprecher wird hier als Beobachter der Welt gesehen.[17] Halliday (1978: 112) bezeichnet diese Funktion auch als „content function". Sie ist der Dimension „field" zugeordnet.

Die zweite, interpersonale Funktion, die der Dimension „tenor" zugeordnet ist, ergibt sich daraus, daß der Sprecher auch als „Eindringling" („intruder") betrachtet werden kann (Halliday 1978: 112), und zwar in dem Sinne, daß er seine eigenen Meinungen und Einschätzungen ausdrückt und versucht, andere Menschen zu Handlungen zu bewegen, sie von etwas zu überzeugen usw. Die interpersonale Funktion berücksichtigt, daß Sprache dazu verwendet werden kann, soziale Beziehungen zu begründen und aufrecht zu erhalten.

Die textuelle Funktion schließlich ist eine textbildende Funktion. Sie unterscheidet sich insofern von den beiden anderen Funktionen, als sie im Gegensatz zu jenen sprachimmanent ist (Halliday 1978: 48). Halliday zählt hierzu insbesondere den aus der Textlinguistik bekannten Begriff der „Kohäsion". Diese Funktion ist der Dimension „mode" zugeordnet.

---

[16] Halliday spricht an einigen Stellen statt von Funktionen auch von *semantic components* (z. B. Halliday 1978: 116).

[17] Halliday unterteilt diese Funktion in zwei Unterfunktionen, die „experiential function" und die „logical function". Bei der ersten geht es um den Ausdruck der Welterfahrung im engeren Sinne, bei der zweiten um den Ausdruck abstrakterer logischer Relationen, die nur indirekt aus der Erfahrung abgeleitet sind (s. Halliday - Hasan 1976: 26).

Zusammenfassend können wir folgendes festhalten. Der Begriff des Registers ist in erster Linie über den Begriff der Situation definiert. Die verschiedenen Registerdimensionen lassen sich z. B. zu den genannten varietätenlinguistischen Dimensionen relativ leicht, allerdings nicht vollständig, in Beziehung setzen. In der Registertheorie findet keine übermäßige Gewichtung einer der Dimensionen statt, und durch die Dimension „mode“ wird berücksichtigt, welche Rolle die Sprache bei der Produktion von Texten spielt, ein Aspekt, der in anderen Ansätzen untergeordnet ist oder gar nicht vorkommt (s. Hess-Lüttich 1998: 213).

Es ist kaum zu bestreiten, daß der Registerbegriff nicht immer in wünschenswerter Schärfe verwendet wurde (Gläser 1993). Dies gilt allerdings auch für andere in diesem Kapitel vorgestellte Ansätze und, wie Hess-Lüttich (1998: 215) es formuliert: „das muß ja nicht auf immer und ewig so bleiben“. Uns erscheint der Registerbegriff als hinreichend flexibel und umfassend, um als Ausgangspunkt für unsere folgende Definition zu dienen.

5.4 Definition der Fachsprache der Mathematik und Fragen der Abgrenzung von verwandten Begriffen

Zum Abschluß dieser Diskussion wollen wir nun unsere Definition der Fachsprache der Mathematik geben. Wir haben bereits darauf hingewiesen, daß wir uns auf Wissenschaftssprache konzentrieren; unsere Definition ist dementsprechend ausgerichtet.

Bei unserer Definition kommt es uns darauf an, Spezifika der Wissenschaftssprache hervorzuheben, die in anderen Formen von Sprache nicht notwendig sind. Dadurch können wir die Wissenschaftssprache der Mathematik auf theoretischer Ebene von anderen Formen von Sprache abgrenzen. Das Ergebnis dieser Abgrenzung ist eine Idealisierung. Da wir Wissenschaftssprachen (und Fachsprachen) als Formen von Sprache ansehen, treten auf empirischer Ebene auch nicht ausschließlich die Spezifika auf: Der konkrete Gebrauch einer Wissenschaftssprache findet immer auf der Grundlage der Gesamtsprache statt, so daß sich auf empirischer Ebene auch sprachliche Erscheinungen finden, die für Wissenschaftssprachen nicht spezifisch sind. Eine Abgrenzung der Wissenschaftssprache von der Gemeinsprache ist auf dieser Ebene nicht möglich.

Wir gehen im folgenden vom Begriff der Gesamtsprache aus (Kap. 5.3.2) und sehen Gemeinsprache sowie Fach- und Wissenschaftssprachen jeweils als Untersysteme davon an, ohne dabei funktionale Aspekte auszublenden. Im folgenden nähern wir uns dem Begriff der Fachsprache, indem wir die Eigenschaften fachlicher Kommunikation beschreiben, in die die Fachsprache typischerweise eingebettet ist.

Des weiteren verwenden wir in Analogie zu Searle[18] (s. etwa Searle 1972) das Begriffspaar „konstitutiv“ und „regulativ“, bei dem sich diese Attribute auf Regeln beziehen. Danach sind Regeln regulativ, wenn sie eine unabhängig bestehende Aktivität regulieren (z. B. Verkehrsregeln), konstitutiv sind sie, wenn eine Aktivität ohne die Regeln nicht gegeben ist, wie etwa bei den Regeln für das Schachspiel. Wir verwenden das Begriffspaar in Zusammenhang mit den nachfolgenden Definitionen für Fach- und Wissenschaftssprachen.

Zur Definition von „Fachsprache“ ziehen wir zunächst die Kommunikatoren heran, die über einen begrenzten Themenbereich kommunizieren. Von diesen nehmen wir an, daß sie über das diesem Bereich zugeordnete Fachwissen verfügen und sich mit einem entsprechenden Grad an Fachlichkeit auszudrücken wissen. Dabei ist „Fachlichkeit“ kein wissenschaftlich hinreichend präzisierter Begriff (Kalverkämper 1998a), was aber aus unserer Sicht insofern nicht allzu problematisch ist, als unser eigentliches Interesse der Wissenschaftlichkeit gilt, und diese ist hinreichend konsensual zu erfassen (Roelcke 1999b: 35, Kretzenbacher 1998: 134).

In fach- und wissenschaftssprachlicher Kommunikation dominiert die referentielle bzw. ideationale Funktion, d. h., der Produzent intendiert einen sachbezogenen kommunikativen Akt. Diese Sachbezogenheit wird des weiteren von den Rezipienten erwartet, und der Produzent wiederum ist sich dieser Erwartung bewußt. In dieser Formulierung ist die referentielle Funktion aber nicht konstitutiv für Fach- und Wissenschaftssprachen, da sie *jeden* Sachtext dominiert. Entscheidend ist vielmehr die *ausschließliche* Orientierung auf diese Funktion, die sich ergibt, wenn man von der Einbettung der Fachsprache in eine kommunikative Situation absieht und dabei auf die konstitutiven Eigenschaften der Sprache schaut. Schwanzer (1981: 217) formuliert in bezug auf Fachtexte: „Wesentlichstes Merkmal aller wissenschaftlichen und Fachtexte ist die Sachbezogenheit. Alle Aufmerksamkeit wird auf den behandelten Gegenstand gelenkt, Autor und Adressat treten in den Hintergrund“. Wegen des Unterschiedes zwischen Konstitution und Dominanz ist diese Aussage allerdings schwächer als unsere, und es ist in bezug auf Fach*sprache* hinzuzufügen, daß Autor und Adressat überhaupt nicht vorhanden sind. Beneš (1981: 187f.; Abkürzungen im Original) meint in bezug auf den wissenschaftlichen

[18]Searle verwendet die Begriffe vermutlich in Anlehnung an Kant.

Stil: „Der wiss. Stil ist im wesentlichen sachlich-objektiv und intellektualisiert, wie es seiner kommunikativen Hauptfunktion entspricht; das ist sein Spezifikum, das ihn vom Stil der Alltagsrede und der Dichtung unterscheidet. Nur auf diesem Hintergrund sind subjektive, emotionell-expressive und kontaktheischende Elemente zu bewerten, die im wiss. Stil auch – aber nur sekundär, marginal oder in verschiedenen Mischformen ... zum Vorschein kommen". Wenn wir der referentiellen Funktion eine Ausschließlichkeit zusprechen, dann meinen wir damit nicht, daß andere Funktionen nicht vorkämen, sondern daß Fachkommunikation von der Grundeinstellung der Kommunikatoren her gesehen von dieser Funktion dominiert wird. Diese Eigenschaft ziehen wir also als zweite konstitutive Eigenschaft für Fachsprachen heran.

Wir kommen nun zu einem weiteren, insbesondere von Hüllen (1981, 1984) herausgearbeiteten Punkt, der mit der Rolle der Sprache in der Fachkommunikation zusammenhängt. Für Hüllen (1984: 119) ist „der zentrale Unterschied zwischen der fachsprachlichen und der gemeinsprachlichen Kommunikation" in der sprachlichen Indexikalität zu suchen. Diese schreibt er unter Berufung auf Arbeiten aus der Ethnomethodologie nicht etwa nur deiktischen Ausdrücken, sondern Sprache im allgemeinen zu. Kommunikation entsteht demnach durch Bezüge zu einer vorgegebenen Wirklichkeit, und „die in einem Kommunikationsakt verwendeten Zeichen [stecken] voller *indices*, die sich erst in diesem Bezug sinnvoll mit Bedeutung anfüllen" (Hüllen 1984: 119; Hervorhebung im Original). Hüllen illustriert dies u. a. anhand einer Gegenüberstellung von *ein langer Weg* und *ein langer Knochen*: Im ersten Fall, also bei gemeinsprachlicher Verwendung von *lang*, liegt ein Bezug zu einer Alltagssituation vor, und die gemeinte „Länge" steht im Kontext der allgemeinen Welterfahrung. In der Biologie hingegen ist ein langer Knochen ein Knochen, dessen Länge größer ist als sein Durchmesser. Um diesen Ausdruck zu verstehen bedarf es keines Bezugs auf eine konkrete Situation; statt dessen findet ein Bezug auf ein fachlich kohärent konstruiertes Modell statt. Diese beiden Arten von Indexikalität nennt Hüllen (ibid.) *allgemeine* bzw. *spezielle* Indexikalität. Fachsprache ist durch spezielle Indexikalität in diesem Sinne charakterisiert.

Der folgende Punkt schließt sich daran an, betrifft jedoch keinen Unterschied zwischen Fach- und Gemeinsprache, sondern einen zwischen Fach- und Wissenschaftssprache. Es geht um die fachlichen Objekte und deren Zusammenhang mit Sprache. Die Sprache ist für die Wissenschaften „in ganz anderer Weise konstitutiv als für die fachliche Tätigkeit in Bereichen wie den Handwerken, der Landwirtschaft oder dem Sport" (Kretzenbacher 1998: 134). Der Grund dafür besteht darin, daß Theorien (und damit auch Wissenschaft) fundamental sprachlich verankert sind. Kretzenbacher (ibid.) führt als Beispiele dafür z. B. die Bildung von Hypothesen und die diskursive Konstitution wissenschaftlicher „Fakten“ an, aber auch die wissenschaftlichen Objekte selbst sind immer fundamental sprachlich: Erst durch eine Definition, zumindest aber durch eine (ebenfalls sprachliche) Einbindung in das Begriffssystem einer Wissenschaft, wird ein Objekt auch zu einem wissenschaftlichen Objekt.[19]

Linguistisch gesehen ist auf diesem Hintergrund die Bedeutung der metalinguistischen Funktion herauszustellen, hinsichtlich derer für uns besonders die Definition wissenschaftlicher Objekte interessant ist. Diese Funktion ist eine Voraussetzung, nicht nur ein Merkmal von Wissenschaftssprache. In nicht-wissenschaftlichen Bereichen stellt sich die Situation anders dar: Ein Schmiedehandhammer läßt sich für einen Handwerker als fachliches Objekt begreifen, das als gegeben angesehen werden kann, ohne daß es definiert werden müßte. Die Möglichkeit einer z. B. funktionalen Definition ist damit nicht ausgeschlossen. Wir gehen im folgenden davon aus, daß wissenschaftliche Objekte insofern sprachlich konstituiert, der Sprache nachgeordnet sind, als sie nicht „vorgefunden“, sondern sprachlich konstruiert werden. Dies wird grundsätzlich durch eine (metalinguistische) Definition erreicht. Kann eine Definition jedoch nicht (sogleich) in den sprachlichen Kategorien der jeweiligen Wissenschaft gegeben werden, so wird diese dennoch angestrebt und das Fehlen der Definition thematisiert. Dies gilt für die idealen Zahlen ebenso wie für theoriekonstitutive Metaphern (Kap. 3.3). Zusammengefaßt sehen wir die metalinguistische Funktion als konstitutiv für einen zentralen Teilbereich der Wissenschaftssprache an, nämlich für den Bereich der Definitionen.

Fassen wir zusammen: Die Gesamtsprache stellt ein Potential dar, aus dem Gemeinsprache und Fach- bzw. Wissenschaftssprachen auswählen können. Fachsprachen heben sich von der Gemeinsprache insbesondere durch ihre spezielle Indexikalität bzw. durch das spezielle Wissen der Sprecher ab, aber auch eine spezielle Ausrichtung der sprachlichen Funktionen, wobei wir besonders die Bedeutung der referentiellen und der metalinguistischen Funktion hervorheben. Wissenschaftssprachen unterscheiden sich von Fachsprachen insbesondere durch die unterschiedliche sprachliche Konstitution ihrer Gegenstände. Spezielle Wissenschaftssprachen lassen sich dann durch Beschränkung auf das jeweilige wissenschaftliche Gebiet abgrenzen. Wir sprechen im folgenden von der Fachsprache der Mathematik, meinen

[19]Dies gilt auch für die oben erwähnten idealen Zahlen, die zwar nicht definiert, aber über ihre Teilbarkeitseigenschaften in den zahlentheoretischen Diskurs eingebunden wurden.

damit aber deren Wissenschaftssprache, wie sie in wissenschaftlichen Arbeiten verwendet wird.

5.5 Die semantische Beschreibung von Fachwörtern

In vielen einführenden Texten zur Fachsprachenforschung wird das Problem der semantischen Beschreibung von Fachwörtern nur angerissen oder gar nicht behandelt (z. B. bei Roelcke 1999b) – dieses Thema ist zumeist einschlägigen Forschungsartikeln, Monographien oder rein terminologisch orientierten Abhandlungen vorbehalten.

Auf die Beschreibung der systematischen Bedeutung sind wir bereits in Kapitel 2 ausführlich eingegangen. Bei der Diskussion der definitorischen Bedeutung wird zumeist auf die Merkmalsemantik (vgl. Kap. 2.1) zurückgegriffen, wobei in den letzten Jahren eine stärkere Zurkenntnisnahme neuerer semantischer Ansätze zu verzeichnen ist (Fraas 1998). Die Einbeziehung verschiedener semantischer Theorien steht auch in Zusammenhang mit der Sichtweise fachsprachentheoretischer Begriffe: „Die Fiktion vom strikten Gegensatz zwischen Fach- und Gemeinsprache wirkt jedoch fort und versperrt vor allem in der Terminologieforschung den Weg zu neuen Beschreibungsansätzen. Solange Termini ausschließlich als eindeutig definierte Entitäten gesehen werden, wird man neuere Tendenzen der lexikalischen Semantik zur Terminologiebeschreibung nicht für relevant halten ...“ (Fraas 1992: 153). Dem kann hinzugefügt werden, daß Termini als solche als eindeutig definiert aufzufassen sind. In diesem Sinne gibt es in der Tat einen strikten Gegensatz. Aber ihre Bildung und ihr Gebrauch sind mit anderen Aspekten verbunden, die wir in den Fallstudien noch diskutieren werden.

Bei axiomatisch definierten Begriffen läßt sich die definitorische Bedeutung gut mit Merkmalen erfassen, weshalb wir auch der Merkmalsemantik, unabhängig von den Kontroversen über ihre Angemessenheit in der linguistischen Semantik, den ersten Platz eingeräumt haben. Merkmale sind grundsätzlich als notwendig und hinreichend zu verstehen, d. h. im aristotelischen Sinn. Es ist prinzipiell immer eindeutig zu entscheiden, ob ein mathematisches Objekt zu einer bestimmten Kategorie gehört oder nicht. Offene Probleme, z. B. ob die Zahl π transzendent ist oder nicht, ändern an dieser prinzipiellen Möglichkeit nichts (die Transzendenz wurde zwar vermutet, aber erst 1882 bewiesen).[20] Ein Beispiel für eine axiomatische Definition ist die Definition des Begriffs „Gruppe", der später noch ausführlich untersucht werden soll. In seinem *Lehrbuch der Algebra* definiert Weber (1896: 3-5) eine Gruppe, indem er die einzelnen Teile der Definition separat aufzählt. Jeder dieser Teile entspricht einem Merkmal. Dabei wurde zu Beginn des 20. Jahrhunderts besonders in den USA versucht, die aufgezählten Merkmale so zu reduzieren, daß keine Redundanzen enthalten sind und die Axiomensysteme in diesem Sinne minimal sind.[21] Die Merkmale sind jedoch nicht eindeutig: Für ein- und denselben Begriff gibt es häufig mehrere, logisch äquivalente Definitionen, so daß auch unterschiedlich formulierte Definitionen dieselbe Extension ergeben können.

5.6 Semantische und semiotische Aspekte in den Arbeiten von Yves Gentilhomme

Der Zeicheninhalt fachsprachlicher Ausdrücke ist von Yves Gentilhomme in verschiedenen Arbeiten untersucht worden, wobei er seine Ergebnisse primär anhand von mathematischen Beispielen illustriert, aber Gültigkeit für die „discours technoscientifiques" im allgemeinen beansprucht.[22] Wir gehen darauf näher ein, da wir in Gentilhommes Arbeiten eine wichtige Ergänzung zu den in Kap. 2 semantischen Grundlagen sehen.

Gentilhomme postuliert eine „Aufsplitterung des Signifikats" (*éclatement du signifié* bzw. *duplication du signifié* (Gentilhomme 1995: 24 bzw. 7). Er geht dabei von einer „double systémicité" in fach- und wissenschaftssprachlichen Kontexten aus, d. h. Gentilhomme nimmt die Existenz erstens eines gemeinsprachlichen Systems (*système communication langagière*) und zweitens eines mathematischen Systems (*système raisonnement mathématique*) an, das für die strenge und logische Begründung der Mathematik notwendig ist (Gentilhomme 1995: 7).

Auf dieser Basis läßt sich eine Aufsplitterung des Signifikats begründen. Zunächst haben fach- und wissenschaftssprachliche Fachwörter eine systematische Bedeutung, die ihnen aufgrund ihrer Verwendung in der Gemeinsprache zukommt und die sich aus ihrer morphologischen Struktur insofern ergibt, als die Fachwörter eine gewisse semantische Motivation aus der Gemeinsprache mitbringen.

[20] Es gibt Ausnahmen, die den „mathematischen Alltag" allerdings kaum betreffen. S. etwa Davis - Hersh (1994: 231-245), Ebbinghaus (1992), Heintz (2000: 212).

[21] Dazu ausführlicher Franci (1992).

[22] Die folgenden Absätze beruhen auf Gentilhomme (1993, 1994, 1995, 2000).

Dieses Signifikat nennt Gentilhomme *signifié-notion* oder kurz *notion* und stellt es dem *signifié-concept* oder *concept* gegenüber, dessen semantischer Inhalt sich aus einer den Konventionen entsprechenden Definition ergebe (Gentilhomme 1995: 24). Diese Begriffe, die beide auf der Ebene des Zeicheninhalts anzusiedeln sind, werden im folgenden mit *systematischer Bedeutung* bzw. *definitorischer Bedeutung* wiedergegeben.

Die systematische Bedeutung beschreibt Gentilhomme (1995: 24) als „souple, relevant de la langue", d. h. sie ist den semantischen Regeln der Gemeinsprache unterworfen und damit auch veränderlich. Die definitorische Bedeutung hingegen ist „généralement rendu explicite par une définition conventionnelle stricte, qui permet de construire un raisonnement considéré comme rigoureux à une époque donnée par une communité accréditée" (Gentilhomme 1995: 7). Definitionen werden also als solche gekennzeichnet und innerhalb der Mathematik folgen sie, wenn wir heutige Maßstäbe anlegen, einem bestimmten Aufbau, nach dem z. B. zunächst die Voraussetzungen explizit genannt werden[23] und erst dann, darauf aufbauend, die eigentliche Definition gegeben wird. Mit dieser Definition einschließlich der angegebenen Voraussetzungen kann dann mathematisch gearbeitet werden. Unveränderlich ist auch die definitorische Bedeutung nicht, denn es kann sich z. B. herausstellen, daß die Voraussetzungen für neue Fälle, die man unter denselben Begriff fassen möchte, unzureichend sind, daß sich Möglichkeiten der Verallgemeinerbarkeit erst später zeigen usw.

Beide Arten von Bedeutung sind im Diskurs kopräsent und erfüllen unterschiedliche Funktionen, was Gentilhomme (1994: 26-28) am Beispiel *torsion* (dt. *Torsion* bzw. *Windung*, die Abweichung einer Kurve vom ebenen Verlauf) erläutert. Intuitiv, d. h. auf gemeinsprachlicher Basis, ist es nicht schwer, sich unter der Windung einer Kurve etwas vorzustellen; man denke z. B. an ein Telefonkabel. Der mathematische Begriff geht davon aus und bietet eine Möglichkeit, ein Maß für die Windung des Kabels an einer bestimmten Position anzugeben.

Die systematische Bedeutung stellt die Grundlage für die Definitionen in verschiedenen Disziplinen dar, d. h. „le mathématicien qui se sert de ce concept [torsion, H. B.] a présent à l'esprit la notion de TORSION telle que le conçoit le lexique commun, notion qui a motivé la définition purement géométrique de cette grandeur, ainsi que le choix du signifiant" (Gentilhomme 1994: 27). Die systematische Bedeutung bildet also den Ausgangspunkt für die wissenschaftliche Definition und die mathematische Forschung, d. h. „cette notion le guide [le mathématicien,

[23] Hierfür gibt es wiederum bestimmte konventionelle Formulierungen wie „Es sei(en) ...".

H. B.] plus ou moins consciemment dans son travail, elle facilite la compréhension du concept abstrait“ (ibid.). Gentilhomme bezieht sich hier auf die heuristische Funktion gemeinsprachlicher Ausdrücke, der er eine grundlegende Bedeutung in der wissenschaftlichen Forschung zuspricht (Gentilhomme 1994: 13, 28). Im zweiten Teil des Zitats spricht er die Möglichkeit der leichteren Verständlichkeit an, die besteht, wenn systematische und definitorische Bedeutung sich nicht zu stark voneinander unterscheiden.

Durch die Verbindung des Signifikanten *torsion* und dessen systematischer Bedeutung wird auch die Wahl des wissenschaftlichen Signifikanten bestimmt oder mindestens begünstigt. Die Definition bzw. das definitorische Signifikat hingegen ist unerläßliche Voraussetzung für die mathematische Beweisführung, den logischen Aufbau der Theorie. Anders als die systematische Bedeutung beruht sie auf einer „construction contrôlée“ (Gentilhomme 1993: 477). Zusammengefaßt ist die systematische Bedeutung den allgemeinen sprachlichen Mechanismen unterworfen, während die definitorische Bedeutung zwar auf der systematischen beruht, aber doch bewußt lenkbar ist (Gentilhomme 1993: 478).

Die definitorische Bedeutung eines Fachwortes ändert sich, wenn dessen Definition verändert wird: „La moindre variation significative dans une définition donne lieu à un concept distinct“ (Gentilhomme 1994: 22). Dabei können durchaus verschiedene Formulierungen vorliegen, die sich z. B. durch Neuerungen in der Theorie und Terminologie ergeben können: Ein Kreis läßt sich als geometrischer Ort (klassische Formulierung) oder auch als Teilmenge eines euklidischen Raumes (moderne Formulierung) definieren, ohne daß sich die definitorische Bedeutung ändert (Gentilhomme 1994: 32). Entscheidend ist, daß erstens die charakteristischen Merkmale der Definition erhalten bleiben und zweitens die Stellung des Begriffs im mathematischen System nicht verändert wird; d. h., bleibt die mathematische Beweisführung durch eine veränderte Definition unangetastet, so ist auch die definitorische Bedeutung identisch. Eine Ellipse läßt sich, ähnlich wie der Kreis, nicht nur als geometrischer Ort definieren, sondern etwa auch als Abbild einer Projektion oder durch Angabe einer analytischen Gleichung. Dadurch können aus mathematischen Sätzen Definitionen werden und umgekehrt (Gentilhomme 1994: 32).

Aus diachroner Perspektive merkt Gentilhomme (1994: 27) an, daß bei vielen Begriffen ein historisch wachsender Unterschied zwischen systematischer und definitorischer Bedeutung festzustellen ist. Dies ist eine Folge der wachsenden Abstrahierung bzw. „Intellektualisierung“ innerhalb der Mathematik, die ihrerseits zur Folge hat, daß Definitionen zunehmend „technischer“ werden und die Kenntnis zahlreicher weiterer Fachbegriffe voraussetzen. Die funktionale Charakterisierung der Fachsprache als intellektualisierter Pol des sprachlichen Kontinuums hat also auch ein historisches Pendant (vgl. Kap. 5.3.3).

Gentilhommes Arbeiten sind für unser weiteres Vorgehen insofern wichtig, als sie durch die Unterscheidung zwischen systematischer und definitorischer Bedeutung ein besseres Verständnis der Semantik von Fachausdrücken sowie von deren Funktion und Wirkung in der Fachkommunikation ermöglicht.

5.7 Ein Modell fachsprachlicher Begriffsbildung

In diesem Abschnitt soll es um die linguistische Modellierung der Bildung wissenschaftlicher Begriffe gehen. Zu diesem Zweck entwickeln wir ein Modell, das die für uns wesentlichen Bestandteile dieses Prozesses enthält. Es stellt die systematischen Zusammenhänge dar, die bei der wissenschaftlichen Begriffsbildung wirksam sind. Die einzelnen Bestandteile spielen bei der Begriffsbildung unterschiedliche Rollen, die wir jeweils näher spezifizieren.

Wir unterscheiden im folgenden zwischen *Terminus* und *Begriff* und verstehen unter ersterem ein mit einer Definition versehenes sprachliches Zeichen. Ein Terminus ist ein Name für einen Begriff. Bei Begriffen steht das Sprachliche nicht unbedingt im Vordergrund, ähnlich wie dies für e. *concept* zutrifft; sie sind auf etwas Mentales, auf eine Vorstellung bezogen.

Zur besseren Lesbarkeit sei vorangestellt, daß sich das Modell in eine Eingabe, den eigentlichen Prozeß der Begriffsbildung und die Ausgabe einteilen läßt. Die Ausgabe ist dabei ein fachsprachlicher Terminus. Eine Person, die einen wissenschaftlichen Begriff bildet, wollen wir im folgenden als *Schöpfer* bezeichnen. Die einzelnen Bestandteile des Modells fassen wir als relative Konstanten auf. Sie sind insofern konstant, als wir sie bei einer konkreten wissenschaftlichen Begriffsbildung als gegeben voraussetzen; sie sind aber keine absoluten Konstanten, da etwa die Fachsprache der Mathematik und die Gemeinsprache einem ständigen Wandlungsprozeß unterliegen, u. a. durch die Bildung neuer Termini.

Die eigentliche *Erzeugung* gliedert sich in verschiedene Bestandteile.[24] Dazu gehört die Auswahl des sprachlichen Materials, mit dem der Terminus bezeichnet wird. Dieses Material kann aus der Gemeinsprache, einer Fachsprache und einer

[24] Der Ausdruck *Erzeugung* soll hier zur Abgrenzung vom gesamten Bildungsprozeß verwendet werden.

Fremdsprache stammen. Diese lexikalische „Eingabe“ haben wir bereits in Kap. 4.2 diskutiert.

Zur Erzeugung ist weiterhin die Definition des Terminus zu zählen. Sie unterliegt, wie wir bereits herausgestellt haben (Kap. 5.2), bestimmten Konventionen, die fachspezifisch und fachübergreifend, aber auch dem Denken unterschiedlicher mathematischer Schulen verpflichtet sein können.

Das vollständige Modell haben wir in Abb. 5.3 dargestellt.

Der obere Teil des Schemas enthält dabei die Gesamtsprache und als Unterkomponenten die Gemeinsprache, die mathematische Fach- und Wissenschaftssprache sowie weitere, nicht näher spezifizierte Fach- oder Wissenschaftssprachen, die in die Begriffsbildung eingehen können. Die mittlere Komponente „Erz.“ (Erzeugung) bezeichnet den „Ort“ des eigentlichen Prozesses der Begriffsbildung. Die Pfeile stellen Relationen dar, deren spezifischer Charakter jeweils näher bezeichnet ist. Alle Komponenten, von denen Pfeile auf die Erzeugungskomponente zeigen, betrachten wir als Eingabequellen.

Im folgenden wollen wir die einzelnen Bestandteile des Modells näher erläutern und anhand von Beispielen illustrieren. Es sei dazu noch angemerkt, daß die Reihenfolge unserer Darstellung nicht impliziert, daß der tatsächliche Begriffsbildungsprozeß sich in derselben Reihenfolge abspielt.

Wir betrachten zunächst die mathematische Seite des Bildungsprozesses und nähern uns damit dem Auslöser oder Anlaß der Begriffsbildung. Solche Anlässe können ganz unterschiedlicher Art sein. Oft entstehen neue mathematische Begriffe als Hilfsmittel im Rahmen der Lösung eines konkreten mathematischen Problems.[25] Z. B. der Gruppen- und der Körperbegriff ergaben sich jeweils im Zusammenhang mit der Untersuchung des Lösbarkeitsverhaltens bestimmter Gleichungen (Kap. 7.1). Gerade derartige Strukturbegriffe entstehen häufig dadurch, daß ein wiederkehrendes Muster erkannt wird, welches in verschiedenen Kontexten auftritt und deswegen verallgemeinert werden kann. Mathematische Begriffe können ebenso als Lösung eines Problems selbst entstehen, was z. B. auf die sog. „Kettenlinie“ als Lösung einer bestimmten Differentialgleichung zutrifft. Auch didaktische Situationen können Anlaß zur Bildung eines Terminus sein, wie wir bereits am Beispiel der Dedekindschen Definition reeller Zahlen mittels des Begriffs des Schnittes gesehen haben (Kap. 3.5.2). Andere Begriffe wiederum entstehen, wie Dieudonné (1987: 139) es ausdrückt, „pour voir“, d. h. sie ergeben sich nicht aus

[25] Zu diesem Themenkreis s. Vollrath (1986).

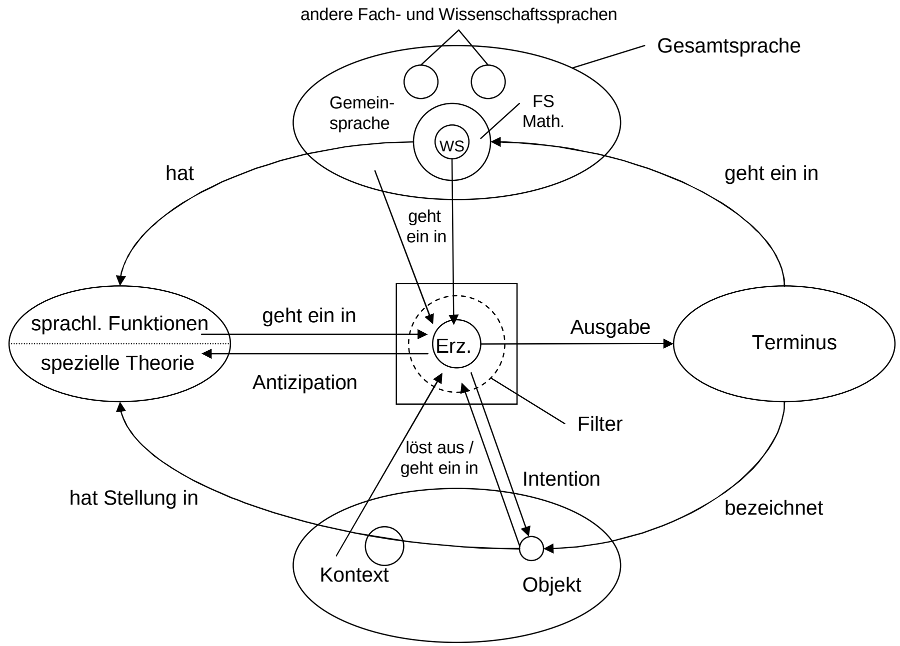

Abbildung 5.3: Modell wissenschaftlicher Begriffsbildung

einer konkreten Notwendigkeit. Im Falle des Quaternionenschiefkörpers (Kap. 11) untersuchte Hamilton z. B. die Frage, ob es ein räumliches Analogon zur Multiplikation von Vektoren gibt, wie sie aus der Ebene bereits bekannt war.

Wir gehen davon aus, daß ein mathematisches Objekt vorliegt, das den Erzeugungsprozess auslöst (diese Relation wird im Modell durch den Pfeil vom Objekt zur Erzeugungskomponente dargestellt). „Objekt" meint hier alles das, was man unter einen mathematischen Begriff fassen möchte: Im Fall der Dedekindschen Bildung von „Körper" ist mit „Objekt" der noch nicht definierte Körperbegriff gemeint. Unter den anschließend gebildeten Begriff fallen dann zahlreiche einzelne Exemplare von Körpern. Im Fall des Hamiltonschen Quaternionenschiefkörpers handelt es sich um ein einzelnes Exemplar: Es gibt nicht mehrere Quaternionenschiefkörper, sondern nur einen. Für das Objekt liegt im Extremfall weder eine Bezeichnung noch eine Definition vor.

Wenn wir sagen, das Objekt löse den Prozess der Begriffsbildung aus, dann ist gleichzeitig zu berücksichtigen, daß der Schöpfer umgekehrt auch ein Objekt intendiert. Ohne Bezeichnung und Definition kann ein Objekt keine Rolle in einer Theorie spielen: Das Objekt existiert in diesem Sinne nicht, es wird erst durch die Definition konstituiert. Die Relation zwischen Objekt und Erzeugung ist aber noch weitergehend. Ein Objekt, für das noch keine Bezeichnung vorliegt, wird in zahlreichen Fällen über den Schöpfer vermittelt eine Rolle bei der Begriffsbildung spielen. So kann die äußerliche Form des Objektes die Wahl der Bezeichnung beeinflussen, wenn etwa der Schöpfer eine Ähnlichkeit zu einem anderen, nicht unbedingt mathematischen Objekt, wahrnimmt. Beispiele hierfür sind etwa die Bezeichnungen für einige mathematische Kurven wie z. B. *Nephroide* (eine Kurve mit der Form einer Niere (gr. *nephrós*).

Das Objekt ist aber auch in einem mathematischen und in anderen wissenschaftlichen Kontexten zu sehen. Wir wollen unter diesen Kontextbegriff auch Traditionen fassen, die teils individuellen, teils überindividuellen Charakter haben. Der individuelle Charakter wird etwa bei der Begriffsbildung von „Körper" sichtbar (s. ausführlich Kap. 10). Dedekind, der Schöpfer dieses Begriffs, hat ihn nicht aus dem Nichts erschaffen; ihm waren natürlich implizite Verwendungen dieses Begriffs bei anderen Autoren wie etwa Évariste Galois vertraut. Bei diesen Autoren gab es noch keine Bezeichnung für „Körper", und Vorläufer des Körperbegriffs wurden nicht als ein Objekt an sich aufgefaßt. Die implizite Verwendung des Körperbegriffs wurde bis dahin so verbalisiert, daß man von dem sprach, was „rational bekannt" war. Dedekind nutzte dies für die Definition von „Körper". Kronecker tat dies ebenfalls, schloß an die Vorläufer aber auch durch die von ihm gewählte Bezeichnung *Rationalitäts-Bereich* an.

Einen überindividuellen Charakter kann man an der Modellhaftigkeit einiger Theoreme erkennen, auf die in verschiedenen Teilbereichen der Mathematik immer wieder Bezug genommen wird. Ein Beispiel dafür kann man in dem sog. „Fundamentalsatz der Arithmetik“ sehen (Kap. 9), zu dem sowohl innerhalb als auch außerhalb der Mathematik außerordentlich häufig Analogien gesucht werden.

Zum Kontext wollen wir auch methodische Vorstellungen zählen, die gerade die Definitionen wissenschaftlicher Begriffe maßgeblich beeinflussen können. Entsprechende Beispiele werden in Kap. 10 diskutiert.

Das Objekt hat in der speziellen Theorie, die ihr Schöpfer entwickelt bzw. innerhalb der er arbeitet, eine bestimmte Stellung. Es finden sich nicht selten explizite Kommentare zu diesem Aspekt der Begriffsbildung. Als Dedekind den Begriff des Körpers einführte (s. Kap. 10), bemerkte er ausdrücklich, daß ihm dieser Begriff dazu geeignet erscheine, „als Grundlage für die höhere Algebra und die mit ihr zusammenhängenden Teile der Zahlentheorie zu dienen“ (Dedekind 1871 [1932: 224]). In manchen Fällen können derartige Einschätzungen einen Einfluß auf die Wahl der Signifikanten ausüben, z. B. werden für solche grundlegenden Begriffe tendenziell eher einfache, d. h. nicht zusammengesetzte Wörter gewählt. Dies entspricht dem ikonischen Prinzip „Formal complexity corresponds to conceptual complexity“ (Haiman 1985: 147f.), nach dem, in unsere Situation übersetzt, die begrifflich einfacheren Grundbegriffe einer Theorie mit einer einfachen sprachlichen Form einhergehen.

Die spezielle Theorie sehen wir als begriffliches System, als eine geordnete Gesamtheit von Begriffen und Aussagen über diese Begriffe an. Der zu bildende Begriff muß als neuer Bestandteil in dieses System passen, ein Aspekt, den sein Schöpfer antizipiert. In unserem Modell wird diese Relation durch den Pfeil von der Erzeugungskomponente auf die Komponente „spezielle Theorie“ dargestellt.[26]

Wir gehen nun auf die im engeren Sinne sprachliche Seite der Begriffsbildung ein; im Modell findet sich diese in der oberen Hälfte.

Zur Bezeichnung des Terminus wird lexikalisches Material verwendet. Dafür führen wir die Komponente „Gesamtsprache“ ein, die als Unterkomponenten die Gemeinsprache sowie verschiedene Fach- und Wissenschaftssprachen hat, ins-

[26] Aus Darstellungsgründen haben wir die Ellipse in zwei Hälften geteilt. Die Pfeile haben damit eine Doppelbedeutung: Die Antizipation z. B. ist auch eine Relation, die zwischen Erzeugung und den sprachlichen Funktionen besteht, wie wir weiter unten noch darlegen werden.

besondere die der Mathematik. Beide Komponenten betrachten wir zunächst nur unter lexikalischem Aspekt. Wie wir bereits ausgeführt haben, können auch andere Fachsprachen zur Terminusbildung herangezogen werden, die ebenfalls zu berücksichtigen sind und die im Modell durch weitere Kreise angedeutet sind.

Die Pfeile zur Erzeugungskomponente zeigen an, daß die Gesamtsprache aus lexikalischer Sicht das lexikalische Material bereitstellt, das zur Bezeichnung des Terminus verwendet wird. Die Gemeinsprache sowie einzelne Fachsprachen stellen mögliche Quellen der Bezeichnungsmöglichkeiten dar (da Neubildungen selten sind, kann nur das vorhandene lexikalische Material verwendet werden). Weiterhin kann die systematische Bedeutung, wie wir in Kap. 5.6 dargelegt haben, eine wichtige Grundlage für die definitorische Bedeutung bilden.

Die Fachsprache der Mathematik beeinflußt die Bildung eines wissenschaftlichen Terminus in verschiedener Hinsicht. Zunächst enthält auch sie, ähnlich wie die Gemeinsprache, lexikalisches Material, das für die Bezeichnung herangezogen wird. Dies gilt nicht nur dann, wenn eine bestimmte Bezeichnung nur hier (und nicht in der Gemeinsprache) zur Verfügung steht, denn bei der Erzeugung sind mehrfache Analogien möglich – so etwa bei sprachlichen Ausdrücken, die einerseits in der Gemeinsprache, andererseits aber auch in der Mathematik vorkommen, und die dann zur Bezeichnung eines neuen mathematischen Terminus herangezogen werden.

Da wir jedoch die Fachsprache der Mathematik nicht nur als lexikalisches Inventar betrachten, sondern eben als Sprache, ist ihr Einfluß auf die Erzeugung wesentlich größer. Dies ergibt sich aus dem engen Zusammenhang zwischen dem Fachsprachenbegriff und den sprachlichen Funktionen, so daß sich hier für uns die Frage stellt, inwiefern diese Funktionen einen Einfluß auf die Begriffsbildung ausüben können. Fachsprachen selbst haben bestimmte Funktionen bzw. sie sind gemäß unserer Definition durch bestimmte Funktionen konstituiert. In unserer Grafik äußert sich dies durch die Verbindung der mathematischen Fachsprache mit bestimmten Funktionen. Der Pfeil beinhaltet außerdem die Tatsache, daß auch einzelne Termini im konkreten Gebrauch eine Funktion bzw. mehrere sprachliche Funktionen haben.[27]

Bei unserer Definition der Fachsprache der Mathematik haben wir die konstitutive Bedeutung der referentiellen Funktion hervorgehoben. Dies kann sich auf

[27] Aus Darstellungsgründen haben wir auf die Repräsentation des Terminus im lexikalischen System der Wissenschaftssprache der Mathematik (obere Komponente des Modells) verzichtet. Um die Relation präzise zu kennzeichnen, müßte etwa von einem Punkt (Terminus) innerhalb der Komponente „WS“ ein Pfeil auf die Komponente „sprachl. Funktionen“ zeigen.

terminologischer Ebene insofern auswirken, als die Auswahl der Signifikanten auch eher referentiell (sachbezogen) und weniger emotiv ausgerichtet sein wird. Auch Descartes mag seine Bezeichnung *imaginaire* durchaus nicht emotiv, sondern sachbezogen gemeint haben – eine emotive Interpretation kann einfach dadurch entstehen, daß wir heute einen anderen Erkenntnishintergrund haben als Descartes. D. h., Descartes' Bezeichnung ist auch so interpretierbar, daß er sie als objektive Beschreibung einer ontologischen Erkenntnis verstanden wissen wollte. In jedem Fall zeigen zahlreiche der in den Fallstudien untersuchten Termini, daß die referentielle Funktion und damit die Registerdimension „field" einen wichtigen Einfluß auf die Auswahl der Signifikanten ausüben. Für viele Schöpfer ist es wichtig, die Bezeichnungen insofern sachbezogen zu wählen, als sie das so wahrgenommene „Wesen" des Objektes ausdrücken.

Die Funktionen des sprachlichen Zeichens werden bei der wissenschaftlichen Begriffsbildung antizipiert, d. h. dem Schöpfer sind diese Funktionen bewußt. Wir unterstellen selbstverständlich nicht, daß die dabei verwendeten Kategorien bewußt dieselben sind wie diejenigen, die Jakobson vorgeschlagen hat (Kap. 5.3.3); daß aber bei Interpretationen ähnliche bzw. vergleichbare Kategorien vorkommen, steht außer Frage. Antizipation bedeutet auch, daß der Rezipient die Funktionen sprachlicher Zeichen kennt und daß ihr Schöpfer weiß, daß die Rezipienten über dieses Wissen verfügen. Durch diese Antizipation gehen die Funktionen in die Erzeugung von Termini ein, was im Modell durch den Pfeil von der Funktionen zur Erzeugungskomponente dargestellt wird.[28]

In der Erzeugungskomponente ist auch eine Komponente enthalten, die bestimmte Teilaspekte des jeweiligen Begriffs fokussiert oder ausblendet. Wir nennen diese Komponente „Filter". Durch diese Darstellung wird berücksichtigt, daß z. B. vom Schöpfer individuell wahrgenomme Analogien des Objektes zu einem anderen Objekt in die Begriffsbildung einfließen können, etwa in Form analoger Definitionen oder durch Bezeichnungen, die auf Ähnlichkeiten zwischen beiden Objekten verweisen. Durch den Filter sollen des weiteren persönliche Vorlieben und individuelle Vorstellungen über Mathematik und Sprache in das Modell einbezogen werden. Dies können z. B. Abneigungen gegen eine bildhafte Terminologie sein, wie wir sie in Kap. 10 diskutieren.

Als Resultat der Begriffsbildung erhalten wir schließlich einen mathematischen Begriff. Der Terminus geht nach seiner erfolgreichen Bildung in die mathe-

[28]Wir erinnern daran, daß der Pfeil eine doppelte Bedeutung hat, da er auch auf den unteren Teil des Schemas (spezielle Theorie), anwendbar ist.

matische Fachsprache ein, d. h. er wird zu einem Bestandteil des lexikalischen und semantischen Systems und steht dadurch in strukturellen Beziehungen (semantischen Relationen) zu anderen lexikalischen Elementen der mathematischen Fachsprache.

Der Terminus bezeichnet von da an die mathematischen Objekte, die unter seine Definition fallen, und das so bezeichnete Objekt hat dadurch eine bestimmte Stellung in der mathematischen Theorie.

5.8 Überblick über die bisherige Erforschung der Fachsprache der Mathematik

Die folgenden Untersuchungen stützen sich in erster Linie auf Primärtexte mathematischer Wissenschaftssprache, aber auch auf wissenschaftsgeschichtliche Vorarbeiten, die hier vorweg in einer Art Problemgeschichte der mathematischen Fachsprachenforschung charakterisiert und in ihrer Relevanz für unsere Fragestellung eingeschätzt werden sollen.

Zu Beginn dieses Kapitels haben wir bereits darauf hingewiesen, daß es zum Stand der Erforschung der Fachsprache der Mathematik keine Übersicht gibt. Hier sollen nun einige wichtige Texte zu Teilaspekten des Problems kurz vorgestellt und thematisch eingeordnet werden. Dabei werden hauptsächlich die hier durchgehend konsultierten Werke diskutiert. Ein Anspruch auf Vollständigkeit besteht nicht, doch wird angestrebt, die wichtigsten Werke aufzuführen. Mit in die Diskussion einbezogen werden auch einschlägige Nachschlagewerke.

5.8.1 Philologische Untersuchungen

Schon im 19. Jahrhundert und dann in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts gibt es einige Untersuchungen zur mathematischen Fachsprache, deren Erkenntnisinteresse bzw. Vorgehensweise sich wie folgt zusammenfassen läßt:

1. Das Interesse ist vorwiegend auf Fach*wörter* gerichtet. „Fachsprache“ wird hier zumeist mit „Terminologie“ gleichgesetzt.

2. Es werden vorwiegend Begriffe aus elementaren Bereichen der Mathematik untersucht, besonders aus der Geometrie, Algebra und Arithmetik.

3. Die Vorgehensweise ist oft philologisch-etymologisch, d. h. es werden einzelne Ausdrücke ausführlich auf ihre Herkunft hin untersucht, häufig mit Angabe von Textstellen, Erstbelegen, semantischen Erläuterungen, etc. Dabei werden einzelne, evtl. nur zu einem sehr speziellen bzw. zu einem aus heutiger Sicht eher marginalem Gebiet gehörige (z. B. zu Konoiden) Fachtermini gesammelt und einzeln besprochen.

4. Ein Teil der Literatur interessiert sich für die frühen, d. h. zumeist vor dem 19. Jahrhundert liegenden Eindeutschungsversuche mathematischer Ausdrücke. Damit sind nicht nur Übersetzungen gemeint, sondern insbesondere auch die zahlreichen Versuche, für bekannte mathematische Objekte völlig neue Benennungen zu finden (wie z. B. *Eilinie* für *Ellipse* bei Dürer). Diese Beiträge verstehen sich oft als Beitrag zur Sprachpurismusdebatte.

5. Einzelne Autoren werden zur Grundlage der Untersuchung gemacht und deren Bedeutung für die Entwicklung der Fachsprache der Mathematik untersucht (s. das folgende Unterkapitel).

Der Großteil der Untersuchungen konzentriert sich zudem auf die klassische oder *deutsche* Terminologie; für andere moderne Sprachen liegen weniger Untersuchungen vor.

Die eben genannten Punkte treffen – in jeweils unterschiedlicher Ausprägung – auf die Arbeiten von J. H. T. Müller (1860), F. Müller (1887, 1899, 1901), Karpinski - Fiedler (1925), Busch (1933) und Reiner (1961) zu. Daneben gibt es verschiedene Untersuchungen, die stärker sachlich, also an der Geschichte der Mathematik, orientiert sind, bei denen sich aber in unterschiedlicher Häufigkeit für unsere Zwecke nützliche sprachlich-philologische Anmerkungen finden. Dies gilt besonders für das viel benutzte Buch von Tropfke (1924, 1924a, 1933, 1940, 1944, 1980).

Es folgen einige kurze Anmerkungen zu den wichtigsten Schriften.

Die früheste uns bekannte eigenständige Schrift zur Sprache der Mathematik stammt von Kästner (1791), der am Beispiel einiger weniger elementarer geometrischer Ausdrücke allgemeine Eigenschaften der mathematischen Fachsprache diskutiert.[29] In seinem Aufsatz geht es um die Frage, was man aus der Sprache der

[29]Kästner geht allerdings auch auf andere Fachsprachen ein, insbesondere die der Philosophie und Astronomie.

Mathematik für die Sprache der Wissenschaft im allgemeinen lernen könne, treten hier doch weniger Verständigungsprobleme auf als in anderen Fachsprachen (Kästner 1791: 257). Er weist zunächst darauf hin, daß „die Geometern die Wörter so viel als möglich aus der gemeinen Sprache genommen haben", d. h. daß von gemeinsprachlichen Ausdrücken ausgehend Abstrahierungen vorgenommen wurden (ibid.). Des weiteren diskutiert Kästner Entlehnungen und geht dabei insbesondere auf die Frage ein, welche Gründe für die Übernahme klassischer Ausdrücke sprechen und welche für Eindeutschungen. Er kritisiert, daß durch mangelnde Kenntnis der klassischen Sprachen semantische Verschiebungen und somit Lücken zwischen klassischem und entlehntem Ausdruck entstehen können. So bemängelt er (Kästner 1791: 263), daß *Epoche* sich ursprünglich auf einen Zeitpunkt, nicht auf einen Zeitraum bezieht. Als Kriterium für die Akzeptabilität eines Ausdrucks nennt er dessen Verständlichkeit (Kästner 1791: 265).

Kästner diskutiert auch den Fall einer semantischen Verschiebung, die man unter „sprachlichen Konservatismus" (Ullmann 1957: 211) bzw. unter einer veränderten oder korrigierten Auffassung der Referenten (Blank 1997: 111f.) fassen kann. So habe man in der Astronomie „die Wörter der alten, z. E. Eccentricität, eccentrischer Kreis, Apsis, u. d. g. beybehalten, nur ihre Bedeutung so geändert, wie sie sogleich jedem in die Augen fällt, der die Sonne dahin setzt, wo Ptolemäus die Erde hinsetzte" (Kästner 1791: 268).

Kästner faßt schließlich wie folgt zusammen: „Sparsamkeit in Kunstwörtern, Bildung derselben, dadurch sie schon einigermaßen verständlich werden, genaue Bestimmung und Gebrauch in immer ungeänderter Bedeutung, das sind einige von den Eigenschaften der mathematischen Sprache" (Kästner 1791: 269). Moderner ausgedrückt spricht Kästner hier also der „mathematischen Sprache" u. a. Exaktheit, Eindeutigkeit und Verständlichkeit zu, Begrifflichkeiten, die auch heute noch in der Fachsprachentheorie diskutiert werden. Die Konstanz der Bedeutung, die im Zitat ebenfalls angesprochen wird, trifft so sicher nicht auf die Fachsprache der Mathematik zu, denn auch Definitionen von Fachbegriffen können sich historisch verändern, wie sich auch aus den Fallstudien ergeben wird.

J. H. T. Müller (1860) stellt den Fachwortschatz in den mathematischen Werken der Griechen, d. h. genauer die Terminologie zu einigen speziellen Bereichen zusammen (z. B. zum parabolischen Konoid). Sein Ziel ist es, denjenigen, die sich mit der Geschichte der Mathematik befassen, philologische Informationen zu geben, aus denen die Bedeutung einzelner klassischer Ausdrücke hervorgeht. Allgemeinere linguistische Zusammenhänge werden kaum aufgezeigt. Müller macht allerdings darauf aufmerksam, daß die geometrische Terminologie sehr häufig auf Ausdrücke für konkrete physische Objekte und sinnlich wahrnehmbare Vorgänge zurückgeht. Der Ausdruck *káthetos* etwa hatte ursprünglich die Bedeutung 'Bleilot' (Müller 1860: 5). Am Rande bemerkt Müller (1860: 6), „wie auch im Alterthum im Laufe der Zeit sich manches geändert, manche Bedeutung sich mit dem gemachten Fortschritte erweitert, manche Ausdrucksweise verkürzt hat", d. h. er ist sich Veränderungen auf Signifikats- und Signifikantenebene bewußt. Müller fordert des weiteren die Erfassung des griechischen mathematischen Fachwortschatzes in einem Wörterbuch (Müller 1860: 5f.).

In einer kurzen Schrift von Hunger (1874) bietet der Autor eine Zusammenstellung elementarer arithmetischer Ausdrücke aus dem Griechischen. Er gibt praktische linguistische Informationen, da er seinen Aufsatz als Beitrag zur Belebung der historischen Mathematikforschung sieht.

Die wichtigsten frühen Schriften zur deutschen Terminologie der Mathematik stammen von Felix Müller.[30]

Müller (1887) spricht der mathematischen Fachsprache eine hohe Bedeutung zu: Im Rahmen einer einleitenden ausführlichen Metapher, in der die Mathematik als Bauwerk beschrieben wird, sagt er: „Daß unsere Wissenschaft vor dem Einsturze bewahrt bleibt, das verdanken wir, nicht zum Geringsten, den Vorzügen der mathematischen Sprache" (Müller 1887: 3). Das Ziel seiner Arbeit ist es, die historischen Ursprünge mathematischer Fachausdrücke darzulegen, d. h. er gibt Etymologien für diese an und untersucht gleichzeitig die Bezeichnungsgeschichte einzelner Fachbegriffe. Seine Motivation besteht auch darin, den mathematischen Wortschatz (zumindest für einen Teilbereich) überhaupt erst zu erfassen und mathematische Bezeichnungen auf dem Hintergrund ihrer historischen Entstehung zu erläutern.

Er nennt zunächst einige aus seiner Sicht charakteristische Eigenschaften der „mathematischen Sprache", nämlich „möglichste Sparsamkeit in Kunstausdrücken, geschickte und richtige Anwendung derselben", daneben „Kürze und Bündigkeit des Ausdrucks" (Müller 1887: 3). Einige seiner Aussagen über wissenschaftstheoretisch bedeutsame Eigenschaften werden als Norm formuliert: „In erster Linie trachte man danach, mit möglichst wenigen Kunstausdrücken auszukommen" (ibid.). Weiterhin müssen seiner Meinung nach „Kunstausdrücke ... so gebildet werden, daß schon aus ihrem Wortlaut ihr Begriff einigermassen verständlich ist. In dieser Hinsicht können uns die Griechen als Muster gelten. Sie gingen

[30]Müllers Aufsatz von 1901 konnte nicht eingesehen werden.

von Anschauungen aus, um Begriffe für den Verstand zu erhalten, und ihre Kunstausdrücke entlehnten sie der Sprache des gemeinen Volkes“ (Müller 1887: 4). Diese Forderung wurde von der Mathematik des 19. und 20. Jahrhunderts nicht immer erfüllt, wie wir noch sehen werden.

Er gibt im Anschluß eine Übersicht über Bezeichnungen für einzelne mathematische Disziplinen, dann über Bezeichnungen, die in zwei bestimmten Bereichen verwendet werden („Arithmetik“, „Kegelschnitte und andere geometrische Örter“). Alle untersuchten Begriffe gehören zur elementaren Mathematik. Bei seiner Untersuchung nennt er jeweils die klassischen Ausdrücke und geht dann auf deutsche und gelegentlich französische Äquivalente ein, um Entlehnungen, Neubildungen, unterschiedliche Benennungsmotive usw. zu erörtern. Müller weist dabei auf Erkenntnisse der philologischen Forschung für die Praxis der griechischen Mathematik hin, wenn er, um nur ein elementares Beispiel zu geben, die Bezeichnung *psēphízein* ‘rechnen’ als Ableitung von einem Substantiv mit der Bedeutung ‘Steinchen’ erklärt, was darauf hindeutet, daß das Verb ursprünglich etwa ‘mit Steinchen hantieren’ bedeutet, womit gleichzeitig auf eine konkrete Tätigkeit hingewiesen wird (Müller 1887: 13).

Müllers Arbeit ist eine der wenigen, in der die Etymologie fachsprachlicher Ausdrücke und die Bezeichnungsgeschichte einzelner Begriffe ausführlich erörtert wird. Dadurch gibt sie nicht nur Aufschluß über die sprachliche Geschichte einzelner Ausdrücke, sondern auch über Zusammenhänge zwischen der mathematischen Fachsprache und Mathematikgeschichte. So lassen sich viele Benennungen nur im historischen Kontext verstehen. Ein Beispiel dafür sind die heute kaum bekannten *zyklischen Zahlen* (*arithmoì kyklikoí*). Diese Zahlen haben per Definition die Eigenschaft, daß ihr Quadrat mit derselben Endziffer endet wie die Grundzahl, also ist z. B. 5 eine zyklische Zahl, da $5^2 = 25$. Die Benennung ergibt sich aus der damaligen (allerdings vergeblichen) Hoffnung, daß man mit Hilfe dieser Zahlen das Problem der Quadratur des Kreises (gr. *kýklos*) lösen könne.

In einem weiteren Aufsatz (Müller 1899) liegt die Perspektive auf frühen Eindeutschungsversuchen griechischer und lateinischer Ausdrücke (ca. zwischen 1400 und 1700). Angesichts der Annahme, das Deutsche nehme fremdsprachige Elemente weniger leicht auf als andere Sprachen, ist die zentrale Frage, wie diese Ausdrücke im Deutschen wiedergegeben werden. Müller wendet sich dabei entschieden gegen puristische Strömungen und will deswegen aufzeigen, daß Eindeutschungsversuche schon eine lange Tradition im Deutschen haben, die Eindeutschungen aber weniger aus sprachpuristischen Motiven, sondern vielmehr zur Erklärung fremdsprachiger

Termini eingeführt wurden. Zudem hänge der Erfolg einer sprachlichen Bezeichnung nicht allein von der Herkunft des sprachlichen Materials ab.

Müller gibt zunächst eine nützliche, da sehr ausführliche Übersicht über die wichtigsten mathematischen Quellentexte des betrachteten Zeitraums, bevor er wieder Begriffe aus einzelnen Bereichen bespricht („Mathematische Disziplinen. Methode“, „Elementares Rechnen“, „Arithmetik und Algebra“, „Ebene Geometrie“ und „Stereometrie“). Er zählt dabei die entsprechenden Ausdrücke auf und nennt die jeweiligen Urheber; gelegentlich finden sich Hinweise auf die Häufigkeit der Fachwörter bzw. auf die häufigste Bedeutung eines bestimmten Ausdrucks. Genaue Belegstellen werden nicht angeführt. Die Arbeit ist als „lexikalische Fundgrube“ und als theoretischer Beitrag zur Sprachpurismusdebatte zu verstehen, nicht jedoch als linguistische Arbeit im engeren Sinn.

Smiths (1935) kurze Arbeit ist ebenfalls stark philologisch geprägt. Sein Ziel ist es, die Fortschritte in der Mathematik anhand der Erweiterung des mathematischen Fachwortschatzes zu messen (Smith 1935: 291). Er wählt dazu ein Korpus von vier Enzyklopädien aus dem 16. bis 18. Jahrhundert und stellt die darin enthaltenen mathematischen Fachausdrücke zusammen. Seine Darstellung beschränkt sich auf 29 ausgewählte Termini (zumeist lateinische, z. B. *multiplicatio*), wobei er jeweils kurze etymologische Erläuterungen und eine Diskussion der Bedeutung liefert. In einigen Fällen geht er auf Ableitungen, Komposita, semantisch verwandte Ausdrücke und Synonyme (auch gleichbedeutende Wörter in verschiedenen Sprachen) ein, z. B. weist er bei der Diskussion von *multiplicatio*, abgeleitet von lat. *plicare* ‘falten’, auf einen schon im Griechischen vorhandenen parallelen Wortbildungsvorgang und auf verwandte Ausdrücke wie *factores* und *factus* hin. Für die aufgeführten Termini gibt Smiths Arbeit nützliche lexikalisch-semantische Informationen.

Die Dissertation von Reiner (1960) hat ebenfalls den Charakter einer Bestandsaufnahme. Er will zeigen, daß schon „in den Anfängen deutscher mathematischer Literatur eine eigene Fachsprache im Entstehen war“ (Reiner 1960: 2). Zu diesem Zweck stellt er, ausgehend von einem umfangreichen Korpus, die frühesten (bis zum Ende des 16. Jahrhunderts) mathematischen Fachwörter zusammen, gibt kurze Belegstellen und nennt die Autoren, die diese Ausdrücke verwenden. Zudem ergänzt er Müllers oben erwähnte Auflistung mathematischer Quellentexte. Für die vorliegende Arbeit ist Reiners Dissertation nur von marginaler Relevanz.

5.8.2 Untersuchungen zu einzelnen Autoren

Die Untersuchungen zu einzelnen Autoren folgen im wesentlichen den gleichen Fragestellungen. Folgende Arbeiten beschäftigen sich mit den genannten Autoren bzw. deren Terminologie:

- Christian Wolff (1679-1754): Piur (1903), Menzel (1996), Ricken (1995, 1999),
- Johannes Kepler (1571-1630): Götze (1919), Kothmann (1998),
- Albrecht Dürer (1471-1528): Olschki (1965: 414-451),
- J. H. Lambert (1728-1777): Busch (1933).

Piur (1903) will die Bedeutung Christian Wolffs für den deutschen Fachwortschatz (d. h. insbesondere den der Philosophie) herausarbeiten und widmet sich in einem Kapitel auch seiner mathematischen Terminologie. Er führt zahlreiche seiner Wortschöpfungen auf und stellt dabei fest, welche sprachlichen Mittel Wolff für die Bildung von Fachtermini verwendet hat. Piur betont darüber hinaus die grundlegende Position Wolffs in der Geschichte der mathematischen Fachsprache: „Unsere heutige mathematische Sprache ist, besonders was die Termini anbetrifft, fast ganz auf der Stufe stehen geblieben, wie sie uns bei Wolff entgegentritt" (Piur 1903: 36).

Die Dissertation von Menzel (1996) stellt Wolffs Rolle beim Übergang vom Lateinischen zum Deutschen als Sprache der Wissenschaft dar.[31] Menzel geht ausführlich auf Wolffs Sprachauffassung, seine theoretischen Grundsätze für die Wissenschaftssprache und deren praktische Umsetzung ein. So ist auch für Wolff die Gemeinsprache eine lexikalische Quelle für wissenschaftsprachliche Termini (Menzel 1996: 149f.), und er weist auf die Adressatenbezogenheit der Fachkommunikation hin (Menzel 1996: 148), d. h. die Sprache muß so gewählt sein, daß der Hörer sie auch verstehen kann, ein Aspekt, der damit zusammenhängt, daß Wolff viele seiner Schriften an Anfänger ohne besondere Vorkenntnisse richtete. Das Register beeinflußt z. B. die Wahl der Einzelsprache (Deutsch statt Latein), aber auch die deutschen Bezeichnungen von Fachbegriffen, für die Wolff ein hohes Maß an Motiviertheit anstrebt (Menzel 1996: 171-175).

Götze (1919) will in seiner Studie Johannes Kepler als Vorläufer der sprachpuristischen Bewegung darstellen. Seine Arbeit ist, ähnlich wie die Piurs, philologisch ausgerichtet. Obwohl der Titel dies nahelegt, hat sie weniger den Charakter

[31] Ricken (1995, 1999) nimmt sehr ähnliche Untersuchungen vor, die wir daher nicht näher ausführen wollen.

einer Monographie, sondern vielmehr den eines Wörterbuchs, mit Belegstellen aus einem einzigen Text, nämlich Keplers Weinvisierbuch von 1616. Götze (1919: 8-10) geht im Vorwort kurz auf Erfolg und Mißerfolg von Keplers Eindeutschungsversuchen, auf die Anschaulichkeit seiner Begriffe und auf seine Entlehnungsquellen wie Handwerks- und Bergmannssprache ein; wortspezifische Informationen werden dann in den einzelnen Artikeln gegeben.

Kothmann (1998) ergänzt Götzes Studie in verschiedener Hinsicht: Sie situiert Kepler ausführlich als Figur im Übergang von lateinischer Gelehrtensprache zur deutschen Wissenschaftssprache, geht auf alle deutschsprachigen Schriften Keplers ein, nicht nur auf das Weinvisierbuch, und kann daher einige Vordatierungen im Vergleich zu Götze vornehmen. Zudem betrachtet sie auch astronomische Fachwörter bei Kepler. Alle Fachausdrücke werden in einem ausführlichen Anhang aufgezählt und mit semantischen Erläuterungen und Belegstellen versehen.

Olschki (1965) untersucht einige Schriften Dürers vor dem Hintergrund, daß die deutsche Sprache erst im Entstehen begriffen ist und Dürer wissenschaftliche Erkenntnisse „jedem“ (Olschki 1965: 438) zugänglich machen wollte. Dürer will tradierte Termini durch Eindeutschung anschaulich machen und führt zu diesem Zweck zahlreiche auf Metaphern und Analogien beruhende Ausdrücke ein, z. B. *Diamant* für regelmäßige Körper oder *Eierlinie* für „Ellipse“ (Olschki 1965: 440). Die sollen unmittelbar verstanden werden, und dafür orientiert sich Dürer nicht an griechischen oder lateinischen Vorbildern. Statt dessen benennt er die mathematischen Gegenstände häufig auf der Grundlage ihrer Form oder ihres Wesens (Olschki 1965: 442).

Busch (1933) arbeitet aus sprachpuristischer Perspektive[32] den Beitrag einiger deutscher Mathematiker zur mathematischen Terminologie heraus. Er will aufzeigen, welche sprachlichen Mittel in der Vergangenheit genutzt wurden, um fremdsprachliche Ausdrücke zu umgehen. Er beschäftigt sich zwar mit der mathematischen Terminologie im allgemeinen (besonders jedoch mit geometrischen Ausdrücken), legt den Schwerpunkt aber auf Johann Heinrich Lambert (1728-1777), da dessen Eindeutschungsversuche vergleichsweise erfolgreich waren. Busch gibt keine thematisch gegliederte Darstellung, sondern bespricht einzelne der elementaren Mathematik zugehörige Eindeutschungen. Er weist darauf hin, daß die Gemeinsprache nicht beliebig herangezogen werden könne, um Fachwörter zu bilden und illustriert dies mit Keplers erfolglosen Eindeutschungsversuchen *Berg* bzw. *Hey-*

[32] Seine Arbeit ist stark von nationaler Kampfmetaphorik geprägt und Fremdwörtern gegenüber grundsätzlich feindlich eingestellt.

schober für das Rotationshyperboloid bzw. das Rotationsparaboloid, die gleichzeitig zeigen, daß die Anschauung allein nicht immer eine geeignete Quelle für Fachwörter ist (Busch 1933: 12). In bezug auf Kepler geht er aber über Götze (1919) nicht hinaus (Busch 1933: 24). Bei Lambert geht er besonders auf Wortbildungsprozesse ein, da bei diesem Autor Zusammensetzungen besonders häufig seien (Busch 1933: 30-34).

5.8.3 Fachsprachliche Untersuchungen

In diesem Abschnitt werden einige fachsprachenlinguistische Untersuchungen bzw. solche, die für die Fachsprache der Mathematik von Interesse sind, vorgestellt.

Rautenberg (1965) untersucht den Sprachgebrauch in der Mathematik in philosophischer Perspektive. Linguistische Fragen werden nur am Rande berührt, es überwiegen philosophische Fragestellungen, die mit dem logischen Aufbau mathematischer Aussagen und dem Formelapparat in Verbindung stehen. Er weist darauf hin, daß die mathematische Fachsprache im 19. Jahrhundert eine erhebliche begriffliche Präzisierung erfahren hat und daß in den verschiedenen Sprachen eine „Kongruenz der Begriffe hinsichtlich Inhalt und Umfang“ (Rautenberg 1965: 723) vorliege, wodurch die internationale Kommunikation unter Mathematikern erheblich leichter sei als in anderen Wissenschaften (ibid.). Auch sei aus mathematischer Sicht die Sprache nicht mehr als ein Hilfsmittel, das zudem jeglichen stilistischen Schmuckes entkleidet sei (ibid.). Er macht eine Klasse mathematischer Begriffe aus, „dialektische“ Begriffe genannt, die sich letztlich einer Festlegung entziehen und nur über Intuition oder Vorstellungskraft erfaßbar sind, da die Präzisierung des Begriffs ein fortwährender, letztlich nicht abschließbarer historischer Prozess ist. Als Beispiel nennt er den der „Zahl“ (Rautenberg 1965: 734f.). Hinzufügen könnte man „Menge“ oder „Punkt“.

Die Arbeit von Marcus (1973) haben wir bereits in Kap. 3.5.1 diskutiert. Es sei hier lediglich darauf hingewiesen, daß Marcus außer Metaphern auch zahlreiche andere Aspekte der mathematischen Fachsprache untersucht; er nimmt anhand von vorwiegend rumänischen Beispielen z. B. statistische Häufigkeits- und Wortlängenanalysen vor.

Mertens et al. (1973) wollen die wechselseitigen Beziehungen zwischen mathematischer Fachsprache und Gemeinsprache in bezug auf die Lexik (insbesondere Semantik und Wortbildung) untersuchen. Sie besprechen zunächst einige „Einfachbelege“, also solche Fachwörter, die in der Gemeinsprache nicht vorkommen. Dies sind häufig Komposita. Von den meisten dieser Ausdrücke ist nicht zu erwarten, daß sie sich in der Gemeinsprache etablieren können (Mertens et al. 1973: 418). Bei den „Doppelbelegen“, also bei Fachwörtern, die auch in der Gemeinsprache auftreten, vergleichen sie jeweils die mathematischen und gemeinsprachlichen Bedeutungen und versuchen, semantische Beziehungen zwischen diesen herzustellen (Mertens et al. 1973: 421-425). Im folgenden werden dann noch unter Verwendung derselben Methode einige Sonderfälle betrachtet (z. B. Ableitungen auf *-ung*). Sie weisen auch darauf hin, daß andere Fachsprachen in die Rekonstruktion des Entlehnungsweges einbezogen werden sollten (Mertens et al. 1973: 432). Insgesamt steht diese Arbeit der unsrigen insofern nahe, als fachsprachliche und gemeinsprachliche Semantik miteinander in Beziehung gesetzt werden.

Gerisch (1988) untersucht fachbedingte sprachliche Erscheinungen mathematischer Fachtexte aus textlinguistischer Perspektive. Er stellt eine Reihe von charakteristischen Eigenschaften dieser Fachtexte vor, exemplifiziert diese und untermauert sie zum Teil auch statistisch. Diese Eigenschaften betreffen die Textstruktur, die Syntax und die Lexik. Gerisch geht auch kurz auf mathematische Terminologie ein und geht dabei von der Prämisse aus, daß mathematische Fachwörter „keinen direkten Bezug zu außermathematischen Gegebenheiten haben“ und folglich auch „nur teilweise motiviert“ seien (Gerisch 1988: 54).[33] Es herrsche also in der Mathematik „weitgehende Freiheit in der Wahl [der] Termini“ (Gerisch 1988: 55) und die gemeinsprachliche Bedeutung eines Wortes helfe zum Verständnis eines mathematischen Fachwortes nicht weiter (ibid.). Diese Aussagen werden wir noch eingehend untersuchen.

Die Arbeit von Nordon (1993) ist keine linguistische Arbeit, sondern vielmehr eine Reflexion über verschiedene Aspekte der Mathematik. Nordon ist aber an der Sprache der Mathematik, besonders an lexikalisch-semantischen Eigenschaften interessiert. Er beschäftigt sich besonders mit der gängigen Ansicht, nach der einerseits „les concepts mathématiques sont jugés indépendants des mots qui les désignent“, andererseits aber „le langage est ressenti comme une aide à l'intuition“ (Nordon 1993: 117). Nicht selten wird den Fachwörtern ein nur geringer Wert beigemessen. Nordon illustriert dies an Klines (1972) Monographie zur Geschichte der Mathematik, in der beim Begriff der komplexen Zahl keine Unterschiede in bezug auf die sprachliche Repräsentation gemacht, d. h. Unterschiede zwischen hi-

[33] Als Ausnahme nennt er die Bereiche Geometrie und Topologie, in denen bei einigen Fachwörtern die „gemeinsprachliche Bedeutung ... zuweilen zum Zwecke einer gewissen Veranschaulichung genutzt“ werde (Gerisch 1988: 54, Fn. 6)

storisch belegten Ausdrücken wie *unmögliche*, *imaginäre* oder eben *komplexe Zahl* außer Betracht gelassen werden. Ein Ausdruck wie *unmögliche Zahl*, der besonders im 16. Jahrhundert verbreitet war, läßt aber auf eine andere Einstellung zu dem damit verbundenen mathematischen Objekt schließen als der Ausdruck *komplexe Zahl*, der zu Beginn des 19. Jahrhunderts von Gauß eingeführt wurde (Nordon 1993: 118f.). Anhand verschiedener Zitate von Mathematikern arbeitet Nordon (1993: 121f.) auch die Rolle der Intuition im Forschungsprozeß heraus: Mathematische Fachwörter und deren Bedeutung spielen eine wesentliche Rolle dabei, welche „Vorstellung“ (*idée*) von einem mathematischen Objekt entwickelt wird.

Erwähnt seien schließlich noch die Übersichtsarbeiten von Eisenreich (1998) und P. O. Müller (1999). Während sich Müller mit der Fachsprache der Geometrie in der frühen Neuzeit, insbesondere mit frühen Terminologisierungen, beschäftigt, gibt Eisenreich einen einführenden Überblick über die mathematische Fachsprache seit Gauß, also etwa seit Beginn des 19. Jahrhunderts. Sein Überblick wird nicht zu linguistischen Theorien in Beziehung gesetzt (Eisenreich ist Mathematiker), bietet aber zahlreiche Beispiele zu syntaktischen, orthographischen und terminologischen Eigenschaften der mathematischen Fachsprache wie auch zur mathematischen Symbolik.

5.8.4 Fachlexikographische Werke

Im wesentlichen um fachlexikographische Nachschlagewerke mit jeweils unterschiedlichen Schwerpunkten handelt es sich bei Müller (1900), Dingeldey (1910), Schirmer (1912), Götze (1919) (bereits im vorigen Abschnitt diskutiert), Dijksterhuis - van der Wielen (1948), Mugler (1958/59) und Schwarzman (1994).

F. Müller hatte schon 1887 „die Herstellung eines neuen mathematischen Wörterbuches“ angeregt (Müller 1887: 5, Fn. 1). Müllers (1900) Wörterbuch ist bilingual (deutsch-französisch und französisch-deutsch) und bietet gleichzeitig eine umfassende Bestandsaufnahme des mathematischen Fachwortschatzes bis 1900. Müller erfaßt nach eigenen Angaben (Müller 1900: v) etwa zehntausend Fachausdrücke aus der reinen und angewandten Mathematik und beschränkt sich dabei keineswegs nur auf elementare Begriffe. Sein Werk ist für historische Arbeiten auch deswegen interessant, weil er bei zahlreichen Artikeln knappe historische Angaben über den Ursprung eines Ausdrucks macht (üblicherweise durch Nennung des Urhebers).

Dingeldeys etymologisches Fachwörterbuch von 1910 ist deswegen erwähnenswert, weil derartige Nachschlagewerke bis heute kaum existieren. Von besonderem Nutzen ist das Wörterbuch indes nicht, da nur wenige, ausschließlich elementare Begriffe zumeist lateinischen oder griechischen Ursprungs überhaupt enthalten sind (dazu noch in reichlich willkürlicher Zusammenstellung), und zudem als einzige Information ein verwandtes klassisches Wort und dessen Bedeutung gegeben wird.

Für die lexikographische Erfassung des *elementaren* deutschen mathematischen Wortschatzes ist die Arbeit von Schirmer (1912) grundlegend. Der Autor ist bestrebt, Erstbelege für die aufgenommenen Fachwörter zu geben. Nützlich sind besonders die zahlreichen und ausführlich wiedergegebenen Belegstellen.

Dijksterhuis - van der Wielen (1948) bieten ein Fremdwörterbuch mathematischer Ausdrücke in der niederländischen Sprache. Hier werden auch Begriffe aus weniger elementaren Bereichen aufgeführt, und es finden sich etymologische und ausführliche semantische Angaben.

Mugler (1958/59) erfaßt in einer sehr gründlichen Arbeit die geometrische Terminologie in der griechischen Antike. Er gibt dazu zahlreiche Originalzitate (teilweise mit französischen Übersetzungen versehen) und strebt dabei an, die semantische Entwicklung des entsprechenden Ausdrucks hervortreten zu lassen. Im Gegensatz zu vielen anderen Spezialwörterbüchern wurden auch nichtmathematische Begriffe aufgenommen, die in geometrischen Texten dennoch eine wichtige Rolle spielen, wie z. B. Ausdrücke mit der Bedeutung 'suchen, untersuchen' oder auch 'definieren' sowie verschiedene Präpositionen und Konjunktionen. Sein Wörterbuch knüpft an eine frühere Arbeit (Mugler 1948) an, in der geometrische Begriffe, insbesondere bei Platon, auf ihre Semantik hin untersucht werden.

Schwarzman (1994) bietet ein etymologisches Wörterbuch mathematischer Fachausdrücke. Es enthält Angaben zu einigen hundert zumeist elementarer Fachausdrücke. Die etymologischen Informationen entsprechen sicher nicht wissenschaftlichen Standards (dies wird auch nicht beabsichtigt), und Belegstellen finden sich gar nicht. Nützlich sind jedoch besonders Schwarzmans Angaben zum Benennungsmotiv.[34]

Es gibt des weiteren eine interessante Internetquelle, die zwar keine wissenschaftlichen Ansprüche stellt, sich aber für solche Zwecke gut nutzen läßt. Es handelt sich um eine Website von Jeff Miller (http://members.aol.com/jeff570/mathword.html). Die hier angebotenen Anmerkungen betreffen einige hundert unsystematisch zusammengetragene Begriffe

[34]Für eine ausführlichere Diskussion s. H. Becker (1998).

aus allen Teilbereichen der Mathematik. Die dargebotenen Informationen sind historischer Art, wobei besonders auf Erstbelege und semantische Erläuterungen Wert gelegt wird. Auch diese Erläuterungen sind eher unsystematisch, doch sind gerade die gegebenen Belegstellen und Originalzitate wertvoll. Die einzelnen Artikel (alphabetisch geordnet) enthalten nicht selten Informationen, die sich in keinem gedruckten Nachschlagewerk finden. Es gibt darüber hinaus verschiedene Diskussionsforen (http://mathforum.org/discussions/epi-search/math-history-list.html, http://chasque.apc.org/jgc/archivo.html, http://archives.math.utk.edu/hypermail/historia/), die sich teilweise durchsuchen lassen und in denen sich nicht selten ähnliche Informationen wie bei Miller zu einzelnen Begriffen finden.

5.8.5 Allgemeine lexikographische Werke

Die im folgenden vorgestellten Wörterbücher wollen wir kurz hinsichtlich einiger für uns zentraler makro- und mikrostruktureller Aspekte diskutieren. Uns interessiert besonders die Zuverlässigkeit von (Erst-)Datierungen in Wörterbüchern, die für historische Untersuchungen von Begriffsbildung und -wandel unerläßlich ist. So ist es z. B. – bei aller gebotenen Vorsicht – legitim, anzunehmen, daß die erstdatierte Bedeutung auch tatsächlich die ältere ist, solange nichts dagegen spricht.

Das zweifellos wichtigste und informativste allgemeine Nachschlagewerk ist das *Oxford English Dictionary* (OED). Es liefert ausführliche semantische Unterscheidungen, Belegstellen und Erstdatierungen (für eine allgemeine fachlexikographische Diskussion s. Gilliver 1999). Letztere sind zumeist recht genau: Bei vielen der überprüften Artikel stimmte die Datierung genau oder sie ließ sich nur um wenige Jahre vordatieren. Die semantischen Angaben sind im allgemeinen präzise, einzelne Bedeutungen fehlen allerdings gerade bei Ausdrücken, die nicht streng definiert werden, aber dennoch eine zentrale Rolle in mathematischen Texten spielen. So wird bei dem Verb *decompose* bzw. beim Substantiv *decomposition* keine mathematische Bedeutung aufgeführt (wohl aber eine chemische), obwohl es sich hier um einen zentralen Begriff aus der Mathematik handelt (s. Kap. 9). Durch die aktuelle (allerdings kostenpflichtige) Internetausgabe (http://www.oed.com) und die CD-Version lassen sich z. B. Suchen im gesamten Text oder nach einzelnen Fachgebieten durchführen.

Der *Trésor de la language française* (TLF) erfaßt den gesamten französischen Wortschatz seit der französischen Revolution (für eine allgemeine fachlexikographische Diskussion s. Albrecht 1999). Er ist auch kostenlos über das Internet nutzbar (http://www.inalf.fr/tlfi), was die Möglichkeit eröffnet, nach bestimmten Ausdrücken im gesamten Text (z. B. in den Belegstellen) und systematisch nach Fachgebieten zu suchen. Die semantische Gliederung ist ähnlich ausführlich wie im OED. Es werden viele Belegstellen angegeben und der Versuch unternommen, jeweils Erstbelege für einzelne Bedeutungen zu geben. Auch für den mathematischen Fachwortschatz ist der TLF eine wichtige Informationsquelle. Dabei ist u. a. zu beachten, daß gerade die Erstdatierungen besonders kritisch zu prüfen sind. Hier eröffnet sich noch ein weites Feld für Vordatierungen, was sich im übrigen auch auf andere französischsprachige Wörterbücher überträgt, die den *Trésor* als Quelle heranziehen (wie dies offenbar das *Dictionnaire de la langue française* (DHLF) tut, wie sich anhand einiger Vergleiche der Datierungen leicht feststellen läßt.).

Für den Bereich der Entlehnungen aus dem Deutschen ins Englische (auch in bezug auf Fachwörter) ist die Arbeit von Pfeffer und Cannon (1994) nützlich. Hier finden sich Angaben zur ersten Verwendung im Englischen, zur Etymologie und auch zu den deutschen Urhebern (Pfeffer - Cannon 1994: 35-37). Da insbesondere bei der Datierung sehr stark auf das OED vertraut wird, übertragen sich auch die dort auftretenden Ungenauigkeiten.

Das *Deutsche Wörterbuch* (DWB) enthält nur wenige fachlexikographische Angaben und ist allenfalls für sehr elementare Terminologie zu verwenden (für eine differenzierte Diskussion s. Schiewe 1991, 1999).

Für diese Quellen – wie letztlich für alle in diesem Kapitel genannten – gilt grundsätzlich, daß eine kritische Überprüfung anhand der Original- und Sekundärliteratur unerläßlich ist. Die letztgenannten Nachschlagewerke weisen insgesamt eine relativ hohe Zuverlässigkeit auf, variieren aber sehr stark hinsichtlich der Behandlung mathematischer Termini. Das OED etwa deckt als allgemeines Wörterbuch zwar eine Vielzahl von Fachbegriffen ab, doch ist es oft nötig, auf andere Quellen zurückzugreifen, die oft aber nur eng umgrenzte semantische Felder umfassen, nur bestimmte Informationen geben (etwa nur Benennungsmotive, nicht aber Belege) und die, wie die genannten Internetquellen, zwar punktuell sehr präzise sein können, aber nicht systematisch vorgehen.

Teil II

Linguistische Fallstudien

Kapitel 6

Vorbemerkungen

In den folgenden Kapiteln werden wir detaillierte Untersuchungen einiger mathematischer Begriffe durchführen, die zumeist im 19. Jahrhundert in vorwiegend algebraischen Kontexten eingeführt wurden. Um das Verständnis dieser Untersuchungen zu erleichtern, sollen einige historische Informationen über den Werdegang der Algebra gegeben werden, sofern dies für unseren Zusammenhang von Bedeutung ist. Dies erscheint insbesondere deswegen wichtig, weil die einzelnen Begriffe oft nur den Ausgangspunkt für weiterführende Betrachtungen bilden. Darüber hinaus wollen wir einige Bemerkungen zu den Konzepten „mathematisches Objekt“ und „Menge“ machen, denn die untersuchten Begriffe sind vorwiegend mengentheoretischer Natur, d. h. sie beziehen sich auf Zusammenfassungen von mathematischen Objekten, die dann als Ganzes betrachtet werden. Bei diesen Vorbemerkungen steht neben dem erläuternd-historischen insbesondere der sprachliche Aspekt im Vordergrund.

Bevor wir mit diesen Erläuterungen beginnen, sollen einige Anmerkungen zu den untersuchten Beispielen, zu unserer Materialbasis und zu den hier untersuchten sprachlichen Belegen gemacht werden.

6.1 Wahl des untersuchten Zeitraums und der Beispiele

Im 19. Jahrhundert fanden in verschiedenen Teilgebieten der Mathematik erhebliche Neuerungen statt. So erkannte man, um nur ein Beispiel zu geben, daß es nicht nur *eine* Geometrie gibt, sondern mehrere. Diese Geometrien entsprachen nicht der klassischen Geometrie Euklids. Die Entdeckung bzw. Schöpfung solcher „nichteuklidischer“ Geometrien war brisant, u. a. da sie der Auffassung widersprach, es gäbe nur *einen* Raum.[1] Dadurch wurden philosophische Fragen aufgeworfen, die man im 19. Jahrhundert kontrovers diskutierte.

Wie bereits in der Einleitung erwähnt, werden in den Fallstudien vorwiegend mathematische Strukturen und damit zusammenhängende Begriffe untersucht. Solche Strukturen stellten im 19. Jahrhundert etwas grundlegend Neues in der Mathematik dar. Daher stellt sich die Frage, welche sprachlichen Mittel zu deren Bezeichnung herangezogen wurden und welche weitergehenden Konsequenzen damit verbunden sind. Des weiteren ist das 19. Jahrhundert auch dadurch gekennzeichnet, daß neue Theorien entstanden, in denen ein bekanntes mathematisches Gebiet mit den Mitteln einer anderen mathematischen Teildisziplin untersucht wurde. Richard Dedekinds „algebraische Zahlentheorie“ (Kap. 10.8) und Hermann Minkowskis „Geometrie der Zahlen“ (Minkowski 1910) sind Beispiele dafür.

Darin liegen die Hauptgründe, aus denen wir uns vorwiegend mit der Mathematik des 19. Jahrhunderts befassen.

Angesichts des Umstandes, daß die mathematische Wissenschaftssprache bisher kaum untersucht ist, gehen wir von einer überschaubaren Menge von Begriffen aus, die gleichzeitig aber wesentlich detaillierter diskutiert werden, als dies bei einer breiter angelegten Untersuchung möglich wäre. Wir wählen als Beispiele die Begriffe „Gruppe“, „Körper“ und „Schiefkörper“ sowie verschiedene damit zusammenhängende Begriffe, z. B. die Begriffe „Isomorphismus“ und „Zerlegung“. Spezifische Gründe für die Wahl der Beispiele geben wir in den jeweiligen Kapiteln.

6.2 Korpus

6.2.1 Zielsetzung

Es stellt sich die Frage, welche Datenbasis der vorliegenden Untersuchung zugrundeliegen soll. Diese Frage läßt sich am besten durch eine Betrachtung der Zwecke der Datenbasis beantworten. Eine zentrale Funktion besteht darin, sprachliche Belege für einzelne Termini und überhaupt für sprachliche Ausdrücke zu sammeln, die in mathematischen Fachtexten vorkommen. Diese Texte sind nicht prinzipiell auf algebraische beschränkt; es sind gerade auch solche Texte von Interesse, die im Umkreis der Algebra „ähnliche“ strukturelle Eigenschaften beschreiben.

[1] S. z. B. Mehrtens (1990: 42-60).

Ebenso soll die Datenbasis Aufschluß über möglicherweise auftretende systematische Metaphorik sowie über semantische Zusammenhänge geben. Weiterhin sollen, wenn möglich, Erstbelege für derartige Termini und Metaphern angegeben werden. Schließlich ist es wichtig, mit einer möglichst hohen Wahrscheinlichkeit feststellen zu können, daß bestimmte Redeweisen vor einem bestimmten Zeitpunkt *nicht* auftreten.

Von diesen Zielsetzungen ausgehend erscheint es sinnvoll, das Korpus aus verschiedenen Arten von Quellen zusammenzusetzen. Diese Zusammensetzung soll im folgenden Abschnitt erläutert werden.

6.2.2 Inhalt des Korpus

Das Korpus besteht aus den im folgenden aufgeführten Texten.

1. Zahlreiche Quellentexte (zu einem großen Teil Aufsätze), die gezielt anhand der Sekundärliteratur zur Geschichte der Mathematik zusammengestellt wurden. Diese Methode ist insbesondere, aber nicht ausschließlich, bei den Begriffen „Gruppe" und „Körper" angewendet worden. Die entsprechende Sekundärliteratur wird in den jeweiligen Kapiteln genannt.

2. Ausgehend von der auf diese Weise zusammengestellten Primärliteratur wurden weitere Arbeiten der jeweils auftretenden Verfasser aufgenommen, ohne daß dabei eine thematische Beschränkung z. B. auf den Bereich Gruppentheorie getroffen wurde. Zu diesem Zweck stehen in vielen Fällen entsprechende Werksausgaben zur Verfügung. Der Grund für die nicht vorgenommene thematische Einschränkung besteht darin, daß die Möglichkeit in Betracht gezogen werden muß, daß ein- und derselbe sprachliche Ausdruck bei einem Autoren in unterschiedlichen fachlichen Bedeutungen verwendet wird und daher weitere semantische Anschlußmöglichkeiten in Erwägung gezogen werden könnten.

3. Ebenfalls ausgehend von der unter 1. genannten Methode wurden die jeweiligen Quellen auf weiterführende Literaturhinweise untersucht und diese verfolgt.

4. Einschlägige Fachzeitschriften des 19. Jahrhunderts wurden ohne thematische Begrenzung durchgesehen. Diese Methode lieferte zum einen Arbeiten und Belege für Termini, die in der Sekundärliteratur nicht

erfaßt sind, und zum anderen Belege für nichtterminologische Verwendungen und Metaphorik. Dabei wurde auch elektronisch recherchiert. Möglichkeiten zur Volltextsuche bietet die von der University of Michigan betriebene Website (http://www.hti.umich.edu), von der aus Volltextsuchen in drei Korpora mathematischer Werke durchgeführt werden können, nämlich erstens die *The University of Michigan Historical Mathematics Collection* (http://hti.umich.edu/u/umhistmath/), zweitens die *Cornell University Library Historical Math Monographs* (http://historical.library.cornell.edu/math/), und drittens die mathematischen Texte des *Göttinger Digitalisierungszentrums* (http://134.76.163.65/simple_search.html). Alle drei Sammlungen enthalten eine Vielzahl mathematischer Monographien, vorwiegend in deutscher, englischer und französischer Sprache, die etwa bis zum Beginn des 20. Jahrhunderts datieren. Des weiteren haben wir das NUMDAM-Projekt (Numérisation de documents anciens mathématiques) genutzt, das u. a. Volltextsuchen im *Bulletin de la Société Mathématique de France* (1872-1922) und in den *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure* (ab 1864) ermöglicht (http://www.numdam.org).

5. Für das 18. Jahrhundert wurden zahlreiche Texte aus den Bereichen Algebra, Arithmetik und Geometrie zusammengestellt. In bezug auf die Textsorten ist dabei zu sagen, daß eine gleichmäßige Verteilung auf wissenschaftliche Artikel, Lehrbücher, Monographien und zeitgenössische Lexikonartikel vorgenommen wurde. Der Grund dafür ist die Annahme, daß z. B. in Artikeln weniger sprachliche Erläuterungen und Metaphorik zu erwarten sind.[2] Das Französische und das Englische sind dabei besser belegt als das Deutsche, wo sich die Tradition der lateinischen Fachsprache länger gehalten hat.

Die einzelnen Quellen sind im Literaturverzeichnis aufgeführt.

Das Korpus besteht also ausschließlich aus gedruckten Quellen. Es erfolgt keine statistische Auswertung, da die semantische Analyse im Vordergrund steht. Sprachliche Belege wurden systematisch in einer Datenbank erfaßt.

[2] Diese Annahme wurde so nicht bestätigt. Z. B. finden sich in den Artikeln Kummers zahlreiche ausführliche metasprachliche Kommentare. S. Kap. 9.

6.3 Sprachliche Belege

Die Aussage, daß eine bestimmte sprachliche Erscheinung zu einem bestimmten Zeitpunkt oder zumindest in einem bestimmten Zeitraum zum ersten Mal auftritt, kann nur in den seltensten Fällen mit absoluter Sicherheit getroffen werden. Erstdatierungen sind für uns nicht in erster Linie von wissenschafthistorischem oder lexikographisch-philologischem Interesse, sondern sie betreffen die linguistische Frage nach sprachlichen Traditionen und semantischen Entwicklungen.

Hilfreich sind die in manchen Werken der Sekundärliteratur gegebenen Hinweise zur Erstdatierung von Fachtermini. Dabei ist allerdings zu beachten, daß in diesen Werken häufig nicht zwischen dem sprachlichen Ausdruck und dem Konzept unterschieden wird und daß häufig die Einzelsprache, in der ein Ausdruck zuerst auftritt, unklar ist, d. h. „Belege" werden nicht selten in der Sprache angegeben, in der der Sekundärtext geschrieben ist. Dies läßt sich nur im Einzelfall durch Lektüre der Originalquelle feststellen.

Bei der Suche nach Erstbelegen wurde wie folgt vorgegangen:

1. Insbesondere bei Fachtermini wurde, wenn möglich, entsprechende Sekundärliteratur herangezogen und das Original überprüft.

2. Grundsätzlich wurden die einschlägigen Nachschlagewerke konsultiert. Diese Methode liefert in den meisten Fällen nur einen ersten Anhaltspunkt, denn sie hat verschiedene Beschränkungen. Die Praxis zeigt, daß die Wörterbücher manche Wörter gar nicht enthalten oder einzelne Bedeutungen nicht verzeichnen; zudem lassen sich die angegebenen Erstbelege häufig vordatieren.[3]

3. Das Korpus bzw. die zusammengestellten Belege für einzelne sprachliche Erscheinungen wurden herangezogen.

Grundsätzlich wurden alle drei Methoden angewendet. Daher kann davon ausgegangen werden, daß die Erstdatierungen zuverlässig sind. Dies gilt insbesondere für Fachtermini, sofern diese in der Sekundärliteratur verzeichnet sind.

[3] S. a. Kap. 5.8.5.

Kapitel 7

Historischer und sprachlicher Hintergrund

7.1 Die Algebra im Übergang vom 18. zum 19. Jahrhundert

Die Algebra wurde bis zum Ende des 18. Jahrhunderts in erster Linie als Disziplin angesehen, die sich mit der Lösung spezieller und allgemeiner Gleichungen beschäftigt (ein Beispiel für eine spezielle Gleichung ist $x^3+2x^2-x+5=0$).[1] Die betrachteten Gleichungen sind Gleichungen von „Größen", die man als komplexe Zahlen auffassen kann.[2] Die Vorgehensweise ist stark von expliziten Rechnungen geprägt: Eine Gleichung gilt als gelöst, wenn die Lösung *explizit* in Form eines Wurzelausdrucks angegeben werden kann. Ein einfaches Beispiel: Die Lösungen der allgemeinen Gleichung $x^2+px+q=0$ lauten $x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ (sofern $\frac{p^2}{4}-q\geq 0$). Auch für Gleichungen dritten und vierten Grades konnte man im 18. Jahrunderts allgemeine Lösungsformeln angeben, doch blieb die zentrale Frage, ob die allgemeine Gleichung $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...a_1^x+a_0=0$ lösbar ist bzw. ob man die Lösungen mittels eines Wurzelausdrucks angeben kann, im 18. Jahrhundert ungelöst. Einige Autoren äußerten bereits die richtige Vermutung, daß dies nicht der Fall ist.

Ende des 18. Jahrhunderts bietet sich folgendes Bild: Joseph-Louis Lagrange

[1] Es kann hier nur um einen Abriß der diskutierten Entwicklungen gehen. Für ausführliche Informationen s. Kiernan (1971/72), Koppelman (1971/72), Lichtenberg (1966), Burkhard (1892), Purkert (1971, 1973), Wußing (1969), Nový (1973: 14-24), van der Waerden (1985: 76-159) und die dort angegebene Literatur.

[2] Kiernan (1971/72: 40f.), Dieudonné (1979: 8).

(1736-1813) verfaßt eine ausführliche Synthese der bisherigen Schritte auf dem Weg zur Lösung allgemeiner Gleichungen (Lagrange 1771/72). Er entdeckt auf traditionellem, also rechnerischem Wege, daß bestimmte Eigenschaften einer Gleichung mit Vertauschungen der Wurzeln der Gleichung in Zusammenhang stehen; Cauchy (1815a, 1815b) verselbständigt diesen Ansatz und betrachtet diese Vertauschungen (Permutationen) an sich, losgelöst vom Kontext von Gleichungen und leistet so einen wichtigen Beitrag zur Entwicklung der Gruppentheorie (s. Kap. 9.6).

Gleichzeitig bemerkt Lagrange, daß die Lösbarkeit einer Gleichung nicht nur von der Gleichung selbst abhängt, sondern daß ein entscheidender Faktor die betrachtete Grundmenge von Zahlen ist (Kiernan 1971/72: 45). Um 1830 löst Galois, der diesen Gedanken weiterführt, das Problem der Lösbarkeit von Gleichungen: Er ordnet jeder Gleichung die „Gruppe der Gleichung“ (*groupe de l'équation*) zu und legt zugleich den Grundstein für die Gruppentheorie.[3] Seine Untersuchungen zur zugrundeliegenden Grundmenge von Zahlen sind gleichzeitig wesentlich für die Entstehung des Körperbegriffs.[4] Es geht Galois nicht darum, explizite Lösungen einer Gleichung anzugeben; ihn interessieren die allgemeinen Bedingungen für die Lösbarkeit oder Unlösbarkeit einer Gleichung, und dabei stößt er auf Konzepte, die die Zusammenfassung von Objekten zu einer Menge beinhalten. Gruppen sind solche Zusammenfassungen, und sie werden bei Galois als Objekt der mathematischen Untersuchung betrachtet. Damit deutet sich der mathematische Strukturbegriff an, der sich allerdings erst im 20. Jahrhundert vollkommen durchsetzt.[5] Die Vorstellung einer Struktur ist zuvor allenfalls vage erkennbar, z. B. wird Lagrange (1771/72 [1973: 357]), der von der „métaphysique de la résolution des équations du troisième et quatrième degré“ spricht, in diesem Sinne interpretiert (Bourbaki 1994: 76, Fn. 17).

Mit diesen Objekten kann man auch rechnen, sie miteinander „verknüpfen“. Diese Erkenntnis ist Resultat eines komplexen historischen Prozesses: Zum einen wurden bestimmte Typen von Verknüpfungen, wie etwa die Addition, auf neue mathematische Objekte angewendet, z. B. auf Mengen (Koppelman 1971/72). Zum anderen mußte zunächst erkannt werden, daß für mathematische Operationen nicht die Objekte, auf die diese angewendet werden, entscheidend sind, sondern vielmehr die formalen Eigenschaften der Operation, die Rechengesetze (Gericke 1973:

[3]Für die Entwicklung des Begriffs der „Gruppe“ sind aber neben der Algebra auch die Geometrie und Zahlentheorie wichtig (Wußing 1969).

[4]Für die Entwicklung des Begriffs des „Körpers“ ist ebenso die Zahlentheorie von Bedeutung (Purkert 1971: 24).

[5]Das Wort *Struktur* kommt hier noch nicht vor. S. Kap. 9.8.

158f.). Solche Rechengesetze erläutern wir in Kap. 7.5. Sie mußten jedoch erst einmal herausgearbeitet werden, da sie nicht ins Auge fielen. Viele dieser Gesetze waren im Prinzip lange bekannt, z. B. findet sich das Assoziativgesetz, allerdings in stark geometrischer Formulierung, schon bei Euklid (*Elemente*, Buch V, Prop. 3). In der frühen Neuzeit werden die Gesetze explizit beschrieben, aber nicht benannt (Tropfke 1980: 163). Im Zusammenhang mit dem Lösen von Gleichungen etwa wurde zunächst nur ein Typ von Gruppen, nämlich Permutationsgruppen, untersucht. Bei diesen herrschte jedoch z. B. für die Assoziativität noch gar kein Problembewußtsein,[6] und so wurden diese Rechengesetze in der Praxis oft implizit vorausgesetzt und nicht im Einzelfall nachgewiesen.

Nachdem dann im Laufe des 19. Jahrhunderts weitere Typen von Gruppen untersucht und die einzelnen Rechengesetze heausgearbeitet wurden, war auch der Weg für axiomatische Begriffsbildungen geebnet. Dabei wurden nicht nur Gruppen axiomatisch definiert, sondern auch zahlreiche weitere algebraische Strukturen wie z. B. Körper, Ringe und Vektorräume.

7.2 Mengenlehre und mengentheoretische Konzepte in der Mathematik

Wir haben im vorigen Abschnitt kurz dargestellt, wie in der Algebra eine Hinwendung zu mengentheoretischen Konzepten und zu algebraischen Strukturen stattfand. Diese Entwicklung verlief allerdings sehr langsam, wurde zunächst von den Mathematikern kaum wahrgenommen und dann im Verlauf des 19. Jahrhunderts zum Teil auch bekämpft. Wir können davon ausgehen, daß „[a]u début du dixneuvième siècle, les concepts 'ensemblistes' n'existent pas encore“ (Guérindon - Dieudonné 1978: 76, s. a. Purkert 1971: 32). Das heißt z. B., daß mit Zahlen oder Variablen gerechnet wurde, aber Zusammenfassungen von solchen Objekten nicht als ein Ganzes betrachtet und daher auch nicht benannt wurden, zumindest nicht von einer breiten mathematischen Öffentlichkeit. Erste Spuren einer solchen Entwicklung haben wir jedoch bereits angedeutet; die genauere sprachliche Entwicklung werden wir im folgenden noch präzisieren.

[6] Die Bezeichnung *associative* wurde erst 1843 von Hamilton eingeführt (Crowe 1967: 16).

7.2.1 Vorgeschichte der Mengenlehre

Betrachten wir zunächst die Entwicklung der Mengenlehre.[7] Dazu läßt sich feststellen, daß es eine solche letztlich erst seit den Arbeiten von Georg Cantor und Richard Dedekind gibt, die sich etwa ab 1870 mit diesem Thema befassen. Cantor wurde auf den grundlegenden Begriff der „Menge“ durch die Beschäftigung mit den analytischen Begriffen „unabhängige Variable“ und „Funktion“ geführt (Cajori 1980: 400) und arbeitet besonders Begriffe wie „Kardinalzahl“, „Ordinalzahl“ und „Unendlichkeit“ heraus. Für diesen Entwicklungsstrang lassen sich auch frühere indirekte Vorläufer wie z. B. Bonaventura Cavalieri ausmachen (Moretto 1990: 88f.).

Schon in der Antike läßt sich die Idee der Zusammenfassung von Objekten zu einer Menge nachweisen, wobei letztere aber nicht den eigentlichen Untersuchungsgegenstand darstellten. Man kann zunächst einmal bemerken, daß es vor den Griechen kein allgemeines Wort für „Menge“ gab, mit dem Zusammenfassungen von Objekten verschiedener Art bezeichnet werden konnten, d. h. Mengen verschiedenartiger Dinge (z. B. Flotten, Heere) wurden unterschiedlich bezeichnet (Gericke 1973: 152).

In der griechischen Antike und bei späteren lateinischen und griechischen Autoren wird eine Zahl als eine Zusammenfassung von Einheiten (*monádōn sýstēma*) definiert, was im Lateinischen mit *unitatum collectio* wiedergegeben wird (Gericke 1973: 152f.). Dabei tritt das Wort *sýstēma* ‘Zusammenstellung’ auf, das eine allgemeine Zusammenfassung bezeichnet und im 19. Jahrhundert zur Bezeichnung von Mengen sehr verbreitet ist. Der Ausdruck *collectio* bedeutet ‘Sammlung, Ansammlung’ (abgeleitet von *colligere* ‘zusammenlesen, (auf-)sammeln’).

Ähnliche Definitionen verwenden den Ausdruck *plē̃thos*, der von der Wurzel **plē-* ‘füllen’ abgeleitet ist. Bei Euklid, der in seinen *Elementen* keineswegs nur auf die Geometrie eingeht, wird eine Zahl als eine aus Einheiten zusammengesetzte Vielheit definiert:[8]

(7.1) Arithmòs dè tò ek monádōn synkeímenon plē̃thos (Buch VII, Def. 2) ‘Zahl ist die aus Einheiten zusammengesetzte Menge’ [9]

[7] Wir folgen hier im wesentlichen der Darstellung Gerickes (1973).

[8] Mit Zahlen sind zu dieser Zeit ausschließlich natürliche Zahlen gemeint.

[9] Eine Zahl kann daher bei Euklid auch einen *Teil* (*méros*) haben: Z. B. die Zahl 6 besteht aus dem Teil 2 und dem Teil 3 und ist eine *zusammengesetzte* Zahl (*sýnthetos arithmós*) (S. Heath 1956: II, 280, 286).

Der Aspekt der „Zusammensetzung" wird durch das Partizip *synkeímenon* (von *synkeĩsthai* 'zusammenliegen') ausgedrückt.

Diese Definition ist weit verbreitet und findet sich in derselben oder in leicht modifizierter Form bei zahlreichen Autoren (Heath 1956: II, 280). Nikomachos etwa definiert eine Zahl wie folgt:

(7.2) arithmós esti plē̃thos horisménon ḕ monádōn sýstēma ḕ posótētos chýma ek monádōn synkeímenon 'Zahl ist begrenzte Menge oder Zusammenfassung von Einheiten oder eine Reihe von Größen, die aus Einheiten besteht' (zitiert nach Tropfke 1980: 123).

Im Lateinischen findet sich z. B. bei Cassiodor eine recht wörtliche Übertragung: *numerus est ex monadibus multitudo composita* (zitiert nach Gericke 1973: 153). Dabei ist *multitudo* eine genaue Übertragung von *plē̃thos*.

Die konzeptuelle Metapher, die wir für unsere Zwecke hieraus erschließen können, lautet also etwa

- Eine Zahl ist eine Zusammenfassung von Einheiten.[10]

Auch für andere Sprachen lassen sich dieselben oder zumindest verwandte Metaphern nachweisen. Tropfke (1980: 121) nennt Wörter für 'Zahl' im Ägyptischen und Indischen, die etwa 'Menge, Haufen' bedeuten.[11]

Die Metapher ist zu den Fundierungsmetaphern zu zählen, sofern sie sich auf natürliche Zahlen bezieht. Insbesondere reiht sie sich ein in eine etwas allgemeinere Metapher, die Lakoff-Nuñez (2000: 55) als Arithmetic is Object Collection bezeichnen.

Die Addition ergibt sich aus dieser Auffassung in ganz natürlicher Weise und wurde aus wahrscheinlich ebendiesem Grunde von Euklid auch gar nicht definiert (Tropfke 1980: 187, 190-194). Ausdrücke mit der Bedeutung 'zusammensetzen, zusammenfassen, vereinigen' sind für 'addieren' in zahlreichen Sprachen weit verbreitet (Tropfke 1980: 188, 191-194). Um nur ein (spätes) Beispiel zu geben: Seit dem 15. Jahrhundert wird z. B. lat. *aggregatio* 'Ansammlung, Anhäufung' in der Bedeutung 'Summe' verwendet (s. z. B. Schirmer 1912: 3), und auch heute noch werden Zahlen *zusammen*gezählt.

[10] Auch hier werden unter „Zahl" im wesentlichen natürliche Zahlen verstanden. Brüche wurden von den Griechen als Proportionen angesehen.

[11] Die Unbekannte, also die Lösung einer Gleichung, wird im Ägyptischen ebenfalls als Menge bzw. Haufen konzeptualisiert (Tropfke 1980: 374).

Die griechische Vorstellung von Zahlen als Mengen hat sich durchgehend in der Mathematik gehalten und wurde zum Ende des 19. Jahrhunderts bzw. zu Beginn des 20. Jahrhunderts formalisiert: In axiomatischen Systemen werden Zahlen als Mengen definiert, z. B. ist die Zahl 1 demnach die Menge $\{\emptyset\}$, also diejenige Menge, die genau ein Element, nämlich die leere Menge $\emptyset$, enthält.

Das Konzept „Menge" kam in der griechischen Mathematik also durchaus vor, doch bildeten Mengen nicht den eigentlichen Untersuchungsgegenstand, d. h. es wurden z. B. keine Relationen zwischen Mengen untersucht und keine Verknüpfungen von Mengen betrachtet. Lediglich in der griechischen Logik finden sich dafür Ansätze. Hier finden Begriffe wie „Gattung" (*génos*) und „Art" (*eĩdos*) eine moderne Entsprechung in den Begriffen „Obermenge" und „Untermenge" (Gericke 1973: 154-156).

Bernhard Bolzano (1851) entwirft ein terminologisches System mit verschiedenen und nicht austauschbaren Ausdrücken wie *Menge*, *Vielheit*, *Inbegriff* bzw. dem *Ganzen*.[12] Georg Cantor spricht zunächst von *Inbegriffen* und *Mannigfaltigkeiten* und schließlich von *Mengen* (Scholz 1980: 373). Er verwendet zusätzlich den Ausdruck *Vielheit* und reserviert, nachdem festgestellt wurde, daß Mengen nicht beliebig gebildet werden können, den Ausdruck *inkonsistente Vielheiten* für solche Zusammenfassungen von Objekten, die nicht als ein Ganzes aufgefaßt werden können, ohne daß diese Annahme zu einem logischen Widerspruch führt (Brief von 1899, in Cantor 1962: 443f.).

Die fortschreitende Verbreitung der mengentheoretischen Redeweise zum Ende des 19. Jahrhunderts zeigt sich z. B. sehr konzentriert in folgender „Definition" Dedekinds:[13]

(7.3) Es kommt sehr häufig vor, daß verschiedene Dinge a, b, c, ... aus irgendeiner Veranlassung unter einem gemeinsamen Gesichtspunkt aufgefaßt, im Geiste zusammengestellt werden, und man sagt dann, daß sie ein *System* S bilden; man nennt die Dinge a, b, c, ... *Elemente* des Systems S, sie sind *enthalten* in S; umgekehrt *besteht* S aus diesen Elementen. Ein solches System S (oder ein Inbegriff, eine Mannigfaltigkeit, eine Gesamtheit) ist als Gegenstand unseres Denkens ebenfalls ein Ding; es ist vollständig bestimmt, wenn von jedem Ding bestimmt ist, ob es Element von S ist oder nicht (Dedekind 1888 [1932: 344f.]).

[12] S. Spalt (1990: 192-194), van Rootselaar (1990) und Meschkowski (1978: 48-52).

[13] Dedekind hat die folgende Passage möglicherweise nicht als Definition (*Erklärung*) betrachtet, da er sie im Gegensatz zu seiner Vorgehensweise im übrigen Text nicht explizit als solche markiert hat.

Für „Menge“ sagt Dedekind neben den in Klammern angegebenen Synonymen bevorzugt *System*. Mengen (bis auf die leere Menge) haben *Elemente*, und die Relationen zwischen Mengen und deren Elementen lauten *enthalten* bzw. *bestehen aus*.

Wir werden in den Fallstudien noch häufiger sehen, in welchem Ausmaß diese Redeweise Einzug in weiten Teile der Mathematik gefunden hat.

7.2.2 Mengentheoretische Konzepte in der Algebra vor dem 19. Jahrhundert

Betrachten wir nun mengentheoretische Konzepte in der Algebra. Im Hinblick auf die obigen historischen Anmerkungen zur Entwicklung der Algebra ist es nicht verwunderlich, daß die Algebra des 18. Jahrhunderts von Ausdrucksweisen geprägt ist, die mit dem Konzept „Kalkulation“ in Verbindung stehen.

Wenn z. B. Euler (1770) sich in seinem einführenden Text zur Algebra auf Mengen bezieht, dann tut er dies z. B. explizit durch Aufzählung (bei unendlichen Mengen mit „...“ versehen) der in diesen Mengen enthaltenen Objekte, oder er bezieht sich explizit auf sehr bestimmte Mengen wie die geraden oder die ganzen Zahlen:

(7.4) **Die geraden Zahlen** können nun alle in dieser allgemeinen Formel $2a$ begriffen werden (Euler 1770 [1911: 26])

(7.5) Zieht man nun **alle gantzen Zahlen** in Betrachtung ... (Euler 1770 [1911: 19])

Grundlegend ist hier ein sprachlicher Vorgang, nach dem die Bezeichnung für einzelne Objekte wie *ganze Zahl* durch Pluralbildung und zumeist unter gleichzeitiger Verwendung des Allquantoren oder eines bestimmten Artikels auch zur Bezeichnung der Menge aller Objekte der betrachteten Art verwendet werden kann.

Nur äußerst selten finden wir explizite und allgemeine Ausdrücke für Mengen, die jedoch auch anders verstanden werden können:

(7.6) die Logarithmen von Negativ-Zahlen sind unmöglich und gehören zu dem **Geschlecht** der imaginären oder eingebildeten Zahlen (Euler 1770 [1911: 82, § 230])

(7.7) Wir erhalten also daher eine unendliche **Menge** neuer Arten von Irrational- oder Surdischen Zahlen (Euler 1770 [1911: 71, § 194])

Der Ausdruck *Geschlecht* kann hier, ähnlich wie das eben erwähnte gr. *génos*, auch als Ausdruck der Kategorisierung interpretiert werden, so daß die Vorstellung der Zusammenfassung von Objekten möglicherweise nur sekundär ist, und das zweite Beispiel zeigt vermutlich den Ausdruck *Menge* in seinem ursprünglicheren Sinn, der von der Bedeutung 'viel' ausgeht.

Lagrange, einer der Pioniere der zuvor beschriebenen Entwicklung, bezieht sich in seiner Forschungsarbeit selten explizit auf Mengen bzw. Gesamtheiten im allgemeinen. Eines der wenigen Beispiele ist folgendes:

(7.8) qu'en partageant **la totalité** des μ racines $x', x'', x''', ..., x^{(\mu)}$ en ϖ systèmes de ν racines chacun (Lagrange 1770/71 [1973: 349]).

Auch in anderen mathematischen, insbesondere algebraischen Fachtexten aus dem 18. Jahrhundert lassen sich explizite Ausdrücke für „Menge“, „Gesamtheit“ o. ä. kaum finden. Das 18. Jahrhundert läßt sich also in Hinsicht auf mengentheoretische Redeweise folgendermaßen charakterisieren:

1. Bei spezifischen Mengen: Hierfür sind im 18. Jahrhundert und zuvor explizite Ausdrücke wie *Irrationalzahlen* verbreitet. Wenn auf solche Mengen Bezug genommen wird, dann geschieht dies durch einen entsprechenden Terminus, durch Aufzählung oder durch eine Kollektivbildung im oben beschriebenen Sinne. Diese Möglichkeiten stehen auch heute noch zur Verfügung.

2. Bei Mengen im allgemeinen: Explizite Ausdrücke für „Menge“ oder „Gesamtheit“ lassen sich nur sporadisch nachweisen. Entsprechendes gilt für die „Elemente“ einer Menge und Relationen zwischen Mengen und deren Elementen. Insbesondere sind Mengen noch keine mathematischen Objekte an sich.

3. Bei mathematischen Strukturen: Es existieren noch keinerlei Bezeichnungen für spezielle Strukturen wie „Gruppe“ oder „Körper“ und allenfalls vage und sporadische Andeutungen des Begriffs „Struktur“ im allgemeinen. Mathematische Strukturen zählen noch nicht zu den mathematischen Objekten.

In den Fallstudien der folgenden Kapitel werden diese sprachlichen Aspekte genau untersucht.

7.3 Mathematische Objekte

In diesem Abschnitt soll schließlich noch kurz auf einen Aspekt der weiteren mathematikgeschichtlichen Entwicklung eingegangen werden, der auch sprachliche Konsequenzen hat. Es geht uns hier nicht um die ontologische Frage, was mathematische Objekte „tatsächlich“ *sind*, doch führt uns diese Frage auf eine philosophische Position, den Platonismus, die ihre Spuren in der Sprache der Mathematik hinterlassen hat. Dem Platonismus zufolge haben mathematische Objekte eine reale, objektive Existenz. Dabei spielt es keine Rolle, ob diese nicht-materiellen und unveränderlichen Objekte schon bekannt sind oder nicht, ebenso können Objekte in der Mathematik auch nicht *erfunden*, sondern nur *entdeckt* werden (Davis - Hersh 1994: 334).[14]

Auch wenn diese Position, sofern überhaupt Stellung zu derartigen philosophischen Fragen bezogen wird, keinen Konsens innerhalb der Mathematik darstellt, ist damit eine Redeweise verbunden, die in allen Bereichen der Mathematik verbreitet ist:

> even those mathematicians who do not profess platonism, or in some cases who even deny the philosophy, do manage to act and talk like platonists in their daily activities. A mathematician who asks a colleague, ‘Do you think there exists a function with such and such properties?’ is talking like a platonist, even though he may not be one. And one who spends hours and days searching for a counter-example to some proposition is acting like a platonist, in that he is assuming that such an entity may exist (Wilder 1981: 28).

In der Alltagssprache der Mathematik können mathematische Objekte schlicht als *Dinge* bezeichnet werden.[15] Dies ist kein streng definierter Terminus, sondern lediglich eine Bezeichnung für ein Objekt, das mathematisch untersucht und mit dem z. B. gerechnet werden kann.

Historisch wurden zunächst unbekannte Größen als *Ding* bezeichnet.[16] Diese Verwendung geht auf das arabische *schai’* ‘Ding, Sache’ zurück, welches im mittelalterlichen Lateinisch mit *res* und später mit *causa* wiedergegeben wurde (Tropfke

[14]Für einen Überblick über verschiedene Positionen in der Philosophie der Mathematik s. etwa Heintz (2000: 33-92).

[15]Dieser Ausdruck (für lat. *ens*) wurde durch Wolff in der Philosophie etabliert (Menzel 1996: 168).

[16]Dafür gab es auch andere Bezeichnungen mit Bedeutungen wie ‘Haufen’ oder ‘Wurzel’ (Tropfke 1980: 374).

1933: 136). Der italienische Ausdruck *cosa* fand in ganz Europa weite Verbreitung und wurde auch zur Bezeichnung der ganzen Disziplin (also der Algebra) verwendet (Tropfke 1933: 139). So erscheint das Wort im Deutschen im 15. Jahrhundert als *Coß* (Schirmer 1912, s. v. Coß), im Englischen etwa 100 Jahre später als *coss* (OED).

Im Deutschen wird der Ausdruck *cosa* von manchen Autoren zunächst unverändert übernommen, aber gleichzeitig mit *Ding* eingedeutscht:

(7.9) Wen der numerus gleich ist cosa, das ist, wen dy zal gleich dem ding ist, so sullen wir dy zal tailen im daz ding, id est in den cosa, vnd was dar aus kumbt, als vil ist das ding wert (Mitte 15. Jhdt., zitiert nach Schirmer 1912, s. v. Coß).

Wir können festhalten, daß der Ausdruck *Ding* schon früh weit verbreitet ist, und auch im Englischen und Französischen ähnliche Redeweisen existieren. Dies wird auch in dem zuvor gegebenen Dedekind-Zitat deutlich: „Ein solches System ... ist als Gegenstand unseres Denkens ebenfalls ein Ding“ (s. Kap. 7.2.1.).

7.4 Zusammenfassung und Übersicht

Die vorangehende Darstellung ist natürlich stark vereinfacht. Für unsere Zwecke können wir aber die wesentlichen Entwicklungen der Mathematik im 19. Jahrhundert so festhalten:

- In der Algebra findet ein allmählicher Übergang von einem „rechnerischen“ Ansatz zu einem „strukturellen“ Ansatz statt; es wird festgestellt, daß die Lösbarkeit von Gleichungen von der Beschaffenheit der „Gruppe der Gleichung“ bzw. von dem zugrundeliegenden Zahlbereich abhängt. Diese Begriffe beinhalten einen Rückgriff auf Mengen und auf Verknüpfungen von Objekten; sie lösen sich von ihrem ursprünglichen Kontext und werden eigene Untersuchungsgegenstände. Zahlreiche neue mathematische Begriffe werden auf diese Weise eingeführt.

- Weitestgehend unabhängig von dieser Entwicklung werden Mengen zu mathematischen Objekten und zum Untersuchungsobjekt an sich gemacht, man untersucht ihre Beziehungen zueinander und rechnet mit ihnen.

- Die Wichtigkeit verschiedener Rechengesetze für mathematische Operationen wird herausgearbeitet und damit ein Teil der Grundlagen für axiomatische Definitionen geschaffen.

- Die Extension des Begriffs „mathematisches Objekt" wird erweitert: Mengen gehören dazu (dies ist allerdings ein besonders umstrittener Begriff), aber auch neue Zahlbereiche (z. B. Quaternionen) und Bereiche von Objekten, die keine Zahlen im klassischen Sinne sind, aber – zumindest teilweise – denselben Rechengesetzen genügen.
- Die Mathematik autonomisiert sich von anderen Wissenschaften, insbesondere von der Physik. Es entwickelt sich eine neue ontologische Sichtweise in bezug auf mathematische Objekte, die der Rechtfertigung durch außermathematische Gebilde nicht mehr bedarf.[17]

7.5 Erläuterung einiger mathematischer Grundbegriffe

Die in den anschließenden Fallstudien behandelten mathematischen Begriffe sollen in diesem Abschnitt informell erläutert werden, um die Lesbarkeit der folgenden Kapitel zu erleichtern. Da es sich um eine Einführung in einige Grundbegriffe für Nicht-Mathematiker handelt, soll der technische Anspruch hier im Hintergrund bleiben.

7.5.1 Zahlbereiche

Die *natürlichen Zahlen* sind die Zahlen $1, 2, 3, ...$, die *ganzen Zahlen* sind die Zahlen $..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...$ Als *rationale Zahlen* bezeichnet man die Bruchzahlen, also die Zahlen der Form $\frac{a}{b}$, wobei a und b jeweils ganze Zahlen sind ($b \neq 0$). Die *reellen Zahlen* enthalten zusätzlich Zahlen, die sich nicht als Bruchzahlen darstellen lassen, z. B. sog. *algebraische* Zahlen wie $\sqrt{2}$ und *transzendente* Zahlen wie die Kreiszahl π. Die *komplexen* oder *imaginären Zahlen* sind die Zahlen der Form $a + bi$, wobei a und b reelle Zahlen sind und i die „komplexe Einheit" $i = \sqrt{-1}$, die keine reelle Zahl ist. Komplexe Zahlen lassen sich z. B. als Punkte in der Ebene auffassen; die komplexe Zahl $a + bi$ entspricht dem Punkt (a, b).

7.5.2 Permutationen und Rechengesetze

Permutationen bildeten das historisch erste Beispiel von Gruppen, d. h. sie wurden als erstes unter der Bezeichnung *Gruppe* (frz. *groupe*) untersucht. Eine Permutation

[17]S. Mehrtens (1990), Gray (1992).

vertauscht die Elemente einer Menge von Dingen miteinander, ohne daß eines dieser Dinge „verloren“ ginge. Seit Cauchys Arbeiten (s. Kap. 9.6) schreibt man Permutationen oft in zwei Zeilen, in denen oben jeweils die Ausgangsanordnung und unten die vertauschte Anordnung dieser Dinge steht.

Ist z. B. $M = \{a, b, c, d, e\}$ eine Menge von (verschiedenen) Dingen, dann ist

$$\pi = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ b & e & d & c & a \end{pmatrix}$$

eine Permutation, durch die, wie man aus der ersten Spalte erkennen kann, a zu b wird, b zu e usw., d. h. es wird eine Vertauschung nach folgender Vorschrift vorgenommen:

$$\begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ b & e & d & c & a \end{array}$$

Wie Zahlen, die sich miteinander addieren oder multiplizieren lassen, kann man auch Permutationen miteinander „verknüpfen“. Bei Permutationen bedeutet dies, daß zwei oder mehrere Vertauschungen nacheinander vorgenommen werden. Dazu ein einfaches Beispiel, an dem wir gleichzeitig einige Rechengesetze veranschaulichen können. Sei $M = \{1, 2, 3\}$, $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ und $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Dann ist $\pi \circ \rho$ („$\circ$“ bedeutet hier die Nacheinanderausführung, d. h. daß die beiden Permutationen nacheinander ausgeführt werden) wieder eine Permutation, nämlich die Permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Diese berechnet sich so: Das erste Objekt 1 wird durch die erste Permutation π zu 2, und die 2 wird durch ρ nicht verändert, so daß im Ergebnis die 1 auf die 2 abgebildet wird. Die anderen Spalten lassen sich analog berechnen.

Durch diese Verknüpfung zweier Permutationen erhält man also wiederum eine Permutation. Man sagt, die Nacheinanderausführung von Permutationen ist *abgeschlossen*. Daß Verknüpfungen keineswegs immer abgeschlossen sein müssen, zeigt ein einfaches Beispiel mit natürlichen Zahlen. Betrachtet man *nur* die ungeraden Zahlen und wählt als Verknüpfung die „normale“ Addition, dann ist die Verknüpfung nicht abgeschlossen, da die Addition zweier ungerader Zahlen eine gerade Zahl ergibt (z. B. $3 + 7 = 10$) und man somit den zuvor festgelegten Bereich der ungeraden Zahlen verläßt.

Wenn man die obigen Vertauschungen in umgekehrter Reihenfolge durchführt (also zuerst ρ, dann π), erhält man ein anderes Ergebnis: $\rho \circ \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \neq \pi \circ \rho$. Man sagt, die Verknüpfung ist nicht *kommutativ*. Beispiele für kommutative Verknüpfungen sind die Addition und die Multiplikation ganzer und rationaler Zahlen: Es sind etwa $3 + 6 = 6 + 3$ und $2 \cdot 5 = 5 \cdot 2$.

Die identische Permutation $\epsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ist hier das *neutrale Element* der Nacheinanderausführung, d. h. es gilt $\epsilon \circ \pi = \pi \circ \epsilon = \pi$ für alle Permutationen π. Bei der Addition bzw. Multiplikation ganzer Zahlen etwa spielen die Zahlen 0 und 1 analoge Rollen: $0 + n = n$ und $1 \cdot n = n$ gilt für jede ganze Zahl n.

Jede Permutation läßt sich wieder rückgängig machen. Wir wollen dies am Beispiel der Permutation $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ veranschaulichen. In diesem Fall ist die gesuchte Permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Daß sie wirklich die Permutation τ rückgängig macht, zeigt die Gleichung

$$\tau \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \epsilon.$$

Man sagt, τ hat ein *inverses Element* und bezeichnet dieses mit τ^{-1}. Allgemein kann man formulieren, daß die Verknüfung eines Elementes mit seinem inversen Element das neutrale Element ergibt. Bei den ganzen Zahlen mit der Addition als Verknüpfung hat jede Zahl ein inverses Element: Die Operation „+5“ kann durch Addition der Zahl -5 rückgängig gemacht werden, d. h. es ergibt sich die Zahl 0. Die Multiplikation kann entsprechend durch Teilen rückgängig gemacht werden.

Schließlich kommt es bei der Nacheinanderausführung von Permutationen nicht auf die Beklammerung an, wenn man mehr als zwei Permutationen ausführt: $(\pi \circ \rho) \circ \sigma = \pi \circ (\rho \circ \sigma)$. Diese Eigenschaft bezeichnet man als *Assoziativität*. Die Multiplikation von ganzen Zahlen ist ebenfalls assoziativ, z. B. gilt $2 \cdot (4 \cdot 3) = (2 \cdot 4) \cdot 3 = 24$.

7.5.3 Gruppen

Eine Menge mit einer Verknüpfung, die die eben genannten Eigenschaften bis auf die Kommutativität für alle ihre Elemente erfüllt, bezeichnet man als *Gruppe*. Permutationen bilden jeweils Gruppen, die ganzen Zahlen mit der Addition bilden sogar eine kommutative Gruppe. Mit der Multiplikation bilden die ganzen

Zahlen jedoch keine Gruppe, da es im allgemeinen kein inverses Element gibt. Die Gleichung $3 \cdot x = 5$ etwa hat für x keine Lösung in den ganzen Zahlen, denn die „Lösung“ $\frac{5}{3}$ ist keine ganze, sondern eine rationale Zahl, und diese gehört nicht zum betrachteten Bereich der ganzen Zahlen. Hingegen bilden die rationalen, reellen und komplexen Zahlen sowohl mit der Addition als auch mit der Multiplikation kommutative Gruppen.

Die Eigenschaften, die für die rationalen Zahlen gelten, lassen sich also im allgemeinen nicht auf andere Mengen übertragen. Gruppen kommen in den verschiedensten Bereichen der Mathematik vor, z. B. in der Geometrie. Die Menge aller Drehungen um einen gegebenen Punkt bildet eine Gruppe, wenn man als Verknüpfung die Nacheinanderausführung von Drehungen bestimmt. Beispielsweise läßt sich eine Drehung um 60° durch eine Drehung um 300° rückgängig machen (es gibt also zu jeder Drehung eine inverse Drehung), und das neutrale Element dieser Gruppe ist die Drehung um 0° (also eine Drehung, die alle Punkte der Ebene unverändert läßt).

Wie diese Beispiele bereits zeigen, können Gruppen endlich (Permutationen) oder unendlich sein (ganze Zahlen). Endliche Gruppen werden häufig in Form eines quadratischen Schemas dargestellt. Eine endliche Gruppe $G = \{e, a, b, c\}$ mit vier Elementen, die sog. *Kleinsche Vierergruppe*, ist in Tab. 7.1 wiedergegeben.

Tabelle 7.1: Gruppe mit vier Elementen

$\oplus$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Aus dieser Tabelle lassen sich die Rechenregeln bezüglich der Verknüpfung $\oplus$ ablesen. So ist z. B. $a \oplus b = c$ und $c \oplus c = c$; e ist das neutrale Element und jedes Element ist zu sich selbst invers. Die Gruppe ist sogar kommutativ.

Man kann sich nun fragen, ob eine gegebene Gruppe Teilmengen enthält, die selbst schon Gruppen, sog. *Untergruppen*, sind. Dazu genügt es, die Abgeschlossenheit zu überprüfen. Die Teilmenge $M = \{e, a, b\}$ von G ist keine Untergruppe, da z. B. $a \oplus b = c$ ist, c aber kein Element von M ist. Die Teilmenge $H = \{e, a\}$ ist hingegen eine Untergruppe, da durch die Verknüpfung von e und a niemals b

oder c entstehen können, sondern nur e oder a. Jede Gruppe enthält mindestens zwei triviale Untergruppen, die man als „Randfälle“ auffassen kann: Es handelt sich um die Gruppe selbst und um diejenige Gruppe, die nur das neutrale Element enthält. Weitere Untergruppen können, müssen aber nicht existieren.

Die Bestimmung der Untergruppen einer gegebenen Gruppe liefert wichtige Informationen über den Aufbau der gesamten Gruppe. Besonders wichtig in diesem Zusammenhang sind die sog. *Normalteiler*. Da Gruppen im allgemeinen nicht kommutativ sind (anders, als man es von der Addition und Multiplikation „gewöhnlicher“ Zahlen gewohnt ist), ist es nicht egal, ob die Verknüpfung von rechts oder von links ausgeführt wird. Wir haben dies bereits bei den Permutationen festgestellt. Betrachten wir dazu eine Gruppe G mit 6 Elementen (das neutrale Element bezeichnen wir mit 1), die in Tab. 7.2 aufgeführt ist.

Tabelle 7.2: Gruppe mit sechs Elementen

·	1	a	b	c	d	e
1	1	a	b	c	d	e
a	a	b	1	e	c	d
b	b	1	a	d	e	c
c	c	d	e	1	a	b
d	d	e	c	c	1	a
e	e	c	d	c	b	1

Hier ist z. B. $H_1 = \{1, c\}$ eine Untergruppe. Wenn man alle Elemente von H_1 mit einem Element aus G verknüpft, das nicht in H_1 liegt, also z. B. mit a, dann stellt man fest, daß sich bei Verknüpfung von links bzw. rechts unterschiedliche Resultate ergeben, denn es ist $H_1 \cdot a = \{1 \cdot a, c \cdot a\} = \{a, d\}$, aber $a \cdot H_1 = \{a \cdot 1, a \cdot c\} = \{a, e\}$. Ein Normalteiler ist nun eine solche Untergruppe, bei der diese Reihenfolge keine Rolle spielt. In diesem Beispiel ist die dreielementige Untergruppe $H = \{1, a, b\}$ ein Normalteiler, denn z. B. ist $H \cdot c = \{1 \cdot c, a \cdot c, b \cdot c\} = \{c, e, d\}$ und $c \cdot H = \{c \cdot 1, c \cdot a, c \cdot bc\} = \{c, d, e\}$, so daß die entstehenden Mengen (nicht die einzelnen Produkte) identisch sind.

Normalteiler sind deswegen so wichtig für die Gruppentheorie, weil sie bei der Zerlegung von Gruppen in „einfache“ Gruppen eine entscheidende Rolle spielen. So wie nämlich jede ganze Zahl in ein Produkt von Primzahlen zerlegt werden kann, läßt sich jede endliche Gruppe in ein „Produkt“ einfacher Gruppen zerlegen.

Die dabei vorkommenden einfachen Gruppen werden mittels des Normalteilbegriffs definiert: Eine einfache Gruppe ist eine Gruppe, die selber keine Normalteiler enthält (außer den trivialen Fällen, der Untergruppe selbst und der Gruppe, die nur das neutrale Element enthält), genau so, wie Primzahlen nur von sich selbst und der Zahl 1 geteilt werden.

Zwei Gruppen können „im wesentlichen gleich“ sein, auch wenn die Form ihrer Elemente unterschiedlich ist. Bei dem Vergleich von Gruppen kommt es nicht auf die Beschaffenheit oder „Natur“ der Elemente an, sondern auf die Übertragbarkeit der Rechenregeln. Stehen die Elemente zweier Gruppen in einer Eins-zu-Eins-Beziehung und lassen sich die Rechenregeln übertragen, nennt man die Gruppen *isomorph* und faßt sie als „im wesentlichen gleich“ auf. Es können z. B. eine Gruppe von geometrischen Abbildungen und eine Gruppe von Zahlen, also von ganz unterschiedlichen Dingen, isomorph sein.

7.5.4 Weitere algebraische Strukturen

Auf einer Menge kann man mehrere Verknüpfungen parallel zueinander definieren, wie sich schon bei den ganzen Zahlen mit der Addition und der Multiplikation zeigt. Lassen sich diese Verknüpfungen zueinander in (eine noch zu präzisierende) Beziehung setzen, erhält man weitere algebraische Strukturen. Ein *Ring* ist eine solche Struktur. Ein typisches Beispiel hierfür sind die ganzen Zahlen mit der Addition und Multiplikation. Ein Ring erfüllt drei Anforderungen. Bezüglich der ersten Verknüpfung (der Addition) muß es sich um eine Gruppe handeln, und bezüglich der zweiten Verknüpfung (der Multiplikation) muß es sich „fast“ um eine Gruppe handeln, nur die Existenz inverser Elemente wird nicht vorausgesetzt. Die dritte Forderung besteht darin, daß die Verknüpfungen *distributiv* sind, d. h. daß $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ und $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$ für alle Elemente a, b, c der Menge gilt. Für ganze Zahlen gilt dies, z. B. ist $2 \cdot (3 + 4) = (2 \cdot 3) + (2 \cdot 4) = 14$ und $(2 + 3) \cdot 4 = (2 \cdot 4) + (3 \cdot 4) = 14$. Beide Verknüpfungen auf der Menge werden durch die Distributivität zueinander in Beziehung gesetzt.

Bei einem *Körper* wird zudem verlangt, daß bei der Multiplikation inverse Elemente vorhanden sind; das ist bei den rationalen, reellen sowie den komplexen Zahlen der Fall.

Kapitel 8

Beispiel „Gruppe“

8.1 Einleitung

In den folgenden Kapiteln werden einige exemplarische Fallstudien unternommen. Hinsichtlich der Herkunft der diskutierten Termini berücksichtigen wir dabei die gemeinsprachliche Etymologie und Semantik, was für uns insofern von Belang ist, als dadurch Rückschlüsse auf das Benennungsmotiv des fachsprachlichen Terminus möglich sind. Zentral für die Herkunft eines fachsprachlichen Ausdrucks ist die fachsprachliche Etymologie, die wir jeweils gesondert diskutieren. Wenn synonyme Ausdrücke eine linguistische Rolle bei der Entwicklung eines Terminus spielen oder sie semantische Zusammenhänge besser verständlich machen, werden wir diese in die Untersuchung einbeziehen.

Für die Wahl des Beispiels „Gruppe“ sprechen verschiedene Gründe. Zunächst ist diese mathematische Struktur die erste, die aus historischer Perspektive in der Mathematik herausgearbeitet wurde. Einige linguistische Aspekte, die in Zusammenhang mit dem Begriff der Gruppe auftreten, spielen auch bei später entstandenen Begriffen eine Rolle. Gruppen sind zudem in der Mathematik außerordentlich weit verbreitet und finden sich in den verschiedensten mathematischen Teildisziplinen. Aus diesen Gründen sind Gruppen auch aus historischer Sicht ausführlich monographisch untersucht worden. Dies bringt erhebliche praktische Erleichtungen mit sich, z. B. bei der klar herausgearbeiteten Beleglage sowie der Interpretation schwieriger Textstellen. Des weiteren stellen wir eine Untersuchung dieses Begriffs auch deswegen voran, weil es zu weiterführenden Betrachtungen zur sprachlichen Metaphorik und semantischen Entwicklung mit dem Begriff „Gruppe“ zusammenhängender Ausdrücke Anlaß gibt.

In diesem Kapitel interessiert uns zunächst und besonders die Herkunft der

Ausdrücke für den Begriff der Gruppe und deren Semantik. Auf sprachliche Metaphorik und andere semantische Aspekte gehen wir im Anschluß an dieses Kapitel ein.

8.2 Zur Wortgeschichte von *Gruppe* und seinen Verwandten

8.2.1 Erstes Auftreten des Wortes in europäischen Sprachen

Das Wort stammt aus dem Italienischen *groppo* (mit der Variante *gruppo*), dessen Vergleichsmöglichkeiten nicht geklärt sind (KLUGE, s. v. Gruppe).[1] Dort erscheint es am Ende des 15. bzw. zu Beginn des 16. Jahrhunderts, und zwar zuerst in der Bedeutung ‘nœud, assemblage’ (DHLF). Damit entspricht das Wort semantisch lat. *nodus*.

It. *groppo* wird aber schnell in der bildenden Kunst verwendet (TLF), wo es (bei Bildern oder Skulpturen) eine Gruppe von Personen oder Objekten bezeichnet, die dem Betrachter als zusammengehörig erscheinen. Diese Bedeutung ist auch die Grundlage für die Entlehnung des Wortes in weitere europäische Sprachen. Dies bedeutet insbesondere, daß das Wort im Französischen, Englischen und Deutschen zuerst in fachsprachlicher Bedeutung auftritt (jeweils im Kontext einer Übersetzung eines Fachtextes aus der Kunst).

Im Französischen erscheint *groupe* zuerst 1668 (TLF), zunächst in der orthographischen Form *grouppe*. Der wahrscheinliche Erstbeleg findet sich in einer französischen Übersetzung des 1667 erschienenen, in lateinischer Sprache verfaßten und in Versform (Hexametern) geschriebenen *De arte graphica* von Charles du Fresnoy. Die erste französische (Prosa-)Übersetzung dieses Textes stammt von Roger de Piles und wurde 1668 unter dem Titel *L'art de peinture* veröffentlicht (de Piles 1668).[2]

---

[1] In vielen einschlägigen Wörterbüchern wird allerdings eine Entlehnung aus einer germanischen Sprache angenommen: **kruppa* ‘rundlicher Klumpen’. In diesem Fall bestünde z. B. eine Verwandtschaft zu dt. *Kropf*.

[2] Als vermeintlicher Erstbeleg wird im TLF nur das *Journal des savants* von 1668 (ohne Seitenangabe) angegeben. Die vermutlich gemeinte Stelle findet sich auf S. 141: „Que toutes les figures soient diuisées en deux ou trois grouppes ou bandes“. Es handelt sich bei dem Text um eine Besprechung von de Piles' *L'art de peinture*.

Da es sich beim französischen Erstbeleg um eine Übersetzung handelt, stellt sich die Frage, welcher lateinische Ausdruck mit *groupe* übersetzt wird. Die erste Belegstelle bei de Piles findet sich in der von ihm eingefügten Überschrift „Grouppe de Figures“ bzw. „Figurarum Globi seu Cumuli“. Die Ausdrücke *globus* ‘Kugel, Haufen’ und *cumulus* ‘Haufen’ sind hier als Synonyme zu verstehen, und im weiteren Verlauf des Textes zeigt sich, daß *grouppe* (bzw. auch das Verb *agroupper*) jeweils Übersetzungen sowohl von *globus* als auch von *cumulus* sind (de Piles 1668 [1973: 23, 24]). In weiteren Anmerkungen von de Piles zu du Fresnoys Text heißt es dazu noch: „Je ne sçaurois vous mieux comparer un Grouppe de Figures, qu’à un Concert de Voix lesquelles toutes ensemble se soûtenant par leurs differentes Parties, sont un Accord qui remplit & qui flatte agreablement l’oreille: mais si vous venez à les separer, & qu’elles se fassent entendre aussi haut l’une que l’autre, elles vous étourdiront tellement, que vous croirez avoir les oreilles déchirées“ (de Piles 1668 [1973: 155]). Trotz der Tatsache, daß es sich um eine Übersetzung eines Wortes mit der Bedeutung ‘Haufen’ handelt (die an einen losen Verbund denken lassen könnte)[3], wird hier die harmonische Zusammengehörigkeit der einzelnen Bestandteile einer Gruppe immer schon mitverstanden.

Zudem stellt de Piles seiner Übersetzung ein kurzes Glossar mit zentralen Fachausdrücken voran. Dort heißt es:

(8.1) GROUPPE. Est un amas de plusieurs corps assemblez en un peloton [Knäuel, H. B.]; & l’on dit Grouppe de Figures, Grouppe d’animaux, Grouppe de fruits &c. Il y en peut aussi avoir de corps de diverse nature, & l’on dit telle & telle choses font grouppe avec telle & telle autres. Les Italiens disent, Groppo, qu’ils ont pris du mot Latin, Globus (de Piles 1668 [1973: Explication des Termes]).

Das Zitat zeigt über das bisher Gesagte hinaus auf, daß die Gleichartigkeit der gruppierten Objekte keine notwendige Bedingung für die Verwendung von *groupe* ist. Dieser Aspekt wird im nächsten Abschnitt noch näher untersucht.

Abschließend einige kurze Bemerkungen zur Entlehnung ins Englische und Deutsche. Im Englischen läßt sich ab 1674 die Form *gruppo* nachweisen. Der Erstbeleg für *groupe* ist dem OED zufolge die erste englische Übersetzung von *De arte graphica*, verfaßt von John Dryden und 1695 veröffentlicht. Dryden übersetzt *cumulus* und *globus*, ähnlich wie de Piles, mit *grouppe*.

Im Deutschen erscheint *Gruppe* dem DWB zufolge zu Beginn des 18. Jahrhunderts. Diese Auskunft ist insofern nicht ganz vollständig, als es einen früheren Beleg

[3] S. dazu auch die Definition von *groupe* durch *amas* im folgenden Zitat 8.1.

gibt, der allerdings von der späteren Orthographie abweicht. Wiederum handelt es sich um eine Übersetzung von *De arte graphica* (Gericke 1699). Die nachträgliche Kapitelüberschrift „Figurarum Globi seu Cumuli" wird von Gericke mit „Von denen Hauffen (Grouppen) der Figuren" übersetzt. Dabei ist *Grouppen*, wie damals üblich, typographisch hervorgehoben, um es als Fremdwort zu kennzeichnen; ein erstes Indiz für die schon beginnende Eindeutschung ist die deutsche Pluralform. Im Text findet sich als Übersetzung von *globus* und *cumulus* das Wort *Hauffen* sowie das Verb *aggrouppiren* (Gericke 1699: 24).[4]

In allen genannten Sprachen entwickeln sich schnell weitere gemeinsprachliche und fachsprachliche Bedeutungen.

8.2.2 Semantische Struktur

Im folgenden konzentrieren wir uns auf das französische Wort *groupe*, da der algebraische Fachausdruck in dieser Sprache geprägt wurde und sich zudem die Beleglage in dieser Sprache gut nachvollziehen läßt. Die semantische Struktur ist jedoch im Englischen und Deutschen sehr ähnlich.

Bei der Rekonstruktion der semantischen Struktur wurden zunächst die einschlägigen Wörterbücher konsultiert, anschließend sprachliche Belege gesucht und diese schließlich analysiert.

Im TLF wird die erste Bedeutung von *groupe* mit 'réunion de plusieurs figures formant un ensemble (dans une œuvre d'art)' angegeben.[5] Die Frage, welcher Art diese Figuren sind, bleibt dabei offen. Um sich einer Antwort zu nähern, ist ein Blick auf zeitgenössische Nachschlagewerke hilfreich. So definiert das DAF von 1694 *groupe* durch 'assemblage de plusieurs corps les uns auprés des autres'. Dabei wird durch *auprés* nahegelegt, daß die Kontiguität, das konkrete Nebeneinandersein, ein entscheidendes Kriterium für die Zugehörigkeit zu einer Gruppe darstellt. Corneille 1694 (s. v. groupe) übernimmt diese Definition fast wörtlich. Er fügt dann das Beispiel *groupe de figures* hinzu und ergänzt dieses durch den Zusatz „lorsqu'elles [les figures] se joignent", d. h. auch hier wird durch *joindre* eine konkrete Verbindung der einzelnen Objekte angenommen. Die räumliche Kontiguität trägt dazu

[4] Auf die Übersetzung von Gericke bin ich durch Bätschmann (2000) aufmerksam geworden. Ich danke Herrn Prof. Dr. Oskar Bätschmann für die Zusendung der relevanten Textstellen aus Gerickes Übersetzung.

[5] Wir beziehen uns hier auf den historischen Teil der Wörterbucheinträge, in dem die verschiedenen Bedeutungen in chronologischer Reihenfolge angegeben werden. Im systematischen Teil heißt es: 'Ensemble d'êtres animés ou de choses rapprochés formant un tout'.

bei, daß z. B. beim Betrachten einer Gruppe diese sofort als Ganzes wahrgenommen werden kann. Dieser Aspekt wird von Wörterbüchern im 18. Jahrhundert, etwa im DAF von 1762, durch die ergänzende Definition 'que l'œil les [les objets, H. B.] embrasse à la fois' berücksichtigt.

Des weiteren belegen die zeitgenössischen sprachlichen Belege für *groupe*, daß die Objekte, die zu einer Gruppe gehören, typischerweise (aber nicht notwendigerweise) von derselben Art sind. So werden in historischen Wörterbüchern sehr häufig die Beispiele *groupe de fruits*, *groupe d'animaux* und *groupe de figures* gegeben. Dabei ist allerdings nicht ganz klar, wie weit diese Gleichartigkeit bzw. Ähnlichkeit der Objekte reicht, denn bereits de Piles weist ja in seinem Glossar (s. Bsp. 8.1) ausdrücklich darauf hin, daß die Figuren „de diverse nature" sein können.[6] Die Belege, die wir tatsächlich finden, lassen allerdings stets auf die Gleichartigkeit der Objekte schließen, die zur Gruppe gezählt werden. Dies ist auch nicht überraschend, denn für die Kunst ist kaum anzunehmen, daß Kontiguität alleine ein hinreichendes Kriterium für die Zugehörigkeit zu einer Gruppe ist. Wir kommen auf diesen Punkt zum Ende dieses Abschnitts zurück.

Seit 1726 wird *groupe* dem TLF zufolge in der Bedeutung 'ensemble d'êtres ou de choses ayant des caractères communs et dont on se sert pour les classer' verwendet. Die gemeinte Textstelle ist vermutlich[7] diese: „... ramasser toutes les choses qui ont rapport les unes les autres, & d'en faire des grouppes sous des classes différentes" (*Mémoires pour l'Histoire des Sciences et des Beaux Arts*, 1726, S. 953). Diese Verwendung steht nicht im obigen fachsprachlichen Kontext der Kunst und ist insofern sehr allgemein, als der Formulierung nach beliebige Dinge zu einer Gruppe zusammengefaßt werden können. Aus der Passage, die offenbar eine kurze Notiz ohne Angabe des Verfassers darstellt, geht nicht eindeutig hervor, um welche Art von Objekten es sich hier handelt; sicher scheint aber, daß es sich um spezielle Objekte aus dem Bereich der Musik handelt, was sich anhand einiger Verweise auf verschiedene damalige Autoren, insbesondere auf Louis-Bertrand Castel (1668-1757) erschließen läßt.

Von einer völlig allgemeinen Bedeutung kann in bezug auf die Textstelle bzw. zu diesem Zeitpunkt noch nicht die Rede sein. Sie ist zunächst fachlich und findet sich im Laufe des 18. Jahrhunderts auch in anderen Bereichen. Für uns ist entscheidend, daß die gemeinten Objekte in einer wie auch immer gearteten

[6] Roger de Piles' Erläuterung wird etwa von Furetière 1690 (s. v. *groupe*) fast wörtlich übernommen.

[7] Es wird nur auf die im folgenden genannte Zeitschrift mit Jahresangabe verwiesen.

Relation zueinander stehen müssen.

Die dritte im TLF genannte Bedeutung ist 'ensemble de personnes ou de choses réunies' und für das Jahr 1755 datiert. Sie geht von der fachsprachlichen Bedeutung aus der Kunst aus.[8] Eine Gemeinsamkeit der gruppierten Objekte besteht oft nur darin, daß sie sich am selben Ort befinden.[9] An diese Bedeutung schließt sich zum Ende des 18. Jahrhunderts die Bedeutung 'ensemble de choses formant un tout distinct' an, und zwar zunächst in dem Ausdruck *groupe d'îles*. Die räumliche Nachbarschaft ist bei diesen beiden Bedeutungen wieder zentral. Dieser Aspekt wird für dt. *Gruppe* im DWB besonders hervorgehoben: „von mannigfachen, meist ausgedehnteren, das gesichtsfeld kräftig gliedernden gegenständen, die durch ihre räumliche anordnung innerhalb der gesamtsicht ihrer umgebung als zusammengehörig erscheinen".

Schließlich wird im TLF noch die Bedeutung 'ensemble de personnes liées par un point commun (opinions, goûts, activités, etc.)' genannt (*groupe de conjurés*). Diese Bedeutung ist für uns insofern nicht interessant, als sie mit der im 19. Jahrhundert einsetzenden mathematischen Terminologisierung des Ausdrucks nicht in Zusammenhang steht.

In den hier konsultierten Nachschlagewerken wird davon häufig eine Bedeutung abgetrennt, bei der die Kontiguität eine geringere Rolle spielt. Darunter fällt etwa die zweite im historischen Teil des TLF genannte Bedeutung, nach der *groupe* eine Menge von Lebewesen oder Dingen bezeichnet, die aufgrund charakteristischer Merkmale zusammengefaßt werden und dadurch eine Einheit aufweisen. Räumliche Kontiguität muß hier nicht vorhanden sein, wohl aber eine Ähnlichkeit der Objekte. Die mathematische Bedeutung, auf die wir im folgenden eingehen werden, wird im TLF unter dieser Bedeutung eingeordnet.[10]

Nachdem wir nun die Bedeutungen, wie sie sich anhand von Wörterbucheinträgen und Textstellen darstellen, diskutiert haben, wollen wie die Semantik von *groupe* zusammenfassen. Die Ausgangsbedeutung aus dem Bereich der Kunst beinhaltet bereits, daß die als *groupe* bezeichneten Objekte als ein Ganzes aufgefaßt werden, da sie nicht nur räumlich benachbart sind, sondern auch mit einem Blick

[8] Das DWB weist für die im Deutschen ganz parallele Entwicklung explizit auf einen „Nachhall" aus der Kunst hin.

[9] Diese Gemeinsamkeit wurde von den Sprechern teilweise offenbar als nur schwach ausgeprägt empfunden, denn es entsteht die Konnotation 'confused aggregation' (OED) bzw. 'Gewimmel' (DWB).

[10] D. h. genauer, insoweit die Bedeutung dort erfaßt ist: Im TLF wird *groupe* nur im Sinne des heutigen Gruppenbegriffs aufgeführt.

erfaßt und als zusammengehörig empfunden werden. Darüber hinaus scheint uns die Ähnlichkeit der Objekte dabei typisch, wenn auch nicht zwingend notwendig zu sein. Analoges gilt für die dritte im TLF genannte Bedeutung. Die bloße räumliche Kontiguität ist in der Kunst sicher nicht ausreichend, um eine Menge von Objekten als *groupe* zu bezeichnen. Sie hat aber die Implikatur der Zusammengehörigkeit: Das, was sich am selben Ort befindet, gehört typischerweise zusammen. Auch die Ähnlichkeit, und dies ist ein wichtiger Punkt bei der Rekonstruktion des semantischen Wandels, wird in manchen Sprachen durch Kontiguität ausgedrückt. So kann man etwa im Deutschen sagen, etwas *grenzt an* Verrat. Bei diesem Verb ist die räumliche Kontiguität zentraler Bestandteil seiner Semantik. Die Kontiguität wird aber dafür verwendet, eine starke Ähnlichkeit bzw. Gleichartigkeit auszudrücken – was an Verrat grenzt, ist fast wie Verrat. Wir gehen aufgrund dieses Zusammenhanges zwischen Kontiguität und Ähnlichkeit davon aus, daß eine Gruppe typischerweise sowohl Kontiguität als auch Ähnlichkeit aufweist. D. h., die Identität des Ortes (räumliche Kontiguität) impliziert die Identität von Eigenschaften (Ähnlichkeit). In der Wissenschaft findet dann noch eine Abstraktion statt, durch die die Identität der Eigenschaft, also die gemeinsamen charakteristischen Merkmale, durch ein wissenschaftliches Kriterium ausgedrückt wird. Dies ist die letztgenannte der oben aufgeführten Bedeutungen, und genau diese ist es, die auch die Grundlage für die Übernahme des Ausdrucks in die Mathematik darstellt. Insbesondere ist sie nicht rein gemeinsprachlich und bereits fachlich geprägt, wie auch die oben zitierte Verwendung aus dem Bereich der Musik nahelegt.

Abschließend noch eine Anmerkung zur semantischen Charakterisierung in den verwendeten Wörterbüchern. Wenn wir die zentrale Bedeutung als ‘Menge von Personen oder Dingen ...’ kennzeichnen und dabei den einschlägigen Wörterbüchern wie dem OED und dem TLF folgen, dann ist diese Charakterisierung in dieser Form nur bedingt korrekt. Das Problem ist folgendes: Die semantischen Beschreibungen in den genannten und anderen Wörterbüchern stellen zumindest teilweise Abstrahierungen dar, die u. a. der Gliederung der Wörterbucheinträge dienen. Wenn also etwa die Bedeutung ‘Menge von zusammengehörigen Dingen’ erschlossen wird, dann geschieht dies auf der Basis vorliegender historischer Belegstellen. Diese wiederum zeigen, daß die Mengen, die als *Gruppe* bezeichnet werden, „Dinge“ enthalten, von denen man annehmen kann, daß die von den betroffenen Sprechern als eher konkret empfunden wurden, z. B. bei Gruppen von Bäumen oder, um ein frühes fachsprachliches Beispiel zu nehmen, bei Gruppen von Noten. Weitere fachliche Bedeutungen könnten dann als *Spezialisierung* der abstrakten Bedeutung aufgefaßt werden, d. h. als Bedeutungsverengung, obwohl es sich z. B. um eine *Übertragung* von einem konkreten in einen abstrakten Bereich wie der Mathematik handelt (vgl. Kap. 3.2.2). Die lexikographische Vorgehensweise ist legitim, es ist aber für die Rekonstruktion von Bedeutungswandel unerläßlich, Wörterbucheinträge, insbesondere die semantischen Angaben und Verbindungen, kritisch zu lesen und dabei besonders auf die konkret vorliegenden historischen Belege zu achten.

8.3 „Gruppe“ in der Mathematik

8.3.1 *groupe* bei Augustin-Louis Cauchy

In mathematischen Texten erscheint das Wort in algebraischem Kontext zu Beginn des 19. Jahrhunderts zuerst im Französischen, im Deutschen und Englischen erst einige Jahre später.[11] Der Werdegang läßt sich in mehrere Schritte aufteilen.

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) ist wahrscheinlich der Erste, der das Wort *groupe* in der Algebra verwendet (es ist in jedem Fall sicher, daß es keine wesentlich früheren Belege gibt). Bei den angesprochenen Objekten handelt es sich nicht um Gruppen im später definierten und heute noch üblichen Sinne (dafür gibt es in Cauchys frühen Arbeiten noch keinen Ausdruck).

(8.2) dans ce cas, on ne pourra évidemment former que deux groupes différens, l'un de ces deux groupes pouvant être composé d'un seul indice (Cauchy 1815a [1905: 84])

(8.3) Supposons d'abord que les indices se partagent en deux groupes (Cauchy 1815a [1905: 84]).

Gemeint ist hier folgendes. Cauchy untersucht Funktionen von mehreren Variablen und möchte feststellen, wie viele verschiedene Werte diese Funktionen annehmen können. Wir erläutern zunächst, was hier mit Verschiedenheit bzw. Gleichheit gemeint ist. Dazu ein Beispiel in Cauchys Schreibweise. Man betrachte $K = a_1a_2a_3a_4 + a_5a_6$, eine Funktion von den sechs Variablen $a_1, a_2, ..., a_6$. Vertauscht man etwa die ersten beiden Indizes, erhält man $K' = a_2a_1a_3a_4 + a_5a_6$. Da

[11] Für die folgende Darstellung stütze ich mich auf Wußing (1969), der hierzu eine detaillierte Begriffsgeschichte verfaßt hat. Weitere Literatur zur Geschichte des Gruppenbegriffs: H. Burkhardt (1892), Miller (1935b), Lichtenberg (1966), Kiernan (1971/72), O'Malley (1973), Dieudonné (1976), Dahan (1980), van der Warden (1985), P. Neumann (1999).

die ersten vier Variablen miteinander multipliziert werden und die Reihenfolge der Multiplikation keine Rolle spielt, sind in diesem Sinne K und K' gleich. Vertauscht man jedoch die erste und die fünfte Variable, erhält man $K'' = a_5a_2a_3a_4 + a_1a_6$, eine Funktion, die von K verschieden ist.

Nun läßt sich auch einsehen, was mit der Gruppierung der Indizes gemeint ist. Bei der Funktion K gruppieren sich die Indizes zu zwei „Gruppen" (vgl. Beispiel 8.3). Die erste Gruppe enthält die ersten vier Indizes, die zweite die letzten beiden, denn wenn man die ersten vier Indizes beliebig miteinander vertauscht, ergibt sich immer wieder die Funktion K, und selbiges gilt für beliebige Vertauschungen der letzten beiden Indizes. Sobald man hingegen einen Index der ersten Gruppe mit einem der zweiten Gruppe vertauscht, ergibt sich eine von K verschiedene Funktion. Es gibt also eine klar formulierbare Relation, die die Mitgliedschaft zu einer Gruppe bestimmt.

Die Gesamtheit der betrachteten Objekte (die Indizes einer Funktion) läßt sich also in verschiedene „Gruppen" einteilen, die aus mathematischer Sicht auf den ersten Blick erkennbar sind, ähnlich wie bei den Objekten, die zu einer Gruppe in der oben diskutierten fachlichen Bedeutung aus der Kunst zählen. Es liegt ein klares mathematisches Kriterium vor: Eine Menge von Indizes bezeichnet Cauchy dann als *groupe*, wenn die Indizes bei beliebiger Vertauschung immer wieder die gegebene Funktion ergeben.

Damit können wir Cauchys Verwendung des Wortes *groupe* an dessen zentrale Bedeutung anschließen. Dafür spricht auch, daß Cauchy in einem weiteren Text mit eng verwandtem Thema aus dem gleichen Zeitraum das Wort *classe* in demselben Kontext benutzt (Cauchy 1815b [1905: 218, 222, 224]). Für die semantische Konstruktion bedeutet dies, daß *groupe* bei Cauchy mit dem gemeinsprachlichen Ausdruck das Merkmal der Zusammengehörigkeit teilt, und daß eine Übertragung aus einem konkreten, wenn auch nicht näher spezifizierbaren Bereich in einen anderen, nämlich einen mathematischen Bereich vorliegt.

In dieser Weise wird das Wort z. B. auch von Abel und teilweise von Galois (die Cauchys Arbeiten kannten) um 1830 verwendet (Wußing 1969: 72f.); auch spätere Autoren machen von dieser Verwendungsweise ausgiebig Gebrauch. Das Wort bleibt in allen betrachteten Sprachen in dieser Bedeutung geläufig, auch nachdem der Ausdruck im Laufe des Jahrhunderts terminologisiert wurde. Cauchy benutzt es in vielen seiner Arbeiten, wobei die Verwendung nicht auf algebraische Kontexte beschränkt ist. Auch nachdem er selbst eine Bezeichnung für eine bestimmte Art von Gruppen (Gruppen von Permutation) geprägt hat, nämlich *système des* *substitutions conjuguées* (s. Kap. 8.3.6), verwendet Cauchy *groupe* weiter im oben beschriebenen Sinne.

8.3.2 *groupe* bei Niels Hendrik Abel

In diesem Abschnitt wollen wir kurz auf die Verwendung von *groupe* bei Niels Hendrik Abel (1802-1829) eingehen, da dadurch ein Einfluß auf Galois ausgeübt worden sein kann. Abel arbeitete ebenfalls am Problem der Auflösung von Gleichungen, und Galois erwähnt seine Arbeiten mehrfach (Galois 1976: 33, 35, 49, 116), insbesondere Abels posthume Arbeit über elliptische Funktionen (Abel 1829b).

In verschiedenen Arbeiten (Abel 1829a, 1829b) teilt Abel die Wurzeln einer Gleichung in verschiedene „Gruppen“ ein:

(8.4) ... les μ racines de cette équation seront partagées en plusieurs **groupes** (Abel 1829a [1992: 482])

(8.5) ... les μ racines se distribueront en m **groupes** de n termes chacun (Abel 1829b [1829b: 590])

Das erste Zitat stammt aus einer Arbeit über die Lösbarkeit einer speziellen Klasse von Gleichungen, das zweite aus einer Arbeit über elliptische Funktionen. Beide Aufsätze hat Galois sicher gekannt.

Die Gruppen werden dann jeweils zusammengestellt und haben dann die Form $x_1, \theta x_1, \theta^2 x_1, ..., \theta^n x_1$ (Abel 1829a [1992: 483]). Das Symbol θ steht dabei für rationale Funktionen, d. h. eine Gruppe entsteht bei Abel durch Anwendung von bestimmten Funktionen auf ein- und dieselbe Größe (in diesem Fall x_1).[12]

8.3.3 *groupe* bei Évariste Galois

Évariste Galois (1811-1832) verwendet *groupe* ebenfalls in der oeben herausgearbeiteten Bedeutung, ähnlich wie wir dies für Cauchy dargelegt haben. Beim ersten Auftreten des Ausdrucks in einem mathematischen Text von Galois bezieht sich *groupe* auf eine Menge von Größen:

(8.6) On aura un ensemble de n expressions, toutes différentes entre elles $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, ..., \alpha^{n-1}$. Multiplions ces n quantitiés par une autre expression β de la même forme. Nous obtiendrons encore un nouveau **groupe** de quantités toutes différentes des premiers et différentes entr'elles (Galois 1976: 115).

[12] Zu diesen Arbeiten Abels s. Wußing (1969: 71-73).

Der Ausdruck dient hier, wie Wußing (1969: 78) es formuliert, „zur Unterscheidung und gedanklichen Zusammenfassung zusammengehöriger Größen“. Dies gilt für beide im Zitat angesprochenen Gruppen: Zunächst für die „Gruppe“ $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, ..., \alpha^{n-1}$, bei der sich die Zusammengehörigkeit daraus ergibt, daß alle genannten Größen Potenzen von α sind, und zweitens für die „verschobene“ Gruppe, die man aus der ersten Gruppe erhält, wenn man jede einzelne Größe mit einer weiteren Größe β multipliziert.

Gleichzeitig beginnt mit Galois die Terminologisierung des Ausdrucks. Wir betrachten im folgenden einige Textstellen aus Galois' Schrift „Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux“ (Galois 1976: 42-71), die vom Januar 1831 datiert ist, jedoch erst 1846 veröffentlicht wurde.

Wir erinnern noch einmal an Galois' mathematische Vorgehensweise: Um die Lösbarkeit einer Gleichung zu untersuchen, wird der Gleichung eine Menge bestimmter Permutationen zugeordnet, die man aus der Untersuchung der Gleichung erhält. Diese Permutationen sind Vertauschungen der Wurzeln (Lösungen) der Gleichung, die die Eigenschaft haben, bestimmte Zahlenrelationen unverändert zu lassen.[13] Diese Menge von Permutationen nennt Galois dann „Gruppe der Gleichung“:[14]

(8.7) Nous appellerons groupe de l'équation le groupe en question (Galois 1976: 53).

Galois nimmt hier einen expliziten Benennungsakt für *groupe de l'équation* vor, wobei der Zusatz *de l'équation* lediglich verdeutlicht, daß die Gruppe einer Gleichung zugeordnet wird. Diese Benennung wird durch einen Verweis auf einen konkreten Referenten vorgenommen („le groupe en question“) – von einer allgemeinen Definition läßt sich hier nicht sprechen.

[13]Mathematische Einzelheiten bei Wußing (1969: 73-85), Kiernan (1971/72: 79-90), Dahan (1980: 286-296).

[14] Terminologische Anmerkung: In der zeitgenössischen Literatur wird im Zusammenhang mit Vertauschungen häufig unterschieden zwischen einer bestimmten Anordnung, also dem Resultat einer Vertauschung, und der Operation, durch die man von einer Anordnung zu einer anderen gelangt. Die Terminologie dafür ist sehr uneinheitlich und schwankt auch bei einzelnen Autoren (s. a. Kap. 9.6). Galois unterscheidet in Anlehnung an Cauchy zwischen Anordnung (*permutation*) und Operation (*substitution*). In bezug auf Gruppen schwankt Galois aber im Gebrauch dieser Termini und spricht häufig auch von *groupe de permutations*. In Randnotizen zu seinen Manuskripten heißt es „Il n'y a d'important que la substitution“ (Galois 1976: 46) und „Mettre partout à la place du mot permutation, le mot substitution“ (Galois 1976: 50). S. Dahan (1980: 287) und Kiernan (1971/72: 80).

Daß nicht jede beliebige Zusammenfassung von Permutationen von Galois als *groupe* bezeichnet wird, zeigt das folgende Zitat aus einem Fragment:

(8.8) Ce qu'on entend par l'ensemble des permutations d'une équation. Du cas où cet ensemble constitue un groupe (Galois 1976: 77).[15]

Galois (ibid.) gibt im Anschluß eine mathematische Bedingung für den Fall an, daß es sich um eine *groupe* handelt. Diese Stelle bestätigt, daß für Galois *groupe* und *ensemble* nicht beliebig austauschbar sind. Da nur bestimmte Zusammenfassungen als *groupe* bezeichnet werden, läßt sich das Zitat als Bestätigung dafür werten, daß eine Terminologisierung von *groupe* einsetzt.

Galois erwähnt nun eine Eigenschaft, die manche der von ihm als *groupe* bezeichneten Mengen haben. Die „Abgeschlossenheit" (d. h. die Eigenschaft, daß die Nacheinanderausführung zweier Permutationen einer gegebenen Menge wieder eine Permutation derselben Menge ergibt (s. Kap. 7.5) formuliert Galois so:

(8.9) ... si dans un pareil **groupe** on a les substitutions S et T, on est sûr d'avoir la substitution ST (Galois 1976: 47).

Allerdings verwendet Galois die genannte Eigenschaft nicht konsequent, d. h. er benutzt sie zwar in seinen Ausführungen, beweist aber nicht, daß sie für die untersuchten Permutationen tatsächlich Gültigkeit hat (Wußing 1969: 81, 83).

Die Eigenschaft der Abgeschlossenheit trifft zudem keineswegs auf alle der als *groupe* bezeichneten Mengen von Permutationen zu, denn Galois verwendet den Ausdruck auch für sog. *Nebenklassen*.[16] Eine Nebenklasse ist eine Menge, die sich aus einer gegebenen Gruppe (mit Abgeschlossenheit) durch Multiplikation mit einer Permutation der Gruppe ergibt. Man erhält sie, geometrisch gesprochen, durch eine „Verschiebung" um einen Faktor. Einen ähnlichen Vorgang haben wir bereits in Beispiel 8.6 angesprochen, mit dem Unterschied, daß es sich dort um Größen, nicht um Permutationen handelt.

Fassen wir zusammen: Galois bezeichnet mit *groupe* Zusammenfassungen von Permutationen, die – aus heutiger Sicht – in manchen Fällen Gruppen sind, in manchen Fällen nicht. Er erkennt die Abgeschlossenheit als Eigenschaft einiger der von ihm betrachteten Zusammenfassungen, zieht diese aber nicht ausdrücklich für eine

[15] Der zweite Satz ist im Original unvollständig.

[16] Diese Nebenklassen wurden im 19. Jahrhundert zunächst als *Nebengruppen* bezeichnet, z. B. bei Weber (1896: 8).

Definition heran und verwendet sie auch nicht konsequent.[17] Das entscheidende Merkmal, das *groupe* hier mit seiner gemeinsprachlichen Bedeutung teilt, ist das der Zusammengehörigkeit. Da Galois *groupe* sowohl für abgeschlossene als auch für nicht-abgeschlossene Mengen verwendet, kann er die Zusammengehörigkeit nicht nur im Sinne der Abgeschlossenheit empfunden haben (s. a. Wußing 1969: 81); sie muß für ihn zunächst im Sinne der mathematischen Zuordnungen bestanden haben, die er vorgenommen hat: Die Elemente einer Gruppe gehören zusammen, weil sie derselben Gleichung zugeordnet sind und weil sie bestimmte Eigenschaften der untersuchten Gleichung unverändert lassen. Sie ergeben sich aus Galois' mathematischem Vorgehen.

Gleichzeitig finden wir deutliche Hinweise auf eine Terminologisierung des Ausdrucks, auch wenn keine ausdrückliche Definition vorliegt. Anders als bei Cauchy findet bei Galois im Zusammenhang mit *groupe de l'équation* ein expliziter Benennungsakt statt, der die „Gruppe der Gleichung" von anderen als *groupe* bezeichneten Mengen abhebt.[18] Wir haben zudem gesehen, daß für Galois *groupe* und *ensemble* nicht austauschbar sind, und daß er den Unterschied an mathematische Bedingungen knüpft, die er zumindest teilweise auch beweist (Galois 1976: 51).

8.3.4 Arthur Cayleys erste Definition von Gruppen

Im terminologischen Sinne erscheint das Wort *group* in der englischen Sprache zuerst 1854 bei Arthur Cayley (1821-1895). Er beruft sich ausdrücklich auf Galois (Cayley 1854 [1963: II, 124]) und gibt eine explizite Definition:

(8.10) A set of symbols $1, \alpha, \beta, ...$, all of them different, and such that the product of any two of them (no matter in what order) or the product of any one of them into itself,[19] belongs to the set, is said to be a *group* (Cayley 1854 [1963: II, 124]).

[17] Daß sich die aus heutiger Sicht „fehlenden" definitorischen Eigenschaften einer Gruppe bei Galois noch nicht finden, kann kaum als Versäumnis gewertet werden, da die zunächst untersuchten Permutationsgruppen die im Vergleich zur heutigen Definition „fehlenden" Eigenschaften wie die Assoziativität „automatisch" haben. Die Abgeschlossenheit war das, was neu und am auffälligsten war.

[18] In einem Fragment findet man zudem die Bemerkung: „On appelle groupe un système de permutations tel que, etc. Nous représenterons cet ensemble par G." (Galois 1976: 79). Möglicherweise hat Galois eine Definition formuliert, veröffentlicht hat er sie jedoch nicht.

[19] Die Formulierung „the product of any one of them into itself" bedeutet, daß ein Element der Gruppe mit sich selbst multipliziert wird. Die Präposition *into* wurde schon im 18. Jahrhundert so verwendet.

Hier wird wieder die Abgeschlossenheit erwähnt, und zwar ausdrücklich als Teil der Definition. Der Begriff wird wesentlich abstrakter gefaßt als bei allen Vorgängern, denn Cayley beschränkt sich nicht auf Permutationen, sondern spricht von *symbols*, die Permutationen sein *können*; es kann sich aber auch um Systeme anderer Objekte handeln (Cayley 1854a [1963: II, 123]). Es sei „not necessary (even if this could be done) to attach any meaning to a symbol" (ibid.). Dieser Schritt in Richtung einer Abstrahierung war seiner Zeit voraus und fand zu diesem Zeitpunkt keinen Anklang (Wußing 1969: 173).

Die Verwendung von e. *group* bei Cayley ist zweifelsohne eine Entlehnung mit zusätzlicher Verallgemeinerung der Bedeutung.

8.3.5 Anmerkungen zur weiteren Entwicklung

Mitte des 19. Jahrhunderts wird *Gruppe* im algebraischen Sinn auch im Deutschen eingeführt (z. B. bei Dedekind 1981[20] und Kronecker 1856). In der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts werden weitere Arten von Gruppen gefunden, z. B. Gruppen von Bewegungen (Jordan) und von Transformationen (Lie).[21] Klein (1872a) gibt in seinem „Erlanger Programm" eine einflußreiche Darstellung einer gruppen- bzw. invariantentheoretischen Auffassung der Geometrie. Die weitere Präzisierung des abstrakten Begriffs wird dann von meist deutsch- und französischsprachigen Autoren vorgenommen; für den Abschluß dieses Prozesses wird das Jahr 1882 genannt (Wußing 1969: 178). Eine klare axiomatische Definition legt Weber (1893a) vor; in dieser Arbeit wird besonders die Rolle der Gruppe als Grundgebilde der Algebra hervorgehoben (Wußing 1969: 185). Die Axiomensysteme für den Begriff wurden zu Beginn des 20. Jahrhunderts eingehend untersucht, besonders intensiv in den USA (Franci 1992).

Die Bezeichnung *Gruppe* und seine Äquivalente setzen sich in diesem Zeitraum in weiten Teilen der Mathematik durch.

8.3.6 Andere Bezeichnungen für „Gruppe"

In der Originalliteratur finden sich noch einige andere Bezeichnungen für „Gruppe", von denen nur ein durch Cauchy verbreiteter Vorschlag eine länger

[20] Bei Dedekind (1981) handelt es sich um Vorlesungen zur Algebra aus den 60er Jahren des 19. Jahrhunderts.

[21] Bei diesen Transformationsgruppen liegt allerdings eine leicht modifizierte Definition zugrunde.

anhaltende Popularität genießen konnte.

In den Untersuchungen einiger italienischer Autoren zur Lösbarkeit von Gleichungen tritt der Ausdruck *permutazione* auf, mit dem Ruffini eine Gesamtheit von Permutationen bezeichnet.[22] Die Bezeichnung findet sich schon zu Beginn des 19. Jahrhunderts und basiert auf den betrachteten Objekten; sie bleibt auf das Italienische beschränkt.

Wesentlich weiter verbreitet hat sich die Bezeichnung *système de substitutions conjuguées*, die durch Cauchy (1844 [1932: 206]) bekannt wurde.[23] Diese Arbeit ist eine Weiterführung der oben besprochenen Arbeiten, nachdem sich Cauchy zwischenzeitlich anderen mathematischen Themen zugewandt hatte. Insbesondere ist die Arbeit von 1844 rein permutationstheoretisch angelegt (Wußing 1969: 62).

Cauchys Terminus läßt sich folgendermaßen analysieren. Der Ausdruck *système* verweist, ähnlich wie Galois' *groupe*, auf eine Zusammenfassung von Objekten. Die Objekte, die zusammengefaßt werden, werden dann näher bestimmt (*de substitutions*). Hervorgehoben wird in der Bezeichnung schließlich die Auffassung, daß die einzelnen Objekte, also die Permutationen, miteinander verbunden werden. Das Verb *conjuguer* war zur damaligen Zeit hauptsächlich in grammatikalischer Bedeutung üblich, bedeutete aber in gehobener Sprache auch schlicht 'vereinigen, verbinden' (DHLF, s. v. conjuguer). An diese Bedeutung knüpft Cauchy hier an (Dahan 1980: 295, Silvestri 1979: 317). Diese Behauptung wird auch dadurch bestätigt, daß Cauchy, ohne es zu terminologisieren, das Verb *joindre* für die Verknüpfung von Permutationen verwendet (z. B. Cauchy 1844 [1932: 206]).

Bei Klein und Lie (1871) findet sich der Terminus *geschlossenes System* in bezug auf Transformationsgruppen. Das Motiv für diese Bezeichnung liegt wieder in der Zusammengehörigkeit der Elemente, wobei die Abgeschlossenheit hervorgehoben wird. Warum die Autoren nicht die Bezeichnung *Gruppe* verwendet haben, die ihnen zweifellos bekannt war, ist schwer zu ermitteln (in späteren Arbeiten benutzten beide diese Bezeichnung). Hawkins (2000: 18) verweist allerdings auf eine Textstelle bei Klein und Lie, in der ein zentraler Unterschied zwischen den üblicherweise betrachteten Permutationsgruppen und Transformationsgruppen hervorgehoben wird. Dieser besteht darin, daß bei Permutationsgruppen von „diskret veränderlichen“, bei Transformationsgruppen von „kontinuierlich veränderlichen Größen“ die Rede ist (Klein - Lie 1871: 427). Nach Hawkins (ibid.) könnte dieser

[22] S. Wußing (1969: 57 u. 204, Fn. 57) und Cassinet (1988).

[23] Mit *substitutions* bezieht sich Cauchy auf Permutationen (s. Kap. 9.6).

Unterschied zumindest dazu beigetragen haben, eine andere (aber nicht unbedingt diese spezielle) Bezeichnung als bei Permutationsgruppen zu wählen. Darüber hinaus hat Klein in einigen frühen Schriften und Notizen auch die Bezeichnung *Zyklus* (z. B. Klein 1872b [1921: 115]) als Synonym für *geschlossenes System* verwendet (Hawkins 2000: 16).

Erwähnt sei schließlich noch Camille Jordan (1838-1922), der sich terminologisch zuerst an Cauchy, später an Galois orientiert. Neben den von diesen Autoren benutzten Termini spricht Jordan (1870: 22) auch von *faisceau*.

Mit *faisceau* bezeichnet man in der Gemeinsprache „un assemblage de choses liées ensemble" (DHLF, s. v. faisceau). In der Geometrie wurde der Ausdruck zuvor z. B. von Poncelet (1822) im Sinne eines „Büschels" von Geraden, also der Menge der Geraden durch einen gegebenen Punkt, verwendet.[24] Im deutschen Sprachraum wurde es mit *Bündel*, *Büschel* oder *Schar* wiedergegeben (F. Müller 1909: 49). Die semantische Verbindung zwischen Gemeinsprache und Algebra besteht also auch hier in dem Aspekt der Zusammenfassung bzw. Zusammengehörigkeit, wobei die Verbindung durch die Verknüpfung algebraischer Objekte zustande kommt. Diese Vorstellung haben wir bereits bei Cauchy durch die Verwendung von *joindre* kennengelernt.

In der zeitgenössischen Mathematik wurden der Ausdruck *faisceau* und seine Äquivalente, auch wenn sie sich in der Algebra nicht dauerhaft durchgesetzt haben, von verschiedenen Autoren verwendet. Es läßt sich z. B. Lies Definition einer Transformationsgruppe anführen:

(8.11) Eine endliche oder unendliche **Schaar** von Transformationen ... heisst eine *Gruppe von Transformationen* oder eine *Transformationsgruppe*, wenn je zwei Transformationen der Schaar nach einander ausgeführt eine Transformation ergeben, welche wiederum der Schaar angehört (Lie 1888 [1970: 3]).

Lie verwendet hier die oben genannte, aus der Geometrie stammende Entsprechung von *faisceau*, nämlich *Schaar*, um eine algebraische Eigenschaft von Objekten (Transformationen) zu charakterisieren, die als zur Geometrie gehörig aufgefaßt werden können. *Schar* wird auch bei anderen Autoren nicht selten in in weiterem Sinne geometrischen Kontexten verwendet. Dedekind (1894 [1932: 35]) definiert etwa einen (speziellen) Vektorraum unter dieser Bezeichnung.[25]

---

[24] In den einschlägigen Wörterbüchern, insbesondere im TLF und im DHLF, wird der Gebrauch dem 20. Jahrhundert zugeschrieben.

[25] Dieser spezielle, bei Dedekind betrachtete Vektorraum ist zwar ein abstrakter, doch kann man

Sowohl bei Cauchy als auch bei Jordan basiert die Benennung demnach wieder auf dem Merkmal der Zusammengehörigkeit. In unterschiedlicher Ausprägung spielt dieses Merkmal bei den meisten Bezeichnungen für algebraische Strukturen eine Rolle.

8.4 Zusammenfassung und Diskussion

Wir fassen nun die obige Diskussion zusammen und interpretieren die Ergebnisse aus semantischer Perspektive.

Ausgangspunkt ist das it. *groppo*, aus dessen gemeinsprachlicher Bedeutung eine fachsprachliche Bedeutung in der Kunst entsteht. Das entscheidende Merkmal einer Gruppe kommt hier bereits deutlich zum Ausdruck: Eine Gruppe ist eine Menge von Objekten, die als zusammengehörig betrachtet werden und ein Ganzes darstellen, da sie räumlich benachbart und typischerweise auch einander ähnlich sind. Das wichtige Merkmal der Zusammengehörigkeit ist daher auch kein semantisches Primitiv, sondern setzt sich aus anderen semantischen Merkmalen zusammen.

Aus dieser Bedeutung entsteht eine zweite, der ersten sehr ähnliche Bedeutung, nach der eine Gruppe ausdrücklich auch dadurch bestimmt sein kann, daß die zur Gruppe gehörigen Elemente zueinander in einer Relation stehen oder gemeinsame Eigenschaften haben. Diese Bedeutung entsteht im fachlichen Kontext der Musik, verbreitet sich aber allgemein und ist Grundlage für verschiedene fachsprachliche Bedeutungen.

Beim ersten Erscheinen von frz. *groupe* in der Mathematik zu Beginn des 19. Jahrhunderts wird das Wort aus der Gemeinsprache in einen mathematischen Kontext übertragen, aber nicht sofort terminologisiert. Die semantische Verbindung besteht darin, daß die betrachteten Objekte aufgrund einer klar ausgesprochenen mathematischen Bedingung zu Gruppen zusammengefaßt und als zusammengehörig empfunden werden. Cauchys Verwendung von *groupe* schließt sich damit an die zweite der eben genannten Bedeutungen an. Die semantischen Gemeinsamkeiten zwischen gemeinsprachlicher und algebraischer Bedeutung sind also zusammengefaßt: Es handelt sich jeweils um eine Zusammenfassung von Dingen, die in einer

annehmen, daß Dedekind den Ausdruck in Analogie zur Geometrie verwendet, wie er dies auch bei direkt damit zusammenhängenden Begriffen tut. Er spricht z. B. auch von den *Koordinaten* in bezug auf eine *Basis* (Dedekind 1894 [1932: 35]).

bestimmten Relation stehen. Bei Cauchy wird nicht eine Eigenschaft eines einzelnen Objektes betrachtet, sondern es wird von mehreren Indizes ausgegangen und überprüft, ob alle diese Indizes, aufgefaßt als ein Ganzes, eine bestimmte Eigenschaft erfüllen: Wenn die Indizes untereinander vertauscht werden können, ohne daß sich dabei der Wert der gegebenen Funktion ändert, dann gehören die Indizes zusammen und bilden eine Gruppe.

Wußing (1969: 81) spricht in bezug auf Galois davon, „daß ein Wort der Umgangssprache durch spontanen Gebrauch sich zu einem Fachausdruck zu verdichten anfängt“. Mit Galois beginnt die Terminologisierung des Ausdrucks. Dabei ist zunächst festzustellen, daß er aus heutiger Sicht unterschiedliche Dinge als *groupe* bezeichnet. Dies sind zum einen Mengen von Größen (Bsp. 8.6), und zwar erstens der Form $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, ..., \alpha^{n-1}$ (im folgenden als „Bedeutung 1a“ bezeichnet), und zweitens der Form $\beta \cdot 1, \beta \cdot \alpha, \beta \cdot \alpha^2, \beta \cdot \alpha^3, ..., \beta \cdot \alpha^{n-1}$ (Bedeutung 1b).

Zum anderen handelt es sich um Mengen von Permutationen, die einer Gleichung zugeordnet sind, und zwar (Bedeutung 2a) erstens mit der Eigenschaft der Abgeschlossenheit (nur aus diesen hat sich der heute übliche Gruppenbegriff entwickelt), und zweitens (Bedeutung 2b) Mengen von Permutationen, die diese Eigenschaft nicht aufweisen (und die heute mit dem Terminus *Nebenklassen* bezeichnet werden). Dabei verhält sich Bedeutung 1a zu Bedeutung 1b wie Bedeutung 2a zu Bedeutung 2b, da es sich in beiden Fällen um die Multiplikation mit einem Faktor handelt. Im ersten Fall werden Größen mit einer weiteren Größe multipliziert, im zweiten Fall werden Mengen von Permutationen mit einer Permutation multipliziert.

Es stellt sich die Frage, ob hier ein Einfluß von Cauchy vorgelegen hat. Klar ist, daß Galois Cauchys Arbeiten kannte und ihm daher mit hoher Wahrscheinlichkeit dessen Gebrauch von *groupe* bekannt war. Nun gibt es eine Parallele, die mit den Kriterien zusammenhängt, die ein Objekt zum Mitglied einer Gruppe macht. Bei Cauchy besteht dies darin, daß jede Vertauschung der Indizes die gegebene Funktion unverändert lassen muß. Bei Galois (in bezug auf Permutationen) muß jede Vertauschung die Relationen zwischen den Wurzeln der Gleichung unverändert lassen. Sowohl bei Cauchy als auch bei Galois dient damit die Invarianz als Kriterium für die Mitgliedschaft in einer Gruppe. Wir werten diese Parallele als ein Indiz für einen möglichen Einfluß Cauchys auf Galois, nicht jedoch als eindeutigen Beweis.

Kommen wir nun zur Frage des semantischen Zusammenhangs zwischen gemeinsprachlicher und mathematischer Bedeutung von *groupe* bei den untersuchten

Autoren. Zu diesem Zweck rufen wir die semantischen Eigenschaften des gemeinsprachlichen Ausdrucks noch einmal in Erinnerung.

Dieser kann sich zunächst auf Dinge oder Lebewesen beziehen. Da es keine Hinweise darauf gibt, daß die mathematischen Objekte, die zu einer Gruppe gehören, als belebt aufgefaßt werden, ist klar, daß als Ausgangsbedeutung nur 'Menge von Dingen' infrage kommt.

Zweitens läßt sich feststellen, daß die Elemente einer Gruppe immer von derselben Art sind – es handelt sich um Größen oder Permutationen, aber eine Vermischung von Objekten unterschiedlicher Art kommt nicht vor. Daher ist die Gleichartigkeit und damit auch die Ähnlichkeit der Objekte gegeben.

Drittens ist zu prüfen, ob Kontiguität, insbesondere in Form einer räumlichen Benachbartheit vorliegt. Bei Cauchy ist sofort klar, daß zumindest in den vom ihm gegebenen elementaren Beispielen Gruppen sofort dadurch erkennbar sind, daß die Indizes nahe bei einander stehen. Z. B. bei der Funktion $K = a_1a_2a_3a_4+a_5a_6$ lassen sich sofort zwei Gruppen ausmachen: Die erste enthält die ersten vier, die zweite die letzten beiden Indizes.

In bezug auf Galois stellt sich die Situation etwas anders dar. So lassen sich Permutationen kaum als räumlich benachbart vorstellen, so daß dieser semantische Aspekt in dieser Form beim Verwenden von *groupe* keine wichtige Rolle gespielt zu haben scheint. Ein Indiz für Kontiguität in Form eines gemeinsamen Ursprungs wollen wir allerdings ansprechen. Wir haben gesehen, daß bei einer „Gruppe" $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, ..., \alpha^{n-1}$ von Größen alle Größen der Gruppe aus der einen Größe α durch Potenzierung hervorgehen. Etwas Vergleichbares stellt Galois auch in bezug auf Gruppen von Permutationen fest: „Quand nous voudrons grouper des substitutions nous les ferons toutes provenir d'une même permutation" (Galois 1976: 47), d. h. alle Permutationen einer Gruppe gehen aus derselben Anordnung hervor. Diese Verwendung von *groupe* ist nicht neu. So verzeichnet das DAF von 1762 die Bildung *groupe de cristaux* in der Bedeutung 'assemblage de colonnes de cristaux réunis sur une même base'. In der *Encyclopédie* (s. v. *crystal*) wird dies etwas näher erläutert: „Quelquefois les crystaux sont solitaires, mais plus ordinairement il y en a plusieurs qui forment un grouppe, & partent d'une base ou racine commune". Kontiguität besteht in diesen Fällen also insofern, als die Objekte einer Gruppe denselben Ursprung haben.

Entscheidend für die Verwendung von *groupe* bei Galois wie auch bei Cauchy und Abel scheint aber das Heranziehen eines Kriteriums für die Mitgliedschaft in einer Gruppe zu sein. Bei Cauchy lautet dieses: Eine Menge von Indizes bildet eine Gruppe, wenn eine beliebige Vertauschung der Indizes keine Veränderung in der gegebenen Funktion bewirkt. Bei Galois (in bezug auf Permutationen) lautet es: Eine Menge von Permutationen bildet eine Gruppe, wenn sie die Relationen zwischen den Wurzeln der Gleichung unverändert lassen. Damit unmittelbar in Zusammenhang steht die Zusammengehörigkeit, die aus einer Gruppe ein einzelnes, klar identifizierbares Ganzes macht. Die Eigenschaft, abgeschlossen zu sein, ist dabei nur sekundär, d. h. sie trifft auf einige, aber nicht auf alle der als *groupe* bezeichneten Objekte zu. Diese Eigenschaft ist mathematisch außerordentlich wichtig und galt als sehr bemerkenswert, sie spielte aber bei der Namensgebung keine Rolle.

Als Ausgangspunkt für die mathematischen Bedeutungen von *groupe* kommt also nur die Bedeutung 'ensemble d'êtres ou de choses ayant des caractères communs et dont on se sert pour les classer' in Frage. Die Einteilung in Gruppen, wie sie in dieser semantischen Beschreibung enthalten ist, läßt sich dabei sowohl bei den untersuchten Autoren leicht nachweisen: Bei diesen kommt etwa die Prädikation *partager/diviser en groupes* sehr häufig vor.[26] Vergleichbares gilt auch für nicht-mathematische Belege (vgl. Fußnote 2), d. h. Gruppen werden einerseits als etwas gesehen, das ein Ganzes bildet, aber auch als etwas, das von Anderem abgesondert ist. In indogermanischen Sprachen werden diese Aspekte auch durch verschiedene Wurzeln ausgedrückt: Während z. B. bei den Ausdrücken *eins* und lat. *unus* die Perspektive ursprünglich auf der Absonderung liegt (daher die Bedeutung 'einzeln'), betonen Ausdrücke wie lat. *simplex* 'einfach', e. *same* und gr. *homo-* den Aspekt der Zusammengehörigkeit (Anttila 1972: 366f.).

Die semantische Entwicklung von *groupe* ist in Abb. 8.1 zusammenfassend dargestellt. Bedeutungen, die für die Entstehung des mathematischen Terminus nicht relevant sind, sind darin nicht aufgeführt. Die Pfeile geben dabei die semantische Entwicklung durch Angabe der Ausgangs- und der Zielbedeutung an. Insgesamt handelt es sich hier um metaphorische Verwendungsweisen von *groupe* in der Mathematik;[27] die semantische Verbindung zur Gemeinsprache besteht in dem Merkmal der Zusammengehörigkeit. Diese kann in der Mathematik und in anderen Fachsprachen verschiedene Ausprägungen haben, es läßt sich aber im Unterschied zum gemeinsprachlichen Gebrauch typischerweise ein klar formulierbares Kriterium angeben, das diese Zusammengehörigkeit beinhaltet.

Analog zum semantischen Wandel in der Gemeinsprache ist zu beobachten,

[26] S. etwa Cauchy (1815a [1905: 85]), Galois (1976: 63), für Abel s. Bsp. 8.4.

[27] S. a. Mehrtens 1990: 98.

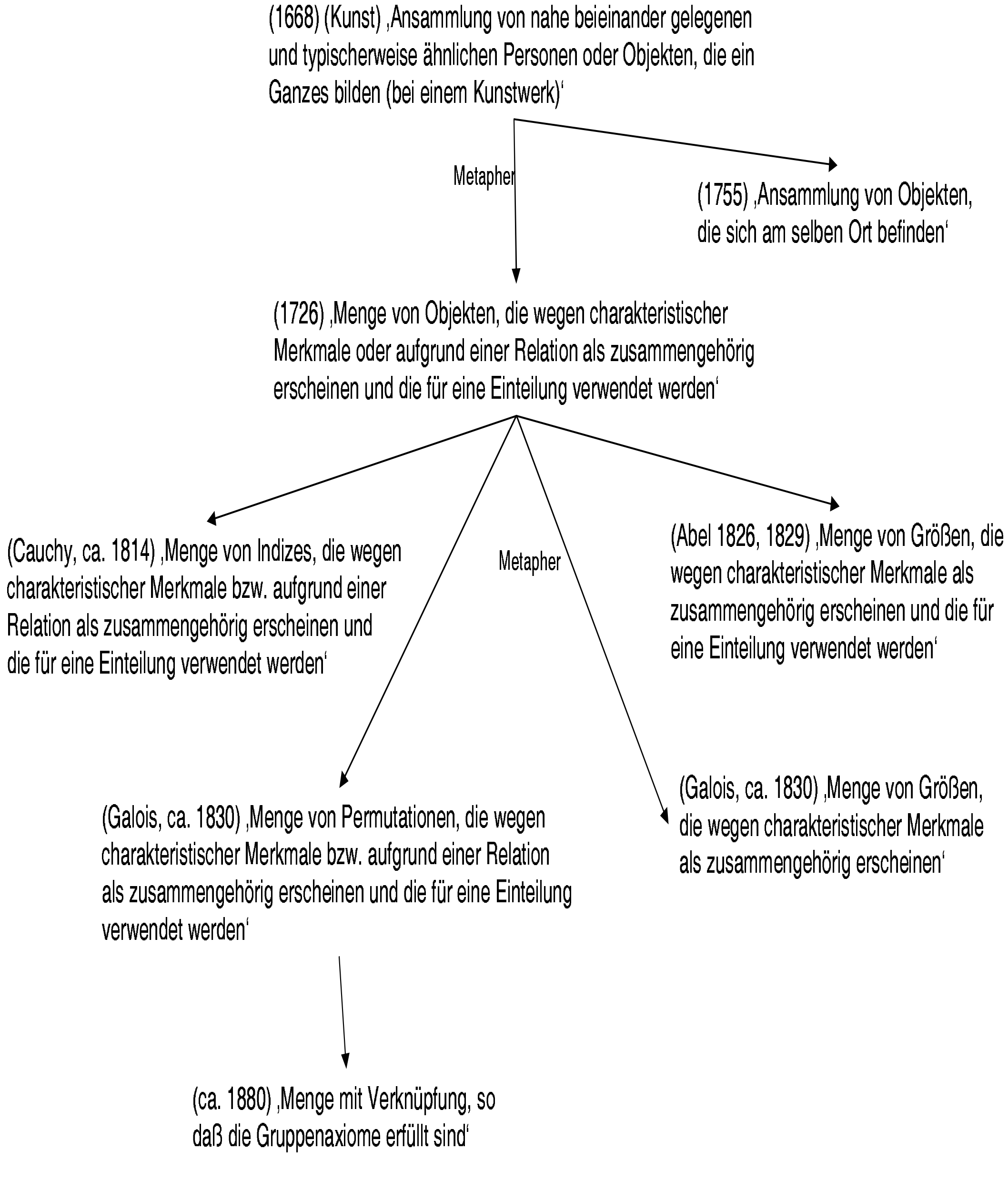

Abbildung 8.1: Semantische Entwicklung von *groupe*

daß die betrachteten Ausdrücke für „Gruppe“ allesamt weiterhin in verschiedensten mathematischen Bereichen in nicht-terminologischer Bedeutung verwendet werden. Dies zeigt sich bereits bei Galois, gilt aber auch, nachdem sich die terminologische Bedeutung klar herausgebildet hatte. Vereinzelt werden sogar weitere terminologische Komposita mit dem Wortbestandteil *Gruppe* gebildet, deren Bedeutung sich nicht direkt von der algebraischen Bedeutung ableiten läßt. Dazu zählt z. B. Dedekinds Ausdruck *Dualgruppe*, mit dem dieser eine bestimmte, sehr allgemeine mathematische Struktur mit zwei Verknüpfungen bezeichnet (Dedekind 1897b). Dies scheint nicht als sprachliches Problem empfunden worden zu sein.[28] Aus sprachlicher Sicht ergibt sich hier eine Parallele zu dem bei gemeinsprachlichem semantischen Wandel beobachtbaren Phänomen, daß nach Einsetzen eines Wandels die Ausgangsbedeutung keineswegs verloren gehen muß und meist eine Phase der Polysemie auftritt.

Wir sind des weiteren kurz auf die Extension des Begriffs „Gruppe“ eingegangen. Nun stellen Gruppen von Permutationen das historisch erste und für einen längeren Zeitraum auch das einzige Beispiel von Gruppen dar. Diese Permutationsgruppen waren allesamt endlich. Bei der Bezeichnung von Transformationsgruppen (die unendlich viele Elemente enthalten) zögerten die Schöpfer dieses Begriffs (Felix Klein und Sophus Lie) zumindest für einen Zeitraum von einigen Jahren, auch auf diese die Bezeichnung *Gruppe* anzuwenden. Darüber hinaus fällt auf, daß heutige Standardbeispiele von Gruppen, etwa die ganzen Zahlen mit der Addition als Verknüpfung oder die rationalen Zahlen (außer der Zahl Null) mit der Multiplikation, erst sehr spät, d. h. in den 1890er Jahren, in Zusammenhang mit dem Begriff „Gruppe“ genannt wurden (Dieudonné 1987: 277, Peiffer - Dahan-Dalmedico 1994: 318). Diese Gruppen sind ebenfalls unendlich. Wir gelangen so zu folgender Vermutung: Die Extension eines Begriffs bzw. die Festlegung auf eine einzige Klasse von Referenten (Permutationsgruppen) können die Verallgemeinerbarkeit eines Begriffs erschweren und damit auch die Übertragbarkeit der Bezeichnung. In etwas allgemeinerer Form können wir sagen, daß die Extension eines Begriffs, d. h. in unserem Fall die zu einem gegebenen Zeitpunkt bekannten und als solche identifizierten Beispiele für Gruppen, aufgrund spezieller Eigenschaften

[28] Der heutige mathematische Ausdruck für diese Struktur ist *Verband*. S. dazu Mehrtens (1979a). – Für solche mehrfachen Terminologisierungen gibt es weitere Beispiele. Dedekind verwendete die Bezeichnung *Körper* nicht nur für eine algebraische Struktur (Kap. 10), sondern auch für den topologischen Begriff „offene Menge“ (Dedekind 1931: 353-355), und Klein (1872b [1921: 473]) verwendete dieselbe Bezeichnung für ein Gebilde, das bei Anwendung aller Transformationen einer Gruppe invariant bleibt.

der Referenten die Verallgemeinerbarkeit eines Begriffs erschweren kann.[29]

Im folgenden Kapitel werden wir das metaphorische Umfeld des Gruppenbegriffs näher untersuchen und dann auch eine weiterführende Diskussion einiger Themen liefern, die hier nur kurz angesprochen werden konnten.

[29] Nicht verschwiegen werden soll dabei die Möglichkeit, daß z. B. die rationalen Zahlen deswegen nicht als Beispiel für Gruppen genannt wurden, weil sie aus mathematischer Sicht in gruppentheoretischen Zusammenhang eher uninteressant sind.

Kapitel 9

Semantischer Wandel und Metaphorik weiterer algebraischer Begriffe

Die bisher angestellten Betrachtungen zum Begriff der Gruppe führen uns direkt zu weiteren Aspekten der mathematischen Fachsprache, durch die die im Zusammenhang mit Gruppen auftretenden Metaphern erst deutlich herausgestellt werden können.

Zu diesen Metaphern gehört eine Zerlegbarkeitsmetaphorik, die auch den Schwerpunkt dieses Kapitels bildet, da es sich hier um eine besonders reichhaltige Metaphorik für die Mathematik handelt, anhand derer wir semantisch-lexikalische Aspekte und die Funktionen bei der Verwendung von Metaphern diskutieren können.

Wir gehen im folgenden zunächst kurz auf die Metaphorik der Zerlegung und Zusammensetzung ein und geben Beispiele dafür, daß diese sich schon in der antiken Philosophie findet. In Zusammenhang damit werden wir die klassische Definition von Primzahlen vorstellen sowie die dazugehörigen Bezeichnungen und den sog. „Fundamentalsatz der Arithmetik“, auf den im Rahmen von Analogien in der Mathematik des 19. Jahrhunderts immer wieder Bezug genommen wird. Diese Analogien werden dann besonders in Kap. 9.4 näher untersucht.

Des weiteren untersuchen wir die Behältnismetaphorik am Beispiel des frz. Verbs *contenir* und zeigen dabei, daß sich die verschiedenen Bedeutungen des Verbs einerseits aus gemeinsprachlichen, andererseits aus fachsprachlichen (arithmetischen) Verwendungen ergeben. In diesem Zusammenhang ist auch die Entstehung des Begriffs der Untergruppe zu sehen (Kap. 9.3).

Die Diskussion der Abgeschlossenheit (Kap. 9.5) interessiert uns weniger aus lexikalisch-semantischen Gründen, sondern wir nutzen vielmehr die Gelegenheit, die Anmerkungen von Lakoff und Núñez (s. Kap. 3.5.2) zur Entstehung dieses Begriffs zu hinterfragen.

Wir gehen dazu noch auf Permutationen und Gruppen von Permutationen bei Augustin-Louis Cauchy näher ein (Kap. 9.6), wobei wir eine Verbindungsmetapher für Permutationen eingehender untersuchen wollen.

Abschließend werden wir die Entstehung des Isomorphiebegriffs diskutieren (Kap. 9.7). Es zeigen sich in diesem Zusammenhang Verbindungen zwischen Mathematik und Kristallographie, die auch für die Entwicklung des mathematischen Strukturbegriffs interessant sind (Kap. 9.8).

9.1 Zerlegung und Zusammensetzung

Bei der Metaphorik der Zerlegung und dem Gegenbegriff der Zusammensetzung handelt es sich um ein komplexes Feld, dem weitere metaphorische Felder wie das vom „Teil" und „Ganzen" und der „Verknüpfung" der Teile untereinander angehören. Diese Begrifflichkeiten haben eine lange Tradition und sind in zahlreichen fachlichen Disziplinen verbreitet. Festzuhalten ist auch, daß es sich nicht nur um ein lexikalisches Feld handelt, sondern daß insbesondere die Zerlegung von Objekten in kleinere oder kleinste Objekte eine schon in der Antike wichtige wissenschaftliche Methode darstellt. Wir wollen zunächst einige Angaben zum Zusammenhang dieser allgemeinen Begrifflichkeiten machen und auf deren sprachliche Seite eingehen. Wir werden dies kurz am Beispiel einiger klassischer Texte illustrieren und dann anhand einiger Textstellen von Christian Wolff die sprachliche Kontinuität vieler klassischer Ausdrücke in einer modernen Sprache belegen.

Ein aus linguistischer Sicht auffälliges Merkmal der *Metaphysik* von Aristoteles sind die vergleichsweise ausführlichen Wesensbestimmungen der wichtigsten von ihm verwendeten Begriffe, die man auch als semantische Bestimmungen der betreffenden Ausdrücke lesen kann. Im fünften Buch (Δ) beschreibt er eingehend die verschiedenen Bedeutungen von mehr als 30 verschiedenen Fachwörtern wie z. B. *archḗ* 'Prinzip, Anfang, Grund' und *ousía* 'Wesen'. Wir interessieren uns hier für die Ausdrücke, die mit der Zerlegung von Objekten zusammenhängen und wollen mit dem Begriff „Teil" beginnen.[1]

[1] Zu den Begriffen „Ganzes" und „Teil" s. a. das *Historische Wörterbuch der Philosophie* (Ritter, s. v. Ganzes/Teil).

Bei seiner Diskussion von gr. *méros* ‘Teil’ nimmt Aristoteles u. a. folgende semantische Unterscheidungen vor:

(9.1) méros légetai héna mèn trópon eis hò diairetheíē àn tò posòn hopōsoũn [...] diò tà dúo tõn triõn ésti mèn hõs légetai méros, ésti d’ hõs oú. ‘Teil heißt in *einer* Bedeutung dasjenige, in welches das Quantitative irgendwie geteilt werden kann; ... von der Zahl drei z. B. heißt in gewissem Sinne zwei ein Teil. In einem anderen Sinne heißt unter diesem nur dasjenige Teil, welches das Quantitative mißt; daher heißt in dem einen Sinne zwei ein Teil von drei, in dem andern nicht’ (Met. Δ 1023b 12-17)[2]

(9.2) éti eis hà diaireĩtai ȅ ex hõn sýnkeitai tò hólon, ȅ tò eĩdos ȅ tò échon tò eĩdos, hoĩon tẽs sphaíras tẽs chalkẽs ȅ toũ kýbou toũ chalkoũ kaì ho chalkòs méros (toũto d’estìn hē hýlē en hẽi tò eĩdos) kaì hē gōnía méros ‘Ferner heißt dasjenige, worin das Ganze, sowohl der Formbegriff wie das, was die Form an sich hat, zerlegt wird oder woraus es zusammengesetzt ist, Teil desselben (Met. Δ 1023b 19-23).

Im ersten Zitat wird eine Differenzierung vorgenommen, die sich auch in der Neuzeit noch findet; so wurde das englische *part* noch im 18. Jahrhundert in beiden Bedeutungen verwendet. Die zweite in diesem Zitat genannte Bedeutung ist dabei leicht als das erkennbar, was man heute als *Teiler* bezeichnet. Das erste Zitat zeigt darüber hinaus auch die Anwendbarkeit des Begriffs „Teil“ auf Zahlen, und es enthält ein damit zusammenhängendes Verb *diairéō* ‘auseinandernehmen, teilen’. Zu diesem Verb zunächst ein weiteres Beispiel:

(9.3) éstin pou dícha diairoúmenon en állois te kaì en arithmõi: toútōi dȇ tõi kat’ arithmòn ónoma mèn ártion, lógos dé, arithmòs diairoúmenos eis ísa dýo mérē ‘Es findet doch wohl eine Teilung in zwei gleiche Teile so bei anderem wie bei der Zahl statt. Diese Teilung führt nun bei der Zahl den Namen des Geraden, der Begriff aber ist der einer in zwei gleiche Teile teilbaren Zahl“ (Platon, Pl. Lg. 895e)

Wir können die Metaphorik so zusammenfassen: Das Ganze (*tò hólon*) kann in Teile zerlegt, oder umgekehrt, das Ganze aus seinen Teilen zusammengesetzt sein (*synkeĩtai*). Neben dem Verb *diairéō* ist auch das Substantiv *diaíresis* zu nennen, das bei Platon eine begriffliche Zerlegung bezeichnet, die bei diesem bereits ein

[2]Die deutsche Übersetzung ist der Ausgabe von Carvallo und Grassi (Aristoteles 1966) entnommen.

zentrales Instrument wissenschaftlicher Analyse war (s. etwa Gogin - Zimmermann 1975: 102-104).

Wie einflußreich diese Konzepte und ihre sprachliche Formulierung auch im 18. Jahrhundert noch sind, läßt sich exemplarisch an Textstellen und Definitionen aus der *Metaphysik* von Christian Wolff zeigen:

(9.4) Wenn viele Dinge zusammen eins machen; so heisst das eine ein Gantzes; die vielen Dinge aber nennet man in Ansehung des Gantzen seine Theile (Wolff 1751 [1983: 13]).

(9.5) Alle diese Dinge, deren wir uns als ausser uns bewußt sind, bestehen aus vielen Theilen: denn wir finden in einem jeden vieles, so wir von einander unterscheiden können, und diese viele zusammen genommen machet doch nur ein Ding aus, weil die Theile miteinander verknüpfet sind ... Ein dergleichen aus vielen von einander unterschiedenen, aber in gewisser Ordnung auf einander folgenden und mit einander verknüpften Theilen bestehendes Ding, nennen wir ein *zusammengesetztes Ding* (Wolff 1751 [1983: 26]).

Die Beziehung zwischen einem „Ganzen" und einem „zusammengesetzten Ding" erläutert Wolff wie folgt:

(9.6) wir [sehen] ein zusammengesetztes Ding bloß als ein gantzes [an], in so weit es aus gewissen Theilen bestehet, nur daß noch dieses hinzu kommet, daß wir auf die Verknüpfung der Theile mit einander bey der Zusammensetzung, noch Acht haben, worauf man aber in dem Begriffe des Gantzen nicht siehet (Wolff 1751 [1983: 53]).

Wolff (1751 [1983: 35]) definiert zudem als Gegenbegriff zu einem zusammengesetzten Ding ein *einfaches Ding* als ein Ding, das keine Teile hat. Eine wichtige Beziehung zwischen diesen Begriffen, die sich auch in der Mathematik wiederfindet, besteht darin, daß man zusammengesetzte Dinge in einfachere zerlegen kann: „Wo zusammengesetzte Dinge sind, da müssen auch einfache seyn" (Wolff 1751 [1983: 36]).

Der Einfluß dieser philosophischen Begriffe läßt sich auch in mathematischen Texten des 18. Jahrhunderts nachweisen, besonders in einführenden Texten und Enzyklopädieartikeln. In Kästners *Anfangsgründen der Mathematik* etwa macht sich der Autor darüber Gedanken, wie „Größen" überhaupt aufgefaßt werden können:

(9.7) Man kann die Grösse blos als eine Menge von Theilen; als ein Ganzes (Totum) betrachten; oder man kann zugleich auf die Verbindung, und Ordnung dieser Theile sehen, welche ein zusammengesetztes Ding (compositum) ausmachet (Kästner 1792: 3).[3]

Da die Mathematik im 18. Jahrhundert noch als die Wissenschaft von den Größen aufgefaßt wird (Haubrich 1992: 3), kann man schließen, daß sich im damaligen Verständnis die im Zitat formulierte doppelte Perspektive praktisch auf alle mathematischen Objekte anwenden läßt. Gleichzeitig zeigt das Zitat, daß es nicht darauf ankommt, was mathematische Objekte „tatsächlich" *sind*, sondern darauf, wie man sie auffaßt. Dieser Standpunkt wird in allen mathematischen Textsorten artikuliert, was sich anhand von häufig vorkommenden Verben wie *ansehen als*, *concipiren*, *sich einbilden* etc. nachweisen läßt.

Im 19. Jahrhundert wandelt sich allmählich die klassische Auffassung von der Mathematik und sie wird nicht mehr nur in bezug auf Größen definiert. Begriffe wie „das Ganze" finden sich dennoch auch weiterhin:

(9.8) wodurch es [das System, d. h. die Menge, H. B.] als ein organisches **Ganzes**, als eine natürliche **Einheit** erscheint (Dedekind, ca. 1882, in Edwards - Neumann - Purkert 1982: 54)[4]

Das Zitat Dedekinds bezieht sich hier auf den algebraischen Begriff des Körpers, der im 18. Jahrhundert noch unbekannt war und bei Dedekind eine Menge von komplexen Zahlen mit bestimmten Rechenregeln bezeichnet (Kap. 10).

Nachdem wir die zu Beginn dieses Abschnitts aufgeführten Behauptungen exemplarisch nachgewiesen haben, gehen wir nun genauer auf die Metaphorik der Zerlegung und die damit zusammenhängende mathematische Terminologie ein. Zu diesem Zweck beschäftigen wir uns zunächst eingehender mit Primzahlen in der griechischen Mathematik.

9.2 Primzahlen und der Fundamentalsatz der Arithmetik

Primzahlen sind im klassischen Verständnis ganze Zahlen, die nur durch sich selbst und die Zahl 1 teilbar sind bzw. die außer sich selbst und der 1 keine weiteren Teiler

[3] S. a. Zedler, s. v. Zusammengesetztes Ding, und *Encyclopédie*, s. v. composé.

[4] Auf das Adjektiv *organisch* gehen wir an späterer Stelle etwas näher ein (Kap. 10.4).

haben. So ist die Zahl 19 eine Primzahl, die Zahl 18 hingegen nicht, da sie z. B. von der Zahl 6 geteilt wird. Eine ganze Zahl, die keine Primzahl ist, nennt man eine *zusammengesetzte Zahl*.

Die Euklidische Definition von „Primzahl" (*Elemente*, Buch VII, Def. 11 u. 13), die sich in ähnlicher Form auch bei anderen klassischen Autoren findet, ist, wie es damals üblich war, sehr stark von der Sprache der Geometrie geprägt – eine Primzahl ist nach Euklid eine Zahl, die nur „durch die Einheit (*mónas*) gemessen wird".[5]

Die Bezeichnung für „Primzahl" bei Euklid lautet *prō̃tos arithmós*. Dabei bedeutet *prō̃tos* 'vorderster, erster, bedeutsamster', laut Nikomachos deswegen, weil sich Primzahlen nur aus „Einheiten" zusammensetzen lassen und Einheiten als „Anfang" des Zahlbegriffs aufgefaßt wurden (Heath 1956: II, 285). Nikomachos benutzt für „Primzahl" durchgehend die Doppelbezeichnung *prō̃toi kaì asýnthetoi* (Tropfke 1930: 123). Der letzte Bestandteil leitet sich vom Verb *syntithénai* 'zusammenstellen, -setzen, -legen' ab (vgl. etwa dt. *Synthese*). Sachlich bildet dieses Verb eine Art Kausativ zu Platons Begriff des „Zusammengesetztseins" (*synkeĩtai* 'liegt zusammen', s. o. zu Bsp. 9.3).

Für „zusammengesetzte Zahl" findet sich auch bei Euklid die Bezeichnung *sýnthetos arithmós* bzw. bei Nikomachos *deúteroi kaì sýnthetoi*, wofür im Lateinischen dann *numerus compositus* üblich wird (Tropfke 1930: 124). Wir können also festhalten, daß auf der Ebene der Bezeichnungen das Motiv des „Zusammensetzens" bereits im Griechischen und Lateinischen klar ausgeprägt ist. Die verschiedenen Bezeichnungen setzen sich auch in den modernen Sprachen fort. So werden im Englischen des 18. Jahrhunderts zusammengesetzte Zahlen als *composite numbers*, Primzahlen als *prime* oder *incomposite numbers* bezeichnet. Für letztere kommt in den modernen Sprachen auch die Bezeichnung *einfache Zahl* auf. Belege finden sich z. B. bei Euler (1770 [1911: 20]) und im Zedler (s. v. Zahl); im Englischen und Französischen wird entsprechend *simple* verwendet.

Bei der Sichtung der Termini fallen bereits Parallelen zu den im vorigen Abschnitt besprochenen Begrifflichkeiten auf, insbesondere zum Motiv der „Zerlegung". Auch die damit in Zusammenhang stehende „Einfachheit" ist uns bereits bei Wolff begegnet. Um dies besser verständlich zu machen, wollen wir den sog. „Fundamentalsatz der Arithmetik" erläutern.

[5] Diese Ausdrucksweise nimmt zum Teil auch auf die arithmetische Terminologie Einfluß, etwa auf die Bezeichnung *asýmmetros* und dessen lateinische Übersetzung *incommensurabilis* für 'irrational', in denen sich jeweils Verbstämme mit der Bedeutung 'messen' finden.

Jede ganze Zahl läßt sich als ein Produkt von Primzahlen darstellen. So ist etwa die Zahl 2340 das Produkt der Primzahlen 2, 5, 9 und 13: $2340 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 13$. Dabei sind die einzelnen Faktoren, abgesehen von der Reihenfolge, immer eindeutig bestimmt, d. h. es gibt keine anderen Primzahlen, mit denen eine Zerlegung der Zahl 2340 möglich wäre. In dieser „Primfaktorzerlegung“ können, wie in obigem Beispiel, einzelne Zahlen mehrfach auftreten. Der Fundamentalsatz der Arithmetik besagt insgesamt, daß sich jede ganze Zahl eindeutig als ein Produkt von Primzahlen darstellen läßt.

Die Geschichte dieses Satzes ist ein umstrittenes Thema der historischen Mathematikforschung.[6] In dieser Diskussion geht es insbesondere um die Frage, ob der Satz auf Euklid zurückzuführen ist (Buch IX, Prop. 14), eine Meinung, die häufig vertreten wird (s. Knorr 1976: 354).[7] Wir wollen für unsere Zwecke nur festhalten, daß der Satz bei Euklid in geometrischer Formulierung erscheint und unklar ist, ob Euklid mit dem Satz tatsächlich eine „Zerlegung“ von Zahlen verbindet (dieser Punkt wird in den genannten Arbeiten nicht angesprochen). Die oben diskutierten arithmetischen Bezeichnungen sind ein Indiz für diese Annahme. Für Euklid hat der Satz sicher noch keinen „fundamentalen“ Status, da er erst im hinteren Teil der zahlentheoretischen Bücher der *Elemente* erscheint und für die Beweise der vorangegangenen Sätze nicht benötigt wird (Knorr 1976: 361f.). Gauß hingegen plaziert den Satz dann zu Beginn seiner *Disquisitiones Arithmeticae* (Gauß 1801, § 16), und er wird als der erste genannt, der diesen Satz in seiner heutigen Form explizit formuliert hat (Lemmermeyer o. J.); er beweist, daß der Satz auch für sog. „komplexe ganze Zahlen“ gilt. Gauß (ibid.) äußert die Meinung, daß Euklid den Satz schon bewiesen habe und kritisiert, daß die *eindeutige* Zerlegbarkeit bei modernen Autoren stillschweigend angenommen werde. Lemmermeyer (o. J.) kommt in seiner Diskussion der Geschichte dieses Satzes zu dem Schluß, daß der Satz (für ganze Zahlen) vor 1840 nur bei Gauß erwähnt wird, es aber gleichzeitig durchaus bekannt gewesen sei, daß analoge Sätze für andere Zahlbereiche nicht unbedingt gelten (s. dazu Kap. 9.4).

Es läßt sich in jedem Fall belegen, daß spätestens seit dem 18. Jahrhundert die Zerlegung ganzer Zahlen mit Verben ausgedrückt wird, die die Bedeutung ‘zerlegen’ haben.[8] „Zerlegung“ heißt dann, daß eine Zahl in ein Produkt von Teilern dieser Zahl, nicht unbedingt von Primzahlen, zerlegt wird; „zerlegen“ impliziert

---

[6] S. u. a. Hendy (1975), Knorr (1976), Lemmermeyer o. J., Magidin - McKinnon (erscheint).

[7] Bei Euklid lautet der Satz: „Die kleinste Zahl, die von gewissen Primzahlen gemessen wird, läßt sich durch keine andere Primzahl messen außer den ursprünglich gemessenen“.

[8] Eine Alternative sind Verben mit der Bedeutung ‘auflösen’.

also nicht die Zerlegung in kleinste Bestandteile, sondern lediglich in kleinere Bestandteile. So heißt es in der *Encyclopédie* (s. v. décomposition): „on *décompose* un nombre dans ses facteurs". Im DWB (s. v. zerlegen, zerfällen) finden sich entsprechende Belege für die Zerlegung von Zahlen aus dem 18. Jahrhundert.

In der modernen Auffassung von Primzahlen tritt auch in der sprachlichen Formulierung der Definition die Metaphorik der Zusammensetzung hervor. Definitionen, in denen ein Verb mit der Bedeutung 'messen' verwendet wird, verschwinden im 19. Jahrhundert allmählich, und Primzahlen werden als Zahlen definiert, die außer sich selbst und der Zahl 1 keine weiteren *Teiler*, keine kleineren Bestandteile haben. Die Metaphorik der Zerlegung wird zunehmend weiter ausgeschöpft:

(9.9) Jede Zahl, welche ausser sich selbst und der Einheit [der Zahl 1, H. B.] noch andere Divisoren hat, heisst *zusammengesetzt* ... Diese Benennung wird gerechtfertigt durch den folgenden *Fundamentalsatz*: *Jede zusammengesetzte Zahl lässt sich stets und nur auf eine einzige Weise aus einer endlichen Anzahl von Primzahlen darstellen.* ... Die Primzahlen bilden daher gewissermaassen das **Material**, aus welchem alle anderen Zahlen sich **zusammensetzen** lassen (Dirichlet 1863: 13, 15).

Nicht-terminologische Zerlegungsmetaphorik (*Material*) findet sich inbesondere dann, wenn die eindeutige Zerlegbarkeit in kleinste, nicht weiter zerlegbare Bestandteile gemeint ist.

9.3 Die Enthalten-Relation

9.3.1 Behältnismetaphorik und frz. *contenir*

Die Behältnismetaphorik ist durch verschiedene Untersuchungen aus dem Bereich der kognitiven Linguistik gut bekannt.[9] Sie ist nicht auf die Gemeinsprache beschränkt, sondern auch in Fachsprachen fast überall anzutreffen. Dies gilt insbesondere für die Mathematik. Lakoff und Núñez (2000: 30) betonen die Bedeutung der Behältnismetaphorik für die Mathematik, bieten diesbezüglich allerdings keine historischen Betrachtungen.

Aus der Arithmetik ist uns bereits bekannt, daß Zahlen als Behältnisse konzeptualisiert werden (Kap. 7.2.1):

[9] Z. B. Lakoff (1987: 271-273), Johnson (1987: 21-23, 30-37).

(9.10) 6 is **contained** 3 times **in** the number 18 (*Encyclopædia Britannica* (1771), s. v. Arithmetick, 376)

Als Galois den Begriff der „Gruppe“ in die Algebra einführt, verwendet er ebenfalls die Behältnismetaphorik:

(9.11) le groupe de l'équation qui **contenait** en tout 24 substitutions (Galois 1976: 61/63)

Gruppen sind demnach Behältnisse für ihre Elemente. Diese Metaphorik scheint uns erklärungsbedürftig, denn während etwa bei Wörtern die Unterscheidung zwischen Form und Inhalt intuitiv leicht fällt, ist dies bei Gruppen nicht der Fall. D. h., Gruppen enthalten zwar etwas, haben aber „eigentlich“ keinen Inhalt. Wie läßt sich das erklären?

Wir haben im vorigen Kapitel einige Beispiele dafür gegeben, daß *groupe* und *classe* synonym verwendet werden. Die semantische Gemeinsamkeit besteht darin, daß es sich um Mengen von Objekten handelt, die aufgrund eines Kriteriums zusammengefaßt werden.

Bei *classe* wiederum ist die Behältnismetaphorik wesentlich leichter nachvollziehbar, denn Klassen enthalten ihre Glieder durch einen Oberbegriff, der die Klasse zusammenhält; dabei ist der Oberbegriff grundsätzlich unabhängig von den Gliedern, die er umfaßt. Die Metaphorik ist bei *classe* leicht nachweisbar, z. B. heißt es bei Rousseau (1762 [1964: 447]) in bezug auf eine Einteilung von Bürgern: „En sorte que les premières classes étoient **remplies** par les riches, les dernieres par les pauvres, et les moyennes par ceux qui jouissoient d'une fortune médiocre“. Wir vermuten nun, daß die Metaphorik von *classe* auf *groupe* übertragen wurde. Grundlage dafür sind die gemeinsamen abstrakten semantischen Merkmale. Man kann jedoch in bezug auf beide Ausdrücke nicht in demselben Sinn von Metaphorik sprechen, denn, wie eben dargelegt, ist die Behältnismetaphorik keine originäre Komponente von *groupe*. Wenn wir diesen Befund auf dem Hintergrund der Lakoffschen Metapherntheorie betrachten, zeigt sich erneut,[10] daß sie die historischen Entwicklungen nicht adäquat berücksichtigt; sie ist ahistorisch. In dieser Theorie wird großer Wert darauf gelegt, daß konzeptuelle Metaphern auf körperlicher Erfahrung beruhen (Kap. 3). Die Behältnismetaphorik jedoch weist eine lange Tradition auf, durch die die körperliche Erfahrung „überlagert“ wird. Selbst wenn konzeptuelle Metaphern dem unreflektierten Benutzer den Rückgriff auf körperliche Erfahrung nahelegen, kann der wissenschaftliche Sprachgebrauch dadurch

[10] Vgl. unsere Anmerkungen in Kap. 3.5.2; s. a. Kap. 9.5.

allein nicht verstanden werden; der Sachverhalt ist komplexer, als er sich in der Lakoffschen Konzeption darstellt. Das Beispiel *groupe* zeigt, daß dieser Überlagerungseffekt, möglicherweise gerade oder sogar ausschließlich bei abstrakten wissenschaftlichen Ausdrücken dazu führen kann, eine Metapher auf Bereiche zu übertragen, in denen sie einen sekundären Charakter aufweist. Es zeigt auch, daß die in der kognitiven Metapherntheorie gerne behauptete Universalität vieler Metaphern tatsächlich vorhandene Traditionen verschleiert bzw. daß die Theorie für wissenschaftliche Kommunikation keine hinreichenden Erklärungen bietet.[11]

Der oben dargelegte semantische Wandel von *contenir* verläuft entsprechend der Übertragung. Die Metaphorik wird im Verlauf des 19. Jahrhunderts auch auf andere algebraische Strukturen angewendet; sie äußert sich nicht nur bei Verben mit der Bedeutung 'enthalten' oder Präpositionen mit der Bedeutung 'in', sondern auch in Form anderer lexikalischer Verbindungen:

(9.12) daß hierbei der gesammte **Zahlen-Inhalt** des Körpers durchaus unverändert bleibt (Dedekind 1876 [1931: 469])

(9.13) das **leere** System, welches gar kein Element enthält (Dedekind 1888 [1932: 345])

Nun verwendet Galois *contenir* nicht nur für eine Relation zwischen Gruppen und ihren Elementen, sondern auch für eine Relation zwischen Gruppen, d. h. zwischen Objekten derselben Art:

(9.14) Théorème: Si un groupe est **contenu dans** un autre, celui-ci sera la somme d'un certain nombre de groupes semblables au premier, qui en sera dit un DIVISEUR (Galois 1976: 73; Kapitälchen im Original).

Diese Verwendung von *contenir* hat einen anderen Ursprung als die vorige, da hier keine Übertragung aus der Gemeinsprache vorliegt, sondern eine aus der Arithmetik. Zur Begründung dieser Behauptung betrachten wir das Zitat etwas genauer.

Das Theorem enthält nicht nur einen mathematischen Satz, sondern auch eine Definition von *diviseur*. Diese besagt folgendes: Ist eine Gruppe H in einer Gruppe G enthalten, gehören also alle Permutationen von H auch zu G, dann bezeichnet Galois H als *diviseur* von G.[12] Der mittlere Teil des Zitats beinhaltet die eigentliche mathematische Aussage: Wenn G einen „Teiler" (*diviseur*) hat,

[11] Auf in diese Richtung gehende Kritik hatten wir bereits in Kap. 3.6 hingewiesen.

[12] Im ersten Teil des Zitats bezieht sich *groupe* auf eine „tatsächliche" Gruppe im Sinne einer abgeschlossenen Menge von Permutationen.

dann läßt sich G als „Summe“ mehrerer Gruppen gleicher Größe auffassen, ohne daß dabei ein „Rest“ entsteht.[13] Als Beispiel gibt Galois (1976: 63) eine Gruppe von zwölf Elementen an, die sich in drei Gruppen von jeweils vier Elementen „zerlegen“ (*décomposer*) läßt.[14]

Die Analogie besteht also zur Division in der Arithmetik: Bei der Division will man feststellen, „combien de fois le diviseur est contenu dans le dividende“ (*Encyclopédie*, s. v. division). Bei der Zerlegung (*décomposition*) von Gruppen stellt man fest, wie oft ein „Teiler“ (*diviseur*) in einer gegebenen Gruppe enthalten ist. Wir erkennen hier ein erstes Beispiel für eine Verbindungsmetapher, nach der die Algebra als Arithmetik aufgefaßt wird. Diese Metapher wird im Laufe des 19. Jahrhunderts eine große Rolle in der mathematischen Theoriebildung und Terminologie spielen.

Für das Verb *contenir* können wir also festhalten, daß die beiden algebraischen Verwendungen bei Galois unterschiedliche Ursprünge haben. Als Relation zwischen Gruppen und Elementen wird es von der Gemeinsprache auf die Algebra übertragen, als Relation zwischen Gruppen jedoch liegt eine Übertragung aus der Arithmetik vor.[15]

9.3.2 Untergruppen

Das oben diskutierte Beispiel 9.14 gibt nicht nur Aufschluß über die semantische Entwicklung von *contenir*, sondern auch über die des Fachausdrucks *diviseur*. Dieselbe Analogie, die zur Übertragung von *contenir* in die Algebra geführt hat, können wir für den Bedeutungswandel von *diviseur* heranziehen: Die arithmetische Bedeutung ‘Teiler’ bildet die Grundlage für die algebraische Bedeutung ‘Untergruppe’, also für eine Gruppe, die ganz in einer gegebenen Gruppe enthalten ist.[16]

Zur Vorgeschichte von *diviseur* sei folgendes angemerkt: Der Ausdruck gelangte über lat. *divisor* ins Französische; seine Bedeutung geben Lewis und Short mit ‘divider, distributer’ (z. B. in Zusammenhang mit der Verteilung von Land und Besitz) wieder. Für unseren Kontext ist aber nur die arithmetische Bedeutung relevant. Im mittelalterlichen Latein kommt *divisor* in der arithmetischen

[13] Diese „Gruppen“ sind dann nicht abgeschlossen, sondern sog. „Nebenklassen“. S. Kap. 8.3.3.

[14] Die mathematischen Einzelheiten können wir für unsere Zwecke vernachlässigen. S. Dahan (1980: 287-290).

[15] Am Rande sei hier vermerkt, daß die mathematischen Bedeutungen von *contenir* (es gibt z. B. auch alte geometrische Bedeutungen) in einschlägigen französischen Wörterbüchern, insbesondere im TLF, DHLF und im DAF, nicht erfaßt sind.

[16] Für Beispiele erinnern wir an unsere Bemerkungen über Untergruppen in Kap. 7.5.

Bedeutung vor (TLL, s. v. divisor). Das Französische „kopiert" diese Bedeutungen (auch in ihrer historischen Reihenfolge). Galois ist der erste, der *diviseur* zur Bezeichnung einer Menge verwendet und der das Wort aus der Arithmetik in die Algebra überträgt.

Die Bezeichnung wird seit Mitte des 19. Jahrhunderts auch von einigen anderen Autoren verwendet bzw. in andere Sprachen übertragen. Betti (1852 [1903: 41]) übersetzt den Ausdruck als it. *divisore*, Cayley (1854b [1963: II, 132]) sagt *submultiple*, und Frobenius - Stickelberger (1879: 220) verwenden *Divisor*. Dyck (1882: 13) spricht in diesem Zusammenhang auch von *Theil*, wohingegen Weber (1896: 12) zwischen *Theil* 'Untermenge, Teilmenge' und *Theiler* 'Untergruppe' unterscheidet und für *Theiler* auch die Alternative *Divisor* nennt (Weber 1896: 7).

Nach der Mitte des Jahrhunderts verbreiteten sich auch andere Bezeichnungen, die hier mit wahrscheinlichen Erstbelegen angegeben werden, nämlich *sous-groupe* (Jordan 1861 [1961: 3]), *Untergruppe* (Lie 1874 [1924: 536]), *sub-group* (Cole 1887: 51).[17] Alle diese Bezeichnungen werden jeweils ohne weitere Erläuterung eingeführt. Bei Cole ist davon auszugehen, daß er sich an Felix Klein orientiert, der *Untergruppe* schon in den 1880er Jahren verwendete. Eine Beeinflussung liegt nahe, da Cole deutschsprachige Arbeiten intensiv zur Kenntnis nahm (er übersetzte u. a. auch Nettos *Substitutionentheorie* (Netto 1882)) und er sich schon im Titel („Klein's Ikosaeder") auf Kleins „Ikosaederbuch" (Klein 1884) bezieht, in dem letzterer *Untergruppe* durchgehend verwendet (Klein 1884: 6 und passim). Da sich zudem Lie und Klein terminologisch mehrfach an Jordan anlehnten (s. Kap. 9.7), ist es wahrscheinlich, daß Jordans Ausdruck auch auf die deutsche Bildung maßgeblichen Einfluß ausgeübt hat.

Der entsprechende Wortbildungstyp, nach dem ein Substantiv durch Zusammensetzung von z. B. *sous* und einem Substantiv gebildet werden kann, ist im Französischen (und analog auch im Deutschen und Englischen) bereits länger bekannt.

---

[17] Bei der deutschen Bezeichnung stützen wir uns auf Wußing (1969: 68), bei der englischen auf die Website von Jeff Miller (s. Kap. 5.8.4).

9.4 Beispiele für die Zerlegung mathematischer Objekte im 19. Jahrhundert

Wir haben im Zusammenhang mit Primzahlen gesehen, daß in der klassischen Mathematik, zumindest auf der Ebene der Bezeichnungen, das Motiv der „Zerlegung“ bzw. der „Zusammensetzung“ eine wichtige Rolle spielte (Kap. 9.2).[18] Es sollen nun Erweiterungen und Übertragungen dieser Begriffe diskutiert werden. Dabei gehen wir zunächst auf zwei zahlentheoretische und anschließend auf verschiedene algebraische Beispiele ein. Da wir die Analogien zum Fundamentalsatz der Arithmetik hervorheben wollen, verstehen wir unter *Zerlegung* im folgenden die Zerlegung in kleinere, einfachere Objekte, die von derselben Art sind wie das zerlegte Objekt. Andere Bedeutungen dieser Ausdrücke wie z. B. die Zerlegung einer ganzen Zahl in eine Summe von Quadratzahlen werden nicht berücksichtigt.

9.4.1 Ernst Eduard Kummer und „ideale Zahlen“

Wie wir bereits in Kap. 3.6 angedeutet haben, wurden im 19. Jahrhundert einige mathematische Analogien explizit „erzwungen“. Eines dieser Beispiele wollen wir nun näher betrachten.

Ernst Eduard Kummer (1810-1893) untersuchte (in seiner Terminologie) *complexe Zahlen.*[19] Es handelte sich dabei allerdings nicht um komplexe Zahlen im Gaußschen Sinne, sondern um bestimmte komplexe Zahlen, die wesentlich komplizierter aufgebaut sind.[20] Diese Zahlen, so stellte Kummer schnell fest, verhalten sich in einem entscheidenen Punkt nicht wie die ganzen Zahlen, da sie keine dem Fundamentalsatz der Arithmetik entsprechende Eigenschaft erfüllen, ein Sachverhalt, den Kummer aus mathematischen Gründen sehr bedauerte („Maxime dolendum videtur ...“, Kummer 1847d [1975: 182]). D. h., bei diesen „complexen“ Zahlen kommt es vor, daß ein- und dieselbe Zahl auf *mehrfache* Weise in „Prim-

[18] Im Deutschen wird zumeist *Zerlegung*, gelegentlich auch *Zerfällung* oder – seltener – *Decomposition* gesagt, im Französischen bzw. Englischen sind *décomposition* bzw. *decomposition* üblich.

[19] S. Edwards (1975, 1977a, 1980: 324-337), Neumann (1981). In diesen Arbeiten wird auch herausgestellt, daß der Anstoß für Kummers Arbeiten über ideale Zahlen nicht die Fermatsche Vermutung war, wie in zahlreichen mathematikgeschichtlichen Darstellungen behauptet wird, sondern andere zahlentheoretische Probleme (s. den nächsten Abschnitt).

[20] Die genaue Definition dieser Zahlen spielt für das folgende keine wesentliche Rolle und wird daher hier nicht ausgeführt. S. Edwards (1980: 324-337), Magidin - McKinnon (erscheint).

zahlen“ zerlegt werden kann, wobei „Primzahl“ ähnlich wie bei den ganzen Zahlen definiert wird.[21]

Kummers Idee bestand nun darin, weitere, nicht zu dem betrachteten Zahlbereich gehörige Zahlen hinzuzufügen, um dadurch die gewünschte Analogie zum Fundamentalsatz der Arithmetik zu erzwingen:

(9.15) Der Einführung solcher idealen complexen Zahlen liegt derselbe einfache Gedanke zu Grunde, wie der Einführung der imaginären Formeln in die Algebra und Analysis; namentlich bei der Zerfällung der ganzen rationalen Functionen in ihre einfachsten Factoren, die linearen (Kummer 1847a [1975: 203]).

Kummer spielt hier auf die Zerfällung bestimmter Funktionen in einfachere Faktoren an. Wir wollen diesen Sachverhalt kurz vereinfacht erläutern. Ein Polynom ist ein mathematischer Ausdruck der Form $X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1X^1 + a_0X$. X ist dabei eine Unbestimmte, die Zahlen a_i (die *Koeffizienten* des Polynoms) stammen aus einem vorgegebenen Zahlbereich. Setzt man ein solches Polynom gleich Null und läßt man für die Unbestimmte X „normale“ komplexe Zahlen zu, dann kann man das Polynom vollständig in ein Produkt einfacher Polynome zerlegen. Diese einfachen Polynome sind *linear*, d. h. sie sind alle von der Form $X - a$. Umgekehrt bedeutet dies, daß sich das ursprüngliche Polynom als Produkt einfacherer, linearer Polynome darstellen läßt. Diesen Satz (bzw. ein damit eng verwandtes Ergebnis) hatte Gauß auf mehrfache Weise bewiesen. Er stellt bereits ein algebraisches Analogon zum Fundamentalsatz der Arithmetik dar.[22]

Wenn Kummer nun von der „Einführung der imaginären Formen in die Algebra und Analysis“ spricht, dann meint er folgendes: Der Fundamentalsatz der Algebra gilt nur für komplexe Zahlen, d. h. er gilt *nicht* für reelle Zahlen. Geht man nun von den letzteren aus und erweitert den zugelassenen Zahlbereich um „imaginäre Formeln“, d. h. um imaginäre oder, was dasselbe ist, komplexe Zahlen, dann kann man Polynome vollständig in ihre einfachsten Bestandteile zerlegen –

[21] Zur Erläuterung ein analoges Beispiel aus einem einfacheren Zahlbereich (nach Kline 1972: 820): Man betrachte die Zahlen der Form $a + b \cdot \sqrt{-5}$, wobei a und b gewöhnliche ganze Zahlen sind. $a+b\cdot\sqrt{-5}$ wird hier also als *eine* Zahl, nicht als Summe zweier Zahlen, aufgefaßt. In diesem Zahlbereich gilt z. B. $6 + 0 \cdot \sqrt{-5} = 6 = 2 \cdot 3 = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5})$, wobei alle auftretenden Faktoren $2, 3, 1 + \sqrt{-5}, 1 - \sqrt{-5}$ „Primzahlen“ sind. Die Zerlegung ist hier also möglich, aber sie ist nicht eindeutig.

[22] Dieser Satz ist auf vielfache Weise bewiesen worden. Netto - La Vavasseur (1907) führen bereits fast hundert verschiedene Beweise auf. Einen Überblick über die Geschichte des Satzes findet man bei Remmert (1992: 79-89).

in Analogie zum Fundamentalsatz der Arithmetik. Die Einführung idealer Zahlen bzw. idealer Primfaktoren zusätzlich zu den von Kummer betrachteten speziellen komplexen Zahlen dient nun demselben Zweck, nämlich der vollständigen Zerlegung dieser „complexen" Zahlen in einfachere Faktoren.

Fassen wir das bisher Gesagte zusammen. Die von Kummer untersuchten „complexen Zahlen" lassen sich nicht in vollständiger Analogie zum Fundamentalsatz der Arithmetik zerlegen, da die Zerlegung innerhalb der betrachteten Zahlbereiche nicht unbedingt eindeutig möglich ist. Diese Eigenschaft ist aber für die mathematische Argumentation äußerst nützlich. Er führt daher weitere, „ideale" Zahlen ein, die *nicht* zum untersuchten Zahlbereich gehören (man kann auch sagen, sie existieren nicht in diesem Zahlbereich), mit denen sich aber die gewünschte Analogie herstellen läßt (Knobloch 1989: 44, Weyl 1980: 23).

Damit erklärt sich auch die Bezeichnung *ideal*. Die *wirklichen Zahlen* sind die untersuchten, vorliegenden und in diesem Sinne existierenden Zahlen, die idealen Zahlen gehören nicht zu den wirklichen Zahlen. Sie sind daher „fiktiv", man muß sie sich vorstellen und so tun, als ob sie existierten, und kann sie dann gewinnbringend in der mathematischen Argumentation einsetzen.

Diese „Methode der idealen Elemente" (Weyl 1980: 23) war damals nicht völlig neu und wurde z. B. auch in der Geometrie eingesetzt.[23] Wie wir im folgenden zeigen wollen, erschien sie Kummer aber doch in hohem Maße erläuterungsbedürftig. Ideale Zahlen warfen eine ontologische, weniger eine mathematische Problematik auf, die erklärt werden mußte (Edwards 1980: 325, Gray 1992: 231).

Kummer gibt in seinen Arbeiten keine Definition idealer Zahlen (Edwards 1983: 9). In einem Brief deutet er aber die ontologische Problematik an: „Sie [ideale Primfaktoren, H. B.] sind, will man sie begreifen im philosophischen Sinne, ganz abstruse Dinge, sonst aber sind sie in mathematischer Hinsicht ganz einfache Ausdrücke bestimmter Eigenschaften gegebener complexer Zahlen" (Brief von 1845 an Kronecker, in Kummer 1975: 97).[24] In seinen Aufsätzen zieht Kummer zahlreiche Analogien heran, um die Einführung der idealen Zahlen zu rechtfertigen (eine dieser Analogien besteht zu den oben angesprochenen „imaginären Formeln"). Darunter sind einige mathematische Analogien, die er jeweils nur kurz anspricht, und eine auffällige Analogie zur Chemie, die er mehrfach ausführlich erläutert, in zwei Artikeln (Kummer 1847b, 1851) und in einem Brief an Kronecker aus dem Jahr

[23]S. Cassirer (1977: 454-473), der von einem „methodischen Grundmotiv" der Mathematik spricht (454).

[24]S. Edwards (1980: 325).

1845 (in Kummer 1975: 68f.).[25]

Offenbar drängt es ihn, diese Analogie näher auszuführen: „Ich kann nicht umhin, auf die große Analogie aufmerksam zu machen, welche diese Theorie [der idealen Zahlen, H. B.] mit der *Chemie* hat“ (Kummer 1847b [1975: 243f.]). Er fährt fort:

(9.16) Der chemischen Verbindung entspricht für die complexen Zahlen die Multiplication; den Elementen, oder eigentlich den Atomgewichten derselben, entsprechen die Primfactoren; und die chemischen Formeln für die Zerlegung der Körper sind genau dieselben, wie die Formeln für die Zerlegung der Zahlen. Auch selbst die idealen Zahlen unserer Theorie finden sich in der Chemie, vielleicht nur allzuoft, als hypothetische Radikale, ... [die], so wie die idealen Zahlen, in den Zusammensetzungen ihre Wirklichkeit haben. Das Fluor, für sich bisher nicht darstellbar und noch den Elementen zugezählt, kann als Analogon eines idealen Primfactors gelten ... (Kummer 1847b [1975: 244]).

Dieser Auszug aus seiner Ausführung der Analogie setzt offensichtlich eine gute Kenntnis der verwendeten chemischen Begriffe voraus, zumal diese nicht weiter erläutert werden. Er ist auch deswegen bemerkenswert, weil Kummer der Analogie mehr als eine Druckseite einräumt – zweifellos eine große Ausnahme für einen wissenschaftlichen Artikel.[26]

Es geht uns hier nicht um alle Einzelheiten der Analogie, sondern um die idealen Zahlen selbst, deren chemische Entsprechung im Zitat das Element Fluor ist. Fluor kommt wegen seiner hohen Reaktivität in der Natur nur in chemischen Verbindungen vor; es konnte zum damaligen Zeitpunkt noch nicht isoliert werden (dies gelang erst 1886).[27] Analog dazu kommen auch die idealen Zahlen nur in Verbindung mit „wirklichen Zahlen“ vor – sie werden ja nur dann eingeführt, wenn sie zu deren Zerlegung erforderlich sind. Da das Fluor, wie Kummer sagt, zu den Elementen gezählt wird, ist es mit chemischen Mitteln auch nicht weiter zerlegbar.

Diese Analogie führt Kummer dann auf einen allgemeineren Begriff zurück. Für ihn sind die Parallelen nämlich „nicht etwa als bloße Spiele des Witzes“ zu

[25] Beispiele für solche mathematischen Analogien finden sich bei Kummer (1975: 97) [Brief von 1845 an Kronecker] und Kummer (1847a [1975: 209], 1851 [1975: 415f.]).

[26] Diese Ausführungen wiederholt er in französischer Sprache in Kummer (1851 [1975: 433f.]).

[27] Im Nachhinein kommentierte Felix Klein (1926: 322f.) daher: „Er [Kummer, H. B.] macht ... ein unglückliches chemisches Gleichnis, indem er sich auf das Fluor beruft, welches die Chemiker als ein Gas bezeichnen, trotzdem es sich nie habe isolieren lassen. – Da sieht man, was es mit der dialektischen Logik auf sich hat. Längst ist Moisson gekommen und hat das Fluor in Flußspatgefäßen mit Platinelektroden wirklich isoliert!“

betrachten, sondern sie „haben ihren guten Grund darin, daß die Chemie, so wie der hier behandelte Teil der Zahlentheorie, beide denselben Grundbegriff, nämlich den der *Zusammensetzung*, wenn gleich innerhalb verschiedener Sphären des Seins, zu ihrem Principe haben; woraus folgt, daß auch die diesem verwandten, mit ihm nothwendig gegebenen Begriffe sich in beiden auf ähnliche Weise finden müssen" (Kummer 1847b [1975: 244]).

Kummer führt also die mathematischen und chemischen Gegebenheiten auf einen gemeinsamen Oberbegriff, nämlich den der Zusammensetzung zurück (im Französischen verwendet Kummer (1851 [1975: 434]) dafür den Ausdruck *composition*) und zieht den Schluß, daß die „Chemie der natürlichen Stoffe und die hier behandelte Chemie der complexen Zahlen ... beide als Verwirklichung des Begriffs der Zusammensetzung und der davon abhängigen Begriffs-Sphäre anzusehen" (Kummer 1847b [1975: 244]) sind.[28]

Die chemische Analogie, die Kummer heranzieht, dient insgesamt dazu, die Einführung der idealen Zahlen zu rechtfertigen und sie ontologisch zu verorten. Sie zeigt, daß das philosophische Gedankengut, zu dem der Begriff der Zusammensetzung zu zählen ist, in der Mathematik durchaus bekannt ist. Aufschlußreich in diesem Zusammenhang sind einige Kommentare von Carl Friedrich Gauß über „die wahre Metaphysik der imaginären Größen" (Gauß 1831b: 175), die ebenfalls zu den idealen Elementen zählen: „die den reellen Größen gegenübergestellten imaginären – ehemals, und hin und wieder noch jetzt, obwohl unschicklich, *unmögliche* genannt – sind immer noch weniger eingebürgert als nur geduldet, und erscheinen also mehr wie ein an sich inhaltleeres Zeichenspiel, dem man ein denkbares Substrat unbedingt abspricht" (ibid.).[29] Den imaginären Zahlen kann jedoch „ebenso gut ein Gegenstand unterlegt werden, wie den negativen" (ibid.), was Kummer durch den Begriff „Verwirklichung" ausdrückt. Ohne daß wir dessen Geschichte hier im einzelnen darlegen wollten, sei darauf hingewiesen, daß etwa J. G. Fichte darunter die Annahme versteht, „daß einem Begriff ein äußeres Faktum der Sinnenwelt entspricht" (Ritter, s. v. Realisierung, Realisation).

Sind ideale Elemente erst einmal eingeführt und gerechtfertigt, dann eröffnen sie eine neue „geistige Perspektive" (Cassirer 1977: 460, in bezug auf imaginäre Zahlen und auf idealen Zahlen im Kummerschen Sinne), d. h. sie ermöglichen es,

[28] Seine Analogie wurde von Hankel (1867: 103) bestätigt.

[29] Ebendiesen Ausdruck *Substrat* verwendet auch Hankel (1867: 103) in seiner Diskussion der Kummerschen idealen Zahlen. – Zu diesen und weiteren diesbezüglichen Anmerkungen von Gauß s. a. Mehrtens (1990: 26-33).

die Objekte, zu denen man die idealen Elemente hinzugefügt hat, besser zu verstehen. Kummer (1847a [1975: 207]) drückt dies anhand einer Metapher aus: „Auch sieht man, daß die idealen Primfactoren die innere Natur der complexen Zahlen aufschließen, sie gleichsam durchsichtig machen und das innere crystallinische Gefüge derselben zeigen“.[30]

Da Kummer nach eigener Aussage die Mathematik der idealen Zahlen als unproblematisch ansieht und er mit seiner chemischen Analogie auf weitergehende, ontologische Fragen eingeht, ist es nur konsequent, den Blickwinkel zu erweitern und philosophische Begrifflichkeiten in der Argumentation heranzuziehen. Ob die chemische Analogie schon bei der Entstehung der Theorie eine z. B. heuristische Funktion hatte, ist im Nachhinein allerdings nicht festzustellen.

9.4.2 Gabriel Lamés „Beweis“ der Fermatschen Vermutung

In Zusammenhang mit Kummers idealen Zahlen wollen wir ein weiteres Beispiel diskutieren, das einen ganz anderen Punkt illustriert, nämlich die aus der Metapherntheorie bekannte Auffassung, daß Metaphern auch zu Fehlurteilen und -schlüssen führen können (s. etwa Hoffman 1985: 333-336).

Als Beispiel ziehen wir einen fehlerhaften Beweis der berühmten „Fermatschen Vermutung“ heran, die Pierre de Fermat im 17. Jahrhundert aufgestellt hatte.[31] Diese besagt, daß die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq 3$ keine Lösung mit ganzen Zahlen x, y, z hat.[32] Fermat ist den Beweis schuldig geblieben, und bis etwa zur Mitte des 19. Jahrhunderts war die Vermutung nur für einige kleine natürliche Zahlen n bewiesen worden. So ist der Beweis für $n = 3$ mit elementaren Mitteln möglich, doch kam es darauf an, die Behauptung für *alle* natürlichen Zahlen zu beweisen.

Im Jahr 1847 erregte Gabriel Lamé (1795-1870) großes Aufsehen, als er einen solchen allgemeinen Beweis ankündigte (Lamé 1847a) und eine entsprechende

[30] S. a. Kummer (1851 [1975: 415f.]): „nous croyons surtout que les facteurs idéaux rendent visible, pour ainsi dire, la constitution intérieure des nombres, en sorte que leurs propriétés essentielles soient mises dans leur jour“.

[31] Einen zu dem im folgenden diskutierten analogen Fehler hatte z. B. auch Euler in diesem Zusammenhang begangen. S. Edwards (1980: 323).

[32] Für $n = 2$ ist die Gleichung lösbar; die einfachste Lösung ist $x = 3$, $y = 4$, $z = 5$. Im folgenden wird $n \geq 3$ vorausgesetzt.

Schrift bei der *Académie des Sciences* einreichte.[33] Im selben Jahr erschienen dann zwei Arbeiten Lamés, von denen sich die erste (Lamé 1847c) mit dem Spezialfall $n = 5$, die zweite (Lamé 1847d) mit dem allgemeinen Fall befaßte.

Lamés Beweisidee können wir mit Edwards (1975: 220f.) so skizzieren: Sie besteht darin, die linke Seite der Gleichung $x^n + y^n = z^n$ als ein Produkt komplexer Zahlen darzustellen. Dafür verwendete Lamé sog. *Kreisteilungszahlen*, deren genaue Beschaffenheit aber für das Verständnis der folgenden Ausführungen nicht beschrieben werden muß.[34] Aus dieser Produktdarstellung ergäbe sich dann durch algebraische Umformungen die Unmöglichkeit der Gleichung $x^n + y^n = z^n$.

Entscheidend für uns ist die Annahme Lamés, daß für diese Kreisteilungszahlen ein Analogon zum Fundamentalsatz der Arithmetik gelte, d. h. daß sie sich eindeutig in komplexe Primzahlen zerlegen lassen. Er orientiert sich dabei auch an bereits vorhandenen (korrekten) Beweisen für die Spezialfälle $n = 3$ und $n = 5$, bei denen die Zerlegbarkeit in den entsprechenden komplexen Zahlbereichen eindeutig möglich ist (Gray 1992: 230).

Josef Liouville (1809-1882) meldete sogleich Zweifel an und stellte heraus, daß diese Analogie erst zu beweisen sei:

(9.17) quelques essais me portaient à croire qu'il faudrait d'abord chercher à établir pour les nouveaux nombres complexes un théorème analogue à la proposition élémentaire pour les nombres entiers ordinaires, qu'un produit ne peut être décomposé en facteurs qu'une seule manière. ... N'y a-t-il pas là une lacune à remplir? (Liouville 1847: 316)

Lamé glaubte, diese auch von ihm eingestandene Lücke füllen zu können (Lamé 1847b: 352), doch die Inkorrektheit des Beweises wurde kurz darauf in Form eines Briefes von Kummer an Liouville endgültig offenbar:

(9.18) Quant à la proposition élémentaire pour ces nombres complexes, *qu'un nombre complexe ne peut être décomposé en facteurs premiers qu'une seule manière*, que vous regrettez très-justement dans cette démonstration défectueuse en outre en quelques autres points, je puis vous assurer *qu'elle n'a pas lieu généralement* tant qu'il s'agit de nombres complexes de la forme $\alpha_0 + \alpha_1 r + \alpha_2 r^2 + ... + \alpha_{n-1} r^{n-1}$ (Kummer 1847b [1975: 298]).

[33] Auch Cauchy kündigte daraufhin einen Beweis an, dem allerdings ein ähnliches Schicksal beschieden war.

[34] Die Gleichung hat dann die Form $(x + y) \cdot (x + ry) \cdot (x + r^2 y) \cdot ... \cdot (x + r^{n-1} y) = z^n$, wobei r eine Einheitswurzel ist ($r^n = 1$).

Wie schon Liouville (1847) anmerkt, ist dies nicht der einzige Fehler in Lamés Beweis; sicher ist es jedoch der schwerwiegendste (Edwards 1975: 221). Dennoch zeigt das Beispiel, daß Analogien auch in der Mathematik zu fehlerhaften Schlüssen führen bzw. dazu beitragen können – insbesondere hat die spezielle hier betrachtete Übertragung ihr metaphorisches Potential nicht verloren. Die Annahme, daß sich die von Lamé verwendeten Kreisteilungszahlen grundsätzlich eindeutig zerlegen lassen, lag für ihn sicher auch deshalb nahe, weil Lamé selbst den Fall $n = 5$ bewiesen hatte, wo sich dieses Problem gar nicht stellt.

9.4.3 Zur Zerlegung von Gruppen

Wir haben bisher eine Reihe von mathematischen Objekten besprochen, von denen man erkannt hatte, daß sie in kleinere bzw. kleinste Bestandteile zerlegt werden können. Das historisch erste Beispiel sind sicher die ganzen Zahlen, die sich in Primzahlen, auch *einfache Zahlen* genannt, zerlegen lassen. Ein weiteres Beispiel sind die Polynome, die sich in *Linearfaktoren* zerlegen lassen (Kap. 9.4.1). Cauchy (1815b) hatte des weiteren gezeigt, daß man auch Permutationen in „einfachere" Permutationen zerlegen kann.

Die Idee, daß sich auch Gruppen, also Zusammenfassungen von Dingen, in einfachere Bestandteile zerlegen lassen, stammt von Galois und wurde im Laufe des 19. Jahrhunderts insbesondere von Camille Jordan und Otto Hölder weiterentwickelt. Aus dieser Idee entstand eine Vielzahl von Begriffen wie „Produkt" (von Gruppen), „Quotientengruppe", „Normalteiler" (spezielle Untergruppen) und „einfache Gruppe". Da die Definitionen der meisten dieser Begriffe von Beginn an sehr technisch waren, wollen wir uns hier auf die Metaphorik und einige der Bezeichnungen konzentrieren.

Galois (1976: 175) nannte eine Gruppe, die nicht weiter zerlegbar ist, *groupe indécomposable*. Der heute übliche Terminus stammt von Jordan, der dafür *groupe simple* sagte. Der Gegenbegriff dazu, also der der zerlegbaren Gruppe, lautet *groupe composé* (Jordan 1869 [1961: 212]). Wir sehen, daß sich hier die traditionellen arithmetischen Bezeichnungen widerspiegeln. Die entsprechenden deutschen Termini lauten *einfache Gruppe* bzw. *zusammengesetzte Gruppe* (z. B. Netto 1882: 86). Einfache Gruppen lassen sich analog zu „einfachen" Zahlen, d. h. Primzahlen definieren. Eine Primzahl ist eine Zahl, die außer sich selbst und der Zahl 1 keine weiteren Teiler hat. Wenn man diese Definition exakt analogisierte, dann erhielte man folgende Formulierung: Eine einfache Gruppe ist eine Gruppe, die außer sich selbst und der Gruppe, die nur das neutrale Element (s. Kap. 7.5) erhält, keine Teiler (Untergruppen) hat. Mit dieser Definition ergibt sich jedoch keine vollständige Analogie zum Fundamentalsatz der Arithmetik; das Analogon zu Teilern bei Zahlen sind nicht Untergruppen, sondern „Normalteiler“ (s. Kap. 7.5), die, wie eben angedeutet, *spezielle* Untergruppen sind. Eine einfache Gruppe wird daher definiert als eine Gruppe, die außer sich selbst und der Gruppe, die nur das neutrale Element enthält, keine Normalteiler hat.

Interessant ist die Metaphorik, die sich in Zusammenhang mit einfachen Gruppen findet. Die folgende Textstelle stammt aus einem Aufsatz von Otto Hölder (1859-1937), der sich intensiv mit der Zerlegung von Gruppen beschäftigte. Es geht darum, eine Gruppe nach und nach in ihre kleinsten Bestandteile zu zerlegen:

(9.19) Wenn nun eine beliebige Gruppe G gegeben ist, so spaltet man dieselbe zunächst in zwei Factoren, falls sie nicht etwa schon einfach ist. Es kann natürlich sein, dass diese Spaltung auf verschiedene Weisen möglich ist, in diesem Fall wählt man irgend eine Art aus. Nun spaltet man jeden der Factoren, wofern er nicht einfach ist, von Neuem und fährt so fort, bis man nur noch einfache Gruppen hat. Diese einfachen Gruppen sind dann die früher erwähnten Factorgruppen. Man gelangt so zugleich zum Begriff eines Products aus mehreren Gruppen (Hölder 1889: 33).[35]

Ist eine Gruppe also zusammengesetzt, dann zerlegt man sie schrittweise in weitere Gruppen, bis nur noch einfache, nicht weiter zerlegbare Gruppen übrig sind. Im Prinzip kann man bei der Zerlegung ganzer Zahlen in Primzahlen völlig analog vorgehen. Die Ausdrücke *spalten*, *Factor*, *Factorgruppe* (letztere sind im terminologischen Sinn einfache Gruppen) und *Product* hat Hölder zuvor definiert.

Er weist in dem Zitat darauf hin, daß schon die erste Spaltung „auf verschiedene Weisen möglich“ sein kann, so daß unterschiedliche Zerlegungen entstehen könnten. Entscheidend ist aber seine Erkenntnis, daß es einerlei ist, welche „Factoren“ man wählt, denn Hölder beweist den Satz, daß die Gruppen, die am Ende der Zerlegung stehen, zueinander im wesentlichen gleich („isomorph“) sind. D. h., die Zerlegung ist eindeutig, und genau diesen Sachverhalt kennen wir bereits von den Primzahlen.

Bei seiner Arbeit konnte sich Hölder insbesondere an Erkenntnissen von Jordan orientieren. Bei diesem treten ebenfalls „Faktoren“ (*facteurs*) auf (die auch

[35] Der Ausdruck *spalten* wird in diesem Zusammenhang nur selten verwendet (zuvor findet er sich bei Dyck 1882: 14). Ein Beleg für *Spaltung* findet sich bei Weber (1895: 513).

eindeutig bestimmt sind), doch handelt es sich bei Jordan um Zahlen (bestimmte Quotienten), nicht um Gruppen. Nach Hölder (1889: 30) muß „diese [Jordansche, H. B.] Theorie von den Factoren der Zusammensetzung ... aber dahin vertieft werden, dass die Factoren als *Gruppen* aufgefasst werden.“ Darin besteht eine wichtige Neuerung Hölders.

Aufgrund der von ihm bewiesenen Analogie zum Fundamentalsatz der Arithmetik folgert Hölder (1889: 38): „Die definirten einfachen Factorgruppen sind also in der That als wesentliche Bestandtheile der Gruppe anzusehen“. Die Zerlegungsmetaphorik wird hier durch *wesentliche Bestandtheile* auf nicht-terminologischer Ebene ausgedrückt; zuvor erscheint sie in dieser Arbeit nur auf terminologischer Ebene (*spalten*, *einfache Gruppe*). Die Metaphorik gehört offenbar zum „mathematischen Allgemeingut“ und wird hier auf die Algebra übertragen. Sie wird in dieser nicht-terminologischen Form besonders dann expliziert, wenn der Fundamentalsatz der Arithmetik selbst oder eine Analogie dazu diskutiert wird. Die entsprechenden Belege weisen dann folgende Logik auf: Weil sich ein mathematisches Objekt eindeutig in einfache, nicht mehr zerlegbare Objekte derselben Art zerlegen läßt, kann man sich die einfachen Objekte als kleinste Bestandteile des zerlegten Objektes vorstellen. Bei Hölder erkennen wir diese Logik am kausalen *also*, bei Dirichlet, der von Primzahlen als *Material* sprach, an *daher* (s. Bsp. 9.9).

Die Zerlegungsmetaphorik wird auch heute noch in diesem Zusammenhang verwendet, allerdings weniger in Forschungsartikeln wie bei Hölder, sondern eher in einführenden oder populären Darstellungen. In einer Einführung in die Algebra finden wir etwa die Aussage: „Die Atome der Gruppentheorie sind die einfachen Gruppen“ (Kunz 1991: 144), und in einer populären Darstellung kann man lesen: „Die fundamentalen Bausteine der Gruppentheorie sind die *einfachen Gruppen*“ (Devlin 1992: 140). In bezug auf das zweite Beispiel ist noch hinzuzufügen, daß die „Bausteine“ zuvor anhand der Zellen aus der Biologie, der Atome aus der Chemie und der Elementarteilchen aus der Physik illustriert werden und daß „[d]ie Atome ... mit chemischen Mitteln nicht weiter gespalten werden [können]; die Primzahlen lassen sich durch Division nicht weiter zerlegen“ (ibid.).

Wenn wir die Zerlegung von Gruppen in ihrer Entwicklung verfolgen, so stellen wir zusammengefaßt folgendes fest: Galois hatte diese Idee eingeführt und dabei eine Analogie ALGEBRA ALS ARITHMETIK verwendet, dabei aber noch keine vollständige Analogie zum Fundamentalsatz der Arithmetik gesucht. Die Analogie hinterläßt einerseits terminologische Spuren, etwa schon bei der Bezeichnung *diviseur* für Untergruppen. Sie hat aber offenbar auch eine konative Wirkung insofern, als sie dazu anregt, weiter ausgearbeitet zu werden. Ein Beispiel ist etwa die Arbeit von Frobenius und Stickelberger (1879), in der auch Begriffe wie das Produkt von Gruppen definiert werden. Jordan und Hölder haben die Idee von Galois ebenfalls ausgearbeitet und dabei besonders die Zerlegbarkeit von Gruppen weiter untersucht und dabei gezeigt, daß Gruppen nicht nur in kleinere, sondern auch in kleinste Bestandteile zerlegt werden können.

Die Bezeichnungen *einfach* und *zusammengesetzt* finden sich in der Arithmetik und später der Algebra, und zwar sowohl in terminologischer als auch gemeinsprachlicher Verwendung. Die semantische Beziehung ist damit metaphorisch: Die „Einfachheit" von Zahlen wird auf die von Gruppen übertragen. Analoges gilt für die entsprechenden englischen und französischen Bezeichnungen. Die Analogien beschränken sich jedoch nicht nur auf diese Bezeichnungen, sondern treffen auf weitere Teile des begrifflichen Systems zu: So läßt sich die Einfachheit sowohl in der Arithmetik als auch in der Algebra mittels *Teilern* definieren (Kap. 9.4.3).

9.5 Abgeschlossenheit

Unter Abgeschlossenheit in bezug auf eine Verknüpfung versteht man die Eigenschaft, daß das Ergebnis der Verknüpfung zweier Elemente einer algebraischen Struktur wieder zu der Struktur gehört. Der Begriff basiert damit auf dem des Behältnisses sowie auf der Verknüpfung der Elemente des Behältnisses.

9.5.1 Umschreibungen und Benennungen

Bei Galois und zahlreichen späteren Autoren, von denen hier nur Cayley, Jordan und Dedekind zitiert seien, findet sich noch kein entsprechender Terminus. Statt dessen wird Abgeschlossenheit zumeist (jedoch noch nicht bei Galois, s. Bsp. 9.20) verbal durch einen Ausdruck mit der Bedeutung 'gehören zu' oder durch ein Verb mit der Bedeutung 'reproduzieren' ausgedrückt (letztere wurden im 19. Jahrhundert häufig in der Algebra verwendet):

(9.20) si dans un pareil groupe on a les substitutions S et T, on est sûr d'avoir la substitution ST (Galois 1976: 47)

(9.21) the product of any two of them ... **belongs to** the set (Cayley 1854a [1963: II, 124])

(9.22) le produit de deux substitutions quelconques du système **appartient** lui-même **au** système (Jordan 1870: 22)

(9.23) Die ganzen Zahlen **reproduzieren** sich durch Addition, Subtraktion und Multiplikation ... (Dedekind 1894 [1932: 94])

Zu Beginn der 1870er Jahre erscheinen dann die ersten expliziten Termini:

(9.24) jedes System ..., welches in sich so **abgeschlossen** und vollständig ist, daß die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division von je zwei Zahlen immer wieder eine Zahl desselben Systems hervorbringt ... (Dedekind 1871 [1932: 224])

(9.25) Diese neue Transformation ist selbst eine Transformation des Systems. Mit Rücksicht auf [diese Eigenschaft, H. B.] heißt das System *geschlossen* (Klein - Lie 1871: 430).

(9.26) any **closed** system whatever of say ... *marks* capable of combination without ambiguity by addition, subtraction, multiplication and division (Moore 1897: 50)

Da Dedekind grundsätzlich Definitionen sehr sorgfältig als solche kennzeichnet und dies in obigem Zitat nicht der Fall ist, kann man annehmen, daß er den Ausdruck noch nicht terminologisch verwendet. Dies gilt für *geschlossen* bei Klein und Lie nicht. Die Bezeichnung ist möglicherweise aus der Geometrie übernommen, wo man das Adjektiv auf Kurven oder auch auf räumliche geometrische Gebilde anwenden konnte, d. h. immer dann, wenn eine Figur durch ein Gebiet ganz umgrenzt wird.

9.5.2 Abgeschlossenheit bei Lakoff und Núñez

Für Lakoff und Núñez (2000: 81) hat der Begriff der Abgeschlossenheit zwei Quellen.

Erstens nennen sie die Fundierungsmetapher (s. Kap. 3.5.2) Numbers Are Things in the World. Danach werden Zahlen als Dinge gesehen, die z. B. Teile haben können – entsprechende Beispiele haben wir bereits diskutiert. Dazu ist anzumerken, daß, historisch gesehen, die Abgeschlossenheit zuerst in Zusammenhang mit Permutationen, nicht mit Zahlen explizit formuliert wird. Die Heranziehung dieser Fundierungsmetapher ist also ahistorisch. Die bloße Möglichkeit eines direkten Rückgriffs auf Erfahrungsmuster des „Alltags“ ist zwar einfach, aber nicht unbedingt historisch korrekt. In unserem Zusammenhang geht es aber gerade um wirkliche Beispiele wissenschaftlicher Begriffsbildung.

Als zweite Quelle geben die Autoren das folgende Prinzip an: „Over much of our experience, a general principle holds: An operation on physical things yields a physical thing of the same kind". In der Argumentation von Lakoff und Núñez ergibt sich die Abgeschlossenheit aus der Kombination beider Quellen: „An operation on numbers yields a number of the same kind".

Die Gültigkeit des zweiten Prinzips läßt sich aber hinsichtlich ihrer Anwendbarkeit in unserem Zusammenhang in Zweifel ziehen. Die Autoren geben für dieses Prinzip kein konkretes Beispiel, sondern merken lediglich an: „If we put two objects together, we get another object. If we combine two collections, we get another collection" (Lakoff - Núñez 2000: 81). Gerade dann, wenn man an konkret faßbare Objekte denkt, fällt es schwer, auch nur ein einziges alltägliches Beispiel anzugeben. Wir müßten eine Operation nennen, die aus zwei gleichartigen Objekten ein neues Objekt derselben Art entstehen läßt. Es ist kaum eine alltägliche Handlung an Gegenständen vorstellbar,[36] durch die z. B. aus zwei Äpfeln ein neuer Apfel entsteht, und auch bei künstlich hergestellten Gegenständen verbessert sich diese Situation nicht. Für die Vereinigung von Mengen, die im zweiten Teil des Zitats angesprochen wird, ist es einfacher, Beispiele zu finden, doch entstehen auch hier Probleme. Zum einen erscheint es fraglich, wie alltäglich ein solcher Vorgang wäre, und zweitens ist die Anwendbarkeit auf die konkrete historische Situation nicht sichergestellt: Permutationen stellte man sich sicher nicht in erster Linie als Vereinigungen von Dingen vor.

Mit einer solchen Erklärungsmethode läßt sich demnach die Entstehung eines mathematischen Begriffs nicht plausibel erklären. Lakoff und Núñez lassen den historischen Werdegang weitgehend außer acht; sie ziehen übrigens fast ausschließlich Lehrbuchmaterial aus dem 20. Jahrhundert heran.

Historisch betrachtet wurde die Bedeutung der Abgeschlossenheit in Zusammenhang mit der Verknüpfung von Permutationen herausgearbeitet, zuerst bei Ruffini, Galois und Cauchy. Auch wenn die Abgeschlossenheit bei Galois nicht bewiesen, sondern stillschweigend verwendet wurde, läßt sich daraus nicht folgern, daß eine Fundierungsmetapher im Spiel ist. Es war erst ein konkretes mathematisches Problem, die Lösung von Gleichungen, das zumindest bei Ruffini und Galois Anlaß zur Ausarbeitung des Begriffs gab. Plausibler erscheint daher der Hinweis auf dieses Problem und die *mathematische* Erfahrung im Umgang mit Permutationen – die von Lakoff und Núñez angegebene Erklärung ist erst eine nachträgliche Konstruktion, die ein als „alltäglich" ausgegebenes Prinzip heranzieht und von

[36] Die biologische Reproduktion ist hierfür kein Beispiel.

dem nicht sicher ist, ob es sich auf die historische Situation überhaupt anwenden läßt.[37] Insgesamt ist die Argumentation von Lakoff - Núñez problematisch und in dieser Form nicht plausibel; eine alleinige Zurückführung auf die beiden von ihnen genannten Quellen, die keine fachlichen Elemente enthalten, ist nicht zu belegen. Damit soll nicht in Abrede gestellt werden, daß Fundierungsmetaphern, die eine Art ahistorische, „kognitiv“ verankerte Gültigkeit beanspruchen, in der Wissenschaftssprache nie eine Rolle spielen oder wissenschaftsgeschichtlich ableitbare Begriffsbildungen stützen können. Sie verhalten sich dann zu den historisch gegebenen Grundlagen terminologischen Gebrauchs wie die Volksetymologie zur sprachhistorischen „wirklichen“ Etymologie.

Zur Herausbildung des Begriffs der Abgeschlossenheit scheinen folgende Dinge beigetragen zu haben. Zunächst kann man in Abwandlung der von Lakoff und Núñez genannten Metapher sagen, daß Permutationen als Objekte betrachtet werden (s. a. Kap. 9.6.). Zweitens ist hier die Behältnismetaphorik wirksam, die gleich bei Erscheinen des Gruppenbegriffs verwendet wird: Zwei miteinander verknüpfte Permutationen ergeben eine neue Permutation, die zu derselben Menge bzw. in dasselbe „Behältnis“ gehört. Die Verknüpfung mehrerer Elemente im „Behältnis“ zu einem neuen Element allein reicht aber noch nicht zur Herausbildung des Begriffs aus. Erst im Rahmen eines speziellen mathematischen Kontextes wurde ein Zusammenhang zwischen den betrachteten „Behältnissen“ und dem Lösbarkeitsverhalten der untersuchten Gleichung festgestellt und so die Grundlage für den Begriff der Abgeschlossenheit geschaffen.

Auf das Begriffsbildungsmodell (Kap. 5.7) bezogen können wir also sagen, daß der Kontext, der in die Begriffsbildung eingeht, zum wesentlichen Teil fachlicher bzw. wissenschaftlicher Art ist.

9.6 Permutationen und Gruppen bei Augustin-Louis Cauchy

Wir haben im vorigen Kapitel gezeigt, daß Cauchy den Ausdruck *système de substitutions conjuguées* für Gruppen verwendet. Wir interessieren uns im folgenden zunächst für Cauchys Definition von Gruppen. Im Anschluß daran gehen wir auf den Begriff der Permutation bei Cauchy ein.

Cauchys Thema sind nicht Gruppen an sich, sondern Permutationen – wie

[37] S. Thomas (2002: 192) und unsere Diskussion in Kap. 3.5.2.

er selbst rückblickend sagt, sei das Thema seiner Arbeiten die *théorie des permutations* (Cauchy 1845 [1896: 277]). Lichtenberg (1966: 13) ordnet die Arbeiten in die Geschichte der Untersuchung von Permutationen so ein: „for the first time, the permutations were regarded as entities by themselves and considered as elements of mathematical systems".[38] Cauchy entwickelt ein Kalkül – Dahan (1980: 309) spricht von einem *calcul des substitutions* – und ein elaboriertes Begriffssystem. Den Ausgangspunkt seiner Untersuchungen bildeten nach Cauchys eigener Aussage „des recherches sur la théorie des nombres" (Cauchy 1815a [1905: 71]) (ohne daß er diese Untersuchungen näher spezifizieren würde).

Die Lösbarkeit von Gleichungen steht bei Cauchy nicht zur Diskussion und sie hat auch nicht zur Ausarbeitung seiner Theorie der Permutationen geführt (Dahan 1980, Wußing 1969: 65). Genau dieses Problem ist es hingegen, das Galois untersucht: Einer gegebenen Gleichung wird eine Gruppe von Permutationen zugeordnet, die dann mit neuen, von Galois entwickelten Begriffen und Methoden untersucht wird, um schließlich von der Beschaffenheit dieser Gruppe Rückschlüsse auf die Lösbarkeit der gegebenen Gleichung ziehen zu können.

9.6.1 Cauchys „Systeme konjugierter Substitutionen"

Cauchys Definition von Gruppen hebt sich deutlich von der Galois' ab:

(9.27) Étant données une ou plusieurs substitutions ... je nommerai substitutions *dérivées* toutes celles que l'on pourra déduire des substitutions données, multipliées une ou plusieurs fois les une par les autres, ou par elles-mêmes, dans un ordre quelconque; et les substitutions données, jointes aux substitutions dérivées, formeront ce que j'appellerai un *système de substitutions conjuguées* (Cauchy 1844 [1932: 206]).

Ein Bezug zu Gleichungen ist hier, entsprechend dem Kontext, in dem Cauchy arbeitet, nicht vorhanden. Cauchy definiert zunächst „abgeleitete" Permutationen, was lediglich bedeutet, daß man von gegebenen Permutationen ausgeht und diese dann miteinander auf alle möglichen Weisen miteinander verknüpft. Das Verb *dériver* unterstreicht hier vermutlich das bereits angesprochene kalkülhafte Vorgehen: Sind einige Symbole π_1, π_2, π_3, ... gegeben, dann sind diese miteinander zu verknüpfen, und man erhält $\pi_1 \circ \pi_2$, $\pi_2 \circ \pi_1$, $\pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_3$ usw. Die Behauptung, es handele sich hier um ein Kalkül, ergibt sich zum einen aus den Arbeiten Cauchys selbst,

[38] Ähnlich auch Scholz (1989a: 94).

die kalkülartig angelegt sind (Dahan 1980), aber auch aus dem Verb *dériver*, das Cauchy und zahlreiche andere Autoren z. B. auch in der Analysis zur Bezeichnung von Ableitungen im technischen Sinne verwenden, die sich mittels mathematischer Formeln berechnen lassen.

Ein „System konjugierter Substitutionen“ ist für Cauchy also die Menge aller auf solche Weise möglichen Kombinationen, d. h. Cauchy definiert den Begriff nicht axiomatisch, sondern „genetisch“, er gibt also an, wie das System entsteht, wie es erzeugt wird (Wußing 1969: 64). Diese Definition und die Aussagen, die Cauchy daraus herleitet, zeigen ebenfalls die Systemhaftigkeit: So beweist Cauchy (1844 [1932: 214]), daß die Anzahl der Elemente eines Systems konjugierter Substitutionen gleich ist dem Produkt der Ordnungen der erzeugenden Permutationen, falls diese jeweils untereinander vertauschbar (*permutable*) sind, d. h. es wird eine mathematische Verbindung zwischen dem System und seinen Elementen hergestellt. „Systemhaftigkeit“ meint hier also den Zusammenhang zwischen einer Menge und deren Elementen (der durch die Verknüpfung zustande kommt) und *nicht* einen Zusammenhang zwischen einer Menge und deren Teilmengen – solche Teilmengen, insbesondere Untergruppen, kommen bei Cauchy an keiner Stelle explizit vor, wie wir weiter unten noch sehen werden.

9.6.2 Der Begriff der Permutation bei Cauchy und seine Metaphorik

Wir wollen nun den Begriff der Permutation bei Cauchy und eine in Zusammenhang damit auftretende Metapher, die wir EINE PERMUTATION IST EINE RATIONALE ZAHL nennen können und die ein Beispiel für eine Übertragung aus der Arithmetik auf die Algebra darstellt, näher erläutern.

Zuvor noch eine terminologische Anmerkung: In seinen frühen Arbeiten bezeichnet Cauchy eine beliebige Anordnung von endlich vielen Dingen als *permutation*, während er den Vorgang der Vertauschung als *substitution* bezeichnet. In den späteren Arbeiten verändert er seine Terminologie: Anordnungen werden als *arrangement* bezeichnet, Vertauschungen als *permutation* oder *substitution* (Dahan 1980: 297, Wußing 1969: 67). Aus gemeinsprachlicher Sicht hingegen könnten diese Ausdrücke nach einem geläufigen Wortbildungsmuster sowohl den Vorgang als auch dessen Ergebnis bezeichnen. Wir werden im folgenden von *Anordnungen* und *Permutationen* sprechen.

Cauchy beginnt seine Ausführungen mit der Bemerkung, daß es notwendig sei, „de bien connaître **la nature** de l'opération que j'ai désignée sous le nom de *substitution*" (Cauchy 1815a [1932: 72]). Wie wir gleich sehen werden, meint Cauchy mit *nature* nicht eine Art Ontologie der Permutationen selbst, sondern die Rechenregeln, denen diese unterliegen, also den formalen Umgang mit diesen Objekten, d. h. ihre Operationalisierung. Es deutet sich hier ein genereller Wandel in der Auffassung von Mathematik im 19. Jahrhundert an: Das Wesen eines mathematischen Objektes wird nicht in den Objekten selbst gesucht, sondern in den Rechenregeln, denen diese Objekte unterliegen. Das im vorigen Absatz angesprochene Wortbildungsmuster kommt diesem Wandel entgegen.

Im Anschluß an diese Bemerkung legt Cauchy einige Schreibkonventionen fest, die wir an einem Beispiel erläutern wollen: Seien a, b, c, d, vier verschiedene Objekte, die nach folgender Vorschrift miteinander vertauscht werden sollen:

$$\begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ c & b & d & a \end{array}$$

Diese Permutation notiert Cauchy wie folgt: $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & b & d & a \end{pmatrix}$. Die Schreibweise beinhaltet im übrigen auch, daß $\begin{pmatrix} c & b & d & a \\ d & b & a & c \end{pmatrix}$ *dieselbe* Permutation ist wie die eben gegebene. Zur Abkürzung schreibt er häufig auch $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$, wenn $A_1 = (abcd)$ und $A_2 = (cbda)$ die entsprechenden Anordnungen sind. Die obere Anordnung nennt er *premier terme*, die untere *second terme* (Cauchy 1815b [1932: 72]), ändert diese Terminologie aber später in *numérateur* bzw. *dénominateur* (Cauchy 1844 [1905: 172]), also in „Zähler" und „Nenner", wie dies für rationale Zahlen üblich ist.[39] Damit haben wir bereits einen deutlichen Hinweis darauf, auf welche Art von Zahlen sich Cauchys Metapher bezieht, denn diese Bezeichnungen finden sich nicht bei anderen Arten von Zahlen.

Nun definiert Cauchy die Nacheinanderausführung zweier oder mehrerer Permutationen: „Je dirai qu'une substitution est le *produit* de plusieurs autres, lorsqu'elle donnera le même résultat que ces dernières opérées successivement"

[39] Beide zusammen heißen auch die *deux termes* der Permutation (Cauchy 1844 [1905: 172]), und auch diese Sprechweise ist in der Arithmetik üblich (z. B. *Encyclopédie*, s. v. fraction). – Wir haben die Darstellung hier insofern etwas vereinfacht, als Cauchy die Bedeutung der Schreibweise in den späteren Arbeiten leicht abänderte, was aber für unsere Argumentation keine Folgen hat.

(Cauchy 1815a [1905: 73]). Daß man Permutationen miteinander verknüpfen kann, ist eine entscheidende Einsicht Cauchys (Dieudonné 1987: 126).[40] Sie ist im Kontext der Erweiterung des Begriffs der Verknüpfung zu sehen, der zu diesem Zeitpunkt gerade auf andere Objekte als Zahlen ausgedehnt wird, insbesondere auf Funktionen. D. h., es wird allmählich erkannt, daß man nicht nur mit Zahlen rechnen kann, und daß die Rechenregeln für Zahlen in ähnlicher oder sogar identischer Form auch für andere Objekte als Zahlen gelten. Als bekannt kann man die Rechenregeln nur in Zusammenhang mit Zahlen voraussetzen. Wie noch zu zeigen ist, äußert sich dies in Cauchys Arbeiten insbesondere in den Bezeichnungen – *produit* ist hierfür nur das erste Beispiel.

Bevor wir die weiteren Termini Cauchys diskutieren, wollen wir noch kurz darlegen, wie man mithilfe von Cauchys Schreibweise mit Permutationen ähnlich rechnen kann wie mit rationalen Zahlen.[41] Nehmen wir an, wir wollen die Permutationen $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & c & d \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} b & d & c & a \\ d & a & b & c \end{pmatrix}$ miteinander verknüpfen. Wenn wir die zweite Permutation so umschreiben, daß ihr „Zähler" gleich dem „Nenner" der ersten Permutation ist, dann können wir das Produkt wie bei rationalen Zahlen „kürzen". Dies läßt sich folgendermaßen erreichen: Die zweite Permutation können wir auch als $\begin{pmatrix} b & a & c & d \\ d & c & b & a \end{pmatrix}$ schreiben, und dessen „Zähler" (*bacd*) ist gleich dem „Nenner" der ersten Permutation. Das Produkt berechnet sich dann wie folgt:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & d & c & a \\ d & a & b & c \end{pmatrix} &= \\ \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & a & c & d \\ d & c & b & a \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & c & b & a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ausgehend vom Produkt von Permutationen kann Cauchy nun weitere, logisch darauf basierende Begriffe definieren. Diejenige Permutation, die überhaupt nichts vertauscht, bezeichnet er als *substitution identique* (Cauchy 1815a [1905: 73]). Dafür führt er später auch das Symbol 1 und die Bezeichnung *unité* ein (Cauchy 1844 [1932: 176, 177]). Wir können daher annehmen, daß Cauchy der identischen Permutation dieselbe Rolle zuspricht, die die Zahl 1 bei der Multiplikation ganzer Zahlen hat: Die Permutation 1, verknüpft mit einer beliebigen

[40]Sie geht allerdings nicht allein auf Cauchy zurück: Paolo Ruffini hatte dies kurz zuvor ebenfalls erkannt (Wußing 1969: 57f.). Cauchy kannte Ruffinis Arbeiten, sie wurden sonst aber kaum wahrgenommen.

[41]Das folgende Beispiel nach Dieudonné (1987: 127).

anderen Permutation π, ergibt wieder π, so wie die Multiplikation einer Zahl n mit der Zahl 1 wieder die Zahl n ergibt.

Die zu verknüpfenden Permutationen nennt er dann auch *facteurs* (Cauchy 1844 [1932: 171]), und die Verknüpfung selbst wird ausdrücklich als *multiplication* bezeichnet (Cauchy 1844 [1932: 206]). Weiterhin führt Cauchy bereits 1815 in Analogie zu Zahlen Potenzen von Permutationen ein. Sein Terminus *puissance* (Cauchy 1815a [1905: 74]) ist wiederum aus der Arithmetik bekannt, und die Schreibweise $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}^r$ (der Exponent r gibt die Potenz an) entspricht ebenfalls den arithmetischen Konventionen. In einer späteren Arbeit (Cauchy 1844 [1932: 175]) werden zudem die zweite und dritte Potenz jeweils als *carré* bzw. als *cube* bezeichnet.

Cauchy erkennt auch die Existenz inverser Elemente, bespricht diese allerdings erst in den späteren Arbeiten. Auch hier stimmt nicht nur die Bezeichnung *inverse* mit der rationaler Zahlen überein, sondern auch die symbolische Schreibweise: Ist P eine Permutation, so ist P^{-1} die dazu inverse Permutation (Cauchy 1844 [1932: 186]) – auch diese Schreibweise wird aus der Arithmetik übernommen.

Die bisherigen Beispiele zeigen, daß Cauchy die meisten arithmetischen Rechenregeln auf Permutationen überträgt bzw. daß er überprüft, ob eine solche Übertragung möglich ist. In einigen Fällen liegen diesbezügliche Einschränkungen vor, wie z. B. im Fall der Kommutativität. Zwei beliebige Zahlen sind *immer* miteinander vertauschbar – für Permutationen gilt die analoge Aussage nicht. In Abschwächung der Kommutativität nennt Cauchy (1844 [1932: 174]) zwei Permutationen *permutables entre elles*, wenn sie miteinander vertauschbar sind. In diesem Fall läßt sich also die Analogie nicht genau übertragen, doch hat sie offenbar den Anlaß gegeben, nach einer Entsprechung der Kommutativität bei Permutationen zu fragen.

Dieses Beispiel zeigt bereits, daß es sich bei dieser Metapher keinesfalls um eine Eins-zu-Eins-Übertragung handelt bzw. daß sich auch permutationstheoretische Begriffe in Cauchys Arbeiten finden, die nicht aus demselben Bildspender übertragen werden. Dafür gibt es noch deutlichere Hinweise, denn Permutationen haben auch Eigenschaften, für die sich bei den rationalen Zahlen mit der Multiplikation überhaupt keine Entsprechung findet. Führt man ein- und dieselbe Permutation mehrmals nacheinander aus, d. h. bildet man die einzelnen Potenzen der Permutation, so gelangt man schließlich wieder zu der Ausgangsanordnung. Folglich gibt es zu jeder Permutation π eine natürliche Zahl n, so daß $\pi^n = 1$. Bildet man hingegen die Potenzen einer rationalen Zahl $a \neq 1$, ergibt sich niemals die Zahl 1; die Potenzen a^n sind alle von 1 verschieden. Linguistisch bedeutet dies, daß der Bildempfänger eine Eigenschaft aufweist, die sich im Bildspender gar nicht findet. In einer solchen Situation kann die Metapher punktuell ergänzt werden – in diesem speziellen Fall sind andere mathematische Vorbilder leicht denkbar, z. B. die Addition modulo einer natürlichen Zahl.

Auch für die Bezeichnungen weiterer Begriffe zieht Cauchy verschiedene andere Analogien heran. So wird z. B. der Terminus *substitution primitive* ausdrücklich aufgrund mehrerer algebraischer Analogien eingeführt, z. B. zu „primitiven Wurzeln“: „Elles [les substitutions primitives, H. B.] offrent donc ... une certaine analogie avec certaines racines des équations binomes, savoir, avec celles, qui sont désignées sous le nom de primitives, et qui, élevées à des puissances diverses, reproduisent toutes les autres racines“ (Cauchy 1844 [1932: 205])[42] – die Bezeichnung *primitive* wird dann beibehalten „[p]our conserver le souvenir de ces diverses analogies“ (ibid.).

Die in diesem Kapitel diskutierte Verbindungsmetapher haben wir in Tab. 9.1 zusammengefaßt.

Tabelle 9.1: Cauchys Metapher

Eine Permutation ist eine rationale Zahl		
Bildspender		*Bildempfänger*
Arithmetik	→	Theorie der Permutationen
rationale Zahlen	→	Permutationen
Zähler, Nenner	→	Zähler, Nenner
Multiplikation	→	mehrfache Ausführung
Zahl 1	→	identische Permutation
inverses Element	→	inverse Permutation
Potenzen	→	Potenzen
Kommutativität	→	(teilweise) Vertauschbarkeit

Die Metapher wird bei Cauchy weitgehend systematisch erschöpft: Sie ist ein generativer Mechanismus, der richtige und falsche Termini im Bildempfänger erzeugt. Die falschen Termini werden dabei durch Vergleich mit dem Objekt herausgefiltert; darin besteht die heuristische Funktion der Metapher. Cauchy über-

[42] Auf die Wiedergabe der technischen Einzelheiten verzichten wir hier, da es uns nur um Cauchys Verfahren geht.

prüft, ob und wie sich Eigenschaften und Zusammenhänge des Bildspenders auf den Bildempfänger übertragen lassen. Dadurch lassen sich sowohl die Möglichkeiten als auch die Grenzen der Metapher erkennen. Für die sprachliche und symbolische Ebene können wir dabei eine Kontinuität in dem Sinne feststellen, daß Bezeichnungen und Symbolik weitgehend unverändert von Zahlen auf Permutationen übertragen werden.

In dieser „Erschöpfung" der Metapher besteht ein wichtiger und grundlegender Unterschied zur Metaphorik in der Gemeinsprache, wo die Entsprechungen bzw. die Ähnlichkeiten zwischen Bildspender und -empfänger nicht prinzipiell begrenzt sind, da es keine Definitionen gibt. In der Gemeinsprache sind die Entsprechungen lediglich in unterschiedlichem Ausmaß relevant; die Metapher bleibt offen.

Erwähnt sei noch, daß sich Cauchys Metapher auch bei Galois findet. Sie erscheint bei diesem allerdings nur selten explizit, denn seine Untersuchungen richten sich, wie bereits erläutert, nicht auf einzelne Permutationen, sondern auf Gleichungen und die ihnen zugeordneten Gruppen von Permutationen.[43]

In Cauchys Definitionen von „Permutation" und vielen davon abgeleiteten Begriffen findet sich keine arithmetische Metaphorik. Eine Permutation ist für Cauchy eine *opération*, durch die gegebene Dinge untereinander vertauscht werden (z. B. Cauchy 1844 [1905: 172]). Der Ausdruck *opération* wird zu diesem Zeitpunkt häufig in Zusammenhang mit algebraischen Operationen wie der Addition verwendet, ist jedoch kein festgelegter Terminus (Dieudonné 1987: 122). Unter den Begriff der „Funktion" fielen Permutationen noch nicht, auch wenn man etwa zur selben Zeit ähnlich wie bei Permutationen damit begann, Funktionen miteinander zu verknüpfen (Dieudonné 1987: 127).

Cauchys Metapher stellt ein weiteres Beispiel dafür dar, daß die Unterscheidung zwischen Verbindungs- und Fundierungsmetaphern bei Lakoff und Núñez nicht ausreichend ist (s. Kap. 3.5.2). Klar ist, daß hier zwei mathematische Bereiche zueinander analogisiert werden und man daher von einer Verbindungsmetapher und damit von „indirect grounding" sprechen muß, wenn man der Terminologie von Lakoff und Núñez folgt. Die Erfahrung, die Cauchys Metapher fundiert, ist aber sicher keine alltägliche im Sinne einer konkreten sinnlichen Erfahrung, sondern wiederum (s. a. Kap. 9.5) die alltägliche mathematische Erfahrung. Daß der fachliche Charakter des Bildspenders bei dieser und zahlreichen anderen wis-

[43] Galois spricht von dem „Produkt" (*produit*) von Permutationen (Galois 1976: 83) und von „inversen Permutationen" (*substitution inverse*) (Galois 1976: 147).

senschaftlichen Metaphern nicht zufällig ist, werden wir in Kap. 11.6.1 darlegen.

9.7 Isomorphismen

Wir wollen nun den Begriff „Isomorphismus“ diskutieren, der uns zum disziplinübergreifenden Begriff der „Struktur“ führen wird.[44] Es ist hier keine vollständige Diskussion der Geschichte des Begriffs beabsichtigt: Der Schwerpunkt liegt auf der Metaphorik und der Herkunft der Bezeichnung *Isomorphismus*.

In der Algebra wird unter einem Isomorphismus eine Abbildung verstanden, die die Elemente zweier Strukturen derselben Art (also z. B. zweier Gruppen) in eine Eins-zu-Eins-Beziehung setzt und die darüber hinaus die auf diesen Strukturen definierten Verknüpfungen erhält (s. Kap. 7.5). Sind zwei Gruppen isomorph, so entsprechen sich nicht nur deren Elemente, sondern z. B. auch deren Untergruppen in eindeutiger Weise. Man kann Isomorphie als Verallgemeinerung des Gleichheitsbegriffs[45] auffassen, d. h. wenn man Gleichheit und Isomorphie als Relationen auffaßt, dann folgen sie denselben logischen Regeln. Dabei gilt: Gleiche Gruppen sind immer isomorph, die Umkehrung gilt jedoch nicht. Isomorphe Gruppen sind auf streng extensionaler Ebene nicht identisch, werden aber als „im Wesentlichen gleich“ aufgefaßt. Durch Isomorphismen können Gruppen ganz unterschiedlicher Art in Beziehung zueinander gesetzt werden, z. B. kann eine Gruppe von Zahlen isomorph zu einer Gruppe von Abbildungen sein (solche Gruppen haben kein einziges gemeinsames Element).

Als einer der ersten befasste sich Arthur Cayley mit diesem Thema, allerdings nicht unter dieser Bezeichnung.[46] Er stellte sich die Aufgabe, alle Gruppen mit einer vorgegebenen (endlichen) Anzahl von Elementen zu bestimmen und stieß dabei notwendigerweise auf die Frage, was es heißt, daß zwei Gruppen gleich oder verschieden sind. Wenn er zwei Gruppen mit derselben Zahl von Elementen für verschieden hielt, weil sich die Verknüpfung der einen Gruppe nicht auf die der anderen Gruppe übertragen ließ, nannte er diese Gruppen „essentially distinct“ (z. B. Cayley 1854a [1963: II, 126]) oder er sprach z. B. von „two ... essentially distinct forms of a group of six [elements, H. B.]“ (Cayley 1854a [1963: II, 127]).

[44] Die offenbar einzige (in manchen Details korrekturbedürftige) Übersicht über die Entwicklung des mathematischen Isomorphiebegriffs gibt Li Carillo (1981).

[45] Gleichheit von Gruppen oder, allgemeiner von Mengen bedeutet, daß sie aus exakt denselben Elementen bestehen.

[46] Li Carillo (1981: 82) führt den Begriff bis auf Leibniz zurück; er ist implizit auch bei anderen Autoren vorhanden.

Bei Cayley deutet sich somit ein impliziter Isomorphiebegriff an, der sprachlich mit der Gestalt einer Gruppe in Verbindung gebracht wird.

Die Bezeichnungen *Isomorphismus* bzw. *isomorph* wurden von Camille Jordan in die Algebra (bzw. überhaupt in die Mathematik) eingeführt. Um die Umstände dieser Übernahme angemessen zu erläutern, ist zunächst noch zu präzisieren, welche Bezeichnungen Jordan aus diesem Umfeld genau eingeführt hat: Neben dem Adjektiv *isomorphe* (von Gruppen) betrifft dies nämlich auch die Bezeichnungen *groupe mériédrique* bzw. *groupe hémiédrique* und dann die Bezeichnungen *isomorphisme holoédrique* bzw. *isomorphisme mériédrique*. Dabei ist zu unterscheiden zwischen zwei hier relevanten mathematischen Kontexten, in denen Jordan gearbeitet hat: einem stärker geometrischen, in dem es um die Beschreibung der Symmetrien von (abstrakten) Polyedern und die damit zusammenhängende Untersuchung von Gruppen von „Bewegungen" (geometrischen Abbildungen, frz. *mouvements*) geht, die für die Kristallographie wichtig ist, und einem rein algebraischen Kontext, in dem es in Anlehnung an Galois um die Lösbarkeit von Gleichungen und die damit zusammenhängende Untersuchung von Permutationsgruppen geht. Wie wir gleich sehen werden, stammen alle genannten Bezeichnungen aus der Kristallographie, mit der sich Jordan als einer von wenigen Mathematikern schon vor 1870 befaßt hat (Scholz 1989a: 98). Wir werden nun diese Entwicklung erläutern und in einem anschließenden Kapitel auf Zusammenhänge zum Strukturbegriff aufmerksam machen.

Die Bezeichnung *groupe mériédrique* kommt bei Jordan zuerst 1867 vor (Jordan 1867b [1964: 115]) und wird dann zusammen mit der Bezeichnung *groupe hémiédrique* in einer kurz danach erschienenen Schrift ausführlich erläutert:

(9.28) Ces deux groupes ... sont tous des groupes *mériédriques*, contenant **une fraction** déterminée des mouvements qui constituent l'un des groupes principaux. ... Le groupe 14 qui superpose à lui-même un tétraèdre régulier contient **la moitié** de ces mouvements: c'est donc un groupe *hémiédrique* (Jordan 1868/69 [1964: 302]).

Zur Einordnung in den historischen Kontext sei hier zunächst einmal vorangestellt, daß diese Arbeit eine der ersten überhaupt darstellt, in der der mathematische Begriff der „Gruppe" explizit auf Bewegungen, also geometrische Abbildungen, übertragen wird. Die Gruppenelemente sind hier also Bewegungen und keine Permutationen. Die terminologische Unterscheidung, die Jordan vornimmt, beruht offenkundig auf der Anzahl der Elemente einer gegebenen Gruppe: Eine

„meriedrische“ Gruppe ist eine Untergruppe einer bestimmten anderen Gruppe, deren Anzahl von Elementen ein Bruchteil (*fraction*) der Anzahl der Elemente der gegebenen Gruppe ist. Ist der Bruchteil genau die Hälfte, spricht Jordan von einer „hemiedrischen“ Gruppe.

Die Bezeichnungen lassen sich schon durch die griechischen Wortbestandteile besser verstehen. Sie setzen sich wie folgt zusammen: *hédra* bedeutet ‘Sitz(fläche), Basis’, *méros* ‘(Bruch-)Teil’ und *hemi-* ‘halb’. Unklar bleibt hier nur der Bestandteil *(h)edra*: In mathematischem Kontext ist hier dessen Bedeutung ‘Fläche’ eindeutig vorherrschend. Schon im 18. Jahrhundert wurden Bezeichnungen wie *Polyeder*, wörtlich ‘Vielflächner’, und zahlreiche weitere Bezeichnungen, die die Anzahl der Flächen spezifizieren, gebildet.[47] Da Gruppen jedoch keine Flächen haben, erscheinen diese Zusammensetzungen mit *hédra* zunächst unmotiviert.

Nun zeigt sich aber, daß sich etwa die Bezeichnung *hémiédrique* in einer zeitgenössischen Fachsprache – und nur dort – findet, der Fachsprache der Kristallographie bzw. der Mineralogie.[48] Jordan formulierte sogar die Aufgabenstellung seines *Mémoire sur les groupes des mouvements* (Jordan 1868/69) in der Sprache der Mathematik *und* der Kristallographie:

(9.29) 1. Former tous le groupes possibles des mouvements (Jordan 1868/69 [1964: 232]).

(9.30) 2. Former de toutes les manières possibles des systèmes de molécules superposables à eux-mêmes dans diverses positions (ibid.).

Er zitiert des weiteren die Arbeiten von Auguste Bravais, der einige wichtige Schritte in Richtung der Mathematisierung der Kristallographie unternahm (cf. Scholz 1989a: 108):

(9.31) C’est sous ce second point de vue que M. Bravais a étudié cette question: les cas particuliers qu’il a traités et dont il a fait une remarquable application à la cristallographie sont les plus importants (Jordan 1868/69 [1964: 232]).

An Jordans Kenntnis dieses wissenschaftlichen Gebietes besteht somit kein Zweifel. Nach Scholz (1989a: 98) ist hierin auch der Grund zu sehen, aus dem Jordan den Begriff der Gruppe überhaupt erst auf Bewegungen anwendete.

[47] Im deutschen Sprachraum war auch die Bezeichnung *Vielflächner* üblich, und für einzelne Typen von Polyedern wurden Komposita mit den Endungen *-flächner* und *-flach* gebildet.

[48] Zu hier relevanten Aspekten der Geschichte der Kristallographie s. Mauskopf (1976).

Die sich anschließende Frage ist nun, wie etwa das Adjektiv *hémiédrique* in der Kristallographie verwendet wurde. Dort arbeitete man u. a. an der Zusammenfassung von Kristallen zu Klassen und zu Systemen.[49] Diese Klassifizierung wurde aufgrund von Symmetrieeigenschaften der Kristalle vorgenommen, welche sich wiederum mit dem mathematischen Gruppenbegriff beschreiben lassen. Die Symmetrieeigenschaften werden ihrerseits mit Symmetrieelementen wie z. B. Drehachsen oder Spiegelebenen erfaßt. Innerhalb eines Kristallsystems können die Symmetrieeigenschaften eines Kristalls unterschiedlich stark ausgeprägt sein. Ein Kristall, der den höchstmöglichen Symmetriegrad innerhalb eines Systems hat, heißt nun *holoedrisch* (gr. *hólos* 'ganz') oder *Holoeder* (im Deutschen auch *Ganz-* oder *Vollflächner*), und seine graphische Darstellung ergibt ein Polyeder mit maximaler Anzahl von Flächen. Davon lassen sich die *Hemieder* ableiten, die weniger symmetrisch sind (also weniger Symmetrieelemente haben) und nur die Hälfte der Flächen des dazugehörigen Polyeders haben. Die dazugehörige Symmetriegruppe hat dann die halbe Anzahl von Elementen. Das Adjektiv *meriedrisch* ist eine Verallgemeinerung dieses Begriffs.

Zur Beleglage läßt sich ergänzen, daß die Ausdrücke *holoédrique*, *hémiédrique* und *meriédrique*,[50] die davon abgeleiteten Ausdrücke sowie deren englische und deutsche Entsprechungen bereits in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts in der Kristallographie verbreitet sind.

Vergleichen wir nun die zitierten Beispiele Jordans mit den kristallographischen Begriffen, so stellen wir fest, daß sich der Wortbestandteil *(h)édra* dadurch erklärt, daß sich eine hemiedrische Gruppe, ausgehend von einer „ganzen", holoedrischen Gruppe, einem Polyeder zuordnen läßt, der im Vergleich zu dem Polyeder, der der holoedrischen Gruppe zugeordnet ist, die halbe Flächenzahl hat. Dieser sachliche Zusammenhang stammt aus der Kristallographie, nicht aus der Mathematik. Bei der Übertragung in die Mathematik spielt diese Verbindung jedoch keine Rolle mehr.

Fassen wir das bisher Gesagte zusammen: Jordan führt in seinen Untersuchungen über Bewegungsgruppen die Terminologie *groupe hémiédrique* und *groupe meriédrique* ein. Es liegt eine Analogie zur Kristallographie vor, dem einzigen Bereich, in dem die Bezeichnungen *hémiédrique* und *meriédrique* vorher verwendet werden. Diese Analogie besteht darin, daß sich die Anzahl der Flächen eines Polyeders bzw. der Elemente der dazugehörigen Symmetriegruppe jeweils halbiert,

[49] Heute unterscheidet man zumeist 32 Kristallklassen, die in 7 Kristallsystemen aufgehen.

[50] Es gibt daneben noch zahlreiche weitere ähnliche Ausdrücke wie z. B. *tétartoédrique*.

wenn man ein Symmetrieelement wegläßt. Jordan konnte hier seine gruppentheoretischen und kristallographischen Kenntnisse verbinden und so Analogien erkennen, die zwischen Permutationsgruppen und Bewegungsgruppen (die in der Kristallographie implizit verwendet wurden) bestehen.

Wir können nun zur Diskussion von Jordans Ausdrücken *isomorphisme*, *isomorphisme mériédrique* und *isomorphisme holoédrique* übergehen. Diese werden nicht mehr in geometrisch-kristallographischem, sondern in algebraischem Kontext eingeführt. Zur Übertragbarkeit in diesen Kontext bemerkt Jordan (1870: 56): „Le problème de la symétrie des polyèdres ... peut aussi se ramener, quoique moins simplement, à une forme analytique". Das Adjektiv *isomorphe* erscheint bei Jordan zuerst in einer kurzen Schrift (Jordan 1868 [1961: 165]), bevor er 1870 in seinem *Traité* ausführlicher auf den Begriff (und das zugehörige Substantiv *isomorphisme*) eingeht:

(9.32) Un groupe Γ est dit *isomorphe* à un autre groupe G, si ... (Jordan 1870: 56)

Zunächst eine Bemerkung zu Jordans Definition (deren technische Einzelheiten hier nicht wiedergegeben sind): Jordan setzt *nicht* voraus, daß die Elemente beider Gruppen in einer Eins-zu-Eins-Beziehung stehen, sondern lediglich, daß jedes Element von Γ durch den Isomorphismus auch tatsächlich erreicht wird (daß es sich also um eine n-zu-Eins-Entsprechung handelt, mit einer natürlichen Zahl n) und daß die Verknüpfung durch den Isomorphismus erhalten wird.

An seine Definition schließt Jordan sogleich noch zwei weitere Begriffe an:

(9.33) L'isomorphisme sera dit *mériédrique*, si plusieurs substitutions de G correspondent à une même substitution Γ, *holoédrique* dans le cas contraire (Jordan 1870: 56).

Durch diese Unterscheidung werden zwei Arten von Isomorphismen definiert. Sie beruht auf der Art der Entsprechung: Ist diese vollständig, handelt es sich also um eine Eins-zu-Eins-Entsprechung, so spricht Jordan von *isomorphisme holoédrique*, lassen sich aber mehrere Elemente aus G einem einzigen Element aus Γ zuordnen (also eine n-zu-Eins-Entsprechung, mit $n \geq 2$), so spricht Jordan von *isomorphisme mériédrique*.[51]

[51] In heutiger Terminologie stellt sich Jordans Terminologie so dar: *isomorphisme* entspricht einem *Homomorphismus*, *isomorphisme holoédrique* einem *Isomorphismus*, *isomorphisme mériédrique* einem *surjektiven Homomorphismus* oder *Epimorphismus*.

Jordans Ausdruck *isomorphe* besteht aus den griechischen Bestandteilen *íso-* ‘gleich’ und einer Ableitung aus dem Wort *morphḗ* ‘Gestalt’, d. h. isomorphe Gruppen haben die gleiche Form (nur die Wortbestandteile sind griechisch, die Zusammensetzung nicht). Dieses Wort und seine Ableitungen kommen in der zeitgenössischen Gemeinsprache nicht vor. Auch hier gibt es jedoch eine Parallele zur Kristallographie bzw. Chemie. Den Ausdruck hat Eilhard Mitscherlich (1794-1863) eingeführt. Er stellt 1821 fest, „daß gewisse Elemente die Eigenschaft besitzen, in Verbindung mit einer gleichen Anzahl Atome von einem oder mehreren gemeinsamen Elementen einander gleiche Krystallformen hervorzubringen, und daß die Elemente in dieser Hinsicht in gewisse Gruppen eingetheilt werden können“ (Mitscherlich 1821 [1896: 134]).[52] Die Elemente der bei dieser Einteilung entstehenden Gruppen bezeichnet Mitscherlich dann als *isomorph*, „um einen mehr bestimmten technischen Ausdruck als **gleichartig** zu erhalten“ (ibid.). Wie Mitscherlich in obigem Zitat durch den Bezug auf „gleiche Krystallformen“ deutlich macht, geht es schon hier nicht nur etymologisch um die Form.

Auch hier sei zur Beleglage ergänzt, daß der Ausdruck *isomorphe* bzw. seine Ableitungen und Entsprechungen in der Kristallographie bis zur Mitte des 19. Jahrhunderts sehr verbreitet sind. Daneben existieren noch zahlreiche weitere auf gr. *morphḗ* basierende Ausdrücke wie z. B. *dimorphisme* und *hémiisomorphisme.*

Das Motiv für die Übertragung in die Algebra besteht in folgender Parallele: So wie Kristalle, auch wenn sie unterschiedlich zusammengesetzt sind, die gleiche Form haben können, gilt dies auch für Gruppen. Durch die Bezeichnungen *holoédrique*, *mériédrique* und *hémiédrique* wird dann von Jordan lediglich eine Differenzierung vorgenommen, die sich danach richtet, wie genau die Entsprechung ist.[53]

Wir können die Motive für die Übernahme des Ausdrucks *isomorphe* noch etwas besser verstehen, wenn wir Mitscherlichs Kommentare und Folgerungen in Zusammenhang mit seiner Entdeckung des Isomorphismus näher betrachten. Er formuliert ein Gesetz:

[52] Diese Arbeit Mitscherlichs ist ursprünglich in schwedischer Sprache erschienen. Das Zitat stammt aus einer Übersetzung (Mitscherlich 1821). Sprachlich entsteht dadurch jedoch keine Verzerrung, denn die Übersetzung hält sich eng an die Formulierungen Mitscherlichs, die er in den 1820ern im deutschsprachigen Original verwendet hat (Mitscherlich 1822/23a, 1822/23b). Die Wortschöpfung selbst fällt vermutlich in das Jahr 1819 (Schütt 1984: 131).

[53] Eine Konnotation von *hémiédrique* aus der Kristallographie, nach der Hemiedrie explizit als „Anomalie“ verstanden wird (s. z. B. Delafosse 1858: 90), findet sich in der Algebra offenbar nicht.

(9.34) so ist das allgemeine Gesetz für den Zusammenhang der Krystallographie mit der chemischen Zusammensetzung folgendes: Eine gleiche Anzahl Atome, wenn sie in gleicher Weise verbunden sind, bringen gleiche Krystallformen hervor, und die Krystallform beruht nicht auf der Natur der Atome, sondern auf deren Anzahl und Verbindungsweise ... (Mitscherlich 1821: 173).

In der Mathematik entspricht der Vorstellung der „Zusammensetzung" offenbar die Komposition, die Verknüpfung von Zahlen oder anderen mathematischen Objekten. Bei Jordan sind Permutationen gemeint. Die Formulierungen aus dem Bereich der Isomorphie, von denen wir eben Mitscherlichs Gesetz herangezogen haben, sind fast wörtlich in die Mathematik übertragbar – um dies zu sehen, müßten wir im obigen Zitat lediglich „Atome" durch „Elemente" (von Gruppen) und „Krystallformen" durch „Gruppen" ersetzen. Dazu zwei typische Beispiele:

(9.35) Damit werden alle *holoedrisch isomorphen* Gruppen in *eine einzige* Gruppe begriffen, und das *Wesen* der Gruppe drückt sich nicht mehr an einer speziellen Darstellungsform ihrer Operationen aus, sondern lediglich in der gegenseitigen Beziehung derselben zueinander (Dyck 1882: 1).

(9.36) Isomorphe Gruppen besitzen dieselbe Art der Zusammensetzung (Schoenflies 1887: 51).

Jordan hat also den kristallographischen Terminus *isomorphe* in die Mathematik übertragen. Es handelt sich nicht um einen von der Kristallographie unabhängigen Neologismus, wie durch unsere Diskussion von Jordans Schriften und seinen Kenntnissen eindeutig hervorgeht. Der Bedeutungswandel von *isomorphe* ist damit metaphorisch.

Dieses Beispiel veranschaulicht u. a. die komplexe Rolle des Kontextes bzw. unterschiedlicher Fachsprachen bei der wissenschaftlichen Begriffsbildung. Wir hatten zu Beginn dieses Abschnitts zwischen zwei Kontexten unterschieden, in denen Jordan arbeitet: dem klassischen permutationstheoretischen sowie dem bewegungstheoretischen bzw. kristallographischen. Beide gehen auf unterschiedliche Weise in die Begriffsbildung ein. So werden aus der Kristallographie die Bezeichnung *isomorphisme* und Zusammensetzungen mit diesem Ausdruck übernommen, nicht jedoch die Definition, die sich vermutlich deswegen nicht übertragen läßt, weil es sich um unterschiedlich geartete Disziplinen mit verschiedenartigen Objekten handelt. Gleiches gilt, zumindest teilweise, für Zusammenhänge zwischen den Begriffen „Isomorphismus" und „Struktur", die in der Kristallographie bereits terminologisch verbunden waren (s. Kap. 9.8) und die auch eine methodische Komponente beinhalten (Scholz 1989a: 243). Das Benennungsmotiv, die gleiche Gestalt, findet in beiden Bereichen eine analoge Interpretation, wodurch die Bezeichnung *isomorphe* auch in der Algebra motiviert ist.

Der permutationstheoretische Kontext schränkt die Begriffsbildung insofern ein, als sie an Gruppen von Permutationen gebunden ist (Wußing 1969: 105).

Es geht noch ein dritter kontextueller Aspekt in die Begriffsbildung ein, nämlich die Suche nach allen Gruppen mit einer vorgegebenen Anzahl von Elementen, wie wir sie zu Beginn dieses Abschnittes anhand von Arthur Cayley angesprochen haben. Isomorphismen werden bei Jordan als Entsprechungen (*correspondance*) definiert, so wie auch Cayley, ohne von Isomorphismen zu sprechen, nach Entsprechungen zwischen Gruppen suchte und dabei die sich bei isomorphen Gruppen entsprechenden Elemente einander gegenüberstellte (z. B. Cayley 1854a [1963: II, 126f.]).

Das Beispiel veranschaulicht eine typische Form mathematischer Begriffsbildung. Die Bezeichnung hätte allein auf Grundlage der Kenntnis der griechischen Wortbestandteile gebildet werden können, d. h. die Begriffsbildung wäre „gemeinsprachlich" möglich gewesen. Historisch ist dies aber nicht der Fall, denn, wie unsere Untersuchung zeigt, liegt der Bildung eine *wissenschaftliche* Analogie zugrunde. Der wissenschaftliche Kontext hat dabei eine Entsprechung in der oberen Komponente des Modells (Kap. 5.7), die das lexikalische Inventar enthält und aus dem die Bezeichnung *isomorphisme* übernommen wird.

9.8 Anmerkungen zur Vorgeschichte des Begriffs der „Struktur"

Wir wollen noch einige Anmerkungen zur Vorschichte des mathematischen Strukturbegriffs machen, da dies einerseits durch das vorige Kapitel naheliegt und andererseits die Beleglage selbst in der wissenschaftshistorischen Erforschung der Mathematik kaum bekannt ist. Nach Scholz (1989a: 241) liegt „[die] Herkunft der Strukturterminologie in der Mathematik ... noch ziemlich im Dunkeln".

Gegen Ende des 19. Jahrhunderts finden sich zum ersten Mal vereinzelte Belege für den Ausdruck *Struktur* bzw. für seine englischen und französischen Entsprechungen. Dies ist eine Vorstufe zu der sich erst im 20. Jahrhundert verbreitenden Ausdrucksweise von den *Strukturen der Mathematik*, d. h. zunächst wurde von bestimmten mathematischen Gebilden, offenbar zuerst von Gruppen, gesagt, daß sie eine Struktur *haben*, während erst im 20. Jahrhundert gesagt werden konnte, eine Gruppe *ist* eine Struktur (Wußing 1969: 220, Fn. 204). Wir beschäftigen uns hier mit der ersten Verwendung von *Struktur*.

Zuvor wollen wir jedoch kurz darauf eingehen, wie man sich den Wandel von „eine Gruppe hat eine Struktur" zu „eine Gruppe ist eine Struktur" sprachlich vorstellen kann. Wir meinen, es handelt sich dabei um eine Metonymie, nach der ein Teil für das Ganze steht. Dafür gibt es zahlreiche Beispiele. Jakobson (1956: 78) weist etwa auf den Roman *Krieg und Frieden* von Tolstoi hin, in dem sich *bare shoulders* auch auf die Person beziehen kann, der diese Eigenschaften zukommen, d. h. ein besonders wichtiger Aspekt eines Objektes wird fokussiert. Analog dazu kann man Gruppen unter dem Gesichtspunkt ihrer Struktur betrachten und dann metonymisch sagen, eine Gruppe *ist* eine Struktur.

Es ist für die Entwicklung des Strukturbegriffs nützlich, die terminologischen Spuren zu verfolgen, die aus dem Begriffsfeld der Isomorphismen stammen. Felix Klein etwa übernahm die Jordanschen Bezeichnungen und erweiterte sie, indem er auch von *hemiedrischem Isomorphismus* sprach (eine entsprechende Wortkombination tritt bei Jordan nicht auf) (Klein 1884: 7f.). Ähnlich wie Klein nahm auch der mit ihm befreundete Lie die Arbeiten von Jordan früh zur Kenntnis (Scholz 1989a: 103-109). Lie beschäftige sich nicht mit Gruppen im damals üblichen Sinne, d. h. mit Permutationsgruppen, sondern mit sog. *Transformationsgruppen*. Dieses Thema geht über die Algebra hinaus, da es in Zusammenhang mit Fragestellungen der Analysis und Geometrie steht. Es wurde von Lie so konzipiert, daß die Theorie der Transformationsgruppen für die Lösung von Differentialgleichungen das leisten sollte, was die Theorie der Permutationsgruppen für die Lösung von algebraischen Gleichungen leistete.[54] Viele Begrifflichkeiten aus der Algebra ließen sich für Lies Theorien adaptieren; so erscheinen bei ihm auch die Bezeichnungen *holoedrischer* und *meroedrischer Isomorphismus* (Lie 1888 [1970: 293]).[55]

Die Definition von „Isomorphismus" nimmt Lie im Kapitel „Zusammensetzung und Isomorphismus" (Lie 1888 [1970: 289-310]) vor. Der mathematische Zusammenhang zwischen beiden Begrifflichkeiten besteht darin, daß gleiche Zusammensetzung holoedrische Isomorphie bedeutet (Lie 1888 [1970: 293]). Die Untersu-

[54] In einem Brief aus dem Jahr 1873 schreibt Lie, die Grundidee seiner Theorie bestehe darin, „die Begriffe der Substitutionentheorie in die Theorie der Differentialgleichungen einzuführen" (Lie 1924: 160).

[55] Cf. Bourbaki (1994: 257).

chung der Zusammensetzung einer Transformationsgruppe bedeutet für ihn, daß man „ihre Untergruppen und die zwischen denselben bestehenden Beziehungen aufstellen [muß]" (Lie 1885 [1927: 151]). Dies ist inhaltlich ein zentraler Aspekt des Strukturbegriffs, da das Studium der Untergruppen, insbesondere das besonders ausgezeichneter, sog. *invarianter* Untergruppen oder *Normalteilern* für die Bestimmung der kleinsten Bestandteile, der einfachen Gruppen (s. Kap. 9.4.3), von großer Bedeutung ist. Dies gilt nicht nur für Transformationsgruppen, sondern ganz analog auch für Permutationsgruppen.

Auch die Bezeichnung *Zusammensetzung* blieb nicht unwidersprochen. Es zeigt sich hier ein Punkt, den Lie (1888 [1970: vi]) selbst gesehen hat: „Nur theilweise lassen sich die Begriffe und Sätze der Substitutionentheorie auf meine Transformationstheorie übertragen". Killing hat die Bezeichnung zwar in einigen Arbeiten zum Thema Transformationsgruppen verwendet (Killing 1888a, 1888b, 1889, 1890a), spricht dann aber die Nachteile an:

(9.37) Ich habe mir nie verhehlt, dass dieser Name [*Zusammensetzung*, H. B.] Nachtheile mit sich bringt, welche darauf beruhen, dass die Gruppen in einfache und zusammengesetzte eingetheilt, und doch von der Zusammensetzung der einfachen Gruppen gesprochen wird. Dennoch glaube ich nicht, dass der eingeführte Name beseitigt werden kann. Aber es dürfte sich empfehlen, einen zweiten Ausdruck für diesen Begriff zu haben. Desshalb spreche ich zuweilen von der 'Gestaltung' der Gruppen und gebrauche 'gleich gestaltet' und 'gleich zusammengesetzt' als Synonyma (Killing 1890a: 163).[56]

Killings Kritik richtet sich also nicht auf ein Benennungsmotiv, sondern auf eine Inkonsistenz der Redeweise (die im übrigen nur bei den Lieschen Transformationsgruppen, nicht aber bei Permutationsgruppen auftritt). Während seine Bezeichnung *Gestaltung* auf der äußeren Form beruht, macht er später (Killing 1904) noch von der Bezeichnung *Bau* Gebrauch, die semantisch stärker mit *Struktur* übereinstimmt.

In einer ausführlichen Rezension (Vessiot - de Tannenberg 1889) von Lies *Theorie der Transformationsgruppen* (Lie 1888 [1970]) übersetzen die Autoren die

[56] Killing war grundsätzlich sehr vorsichtig bei der Einführung neuer Bezeichnungen. In bezug auf die Bezeichnung *halbeinfach* schreibt er 1887 in einem Brief an Engel: „Ich muss das Wesen der betr. Gruppen erst genauer kennen, ehe ich einen Namen vorschlagen kann." (zitiert nach Hawkins 1982: 155). – Seine Anmerkung zur Zusammensetzung der einfachen Gruppen bezieht sich darauf, daß bei einfachen Gruppen im üblichen, nicht-Lieschen Sinn nicht von deren *Zusammensetzung* gesprochen wird.

Lieschen Bezeichnungen beiläufig ins Französische, so auch die der *Zusammensetzung*:[57]

(9.38) M. Lie fait dépendre la notion d'isomorphisme d'une autre notion importante, celle de la *structure* (*Zusammensetzung*) (Vessiot - de Tannenberg 1889: 137).

Diese Redeweise wird in den folgenden Jahren sehr schnell in die mathematische Fachsprache übernommen. Cartan weist in mehreren Arbeiten auf die Bedeutung des Begriffs hin, zuerst in kurzen Anzeigen (Cartan 1893a, 1893b) und dann in einer ausführlichen Arbeit. Er bezieht sich dabei ausdrücklich auf die Arbeiten Lies (Cartan 1894 [1952: 137]) und formuliert sogar das „problème proprement dit de la structure des groupes": „Trouver toutes les structures possibles des groupes à un nombre quelconque de paramètres" (Cartan 1894 [1952: 137]). Wir haben im vorigen Kapitel die Übertragung einiger kristallographischer Ausdrücke in die Mathematik diskutiert. Der Ausdruck *structure* ist bereits im ausgehenden 18. Jahrhundert in der Kristallographie gang und gäbe – bei Haüy etwa erscheint *structure* (von Kristallen) mehrmals sogar in Titeln seiner Arbeiten (z. B. Haüy 1784). Scholz (1989a: 241) vermutet, „daß es weitergehende [d. h. über die Übernahme von *isomorphisme* und daraus abgeleiteten bzw. zusammengesetzten Ausdrücken hinausgehende], wenn auch weniger leicht zu identifizierende Einflüsse bei der Übernahme der Sprechweise von 'Strukturen' in die Mathematik gegeben hat".

Es ist schwer festzustellen, in welchem Ausmaß die Kristallographie terminologisch auf die Mathematik bzw. auf die Gruppentheorie eingewirkt hat. Die betrachteten Belege – und dies sind die einzigen, auf die in der Sekundärliteratur hingewiesen wird (Hawkins 1982: 162, 2000: 85, Scholz 1989a: 242) – sind zweifellos sehr frühe Belege, die auf einen Einfluß der Kristallographie hinweisen.

Bisher haben wir nur Arbeiten herangezogen, die aus dem Umfeld der Lieschen Theorie der Transformationsgruppen stammen. Wir wollen nun kurz auf einige Arbeiten aus dem klassischen Kontext der Permutationsgruppen bzw. der Auflösung von Gleichung eingehen und können auch einen Beleg beitragen, der zeigt daß auch in diesem Rahmen explizit von der Struktur einer Gruppe gesprochen wurde; dies geschah bereits einige Jahre vor Vessiot - de Tannenberg.

Die Arbeiten, die wir heranziehen, beziehen sich alle auf die Arbeit von Ludwig Sylow (1872). Diese Arbeit, in französischer Sprache verfaßt, enthält Aussagen

[57] Auf dieses Zitat weisen Hawkins (1982: 162, 2000: 85) und Scholz (1989a: 242) hin. Es handelt sich vermutlich um das erste Vorkommen des Wortes in diesem mathematischen Zusammenhang im Französischen.

über die Struktur von Gruppen, insbesondere über Zusammenhänge zwischen der Anzahl der Elemente einer Gruppe und der Existenz bestimmter Untergruppen. Ein Beleg für *structure* findet sich indes in dieser und anderen Arbeiten Sylows nicht.[58] Lediglich an einer Stelle (Sylow 1872: 593) wird der Aufbau von Gruppen durch *la composition des groupes* bezeichnet.

Einige spätere Autoren verwenden dann den Ausdruck *Constitution* von Gruppen, z. B. Frobenius (1887: 179) und Weber (1896: 114).[59]

Julius König (1849-1913) diskutiert in seiner Arbeit „Beiträge zur Theorie der algebraischen Gleichungen" (König 1883) ein Kriterium für die Auflösbarkeit von Gleichungen und schließt, daß in einem bestimmten, besonders einfachen Fall „schon die Kenntniss der Ordnungszahl allein [genüge], ohne weiter auf die **Structur** der Gruppe einzugehen, um die algebraische Auflösbarkeit der Gruppe zu entscheiden" (König 1883: 428) – der Ausdruck *Structur* wird dabei nicht weiter erläutert. Das Zitat liegt zeitlich mehrere Jahre vor dem angeführten Beleg für *structure* bei Vessiot - de Tannenberg, und es steht nicht im Kontext von Bewegungs- oder Transformationsgruppen, sondern im Zusammenhang der Permutationsgruppen bzw. der Lösbarkeit algebraischer Gleichungen.[60]

Auch im englischen Sprachraum wird die Bezeichnung *structure* schnell eingeführt. Die ersten Belege stammen aus den frühen 1890er Jahren. Der erste Autor, bei dem der Begriff häufiger erscheint, ist F. N. Cole:

(9.39) In the analysis of the **structure** of a group the theorems of Sylow are indispensable (Cole 1892: 379)

(9.40) ... it is clear that in treating the **structure** of a group great advantage is gained by discarding all unessential features and regarding the group purely from its formal side, without reference to the content to which its operations may be applied (Cole - Glover 1893: 191).

Der erstgenannte Beleg ist der früheste uns bekannte aus der englischen Sprache.[61]

[58] Dies gilt auch für die in Scharlau (1988) und Waterhouse (1980) angegebenen Arbeiten zu Sylows Sätzen.

[59] Bei Dedekind (1871 [1932: 246f.]) wird *Constitution* auch auf Körper angewendet.

[60] Aus diesem Zeitraum, d. h. etwa fünf Jahre zuvor wie danach, liegen uns keine weiteren Belege vor. Durchsucht wurden verschiedene mathematische Zeitschriften sowie weitere Arbeiten, die durch ihr Thema als mögliche Belegstellen in Frage kommen. In früheren deutschsprachigen Arbeiten von König (1876, 1879, 1881a, 1881b) findet sich der Ausdruck nicht.

[61] Zuvor gibt es nur vereinzelte Belege für *structure* in anderen mathematischen Kontexten,

Es ist wahrscheinlich, daß der Ausdruck *Structur* bei König im Sinne der genannten Synonyme wie etwa *Bau* oder *Constitution* zu verstehen ist. Er bezeichnet den inneren Aufbau einer Gruppe – gemeint sind damit u. a., wie auch bei Lie, die Untergruppen und ihre Beziehungen untereinander. *Structur* bei König, *structure* bei Cole und *structure* bei Vessiot - de Tannenberg sind nicht nur im Sinne der alten Bedeutung des Wortes gemeint, die man etwa mit 'Bauart' wiedergeben kann und die schon lange in verschiedenen Fachgebieten wie z. B. der Architektur üblich ist. Die Ausdrücke meinen hier den Zusammenhang der Teile, d. h. insbesondere der Untergruppen, wie aus dem Zitat von Lie, aber auch durch den Bezug auf die Arbeiten Sylows hervorgeht. Diese Bedeutung hatte sich zuvor in den Einzelsprachen aus der ursprünglichen Bedeutung entwickelt.

9.9 Zusammenfassung und Diskussion

In diesem Kapitel haben wir verschiedene mathematische Begriffe und deren Entwicklung aus dem Umfeld des Begriffs der Gruppe insbesondere in Zusammenhang mit der dazugehörigen Metaphorik und semantischem Wandel untersucht. Wir wollen nun die Ergebnisse zusammenfassen und diskutieren. Dabei gehen wir zunächst auf verschiedene Aspekte der Zerlegungsmetaphorik ein, insbesondere auf den paradigmatischen, d. h. auf den musterhaften Charakter der Primfaktorzerlegung in der Arithmetik. Anschließend besprechen wir unsere Ergebnisse aus Sicht der historischen Semantik und weisen dabei besonders auf nicht immer eindeutige semantische Anschlußmöglichkeiten sowie auf Regularitäten im semantischen Wandel hin. Schließlich kommen wir auf das Einbettungsproblem zurück (s. Kap. 4.1.2) und legen am Beispiel des Gruppenbegriffs eine Vermutung zum Aufbau von Theorien dar.

Die Zerlegungsmetaphorik bildet ein begriffliches Feld, in dem eine Unterscheidung zwischen zusammengesetzten und einfachen Dingen vorgenommen wird, die sich danach richtet, ob ein Ding Teile hat oder nicht. Ist ein Ding zusammengesetzt, dann wird nach dessen einfachen, nicht weiter zerlegbaren Bestandteilen gesucht. In der Arithmetik finden sich im 18. Jahrhundert entsprechende sprach-

z. B. wird in der Erstausgabe der *Encylopædia Britannica* von 1771 (s. v. Geometry, S. 693) *the structure of the geometrical square* verwendet. Gemeint ist hier der Aufbau eines Quadrates. Diese vereinzelten Belege stehen aber nicht in Zusammenhang mit der Entwicklung des Strukturbegriffs im Kontext der Gruppentheorie. Ähnliche Belege lassen sich auch für das Deutsche angeben (DWB, s. v. Structur).

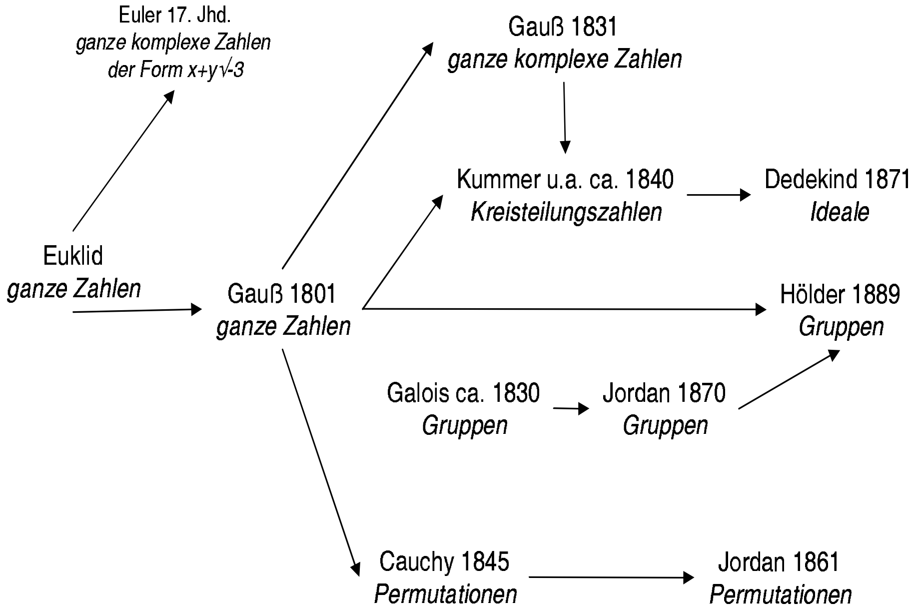

Abbildung 9.1: Zerlegung mathematischer Objekte

liche Ausdrücke, und durch Gauß wird dem Fundamentalsatz der Arithmetik eine fundamentale Bedeutung zugewiesen. Die Zerlegung mathematischer Objekte wird zu diesem Zeitpunkt keineswegs nur auf ganze Zahlen angewendet, sondern auch auf bestimmte komplexe Zahlen sowie verschiedene nicht-arithmetische Objekte, von denen wir hier nur einige diskutiert haben. Eine Übersicht über Zusammenhänge zum Fundamentalsatz der Arithmetik gibt Grafik 9.1. Historische Einflüsse und Analogien sind in der Grafik durch Pfeile gekennzeichnet.

Belege für das Verb *décomposer* bzw. für das Substantiv *décomposition* zeigen exemplarisch, wie verbreitet die Zerlegungsmetaphorik ist. Sie äußert sich in den modernen Sprachen zunehmend durch die Einführung neuer sprachlicher Ausdrücke und durch deren semantische Erweiterung. Das Verb *décomposer* findet sich schon zu Beginn des 16. Jahrhunderts, zuerst in der Chemie, in der Bedeutung ‘diviser un corps en ses éléments constituants’ (TLF). Im 18. Jahrhundert finden sich verschiedene Belege aus unterschiedlichen Wissenschaften. In der *Encyclopédie* (s. v. décomposition des forces) lassen sich Belege für die Zerlegung von Kräften und diversen mathematischen Objekten nachweisen:

(9.41) Cette division, pour ainsi dire, d’une puissance en plusieurs autres s’appelle *décomposition*.

(9.42) On se sert aussi des mots *décomposer* & *décomposition* dans d'autres parties des mathématiques [d. h. andere als die Mechanik, H. B.], lorsqu'il est question en géneral de diviser un tout en plusieurs parties; par exemple on *décompose* un polygone quelconque en triangles, pour en trouver la surface; on *décompose* une équation en plusieurs membres ou en plusieurs équations partielles, afin de la résoudre; on *décompose* un produit dans ses facteurs, &c.

Das zweite Zitat deutet darauf hin, daß es innerhalb der Mathematik bereits einen allgemeinen Begriff der Zerlegung gibt. Darüber hinaus lassen sich weitere Belege aus weniger „harten" Wissenschaften finden, in denen aber doch die ursprüngliche chemische Bedeutung durchklingt:

(9.43) ... **décomposer** cette idée [de l'homme, H. B.] en d'autres idées qui seront comme les élémens de celle-là (Bonnet 1755: 19)

(9.44) La troisiéme [manière d'écrire, H. B.] est de **décomposer** la voix parlante en un certain nombre de parties élémentaires ... (Rousseau 1781 [1990: 74])

Die Zerlegungsmetaphorik findet sich in zahlreichen mathematischen Termini. So wird die Bezeichnung *einfach*, um nur ein Beispiel zu betrachten, auf unterschiedlichste mathematische Objekte angewandt. Sie ist mit einer langen mathematischen Tradition behaftet, an die in der Mathematik des 19. Jahrhunderts angeknüpft wird, was sich daran erkennen läßt, daß zur Rechtfertigung dieser und verwandter Bezeichnungen die Analogie zum Fundamentalsatz der Arithmetik herangezogen wird. Dazu einige Beispiele:

(9.45) Cette décomposition des substitutions complexes en substitutions plus simples présente une grande analogie avec celles des nombres en facteurs premiers (Jordan 1861 [1961: 12])

(9.46) Jede Zahl, welche ausser sich selbst und der Einheit noch andere Divisoren hat, heisst *zusammengesetzt (numerus compositus)*. Diese Benennung wird gerechtfertigt durch den folgenden Fundamentalsatz [der Arithmetik, H. B.] (Dirichlet 1863: 13)

(9.47) Die ganze von mir bereits fertig ausgearbeitete Theorie der idealen complexen Zahlen ... ist eine Rechtfertigung sowohl der gegebenen Definition, als auch der gewählten Benennung [*idealer Primfactor*, H. B.] (Kummer 1847a [1975: 206])

In bezug auf die Benennung von Termini (referentielle Funktion, s. Kap. 5.3.3) können wir zusammenfassend feststellen, daß die elementare Metaphorik der Zerlegung und Zusammensetzung sich schon in der Antike in fachlichen Benennungen aus unterschiedlichen Disziplinen findet und sie bis heute weiter tradiert wird. Auch mathematische Termini sind davon betroffen. Es sind jedoch vorwiegend mathematische Analogien, die den Ausschlag für die Wahl der Benennungen geben und die zu deren Rechtfertigung herangezogen werden.

Neben dem Füllen lexikalischer Lücken und der Rechtfertigung von Bezeichnungen hat die Zerlegungsmetaphorik noch weitere Wirkungen und Funktionen.

Die Zerlegungsmetaphorik hat einen zum Teil stark ausgeprägten programmatischen Charakter. So werden innerhalb der Arithmetik in Zusammenhang mit der Erweiterung des Begriffs der Zahl Analogien zum Fundamentalsatz der Arithmetik angenommen bzw. gesucht. Dabei wird z. B. $2+\sqrt{-3}$ als *eine* Zahl betrachtet, nicht als Summe zweier Zahlen. Solche Zahlen wurden zunächst als Hilfsmittel bei der Untersuchung mathematischer Probleme verwendet, z. B. in Zusammenhang mit der Fermatschen Vermutung. Diese wurden nun in bezug auf Teilbarkeit und Zerlegbarkeit untersucht, wobei in nicht wenigen Fällen implizit davon ausgegangen wurde, daß sich diese Zahlen in dieser Hinsicht ebenso verhalten wie die ganzen Zahlen. Die Erkenntnis, daß zwischen solchen Zahlen und den natürlichen Zahlen gravierende Unterschiede bestehen können, verbreitete sich offenbar nur relativ langsam, wie wir am Beispiel von Lamés fehlerhaftem Beweis der Fermatschen Vermutung zeigen konnten.

Auch in der Algebra finden sich Belege dafür, daß Analogien zum Fundamentalsatz der Arithmetik überprüft werden. Galois, der den Gruppenbegriff als erster explizit in die Algebra eingeführt hatte, bildete bereits den Begriff der Untergruppe in Analogie zur elementaren Zahlentheorie, stellte aber noch keine genaue Entsprechung zum Fundamentalsatz der Arithmetik her. Die Metapher ALGEBRA ALS ARITHMETIK fungiert dabei als „Filter“ (im Sinne von Kap. 5.7), der im Fall von Untergruppen die Wahl der Bezeichnung *diviseur* beeinflußt hat, denn so, wie man eine Zahl in Teiler zerlegen kann, kann man auch eine Gruppe in Untergruppen zerlegen.

Die genannte Metapher wurde dann im Laufe des Jahrhunderts weiter verfolgt. So schreiben Frobenius - Stickelberger (1879: 218) in ihrer gruppentheoretischen Arbeit: „Die Hauptschwierigkeit bei dieser Untersuchung bestand, ähnlich wie bei der Lehre von den complexen ganzen Zahlen, in der Umformung der Begriffe, welche die elementare Zahlentheorie darbietet“. Die Autoren verfolgen offenbar ganz bewußt die Analogie zur Arithmetik, was sich auch anhand von Formulierungen wie „wurden wir hier darauf **geführt**“ (ibid.) erkennen läßt, die sie in Zusammenhang mit Beispielen für die im vorigen Zitat angesprochene „Umformung der Begriffe“ verwenden. Die Analogie leitet also die Theoriebildung, indem sie die Autoren zur Bildung neuer Begriffe und zur Formulierung mathematischer Sätze führt. Zwar stehen nicht alle der von den Autoren definierten Begriffe in Zusammenhang mit der Zerlegungsmetaphorik bzw. zu elementaren arithmetischen Begriffen, doch macht letzteres Feld einen wesentlichen Bestandteil der eingeführten Terminologie aus, das dann von zusätzlichen Termini ergänzt werden kann. Die Übertragung wird dabei sehr systematisch vorgenommen, z. B. werden das *Product*, die *Theilbarkeit*, der *größte gemeinsame Divisor* und die Zerlegbarkeit von Gruppen definiert (Frobenius - Stickelberger 1879: 220f.). Ein Beispiel für einen ergänzenden Begriff ist die *Ordnung* einer Gruppe, eine natürliche Zahl, die die Anzahl der Elemente einer Gruppe angibt.

Eine endgültige Entsprechung zum Fundamentalsatz der Arithmetik erreichen aber auch Frobenius und Stickelberger (1879) nicht. Dies gelingt erst einige Jahre später durch Otto Hölder. Wir sehen, daß die Metapher ALGEBRA ALS ARITHMETIK zunächst bei Galois als Übertragung einiger weniger Begriffe entsteht, die mit der Teilbarkeit von Zahlen zusammenhängen. Weitere Begriffe dieses Feldes werden von Frobenius und Stickelberger, die hier nur ein Beispiel neben anderen darstellen, auf ähnliche Weise in die Algebra übertragen. Das Hauptinteresse dieser Autoren wie auch Hölders liegt darin, eine möglichst vollständige Analogie zum Fundamentalsatz der Arithmetik herzustellen.

Die Konsistenz der Übertragung ist im Vergleich zur gemeinsprachlichen Übertragung von Wortfeldern größer. Ausgehend von der grundlegenden Entsprechung zwischen (ganzen) Zahlen und Gruppen sowie der Definition von „Produkt“ entsprechen sich auch Begriffe, die in bezug auf diese Grundbegriffe definiert werden: Z. B. werden Teiler in der Arithmetik in bezug auf eine gegebene Zahl definiert, und Untergruppen, die man, wie gesehen, auch als *Teiler* bezeichnete, werden in bezug auf eine gegebene Gruppe definiert. Daher entsprechen sich auch zahlreiche Prädikate, etwa „teilen (Teiler, Zahl)“ und „teilen (Untergruppe, Gruppe)“. Es ist allerdings nicht der Fall, daß arithmetische und algebraische Begrifflichkeiten in einer Eins-zu-Eins-Beziehung stehen. Wie wir in Kap. 9.4.3 gesehen haben, läßt sich die algebraische Entsprechung zu „Primzahl“ (die als „einfache“ Zahlen betrachtet und z. T. auch so genannt wurden), nämlich der Begriff „einfache Gruppe“, nicht analog zu Primzahlen definieren. D. h. genauer, wenn man eine einfache

Gruppe als Gruppe definiert, die außer sich und der „Einheit" (also der Gruppe, die nur das neutrale Element enthält) keine weiteren Teiler (Untergruppen) enthält, dann ergibt sich keine vollständige Entsprechung zum Fundamentalsatz der Arithmetik. Man ersetzt daher in der Definition „Teiler" durch „Normalteiler" (spezielle Untergruppen). Der arithmetische Teilerbegriff hat daher zwei Entsprechungen, Untergruppen und Normalteiler.

Ein begriffliches Feld wie das der Teilbarkeit kann also durch wissenschaftliche Erkenntnisse angereichert bzw. reorganisiert werden. Dafür liefern auch die Arbeiten Kummers und Dedekinds ein Beispiel. Wir haben oben dargelegt, daß Kummer für einige der von ihm untersuchten Zahlbereiche feststellte, daß keine eindeutige Zerlegbarkeit in „Primzahlen" erreicht werden kann. Damit einher geht die Erkenntnis, daß die klassische Definition von Primzahlen nicht hinreichend ist, wenn man sie auf andere Zahlbereiche (wie bei Kummer) oder auf Mengen von Zahlen (Dedekind) überträgt. So definiert Dedekind in Zusammenhang mit einer Diskussion der Kummerschen Theorie eine „unzerlegbare Zahl" analog zu Primzahlen und stellt dabei fest, daß in manchen Zahlbereichen „eine unzerlegbare Zahl durchaus nicht immer den Charakter einer eigentlichen Primzahl besitzt, welcher darin besteht, daß ein Produkt nur dann durch eine Primzahl teilbar ist, wenn diese wenigstens in einem der Faktoren aufgeht" (Dedekind 1877b [1930: 114]).[62] Er bezieht sich im zweiten Teil des Zitats auf eine Aussage, die schon Euklid (*Elemente*, Buch VII, Satz 30) bekannt war. Dieser Satz wird dann zur Definition von Primzahlen herangezogen, und damit eine begriffliche Unterscheidung zwischen unzerlegbaren Zahlen und Primzahlen vorgenommen, die ihrerseits bei weiteren analogen Übertragungen in der Mathematik zur Anwendung kommt.[63]

Insgesamt wird die Arithmetik im 19. Jahrhundert zu einem Bildspender, der sich als auf zahlreiche mathematische Bereiche übertragungsfähig erweist. Die Zerlegungsmetaphorik wird zu einem Topos, verstanden als semantisches Feld, das in der Mathematik (und darüber hinaus) relevant und bekannt ist und das insbesondere in Form des Fundamentalsatzes der Arithmetik artikuliert wird (s. Debatin 1995: 205). Man kann sie daher in Analogie zu einem aus der historischen Semantik bekannten Phänomen sehen, das Sperber (1965: 45f.) als *Expansion* bezeichnet hat, nämlich die Übertragung eines für eine Person oder eine Gruppe von

[62] Eine fast identische Aussage findet sich bei Kummer (1847a [1975: 203]). Er verwendet die Bezeichnung *complexe Primzahl* und nimmt offenbar noch keine begriffliche Unterscheidung zwischen Primzahlen und unzerlegbaren Zahlen vor.

[63] Da beide Begriffe bei den ganzen Zahlen und anderen Zahlbereichen zusammenfallen, konnte im 18. Jahrhundert auch kein Unterschied bemerkt werden.

Personen wichtigen, da affektbeladenen Wortes auf andere Objekte. Ein Beispiel ist die Verwendung des für Soldaten affektbeladenen Ausdrucks frz. *tank* 'Panzer' zur Bezeichnung von Feldküchen. Ohne die psychoanalytisch beeinflußten Begriffe Sperbers übernehmen zu wollen, können wir sagen, daß die Metaphorik maßgeblich an der Entstehung neuer Termini beteiligt ist.[64] Zu berücksichtigen ist dabei allerdings, daß ein wesentlicher Teil der Metaphorik insofern wieder aufgelöst wird, als zumindest in den wissenschaftlichen Texten, also einem Produkt der wissenschaftlichen Arbeit, Definitionen der übertragenen Begriffe gegeben werden. D. h., durch eine Definition löst sich der metaphorische Charakter insofern auf, als kein Bild mehr da ist: Der Ausdruck verweist nicht mehr auf die allgemeine Welterfahrung, sondern ist in ein terminologisches Bezugssystem eingebunden. Durch die spezielle Indexikalität (vgl. Kap. 5.4) werden Metaphern zumindest vom wissenschaftlichen Anspruch her „getötet" (s. a. Kretzenbacher 1992: 43). Aus der Gemeinsprache sind tote Metaphern wie *Bergrücken* ebenfalls gut bekannt, doch gibt es hier Übergänge, denn nicht von allen Sprechern werden diese in demselben Ausmaß als tot empfunden; in der Wissenschaftssprache sind Metaphern *prinzipiell* immer tot.

Wir kommen nun zum semantischen Wandel von einigen der in diesem Kapitel diskutierten Begriffe. Am Beispiel *décomposer* haben wir oben exemplarisch dargelegt, daß der Begriff der Zerlegung und Zusammensetzung in unterschiedlichen Disziplinen auftritt. Genauer haben wir festgestellt: Es gibt erstens einen allgemeinen, philosophischen Begriff der Zerlegung und Zusammensetzung, auf den allerdings selten (wie bei Kummer) explizit Bezug genommen wird. Zweitens gibt es, wie das Beispiel 9.42 aus der *Encyclopédie* nahelegt, einen innermathematischen Begriff der Zerlegung. Drittens gibt es eine spezielle Ausprägung der Zerlegung in der Mathematik in Form des Fundamentalsatzes der Arithmetik, der als geradezu prototypisches Beispiel dieses Begriffs angesehen wird und auf den dementsprechend sowohl innerhalb als auch außerhalb der Mathematik sehr häufig explizit Bezug genommen wird.

Wenn wir als ein Beispiel für einen zur Zerlegungsmetaphorik gehörigen Begriff den semantischen Wandel von *einfach* näher bestimmen und dessen Bedeutung an eine dieser Bedeutungen anschließen wollen, dann ergeben sich unterschiedliche Formen des Bedeutungswandels. In den ersten beiden Fällen müßten wir von einer Spezialisierung eines allgemeineren Begriffs sprechen. Im dritten Fall hingegen, der uns, wie gesagt, in vielen Fällen als die plausibelste Möglichkeit erscheint, haben wir es mit einer Übertragung von einem mathematischen Bereich

[64] Vgl. auch Martin - Harré (1982: 100f.), Debatin (1995: 142).

in einen anderen zu tun (vgl. Kap. 3.2.2). Es ist aber auch die Möglichkeit in Betracht zu ziehen, daß eine eindeutige Einordnung eines semantischen Wandels deswegen nicht möglich ist, weil im historischen Prozeß der Benennung eines neuen mathematischen Objektes ebenfalls kein eindeutiger semantischer Anschluß an eine der oben genannten Bedeutungen stattgefunden hat. Wie wir im Kapitel 10 noch sehen werden, kann eine Bezeichnung eines Terminus auch gerade mit der Absicht gewählt werden, auf verschiedene vorige Bedeutungen und auf verschiedene andere Disziplinen zu verweisen. Dies scheint uns in den Wissenschaftssprachen kein Einzelfall zu sein.

Analogien geben die Richtung an, in die semantische Erweiterungen stattfinden: So wird der Ausdruck *diviseur* ebenso wie das Verb *contenir* (als Relation zwischen Objekten gleicher Art) von der Arithmetik in die Algebra übertragen, und Ähnliches gilt für die soeben diskutierten Termini. Es lassen sich dadurch Regularitäten im semantischen Wandel feststellen, nämlich die parallele semantische Entwicklung semantisch verwandter Ausdrücke und Kollokationen. Aus der Gemeinsprache ist dieser Sachverhalt gut bekannt. So tendieren Verben mit der Bedeutung '(an)fassen' dazu, die Bedeutung 'verstehen' anzunehmen. Dies gilt etwa für e. *grasp*, frz. *saisir* und dt. *begreifen* (s. z. B. Sweetser 1990: 23-48).

Wir betrachten hauptsächlich einige Verben, die wir aufgrund ihrer semantischen Gemeinsamkeiten gruppieren wollen. Diese Gemeinsamkeiten lassen sich insbesondere dadurch erkennen, daß diese Verben jeweils bestimmte semantische Aspekte von *groupe* hervorheben.

So wird etwa die Zugehörigkeit der Elemente zu einer Gruppe durch die Verben *appartenir à* und *faire partie de* hervorgehoben. Die Behältnismetaphorik zeigt sich besonders an den Verben *contenir*, *renfermer* und *comprendre*; *composer* und *former* heben hervor, daß eine Gruppe etwas Ganzes ist, das aus Elementen gebildet wird.

Wir ziehen als Beispiel wieder die Enthalten-Relation heran, zunächst als Relation zwischen Mengen und Elementen. Gemeinsprachlich kann man diese Relation statt durch *contenir* auch durch *renfermer* und *comprendre* ausdrücken. Diese Verben sind also Teilsynonyme von *contenir* und zudem auch schon vor dem 19. Jahrhundert in mathematischen Kontexten gebräuchlich; so konnte z. B. durch *renfermer* ausgedrückt werden, daß eine Gleichung eine Unbekannte enthält (*Encyclopédie*, s. v. équation). Es zeigt sich nun, daß *renfermer* und *comprendre* im 19. Jahrhundert, ebenso wie *contenir*, für die Enthalten-Relation zwischen Gruppen und ihren Elementen verwendet werden konnten, d. h. die Verben haben einen zu *contenir* parallelen Bedeutungswandel durchlaufen.

Vergleichbares läßt sich auch für *appartenir à* und *faire partie de* feststellen. Diese Verben werden syntaktisch anders verwendet als die eben genannten, da bei ihnen das Subjekt nicht wie etwa bei *contenir* eine Menge, sondern ein Element einer Menge ist. Von diesem Unterschied abgesehen drücken sie jedoch in der Gemeinsprache dieselbe Relation aus, und semantisch bildet *faire partie de* eine Art Konverse von *contenir*. Als Objekt kommen dabei verschiedene Ausdrücke für Zusammenfassungen von Dingen oder Personen vor, wobei sich auch Belege für *groupe* finden lassen.[65] Auch diese Verben werden im 19. Jahrhundert für die Enthalten-Relation in bezug auf Gruppen üblich.

Das Verb *comprendre* ist auch im arithmetischen Sinn, d. h. in bezug auf die Enthalten-Relation zwischen Objekten gleicher Art (insbesondere Zahlen), synonym zu *contenir*.

Ein weiterer paralleler Bedeutungswandel zeigt sich im Deutschen: Dort sind die arithmetischen Termini *Teiler* und *Divisor* synonym (Schirmer 1912, s. v. Divisor, Teiler). Nachdem dann *Divisor* in die Algebra eingeführt war, konnte auch dessen arithmetisches Synonym *Teiler* in der Algebra mit derselben Bedeutung 'Untergruppe' verwendet werden.

Die soeben besprochenen Kollokationen lassen sich schließlich auch aus Sicht des Einbettungsproblems (Kap. 4.1.2) betrachten. Aus mathematikhistorischer Sicht ist es sicher wesentlich, daß neben der Formulierung der Abgeschlossenheit Gruppen bei Galois als Ganzes betrachtet und zu einem wissenschaftlichen Objekt gemacht werden. Der Aspekt des „Ganzen" ist dabei in der Bedeutung von *groupe* enthalten, wird aber auch durch Kollokationen mit *composer* hervorgehoben,[66] dessen Bedeutung schon im DAF von 1694 mit der Bedeutung 'Former, faire un tout de l'assemblage de plusieurs parties' angegeben wird. Ein weiterer Aspekt von *groupe* betrifft die Zugehörigkeit zu einer Gruppe (z. B. *appartenir à*). Ebenso haben wir gesehen, daß *groupe* bei Galois in dem für dieses Wort typischen sprachlichen Kontext *diviser/partager en groupes* vorkommt.

D. h., diejenigen Kollokationen, die die zentralen semantischen Eigenschaften von *groupe* hervorheben, werden auch mit in die Mathematik übernommen.

[65] So heißt es in einer Beschreibung einer Seereise in bezug auf eine Gruppe von Inseln: „L'île de l'Assomption elle-même, qui **fait partie d**'un groupe d'îles si connues ..." (La Pérouse 1797: 307).

[66] Cruse (1986: 52, 2000: 121) diskutiert diese sprachliche Erscheinung unter dem Begriff „contextual modulation". In der kognitiven Linguistik wird von „highlighting" oder „profiling" gesprochen.

Es finden sich bei Galois nur wenige weitere Kollokationen mit *groupe*. Zu nennen wären hier Verben, die man so auffassen kann, daß sie den Status von Gruppen als einem wissenschaftlichen Objekt hervorheben, mit dem entsprechend wissenschaftlich umgegangen werden kann, z. B. betrifft dies die Verben *changer* und *simplifier* als Ergebnis einer mathematischen Operation an einer Gruppe (Galois 1976: 55, 179).

Durch die Übernahme der elementaren Behältnismetaphorik in die Algebra ergeben sich die verbleibenden Kollokationen, die wir für *groupe* in den Schriften Galois' finden konnten. Gemeint sind die Verben *abaisser* und *diminuer* (z. B. Galois 1976: 61, 95), die sich auf die Größe der Gruppe beziehen und dann verwendet werden, wenn sich die Anzahl der Elemente einer Gruppe durch mathematische Operationen verändert.

Wir halten zusammenfassend fest, daß neben dem Ausdruck *groupe* zum größten Teil elementare Metaphorik sowie Kollokationen übernommen werden, die zentrale semantische Aspekte von *groupe* hervorheben. Zu ergänzen ist noch, daß auch die Zerlegungsmetaphorik aus der Arithmetik auf *groupe* übertragen wird, wenn auch (zunächst) nicht in Analogie zum Fundamentalsatz der Arithmetik. Es ist zwar einleuchtend, daß man etwas über neu eingeführte Objekte sagen können muß, d. h. man könnte argumentieren, diese Einbettung sei trivial. Andererseits ist es nicht unwichtig zu wissen, wie ein neuer Terminus genau sprachlich eingebettet wird, denn es ist möglich, daß diese Einbettung mit dem Verständnis des neuen Begriffs zusammenhängt. Daher erscheint es auch sinnvoll, genauer zu bestimmen, in welche Metaphorik bzw. Prädikationen neue Termini eingebettet werden. Zur Beantwortung dieser Frage können wir nur einen exemplarischen Beitrag leisten, doch zeigt das Beispiel *groupe* immerhin, daß verbale Prädikationen elementarer Art sind, d. h. die Einbettung hat größtenteils gemeinsprachlichen Charakter, wird aber gleichzeitig durch innerfachliche Analogien ergänzt. Abgeleitete Begriffe weisen einen wesentlich stärker ausgeprägten fachlichen Charakter auf. Ein Beispiel ist die Bezeichnung *groupe irréductible* (z. B. Galois 1976: 79), eine Gruppe, die einer *équation irréductible* zugeordnet ist,[67] wobei es sich im letzten Fall um eine bereits im 18. Jahrhundert übliche Bezeichnung handelt.

[67]Es handelt sich um sog. transitive Gruppen. S. Dahan (1980: 292f.).

Kapitel 10

Beispiel „Körper“

Das Beispiel „Körper“ unterscheidet sich in mehrfacher Hinsicht vom Beispiel „Gruppe“. Der Ausdruck *Körper* hat eine lange Tradition (lat. *corpus*) und weist eine recht große Anzahl verschiedener Bedeutungen auf. In der Mathematik erscheint der Ausdruck, anders als *Gruppe*, zuerst in der Geometrie zur Bezeichnung eines räumlichen Gebildes und wird erst mehrere Jahrhunderte nach Einführung dieser Verwendungsweise in die Algebra eingeführt. In bezug auf die Entlehnungen bzw. Bezeichnungen bestehen zudem große Unterschiede zwischen dem Französischen und Deutschen einerseits und dem Englischen andererseits. Das Beispiel gibt uns zudem die Möglichkeit, einige ungewöhnlich ausführliche Kommentare zweier Mathematiker des 19. Jahrhunderts zu der von ihnen verwendeten Sprache zu betrachten.

Eine Übersicht über nominale Ausdrücke für ‘Körper’ gibt Tabelle 10.1.

Tabelle 10.1: Ausdrücke für ‘Körper’

Sprache	Gemeinsprache	Geometrie	Algebra
Griechisch	*sō̃ma*	*sō̃ma*, *(tò) stereón*	-
Latein	*corpus*	*corpus*, *solidus*	-
Französisch	*corps*	*corps*, *solide*	*corps*
Deutsch	*Körper*	*Körper*	*Körper*
Englisch	*corps*	*body*, *solid*	*field*

Die Ziele dieses Kapitels sind die folgenden.

Zunächst geht es uns darum, die semantische Entwicklung von „Körper“ nachzuvollziehen und semantische Verbindungen zwischen den unterschiedlichen

Bedeutungen herzustellen. Dabei arbeiten wir wieder besonders die mathematischen Bedeutungen heraus und analysieren den Erstbeleg für den algebraischen Körperbegriff im Detail. Daneben diskutieren wir die Entlehnungen ins Englische und Französische.

Zweitens geht es um ein Verständnis der metasprachlichen Kommentare Richard Dedekinds und Leopold Kroneckers und darum, diese Kommentare in Beziehung zu deren Ansichten über die Mathematik setzen. Im Zuge dessen werden die konkurrierenden Bezeichnungen *Körper* und *Rationalitätsbereich* miteinander verglichen.

Das dritte Thema bildet eine linguistische Darstellung des Aufbaus von Dedekinds Theorie, die u. a. besonders durch zahlreiche systematische Übertragungen auffällt.

Des weiteren wollen wir die Begriffsbildung auf der Grundlage des in Kap. 5.7 entworfenen Modells zusammenfassend erläutern.

10.1 Etymologie – Gemeinsprache

Das deutsche Wort *Körper*, das die Erbwörter *Leib* und *Leiche* verdrängt (Kluge),[1] ist lateinischen Ursprungs, wo *corpus* die Bedeutung ‘Leib’ hatte. Die weitere Etymologie ist unklar, wie bei zahlreichen Wörtern für ‘Körper’. Das Wort tritt seit dem 13. Jahrhundert in verschiedenen Abwandlungen im Deutschen auf. Im Englischen erscheint es als *corpse* (Erstbeleg OED: 1315),[2] Die französische Form *corps* läßt sich seit dem 9. Jahrhundert nachweisen.

Das lat. Adjektiv *solidus* hat etwa die Bedeutung ‘ganz, völlig; kompakt, massiv’ und ist mit lat. *salvus* ‘heil’ verwandt. Die idg. Wurzel hat die Bedeutung ‘ganz, völlig’, die für zahlreiche der späteren Bedeutungen zentral ist. Das OED gibt als Erstbeleg für das englische Adjektiv das Jahr 1430 an, für das Substantiv das Jahr 1495; im Französischen erscheint *solide* zu Beginn des 14. Jahrhunderts (das DHLF gibt das Jahr 1314 an).

Nach Chantraine ist die Etymologie von *sõ̃ma* unklar, bei *stereós* liegt eine Wurzel vor, die ‘hart, fest’ bedeutet (zu vergleichen ist dt. *starr*).

---

[1] Im Niederländischen ist *lichaam*, etymologisch mit *Leiche* verwandt, auch heute noch in der Bedeutung ‘lebender Körper’ existent und wird sowohl in der Geometrie als auch in der Algebra verwendet.

[2] Die Variante *corpus* erscheint zuerst 1440, zunächst in der Bedeutung ‘the body of a man or animal’ (OED).

Die Herkunft von e. *body* wird in den meisten einschlägigen Wörterbüchern nur bis ae. *bodig* ‘Körper, Rumpf’ zurückverfolgt. Bammesberger (1979: 19) macht jedoch darauf aufmerksam, daß wahrscheinlich eine Verbindung zur idg. Wurzel **bhū-* ‘wachsen’ vorliegt, so daß das Etymon als ‘das Gewachsene’ zu deuten ist.

Das englische Erbwort *field* ist mit dem dt. *Feld* verwandt und gut rekonstruiert. Ausgangsbedeutung ist ‘Ausgebreitetes, Ebene’ (Kluge).

10.2 Semantische Struktur

Untersuchen wir die Ausdrücke mit der gemeinsprachlichen Bedeutung ‘Körper’, so fallen zunächst drei Dinge auf: Erstens sind die Ausdrücke allesamt hochgradig polysem, zweitens weisen sie, wenn man sie miteinander vergleicht, eine sehr große Parallelität der Bedeutungsstrukturen auf, und drittens finden sich zumindest in den modernen Sprachen zahlreiche fachsprachliche Bedeutungen. Dabei ist die angesprochene Parallelität sicher mindestens in Teilen auf Übersetzungsvorgänge zurückzuführen.[3]

Wir gehen im folgenden nicht auf sämtliche Bedeutungen ein, sondern geben eine vereinfachte Darstellung, in der die wesentlichen Merkmale herausgearbeitet werden, die den Hauptbedeutungen zugrundeliegen. Dabei gehen wir von dem griechischen Ausdruck *sō̃ma* aus, dessen Bedeutungskern und -struktur sich auch in den anderen betrachteten Sprachen wiederfindet und der für die begriffsgeschichtliche Entwicklung maßgeblich war.

Mit *sō̃ma* kann man zunächst den Körper eines Menschen oder Tieres bezeichnen. Historisch bestand dabei zunächst eine Beschränkung auf tote Körper; dies gilt insbesondere für Homer, der da, wo wir heute von (lebenden) Körpern sprechen, von *Gliedern* sprach.[4] Erst später konnte *sō̃ma* auch lebende Körper bezeichnen. Gerade bei toten Körpern, also dem historischen Ausgangspunkt, scheint das Merkmal ‘Masse’ besonders salient zu sein; bei lebenden Körpern ist dieser Aspekt weniger stark ausgeprägt. Das Wort steht in Opposition zu *psychḗ* ‘Seele’. Weiterhin wird der griechische Ausdruck für materielle Objekte verwendet, sofern sich diese als ein Ganzes oder als Gesamtheit auffassen lassen. Das Wort kann auch den Text eines Dokumentes im Gegensatz z. B. zu den Präliminarien bezeich-

[3]So wird etwa im DHLF (s. v. corps) darauf hingewiesen, daß die Parallelität von gr. *sō̃ma* und lat. *corpus* so zu erklären sei, und es werden detaillierte Parallelen zwischen dem französischen und lateinischen Ausdruck aufgezeigt.

[4]Für Einzelheiten s. Snell (1955: 17-42, insbesondere S. 22-25).

nen. Diese Aussagen lassen sich auch auf die jeweiligen Ausdrücke in den anderen betrachteten Sprachen anwenden.

Aus semantischer Sicht lassen die folgenden Beobachtungen machen:

1. Die untersuchten Ausdrücke für ‘Körper’ beziehen sich auf lebende oder tote Objekte.[5]

2. Es kann mit ihnen Bezug auf ein so wahrgenommenes „Ganzes“ genommen werden.

3. Besonders bei toten Körpern wird das Merkmal, daß Körper etwas Festes sind und eine Masse haben, hervorgehoben.

4. Da Körper als etwas „Ganzes“ aufgefaßt werden können, finden sich in gemeinsprachlichen Verwendungen zahlreiche typische Kollokationen, z. B. mit Ausdrücken für ‘bilden’ oder ‘bestehen aus’.

5. Der Aspekt der ‘Abgrenzung’ ist in den meisten Bedeutungen explizit oder implizit vorhanden.

Daß Körper Grenzen haben, zeigt sich insbesondere an klassischen geometrischen Definitionen; dieser Aspekt ist auch für die algebraische Bedeutung relevant.

10.3 „Körper“ in der Geometrie

In der Geometrie sind Körper dreidimensionale Objekte. Wir gehen kurz auf die wichtigsten Ausdrücke ein und heben dabei diejenigen Aspekte hervor, die für die Algebra von Bedeutung sind.

Zur leichteren Orientierung haben wir die wichtigsten Ausdrücke in Tab. 10.2 zusammengestellt.

Die verwendeten griechischen Ausdrücke führt Mugler (1958/59) wie folgt auf:[6]

[5] Das deutsche Wort *Leiche* wurde – wie gesagt – ursprünglich auch für den lebenden Körper verwendet.

[6] Die Zitate stammen aus den jeweiligen Wörterbucheinträgen bei Mugler. Im Anschluß an das Stichwort gibt er jeweils ein lateinisches, französisches, deutsches und englisches Übersetzungsäquivalent an; diese werden hier ebenfalls aufgeführt. – Einige weitere Möglichkeiten, sich im Griechischen auf Körper zu beziehen, sind bei Mugler (1948: 11, 39f., 1958/59, s. v. nastón) angegeben. S. a. Tropfke (1940: 51) und dazu Mugler (1948: 6).

Tabelle 10.2: Ausdrücke für 'Körper' in der Geometrie

Gr.	Lat.	E.	Frz.	Dt.
sō̃ma	*corpus*	*corps*	*corps*	*Körper*
stereón	*solidus*	*solid*	*solide*	*Körper*

- stereós (solidus, solide, räumlich, solid): „Adj. qualifiant une figure comme ayant trois dimensions et relevant de la géométrie de l'espace. Fréquent sous la forme neutre *tò stereón* = le corps solide, la figure de l'espace"
- sō̃ma (corpus, corps, Körper, body): „Figure à trois dimensions, compacte ou vide; dans ce dernier cas, *sō̃ma* est souvent synonyme de *schē̃ma*, en particulier dans l'expression *tò stereòn sō̃ma*"

Zur Beleglage ist zu sagen, daß *stereós* seit Platon auftritt (Mugler 1948: 40) und bei Euklid durchgängig für „Körper" verwendet wird, häufig auch in der Verbindung *tò stereòn schē̃ma*.[7] Für *sō̃ma* gibt Mugler Belege ebenfalls ab Platon an (Mugler 1958/59, s. v. *sō̃ma*). Er macht zudem darauf aufmerksam, daß die Bedeutung 'fester Körper' „très ancien" sei (Mugler 1948: 39).

Im Lateinischen bürgern sich für *sō̃ma* bzw. *stereón* sogleich die Übersetzungen *corpus* bzw. *solidus* ein (Tropfke 1940: 51).

In deutschen Texten erscheint *corpus* zum Ende des 15. Jahrhunderts noch in lateinischer Form (die von vielen Autoren auch noch länger beibehalten wird). Der erste Beleg für *Cörper* stammt aus dem Jahr 1518 (Schirmer 1912, s. v. Körper). Die Bedeutung des Wortes ist dem lateinischen Vorbild entlehnt.

Für *corpus* bzw. *solidus* sind verschiedene Eindeutschungsversuche unternommen worden; z. B. wurden *das Dichte*, *die volle leibhaftige Figur*, *der Leichnam* vorgeschlagen (Schirmer 1912: 39). Kepler (wie auch schon andere vor ihm) benutzt gelegentlich das Wort *Leib*, das gleichzeitig das Volumen eines Körpers bezeichnet (Götze 1919: 119f.).[8] Das Wort *Körper* kommt bei Kepler nicht vor, wohl aber das abgeleitete Adjektiv *körperlich* (Götze 1919: 106, 51f., 201).

[7] Diese Darstellung ist vereinfacht. Zu Einzelheiten s. Mugler (1948: 37-43).

[8] Diese Form der Polysemie läßt sich schon in der Antike nachweisen, z. B. bei gr. *pyramís* (Tropfke 1924a: 14).

Im Englischen werden für „Körper" die Substantive *body* (Erstbeleg OED: 1570) und *solid* (Erstbeleg OED, s. v. solid: 1495, das Adjektiv schon ab 1430) verwendet, zuerst mit gleicher Bedeutung. In der ersten englischen Übersetzung der *Elemente* von Euklid von 1570 heißt es: „A superficies being moued maketh ... a solide or body" (zitiert nach OED). Ab Ende des 19. Jahrhunderts wird laut OED nur noch *solid* verwendet (in der Physik ist *body* jedoch weiterhin geläufig).

Das Französische benutzt für „Körper" ebenfalls verschiedene Ausdrücke. Zu nennen ist das Substantiv *solide*, das sich direkt an seinen lateinischen Vorgänger anschließt. Es läßt sich laut DHLF in der Mathematik ab 1613 nachweisen, das Adjektiv erst ab 1680 (in der Gemeinsprache seit dem 14. Jahrhundert). Das Substantiv *corps* ist synonym mit *solide*. Es konnte nicht genau festgestellt werden, wann dieses Wort in der Geometrie zuerst verwendet wurde; nachweisen läßt es sich z. B. bei Furetière (1690, s. v. corps).

Damit lassen sich in der Geometrie zwei Hauptentwicklungsstränge erkennen, die schon im Griechischen ihren Ausgangspunkt haben. Zunächst handelt es sich um Ausdrücke mit der Bedeutung 'fest, starr, massiv'. Die Verbindung zur Dreidimensionalität ist vermutlich dadurch gegeben, daß etwas Festes üblicherweise räumlich, nicht jedoch flach oder gar eindimensional ist. Schon das griechische Adjektiv *stereós* stand in Opposition zu *epípedos* 'eben' (Liddell & Scott, s. v. *stereós*). Damit findet bereits im Griechischen ein erheblicher Abstraktionsvorgang statt, denn bei Körpern in der Geometrie wird von physischen Eigenschaften wie z. B. der Masse bzw. von taktilen Eigenschaften wie der Festigkeit abstrahiert. Statt dessen steht das Meßbare, insbesondere das Volumen, im Vordergrund, wie z. B. Euklids Definition eines Körpers, als das, was Länge (*mē̃kos*), Breite (*plátos*) und Tiefe (*báthos*) hat, zeigt (*Elemente*, Buch XI, Def. 1), denn schließlich läßt sich das Volumen anhand dieser drei Dimensionen berechnen.

Gleichzeitig wird z. B. bei Euklid auch die Begrenztheit von geometrischen Körpern expliziert. In der sich an die Definition von „Körper" anschließenden Definition heißt es: „Grenze (*péras*) eines Körpers ist eine Fläche" (Buch XI, Def. 2). Das hier verwendete *péras* bedeutet wörtlich etwa 'äußere Grenze'. Es wird von Euklid in ähnlicher Weise bei Geraden (Buch I, Def. 3) und Flächen (Buch I, Def. 6) verwendet und ist auch bei zahlreichen anderen Autoren in Gebrauch. Nach Proklos stammt dieser Ausdruck aus der Landmeßkunst, wo es die Bedeutung 'Feldgrenze' hatte (Tropfke 1940: 38). Des weiteren werden Körper bei Euklid immer wieder als „Figuren" (*schē̃ma*) bezeichnet (*Elemente*, Buch XI, Def. 12, 13, 25-28), und diese haben per Definition eine „Grenze“ (*hóros*) (Buch I, Def. 13).[9]

Der zweite Entwicklungsstrang beginnt mit dem Ausdruck *sõ̃ma*. Die unmittelbare Bedeutung, an die sich ‘Körper in der Geometrie’ anschließt, ist sicher ‘materieller Körper’. Dabei hat ebenfalls ein Abstraktionsvorgang stattgefunden, nämlich wiederum das Ausblenden physischer Eigenschaften. Bei *sõ̃ma* ist, ähnlich wie bei *stéreon*, der Aspekt der Materialität in der Ausgangsbedeutung ‘menschlicher oder tierischer Körper’ vorhanden (zumal der Ausdruck schon in der Antike in Opposition zu *eídolon* ‘Geist’ steht, s. o.). Die Räumlichkeit ist bei *sõ̃ma* direkt vorhanden, bei *stereón* inferiert. Schließlich ist die Begrenztheit bei *sõ̃ma* semantisches Merkmal, bei *stereón* ist sie vermutlich sekundär.

10.4 „Körper“ in der Algebra

Die Verwendung des Ausdrucks *Körper* in der Algebra geht auf Richard Dedekind zurück.[10] In seiner Schrift „Ueber die Komposition der binären quadratischen Formen“ von 1871 erscheint der Begriff zum ersten Male explizit. Dedekind ist sich seiner Bedeutung von Anfang an bewußt, denn er erscheint ihm geeignet, „als Grundlage für die höhere Algebra und die mit ihr zusammenhängenden Teile der Zahlentheorie zu dienen“ (Dedekind 1871 [1932: 224]).

In seiner eben erwähnten Schrift führt Dedekind den Ausdruck sogleich intensional ein:

(10.1) Unter einem *Körper* wollen wir jedes System von unendlich vielen reellen oder komplexen Zahlen verstehen, welches in sich so abgeschlossen und vollständig ist, daß die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division von je zwei Zahlen immer wieder eine Zahl desselben Systems hervorbringt (Dedekind 1871 [1932: 224]).

In manchen Schriften sagt Dedekind genauer *Zahlkörper*, denn er faßt den Begriff noch nicht völlig abstrakt, sondern bindet ihn zunächst, wie aus der Definition ersichtlich, an reelle oder komplexe Zahlen, eine Einschränkung, die erst gegen Ende des 19. Jahrhunderts aufgehoben wird. Insbesondere sind bei Dedekind Körper grundsätzlich unendlich.

[9] Die Ausdrücke werden etwa von Aristoteles synonym verwendet (Tropfke 1940: 38).

[10] Zur Begriffsgeschichte von „Körper“ in der Algebra s. Purkert (1971, 1972, 1973). S. a. Kiernan (1971/72), Haubrich (1992).

Anders als bei der Einführung des Begriffs „Gruppe“ liegt hier also eine klare Definition vor, in die die Erkenntnisse der mathematischen Forschung der vorausgehenden Jahrzehnte einfließt. Dies wird besonders deutlich durch die Beispiele, die Dedekind gibt, nämlich u. a. die rationalen, reellen und komplexen Zahlen.

Zur ersten Annäherung an das Benennungsmotiv betrachten wir diese Textstelle etwas genauer. Die Definition ist nach klassischem Muster aufgebaut. Das Genus proximum ist dabei „System“ (Dedekinds Synonym für „Menge“), d. h. Körper werden als Systeme mit bestimmten Eigenschaften definiert. Ein *System* wiederum ist für Dedekind ein Behältnis, ein Aspekt, den Dedekind an anderer Stelle ausführt:

> Es kommt sehr häufig vor, daß verschiedene Dinge a, b, c ... aus irgendeiner Veranlassung unter einem gemeinsamen Gesichtspunkt aufgefaßt, im Geiste zusammengestellt werden, und man sagt dann, daß sie ein *System* S bilden; man nennt die Dinge $a, b, c, \ldots$ die *Elemente* des Systems S, sie sind *enthalten* in S; umgekehrt *besteht* S aus diesen Elementen (Dedekind 1888 [1932: 344f.]).[11]

Insgesamt ergibt sich, daß ein Körper ein Behältnis für seine Elemente (komplexe Zahlen) ist. Die Behältnismetaphorik ergibt sich per Definition und macht einen ähnlich sekundären Eindruck wie bei *groupe* (vgl. Kap. 9.3).

Die Definition eines Körpers wird durch die Erklärung der uns schon bekannten Abgeschlossenheit vervollständigt: Die rationalen Operationen führen nicht aus dem Körper heraus, d. h. ein Körper ist insofern begrenzt, als die Operationen keine Elemente entstehen lassen, die nicht schon zuvor in dem Körper enthalten waren. Das Adjektiv *abgeschlossen*, das hier noch nicht terminologisiert ist, hebt diese Grenze hervor. Die Konstruktion *abgeschlossen und vollständig* ist jedoch als ein Ausdruck zu verstehen, der sich insgesamt auf den angesprochenen Sachverhalt bezieht.[12]

[11] Es ist nicht ratsam, hier von einer *Definition* zu sprechen, da Dedekind an dieser Stelle seiner Schrift, im Gegensatz zum restlichen Text, *nicht* von einer Definition (bei ihm *Erklärung*) spricht (Ferreirós 1999: 226).

[12] Daß dem so ist, ist aus diesem Zitat allein schwer zu erkennen. Zur Untermauerung läßt sich folgender Beleg heranziehen: „Dieses System [der Körper der rationalen Zahlen. H. B.] ... besitzt vor allen Dingen eine Vollständigkeit und Abgeschlossenheit, ... welche darin besteht, daß die vier Grundoperationen mit je zwei Individuen ... stets ausführbar sind, d. h. daß das Resultat derselben stets wieder ein bestimmtes Individuum [des Körpers der rationalen Zahlen] ist“ (Dedekind 1872 [1932: 318]). Die syntaktische Konstruktion, insbesondere die Verwendung des Singulars *besteht*, bestätigt unsere Behauptung.

Zu einem späteren Anlaß erläutert Dedekind seine Wortwahl:

> Dieser Name [*Körper*, H. B.] soll, ähnlich wie in den Naturwissenschaften, in der Geometrie und im Leben der menschlichen Gesellschaft, auch hier ein System bezeichnen, das eine gewisse Vollständigkeit, Vollkommenheit, Abgeschlossenheit besitzt, wodurch es als ein organisches Ganzes, als eine natürliche Einheit erscheint (Dedekind 1894 [1932: 20, Fn.]).

Dieser Aussage können wir entnehmen, daß Dedekind die Bezeichnung *Körper* aufgrund mehrerer fachlicher Analogien wählt. Er nennt einige wesentliche Eigenschaften, die seine Wahl motivieren.

Neben der bereits diskutierten Abgeschlossenheit und Vollständigkeit spricht er von einem *organischen Ganzen*. Die Vorstellung von einem „Ganzen" haben wir bereits in anderem Kontext diskutiert (Kap. 9.1); sie ist außerdem schon bei *sȭma* semantisches Merkmal. Das Adjektiv *organisch* gibt uns genaueren Aufschluß über das Objekt der Untersuchung: Wie lebende Objekte werden Körper hier – wenn auch nur andeutungsweise – als etwas Ganzes betrachtet, dessen innerer Aufbau in bestimmter Weise strukturiert ist. Organismen sind aber nicht nur Zusammenfassungen ihrer Teile, sondern sie sind durch das Wesen ihrer Bestandteile und deren Beziehungen untereinander charakterisiert. Die einzelnen Teile, die Organe, bestehen nicht einfach nebeneinander, sondern haben jeweils eine Funktion, die in ihrer Gesamtheit zur Funktion des ganzen Organismus beitragen. Den Teilen eines Organismus entsprechen bei Körpern die „Unterkörper", d. h. die Teilmengen eines gegebenen Körpers, die selbst schon Körper sind (diese bezeichnet Dedekind 1894 [1932: 20] als *Divisoren*). Das Bild des Organismus drückt also eine strukturelle Auffassung in Zusammenhang mit Körpern aus: Ging es Sophus Lie bei Gruppen um die Bestimmung der Untergruppen und die Untersuchung deren Beziehungen zueinander, so deutet Dedekind an dieser Stelle analoge Fragestellungen für Körper an (s. Kap. 9.8).

Dedekind ergänzt seine Erläuterung zur Herkunft des Begriffs, was uns einige Aufschlüsse über die Bezeichnungsentwicklung gibt:

> Anfangs, in meinen Göttinger Vorlesungen (1857 bis 1858), hatte ich denselben Begriff [Körper, H. B.] mit dem Namen eines *rationalen Gebietes* belegt, der aber weniger bequem ist. Der Begriff fällt im wesentlichen zusammen mit dem, was Kronecker einen *Rationalitätsbereich* genannt hat (Dedekind

1894 [1932: 20, Fn.]).[13]

Damit wird klar, daß der Begriff schon etwas älter ist als die Benennung. Zudem ist Dedekind offensichtlich vom älteren *rationales Gebiet* abgerückt und wendet sich gegen Kroneckers *Rationalitätsbereich*. Diese Ausdrücke weisen ein anderes Benennungmotiv auf, das auf den als *rational* bezeichneten Verknüpfungen Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division, die dem Begriff zugrunde liegen, beruht. Auf das Benennungsmotiv gehen wir in Kap. 10.5.3 näher ein.

10.5 *Körper* und *Rationalitätsbereich*: ein Vergleich

Der Konkurrent des Wortes *Körper* in der Algebra ist, wie oben bereits angesprochen, der Ausdruck *Rationalitätsbereich*, den Leopold Kronecker (1823-1891) eingeführt hat. Ein Vergleich zwischen beiden Autoren und deren Terminologie ist deswegen instruktiv, weil beide in sachlicher Hinsicht unterschiedliche Auffassungen zu vergleichbaren Begriffen[14] bzw. allgemein zu mathematischen Methoden vertraten. Dies wiederum zeigt sich auch in der von beiden Autoren verwendeten Sprache und deren metasprachlichen Kommentaren.

Das Ziel dieses Anschnitts ist es, Kroneckers metalinguistische Anmerkungen und kritischen Kommentare zu Dedekinds Terminologie und Sprachgebrauch zu verstehen. Dazu ist das Verständnis der Ansichten beider Mathematiker zur Mathematik und ihrer Methoden Vorbedingung, die aus diesem Grund zunächst erläutert werden. Im Anschluß daran werden Kroneckers Definition eines Rationalitätsbereichs und seine recht ausführlichen Äußerungen zur mathematischen, insbesondere zur Dedekindschen Terminologie diskutiert.

10.5.1 Dedekinds Ansichten zur Mathematik

Ferreirós (1999: Kap. 1) arbeitet zwei wesentliche Strömungen innerhalb der Mathematik des 19. Jahrhunderts heraus[15] und sieht Dedekind dabei als Vertreter

[13] Die angesprochenen Vorlesungen wurden erst 1981 veröffentlicht (Dedekind 1981). Dedekind gab hier noch keine explizite Definition eines rationalen Gebietes.

[14] Die Begriffe fallen im wesentlichen, aber nicht völlig zusammen (vgl. das Zitat von Dedekind im vorigen Abschnitt). S. Purkert (1971, 1973).

[15] Er konzentriert sich dabei hauptsächlich auf die Entwicklung innerhalb Deutschlands und geht nur am Rande auf andere Länder ein. Diese Perspektive ist jedoch für unsere Zwecke ausreichend.

einer begrifflichen Mathematik in „abstrakter“ Ausprägung („abstract conceptual approach“ bei Ferreirós). Zu dieser Strömung zählt er z. B. Peter Gustav Lejeune Dirichlet und Bernhard Riemann, die beide Dedekind beeinflußt haben.

Nach Dedekind geht es um „die Entscheidung für das Innerliche im Gegensatz zu dem Äußerlichen“ (Dedekind 1895 [1931: 55]) bzw. darum, „die Forschung nicht auf zufällige Darstellungsformen oder Ausdrücke sondern auf einfache Grundbegriffe zu stützen“ (Dedekind 1876 [1932: 468]). Diese Grundbegriffe (wie „Körper“) werden bei Dedekind (und Riemann) sehr abstrakt und allgemein gefaßt. Sie weichen insofern stark von den zur damaligen Zeit üblichen Begriffen ab, als sie nicht auf Zahlen, sondern auf Mengen von Zahlen beruhen (Ferreirós 1999: 30). Entscheidend für die abstrakte Strömung ist gleichermaßen, daß, wie Dedekind es in den obigen Zitaten andeutet, nicht die äußere Darstellungsform in die Definition eines mathematischen Begriffs eingeht (diese wird als sekundär angesehen), sondern dessen „characteristic „inner“ properties“ (Ferreirós 1999: 31).[16] Damit sind Dedekinds methodologische Prinzipien keineswegs erschöpfend behandelt (für einen Überblick s. Haubrich 1992: Kap. 1); dennoch soll diese kurze Charakterisierung für unsere Zwecke ausreichen.

10.5.2 Kroneckers Ansichten zur Mathematik

Kroneckers Ansichten zur Mathematik lassen sich nach Ferreirós (1999: 36) einer zweiten Variante der begrifflich ausgerichteten Mathematik zuordnen, die die formalen Aspekte zur Grundlage der Mathematik erhebt. Ein früher und einflußreicher Vertreter dieser Variante ist Martin Ohm, bei dem die Mathematik unter Ausklammerung ihrer gegenständlichen Seite als rein semiotische Tätigkeit erscheint (Haubrich 1992: 4). Begriffe werden hier aufgrund ihrer äußeren Form definiert; z. B. definiert Weierstrass komplexe Funktionen anhand ihrer Darstellbarkeit durch eine Potenzreihe, während dieser Begriff bei Riemann auf der (abstrakteren) komplexen Differenzierbarkeit beruht (Haubrich 1999: 10-12).

Diese Variante ist daher konstruktiver als die abstrakt-begriffliche, wobei hinzuzufügen ist, daß Kronecker in verschiedener Hinsicht erheblich radikaler ausgerichtet war als andere Vertreter der formal-begrifflichen Variante (Ferreirós 1999: 35). Seine Mathematik ist finitistisch: Nur das, was in endlich vielen Schritten erzeugt werden kann, gehört auch zur Mathematik. Den Ausgangspunkt stellen

[16] Dedekind (1895 [1931: 55]) selbst sprach von „innerliche[n] charakteristische[n] Eigenschaften“.

dabei, wie auch bei Dedekind, die natürlichen Zahlen dar. Kronecker lehnt das aktual Unendliche ab, das Dedekind als einer der ersten in der damaligen Zeit akzeptierte (Haubrich 1992: 8), und auch z. B. irrationale Zahlen zählen für ihn insofern nicht zu den mathematischen Objekten, als sie üblicherweise nicht endlich konstruiert werden.[17]

Kroneckers und Dedekinds mathematische Denkweisen sind damit „diametral entgegengesetzt“ (Purkert 1973: 13).[18]

10.5.3 Kroneckers Definition von „Rationalitätsbereich“ und die Wahl der Bezeichnung

Kroneckers Definition eines Rationalitätsbereichs findet sich in seinem Beitrag zur sog. „Kummer-Festschrift“ (Kronecker 1881/82), ein ausführlicher Artikel, der die wichtigste Quelle für Kroneckers metalinguistische Anmerkungen darstellt. Im Einklang mit seinen oben diskutierten methodischen Ansichten zur Mathematik geht es ihm darum, „die arithmetische Seite der Algebra besonders ins Auge zu fassen“ (Kronecker 1881/82 [1968: II, 245]). Seine implizite Definition unterscheidet sich in vielerlei Hinsicht deutlich von der Dedekinds:

(10.2) Der Rationalitäts-Bereich $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', ...)$ enthält, wie schon die Bezeichnung deutlich erkennen lässt, alle diejenigen Grössen, welche rationale Funktionen der Grössen $\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', ...$ mit ganzzahligen Coeffizienten sind (Kronecker 1881/82 [1968: II, 249]).

Kronecker geht in dieser Definition von den ganzen Zahlen aus, zu denen dann „Grössen“ (dieser Terminus wird weiter unten erläutert) hinzugefügt (der Terminus lautet *adjungiert*) werden, d. h. genauer, es werden nicht nur diese Größen hinzugefügt, sondern auch alle anderen durch diese Größen rational darstellbaren Größen. Ausgehend von der Größe $\mathfrak{R}' = \sqrt{-31}$ wird also, um ein explizites Beispiel zu geben, der Ausdruck $\frac{3+7\cdot\sqrt{-31}}{1-5\cdot\sqrt{-31}}$ hinzugefügt, der sich durch rationale Operationen aus $\sqrt{-31}$ darstellen läßt.

Für unsere Zwecke ist dabei wichtig, daß diese Definition – im Gegensatz zu Dedekinds intensionaler Definition – extensional ist, d. h. sie gibt in konstruktiver Weise (durch die rationale Darstellung) die Form der einzelnen Elemente des

[17] D. h. allerdings nicht, daß irrationale Zahlen in Kroneckers Arbeiten nicht vorkommen. Durch eine spezielle Konstruktion mittels sog. „Kongruenzen“ erreicht er eine seinen finitistischen Anforderungen genügende Definition (Kiernan 1971/72: 127).

[18] Zu Kronecker s. a. Mehrtens (1990: 190-206).

Rationalitätsbereiches an (Purkert 1973: 12). Die extensionale Form der Definition überrascht u. a. auch deshalb nicht, weil Dedekinds intensionale Definition auch aktual unendliche Mengen beinhaltet, die Kronecker, wie gesehen, nicht akzeptiert. Dies kommt auch durch die Wahl von *Bereich* zum Ausdruck:

> Die offen gehaltene Formulierung von den „Bereichen“ war ... bewußt gewählt, um die Konnotation des potentiell Unendlichen anzurufen. Sie stand der von Dedekind gewählten Formulierung vom „Körper“ entgegen, die eine Abgeschlossenheit der damit bezeichneten Gesamtheit in mehrerlei Hinsicht zum Ausdruck bringen sollte, auch durchaus im Sinne eines aktual Unendlichen (Scholz 1990: 395).

Kronecker betrachtet Rationalitätsbereiche nicht als Mengen, als Ganzes, sondern „merely as a region or place which contained the results of any finite number of algebraic operations on its elements, or rather where these operations took place“ (Kiernan 1971/72: 128) – aus diesem Grund erscheint in Kroneckers Definition auch z. B. nicht der bei Dedekind so wichtige mengentheoretische Ausdruck *System*. Der Terminus dient „nur zur Erleichterung der Ausdrucksweise bei der Darstellung der Theorie“ (Kronecker 1881/82 [1968: II, 249]) und hat damit nicht den grundlegenden Status wie bei Dedekind.

Dadurch wird gleichzeitig das Benennungsmotiv klar, das bei Kronecker wesentlich näher an den historischen Wurzeln des Körperbegriffs ist als bei Dedekind: Der Begriff entstand historisch im Kontext der Untersuchung von bestimmten Gleichungen aus der Erkenntnis, daß die Lösbarkeit dieser Gleichungen nicht nur von der gegebenen Gleichung abhängt, sondern insbesondere von den rationalen Größen, die der Gleichung zugrunde liegen (s. Kap. 7.1). In Arbeiten, in denen Rationalitätsbereiche bzw. Körper implizit betrachtet wurden, z. B. bei Galois, werden die mittels der rationalen Operationen erfaßbaren Elemente allgemein als *rational bekannt* bezeichnet (Kiernan 1971/72: 45, 47, 80). Purkert (1972: 90f.) bringt, ähnlich wie Kiernan, das Benennungsmotiv auf den Punkt: „Sind nämlich die Elemente des Körpers selbst nicht Gegenstand der Untersuchung, sondern verwendet Kronecker diesen Begriff nur, um das Rationale zu fixieren, d. h. als Koeffizientenkörper, dann spricht er von *Rationalitäts-Bezirk* bzw. *Rationalitäts-Bereich*“. Dafür findet sich auch bei Kronecker selbst eine klare Bestätigung, denn er spricht schon in bezug auf Abel und Galois über das „Bedürfnis einer Präcisirung dessen, was bei einer bestimmten Untersuchung als rational zu betrachten sei“ (Kronecker 1881/82 [1968: II, 248]) und – noch deutlicher – in seiner oben zitierten Definition findet sich der explizite Hinweis „wie schon die Bezeichnung deutlich erkennen lässt“.

Dedekinds ursprüngliche Bezeichnung *rationales Gebiet* ist hinsichtlich des Benennungsmotivs fast identisch mit Kroneckers *Rationalitätsbereich.* Ergänzt sei lediglich, daß der Ausdruck *Gebiet* bei Dedekind und einigen anderen Autoren in der schlichten Bedeutung ‘Menge’ verwendet wird.

Auf die Bezeichnung *Rationalitäts-Bezirk* und die von Kronecker so empfundene „Farblosigkeit“ des Ausdrucks *Bereich* gehen wir im folgenden Abschnitt ein.

10.5.4 Kroneckers Bezeichnungen und seine metasprachlichen Anmerkungen

Ursprünglich verwendete Kronecker nicht den Ausdruck *Rationalitäts-Bereich* (Kroneckers Schreibweise), sondern er sprach statt dessen von einem *Rationalitäts-Bezirk*. Die Gründe für die Veränderung der Bezeichnung legt er ausführlich dar:

> In dem letzten meiner oben erwähnten Aufsätze habe ich, wie auch stets in meinen Universitäts-Vorlesungen, den Ausdruck ‚Rationalitäts-Bezirk‘ gebraucht, um dessen in gewisser Hinsicht willkürliche Abgrenzung zu kennzeichnen; doch glaube ich den hier gewählten Ausdruck ‚Bereich‘ um desswillen vorziehen zu sollen, weil darin der Begriff des Räumlichen weniger scharf ausgeprägt ist, und weil er sich in Folge dessen den anderen in meinen Arbeiten und Universitäts-Vorlesungen eingeführten, durchweg nach *Gauss’* klassischem Muster der Systematik der beschreibenden Naturwissenschaften entlehnten Beziehungen näher anschliesst. Ueberdies findet sich auch im gewöhnlichen Sprachgebrauch bei dem Begriffe eines ‚Bereichs‘ die Möglichkeit einer verschiedenen Abgrenzung nicht geradezu ausgeschlossen, wenn sie auch darin weniger – als in dem Ausdruck ‚Bezirk‘ – hervorgehoben ist (Kronecker 1881/82 [1968: II, 248-249]).

Kronecker gibt also als Hauptgrund für die Wahl von *Bereich* die weniger stark ausgeprägte räumliche Metaphorik an. Damit zusammenhängend nennt er als zweiten Grund die bessere Einordnung des Begriffs in sein terminologisches System. Am Schluß des Zitats geht er noch vergleichend auf den semantischen Aspekt der „willkürlichen Abgrenzung“ ein.

Das Zitat soll im folgenden näher untersucht werden, da es uns direkt zu Kroneckers Gründen für die Ablehnung von Dedekinds Bezeichnungen führt.

Zunächst können wir feststellen, daß Kronecker sich durch räumliche Metaphern bei der Formulierung und Entwicklung seiner Theorien gestört fühlt. An anderer Stelle heißt es: „An einer Veröffentlichung durch den Druck hat mich namentlich die Schwierigkeit gehindert, meine bezüglichen Entwickelungen ... in der damals üblichen, aus analytisch-geometrischer Anschauungsweise hervorgegangenen algebraischen Terminologie auseinanderzusetzen“ (Kronecker 1886 [1968: III.1, 275]).[19] Durch seine eigene Terminologie sehe er sich nunmehr in der Lage, bestimmte Gegenstände wieder aufzunehmen (Kronecker 1886 [1968: III.1, 276]).

Um Kroneckers Sicht der Problematik räumlicher Metaphern zu verstehen, betrachten wir den in seiner Definition von „Rationalitäts-Bereich“ erwähnten Begriff der „Größe“ etwas genauer. Diesen will Kronecker „in der weitesten arithmetisch-algebraischen Bedeutung“ (Kronecker 1881/82 [1968: II, 249]) verstanden wissen, worunter bei Kronecker insbesondere „auch Grössengebilde wie ‘rationale Funktionen unbestimmter Größen’“ (ibid.) fallen. Kronecker versteht unter einer „Grösse“ also nicht nur Zahlen, sondern auch Funktionen (Kroneckers Begriff „Rationalitäts-Bereich“ ist damit allgemeiner als Dedekinds „Körper“; s. Kline 1972: 824). Mit dem Begriff der Größe wird aber traditionellerweise etwas Meßbares verbunden (Haubrich 1992: 3), und diese Meßbarkeit möchte Kronecker nicht auf Funktionen übertragen, denn diesen sei der Begriff „des ‘grösser oder kleiner Seins’ gänzlich fremd“ (Kronecker 1881/82 [1968: II, 250]).

Kronecker geht in seiner Ablehnung der Vorstellung von etwas Meßbarem noch weiter, denn er dehnt sie auch auf Zahlen aus. Diese gehören seiner Definition gemäß natürlich „mit in die Kategorie der zu behandelnden Grössen“ (Kronecker 1881/82 [1968: II, 250]), und für sie hat diese Vorstellung „volle Bedeutung“ (ibid.), doch in seiner Theorie will er darauf „keinerlei Rücksicht“ (ibid.) nehmen. Sein Ansatz ist so allgemein, daß z. B. die „Grösse $\sqrt{2}$ ‚begrifflich‘ weit ab von irgend einer der Quadratwurzel aus *zwei* noch so nahe liegenden rationalen Zahl“ (ibid.) liegt. Die übliche Gewohnheit und geometrische Vorstellung, „sich die Zahlengrössen ihrer Maassgrösse nach ... an einander gereiht oder irgendwie räumlich gruppirt vorzustellen“ (ibid.), will Kronecker vermeiden und statt dessen nur deren algebraische Eigenschaften betrachten.

[19]Die Formulierung „damals üblich“ scheint nicht ganz zutreffend zu sein, wenn man das tatsächliche Vorkommen geometrischer Redeweisen und Termini berücksichtigt.

Damit sind wir bei dem Grund dafür angekommen, aus dem Kronecker den Ausdruck *Bereich* wählt und aus dem er auch Dedekinds Terminologie nicht akzeptiert:

> [aus den oben erläuterten Gründen] halte ich es für angemessen, in der Terminologie die Ausdrücke mit entschieden räumlichem Gepräge zu vermeiden und nur solche, kaum zu umgehende Ausdrücke – wie eben jenes Wort ‚Bereich' – oder allgemeine Bilder zu gebrauchen, welche die ursprünglich räumliche Bedeutung bei ihrer vielfachen Verwendung im gewöhnlichen Sprachgebrauche schon fast verloren haben. Aus diesem Gesichtspunkte habe ich auch geglaubt, von der Adoption der *Dedekind*'schen Bezeichnung ‚Körper' absehen und meine ältere Bezeichnungsweise im Wesentlichen beibehalten zu sollen ... (Kronecker 1881/82 [1968: II, 250])

Der Ausdruck *Bereich* ist dabei für Kronecker offenbar eine Art „notwendiges Übel", da kaum zu umgehen. Dies gilt offenbar auch für einige weitere Ausdrücke, die uns schon häufiger begegnet sind, wie z. B. die Verben *enthalten* oder *angehören*, die bei Kronecker durchgehend vorkommen, allerdings seltener als z. B. bei Dedekind, oder für Mengenbezeichnungen wie *Gebiet*, die Kronecker ebenfalls nur selten verwendet (s. z. B. Kronecker 1856 [1968: 31]). Dedekind wendet sich vehement gegen Kroneckers Bemerkung, der Ausdruck habe ein „entschieden räumliches Gepräge"; in seinen „Bunten Bemerkungen" (Notizen zu Kroneckers Aufsatz) sagt er ausdrücklich, daß dies nicht zutreffe, da das Wort „erst nach Abstraction von dem physikalischen Körper in die Geometrie" gelangt sei und zudem „in den Naturwissenschaften und im Leben der menschlichen Gesellschaft" viel häufiger sei (zitiert nach Edwards - Neumann - Purkert 1982: 54). An derselben Stelle schließt er dann die in Kap. 10.4 bereits zitierten Anmerkungen in fast identischer Form an.

Als zweiten Grund für seine Bevorzugung von *Rationalitäts-Bereich* gegenüber *Rationalitäts-Bezirk* nennt Kronecker die einfachere Einordnung in sein terminologisches System, welches er den beschreibenden Naturwissenschaften entlehnt habe. Er spielt damit z. B. auf den Ausdruck *Gattung* bzw. *Gattungs-Bereich* an, der sich ebenfalls auf Körper beziehen kann, wenn die Perspektive eine andere ist (Purkert 1972: 91). Dieser Punkt ist für unsere Zwecke nicht bedeutsam, so daß wir darauf nicht weiter eingehen wollen.

Schließlich geht Kronecker im Ausgangszitat dieses Abschnitts noch kurz auf den semantischen Aspekt der „willkürlichen Abgrenzung" ein. Ursprünglich fiel seine Wahl auf *Bezirk*, da ein Bezirk (gemeinsprachlich) willkürlicher abgegrenzt sein kann als ein Bereich. Vergleichen wir zur Untersuchung dieser Behauptung die Bedeutungen beider Ausdrücke. Die Bedeutung von *Bereich* wird im DWB mit 'wohin etwas reicht' angegeben, die von *Bezirk* mit 'umkreis'.[20] Das Substantiv *Bereich* ist vom Verb *reichen* abgeleitet. Ein Bezirk hat demnach eine gegebene Begrenzung; die von Kronecker hervorgehobene Willkür zeigt sich etwa bei *Verwaltungsbezirken*, bei denen die Grenze nicht durch eine innere Eigenschaft des Bezirks, sondern durch eine der Sache äußerliche Entscheidung festgelegt wird. Bei Bereichen ist eine solche Willkür hinsichtlich der Grenzziehung zwar möglich, sie ist aber von anderer Art, denn Bereiche sind durch ihre „Reichweite" abgegrenzt. Diese Reichweite kann etwa durch eine Form von Macht bestimmt sein, denn Bereiche sind ursprünglich *Herrschaftsbereiche* (Kluge, s. v. Bereich). Man kann Kronecker also insgesamt in seiner Einschätzung der Semantik beider Ausdrücke zustimmen. Die Willkür hinsichtlich der Begrenzung besteht mathematisch darin, daß ein Rationalitäts-Bereich bei Kronecker insofern *willkürlich* abgegrenzt ist, als die Wahl der Größen $\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots$ „keinerlei Beschränkung" (Kronecker 1881/82 [1968: II, 253]) unterliegt; das Wort *Bereich* läßt diese Willkür, wie gesehen, weniger deutlich zu, so daß *Bezirk* in dieser Hinsicht für Kronecker nur zweite Wahl ist. In jedem Fall trifft auf beide Ausdrücke das Motiv der „Begrenzung" zu, ähnlich wie bei Dedekinds *Körper*.

Insgesamt ergibt sich folgendes Bild. Die Begriffe „Körper" und „Rationalitäts-Bereich" umfassen im wesentlichen dieselben Objekte.[21] Dedekind und Kronecker vertraten jedoch sehr unterschiedliche Auffassungen über die Mathematik, die sich jeweils in der Wahl sprachlicher Bezeichnungen und der Art der Begriffsbildung widerspiegeln. Dennoch lassen sich semantische Gemeinsamkeiten erkennen. Dazu können wir insbesondere den Aspekt der „Begrenzung" zählen.

10.6 Zur weiteren Verwendung von *Körper* und *Rationalitätsbereich*

Der Terminus *Körper* setzte sich im folgenden schnell gegenüber Kroneckers *Rationalitätsbereich* durch. Dies bedeutet jedoch nicht, daß Kroneckers Terminus völlig

[20] Letzterer Ausdruck liegt schon im Althochdeutschen in der Form *zirc* vor, die aus lat. *circus* 'Kreis' entlehnt wurde (Kluge, s. v. Bezirk).

[21] Durch die Arbeit von Steinitz (1910) wurde dies später besonders deutlich.

verdrängt wurde. Statt dessen wurde eine Verteilung der Verwendungen vorgeschlagen, die Weber explizit erläutert:

> Es ist bisweilen nützlich, den Ausdruck Rationalitätsbereich für einen Körper dann zu brauchen, wenn damit ausgedrückt werden soll, daß bei einer bestimmten Aufgabe die Grössen als bekannt oder rational betrachtet werden sollen (Weber 1895: 449).

Die „Aufgabenverteilung“ besteht demnach darin, daß *Körper* für den abstrakten Begriff, wie Dedekind ihn definiert hat, verwendet werden sollte, *Rationalitätsbereich* hingegen sollte die bei einer Untersuchung bekannten Größen bezeichnen, d. h. so, wie Kronecker dies vorgesehen hatte und wie es die Bezeichnung auch explizit zum Ausdruck bringt. Hilbert z. B. leitet seine Definition eines Ringes (eine verwandte algebraische Struktur) folgendermaßen ein: „Sind $\vartheta, \eta, \ldots$ irgend welche algebraische Zahlen, deren Rationalitätsbereich der Körper k von m-ten Gerade ist …“ (Hilbert 1897 [1970: 121]). Dieselbe Verteilung wird im englischen Sprachraum übernommen, z. B. Moore (1897: 50, Fn.) spricht von einem „desirable usage“, den er auch selbst einhält. Für alle betrachteten Sprachen gilt jedoch, daß der Ausdruck *Rationalitätsbereich* und seine Übersetzungen allmählich verschwinden.

10.7 Entlehnung ins Französische und Englische

Laut DHLF erscheint *corps* in algebraischer Bedeutung im Französischen 1903, allerdings findet sich der Ausdruck schon 1877 in einer von Dedekind in französischer Sprache verfaßten Schrift (Dedekind 1877a). Es besteht kein Zweifel daran, daß es sich um eine Lehnübersetzung handelt, die die identischen Bezeichnungen in Geometrie und Algebra auf das Französische überträgt. Ebenfalls eine Lehnübersetzung ist *domaine de rationalité* für Kroneckers *Rationalitäts-Bereich*, das gegen Ende des 19. Jahrhunderts von einigen Autoren eingeführt wird (z. B. bei Molk 1885). Als Entlehnung aus dem e. *field*, das wir sogleich besprechen werden, ist *champ* zu zählen. Ein früher Beleg ist etwa de Séguier (1904: 27).

Interessanter und vor allen Dingen komplexer ist die Situation im Englischen. Hier besteht in den Jahren um die Jahrhundertwende eine terminologisch unübersichtliche Situation, die erst im 20. Jahrhundert zugunsten von *field* entschieden wird.

Den vermutlich ersten Versuch, eine englische Entsprechung für *Körper* bzw.

Rationalitäts-Bereich zu finden, unternimmt Hathaway (1887) in einer wenig bekannten Arbeit.[22] Dort findet sich die folgende Definition:

(10.3) A *Universe* (Körper, Rationalitäts-Bereich) is an aggregate of numbers $a, b, c, ...,$ such that any combination of these numbers by *addition, subtraction, multiplication and division* (i. e. any *rational* combination) is a number of the aggregate (Hathaway 1887: 167).

Diese Definition, auf die im weiteren Text nur noch einmal Bezug genommen wird, lehnt sich sehr stark an die Dedekinds an. Zwei Unterschiede sind dennoch zu bemerken. Erstens beschränkt Hathaway seine Definition nicht ausdrücklich auf unendliche Mengen (bei Dedekind sind Körper, wie gesehen, immer unendlich). Allerdings gibt Hathaway in der Arbeit kein Beispiel für ein *Universe*, so daß nicht klar ist, ob der Autor endliche Mengen überhaupt in Erwägung zieht. Zweitens spricht Hathaway zwar von „numbers" (Dedekind bezieht sich auf komplexe Zahlen), fügt aber ausdrücklich hinzu, daß er diesen Begriff allgemeiner als Dedekind verwende: „We here use the word 'number' in the sense of a general expression to denote the objects of our attention ... These objects may be themselves aggregates of other objects or numbers from which our attention is for the time being abstracted" (Hathaway 1887: 167).

Hathaway ist die deutsche Terminologie offensichtlich gut bekannt, er beruft sich mehrmals auf Dedekind und Kronecker. Die von ihm gewählte Bezeichnung verbreitet sich allerdings nicht weiter, und auch Hathaway selbst hat sie offenbar nicht wieder aufgenommen.

Das Benennungsmotiv zeigt einen Versuch, den Aspekt der Zusammengehörigkeit der Elemente sprachlich hervorzuheben. Zu berücksichtigen ist hier, daß das englische *universe* eine weitere Bedeutung hat als das deutsche *Universum*. Das OED (s. v. universe) gibt etwa für *universe of discourse* die Bedeutung 'the totality of entities under consideration; all those that the terms of a proposition may refer to' an, welches im Englischen seit Mitte des 19. Jahrhunderts innerhalb der Logik verwendet wird. Dieses Motiv haben wir bereits beim Ausdruck *Rationalitäts-Bereich* diskutiert.

Die semantisch naheliegendste Entsprechung zu *Körper* ist zweifellos *body*. Wir haben bereits gesehen, daß der Ausdruck in geometrischem Kontext wie *Körper*

[22] Den Hinweis auf diese Arbeit verdanke ich einem Beitrag von Franz Lemmermeyer zur Mailing-Liste der Zeitschrift *Historia Mathematica* vom 18.10. 2000 (http://fire1b.math.utk.edu/hypermail/historia/0027.html).

verwendet wird. Lichtenberg (1966: 120) weist darauf hin, allerdings ohne Angabe von Belegen, daß der Ausdruck im amerikanischen Sprachraum um die Jahrhundertwende auch tatsächlich verwendet wurde. Reid (1910: vi) nennt in der Tat *body* als einen der üblichen Ausdrücke für „Körper". Er selbst bevorzuge den Ausdruck *realm*, „as it has the advantage ... of not having been used in any other branch of mathematics" (Reid 1910: vi). Semantisch ist *realm* eine genaue Entsprechung des Ausdrucks *Bereich*. Reid hat sich damit umentschieden, da er in einer früheren Arbeit (Reid 1901) *body* und *field* verwendet hatte.

Kroneckers *Rationalitäts-Bereich* wird durch zwei Lehnübersetzungen wiedergegeben, nämlich *domain of rationality* und *realm of rationality* oder kurz *realm*.[23]

Die Bezeichnung *field* hat Eliakim Hastings Moore (1862-1932) eingeführt (Moore 1896).[24] Moore gibt allerdings keinerlei Hinweis auf die Gründe für die Wahl dieses Ausdrucks, er verweist lediglich darauf, daß „[t]he term *field* ... and Weber's term *endlicher Körper* are synonyms" (Moore 1896: 208, Fn.). Er bezieht sich dabei auf Weber (1893a), der seinerseits die Bezeichnung von Dedekind übernommen und den Begriff auf Körper mit *endlich* vielen Elementen erweitert hat. Moore betrachtet nur solche Körper, die in diesem Zeitraum erstmals explizit unter den Begriff „Körper" gefaßt wurden (wie wir oben sahen, untersuchte Dedekind nur unendliche Körper). Spätestens in den ersten Jahren des 20. Jahrhunderts wurde diese Beschränkung für *field* aufgehoben (z. B. Dickson 1903, Huntington 1903) und der Terminus konnte für endliche und unendliche Körper verwendet werden.

Aus rein semantischer Sicht bestehen trotz gravierender Unterschiede auch wichtige Gemeinsamkeiten zwischen den Bezeichnungen *Körper* und *field*. So kann sich *field* auf *abgegrenzte* Gebiete beziehen, die im konkreten Fall z. B. „parted off by hedges, fences, stones, etc." (OED, s. v. field 4a) sein können und die, ähnlich wie dies für *Bereich* gilt, im abstrakten Fall eine begrenzte Reichweite oder Wirkung haben können, z. B. magnetische Kraft in der Physik. Im OED ist das Wort im Bedeutungsabschnitt 'area of operation or observation' angeordnet, was ein ähnliches Motiv wie bei Kronecker nahelegt: *field* als der Bereich, innerhalb dessen bestimmte mathematische Operationen ausgeführt werden. Eine Verbindung

[23] Die entsprechende Abkürzung *domain* hat sich vermutlich deswegen nicht eingebürgert, weil *domain* zum Zeitpunkt der Jahrhundertwende bereits mehrere andere mathematische Bedeutungen hatte.

[24] Bei dieser Veröffentlichung handelt es sich um die schriftliche Fassung eines Vortrages auf einem Chicagoer Kongreß, der 1893 stattfand. Der erste schriftliche Beleg für *field* findet sich in einer Zusammenfassung des Vortrags (Moore 1893).

zu Kroneckers Terminologie erscheint dabei auch deswegen möglich, weil Moore die Arbeiten Kroneckers bekannt sind (Moore 1897: 50) und er sogar im Winter 1885/86 bei Kronecker Vorlesungen gehört hat (Franci 1992: 269, Fn. 14).

Der Ausdruck *field* wurde im damaligen Zeitraum in einigen Texten in gemeinsprachlicher Form (d. h. – zumindest bei einigen Autoren – ohne explizite Definition) verwendet. So verwenden Harkness und Morley den Ausdruck im Sinne von 'offenes Intervall' in ihrer Definition einer stetigen Funktion: „The function $f(x)$ is said to be *continuous* at the point c ... if a **field** $(c - h$ to $c + h)$ can be found such that for all points of this field, $|f(x) - f(c)| < \epsilon$" (Harkness - Morley 1893: 49). Da die Autoren zuvor den Ausdruck *region* in derselben Bedeutung verwenden (Harkness - Morley 1893: 8) und *field* an keiner Stelle im Text definiert wird, ist hier nicht von einer Terminologisierung auszugehen.[25] In geometrischem Kontext erscheint *field of lines* bei Fine (1886: 169), offenbar als Übersetzung des geometrischen Ausdrucks *Geradenbüschel*; gemeint sind alle Geraden, die durch einen gegebenen Punkt verlaufen.

Für vergleichbare Verwendungen von *field* in der Algebra wurden keine Anhaltspunkte gefunden. In den genannten Fällen handelt es sich jeweils um eine begrenzte Gesamtheit, so daß eine Parallele zu Moores *field* vorliegt.

Trotz der Unterschiede zwischen dem Deutschen und Englischen fällt eine Parallele auf, zu deren Erläuterung wir einen Blick auf die Physik werfen. Die Bezeichnung *Körper* ist traditionell auch in dieser Disziplin üblich, ähnlich wie schon *sõ̃ma* im Griechischen. Ebenso existiert auch ein physikalischer Feldbegriff: Die Bezeichnung erscheint 1845 bei Faraday, in den 1860er Jahren erforschte Maxwell physikalische Felder (OED, s. v. field; s. Pulaczewska 1999: 196). Dies mag insofern keine ganz zufällige Parallele sein, als „solche Begriffe", d. h. Metaphern, die verschiedene Diskurse verbinden, „eine Rolle für die gemeinsame Sprache von Mathematik und Physik [spielen], weil sie den verschwundenen 'gemeinsamen' Gegenstand ersetzen können" (Mehrtens 1990: 507), der seit dem Auseinanderdriften von Mathematik und Physik im 19. Jahrhundert nicht mehr vorhanden ist. Dieses Argument ist allerdings im vorliegendem Fall nicht zwingend, denn eine solche Parallele wäre auch durch die Bezeichnung *body* entstanden (hier ist jedoch wiederum hinzuzufügen, daß *body* in der Geometrie im 19. Jahrhundert zugunsten von *solid* zurückgedrängt wird (OED, s. v. body)).

Es sei noch erwähnt, daß ausgehend von e. *field* eine weitere Entlehnung ins

[25] Den Hinweis auf diese Arbeit verdanke ich der Webseite von Jeff Miller (s. Kap. 5.8.4) unter „field".

Deutsche stattgefunden hat. Zu Beginn des 20. Jahrhunderts erscheint bei einigen Autoren die Bezeichnung *Galois-Feld* für einen *endlichen* Körper, z. B. bei Schur (1907: 113) und Steinitz (1910: 260, Fn.). Dieser Ausdruck geht auf e. *Galois-field* zurück, eine Bezeichnung, die ihrerseits für *endliche* Körper verwendet wurde. Es entstand folgender Kontrast: Im Englischen kann *field* sowohl für endliche als auch für unendliche Körper verwendet werden, im Deutschen bezeichnet *Feld* immer einen endlichen Körper.

10.8 Zur metaphorischen Struktur von Dedekinds algebraischer Zahlentheorie

Wir haben bereits gesehen, daß Dedekinds Körperbegriff sich stark von Kroneckers „Rationalitätsbereich" unterscheidet, und zwar nicht nur hinsichtlich der sprachlichen Form und der Definition, sondern insbesondere auch hinsichtlich Dedekinds grundlegender mathematischer Herangehensweise. Sein typisches Vorgehen drückt er selbst klar aus: Es geht darum, daß man „statt der *einzelnen* Zahlen ... ganze *Systeme* solcher Zahlen einführt" (Dedekind 1894 [1932: 116]). D. h., „[die] Träger einer Eigenschaft werden zu einer Klasse zusammengefaßt, die dann selbst zum Objekt gemacht wird. ... Auf das System der Klassen lassen sich die ursprünglichen algebraischen Operationen übertragen, wobei die Rechengesetze ihre Gültigkeit behalten" (Mehrtens 1979b: 34). Ausgangspunkt dieser Übertragungen sind dabei jeweils Begriffe und Sätze, die aus der Zahlentheorie bekannt sind.

Nun hat Dedekind nicht nur den Begriff des „Körpers" geprägt, sondern auch eine Reihe weiterer grundlegender algebraischer Begriffe in ähnlicher Weise axiomatisch erfaßt.

Im folgenden wollen wir näher auf Dedekinds „algebraische Zahlentheorie" eingehen – eine Theorie, die durch Dedekind erst geschaffen wurde (Haubrich 1992) und in deren Rahmen die genannten Begriffe geprägt wurden. Es soll anhand einiger Beispiele dargelegt werden, wie sich der Übergang von Zahlen zu Systemen von Zahlen sprachlich darstellt. Dazu wurden insbesondere die entsprechenden Arbeiten in den *Gesammelten mathematischen Werken* Dedekinds (Dedekind 1930, 1931, 1932) untersucht.

Dedekinds zahlentheoretischer Hintergrund zeigt sich deutlich in seiner Terminologie: Er nimmt zahlentheoretische Begriffe wie z. B. „Teiler" als Ausgangspunkt und überträgt sie auf Systeme von Zahlen. Die jeweiligen Bezeichnungen werden dabei beibehalten.

Die Kummerschen Begriffe „ideale Zahl" bzw. „idealer Primfaktor" haben sich im 19. Jahrhundert als äußerst nützlich erwiesen, bereiteten aber einige ontologische Schwierigkeiten (Kap. 9.4.1). Sie erscheinen Dedekind zum Aufbau seiner Theorie aus verschiedenen Gründen nicht geeignet (s. Edwards 1980: 343). Getreu seinen methodischen Grundsätzen sieht sich Dedekind daher veranlaßt, „die Untersuchung dadurch in ein anderes Gewand einzukleiden, daß wir immer ganze *Systeme* von wirklichen Zahlen betrachten" (Dedekind 1894 [1932: 251]).[26] Die algebraische Struktur, die er ausgehend von den idealen Zahlen definiert, nennt Dedekind *Ideal* (ibid.). Nach Weber (1893b: 12) ist *Ideal* „ein Name, der aber nur historischen Ursprung hat, und zu Ehren der Kummerschen Schöpfung gebildet ist", d. h. die Bezeichnung läßt den historischen Ausgangspunkt der Begriffsbildung erkennen.[27] Ähnliches gilt für den Terminus *Modul*, mit dem Dedekind ebenfalls eine algebraische Struktur bezeichnet und der sich in der Arithmetik auf eine bestimmte Zahl bezieht.

Dedekind definiert nun in bezug auf die genannten drei algebraischen Strukturen – Körper, Modul und Ideal – zahlreiche weitere Begriffe, die ursprünglich aus der Arithmetik stammen und von Dedekind auf die algebraische Zahlentheorie übertragen werden. Er stellt ausdrücklich heraus, daß ihn die Analogie zur Zahlentheorie zur Einführung neuer Begriffe anregt:

(10.4) Die von uns bisher entwickelten Sätze der Idealtheorie bieten eine augenscheinliche Analogie dar mit den Sätzen über die Teilbarkeit der ganzen rationalen Zahlen ... Es liegt nun nahe, in die Theorie der Ideale auch einen Begriff einzuführen, welcher dem Begriffe der rationalen Primzahl entspricht (Dedekind 1879 [1932: 300]).

Die arithmetischen Begriffe, die die Grundlage der Übertragung bilden, sind z. B. „Teiler", „Vielfaches", „größter gemeinsamer Teiler", „Produkt" und „Primzahl". Die Bezeichnungen werden dabei beibehalten oder leicht modifiziert – aus *Primzahl* wird z. B. *Primideal* (Dedekind 1871 [1932: 253]). Dadurch lesen sich auch die Sätze in Dedekinds Theorie fast wie Sätze aus der Arithmetik.[28]

Dedekind spricht in seinen Schriften sehr häufig explizit von *Analogien* und verwendet dabei das Verb *übertragen*. Die Analogien haben dabei heuristische

[26] Dedekind spricht hier wie Kummer von *wirklichen Zahlen* im Gegensatz zu *idealen Zahlen*.

[27] S. a. Dedekind 1894 [1932: 117].

[28] Das Analogon zum Fundamentalsatz der Arithmetik wird ebenfalls als *Fundamentalsatz* bezeichnet (Dedekind 1871 [1932: 258]).

Funktion und dienen gleichzeitig der Benennung der neu eingeführten Termini. Sofern sich die dabei ergebenden Sätze z. B. für Moduln genauso wie Sätze über ganze Zahlen lesen lassen, dienen sie auch zur Rechtfertigung der Benennungen: „... nennen wir der Analogie wegen die Summe $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ auch den größten gemeinsamen Teiler [von Moduln, H. B.]" (Dedekind 1894 [1932: 63]).

In einigen Fällen ist allerdings eine Veränderung der Definitionen notwendig, d. h. manche Definitionen lassen sich nicht direkt aus der Arithmetik in Dedekinds Theorie übertragen. Dies gilt insbesondere für Begriffe, die in Analogie zu Primzahlen gebildet werden. Wenn man etwa Primideale als Ideale definieren würde, die außer sich selbst und der Einheit keine weiteren Teiler haben[29], dann entstünde das Problem, das uns schon bei Kummer begegnet ist: Es wären mehrere verschiedene Zerlegungen, nicht nur eine, möglich, und diese Eigenschaft ist für Dedekind ebenso unerwünscht wie für Kummer. Folglich sucht Dedekind nach einer anderen Definition, mit der eine genaue Analogie zum Fundamentalsatz der Arithmetik möglich wird (s. Dedekind 1871 [1932: 249-253]).

Bezeichnungen sind für Dedekind in gewisser Hinsicht nur sekundär. Was wir damit meinen, wollen wir an Dedekinds Definition von Teilern eines Moduls veranschaulichen. Da Moduln Mengen sind, kann Dedekind z. B. das Vielfache eines Moduls über die Enthalten-Relation zwischen Mengen definieren: Ist ein Modul $\mathfrak{m}$ eine Teilmenge des Moduls $\mathfrak{d}$, so heißt $\mathfrak{m}$ ein *Vielfaches* von $\mathfrak{d}$ (Dedekind 1894 [1932: 62]). Dadurch ergibt sich das Problem, daß $\mathfrak{m}$ (das Vielfache), also ein *zahlen*theoretischer Begriff, *mengen*theoretisch gesehen *kleiner* ist als $\mathfrak{d}$. Dedekind kommentiert:

> Diese Ausdrucks- und Bezeichnungsweise mag auf den ersten Blick Anstoß erregen, weil das Vielfache $\mathfrak{m}$ in Wahrheit einen *Teil* [eine Teilmenge, H. B.] des Teilers $\mathfrak{d}$ bildet, doch wird sich diese in der Folge hinreichend rechtfertigen durch die Analogie mit der Teilbarkeit von Zahlen (Dedekind 1894 [1932: 62]).[30]

Bei der Wahl der Bezeichnungen bewertet Dedekind also die arithmetischen Analogien, um die es ihm in seinen Arbeiten ja geht, höher als die mengentheoretischen – rein mengentheoretisch gesehen wäre es konsequent gewesen, ein Vielfaches eines

[29] Was möglich wäre, da Dedekind zuvor die Begriffe „Einheit" und „Teiler" in seine Theorie übertragen hat.

[30] Ähnliche Begründungen gibt Dedekind für die Bezeichnungen *größter gemeinsamer Teiler* und *kleinstes gemeinsames Vielfaches* (Dedekind 1894 [1932: 63, 65]).

Moduls als dessen *Teiler* zu bezeichnen.[31]

Dazu paßt auch, daß beim Terminus *Ideal* schnell eine Demotivierung eintritt. Wir erinnern uns, daß bei Kummer und seinen idealen Zahlen eine Opposition „wirklich – ideal“ vorlag (Kap. 9.4.1). Nun übertragen Dedekind und Weber in einer gemeinsamen Arbeit den Dedekindschen Idealbegriff auf Funktionen, wo diese Opposition keine Rolle mehr spielt:

> Obwohl es sich in der vorliegenden Arbeit keineswegs um „ideale“ Funktionen handelt, sondern alle Operationen nur an Systemen wirklich existierender Funktionen ausgeführt werden, schien es doch zweckmäßig, den Namen „Ideal“, der in der Zahlentheorie bereits gebräuchlich ist, beizubehalten (Dedekind - Weber 1892 [in Dedekind 1930: 239f.]).

Damit hat die Bezeichnung *Ideal* ihre historische Motivierung verloren, sie erscheint den Autoren aber gerechtfertigt, denn die betrachteten Funktionen erfüllen die Axiome, die Dedekind zuvor für Ideale in der Zahlentheorie festgelegt hatte. Entsprechendes gilt bereits für die Ideale in Dedekinds Theorie. Wir können daher festhalten, daß bei der Begriffsbildung, d. h. hier bei der Wahl der Bezeichnung, die systematische Bedeutung für Dedekind keine Rolle gespielt hat, da Ideale nicht etwas sind, das man sich vorstellen muß. Die Wirkung kann hingegen eine ganz andere sein, was ein Kommentar von Felix Klein (1926: 323) zeigt: „Er [Dedekind, H. B.] hätte von ‘Realen’ sprechen sollen. Denn es handelt sich um Zahlenaggregate, die in dem vorgelegten Integritätsbereich tatsächlich vorhanden sind“. Für Klein genügt es also nicht, daß die Bezeichnung an Kummers ideale Zahlen erinnern soll, denn seine Kritik zieht die systematische Bedeutung als Argument heran.

Zusammengefaßt können wir folgende Punkte festhalten:

1. Dedekind überträgt klassische zahlentheoretische Begriffe auf bestimmte *Mengen* von Zahlen und Funktionen.

2. Er erkennt dabei Analogien zwischen Zahlen und Mengen. Diese Analogien leiten ihn bei der Einführung neuer Begriffe, beim Formulieren und auch beim Beweisen von Sätzen.

[31] In der Tat besteht hierin auch der Grund, warum Wolfgang Krull in seiner *Idealtheorie* (Krull 1935) die Dedekindsche Terminologie verändert: Sie habe den „schwerwiegenden Nachteil, daß sie der naiv mengentheoretischen Auffassung der Ideale widerspricht“ (Krull 1935: viii).

3. Bei der Bildung neuer Begriffe, die Mengen von Zahlen beinhalten, werden die Bezeichnungen so gewählt, daß ihre Herkunft möglichst deutlich wird:

   - rational bekannte Zahlen $\longrightarrow$ *rationales Gebiet*, *Körper*
   - ideale Zahlen $\longrightarrow$ *Ideal*
   - Modul (Zahl) $\longrightarrow$ *Modul* (Menge)

4. Bei von diesen Strukturen abhängigen Begriffen (z. B. Teiler eines Moduls, eines Körpers) wird ebenso vorgegangen. Die Bezeichnungen werden weitgehend beibehalten, wobei aber komplementäre Bezeichnungen wie *Teiler* und *Vielfaches* vertauscht werden können, wenn ihm zahlentheoretische Zusammenhänge wichtiger erscheinen als mengentheoretische, z. B.:

   - Teiler $\longrightarrow$ Teiler (Körper, Modul, Ideal)
   - Vielfaches $\longrightarrow$ Vielfaches (Körper, Modul, Ideal)
   - Primzahl $\longrightarrow$ Primideal

In der Praxis ist die Entwicklung der Theorie alles andere als ein leichter Vorgang: Dedekind erwähnt immer wieder die langen Jahre harter Arbeit, die er dafür aufgewandt hat (z. B. Dedekind 1876 [1932: 466]).

Es sei noch darauf hingewiesen, daß Dedekinds terminologisches System damit nicht vollständig beschrieben ist: So gibt es Strukturbegriffe wie den des „Hauptideals“ (Dedekind 1871 [1932: 252]), die keine Entsprechung auf der Ebene der Zahlen haben, und es fließen andere metaphorische Aspekte in die Theorie ein, auf die wir hier nicht eingegangen sind. Z. B. liegt der Definition der *Koordinaten* in bezug auf eine Basis eines Körpers eine offensichtliche Analogie mit der analytischen Geometrie zugrunde, die sich nicht nur in der Bezeichnung, sondern auch im Verhalten der Basis zeigt: „mit jedem Übergange von einer Basis zu einer anderen ist offenbar eine Transformation der Koordinaten ... verbunden, ähnlich wie in der analytischen Geometrie“ (Dedekind 1894 [1932: 36]).

Der Übergang von einzelnen Zahlen zu Systemen von Zahlen zeigt sich also nicht nur in den verschiedenen Strukturbegriffen wie „Körper“, sondern auch im Detail. Die Definitionen der zentralen Begriffe basieren zunächst auf der elementaren Behältnismetaphorik. *Systeme* und *Gebilde* sind Metaphern, die die Theorie sprachlich wie inhaltlich (in den einzelnen Definitionen) durchziehen. Einzelne Metaphern auf terminologischer Ebene, insbesondere die Bezeichnung *Körper*, bringen eben diesen Systemgedanken und einzelne Aspekte des Begriffs (Abgeschlossenheit, Vorhandensein einer Grenze) zum Ausdruck. Sie sind aber sicher nicht theoriekonstitutiv (Kap. 3.3), da sie wegen der gegebenen Definitionen paraphrasierbar sind und sie nicht in der Forschungsarbeit ausgeschöpft werden – in der Tat bleiben die zahlreichen vorhandenen Assoziationen wie die Leiblichkeit zumeist ausgeblendet, und keine Mathematikerin und kein Mathematiker würde ernsthaft daran denken, ihre Metaphorizität in der Forschung in allen Einzelheiten zu verfolgen.

Anders verhält es sich mit Dedekinds Analogien, mit der arithmetische Begriffe auf die algebraische Zahlentheorie bzw. Algebra übertragen werden. Diese Analogien werden sehr ausführlich ausbuchstabiert, und Dedekind lotet aus, welche Begriffe sich übertragen lassen, welche nur mit Modifikationen in der Definition und welche nicht. Dadurch tragen diese Analogien zum Aufbau der Theorie bei; die Begriffe, die von der mathematischen Analogie ausgehen, bilden ein Kernstück der Theorie.

Auch bei diesen Analogien zeigt sich schließlich noch ein Unterschied zu Kronecker. So wird bei der Übertragung der arithmetischen Begriffe auf Funktionen, wie sie von Dedekind und Weber (1882) vorgenommen wird, ebenfalls explizit von *Übertragung* und *Analogie* gesprochen. Für Kronecker hingegen „gab es sozusagen keine Analogie zwischen algebraischen Zahlkörpern und algebraischen Funktionenkörpern, sondern beide waren Spezialfälle seiner umfassenden Theorie der ‚algebraischen Formen'" (Ullrich 1999: 124). An dieser Stelle zeigt sich ein weiteres Mal das in Kap. 3.2.2 angesprochene Problem bei wissenschaftlichen Metaphern. Aus Kroneckers Perspektive sind hier nicht zwei verschiedene Bereiche involviert, da ein gemeinsamer Oberbegriff vorliegt; folglich können wir nicht von einer Übertragung sprechen. Dedekind und Weber hingegen analogisieren Zahlen und Funktionen. Für die beteiligten Termini ergeben sich entsprechend unterschiedliche Interpretationen: Es kann sich um eine Bedeutungsverengung oder um eine Metapher handeln. Der „Filter" unseres Modells (Kap. 5.7) wird mit dadurch bestimmt, welchen Ausschnitt des terminologischen Systems aus der Fachsprache der Mathematik einzelne Autoren ihrer Arbeit zugrundelegen. D. h., wenn Dedekind und Weber eine Analogie zwischen Zahlen und Funktionen herstellen, dann gehört die Analogie nach unserem Modell zum Filter, der dann bei Bildung von Begriffen zu berücksichtigen ist, die von „Funktionenkörper" abhängen, z. B. bei Idealen von Funktionenkörpern. Läge beim Schöpfer ein gemeinsamer Oberbegriff vor, enthielte der Filter auch keine Analogie, und es wären statt dessen die lexikalischen Relationen in der oberen Komponente des Modells heranzuziehen.

10.9 Zusammenfassung und Diskussion

Wir haben in diesem Kapitel verschiedene Themen untersucht, die sich aus der Betrachtung des Begriffs des „Körpers“ ergeben und wollen nun die Ergebnisse zusammenfassen und diskutieren.

Beginnen wir mit der Semantik des Ausdrucks *Körper* selbst, der als Lehnwort die meisten gemeinsprachlichen Bedeutungen der klassischen Vorbilder übernommen hat. Die geometrische Bedeutung ist ebenfalls schon im Griechischen und Lateinischen vorhanden.

Die algebraische Bedeutung ergibt sich nicht aus der Definition des geometrischen Körperbegriffs, vielmehr sollte Dedekinds Bezeichnung Assoziationen an verschiedene Diskurse wecken, in denen der Bedeutungskern ebenfalls in dem Merkmal der Zusammengehörigkeit bzw. Gesamtheit besteht. Nach Dedekinds eigener Aussage stellt die Geometrie hier nur einen Anknüpfungspunkt unter mehreren dar. Es ist daher auch methodisch wichtig, bei der Suche nach Benennungsmotiven für fachsprachliche Ausdrücke nicht nur nach einer semantischen Anschlußmöglichkeit zu suchen, sondern mehrere solcher Verbindungen in Betracht zu ziehen, während es beim gemeinsprachlichen semantischen Wandel üblich ist, nach *einer* Bedeutung zu suchen, die den Ausgangspunkt für eine neue Bedeutung bildet.

Zu diesen verschiedenen genannten Körperbegriffen steht der algebraische Körperbegriff in metaphorischer Beziehung. Wesentliche semantische Gemeinsamkeiten bestehen darin, daß es sich um etwas Ganzes handelt, dessen einzelne Bestandteile zusammengehören und darin, daß ein Körper etwas ist, das eine Begrenzung sowie eine Behältnisstruktur aufweist. Des weiteren hebt Dedekind durch die Metapher des Organismus hervor, daß Körper auch eine Struktur haben, die es zu untersuchen gilt.[32] Solche semantischen Merkmale bilden die Gemeinsamkeiten, die die Körperbegriffe in unterschiedlichen Fachsprachen aufweisen. Spezifische semantische Aspekte aus diesen Diskursen werden hingegen, zumindest in Dedekinds Sicht, nicht übertragen. Als Beispiel läßt sich die Räumlichkeit des geometrischen Körperbegriffs anführen, die Dedekind, wie gesehen, für den algebraischen Körperbegriff ausdrücklich ausschließt. Die Interpretation der semantischen Zusammenhänge kann sich hingegen hiervon unterscheiden, denn Kronecker kritisierte ja an der Bezeichnung gerade diesen Punkt.

[32]Das Bild wird z. B. von Klein (1926: 320) weiterverwendet.

Mehrtens (1990: 98) bezeichnet Dedekinds Terminus als „mächtige Metapher“. Gerade die Vielzahl der Analogien und möglichen Verwendungsweisen des Ausdrucks scheint mit der geringen Ausschöpfung der metaphorischen Übertragung zusammenzuhängen. Z. B. wird die Leiblichkeit (von Menschen und Tieren) fast völlig ausgeblendet (vgl. Mehrtens 1990: 105) – sie wird nur in sehr abstrakter und allgemeiner Form übertragen, etwa in Form der Begrenztheit. Man kann daraus die Vermutung ableiten, daß, wenn mehrere Analogien den Anlaß zur Wahl einer Bezeichnung bilden, tendenziell diejenigen Aspekte der Bildspender übertragen werden, die bei *allen* diesen Analogien vorkommen.

Die mathematischen Denkweisen Dedekinds und Kroneckers haben wir als „diametral entgegengesetzt“ beschrieben: Während Kronecker eine konstruktive Mathematik vertritt, steht Dedekind für eine abstrakte Mathematik, deren Begriffe intensional und ohne Einbeziehung ihrer Form definiert werden. Kronecker zeigt eine sensible Wahrnehmung räumlicher Sprache, die er aus der Mathematik ausschließen will. Für Dedekind ist räumlich-geometrische Metaphorik unproblematisch – man kann sie „ohne Scheu“ (Dedekind 1872 [1932: 319]) verwenden, vorausgesetzt, die Definitionen der Begriffe sind der geometrischen Anschauung entledigt und berufen sich lediglich auf den Elementarbegriff der (ganzen) Zahl.

Semantisch unterscheiden sich der geometrische und der algebraische Körperbegriff stark. Die hauptsächlichen Gemeinsamkeiten bestehen in den Merkmalen der Zusammenfassung und Begrenztheit sowie in der Behältnismetaphorik, die Körpern in der Algebra per Definition „zugewiesen“ wird (Kap. 10.4). Für den historischen Verlauf des Disputs zwischen Kronecker und Dedekind über die Bezeichnung *Körper* ist es wichtig, daß Dedekind seine Erläuterungen zur Wahl dieser Bezeichnung erst in einer späteren Ausgabe seiner Arbeit veröffentlichte, d. h. Kronecker konnte nicht wissen, auf welcher Grundlage Dedekind die Bezeichnung gewählt hatte. Er unterstellt dem Ausdruck *Körper* eine Räumlichkeit, die Dedekind später explizit mit dem Argument zurückweist, daß es sich bereits in der klassischen Geometrie um einen abstrahierten Begriff handele.

Warum schreibt Kronecker dem Terminus *Körper* Räumlichkeit zu? Zunächst ist ihm der Signifikant natürlich sowohl aus der Gemeinsprache als auch aus der Mathematik bekannt. Er erkennt zudem eine semantische Teilidentität zwischen der geometrischen und algebraischen Bedeutung, nämlich die Begrenztheit.[33] Da-

[33] Daß Kronecker eine solche Verbindung herstellt, ist wahrscheinlich, da er sich in seinen eigenen Arbeiten mit ähnlichen Strukturen wie Dedekind beschäftigt und er, wie gesehen, die Abgrenzung solcher Strukturen explizit anspricht.

mit ist für Kronecker offenbar schon die Grundlage dafür gegeben, ein weiteres Merkmal des geometrischen Körperbegriffs, die Räumlichkeit, auch für den algebraischen Begriff anzunehmen. Wir vermuten daher, daß bei der Interpretation eines neuen Terminus, dem ein signifikantgleicher, aus demselben Fachgebiet stammender Terminus entspricht, zunächst eine Tendenz besteht, einen Zusammenhang zwischen den mathematischen Begriffen herzustellen und nicht einen Zusammenhang mit einem signifikantgleichen Zeichen aus einer anderen Disziplin. In bezug auf unser Beispiel hieße das: *Körper* in der Algebra wird zu *Körper* in der Geometrie in Beziehung gesetzt, und nicht zu *Körper* in der Physik oder einer anderen Wissenschaft.

Die Bildung des Begriffs des Körpers wollen wir nun noch einmal anhand unseres Modells (Kap. 5.7) zusammenfassend diskutieren.

Beginnen wollen wir mit dem Kontext und der Feststellung, daß Dedekind den Begriff im Rahmen von arithmetischen Untersuchungen einführte. Dadurch, so läßt sich vermuten, ist auf die Erzeugung insofern ein Einfluß ausgeübt worden, als die Definition bei Dedekind an komplexe Zahlen gebunden war und nicht in der heute üblichen Allgemeinheit formuliert wurde. Für Haubrich (1992: 107) läßt die „eindeutige Quellenlage ... meines Erachtens nur den einen ... Schluß zu, daß Dedekind über seinen [an die komplexen Zahlen gebundenen, H. B.] Körperbegriff zu keiner Zeit hinausgegangen ist“.[34] Erst später wurde der Begriff auf andere Objekte als Zahlen übertragen, d. h. historisch wurden neue Beispiele für Körper nicht als Spezialfälle eines allgemeinen Begriffs angesehen, sondern sie wurden durch Analogien gefunden. Vor der Einführung des Begriffs „Functionenkörper“ kommentierte etwa Weber (1895: 449): „Der Begriff des Körpers kann erweitert und auf alle Grössen übertragen werden, mit denen nach den Regeln der vier Species gerechnet werden kann“.

Die zweite Weise, auf die der Kontext in die Erzeugung eingeht, hängt mit dem Begriff „rational bekannt“ zusammen, denn die vier Grundrechenarten gehen bei Dedekind direkt in die Definition ein. Darüber hinaus war das rational Bekannte zunächst auch Bestandteil der ersten Dedekindschen Bezeichnung für „Körper“, *rationales Gebiet*.

Ein weiterer wichtiger Aspekt, der in die Begriffsbildung eingeht, ist der der methodischen Ansichten Dedekinds, ein Aspekt, den wir zum Kontext gezählt haben. An erster Stelle ist hier das für Dedekind typische Vorgehen zu nennen, daß

[34]Die Aussage bezieht sich auf den Zeitraum vor der Übertragung des Körperbegriffs auf Funktionen, an der auch Dedekind maßgeblich beteiligt war (Dedekind - Weber 1882).

Mengen von Objekten betrachtet werden. Dieses Verfahren hatte Dedekind nicht nur bei Körpern angewendet, sondern auch bei anderen Begriffen wie dem des Ideals (Mehrtens 1979b). Dadurch werden die Möglichkeiten zur Bezeichnung des neuen Objekts eingeschränkt, denn diese müssen mit dem Merkmal 'Zusammenfassung von Objekten' kompatibel sein, es sei denn, dem stehen historische Gründe entgegen. D. h., die Methode erfordert ein bestimmtes semantisches Merkmal und fokussiert dadurch die Wortwahl. Hier zeigen sich Zusammenhänge zwischen den Komponenten des Modells, denn der Kontext (untere Komponente) schränkt das lexikalische Inventar (obere Komponente) ein.[35] Die Bezeichnung *Ideal* wählte Dedekind, um an den historischen Ausgangspunkt des Begriffs, die Kummerschen *idealen Zahlen* zu erinnern. Das eingeschränkte lexikalische Inventar liefert gleichzeitig „Präzedenzen" (Fritz 1998: 52, 102), also sprachliche Ausdrücke, die eine bestimmte semantische Entwicklung durchlaufen haben und deren Vorbild nachgeahmt werden kann.[36] In unserem Fall läßt sich etwa die Bezeichnung *groupe* anführen, die Galois verwendete, um eine Zusammenfassung von Objekten, ein Ganzes zu bezeichnen, bei dem allerdings die Zusammengehörigkeit nicht so stark ausgeprägt ist wie bei Körpern, da auf einer Gruppe nur eine Verknüpfung definiert ist, nicht zwei wie bei Körpern. Diese spezifische semantische Struktur findet sich dann auch bei anderen Ausdrücken für algebraische Strukuren, d. h. die semantische Struktur von *groupe* dient als Muster für die Bildung und semantische Neustrukturierung von algebraischen Strukturen wie etwa *Körper*, *Ring* und *Verband*.

Ein zweiter methodischer Aspekt, der zu nennen ist, ist der der „nicht zufälligen Darstellungsformen", den Dedekind immer wieder durch die Opposition des Innerlichen gegenüber dem Äußerlichen zum Ausdruck gebracht hat. Davon ist in erste Linie die Definition betroffen, die nicht das „Aussehen" eines Körpers beschreibt, etwa durch Angabe einer Darstellungsform, die die Zahlen des Körpers enthält, sondern die versucht, das Wesen des Objektes zu erfassen. Dedekind gibt entsprechend eine intensionale Definition, die nicht vom Äußerlichen, d. h. von einer mathematischen Darstellung, abhängig ist. Ein Beispiel für den genannten Gegensatz, das Dedekind selbst heranzieht, ist die Definition von „endlichen Körpern": Ein endlicher Körper ist ein Körper, der nur eine endliche Anzahl von Divisoren (Unterkörpern) enthält (Dedekind 1876 [1932: 469]). Diese Definition geht von den

[35] Dies wird in Abb. 5.3 nur indirekt dargestellt.

[36] Fritz (1998: 52) gibt (unter Berufung auf Meillet 1905/06) als Beispiel französische Verben wie *polir* an, deren Bedeutung sich von 'reinigen' zu 'stehlen' entwickelt.

„inneren“ Eigenschaften aus. Sie ist einer „äußerlichen“ Definition vorzuziehen, die Dedekind selbst gab und die seiner Einschätzung nach „die einfache Theorie verunziert“ (ibid.): Ein endlicher Körper ist eine Menge von bestimmten Zahlen der Form $x_0 + x_1\theta + x_2\theta^2 + ... + x_n\theta^n$ (Dedekind 1877a [1932: 264]).[37] Diese Darstellung ist zufällig, da statt der Zahl θ auch andere Zahlen desselben Körpers herangezogen werden können. Der von Dedekind angebrachte Gegensatz erinnert insgesamt an den zwischen Substanz und Akzidenz.

Wir werden dadurch zu den sprachlichen Funktionen und zur Stellung des Begriffs in der Theorie geführt. Wie bereits dargelegt, erschien Dedekind der Körperbegriff geeignet, als Grundbegriff für die Algebra zu dienen. Die Bezeichnungen für solche Grundbegriffe sind tendenziell eher kurz, und erst die davon abhängigen Begriffe sind morphologisch davon abgeleitet (z. B. *Funktionenkörper*, *Teilkörper*). Wir haben bereits in Kap. 5.7 darauf hingewiesen, daß daran ikonische Gründe beteiligt sind, die mit dem Abstraktionsgrad wissenschaftlicher Grundgegriffe zusammenhängen. Betrachten wir darüber hinaus noch einen zeitgenössischen Kommentar zur Dedekindschen Schöpfung: „Er [der Körperbegriff, H. B.] ist für die Algebra von der grössten Bedeutung, und es ist nicht gleichgültig, dafür einen bezeichnenden und ausdrucksvollen Namen zu haben“ (Weber 1895: 449). Die Sachbezogenheit der Wissenschaftssprache, d. h. die referentielle Funktion, kann die Wahl der Signifikanten „einschränken“: Die als wesentlich empfundenen Eigenschaften des Referenzobjekts motivieren die Wahl des Signifikanten.[38]

---

[37] Wir verzichten hier auf technische Details, da es uns nur auf den zur Diskussion stehenden Gegensatz ankommt.

[38] S. Kap. 5.7. Ein explizites Beispiel dafür gaben wir in Kap. 9, Fn. 56.

Kapitel 11

Beispiel „Schiefkörper“

Im Unterschied zu den bisher betrachteten Beispielen kommt das Wort *Schiefkörper* – eine deutsche Prägung – in der Gemeinsprache nicht vor. Innerhalb der Mathematik wiederum erscheint es in der Algebra, nicht jedoch in der Geometrie. Es bezeichnet eine algebraische Struktur K, die im Vergleich zu Körpern ein bestimmtes Axiom nicht notwendigerweise erfüllt, nämlich das der Kommutativität der Multiplikation, d. h. die Gültigkeit von

$$\text{Für alle } a, b \in K \text{ gilt: } a \cdot b = b \cdot a$$

wird *nicht* vorausgesetzt. Jeder Körper ist also automatisch auch ein Schiefkörper, die Umkehrung gilt hingegen nicht. „Echte“ Schiefkörper hingegen, also solche, die keine Körper, d. h. nicht kommutativ sind, lassen sich nicht so leicht angeben; die einfachsten Beispiele sind schon wesentlich komplizierter als Beispiele für Körper.

Im folgenden geben wir zunächst lexikalische und etymologische Informationen zu diesem Wort und seiner Bildung. Anschließend folgt eine historisch-semantische Diskussion des Wortes *schief* und seiner englischen und französischen Äquivalente. Die Ausgangsfrage ist dabei, was die Bedeutung von *schief* in *Schiefkörper* ist und wie sich die Semantik des Wortes in Geometrie und Algebra entwickelt hat.

11.1 Lexikalische Übersicht

Verschaffen wir uns zunächst einen Überblick über die sprachliche Situation. Die in den modernen Sprachen auftretenden Ausdrücke für „Schiefkörper“ sind in der Tabelle 11.1 aufgeführt.

Tabelle 11.1: Ausdrücke für ‘Schiefkörper’

Sprache	Algebra	weitere Ausdrücke	Umschreibungen
Französisch	*corps gauche*	*algèbre à/de division*, *système hypercomplexe*	*corps non commutatif*
Deutsch	*Schiefkörper*	*Divisionsalgebra*, *hyperkomplexes System*	*nicht-kommutativer Körper*
Englisch	*skew field*	*division algebra*, *division ring*, *hypercomplex system*	*non-commutative field*

Die hier aufgeführten Ausdrücke werden dabei je nach der jeweiligen Perspektive, aus der Schiefkörper betrachtet werden, verwendet. Im Kontext der Theorie der Algebren (*Algebra* ist ebenfalls eine Bezeichnung für eine algebraische Struktur; sie findet sich zuerst bei Peirce (1881)[1] als *linear associative algebra*) ist ein Schiefkörper eine Algebra, in der die Division ausgeführt werden kann. Es sei darauf hingewiesen, daß seit den 1870er Jahren im Englischen auch von *algebras* im Plural und seit den 1870er Jahrrn von *an algebra* gesprochen werden kann. Im Deutschen wurde hierfür zumeist *hyperkomplexes System* gesagt, die Redeweise *eine Algebra* hat sich im Deutschen nur langsam durchgesetzt; z. B. berichtet Bochner (1974: 830; Hervorhebung im Original) davon, daß „AN algebra was, around 1920, still totally unfamiliar to a student on the continent“. Insgesamt läßt sich sagen, daß *division algebra* im Englischen und *corps* bzw. *corps non commutatif* im Französischen in diesen Sprachen von Anfang an die jeweils häufigere Wahl sind.

Bei den anderen Benennungen, ob als Kompositum (*Schiefkörper*, *skew field*) oder als Umschreibung (*nicht-kommutativer Körper*), steht der Vergleich mit Körpern im Vordergrund. Ein Schiefkörper wird in dieser Perspektive als ein Körper angesehen, bei dem ein bestimmtes Körperaxiom, die Kommutativität der Multiplikation, nicht vorausgesetzt wird bzw. dem die Eigenschaft der Kommutativität fehlt.[2]

[1] Dieser Artikel lag bereits 1870 als Manuskript vor.

[2] Aus logischer Sicht ist diese Aussage nicht korrekt: Schiefkörper sind *nicht* automatisch auch Körper.

11.2 Wortbildung

Schiefkörper ist ein Kompositum, bei dem sich der zweite Bestandteil *Körper* zunächst einmal durch die inhaltliche Nähe zum Körper erklären läßt. Schwieriger ist die Erklärung von *schief*, denn schließlich handelt es sich nicht etwa um geometrische oder gar physikalische Körper, die im konkreten Sinne schief wären. Es stellt sich also die Frage, welche Bedeutungsentwicklung für das Adjektiv angenommen werden kann, wenn durch *schief* in der Algebra letztlich nur auf das nicht vorausgesetzte Axiom der Kommutativität Bezug genommen wird.[3] *Schief-* hat bei dieser Wortbildung eine ähnliche Funktion wie z. B. das typischerweise fachsprachliche Präfix *Quasi-*, das eine taxonomische Einstufung relativiert (Wellmann 1998: 509). Wie wir noch sehen werden, ist die spezifische Wahl von *schief* bei der Bildung von *Schiefkörper* nicht zufällig, da dessen Bedeutung mit Hilfe der gemein- und fachsprachlichen Semantik des Wortes rekonstruierbar ist.

Zur Kompositionsart des Wortes ist hinzuzufügen, daß in der Gemeinsprache bis zum Ende der 1920er Jahre, d. h. zu dem Zeitpunkt, als die Bezeichnung eingeführt wurde, Zusammensetzungen mit dem Adjektiv *schief* und einem Substantiv durchaus bekannt sind: Das DWB führt eine Reihe von Komposita mit *schief* auf, deren zweiter Bestandteil zumeist ein Körperteil bezeichnet (z. B. *Schiefbein* und *Schiefnase*), und für die es zum Teil schon (gemeinsprachliche) Belege aus dem 17. Jahrhundert gibt. Dazu ist aber zu bemerken, daß diese Ähnlichkeit oberflächlich ist: Eine Schiefnase ist eine Nase, die die zusätzliche Eigenschaft hat, schief zu sein (bzw., per *pars pro toto*, eine Person, die eine Schiefnase hat). Man würde daher auch für Schiefkörper erwarten, daß es sich um eine Unterart von Körpern handelt; dies ist aber nicht der Fall, da Schiefkörper im allgemeinen keine Körper sind.

Daher ist Gerisch (1988: 55) zuzustimmen, wenn er es als ein in der Mathematik häufig verwendetes Wortbildungsverfahren betrachtet, gemeinsprachliche Elemente auf eine gemeinsprachlich nicht übliche oder sogar nicht akzeptierbare Weise miteinander zu kombinieren (er bezieht sich u. a. auf die Beispiele *schiefsymmetrisch*, *Fastkörper* und *Quasikörper*).

11.3 Historische Vorläufer und Erstbeleg

Das historisch erste Beispiel für einen echten Schiefkörper wurde in den 40er Jahren des 19. Jahrhunderts von William R. Hamilton (1805-1865) konstruiert und

[3] Dieser Frage wird im Kapitel 11.4 nachgegangen.

untersucht (s. z. B. Hamilton 1844-1850). Die in diesem Schiefkörper enthaltenen Elemente wurden als Zahlen betrachtet. Da diese Zahlen wiederum aus vier Bestandteilen bestehen, nannte sie Hamilton *quaternions*. Mit diesem Ausdruck wurden in der Vulgata die vier Rotten von je vier Kriegsknechten bezeichnet, die Petrus im Gefängnis bewachten (Apg. 12.4). Die allgemeine Struktur, d. h. den allgemeinen Begriff „Schiefkörper" bezeichnete Hamilton nicht eigens, was für die damalige Zeit der Normalfall ist.

Der erste schriftliche Beleg für *Schiefkörper* findet sich bei Emil Artin (1927 [1965: 301]), der sogleich eine Definition gibt, die inhaltlich auch mit der heutigen weitgehend übereinstimmt:

(11.1) Ein System $\mathfrak{S}$ von Elementen wollen wir einen Schiefkörper nennen, wenn es zwei Operationen zwischen den Elementen von $\mathfrak{S}$ gibt, die „Addition" und die „Multiplikation". Beide Operationen seien assoziativ und wechselseitig distributiv ...

Artin verweist auch auf den Urheber des Ausdrucks: „Diesen Namen hat Herr B. L. van der Waerden vorgeschlagen." (Artin 1927 [1965: 301, Fn.]). Beide Mathematiker gehörten zum Umfeld der in Göttingen ansässigen Mathematikerin Emmy Noether, die sich mit Schiefkörpern und ähnlichen Strukturen befaßte, und es ist davon auszugehen, daß der Ausdruck in Göttingen „allgemein" bekannt war. So hielt Emmy Noether offenbar im Sommersemester 1928 eine Vorlesung mit dem Thema „Algebraische Theorie der Schiefkörper" (s. Brauer 1932: 107, Fn. 11).

Historisch finden sich also diejenigen Ausdrücke zuerst, die ihr Benennungsmotiv aus der Theorie der Algebren entnehmen. Diese gehen von der englischen Sprache (USA) aus und verbreiten sich dann in Europa, wo sie sich gegen den Konkurrenten *hyperkomplexes System* und seine Entsprechungen durchsetzen. Es finden sich später (gegen Ende der 1920er Jahre) im Deutschen die ersten Umschreibungen, und zu diesem Zeitpunkt wird auch der Ausdruck *Schiefkörper* geprägt. Sowohl Umschreibung als auch Kompositum finden sich zum Teil auch heute noch nebeneinander. *Schiefkörper* wurde dann wiederum ins Englische und Französische übersetzt.

Für die englische Übersetzung *skew field* gibt das OED das Jahr 1965 als ersten Beleg an. Es ist jedoch leicht möglich, frühere Belege anzugeben, z. B. schreibt McCoy (1948: 19, Hervorhebungen im Original): „In the literature, the term *skew field* (or *sfield*) is sometimes used to denote a division ring". In jedem Fall geht die englische Übersetzung deutlich von der deutschen Grundlage aus: *field* entspricht dem deutschen *Körper*, und *skew* dem deutschen *schief*.[4]

Die französischen Ausdrücke sind jeweils Lehnübersetzungen aus dem Englischen oder Deutschen.

11.4 Zur semantischen Entwicklung von *schief* und seinen Entsprechungen

Da das englische bzw. französische Äquivalent von *Schiefkörper* mit *skew* bzw. *gauche* gebildet werden, liegt der Schwerpunkt der folgenden Untersuchungen auf eben diesen Ausdrücken. Die Diskussion verwandter Ausdrücke erscheint nur dann sinnvoll, wenn sich daraus Erkenntnisse über die obigen Ausgangswörter ergeben.

Wir gehen nun folgendermaßen vor: Zunächst werden Etymologie und die für uns wichtigsten gemeinsprachlichen Bedeutungen dargestellt, wobei in einigen Fällen auch auf spezielle fachsprachliche Bedeutungen außerhalb der Mathematik eingegangen wird. Der historischen Entwicklung entsprechend diskutieren wir dann die geometrischen und zuletzt die algebraischen Verwendungsweisen.

11.4.1 Gemeinsprache

Wir nehmen das deutsche Adjektiv als Grundlage unserer Diskussion, da *Schiefkörper* zuerst in der deutschen Sprache gebildet wurde. Die Ausgangsbedeutung von *schief* ist aus etymologischer Sicht unklar, doch besteht eine mögliche Verbindung zur Bedeutung 'links', wie die etymologisch verwandten Ausdrücke gr. *skaiós* und lat. *scaevus* nahelegen. Es läßt sich seit dem 11. Jahrhundert im Deutschen belegen und bezeichnet zunächst eine Abweichung von der senk- oder waagerechten Richtung. Diese Bezugsgröße läßt sich direkt aus der alltäglichen Erfahrung herleiten: Die waagerechte Richtung entspricht der Erdoberfläche, die senkrechte der menschlichen Körperachse. Später bezeichnet *schief* auch eine Abweichung „von der irgendwie gegebenen graden richtung oder lage, daher auch für krumm“ (DWB), d. h. die Bezugsgröße wird auf eine beliebige Richtung verallgemeinert. *Schief* übersetzt nicht nur lat. *obliquus*, sondern auch *tortus* und *distortus*, bedeutet also auch 'verdreht' bzw. 'verwachsen'. Der Ausdruck kann sich auf Körperteile oder auch auf Pflanzen bzw. deren Teile beziehen, z. B. auf Halme oder Wurzeln.

[4] Zum Verhältnis von *skew* und *schief* s. die folgenden Abschnitte.

In diesem Zusammenhang ist eine spezielle Verwendung von *schief* erwähnenswert: Ein *schiefes Blatt* ist ein Blatt, „das von seiner natürlichen richtung abweicht ... oder, dessen bau unsymmetrisch ist" (DWB). Lexikalisiert findet sich diese Bedeutung in *Schiefblatt*, einem volkstümlichen Namen für Begonien. Die Begonie ist eine Pflanze, deren Blätter typischerweise nicht symmetrisch sind, aber doch *nahezu* symmetrisch. Im *Wörterbuch der deutschen Pflanzennamen* (Marzel 1943, s. v. Begonia) findet sich der Hinweis: „Die Blätter sind mehr oder minder asymmetrisch". Das Benennungsmotiv von *Schiefblatt* wird ausdrücklich auf die asymmetrischen Blätter zurückgeführt.

Die Abweichung, die *schief* beinhaltet, kann sich also nicht nur auf eine Richtung und Lage beziehen, sondern auch auf Regelmäßigkeiten, insbesondere die Symmetrie.[5]

Kommen wir zu den französischen und englischen Ausdrücken.

Das frz. *oblique* ist eine Entlehnung aus lat. *obliquus*, dessen Etymologie unbekannt ist. Es tritt seit dem 13. Jahrhundert auf, zuerst im konkreten Sinn 'allant de biais, de côté' (DHLF). Die Semantik ist der des deutschen *schief* sehr ähnlich, insbesondere beinhaltet auch hier die Grundbedeutung eine Abweichung von der senkrechten oder waagerechten Richtung oder Lage. Des weiteren hat das Wort die Bedeutung 'détourné' (TLF).

Die Etymologie von *gauche* ist ebenfalls unklar (DHLF).[6] Wie bei vielen Ausdrücken für 'links' hat sich hier die Bedeutung 'von einer Norm abweichend' entwickelt.[7] Konkret kann sich dies in der Bedeutung 'Qui est dévié, de travers par rapport à une ligne ou à un plan de référence' (TLF) ausprägen. Insbesondere bedeutet *gauche* auch 'verzogen, verwachsen', z. B. in bezug auf ein Stück Holz oder eine Treppe.

Auch im Englischen ist *oblique* die häufigste semantische Entsprechung von *schief*. Es ist seit dem 16. Jahrhundert (Erstbeleg 1571; s. OED, s. v. oblique) in Gebrauch und wird dem deutschen *schief* und dem französischen *oblique* entsprechend verwendet.

Das Adjektiv *skew* ist gemeinsprachlich seit dem 17. Jahrhundert in Gebrauch und bedeutet 'having an oblique direction or position, turned to one side', zeitweise (im 17. Jahrhundert) auch 'distorted' (OED, s. v. skew). Es leitet sich von

[5] Im WNT, s. v. scheef (III), wird ebendieser Aspekt besonders hervorgehoben.

[6] Die etymologischen Probleme dieses Wortes werden bei Woll (1971) ausführlich erläutert.

[7] Für semantische Zusammenhänge europäischer Ausdrücke für 'links' bzw. 'rechts' s. van Leeuwen-Turnovcová (1990).

einer Wurzel mit der Bedeutung ‘scheu, schüchtern’ ab und ist z. B. mit dt. *scheu* und e. *shy* verwandt.[8] Das Verb *skew* hat z. B. auch die Bedeutung ‘to shy (as a horse)’ (OED).

Das e. *skew* weist einige spezielle Verwendungen innerhalb der Architektur auf, die einen konkreten Zusammenhang zwischen nicht-rechten Winkeln und der Abweichung von Symmetrie illustrieren. Die Ausdrücke *skew arch* und *skew bridge* etwa beruhen jeweils auf dem Begriff des rechten Winkels; *skew bridge* bezieht sich auf eine Brücke, die in einem nicht-rechten Winkel zu einer Straße oder einem Kanal steht. Solche Brücken weisen eine asymmetrische Form auf, sie wirken ‘verzogen’. In einer Rezension des Buches *Skew Arches* von E. W. Hyde (Hyde 1875) wird darauf hingewiesen, daß die architektonischen Methoden, solche Brücken zu bauen, „lead all to peculiar shapes of warped surfaces“.[9] Dabei ist *warped* ein anderer Ausdruck für *skew*, der auch in der Mathematik gebräuchlich ist.[10]

11.4.2 Geometrie

In mathematischen Texten kommt *schief* zuerst in der Geometrie vor, die wir daher zunächst untersuchen wollen.[11]

Die Arbeiten von Christian Wolff sind für die deutsche mathematische Terminologie von grundlegender Bedeutung (Menzel 1996). Wir wählen daher Wolffs mathematische Schriften als Ausgangspunkt für die Diskussion von *schief* in der Geometrie.

Wolff verwendet *schief* in verschiedenen Zusammensetzungen.[12] Zunächst meint er mit *schiefwinklicht* oder *schiefer Winkel* einen nicht-rechten Winkel (Wolff 1716 [1978, s. v. cylindrus scalenus, linea obliqua]). *Schiefer Winkel* steht damit in Opposition zu *rechter Winkel*. In den klassischen Sprachen und in den modernen europäischen Sprachen existiert diese Opposition bis etwa zum 17. Jahrhundert

[8] Zusammenhänge zwischen den Bedeutungen ‘scheu’ und ‘schief, verwachsen’ weisen einige indogermanische Sprachen auf. So hatte etwa das wg. **skelwha-* diese beiden Bedeutungen. S. Kluge, s. v. scheel, schiech.

[9] *Manufacturer and Builder* 7.6, June 1875, S. 140.

[10] Belege für *warped surface* bieten z. B. Warren (1883: 5, 190) und Hayward (1829: 145).

[11] Zuvor (im 17. Jahrhundert) wird gelegentlich (z. B. von Kepler) an Stelle von *schief* das Adjektiv *schlimm* verwendet, das früher die Bedeutung ‘schräg, schief’ hatte. Für einige Belege s. Götze (1919: 159f.), F. Müller (1899: 324, 332), Tropfke (1924: 20f.). *Schlimm* steht immer in Opposition zu *gerade*.

[12] Eine Übersicht über einige der in diesem und im nächsten Abschnitt diskutierten Zusammensetzungsmöglichkeiten gibt Tab. 11.2.

nicht, und es gibt auch keine Bezeichnung für „schiefer Winkel"; es wurden lediglich die beiden Arten von schiefen Winkeln, spitze und stumpfe Winkel, bezeichnet. Im Lateinischen ist für „rechter Winkel" *angulus rectus* (seit dem 1. Jahrhundert auch *angulus normalis*) als Übersetzung von Gr. *gōnía orthḗ* üblich. Tropfke (1940: 66) weist darauf hin, daß der Begriff „rechter Winkel" einer der ältesten der Geometrie sei, „da er aus der senkrechten Stellung irgendeines Gegenstandes zum Erdboden, aus der aufrechten Haltung des Menschen selbst folgt". Schematisch gesprochen liegt bei beiden Arten von Winkeln, rechten und schiefen, eine typischerweise horizontale Linie (oder Ebene) als Bezugsgröße vor. Ein Winkel entsteht, wenn dazu eine zweite Linie in Verbindung gesetzt wird; dieser Winkel ist „recht" (frz. *droit*, e. *right*), wenn diese zweite Linie senkrecht auf der gegebenen steht, und „schief" (frz., e. *oblique*), wenn dem nicht so ist. Diese Bedeutung ist eine mathematische Präzisierung der gemeinsprachlichen Grundbedeutung.

Weiterhin verwendet Wolff *schief* für geometrische Körper, z. B. einen schiefen Zylinder (Wolff 1716 [1978, s. v. Cylindrus scalenus]). Diese Verwendungsweise läßt sich semantisch direkt aus der vorigen ableiten (in Wolffs Definitionen von schiefen Körpern wird entsprechend auf den Begriff „schiefer Winkel" Bezug genommen).

Schließlich kann *schief* auf Geraden oder Parabeln angewendet werden (Wolff 1716 [1978, s. v. Linea obliqua, parabola inclinata]). Auch hier besteht wiederum ein direkter Zusammenhang zum Begriff „schiefer Winkel". Eine schiefe Parabel etwa ist eine Parabel, deren Achse (in bezug auf ein Koordinatensystem) schief liegt.

Bei diesen Ausdrücken zeigt sich bei Wolff (1716) eine deutliche Tendenz zur Vereinheitlichung insofern, als er verschiedene lateinische Ausdrücke jeweils durch *schief* eindeutscht, nämlich *obliquus* (Aszension, Horizont, Linie, Ekliptik, Kugel), *inclinatus* (Parabel, Fläche) und *scalenus* (Kegel, Zylinder). Alle Verwendungen von *schief* lassen sich jeweils auf den Begriff des rechten Winkels zurückführen.

Das frz. *oblique* ist auch in der Geometrie (wie in der Gemeinsprache seit dem 13. Jahrhundert) ein fast exakte Entsprechung zum deutschen *schief*. Es kommt insbesondere in denselben Zusammensetzungen vor wie *schief* bei Wolff (mit denselben semantischen Ableitungen) und braucht deshalb hier nicht weiter behandelt zu werden.

Bei *gauche* in der Geometrie ist es besonders wichtig, daß, ausgehend von der gemeinsprachlichen Bedeutung 'von einer Norm abweichend', die Norm offenbar durch eine Gerade oder durch eine Ebene gebildet wird. Die geometrischen Verwendungsweisen, die sich etwa ab der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts verbreiten, lassen sich auf die Bedeutung ‘nicht koplanar’ (d. h. nicht in ein- und derselben Ebene liegend) zurückführen; z. B. ist ein *polygone gauche* ein Polygon (Vieleck), dessen Eckpunkte nicht koplanar sind. Daraus leitet sich für *gauche* auch eine räumliche Bedeutung ab, durch die sich Entsprechungen wie frz. *courbe gauche* – dt. *Raumkurve* – e. *space curve* erklären. Solche Kurven sind jedoch nicht lediglich räumlich, sondern typischerweise „verdreht“ oder „verzogen“; genau auf diese Weise wurde *gauche* schon in der Gemeinsprache verwendet. Auch ein räumliches Polygon läßt sich durchaus so auffassen.

Auch im Englischen ist *oblique* die häufigste semantische Entsprechung von *schief*. Es ist seit dem 16. Jahrhundert (Erstbeleg 1571; s. OED, s. v. oblique) in Gebrauch und wird dem deutschen *schief* und dem französischen *oblique* entsprechend verwendet.

Ab dem 19. Jahrhundert ist im Englischen in der Mathematik gelegentlich auch das französische Wort *gauche* in Gebrauch. Das OED umschreibt die Bedeutung mit ‘skew, not plane’ und gibt einen Beleg für *gauche polygon* von 1879; es wird allerdings schon früher, z. B. von Hamilton verwendet (Hamilton 1850a, 1850b, 1850c). Darüber hinaus spricht Hamilton (1864) auch von *gauche curves*. Diese Verwendungen von *gauche* im Englischen lassen sich direkt auf den französischen Ursprung zurückführen. Hamilton weist selbst darauf hin, daß „gauche curves of the third degree“ auch *twisted cubics* genannt werden (Hamilton 1864 [1967: 435]).

Das Adjektiv *skew* tritt in der Mathematik erst im 19. Jahrhundert auf und wird dann wie frz. *gauche* verwendet. Insbesondere ist *skew* in geometrischen Kontexten nur mit räumlichen Bedeutungen kompatibel, z. B. sind *skew curves* immer räumliche Kurven. Forsyth (1912: 1) faßt die klassische Terminologie in bezug auf Kurven so zusammen: „Curves in space, when they are not plane, are called skew, or twisted, or curves of double curvature“.[13]

Der Ausdruck *scalene* hingegen bezieht sich nur auf schiefe Kegel und Zylinder (17. Jahrhundert) und ungleichseitige Dreiecke (18. Jahrhundert) und lehnt sich damit semantisch an das griechische-lateinische *skalenós* / *scalenus* an, wobei sich die zweite Bedeutung auf die erste zurückführen läßt. Beim Bezug auf schiefe Körper wird allerdings *oblique* bevorzugt. Im Französischen wird *scalène* seit dem

[13] Der letzte Ausdruck geht auf frz. *courbe à double courbure* zurück, das durch Clairaut (1741) bekannt (aber nicht von diesem geprägt) wurde. Solche Kurven mit doppelter Krümmung existieren nur im Raum.

16. Jahrhundert in gleicher Weise verwendet. Gelegentlich verwenden beide Sprachen zudem die Ausdrücke *inclined* bzw. *incliné* (im Dt. auch *geneigt*), allerdings zumeist im Definiens und nicht im Definiendum.

Aus geometrischer Sicht ist noch das Wort *windschief* zu beachten.[14] Windschief sind zwei oder mehrere Geraden, die nicht in ein- und derselben Ebene liegen und einander nicht schneiden (also sind auch hier nur räumliche Verwendungen möglich). Der Begriff „windschiefe Geraden“ ist vermutlich erst im 19. Jahrhundert entstanden und wird im Englischen mit *skew lines* wiedergegeben; für das Französische gibt Müller (1900, s. v. windschief) die Übersetzung *gauche* an, das vermutlich ebenfalls erst ab dem 19. Jahrhundert üblich ist. „Windschief“ wird im Frz. allerdings offenbar eher durch eine definierende Umschreibung ausgedrückt: *gauche* kommt z. B. bei Legendre (1817), Clairaut (1741) und in der *Encyclopédie* nicht vor; statt dessen wird Legendres Umschreibung *droites non situées dans un même plan* bevorzugt.

11.4.3 Algebra

Kommen wir nun zu algebraischen Verwendungen, die uns näher an die Bedeutung von *schief* in *Schiefkörper* heranführen.

Schiefsymmetrische „Systeme“

Der englische Mathematiker Arthur Cayley definiert 1846 (in einem französischsprachigen Text) einen bestimmten Typ von Determinanten bzw. Gleichungssystemen (später auch von Matrizen), nämlich solche, deren Koeffizienten die Bedingung $a_{ij} = -a_{ji}$ erfüllen:

(11.2) Je donne le nom de *déterminant gauche* à un déterminant formé par un système de quantités $\lambda_{r,s}$ qui satisfont aux conditions $\lambda_{r,s} = -\lambda_{s,r} (r \neq s)$. J'appelle aussi un tel système, *système gauche* (Cayley 1846 [1963: I, 332]).

Ein Jahr später ergänzt er diesen Begriff durch die Bezeichnung *déterminant gauche et symétrique* mit der zusätzlichen Bedingung $\lambda_{r,r} = 0$ (Cayley 1847).[15] Spätestens seit Beginn der 1850er Jahre ist der Begriff im Englischen als *skew*

[14] Abgeleitet von *winden*, nicht von *Wind*, also ‘schief gewunden’.

[15] Orthographische Anmerkung: Frz. *symétrique* tritt besonders im 18. Jahrhundert auch in den Varianten *symmétrique* und *sim(m)étrique* auf.

(symmetric) determinant üblich (Muir 1960: II, 254-293), im Deutschen setzt sich später *schiefsymmetrisch* durch.[16]

Um die Bedeutung dieses Begriffs zu veranschaulichen, können wir auf Cayleys eigene Erläuterungen zurückgreifen. Es spielt für die semantische Rekonstruktion keine Rolle, ob wir dabei Bezug auf Determinanten, Gleichungssysteme oder Matrizen nehmen. Entscheidend ist, daß in jedem Fall eine quadratische Anordnung zugrunde liegt (die Cayley auch explizit verwendet) und für die jeweils dieselben Konzeptualisierungen auftreten. Wir benutzen im folgenden den neutralen Ausdruck *System*, wie dies auch Cayley tut.

Wir betrachten je ein Beispiel für ein symmetrisches und ein schiefsymmetrisches System.

$$(11.3) \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -4 & 5 \\ -2 & -4 & 0 & 6 \\ 3 & 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -4 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 6 \\ -3 & -5 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

Cayley definiert (hier für Determinanten): „A determinant ... where the corresponding terms on opposite sides of the dexter diagonal are equal to each other ... is said to be symmetrical. But if the terms are equal in magnitude only, but have opposite signs ... the determinant is said to be *skew*" (Cayley 1860 [1963: IV, 599]).[17] Da hierbei die Diagonale selbst ausgenommen wird, definiert er zusätzlich: „if the terms *in* the diagonal vanish, the determinant is said to be *skew symmetrical*" (ibid.). Damit liegt diesen Begriffsbildungen jeweils eine Spiegelung an einer Diagonalen zugrunde. Im obigen Beispiel ist z. B. der zu -2 gespiegelte Wert -2 (symmetrisches System) bzw. 2 (schiefsymmetrisches System).

Wir stellen zunächst fest, daß die grundlegende Begriffsbildung die eines symmetrischen Systems ist. Diese geht auch historisch voraus: Eine völlig analoge Definition eines *système symétrique* gibt Cauchy (1815b [1905: 115]). Zweitens wird ein solches quadratisches System offenbar als ebenes geometrisches Gebilde, nämlich als Quadrat, aufgefaßt. Betrachten wir zwei Beispiele von Cauchy, die sich in analoger Form auch in den genannten Texten Cayleys wiederfinden:

(11.4) l'ensemble des quantités dont il s'agit formera un système que j'appelerai *système symétrique* (Cauchy 1815b [1905: 115])

[16] Es ist nicht mit letzter Sicherheit zu entscheiden, ob das Französische oder das Englische als Ausgangspunkt zu nehmen ist. Daß Cayleys Muttersprache Englisch war, spricht für letztere Alternative (Muir 1960: II, 254).

[17] Die Bezeichnung *dexter diagonal* meint die Diagonale von der oberen linken Ecke zur unteren rechten Ecke. Wenn im folgenden von *der* Diagonalen die Rede ist, so ist diese Diagonale gemeint.

(11.5) ils [les termes principaux, d. h. die Diagonalelemente] sont tous situés, dans le système ... sur une diagonale du carré formé par le système (Cauchy 1815b [1905: 115])

Nun heißt ein geometrisches Gebilde *symmetrisch*, wenn es bei Spiegelung an einer Symmetrieachse unverändert bleibt; in diesem Fall wird die „Diagonale" des Systems als Symmetrieachse aufgefaßt.[18] Dadurch ist die Bezeichnung *symétrique* bzw. *symmetric* für ein solches System bereits klar.

Durch den Zusatz *gauche* bzw. *skew* wird dann angedeutet, daß das System in der Tat nicht symmetrisch, sondern nur „fast" symmetrisch ist, d. h. wenn man von den entgegengesetzten Vorzeichen (*opposite signs*) absieht: Die gespiegelten Komponenten sind nicht gleich, sondern sie werden als „entgegengesetzt gleich" aufgefaßt. Diese Interpretation wird dadurch erhärtet, daß genau diese Formulierung in verschiedenen Texten der damaligen Zeit verwendet wird, die sich mit schiefsymmetrischen Systemen befassen, ohne diese Bezeichnung explizit zu benutzen. Beispielsweise findet sich bei Baltzer (1857: 29-34), einem Lehrbuch über Determinanten, ein Kapitel mit dem Titel „Determinante eines Systems von Elementen, unter denen die correspondierenden a_{lk} und a_{kl} entgegengesetzt gleich sind".[19]

Nun wird „entgegengesetzt gleich" nicht von dem ganzen System prädiziert, sondern von den Komponenten, die sich, wie gesehen, *innerhalb* des Systems befinden. Das System selbst wird aufgrund der sich entgegengesetzt entsprechenden Komponenten als „asymmetrisch" bzw. „in sich verzogen" aufgefaßt, was durch die Konzeptualisierung EIN SYSTEM IST EIN GEOMETRISCHES GEBILDE ermöglicht wird. Für diese Metapher gibt es auch von der Mathematik unabhängige Evidenz. So heißt es etwa im Vorwort zur *Encyclopédie*: „Le système général des sciences et des arts est une espece de labyrinthe, de chemin tortueux, où l'esprit s'engage sans trop connoître la route qu'il doit tenir" (*Encyclopédie*, Discours préliminaire, xiv). Durch diese Konzeptualisierung läßt sich auch verstehen, warum die Ausdrücke *gauche* bzw. *skew* und nicht *oblique* verwendet werden, denn bei ersteren ist die Bedeutung 'verzogen' wesentlich stärker ausgeprägt als bei letzterem. Die Norm bzw. die Regelmäßigkeit, von der das System abweicht, ist die Symmetrie, genauer

[18]Der Bezug auf eine Symmetrieachse ist die hier relevante Form von Symmetrie; es gibt daneben noch andere.

[19]Daß dt. *schief* in der Seefahrersprache auch 'entgegengesetzt' bedeutet (*schiefer Wind* ist nach dem DWB, s. v. schief, ein Wind, der in entgegengesetzter Richtung zum Kurs verläuft), ist vermutlich hier nicht relevant. Auch frz. *oblique* hat diese Bedeutung (FEW).

die Achsensymmetrie (an der Diagonalen des Systems).

Es stellt sich damit noch die Frage, warum das dt. *schief* dann als geeignete Übersetzung für *gauche* bzw. *skew* angesehen wurde, wenn es in der Geometrie nur in Zusammenhang mit nicht-rechten Winkeln vorkommt, es also *oblique* entspricht. Eine Wortbildung *windschiefsymmetrisch* ist sicher nicht akzeptabel, und das gemeinsprachliche *schief* hatte die Bedeutungen 'asymmetrisch' und 'verzogen, verzerrt' (s. o.). Die deutsche Übersetzung *schief* wurde also nicht aufgrund dessen früherer geometrischer Bedeutungen gewählt, sondern aufgrund seiner gemeinsprachlicher Bedeutung.

Obwohl eine semantische Verbindung zwischen geometrischer und algebraischer Bedeutung von *skew* bzw. *gauche* möglich scheint, ist zu vermuten, daß sie hier nur eine sekundäre Rolle gespielt hat. Der Grund dafür ist, daß schon eine semantische Verbindung zwischen gemeinsprachlicher und algebraischer Bedeutung rekonstruierbar ist, die zudem wesentlich einfacher ist. Diesen Punkt wollen wir nun diskutieren.

Wir haben bereits darauf hingewiesen, daß dt. *schief* eine gemeinsprachliche Bedeutung 'krumm, verzogen, asymmetrisch' aufweist, wobei ähnliches für die hier untersuchten *skew* und *gauche* gilt. Dieser Bedeutung liegt eine Abweichung von einem einfachen oder regelmäßigen Fall zugrunde. Wir wollen nun zeigen, daß sich schon auf dieser Basis die algebraische Bedeutung der betrachteten Ausdrücke verstehen läßt. Dazu kommen wir noch einmal auf den Begriff der Symmetrie zurück, der ja bereits eine Regelmäßigkeit beinhaltet.

Es gibt auch eine algebraische Form der Symmetrie. Zum damaligen Zeitpunkt waren bereits *symmetrische Funktionen* bekannt.[20] Dabei handelt es sich um Funktionen von mehreren Argumenten, deren Werte sich nicht ändern, wenn man die Argumente vertauscht. Im einfachsten Fall einer Funktion von zwei Argumenten ist die Bedingung als $f(x, y) = f(y, x)$ formulierbar, wodurch die Vertauschung auch symbolisch deutlich wird, die wiederum geometrisch durch Spiegelung an einer Achse interpretierbar ist. Eine ebensolche Vertauschung liegt im Fall der symmetrischen bzw. schiefsymmetrischen Systeme auch bei den Indizes vor, die die Position innerhalb eines Systems angeben (vgl. die obige Gleichung $\lambda_{r,s} = -\lambda_{s,r}$). Es gibt also eine algebraische Form der Symmetrie, die darin besteht, daß bestimmte Objekte miteinander vertauschbar sind, ohne daß sich am Ergebnis etwas

[20]Es konnte nicht genau festgestellt werden, wann diese Bezeichnung in der Mathematik zuerst auftritt. Z. B. Lagrange (1771/72 [1973: III, 358]) spricht noch von *fonctions semblables*, Cauchy (1815a [1905: 63]) verwendet bereits die Bezeichnung *fonctions symétriques*.

ändert. Die Vertauschbarkeit stellt in der Tat einen besonders einfachen und regelmäßigen Fall dar: Bei einer symmetrischen Matrix kennt man schon die ganze Matrix, wenn man nur die „halbe" Matrix kennt (also z. B. nur die Komponenten links von der Diagonalen).

Wenn nun *skew* bzw. *gauche* eine Abweichung von einem regelmäßigen Bezugsobjekt beinhalten, dann ist damit schon die semantische Verbindung zur Algebra gegeben. Auch hier beziehen sich *skew* bzw. *gauche* auf eine solche Abweichung: Die Indizes der Komponenten des Systems sind nicht miteinander vertauschbar. Mathematisch drückt sich dies durch ein Minuszeichen aus.

„Symmetrie" hat also zwei für uns relevante Interpretationen: eine geometrische, die sich aus der Spiegelung an einer Achse ergibt, und eine algebraische, die die Vertauschung mathematischer Objekte beinhaltet. In manchen Kontexten sind beide Interpretationen möglich, z. B. bei Funktionen, in anderen nur jeweils eine (beim Schiefprodukt, das wir gleich diskutieren werden, ist nur die algebraische Interpretation möglich).

Schiefprodukt

Josiah Willard Gibbs (1839-1903) definierte 1881 ein Produkt von Vektoren, das nicht kommutativ ist und das er *skew product* nannte.[21] Weil es sich bei diesem „Schiefprodukt" um eine Verknüpfung handelt, liegt hier, anders als im Fall der schiefsymmetrischen Systeme, eine deutliche inhaltliche Verbindung zum Schiefkörper vor.

Da Vektoren eine Richtung haben, geht dies auch in die Definition ein:

(11.6) Its direction [die des Produktvektors, H. B.] is at right angles to α and β, and on that side of the plane containing α and β (supposed drawn from a common origin) on which a rotation from α to β through an arc of less than 180° appears counter-clockwise (Gibbs 1881 [1961: 20]).

Das Produkt erfüllt die Bedingung $a \times b = -b \times a$ für alle Vektoren a und b, d. h. anschaulich, daß die Produktvektoren $a \times b$ und $b \times a$ in die entgegengesetzte Richtung zeigen, was sich algebraisch in der obigen Gleichung durch ein entgegengesetztes Vorzeichen äußert.

[21] In Grassmanns *Ausdehnungslehre* von 1844 (s. Grassmann 1894) wird eine allgemeinere Form dieses Produktes als *äußeres Produkt* bezeichnet.

Auch beim Schiefprodukt liegt der algebraische Begriff der Symmetrie zugrunde: Die Produkte sind nicht miteinander vertauschbar. Das Adjektiv *skew* drückt hier also aus, daß das Produkt $a \times b$ bei Vertauschung der Vektoren zwar in Bezug auf die Quantität gleich bleibt, nicht jedoch in Bezug auf die Qualität (nämlich das Vorzeichen). Der Fall liegt hier also ganz ähnlich wie bei den (schief)symmetrischen Systemen, mit dem Unterschied, daß die Vertauschbarkeit hier eine Verknüpfung und keine Positionsangabe betrifft. Zusammengefaßt schließt *skew* bei Gibbs an die vorige algebraische Verwendung an und nicht an die geometrische, da keine Abweichung von einem rechten Winkel oder einer anderen geometrischen Bezugsgröße vorliegt.

Im deutschen Sprachraum hat sich keine Bezeichnung *Schiefprodukt* durchgesetzt; im Korpus, insbesondere in den in Kap. 6.2.2 genannten elektronischen Korpora, konnte dafür kein Beleg gefunden werden. Klar ist jedoch, daß Gibbs' Bezeichnung im deutschen Sprachraum bekannt gewesen ist (z. B. Abraham 1901: 4, 8f., Timerding 1908: 18).[22] Insbesondere in bezug auf den noch zu diskutierenden Terminus *Schiefkörper* sind daher Lehneinflüsse möglich und wahrscheinlich.

Anmerkungen zu weiteren Verwendungen von *schief*

Die in diesem Kapitel diskutierten Verwendungsweisen von *schief* und seinen Entsprechungen verbreiten sich im 19. und 20. Jahrhundert in der Mathematik. Wir wollen zwei solcher Begriffsbildungen kurz vorstellen, ohne diese im Detail zu analysieren, da sie zusätzlichen Aufschluß über algebraische Verwendungen des Ausdrucks geben.

In der Invariantentheorie werden sog. *schiefe Invarianten* definiert. Wir zitieren eine Definition von Paul Gordan, einem der Hauptvertreter dieser Theorie:

(11.7) Ist ρ [das sog. „Gewicht" der Invarianten, H. B.] eine gerade Zahl, so nennen wir die betreffende Form auch eine Form geraden Charakters (forme droite); ... Ist ρ hingegen ungerade, so heissen wir die Form eine Form ungeraden Charakters (forme gauche) oder auch schiefe Invariante (Gordan 1887: 9).

Der Ausdruck *schief* beinhaltet hier also wiederum eine Abweichung von einer Regelmäßigkeit, die sich anhand von ungeraden Zahlen ausdrückt; es liegt die Opposition gerade:schief vor bzw. „schief" wird mit „ungerade" identifiziert, ein

[22] S. a. Reich 1996.

Sachverhalt, der uns schon aus Gemeinsprache bzw. Geometrie bekannt ist.[23]

Ein zweites Beispiel stellen „schiefsymmetrische Bilinearformen" dar. David Hilbert (1912: 163) definiert diese wie folgt: „... unter einer *schiefsymmetrischen Form* verstehen wir mithin eine Bilinearform der Variabeln $x_1, x_2, ..., y_1, y_2, ...$ von der Gestalt $S(x,y) = \sum_{(p,q)} s_{pq} x_p y_q$, deren Koeffizienten reelle der Bedingung $s_{pq} = -s_{qp}$, $s_{pp} = 0$ genügende Größen sind". Diese Verwendung leitet sich aus der in schiefsymmetrischen Systemen ab, da eine rechteckige Anordnung zugrundeliegt, d. h. wir erhalten wiederum eine Abweichung von der Symmetrie in Form eines negativen Vorzeichens.

Schiefkörper

Bei Schiefkörpern liegt, wie beim Schiefprodukt, eine algebraische Verknüpfung zugrunde, doch wird, anders als beim Schiefprodukt, keine Aussage über die Vertauschbarkeit (Kommutativität) des Produktes $a \cdot b$ getroffen (ein Schiefkörper kann demnach kommutativ sein (in welchem Fall man ihn *Körper* nennt) oder auch nicht). Dies gilt aber nur für die rein logische Ebene. Vergleichen wir das Schiefprodukt mit „echten" Schiefkörpern, also solchen, die einen charakteristischen Unterschied zu Körpern aufweisen, da sie nicht kommutativ sind:

(11.8) Schiefprodukt: Für alle a, b gilt: $a \times b = -b \times a$.

(11.9) Körper: Für alle a, b gilt: $a \cdot b = b \cdot a$.

(11.10) „Echter" Schiefkörper: Es gibt mindestens ein a und ein b, für die gilt: $a \cdot b \neq b \cdot a$.

Die Vertauschbarkeit der Faktoren spielt also nach wie vor eine grundlegende Rolle, nur kann *schief* jetzt schon verwendet werden, wenn nur ein einziges Paar a, b nicht vertauschbar ist; beim Schiefprodukt gilt die Gleichung $a \cdot b \neq b \cdot a$ immer, d. h. für alle a und b (außer für den Fall $a = 0$ oder $b = 0$). Auf Vorzeichen wird bei Schiefkörpern, anders als etwa beim Schiefprodukt, kein Bezug mehr genommen: Aus der Existenz einer Gleichung $a \cdot b \neq b \cdot a$ folgt nicht, daß $a \cdot b = -b \cdot a$. Semantisch ist also nur die Abweichung von einer Regelmäßigkeit, der Vertauschbarkeit der Multiplikation, entscheidend.

[23] Der Begriff „Form ungeraden Charakters" stammt nach Study (1889 [1982: 204, Anm. 16]) von Clebsch.

11.5 Zusammenfassung und Diskussion

Zum Abschluß dieses Kapitels sollen die hier diskutierten Fälle von semantischem Wandel noch einmal zusammenfassend dargestellt und in die Kategorien, die in Kapitel 4.1 erarbeitet wurden, eingeordnet werden.

Zu Beginn geben wir eine zusammenfassende Übersicht über einige der wesentlichen Möglichkeiten, Adjektive mit der Bedeutung 'schief' in Geometrie und Algebra mit fachsprachlichen Substantiven zu kombinieren (Tab. 11.2).

Tabelle 11.2: Komposita mit 'schief'

	Winkel	Zylinder	Fläche	System	Invariante	Körper
dt. *schief*	+	+	-	+	+	+
dt. *windschief*	-	-	+	-	-	-
frz. *oblique*	+	+	-	-	-	-
frz. *gauche*	-	-	+	+	+	+
e. *oblique*	+	+	-	-	-	-
e. *skew*	-	-	+	+	+	+

Aus der Tabelle läßt sich etwa ablesen, daß das frz. Adjektiv *gauche* nicht in Zusammenhang mit dem frz. Ausdruck für 'Winkel' auftritt (durch das Minuszeichen angedeutet), daß es aber z. B. in der Kombination *polygone gauche* vorkommt (angedeutet durch das Pluszeichen). Zur weiteren Erläuterung sei gesagt, daß die ersten vier Spalten geometrische Begriffe und die letzten drei algebraische Begriffe beinhalten („System" steht dabei, wie in Kap. 11.4.3, für Determinanten, Gleichungssysteme und Matrizen). Die Kombinationsmöglichkeiten treffen im wesentlichen auf Begriffe zu, die zu den in den Spalten vorkommenden Begriffen verwandt sind, z. B. ließe sich statt „Zylinder" auch der Begriff „Prisma" verwenden, statt „Fläche" auch „Polygon".

Belege für die Kombinationsmöglichkeiten lassen sich leicht angeben. Dabei geht es uns hier nicht um Erstbelege, sondern darum, die Terminologie um etwa 1900 wiederzugeben (mit der Ausnahme von Schiefkörpern). Für „Schiefkörper" haben wir dies bereits getan, die anderen hier aufgeführten deutschen und französischen Termini finden sich bei Müller (1900, s. v. schief, windschief, oblique, gauche). Für das Englische lassen sich für alle Begriffe bis auf Invarianten Belege im OED (s. v. oblique, skew) finden. Der Terminus *skew invariant* findet sich in vielen Arbeiten zur Invariantentheorie, insbesondere bei Cayley (1867 [1963: VI, 154]) und Sylvester (1878 [1973: IV, 168]).

Leicht ersichtlich ist aus der Tabelle, daß in der Geometrie dt. *schief*, frz. *oblique* und e. *oblique* sowie dt. *windschief*, frz. *gauche* und e. *skew* genaue Entsprechungen sind. Für die Algebra gilt dies nicht, da dt. *windschief* hier nicht vorkommt und statt dessen wiederum *schief* verwendet wird.

Wir wollen nun die Entwicklung von dt. *schief* zusammenfassen. Der Ausdruck ist insgesamt semantisch etwas vielseitiger als die anderen hier betrachteten Ausdrücke, deren semantische Analyse zu großen Teilen ähnlich verläuft. Der besseren Übersicht soll Abb. 11.1 dienen, in der die semantische Entwicklung knapp zusammengefaßt ist. Die Pfeile geben wieder die Richtung des jeweiligen Wandels
ie

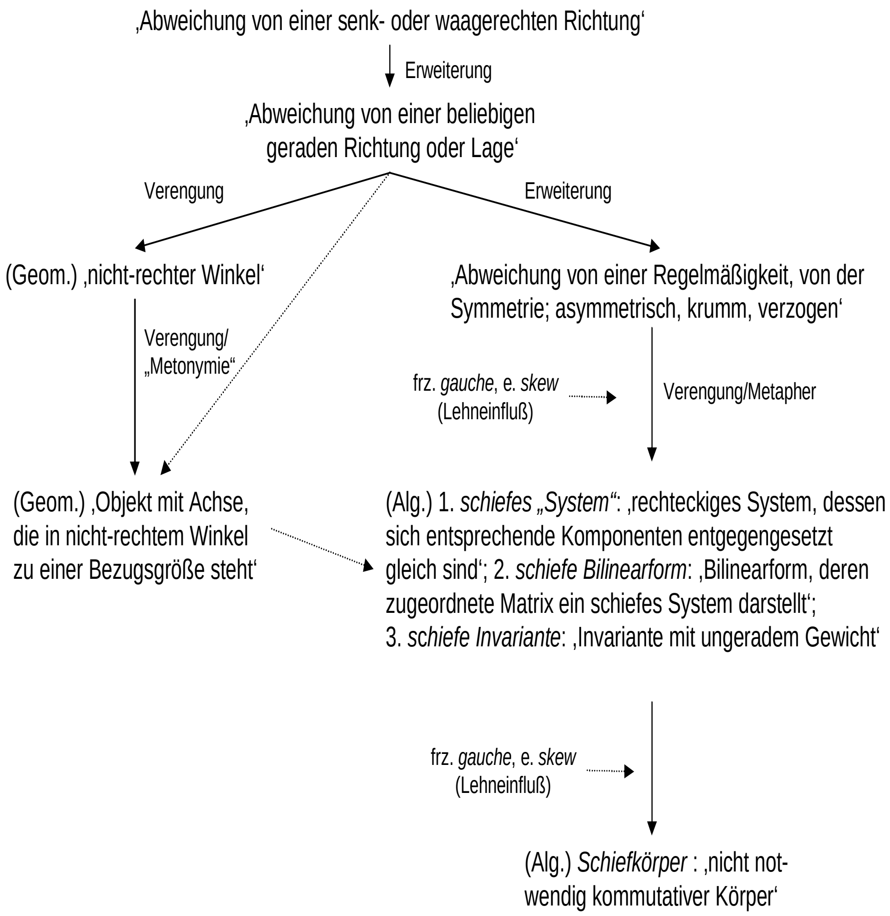

Abbildung 11.1: Semantische Entwicklung von *schief*

Der semantische Ausgangspunkt ist die Bedeutung ‘Abweichung von einer beliebigen geraden Richtung oder Lage’, wobei die Richtung zunächst nur senk- oder waagerecht sein konnte. Diese erste semantische Veränderung besteht in der Aufhebung der Beschränkung auf eine waagerechte oder senkrechte Richtung, d. h. es liegt ein Fall von Bedeutungserweiterung vor. Die Bedeutung enthält von Beginn an eine negative Komponente, da „Abweichung“ immer bedeutet, daß ein bestimmter Fall *nicht* eintritt. Dies gilt auch für die dritte Bedeutung ‘krumm, verzogen, asymmetrisch’, die sich aus der zweiten durch Erweiterung ergibt, denn eine Abweichung von einer geraden Richtung heißt letztlich nichts anderes, als daß ein als *schief* bezeichnetes Objekt krumm oder schief ist. Insgesamt weist das Adjektiv immer eine Abweichung von einem besonders einfachen, natürlichen oder regelmäßigen Fall auf, so z. B. bei schiefen Blättern, die von ihrer natürlichen Richtung oder von einem symmetrischen Bau abweichen.

Aus den ersten beiden Bedeutungen entstehen geometrische Bedeutungen, die jeweils Abstrahierungen darstellen. Zunächst tritt *schief* als Attribut zu *Winkel* in der Bedeutung ‘nicht-rechter Winkel’ auf. Die Abstrahierung besteht darin, daß der Ausdruck, ausgehend von konkreten physischen Objekten, auf rein geometrische Konstellationen, die aus geometrischen Elementarbegriffen (Punkt, Gerade, Ebene) bestehen, verengt wird. Die Schiefe eines länglichen Gegenstandes ergibt sich so mathematisch aus dessen Winkel zu einer Bezugsgröße, z. B. der Erdoberfläche. Zusätzlich ist ein metaphorischer Anteil insofern vorhanden, als auch von einer Übertragung von einem konkreten auf einen abstrakteren Bereich gesprochen werden kann.

In seiner zweiten geometrischen Bedeutung modifiziert *schief* räumliche Objekte, z. B. in *schiefer Zylinder*. Derartige Objekte haben eine Achse[24], die wieder zu einer Bezugsgröße (eine Ebene oder eine Gerade) in Beziehung gesetzt wird, so daß das Maß des Winkels zwischen Achse und Bezugsgröße erkennbar ist. Mathematisch betrachtet könnte man von einer Umkehrung einer Metonymie (hier im engeren Sinne einer Teil-Ganzes-Beziehung) sprechen: Nicht der Kegel als solcher ist schief, sondern nur einer seiner Teilaspekte, der Winkel zwischen Achse und Grundfläche bzw. Bezugsgröße, denn etwa ein schiefer Zylinder wird als Zylinder definiert, dessen Achse mit der Grundfläche einen schiefen Winkel bildet. Die Bedeutung läßt sich aber auch zur gemeinsprachlichen Bedeutung ‘Abweichung von einer beliebigen geraden Richtung oder Lage’ plausibel in Beziehung setzen, denn

[24] Bei einem Zylinder etwa die Verbindung der Mittelpunkte der beiden Kreisflächen; auch nicht-räumliche Objekte wie Parabeln oder Hyperbeln haben eine Achse.

etwa ein schiefer Zylinder steht in gemeinsprachlichem Sinne schief, so daß hier auch eine Verengung vorliegt.

Kommen wir nun zu den algebraischen Verwendungweisen von *schief*. Semantischer Ausgangspunkt ist die dritte gemeinsprachliche Bedeutung 'Abweichung von einer Regelmäßigkeit, von der Symmetrie; asymmetrisch, krumm, verzogen'. Aufgrund der Beleglage müssen wir annehmen, daß sich die Bedeutung von *schief* in *schiefsymmetrisch* durch Entlehnung aus dem Englischen oder Französischen entwickelt hat. Anders als in diesen Sprachen wurde im Deutschen kein anderes Lexem als in der Geometrie verwendet (im Englischen etwa *skew* statt *oblique*). Dies war deswegen möglich, weil *schief* gemeinsprachlich bereits die Bedeutung 'Abweichung von einer regelmäßigen Bezugsgröße' bzw. 'verzogen, asymmetrisch' hatte, an die sich diese mathematische Bedeutung anschließt. Zur Begründung dieser algebraischen Bedeutung reicht also bereits die Gemeinsprache aus, d. h. zur semantischen Rekonstruktion benötigen wir die geometrische Bedeutung nicht. Allerdings ist dem hinzuzufügen, daß schiefsymmetrische Systeme als quadratisches geometrisches Objekt mit einer Achse konzeptualisiert werden (s. Kap. 11.4.3), was den Übergang in die Algebra möglicherweise erleichtert hat. Insgesamt können wir bei schiefsymmetrischen Systemen wiederum von einer Abweichung von einem regelmäßigen Fall sprechen, nämlich der Abweichung von der (Achsen-)Symmetrie, ein Begriff, der zuvor in die Algebra übertragen wurde. Es liegt also eine Verengung vor. Ähnlich wie bei den geometrischen Bedeutungen liegt aber auch ein metaphorischer Anteil in Form einer Übertragung einer konkreten Bedeutung in einen abstrakteren Bereich vor.

Der Bezug auf ein Objekt mit einer Achse, der in der Algebra zunächst noch metaphorisch vorliegt, entfällt dann beim Schiefprodukt und bei Schiefkörpern. Wesentlich ist hier die Abweichung von der algebraischen (nicht von der geometrischen) Symmetrie, die in der Vertauschbarkeit der Reihenfolge besteht.[25] Die meisten algebraischen Verwendungen von *schief* beinhalten den Bezug auf eine Operation, bei der die Vertauschung der Reihenfolge bis auf die Umkehrung des Vorzeichens im Ergebnis keine Veränderung bewirkt. Anders als bei schiefsymmetrischen Systemen findet hier ein Bezug auf eine algebraische Verknüpfung statt, wie dies im Englischen auch schon zuvor beim *skew product* der Fall war.

[25] Achsensymmetrie im geometrischen Sinne könnte hier allenfalls in sehr abstrakter Form gesehen werden: Der gesamten Gleichung, d. h. einschließlich der links und rechts neben dem Gleichheitszeichen stehenden Ausdrücke, entspräche dann ein geometrisches Objekt, das Gleichheitszeichen der Symmetrieachse.

Beim Terminus *Schiefkörper* zeigt sich schließlich, daß entgegengesetzte Vorzeichen keine wesentliche Rolle spielen. Entscheidend ist vielmehr, daß von einer Regelmäßigkeit abgewichen wird. Auf rein logischer Ebene wird die Regelmäßigkeit lediglich nicht vorausgesetzt, d. h. sie könnte trotzdem eintreten. Die aus mathematischer Sicht interessanten Schiefkörper sind jedoch die „echten" Schiefkörper, d. h. diejenigen Schiefkörper, bei denen die Gleichung $a \cdot b = b \cdot a$ mindestens einmal nicht erfüllt ist – anderenfalls hätte man es schon mit einem Körper zu tun.

Sowohl in Gemeinsprache als auch in Geometrie und Algebra steht *schief* immer in Opposition zu einem antonymen Ausdruck. In der Geometrie liegt die Opposition gerade:schief vor; in der Algebra finden sich die Oppositionen symmetrisch:schiefsymmetrisch (bei Systemen und Bilinearformen) und gerade:schief (bei Invarianten). In bezug auf Verknüpfungen (also beim Schiefprodukt und bei Schiefkörpern) liegt eine Opposition kommutativ:schief vor. Die alte gemeinsprachliche Opposition setzt sich also in der Mathematik fort; sie ist aus terminologischer Sicht ein produktives Muster, das sich im begrifflichen System der Mathematik häufig findet, da ihr ein mathematischer Gehalt zugewiesen werden kann, der in den jeweiligen Definitionen präzisiert wird.

Ein weiterer semantischer Aspekt von *schief* ist der, daß der Ausdruck als Teil eines Kompositums eine taxonomische Einstufung relativieren kann, ähnlich wie etwa die Präfixe *pseudo-* und *quasi-*. Eine schiefsymmetrische Matrix ist, wie gesehen, nicht symmetrisch (d. h. weder im gemeinsprachlichen noch im terminologischen Sinn); sie ist aber „fast" symmetrisch insofern, als sie auf regelmäßige Weise, d. h. durch jeweils umgekehrte Vorzeichen, von der Symmetrie abweicht. Ähnliches gilt für *schief* in *Schiefkörper*. Das Adjektiv beinhaltet hier ebenfalls eine Abweichung von einer Regelmäßigkeit, nämlich der Vertauschbarkeit der Multiplikation. In bezug auf die Bildung des Kompositums *Schiefkörper* wird *schief* insgesamt ähnlich verwendet wie Gradpartikeln, vgl. *Beinahe-Unfall* oder *Fast-Mörder* (Motsch 1999: 415).

Zusammenfassung, Diskussion und Ausblick

Die mathematische Fachsprache stellt, so hoffen wir in dieser Arbeit gezeigt zu haben, ein ebenso komplexes wie lohnendes Feld für linguistische bzw. interdisziplinäre Untersuchungen dar. Wir haben uns unserem Gegenstand, der Fachsprache der Mathematik des 19. Jahrhunderts und ihrer Genese aus verschiedenen Perspektiven genähert und wollen nun die Ergebnisse unserer Arbeit zusammenfassend diskutieren und dabei gleichzeitig sich daraus ergebende Fragen aufwerfen. Unsere Diskussion gliedert sich in einen kurzen Rückblick, die eigentliche Auswertung und einen Ausblick auf weitere Fragestellungen.

Wir haben diese Arbeit mit einigen theoretischen Kapiteln begonnen, in denen zunächst allgemeine linguistische Begriffe und Theorien erörtert wurden, die für die semantische Erfassung sprachlicher Ausdrücke herangezogen werden. Gleichermaßen grundlegend sind für uns die Begriffe der Metapher und Analogie, die in den Fallstudien eine wichtige Rolle spielten. In den theoretischen Kapiteln nahmen wir weiterhin Stellung zu den Begriffen „Fachsprache“ bzw. „Wissenschaftssprache“ und grenzten diese vom Begriff „Gemeinsprache“ ab. Dieses linguistische Instrumentarium ist vorwiegend statisch-systematischer Natur, da es auf die Beschreibung synchroner Zustände ausgerichtet ist. Unser Modell wissenschaftlicher Begriffsbildung stellt dem eine dynamische Komponente zur Seite, da es sich auf die Schöpfung neuer mathematischer Begriffe konzentriert. Ähnliches gilt für den Begriff des semantischen Wandels und damit zusammenhängende Begriffe, die diachroner Natur sind, da sie die Veränderung synchroner Zustände erfassen wollen. Die Fallstudien im zweiten Teil haben wir unter beiden Gesichtspunkten, dem statischen und dem dynamischen, durchgeführt.

11.6 Auswertung

Die folgende Auswertung unserer Ergebnisse konzentriert sich auf drei Probleme: die Metaphorik, die Bildung mathematischer Begriffe und den semantischen Wandel. Vorab sei bemerkt, daß es Überschneidungen in den jeweiligen Abschnitten gibt, die in inhaltlichen Zusammenhängen begründet sind. Die Auswertung erfolgt hauptsächlich unter zwei Gesichtspunkten. Erstens betrachten wir die Ergebnisse hinsichtlich der Spezifik der mathematischen Wissenschaftssprache, d. h. wir diskutieren die Besonderheiten des Begriffs „Wissenschaftssprache“ im Vergleich zu „Fachsprache“ sowie zu anderen Formen von Sprache. Zweitens gehen wir auf Annahmen der linguistischen Forschung ein, die unserer Meinung nach der Modifikation bedürfen.

11.6.1 Metaphorik

1. Fachlicher Charakter und Konsistenz der Metaphorik. Entgegen der Auffassung, die z. T. von Lakoff und Núñez (2000) vertreten wird, haben die Metaphern, die in dieser Arbeit diskutiert wurden, zum überwiegenden Teil einen fachlichen Bildspender. Dies gilt z. B. für Cauchys Metapher (Kap. 9.6), die einen Zusammenhang zwischen Permutationen und rationalen Zahlen herstellt. Die Zerlegungsmetaphorik geht in ihrer mathematischen Ausprägung von den ganzen Zahlen aus und überträgt deren Teilbarkeitseigenschaften auf andere mathematische Objekte, von denen wir neue Zahlbereiche und algebraische Strukturen betrachtet haben. Diese Analogien weisen z. T. ein sehr hohes Maß an struktureller Konsistenz auf, d. h. sie lassen sich mit den Gentnerschen Begriffen (Kap. 3.6) gut in Einklang bringen. Es liegen häufig Eins-zu-Eins-Entsprechungen zwischen Bildspender und Bildempfänger vor, die allerdings im Verlauf der Theoriebildung durch zusätzliche Begriffe, die im Bildspender nicht vorhanden sind, ergänzt werden können, zum Teil aufgrund anderer Analogien. Desgleichen lassen sich viele Prädikationen in der von Gentner beschriebenen Weise exakt übertragen.

Es ist nicht überraschend, daß die Metaphern vorwiegend aus fachlichen Bildspendern stammen und daß Analogien in unseren Beispielen die zentrale Form von Metaphern darstellen und dabei eine hohe Konsistenz aufweisen. Systematische Übertragungen aus dem Alltag scheinen als Bildspender für Wissenschaften nicht gleichermaßen geeignet. Kein Bereich des Alltags ist so durchstrukturiert wie wissenschaftliche Bereiche, denn das Ziel von Theorien besteht gerade darin, Zusammenhänge herzustellen, die in deren Begrifflichkeit eingehen. Darin unterscheidet sich Wissenschaftssprache von Fach- und Gemeinsprache, denn beide haben nicht die Herstellung systematischer Zusammenhänge zum Ziel und ziehen daher üblicherweise auch nicht in demselben Umfang fachliche Analogien heran.

2. Funktionen der Metaphorik. Die untersuchten Metaphern haben verschiedene Funktionen, die größtenteils referentiellen Charakter haben bzw. die sich aus der Hallidayschen Dimension „field“ ergeben (Kap. 5). Sie haben eine referentielle Funktion insofern, als sie dem Bedarf genügen, für ein intendiertes Objekt eine Bezeichnung zu finden. In der fachsprachlichen Kommunikation haben Metaphern aber auch eine Art „konative“ Funktion in dem Sinne, daß sie eine Wirkung auf ihre Rezipienten ausüben, die über den unmittelbaren Sachbezug hinausgeht. Insbesondere die Zerlegungsmetaphorik hat einen stark ausgeprägten programmatischen Charakter, da dieses semantische Feld auf zahlreiche Bereiche übertragen wird und dabei Analogien zum Fundamentalsatz der Arithmetik nahelegt. Sie hat damit genauer eine heuristische Funktion, d. h. sie tritt nicht nur auf der Ebene der Bezeichnungen in Erscheinung, sondern regt auch dazu an, weitere Begriffe zu suchen, Fragen aufzuwerfen, Theoreme aufzustellen, Definitionen zu analogisieren und Beweisgänge zu übertragen (Kap. 9.9, 10.8). Diese Funktion ist wiederum eine Besonderheit der Wissenschaftssprache und grenzt diese von Fach- und Gemeinsprache ab. Erwähnenswert ist noch, daß die Mathematik im Gegensatz zur Gemeinsprache und wohl auch zu manchen anderen Wissenschaften die Möglichkeit hat, durch Einführung „idealer“ oder „imaginärer“ Objekte Analogien zu erzwingen. Die Mathematik ist in dieser Hinsicht allerdings nicht unbedingt einmalig: Daß auch andere Wissenschaften ähnlich vorgehen können, zeigen z. B. die chemische Analogie Kummers (Kap. 9.4.1) oder das in der Linguistik verwendete Nullmorphem.

Referentiell bzw. sachbezogen sind viele Termini auch insofern, als ihre Schöpfer bestrebt sein können, durch die Bezeichnung das Wesen des Objektes zum Ausdruck zu bringen. Typisch für Wissenschaftssprachen ist dabei, daß das Motiv der auftretenden Metaphern erläutert wird, denn im wissenschaftlichen Diskurs soll das, was dem wissenschaftlichen Denken förderlich ist, auch gesagt werden. Dedekind tut dies beim Terminus *Körper*, indem er die semantischen Merkmale wie das der Vollkommenheit nennt, die für den Ausdruck zentral sind. Zur Erläuterung zieht er verschiedene Disziplinen heran, in denen alle diese semantischen Merkmale auftreten. Er gibt zwar eine Definition, doch löst die Definition die Metapher nicht vollständig auf, da der Ausdruck eine Organismus-Metaphorik (s. den folgenden Absatz) beinhaltet, die durch die Definition allein nicht erfaßt wird. Zumeist jedoch werden Metaphern in der Wissenschaft durch Definitionen zu „toten“ Metaphern: Durch Definitionen findet eine Einbindung in ein terminologisches Bezugssystem statt, das von Bildern unabhängig sein *will*. Dieser prinzipiellen Unabhängigkeit steht allerdings die *tatsächliche* Bedeutung der Metapher in der Wissenschaft gegenüber (vgl. Kap. 9.9).[26]

Viel prägnanter als etwa in Kroneckers konkurrierendem Ausdruck *Rationalitäts-Bereich* kommt durch die Dedekindsche Bezeichnung und die Organismus-Metaphorik der Gedanke zum Ausdruck, daß Körper aus zusammenhängenden Teilen bestehen, die in ihrem Zusammenwirken die Funktion des Ganzen bestimmen. Diese Metapher bezieht sich auf einen Strukturgedanken, der bei Prägung dieses Terminus, wie wir in Kap. 9.8 gesehen haben, noch nicht explizit verwendet wurde.[27] Sie bringt das Wesen des Objektes zum Ausdruck, kann aber auch als „Anregung“ verstanden werden, die Struktur zu erforschen. Ähnlich wie bei *Raum* (3.5.1) kann bei diesem Beispiel vermutet werden, daß nicht einfach eine wahrgenommene Ähnlichkeit abgebildet, sondern daß eine Ähnlichkeit intentional konstruiert wird. Nicht zuletzt aus diesen Gründen ist *Körper* eine „mächtige Metapher“ (Mehrtens 1990: 98), eine Grundmetapher, die nicht nur in der Lage ist, eine „heuristische Perspektive“ zu geben, sondern die zudem noch verschiedene Diskurse, in denen sie vorkommt, miteinander verbindet.[28]

3. Theoriekonstitutiver Charakter der Metaphorik. Theoriekonstitutive Metaphern in Boyds Sinn (Kap. 3.3) können wir unter unseren mathematischen Beispielen nicht erkennen (vgl. etwa Kap. 10.8). Dies liegt vor allem daran, daß die mathematischen Objekte, über die in den betrachteten Texten gesprochen wird, durch Definitionen festgelegt werden und damit das Boydsche Kriterium der „non-paraphrasibility“ nicht erfüllt ist. Das muß aber nicht bedeuten, daß es solche Metaphern grundsätzlich nicht gegeben hat oder nicht geben kann. Wir wollen dafür einige Indizien diskutieren und beginnen mit einem Zitat von Hilbert:

> Die Übereinstimmung zwischen geometrischem und arithmetischem Denken zeigt sich auch darin, daß wir bei arithmetischen Erscheinungen ebensowenig wie bei geometrischen Betrachtungen in jedem Augenblicke die Kette der Denkoperationen bis auf die Axiome hin verfolgen; vielmehr wenden

[26] Vgl. auch Kretzenbacher (1992: 44), Jahr (1992: 42).

[27] Die Metapher des Organismus wurde z. B. von Felix Klein (1926: 38) auch auf Gruppen angewendet.

[28] Die Begriffe „Grundmetapher“ und „heuristische Perspektive“ stammen von Mehrtens. S. Kap. 3.5.1.

> wir, zumal bei der ersten Inangriffnahme eines Problems, in der Arithmetik genau wie in der Geometrie zunächst ein rasches, unbewußtes, nicht definitiv sicheres Kombinieren an im Vertrauen auf ein gewisses arithmetisches Gefühl für die Wirkungsweise der arithmetischen Zeichen ... (Hilbert 1901 [1970: III, 296])

Für den Forschungsprozeß könnte es demnach zumindest in manchen Fällen zutreffen, daß zwar noch keine Definition vorliegt, aber dennoch eine Theorie entwickelt werden kann. In diese Richtung deuten auch einige Anmerkungen in der Arbeit von Bettina Heintz (2000), die im Rahmen einer soziologischen Untersuchung der Mathematik Stellungnahmen von Mathematikern und Mathematikerinnen zusammengestellt hat (allerdings nicht aus dem 19. Jahrhundert). Aus deren Aussagen ergibt sich, daß die Axiomatik, die mit den Definitionen in engem Zusammenhang steht, erst der letzte Schritt der mathematischen Forschungsarbeit ist: Sie wird erst dann eingesetzt, „wenn die wirkliche Arbeit geleistet ist und es nur noch darum geht, Ordnung zu schaffen und Transparenz herzustellen“ (Heintz 2000: 138). Wenn dem so ist, dann besteht auch die Möglichkeit, daß zumindest vor der Veröffentlichung einer Theorie Metaphern eine der theoriekonstitutiven nahekommende Funktion innehaben. Es ist aber auch nicht auszuschließen, daß sich in den von Heintz ausgewerteten Äußerungen aus dem 20. Jahrhundert ein Wandel in der Auffassung von Wissenschaft spiegelt, ohne daß dies notwendigerweise mit einer Änderung in der praktischen Forschungsarbeit einhergeht. Schließlich sei noch noch die Vermutung geäußert, daß sich theoriekonstitutive Metaphern eventuell in einem früheren als dem hier betrachteten Zeitraum finden könnten.

4. Interaktionsphänomene in der Metaphorik. In Kap. 3.2.1 haben wir den Blackschen Begriff der Interaktion von Metaphern betrachtet, nach dem nicht nur der Bildempfänger durch den Bildspender gefärbt und spezifiziert werden kann, sondern auch umgekehrt der Bildspender durch den Bildempfänger. Wir wollen anhand zweier Beispiele zeigen, wie sich die heuristische Rückwirkung der Interaktion in der Mathematik darstellen kann.

In Kap. 9.9 haben wir dargelegt, daß Dedekind eine begriffliche Differenzierung zwischen Primzahlen und unzerlegbaren Zahlen vornahm, denn bei direkter Übertragung des Primzahlbegriffs von den ganzen Zahlen auf andere Zahlbereiche entsteht das Problem, daß sich keine vollständige Analogie zum Fundamentalsatz der Arithmetik erreichen läßt. Durch diese begriffliche Trennung im Bildempfänger stellt sich sofort die Frage, ob sie auch auf den Bildspender zutrifft. In diesem Fall ist diese Frage leicht zu beantworten: Die Begriffe fallen bei ganzen Zahlen exakt zusammen. Folglich wird für die ganzen Zahlen keine entsprechende terminologische Unterscheidung vorgenommen;[29] doch kann man insofern von einer Rückwirkung sprechen, als sich die eben genannte Frage für die ganzen Zahlen überhaupt erst stellt. Die Antwort auf die Frage geht dann in das Wissen über den Bildspender ein; er kann dann etwa insofern in einem neuen Licht gesehen werden, als das Zusammenfallen der genannten Begriffe nicht selbstverständlich ist.

Rückübertragungen werden auch explizit vorgenommen. Ein Beispiel dafür ist die Übertragung des Körperbegriffs von Zahlen auf Funktionen, wie wir sie in Kap. 10.8 anhand von Dedekind - Weber (1882) angesprochen haben.[30] Diese Analogie hatte Felix Klein in Vorlesungen aus dem Wintersemester 1891/92 „sogar schon ‚in umgekehrter Richtung' [benutzt]: Kronecker bzw. Dedekind und Weber hatten nach Vorbildern aus der Zahlentheorie Fragestellungen über algebraische Funktionen behandelt; Klein hingegen ging von den Funktionen zu den Zahlen über" (Ullrich 1999: 126).[31] In einer späteren Arbeit führt Klein (1926: 333) dann noch aus, daß diese Rückübertragung Fragen aufwirft, indem ausgehend von Erkenntnissen über den Bildempfänger nach deren Entsprechungen im Bildspender gesucht wird.

Wir müssen diesen Ausführungen jedoch einschränkend hinzufügen, daß von einer Interaktion im Sinne Blacks nur dann gesprochen werden kann, wenn der Bildspender bzw. die zu diesem gehörigen Begriffe eine neue Qualität bekommen. Diese wird jedoch nicht zwingend mitgedacht. Aus diesem Grund haben wir zu Beginn dieses Abschnitts vorsichtiger von der „heuristischen Rückwirkung" der Interaktion der Metaphorik gesprochen.

5. Das Problem der Bereichsverschiedenheit. Ein wichtiges Problem, das wir bereits mehrfach zur Sprache gebracht haben (s. Kap. 8.2.2, 9.4.1, 9.9, 10.8), betrifft die Beziehung zwischen den Bereichen der Bildspender und -empfänger. Diese Bereiche können verschieden sein oder – in letzterem Fall kann man nicht von einer Übertragung sprechen – zu einem Bereich mit einem gemeinsamen Oberbegriff gehören. Die Definition von Metaphern und damit auch von Analogien beruht darauf, daß zwei *unterschiedliche* Bereiche zueinander in Beziehung gesetzt werden (Kap. 3.2.2). In vielen Fällen sieht es so aus, wie wenn Bildspender und Bildempfänger als spezielle Arten unter einen gemeinsamen Oberbegriff zu

[29] Z. B. nicht bei Bachmann 1892.

[30] Die Geschichte der Entdeckung dieser Analogie stellt Ullrich (1998, 1999) dar. S. a. O. Neumann (1996/97).

[31] Die gemeinten Vorlesungen beziehen sich auf Klein (1986).

subsumieren wären. Dieser Eindruck kann jedoch täuschen, weil die involvierten Bereiche aufgrund einer Definition eindeutig verschieden sind.

Bei gemeinsprachlichen Konkreta ist die Verschiedenheit der Bereiche zumeist unmittelbar einsichtig. In der Gemeinsprache gehen Vergleiche typischerweise von Bereichen aus, die in der sinnlichen Erfahrung weit von einander entfernt und aus diesem Grund verschieden sind (und nicht wie in der Wissenschaft aufgrund einer Definition); die Betrachtung von zu ähnlichen Bereichen läßt eine Metapher oder Analogie nicht als solche erkennen (vgl. Sapir 1977: 6, Fn. 5). Wir vermuten, daß das Problem vorwiegend bei abstrakten Begriffen auftritt und insofern für Wissenschaftssprache typisch ist.

Der Unterschied zwischen dem Unterbegriff eines Oberbegriffs und Metaphern ist aber in der Wissenschaft nicht absolut, sondern hängt von der Auffassung einzelner Autoren ab und ist insofern perspektivisch. Ein Beispiel dafür, das wir in Kap. 10.8 diskutiert haben, ist die Übertragung des Körperbegriffs von Zahlen auf Funktionen, die Dedekind und Weber vornahmen. Aus der Sicht Kroneckers fallen diese Begriffe jedoch unter denselben Oberbegriff, d. h. es liegt keine Übertragung vor. Dabei ist die Wahl der Begriffe nicht willkürlich, doch sind je nachdem, ob es sich um einen Oberbegriff oder eine Metapher handelt, unterschiedliche Dinge zu rechtfertigen: Bei Analogien ist etwa deren Fruchtbarkeit nachzuweisen, während bei Oberbegriffen zu zeigen ist, daß die betrachteten Objekte wirklich unter denselben Begriff fallen.

Dieses Problem ist unseres Wissens in der Literatur zur Wissenschaftsgeschichte der Mathematik nicht behandelt worden. Seine Bedeutung zeigt sich auch darin, daß es nicht nur die Identifikation von Metaphern betrifft, sondern auch die Begriffsbildung und den semantischen Wandel. Wir haben die Problematik hinsichtlich des Bedeutungswandels am Beispiel von Begriffen diskutiert, die zur Zerlegungsmetaphorik gehören (Kap. 9.9). Das Verb *décomposer* etwa ließe sich semantisch an einen philosophischen Zerlegungsbegriff oder an einen mathematischen Zerlegungsbegriff anschließen – in beiden Fällen würde es sich um eine Verengung der Bedeutung handeln. Man kann aber auch von einer Analogie zur Verwendung von *décomposer* in der Arithmetik ausgehen, eine Analogie, die in mathematischen Texten sehr häufig explizit herangezogen wird.

6. Fundierung der Metaphorik. An der Arbeit von Lakoff und Núñez (2000) haben wir an mehreren Stellen dieser Arbeit Kritik geübt. Die Autoren gehen von Lakoff und Johnsons (1980) Ansatz aus, wo er sich auf gemeinsprachliche Beispiele bezieht und übertragen diesen auf fachliche Kontexte. Diese Vorgehensweise scheint uns nicht geeignet zu sein, Metaphorik und Begriffsbildung in der Wissenschaftssprache zu verstehen. So ist die Unterscheidung zwischen Fundierungs- und Verbindungsmetaphern, die zu alltäglicher bzw. zu fachlicher Erfahrung in Beziehung gesetzt wird, problematisch: Wie in Kap. 3.5.2 ausgeführt wurde, kann die „Fundierung" einer Metapher selbst mathematisch sein, was durch diese Begriffe nicht erfaßt wird. Es stellt sich daher die Frage, ob die fachliche Erfahrung eine Unterart der sinnlichen Erfahrung ist oder ob sie davon grundsätzlich verschieden ist. Die Autoren stellen zudem in einigen Fällen Fundierungsmetaphern auf, wo sie gar nicht vorliegen, etwa im Zusammenhang mit der Abgeschlossenheit (Kap. 9.5) und damit auch mit dem Gruppenbegriff. Diese Beispiele zeigen darüber hinaus, daß die Ausblendung des Kontextes unseres Modells wissenschaftlicher Begriffsbildung zu einer Überschätzung der direkten kognitiven Fundierungen und zu einer Unterschätzung der wissenschaftgeschichtlichen Tradition führt. Außerdem erscheint es uns methodisch fragwürdig, historische Metaphern aufzustellen, ohne auf textliche Belege einzugehen, wie im Fall der „Booleschen Metapher" (Kap. 3.5.2). Lakoff und Núñez erheben zwar nicht explizit den Anspruch, historisch arbeiten zu wollen, doch müssen sich die Autoren an entsprechenden Maßstäben messen lassen, wenn sie zahlreiche historische Beispiele betrachten.

Ein weiteres Problem haben wir am Beispiel der Behältnismetaphorik diskutiert (Kap. 9.3.1). Wenn diese Metapher auf *groupe* übertragen wird, so entspricht dem keine sinnliche Erfahrung. Es sind nicht die Eigenschaften einer Gruppe, die es erlauben, auf die Vergleichbarkeit des sinnlich erfahrbaren Behältnisses zurückzugreifen; vielmehr haben sowohl *groupe* als auch die Behältnismetaphorik eine lange Entwicklung hinter sich, die die beiden miteinander kompatibel machen. Aufgrund der sehr starken Verbreitung dieser Metapher kann vermutet werden, daß sich diese Erscheinung auch bei gemeinsprachlichen Beispielen finden läßt.

Wir kommen auf Lakoff und Núñez in Zusammenhang mit der Modellierung der wissenschaftlichen Begriffsbildung noch zurück.

11.6.2 Modellierung der Begriffsbildung

1. Motivation der Begriffsbildung. Von Benennungen bei wissenschaftlichen Ausdrücken wird nicht selten behauptet, daß sie fast völlig willkürlich sein können. Diese Ansicht wurde schon in der *Encyclopédie* (s. v. définition) formuliert: „Les *définitions* des Mathématiciens regardées comme *définitions* de nom, sont absolument arbitraires, c'est-à-dire qu'on peut donner aux objets des mathématiques tel nom, & aux mots tel sens qu'on veut." Es mag theoretisch möglich sein, einem Signifikanten ein beliebiges Designat zuzuweisen, die Praxis spricht hingegen eine andere Sprache. Gegen diese Aussage spricht schon die Tatsache, daß es möglich ist, semantische Verbindungen zwischen einem Terminus und einem anderen Terminus oder einem gemeinsprachlichen Ausdruck herzustellen. Selbst bei Termini, die auf den ersten Blick als willkürlich erscheinen, lassen sich durchaus Analogien feststellen, die zwar nicht unbedingt sehr reichhaltig sein müssen, die aber dennoch die Bezeichnung motivieren. Wir betrachten einen Ausdruck aus der Physik des 20. Jahrhunderts, nämlich sog. *quarks*. Der Terminus wird in der Elementarteilchenphysik zur Bezeichnung bestimmter Bausteine von z. B. Protonen und Neutronen verwendet und wurde dem Roman *Finnegan's Wake* von James Joyce entnommen. Man mag ihn durchaus als „whimsical term" (Raad 1989: 134) oder als „fantasy metaphor" (Pulaczewska 1999: 218) bezeichnen, zumal dem Ausdruck bei Joyce kaum ein semantischer Gehalt zugewiesen werden kann. Eine minimale Analogie und damit eine Motivation läßt sich aber dennoch ausmachen: Sowohl bei Joyce als auch in der Physik treten „quarks" in Dreiergruppen auf. In unseren Beispielen lassen sich solche Analogien, wie gesehen, sehr häufig ausmachen, besonders dann, wenn Analogien zwischen verschiedenen wissenschaftlichen Gebieten vorliegen. Wenn die fachliche Bedeutung vorwiegend von der Gemeinsprache ausgeht, liegt ebenfalls eine semantische Motivation vor, denn die definitorische Bedeutung ist dann zumeist eine mathematische Interpretation der systematischen, wie etwa das Beispiel *Windung* von Gentilhomme zeigt (Kap. 5.6).

Wir können also zusammenfassen, daß die fachlichen Ausdrücke allesamt an eine gemeinsprachliche oder eine fachliche Bedeutung anknüpfen. Dieser Punkt wird in der *Encyclopédie* durchaus anerkannt, denn direkt an das zu Beginn dieses Absatzes gegebene Zitat schließt folgende Bemerkung an: „Cependant il faut autant qu'il est possible se conformer à l'usage de la langue & des savans". Auch die Mathematik entzieht sich dem nicht.

2. Die Rolle des Kontextes. Der „Kontext" unseres Modells (Kap. 5.7) stellt eine wichtige Komponente wissenschaftlicher Begriffsbildung dar, die sehr häufig mathematisch, d. h. inbesondere fachlich geprägt ist. Mathematische Probleme etwa stellen einen wichtigen Auslöser für die Bildung von Begriffen und sogar für die Entwicklung ganzer Theorien dar. Diese Art von Auslöser erscheint uns typisch für Wissenschaftssprachen, während in der Gemeinsprache vermutlich andere Arten von Auslösern eine größere Rolle spielen und auch eine größere Vielfalt von Auslösern in Frage kommt.

Der Kontext tritt sehr häufig in eine Wechselwirkung mit dem lexikalischen Inventar (obere Komponente des Modells). So läßt sich, ausgehend von einem neu zu bezeichnenden Objekt, ein Bezeichnungsbedarf nur dann feststellen, wenn man das Inventar gleichzeitig heranzieht, d. h. das Fehlen einer Bezeichnung läßt sich nicht am Kontext allein erkennen. Der Kontext kann das lexikalische Inventar sowie die zu gebenden Definitionen auch einschränken, z. B. durch die angewandten Methoden. Die Dedekindsche Methode, Mengen von Objekten statt einzelner Objekte zu betrachten, macht es erforderlich, entsprechende Bezeichnungen zu wählen, die mit dem semantischen Merkmal 'Zusammenfassung von Objekten' verträglich sind. Der arithmetische Kontext, in dem Dedekind arbeitete, hat auch die ursprüngliche Definition von *Körper* dahingehend beeinflußt, daß sie an komplexe Zahlen gebunden war (und damit auch nur unendliche Körper umfaßte) und nicht in der heute üblichen Allgemeinheit formuliert wurde (Kap. 10.9).

3. Kontext und Fundierung. Wir wollen unsere Anmerkungen zu Lakoff und Núñez (2000) noch aus Sicht der wissenschaftlichen Begriffsbildung ergänzen. Die fast ausschließliche Betrachtung kognitiver Mechanismen blendet kontextuelle Aspekte praktisch vollständig aus, und Erklärungen für die Entstehung abstrakter mathematischer Begriffe mittels Fundierungsmetaphern erscheinen uns deswegen kaum plausibel. In diese Richtung gehende Kritik wird auch in Rezensionen zu der Arbeit vorgebracht: „[Lakoff und Núñez, H. B.] seem to think that this creative aspect of mathematics [inventing, creating, or discovering new mathematical ideas, H. B.] is nothing more than a matter of the clever application of conceptual metaphors" (Voorhees 2004: 85). Sehr deutlich wurde dies am Beispiel der Abgeschlossenheit (Kap. 9.5) und damit auch des Gruppenbegriffs, deren Bildung sich nicht durch alleinigen Rückgriff auf alltägliche Erfahrung verstehen läßt. Die Alltagserfahrung wird bei der Bildung wissenschaftlicher Begriffe durch die wissenschaftliche Erfahrung überlagert, die eine wesentlich größere Rolle spielt (was nicht bedeuten soll, daß die alltägliche Erfahrung überhaupt keine Rolle in der Wissenschaft spielt). Die ahistorische Sichtweise von Lakoff und Núñez liefert insgesamt nur begrenzte Erklärungen für sprachliche Erscheinungen in der Wissenschaftssprache. Dies trifft aber auch auf die Gemeinsprache zu, denn auch dort gibt es Traditionen, die bei linguistischen Erklärungen zu berücksichtigen sind.

4. Die Rolle des sprachlichen Inventars. Der fachliche Charakter, den wir in diesem Kapitel bereits mehrfach angesprochen haben, ist auch ein Kennzeichen des lexikalischen Inventars, das bei der Begriffsbildung herangezogen wird. Es werden Bezeichnungen, Prädikationen und teilweise auch Definitionen aus verschiedenen Wissenschaftssprachen übernommen. Bei Metaphern bzw. Analogien werden Definitionen am ehesten dann übernommen bzw. an den betrachteten Gegenstand angepaßt, wenn der Bildspender ebenfalls zur Mathematik gehört. Dies gilt z. B. für die Zerlegungsmetaphorik, bei der Definitionen aus dem Bereich der ganzen Zahlen analogisiert werden. Beim Terminus *isomorphisme* hingegen, der aus der Kristallographie entlehnt wurde, wird auch keine Definition übernommen (Kap. 9.7). Gründe für die Nicht-Übertragbarkeit einer Definition können darin bestehen, daß es sich um unterschiedlich geartete Gegenstände handelt oder um Wissenschaften, die sich voneinander hinreichend stark unterscheiden.

5. Sprachliche Funktionen des Terminus und seine Stellung in der Theorie. Eine weitere Komponente unseres Modells beinhaltet die sprachlichen Funktionen und die spezielle Theorie. Wir sind davon ausgegangen, daß die Funktionen und die Stellung des zu bildenden Begriffs in der Theorie „antizipiert" werden. Auf die referentielle Funktion der Sprache, die einen zentralen Bestandteil unserer Definition von „Wissenschaftssprache" ausmacht, sind wir an einigen Stellen in dieser Auswertung bereits eingegangen (Kap. 11.6.1). In bezug auf die Bildung von Termini wollen wir noch hinzufügen, daß sie Bezeichnungen begünstigt, die das Wesen des betrachteten Objektes ausdrücken. Dies kann man damit erklären, daß die Eigenschaften des Referenten durch Fokussierung auf den Gegenstand selbst und durch das Interesse an seiner klaren und eindeutigen Identifizierung an Bedeutung gewinnen.

Die Stellung in der speziellen Theorie stellt bei mathematischen Analogien ein zentrales Motiv für die Wahl von Bezeichnungen sowie zu deren Rechtfertigung dar (Kap. 9). Bei Grundbegriffen wie „Körper", die sich besonders durch ihren hohen Abstraktionsgrad auszeichnen, ist zudem ein ikonisches Prinzip bei der wissenschaftlichen Begriffsbildung zu berücksichtigen, nach dem die geringe Zahl semantischer Merkmale mit einer kurzen sprachlichen Form einhergeht (Kap. 5.7, 10.9).

11.6.3 Semantischer Wandel

In unserer Diskussion semantischem Wandels (Kap. 4) haben wir darauf hingewiesen, daß in den einschlägigen Darstellungen kaum Beispiele aus Fach- oder Wissenschaftssprachen erörtert werden. Aus diesem Grunde wollen wir an dieser Stelle unsere Ergebnisse in bezug auf den Wandel von Bedeutungen diskutieren, insbesondere hinsichtlich deren Formen und Auslösern.

Vorweg sei daran erinnert, daß wissenschaftliche Termini als solche durch ihre Definiertheit semantisch starr sind. Die Tatsache, daß es gleichwohl semantischen Wandel in der Wissenschaftssprache gibt, beruht darauf, daß bestimmte Begriffe zwischen verschiedenen wissenschaftlichen Bereichen oder Teilbereichen ein- und derselben Wissenschaft übertragen werden können und dabei ihre Definition ändern.

1. Stetigkeit des Sprachwandels. Sprachwandel kann stetig sein im Sinne „allmählicher" semantischer Übergänge. Aus der historischen Semantik ist aber bekannt, und wir haben dafür in Kap. 4 Beispiele wie den Wandel von e. *bead* von ‘Gebet’ zu ‘Perle’ angegeben, daß sich Bedeutungen in nicht-kontinuierlichen Schritten verschieben können. In unseren Befunden ergibt sich ein etwas anderes Bild, denn drastische Verschiebungen („Sprünge") kommen nicht vor. Teilweise ist dies damit zu erklären, daß dadurch die heuristische Funktion der systematischen Bedeutung „untergraben" würde (Kap. 5.6) und damit auch die mathematische Intuition in die Irre geführt werden könnte, was kaum im Interesse einer Wissenschaft sein kann. Wir haben auch gesehen, daß Benennungen häufig so gewählt werden, daß sie das Wesen des zu bezeichnenden Objektes treffend zum Ausdruck bringen. Bei Benennungen, die auf diesem Motiv beruhen, sind starke semantische Verschiebungen ebenfalls nicht zu erwarten. Diese Erklärungen treffen vorwiegend (aber nicht unbedingt ausschließlich) auf Wissenschaftssprachen zu, so daß wir in den eher geringen semantischen Veränderungen ein Spezifikum der Wissenschaftssprachen sehen können. Es sei erwähnt, daß man eventuell eine heuristische Funktion auch in der Sprache der Dichtung erkennen mag, die ja auch zu Interpretationen und Fragen anregt und insofern unabgeschlossen ist (vgl. Kap. 3.3).

Wir haben soeben gesehen, daß die Abweichungen zwischen Ausgangs- und Zielbedeutung in unseren Beispielen gering sind. Bei semantischen Relationen wie Oppositionen zwischen verschiedenen Ausdrücken sind hingegen größere Unterschiede zwischen Gemeinsprache und Wissenschaftssprache möglich; auch dies ist aber nicht die Regel. Beim Adjektiv *schief* (Kap. 11) sahen wir z. B., daß der explizite oder implizite Gegensatz zwischen „gerade" und „schief" in den mit dem Adjektiv gebildeten Termini bestehen bleibt, d. h. die Opposition verhält sich wie in der Gemeinsprache. Ein Gegenbeispiel ist das topologische Begriffspaar „offen" und „abgeschlossen" (s. Kap. 3.5.1), bei dem sich die gemeinsprachliche Opposition nicht wie in der Mathematik verhält, da sich die Begriffe nicht gegenseitig ausschließen – eine Menge kann gleichzeitig offen und abgeschlossen sein.

2. Formen des semantischen Wandels. Bei der Untersuchung des semantischen Wandels in der mathematischen Fachsprache haben wir Kategorien herangezogen, die aus der historischen Semantik bekannt sind (Kap. 4.1.5). Zu solchen Formen des semantischen Wandels gehören Metaphern, Metonymien und Bedeutungserweiterungen bzw. -verengungen.

So konnten wir am Beispiel *schief* verschiedene Metonymien und Bedeutungserweiterungen bzw. -verengungen sowohl in der Gemeinsprache als auch in der Fachsprache erkennen. Der metaphorische Wandel ist jedoch in unseren Beispielen die weitaus häufigste Form. Ein prägnantes Beispiel ist der Dedekindsche Terminus *Körper*. Dieser wurde aufgrund mehrfacher Analogien gebildet (Kap. 10.4), ein Vorgang, der unseres Wissens in der Geschichtsforschung der Mathematik bisher nicht diskutiert wurde. Die Bildung von Ausdrücken aufgrund solcher mehrfacher Analogien ist kein Spezifikum der Wissenschaftssprache, sondern kommt auch in der Gemeinsprache vor: In der Etymologie werden solche Erscheinungen auch als *Kreuzung* oder *doppelte Etymologie* bezeichnet (Pisani 1975: 132, 133).

Die typischsten Fälle von semantischem Wandel in unserer Arbeit sind diejenigen, die nicht auf einfacher Ähnlichkeit, sondern auf Relationen beruhen, nämlich Analogien. Beispiele dafür sind die Übertragung des Ausdrucks *isomorphisme* aus der Kristallographie in die Algebra sowie die zahlreichen arithmetischen Termini, die wir in Kap. 9 und Kap. 10 diskutiert haben. Der relationale Charakter von Analogien hat gegenüber anderen Übertragungen den Vorteil, daß er nicht auf konkrete Ähnlichkeiten abhebt, die die Vergleichbarkeit prinzipiell (definitorisch) verschiedenartiger Bereiche verfehlen würden.

Es gibt daneben Beispiele für Benennungen, die in erster Linie aufgrund rein mathematischer Zusammenhänge erklärbar zu sein scheinen. Galois nannte eine Gruppe, die einer *équation irréductible* zugeordnet ist, *groupe irréductible* (Kap. 9.9). Es scheint sich dabei um eine Kürzung zu handeln, wie sie auch aus der Gemeinsprache gut bekannt ist. Die Benennung scheint auf der Grundlage dieser Zuordnung entstanden zu sein und nicht aufgrund der gemeinsprachlichen Bedeutung 'unzerlegbar' von *irréductible*. Das schließt allerdings nicht aus, daß der neue Begriff nicht mit der gemeinsprachlichen Bedeutung in Einklang zu bringen wäre, denn in der Tat ist eine *groupe irréductible* mathematisch unzerlegbar, wenn auch in einem anderen als in dem in Kap. 9 diskutierten Sinn.

Für eine Theorie des semantischen Wandels in Wissenschaftssprachen ergibt sich jedenfalls, daß wissenschaftliche Zusammenhänge als Grundlage für semantischen Wandel zu berücksichtigen sind. Dazu zählt insbesondere auch die definitorische Bedeutung, die die primäre Grundlage für eine Übertragung bilden kann. Ein Beispiel dafür stellt die Geschichte von *Körper* dar: Hausdorff (1914: 15) definiert einen Körper als ein System von Mengen, bei dem „Summe und Differenz von zwei Mengen wieder dem System angehört", was auf der Ebene der Definition exakt analog zur Definition von Zahlkörpern ist.[32] Semantische Merkmale im Sinne der systematischen Bedeutung von *Körper* sind hier sekundär.

3. Auslöser des semantischen Wandels. Die Auslöser für Bedeutungswandel, die aus der historischen Semantik bekannt sind, lassen sich zu unseren Beispielen ebenfalls recht gut in Beziehung setzen. Ein Beispiel für einen solchen Auslöser ist etwa der Bedarf an einer Bezeichnung für ein neues Objekt. Es ist allerdings zu berücksichtigen, daß es nicht in allen Fällen gelingt, einen eindeutigen Auslöser zu benennen, was nicht selten auch auf die Gemeinsprache zutrifft (Blank 1997: 376). Wir wollen die von Blank (1997: 375-404) genannten und für uns relevanten Auslöser kurz vorstellen und, soweit möglich, Beispiele aus unserer Arbeit angeben.

Die ersten beiden bei Blank genannten Auslöser, nämlich die Versprachlichung eines neuen bzw. eines abstrakten Konzepts, können wir zusammen behandeln. Beide Arten von Auslösern sind nicht immer klar voneinander zu trennen, wie auch Blank (1997: 379) einsieht. Die Versprachlichung neuer Konzepte ist sicher eines der zentralen Motive des semantischen Wandels in Fachsprachen, da ständig neue Begriffe gebildet werden, für die Bezeichnungen gefunden werden müssen. Diesen Auslöser können wir für zahlreiche der bei uns betrachteten Beispiele geltend machen. Das Beispiel *Körper* fällt eher in die zweite Kategorie der Versprachlichung eines abstrakten Konzepts, denn nach Blank (1997: 378) besteht der Unterschied zur ersten Kategorie darin, daß abstrakte Konzepte in seiner Terminologie „bereits zu unserer Lebenswelt und zu unserem Denken gehören". Dies trifft auf den Körperbegriff zu, denn Dedekind hatte vor der Prägung von *Körper* den Begriff bereits mit dem Ausdruck *rationales Gebiet* belegt. Wenn Blank (ibid.) hinzufügt, daß abstrakte Konzepte besonders durch Metaphern und Metonymien „kognitiv besser nachvollziehbar gemacht werden sollen", dann scheint uns dies allerdings auf *Körper* nur bedingt zuzutreffen; vielmehr bringt die Bezeichnung das Wesen des Objektes, z. B. daß es sich um ein organisches Ganzes handelt, wesentlich treffender zum Ausdruck. Desgleichen ist zu berücksichtigen, daß auch ikonische bzw. sprachökonomische Gründe eine Rolle beim Wechsel der Bezeichnung

[32] Hausdorff (1914: 14, Fn. 1) weist explizit darauf hin, daß er den Ausdruck der Theorie der algebraischen Zahlen entnommen habe.

gespielt haben könnten (Dedekind sprach davon, daß *rationales Gebiet* „weniger bequem“ sei). Wir gehen darauf weiter unten ein.

Der dritte bei Blank genannte Auslöser ist der sozio-ökonomische Wandel. Gemeint sind Wandel der konzeptuellen Struktur, die sich häufig, wie etwa bei Verwandtschaftsbezeichnungen, aus gesellschaftlichen Veränderungen ergeben (Blank 1997: 380). Wenn man von gesellschaftlichen Aspekten absieht und lediglich die konzeptuelle Struktur, d. h. in unserem Fall das begriffliche System einer Wissenschaft betrachtet, dann fällt mindestens eines unserer Beispiele ins Auge, nämlich die begriffliche Differenzierung von „prim“ und „irreduzibel“ (Kap. 9.9). Die Erkenntnis, daß sich der Primzahlbegriff auf manche Bereiche von Zahlen und andere mathematische Objekte nicht ohne weiteres übertragen läßt, da sonst die Analogie zum Fundamentalsatz der Arithmetik nicht vollständig erreicht werden kann, führte zu der genannten begrifflichen Differenzierung, die ihrerseits eine neue mathematische Bedeutung für *irreduzibel* zur Folge hatte.

Einen weiteren Auslöser für semantischen Wandel sieht Blank (1997: 390) darin, daß Sprecher ein Interesse daran haben, „für Gegenstände und Sachverhalte, auf die sie häufig referieren, über möglichst einfache sprachliche Zeichen zu verfügen“.[33] Wir haben bereits an einigen Stellen darauf hingewiesen, daß dieses ikonische Prinzip auch auf die Bezeichnungen für Grundbegriffe von Theorien zutreffen kann. Gerade diese Termini wie *groupe* oder *Körper* sind es, aus denen mittels morphologischer Verfahren neue Termini gebildet werden, die bei komplexem Grundwort ihrerseits entsprechend schwieriger zu handhaben sind.

Als letzten Auslöser betrachten wir die „emotionale Markierung eines Konzeptes“ (Blank 1997: 394) bzw. den teilweise ähnlichen Sperberschen Begriff der „Expansion“ (Kap. 9.9). Für unsere Beispiele wäre „Expansion“ so zu verstehen, daß z. B. bestimmte Analogien, etwa die Zerlegung, als besonders wichtig angesehen werden in dem Sinne, daß „Zerlegung“ als eine Form der Analyse in der wissenschaftlichen Praxis ein durchgängiges Interesse war und ist. In der Tat haben wir mehrfach festgestellt (Kap. 9, 10.8), daß diese Analogie eine starke „Triebfeder“ für die mathematische Forschung darstellt.

Insgesamt läßt sich sagen, daß die Begrifflichkeiten der historischen Semantik ein gutes Instrumentarium darstellen, anhand dessen sich auch der semantische Wandel in Fach- bzw. Wissenschaftssprachen erfassen läßt. Wir schließen daraus, daß es auch eine Wesensverwandtschaft zwischen semantischem Wandel in Gemein-

[33] Dieudonné (1982: 621) nennt als ein wichtiges Prinzip der Namensgebung bei Nicolas Bourbaki: „use words as short as possible“.

und Wissenschaftssprache gibt. Zu beachten ist dabei, daß in Fachsprachen neben der systematischen Bedeutung eine definitorische Bedeutung vorliegt, die bei den Formen und Auslösern semantischen Wandels berücksichtigt werden muß. Die weitere begriffliche Entwicklung, z. B. die genauere Herausarbeitung der Gruppenaxiome, ist dann ein Prozeß, der nicht allein mit linguistischen Mitteln untersuchbar ist. Dennoch kann die Linguistik auch hier Beiträge leisten, weil diese Entwicklung auch in Zusammenhang mit der Entwicklung der einzelnen „Rechenregeln" wie der Assoziativität steht und daher auch etwa in bezug auf die Entwicklung des Zahlbegriffs zu untersuchen wäre. Gleichzeitig könnte man dabei die heuristische Funktion unscharf definierter Begriffe untersuchen, denn der Gruppenbegriff war zunächst lediglich an die Abgeschlossenheit gebunden, und das, was man in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts als *Gruppe* bezeichnete, würde in vielen Fällen aus heutiger Sicht unter den Begriff der „Halbgruppe" fallen (s. z. B. Hofmann 1992: 47).[34]

4. Systembezogene Regelmäßigkeiten des semantischen Wandels. In Kap. 9.9 haben wir anhand arithmetischer bzw. algebraischer Terminologie einige Beispiele für Regelmäßigkeiten im semantischen Wandel diskutiert. Diese sind auch aus der Gemeinsprache gut bekannt und stellen daher keine Besonderheit von Wissenschaftssprachen dar. Wir haben in demselben Zusammenhang auch darauf aufmerksam gemacht, daß häufig nicht nur ein Ausdruck, sondern mehrere, semantisch miteinander zusammenhängende Ausdrücke von semantischem Wandel betroffen sind. Dies gilt besonders für semantische Veränderungen, die im Rahmen von Analogien stattfinden; letztere machen einen wichtigen Teilaspekt dieser Erscheinung aus. In Wissenschaftssprachen scheinen solche Regelmäßigkeiten stärker ausgeprägt zu sein als in der Gemeinsprache. Die Erklärung zumindest hinsichtlich dieses Teilaspektes ergibt sich aus obigen Anmerkungen zur größeren Systematizität von Analogien in Wissenschaftssprachen: Die Herstellung von Zusammenhängen ist gerade ein Anspruch der Wissenschaft.

11.7 Ausblick

Die vorliegende Untersuchung hat eine Reihe sehr verschiedenartiger Aspekte der Sprach- und Wissenschaftsgeschichte miteinander verknüpft. Es ist uns nicht gelungen, auf alle grundsätzlichen Fragen eine Antwort zu geben. Vielmehr sind

[34] Kretzenbacher (1991: 198) betont die heuristische Kraft solcher Definitionen am Beispiel des Cantorschen Mengenbegriffs.

Lücken deutlich geworden, aus denen wir nun Desiderate ableiten wollen.

11.7.1 Linguistische Desiderate

Wir haben in der Auswertung eine Reihe von Eigenschaften der Wissenschaftssprache genannt, die sie von der Gemeinsprache und Fachsprachen abhebt. Ein weiterer Unterschied besteht darin, daß sich in der Gemeinsprache der Schöpfer, also diejenige Person, die ein Wort in einer neuen Bedeutung verwendet, fast nie feststellen läßt: Semantisch-lexikalische Innovationen verlaufen im allgemeinen anonym. Das ist in der Wissenschaftssprache anders: Sie bietet einen methodischen Vorteil, denn die Wahrscheinlichkeit, den Schöpfer eines neuen Begriffs festzustellen, ist hier vergleichsweise hoch. Wir haben es in der Wissenschaftssprache mit einem in diesem Sinne kontrollierbaren Bereich zu tun, von dem ausgehend sich mehr über Sprache im allgemeinen erfahren ließe.

Das Problem der Unterscheidung zwischen Metaphern und Oberbegriffen in der Wissenschaftssprache betrifft alle in der Auswertung diskutierten Themen und ist aus diesem Grund weiterer Untersuchungen würdig. Ein Teilaspekt der Problematik betrifft auch das linguistische Konzept der *langue*. Das Beispiel der Übertragung des Körperbegriffs von Zahlen auf Funktionen, auf das wir in Kap. 10.8 und oben in der Auswertung (Kap. 11.6.1) eingegangen sind, legt eine „Perspektivität“ nahe. Ein vergleichbares Beispiel kann man darin sehen, daß etwa Metaphern nicht für alle Sprecher einer Sprache gleichermaßen „lebendig“ sein müssen. Wenn Begriffsbildung teilweise unterschiedliche Auffassungen eines Gegenstandsbereichs voraussetzt, dann ist das Konzept der *langue* von der Problematik betroffen, da es die Einheitlichkeit der Sprache bei ihren Benutzern annimmt. Bei weiteren Untersuchungen wäre das systematische Verhältnis zwischen Metaphern und Oberbegriff näher zu bestimmen, und aus wissenschaftshistorischer Sicht wäre eine weitere Frage, ob es Wissenschaftsstile gibt, die zu einer dieser beiden Denkstile neigen.

Auch wenn das Problem vermutlich typisch für Wissenschaftssprache ist, müßte überprüft werden, ob sich nicht auch in der Gemeinsprache ähnliche Erscheinungen nachweisen lassen. Es erscheint uns durchaus wahrscheinlich, daß es auch dort Fälle gibt, in denen unterschiedliche Sprecher z. B. die Beziehung zweier sprachlicher Ausdrücke als metaphorisch ansehen bzw. daß sie die durch die Bezeichnungen ausgedrückten Dinge oder Sachverhalte für „dasselbe“ halten. Träfe dies zu, so wäre wiederum festzustellen, ob davon bestimmte Bereiche betroffen sind.

Die Verschiedenheit der Bereiche (Kap. 3.2.2) stellt eine Voraussetzung für Metaphern oder Analogien dar. Sie ergibt sich in den Wissenschaften per Definition, denn aus unterschiedlichen Definitionen folgt die Verschiedenheit „automatisch“. Wenn nun zwei Bereiche in der Wissenschaft eindeutig verschieden sind, dann wirkt eine Übertragung wie ein „Sprung“ zwischen den involvierten Bereichen. Der Befund, daß sich in unseren Beispielen nur vergleichsweise geringe semantische Verschiebungen zeigen (Kap. 11.6.3), erscheint vor diesem Hintergrund paradox und bedarf weiterer Untersuchungen. Wir wollen diese Aussage etwas näher ausführen. Viele semantische Verschiebungen in der Gemeinsprache erscheinen sehr gering, etwa solche, die unter den Ullmannschen Begriff des „sprachlichen Konservatismus“ fallen. Ein Beispiel dafür ist die Bezeichnung *Schiff*, die auch dann beibehalten wurde, als Schiffe nicht mehr aus Holz, sondern aus Metall gebaut wurden (s. etwa Ullmann 1957: 212). Diese Verschiebung ist aus Sicht der historischen Semantik deswegen gering, weil Sprachbenutzer das Gefühl haben, Schiffe aus Holz und Schiffe aus Metall fallen unter denselben Begriff – es handelt sich in beiden Fällen um dasselbe. Derselbe Eindruck entsteht, wenn man den semantischen Wandel in der Wissenschaftssprache so betrachtet, wie wenn es sich um Wandel in der Gemeinsprache handelte. Betrachtet man dasselbe Phänomen jedoch aus Sicht der Wissenschaftssprache, dann stellt der Unterschied zwischen alter und neuer Bedeutung keinen „geringfügigen“ Unterschied mehr dar, sondern jede Verschiebung ließe sich als Sprung auffassen.

Die Metapherntheorie Lakoffscher Prägung (Kap. 3) ist unseres Erachtens hinsichtlich der Wissenschaftssprache, aber auch hinsichtlich der Gemeinsprache zu überdenken. Metaphern, die als unmittelbar erfahrungsbezogen ausgegeben werden, können sich bei genauerer Betrachtung als historisch tradiert erweisen. D. h., der Anteil der sinnlichen Erfahrung hat bei der Erklärung sprachlicher Phänomene einen geringeren Anteil als häufig angenommen wird. Dies könnte nicht nur auf die Behältnismetaphorik (Kap. 9.3) zutreffen – deren „great importance in mathematics“ Lakoff und Núñez (2000: 30) betonen –, sondern auch auf zahlreiche andere elementare konzeptuelle Metaphern wie etwa die „conduit metaphor“ (Reddy 1979).

In unseren Untersuchungen haben wir neben gemeinsprachlichen vor allen Dingen fachliche Quellen ausgemacht, insbesondere die Arithmetik (s. insbesondere Kap. 9). Schon in die Galoissche Begriffsbildung von „Untergruppe“ (*diviseur*) fließt eine elementare arithmetische Analogie ein (Kap. 9.3), die auch in ihrer Entwicklung aus der Perspektive der fachlichen Quellen untersuchbar wäre. Gemeint ist damit u. a., daß die elementaren Prädikationen, wie wir sie in Zusammenhang mit der Einführung des Gruppenbegriffs beschrieben haben (Kap. 9.9), im Verlauf des 19. Jahrhunderts durch geometrische Ausdrucksweisen ergänzt werden. So konnte man die Enthalten-Relation im doppelten Sinne erst in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts durch die geometrische Ausdrucksweise „liegt in" verbalisieren.[35] Ein weiteres Beispiel ist die geometrische Bezeichnung *Durchschnitt* für *größter gemeinsamer Teiler* (z. B. von Gruppen), die Weber (1899: 10) zufolge von Study eingeführt wurde.[36] Mit z. B. stilistischen Argumenten lassen sich solche Übertragungen nicht hinreichend erklären, denn dazu sind sie einerseits zu systematisch, andererseits finden sich zahlreiche mathematische Kommentare zu deren Funktionen. So hat für Study (1887: 201, Fn. 4) eine „der Geometrie entlehnten Redeweise unter anderen Vortheilen auch den, zur Darlegung eines solchen Zusammenhanges [d. h. eines bestimmten mathematischen Zusammenhangs in der Invariantentheorie, H. B.] nicht langathmiger Auseinandersetzungen zu bedürfen, sondern ihn ohne Weiteres ganz allein durch die gewählte Terminologie zur Evidenz zu bringen. Solchen Erleichterungen des Verständnisses, die zugleich eine Vertiefung des Gedankeninhalts der Theorie bedeuten, sollte man nicht aus dem Weg gehen".[37]

Solche Übertragungswege wären insgesamt systematisch hinsichtlich der Richtung der Übertragung zu untersuchen und dann in Zusammenhang mit sprachlichen Funktionen bzw. mit der Begriffsbildung zu deuten. So stellt sich bei Analogien bzw. Metaphern die Frage, was neben der Bezeichnung übernommen wird: Es ließe sich eventuell ein Kontinuum aufstellen, nach dem bei geringerer Entfernung der Bereiche tendenziell auch Definitionen übernommen werden, bei größerer Entfernung tendenziell nicht. Die Übertragungswege wären zudem hinsichtlich der Direktionalität zu untersuchen: Wenn etwa die Geometrie, wie Study sich in obigem Zitat ausdrückt, den Vorteil der „Evidenz" hat, dann stellt sie vermutlich häufiger als abstraktere Gebiete den Ausgangspunkt einer Übertragung dar, und möglicherweise ist die Übertragung zudem unidirektional.

Das Einbettungsproblem (Kap. 4.1.2) spielt beim Studium der Übertragungswege eine wichtige Rolle sowohl bei der Entstehung als auch bei der Verbreitung

[35] Ein früher Beleg in Zusammenhang mit Zahlen findet sich bei Dirichlet (1863: 202).

[36] Einen präzisen Verweis gibt Weber nicht.

[37] Study (ibid.) fügt dem noch hinzu, daß er in der Geometrie nicht nur ein „Hilfsmittel zur Verdeutlichung" sieht, sondern daß er auch die Übertragung geometrischer Schlußweisen meint. Er bezieht sich dabei nur auf die Invariantentheorie und ausdrücklich nicht auf die Analysis (vgl. dazu auch die Kommentare Dedekinds zur Geometrie in Kap. 3.5.2).

von Termini, wie wir z. B. an den unterschiedlichen Denkweisen Dedekinds und Kroneckers gesehen haben (Kap. 10) und wie es sicher auch auf ganze mathematische Schulen zutrifft. Die Frage, welche mathematischen Gebiete zu welcher Zeit und mit welchen Funktionen Expansions- bzw. Attraktionszentren (s. Kap. 9.9) sind, müßte zudem auch für die Wissenschaftsgeschichte der Mathematik interessant sein.[38] Die Linguistik kann dazu durchaus Beiträge leisten.

Anhand des Studiums solcher Übertragungswege ließen sich – eine größere Anzahl an Beispielen, als wir sie hier betrachten konnten, vorausgesetzt – weitere historisch-semantische Fragen untersuchen. Die Anwendbarkeit der in der historischen Semantik entwickelten Begrifflichkeit (Kap. 4) kann dabei empirisch überprüft werden. Zu diesen historisch-semantischen Fragen gehört die Frage nach der Wichtigkeit der definitorischen Bedeutung im Sinne Gentilhommes (Kap. 5.6) beim semantischen Wandel ebenso wie die nach etwaigen systematischen Beziehungen z. B. zwischen gemeinsprachlicher und spezieller mathematischer Bedeutung. Meillet hatte die Vermutung aufgestellt (s. Kap. 4.1.2), daß sich beim Übergang von der Gemeinsprache in eine Subsprache Bedeutungen verengen und sich bei umgekehrter Richtung erweitern.[39] Dabei sind mathematische Einflüsse auf den gemeinsprachlichen Wortschatz vermutlich eher im elementaren Bereich zu suchen (man denke an Ausdrucksweisen wie „auf einen Nenner kommen“).[40]

Die einzelnen Komponenten unseres Modells der wissenschaftlichen Begriffsbildung lassen sich schließlich hinsichtlich möglicher Wechselwirkungen und Gewichtungen untersuchen. So haben wir auf Beschränkungen aufmerksam gemacht, die der Kontext z. B. auf das lexikalische Inventar ausüben kann. Gleichzeitig werden Bezeichnungen oft so gewählt, daß sie das Wesen des Objektes bezeichnen, was wir anhand der sprachlichen Funktionen erklärt haben. Es kann daher zu „Konflikten“ zwischen den Komponenten als Faktoren der Begriffsbildung kommen, die ein größeres oder geringeres Gewicht bei der Wahl des Terminus haben können und die möglicherweise auch zusammenwirken. Die unterschiedliche Gewichtung verschiedener Komponenten wirkt also als ein Art Beschränkung. Die

[38] Zumal das Thema „Analogien“ aus Sicht der Mathematik wohlbekannt ist, aber in der Geschichtsschreibung z. B. bei Wußing (1969) und anderen älteren Darstellungen nicht sehr häufig vorkommt. Das Thema wird vorwiegend in neueren Arbeiten behandelt, z. B. bei Benis-Sinaceur (2000) und Knobloch (2000).

[39] Zur Kritik daran s. Blank (1997: 352f.).

[40] Eine neuere Untersuchung zu fachsprachlichen Ausdrücken und deren Übergang in die Gemeinsprache (nicht am Beispiel der Mathematik) aus Sicht der Terminologieforschung ist Meyer - Mackintosh (2000).

Untersuchung dieses Problemkreises sehen wir als einen Beitrag zum Beschränkungsproblem (Kap. 4.1.2), das eine zentrale Aufgabe linguistischer Forschung bleibt.

11.7.2 Ein lexikographisches Desiderat

Die Lexikographie der Wissenschaftssprachen stellt Arbeitsmittel für die historische Forschung zur Verfügung, die man gleichzeitig auch als Ergebnis geschichtlicher Untersuchungen auffassen kann.

Auf ein wichtiges Desiderat der mathematisch-historischen Forschung hat Felix Müller schon im 19. Jahrhundert hingewiesen:

> Die mathematisch-historische Forschung, welche in den letzten Jahrzehnten einen großartigen Aufschwung gewonnen hat, giebt uns auch über die Entstehung der mathematischen Kunstausdrücke mannigfache Aufschlüsse. Die bekannten mathematischen Wörterbücher genügen in dieser Hinsicht den heutigen Ansprüchen der Wissenschaft nicht mehr (F. Müller 1887: 4).

Daher fordert er „die Herstellung eines neuen mathematischen Wörterbuches“ (Müller 1887: 5), welches „eine systematisch geordnete Übersicht über die bekanntesten älteren und neueren mathematischen Kunstausdrücke zu geben versucht, unter besonderer Berücksichtigung ihrer historischen Entwicklung, ihrer Etymologie und ihrer Bedeutung“ (Müller 1887: 4).

Diese Forderung ist, von einigen Ansätzen abgesehen, bisher nicht eingelöst worden. So ist es z. B. nicht möglich, in einem einzigen Wörterbuch nachzuschlagen, wann etwa der Terminus *Schiefkörper* zum ersten Mal benutzt wurde, wer den Ausdruck geprägt hat, und was das Benennungsmotiv ist. Semantische Entwicklungen werden in den meisten Nachschlagewerken, sofern sie fachsprachliche Ausdrücke überhaupt enthalten, kaum nachvollzogen. Auch Entlehnungen werden bisher kaum systematisch in die vorliegenden Nachschlagewerke einbezogen.

Die Erstellung eines historischen mathematischen Wörterbuches ist zweifellos eine sehr komplexe Aufgabe. Wir wollen hier keinen Plan für ein solches Wörterbuch entwerfen, sondern statt dessen auf potentielle Nutzergruppen hinweisen – ein Ansatzpunkt, der in der Lexikographie in den letzten Jahren zunehmende Bedeutung erlangt hat (s. etwa Béjoint 2000: 140-168). In Frage kommt hier zunächst ein linguistisch bzw. terminologisch interessiertes Publikum, das in einem entsprechenden Wörterbuch eine verläßliche Grundlage für semantische Forschungen verschiedener Art sehen kann. Eine zweite Hauptzielgruppe läßt sich in den Personen sehen, die sich professionell mit der Erforschung der Geschichte der Mathematik befassen (Wissenschaftshistoriker) und sich für die sprachliche Einbettung ideengeschichtlicher Forschung interessieren. Dazu zählt weiter eine dritte Gruppe aller derjenigen, die sich eher am Rande für die Geschichte der Mathematik interessieren. Dazu zählen Mathematiker, Mathematiklehrer und Studierende. Daß von Seiten dieser Zielgruppen ein Interesse an terminologischen und sprachlichen Fragen vorhanden ist, zeigen die zahlreichen Beiträge zu diesen Fragen in unterschiedlichen Diskussionsforen (s. Kap. 5.8.4). Die entsprechenden Diskussionsbeiträge zeigen gleichzeitig, daß den Beteiligten linguistisch fundierte und präzise Angaben zumeist nicht zur Verfügung stehen. Es besteht also einerseits ein Bedarf an solchen Angaben, die bisher nicht ohne gründliches Quellenstudium zu finden sind; andererseits könnte ein entsprechendes Nachschlagewerk das Bewußtsein für die sprachliche Fundierung mathematischer Forschung erhöhen. Dies erscheint u. a. deswegen sinnvoll, weil mit der Wahl sprachlicher Ausdrücke und Ausdrucksweisen auch ontologische Kommentare und mathematisch-philosophische Annahmen verbunden sein können – man denke etwa an die verschiedenen Ausdrücke für die reellen und komplexen Zahlen; derartige sprachliche Aspekte werden in historischen Arbeiten jedoch kaum berücksichtigt. Die Materialbasis für ein solches Wörterbuch wird derzeit im Rahmen einer retrospektiven Digitalisierung kontinuierlich verbessert. Besonders nützlich sind dabei die Versuche, die elektronische Volltextsuchen ermöglichen.

Die in dieser Arbeit untersuchten Textstellen zeigen darüber hinaus, daß sich in den großen historischen Wörterbüchern wie dem OED zahlreiche Fachausdrücke vordatieren lassen. Semantische Informationen sind nicht selten unzureichend – aus lexikographischer, nicht mathematischer Sicht –, und die semantische Organisation von Lexikoneinträgen ist verbesserungsfähig.

* * *

Der interdisziplinäre Ansatz dieser Arbeit scheint uns für die involvierten Disziplinen ertragreich zu sein: Für die Linguistik lassen sich Erkenntnisse über wissenschaftliche Begriffsbildung, über semantischen Wandel und über die Spezifik der Fachsprachen als funktionaler Variante der Gesamtsprache mit spezifischen Eigenschaften gewinnen. Die Wissenschaftsgeschichte der Mathematik kann davon profitieren, weil sich die Bedeutung von Sprache für die Darstellung, die Fragestellungen und die Heuristik einer Wissenschaft besser verstehen läßt. Dabei entsteht schließlich auch ein praktischer Ertrag: Die Lexikographie der Wissenschaftssprachen kann von entsprechenden Arbeiten profitieren und gleichzeitig den Zugang zu diesen Fragestellungen unterstützen.

Literatur

Wörterbücher und Nachschlagewerke

A Dictionary of Selected Synonyms in the Principal Indo-European Languages. Ed. Carl Darling Buck. Chicago: Chicago University Press, 1949

Battaglia, Salvatore, 1961ff.: *Grande dizionario della lingua italiana.* Torino: Unione Tipogr.

Chantraine, Pierre, 1999: *Dictionnaire étymologique de la langue grecque.* Nouvelle édition avec suppléments. Paris: Klingsieck

Corneille, Thomas, 1694: *Dictionnaire des arts et des sciences.* Paris: Coignard

Dictionnaire de l'Académie françoise. Paris: Coignard, 1694

Dictionnaire de l'Académie françoise. Quatriéme édition. Paris: Brunet, 1762

Dijksterhuis, E. J., van der Wielen, W., 1948: *Vreemde Woorden in de Wiskunde.* Groningen: Noordhoff

Dingeldey, Hugo, 1910: *Etymologisches Fachwörterbuch zur Mathematik, Physik, Chemie und Mineralogie.* Breslau: Hirt

Duden. Deutsches Universalwörterbuch. Herausgegeben vom Wissenschaftlichen Rat der Dudenredaktion. 3., völlig neu bearb. und erw. Auflage. Mannheim et al.: Dudenverlag, 1996

Encyclopædia Britannica; or, a Dictionary of Arts and Sciences Compiled upon a New Plan. [...]. By a Society of Gentlemen in Scotland. In Three Volumes. Edinburgh: Macfarquhar, 1771

Encyclopédie, ou Dictionnaire raisonné des arts et des métiers [...]. Nouvelle impression en facsimilé de la première édition de 1751-1780. 35 volumes. Stuttgart, Bad Cannstadt: Frommann-Holzboog, 1966

Französisches etymologisches Wörterbuch. Ed. Walter von Wartburg. Eine Darstellung des galloromanischen Wortschatzes. Tübingen: J. C. B. Mohr, 1922-1978

Furetière, Antoine, 1690: *Dictionnaire universel, contenant generalement tous les mots françois tant vieux que modernes* [...]. I-III. La Haye, Rotterdam: Arnout et Reinier Leers

Harris, John, 1736: *Lexicon Technicum or, An Universal English Dictionary of Arts and Sciences [...].* 5th ed. London: Walthoe et al. Mikrofiche-Ausgabe Erlangen: Fischer (= Archiv der europäischen Lexikographie. Abt. 1, Enzyklopädien 41)

Hutton, Charles, 1795/96: *A Mathematical and Philosophical Dictionary* [...]. London: Johnson, Robinson

Indogermanisches etymologisches Wörterbuch. Ed. Julius Pokorny. 2 Bde. Bern, Stuttgart: Francke, 1989

Kluge. *Etymologisches Wörterbuch der deutschen Sprache.* Bearbeitet von Elmar Seebold. 23., erweiterte Auflage. Berlin et al.: Walter de Gruyter, 1989

Klügel, Georg Simon, 1803-1847: *Mathematisches Wörterbuch, oder Erklärung der Begriffe, Lehrsätze, Aufgaben der Mathematik, I. Abt., Reine Mathematik, I-IV.* Fortgesetzt von Carl. Brud. Mollweide, beendigt von Johann August Grunert, Bd. V, Leipzig 1831. Supplemente von Joh. Aug. Grunert, I-II, Leipzig 1833-1836. 5 Bde. und 4 Supplementbände. Leipzig: Schwickert

Lewis & Short. *A Latin Dictionary.* Founded on Andrews' Edition of Freund's Latin Dictionary. Revised, Enlarged and in Great Part Rewritten by Charlton T. Lewis. Oxford: Clarendon, 1991

Liddell & Scott. *A Greek-English Lexicon.* Compiled by Henry George Liddell and Robert Scott. Revised and augmented throughout by Sir Henry Stuart Jones [...]. Oxford: Clarendon, 1985

Littré, Emil, 1863-1867: *Dictionnaire de la langue française.* 4 vols. + Suppl. 1877. Paris

Marzel, Heinrich, 1943: *Wörterbuch der deutschen Pflanzennamen.* Band 1. Leipzig: S. Hirzel

Middle English Dictionary. Ed. Hans Kurath. Ann Arbor: University of Michigan Press, 1952ff.

Moxon, Joseph, 1701: *Mathematicks made easie or, a compleat Mathematical Dictionary* [...]. London: Hawes

Mugler, Charles, 1958/59: *Dictionnaire historique de la terminologie géométrique des Grecs* (= Études et commentaires 28/29). Paris: Klingensieck

Müller, Felix, 1900: *Mathematisches Vokabularium.* Französisch-Deutsch und Deutsch-Französisch. Enthaltend die Kunstausdrücke aus der reinen und angewandten Mathematik. Leipzig: Teubner

Oxford Latin Dictionary. Ed. P. G. Glare. Oxford: Clarendon Press, 1969-82

Ozanam, Jaques, 1690: *Dictionnaire mathematique, ou idée generale des Mathematiques.* Paris: Etienne Michallet

Ralphson, Joseph, 1702: *A Mathematical Dictionary or, a Compendious Explication of all Mathematical Terms. Abridg'd from Monsieur Ozanam, and Others.* London: Nicholson

Rey, Alain, et al., 1998: *Dictionnaire historique de la langue française* [...]. 3 vols. Paris: Dictionnaires le Robert

Ritter, Joachim (ed.), 1971ff.: *Historisches Wörterbuch der Philosophie.* Völlig neubearbeitete Ausgabe des „Wörterbuchs der philosophischen Begriffe" von Rudolf Eisler. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft

Schirmer, Alfred, 1912: *Der Wortschatz der Mathematik nach Alter und Herkunft untersucht* (= Zeitschrift für deutsche Wortforschung. Beiheft zum vierzehnten Band). Straßburg: Trübner

Schwarzman, Steven, 1994: *The Words of Mathematics.* An etymological dictionary of mathematical terms used in English. Washington: Mathematical Association of America

The Oxford English Dictionary on Historical Priniples. Second edition. Prepared by J. A. Simpson and E. S. C. Weiner. Oxford: Clarendon Press, 1989

Thesaurus Linguae Latinae, edd. A. Leski, V. Pöschl et al., i-ix ff. Leipzig: Teubner, 1900ff.; Stuttgart: Teubner, 1991ff.; München: Saur, 2000ff.

Trésor de la langue française. Dictionnaire de la langue du XIXe et du XXe siècle (1789-1960). 16 vols. Paris: CNRS, 1971-1994

Trübners deutsches Wörterbuch. Im Auftrag der Arbeitsgemeinschaft der deutschen Wortforschung herausgegeben von Alfred Götze. 8 Bde. Berlin: de Gruyter, 1939-57

Walde, A. - Hofmann, J. B., 1982: *Lateinisches etymologisches Wörterbuch* 1-3 (= Indogermanische Bibliothek). Heidelberg: Carl Winter Universitätsverlag

Wolff, Christian, 1716: *Mathematisches Lexicon* [...]. Leipzig: Joh. Friedrich Gleditschens seel. Sohn. Zitiert nach: ders., *Mathematisches Lexicon.* Herausgegeben und bearbeitet von J. E. Hofmann (= Gesammelte Werke. I. Abteilung. Deutsche Schriften. Band 11). Hildesheim, New York: Olms, 1978

Woordenboek der Nederlandsche Taal. 's-Gravenhage et al.: Nijhoff et al., 1882-1998

Zedler. *Grosses vollständiges Universal Lexicon Aller Wissenschafften und Künste.* Bde. 1-64. Suppl.-Bde. 1-4. Halle/S., Leipzig

Primärliteratur

Abbati, Pietro, 1803: Lettera di Pietro Abbati Modenese al socio Paolo Ruffini da questio presentata il di 16 dicembre 1802. *Memoire di matematica e di fisica della società italiana delle scienze* 10.2, 385-409

Abel, Niels Hendrik, 1824: Mémoire sur les équations algébriques, ou l'on démontre l'impossibilité de la résolution de l'équation générale du cinquième degré. Christiania: Grøndahl. Zitiert nach: Abel 1992, 28-33

Abel, Niels Hendrik, 1826: Beweis der Unmöglichkeit algebraische Gleichungen von höheren Graden als dem vierten allgemein aufzulösen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 1, 65-84

Abel, Niels Hendrik, 1829a: Mémoire sur une classe particulière d'équations résolubles algébriquement. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 4, 131-156. In: Abel 1992, 478-507

Abel, Niels Hendrik, 1829b: Précis d'une théorie des fonctions elliptiques. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 4, 236-277, 309-438. In: Abel 1992, 518-609

Abel, Niels Hendrik, 1992: *Œuvres complètes.* Deuxième édition. Tome I. Sceaux: Editions Jacques Gabay

Abraham, Max, 1901: Geometrische Grundbegriffe. *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften.* Bd. IV.3. Leipzig: Teubner, 3-47

Aristoteles, 1966: *Metaphysik.* Übersetzt von Hermann Bonitz (ed. Wellmann). Mit Gliederungen, Registern und Bibliographie. Herausgegeben von Héctor Carvallo und Ernesto Grassi (= Griechische Literatur 10). Hamburg: Rowohlt

Aristoteles, 1980: *Rhetorik*. Übersetzt von Franz G. Sieveke. München: Fink

Aristoteles, 1982: *Poetik*. Griechisch/Deutsch. Übersetzt und herausgegeben von Manfred Fuhrmann. Stuttgart: Reclam

Artin, Emil, 1927: Über einen Satz von Herrn J. H. Maclagan Wedderburn. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg* 5, 245-250. Zitiert nach: Artin 1965, 301-307

Artin, Emil, 1965: *Collected Papers*. Edited by Serge Lang, John T. Tate. New York et al.: Springer

Bachmann, Paul, 1892: *Zahlentheorie*. Versuch einer Gesammtdarstellung dieser Wissenschaft in ihren Haupttheilen. Erster Theil. Die Elemente der Zahlentheorie. Leipzig: Teubner

Baltzer, Richard, 1857: *Theorie und Anwendung der Determinanten* mit Beziehung auf die Originalquellen [...]. Leipzig: Hirzel

Bertrand, Joseph, 1851: *Traité élémentaire d'algèbre*. Paris: Hachette

Betti, Enrico, 1851a: Sopra la risolubiltà radicali delle equazioni algebriche irrudittibili di grado primo. *Annali di Szienze matematiche e fisiche* 2, 5-19. Zitiert nach: Betti 1903, 17-27

Betti, Enrico, 1851b: Un teorema sulle risolventi delle equazioni risolobuli per radicali. *Annali di Szienze matematiche e fisiche* 2, 102-103. Zitiert nach: Betti 1903, 28-29

Betti, Enrico, 1852: Sulla risoluzione delle equazioni algebriche. *Annali di Szienze matematiche e fisiche* 3, 49-115. Zitiert nach: Betti 1903, 31-80

Betti, Enrico, 1903: *Opere matematiche*. Pubblicate per cura della R. Academica de' Lincei. Tomo primo. Milano: Ulrico Hoepli

Bolza, Oskar, 1891: On the theory of substitution-groups and its applications to algebraic equations. *American Journal of Mathematics* 13, 59-144

Bolzano, Bernard, 1851: *Paradoxien des Unendlichen*. Leipzig: Reclam

Bonnet, Charles de, 1755: *Essai de psychologie* [...]. London [ohne Verlag]

Boole, George, 1847: *The Mathematical Analysis of Logic*. Being an Essay Towards a Calculus of Deductive Reasoning. Macmillan, Barclay, and Macmillan: Cambridge/George Bell: London; repr. Basil Blackwell: Oxford 1951

Boole, George, 1854: *An Investigation into the Laws of Thought on which are founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities*. London: Macmillan

Brauer, Richard, 1932: Über die algebraische Struktur von Schiefkörpern. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 166.4, 103-252

Bravais, Auguste, 1849: Mémoire sur les polyèdres de forme symétrique. *Journal de mathématiques pures et appliquées* 14, 141-180

Bravais, Auguste, 1850: Mémoire sur les systèmes des points distribuées régulièrement sur un plan ou dans l'espace. *Journal de l'École Polytechnique* 19, 1-128

Bravais, Auguste, 1851: Études cristallographiques. *Journal de l'École Polytechnique* 20, 101-278

Burnside, William Snow, 1897: *Theory of Groups of Finite Order*. Cambridge: CUP

Cantor, Georg, 1962: *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts* [...]. Herausgegeben von Ernst Zermelo. Nebst einem Lebenslauf von Adolf Fraenkel. Hildesheim: Olms

Cartan, Elie, 1893a: Sur la structure des groupes simples finis et continues. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* 116, 784-786. Zitiert nach: Cartan 1952, 99-101

Cartan, Elie, 1893b: Sur la structure des groupes finis et continues. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* 116, 962-964. Zitiert nach: Cartan 1952, 99-101

Cartan, Elie, 1894: Sur la structure des groupes de transformations finis et continues. Zitiert nach: Cartan 1952, 137-287

Cartan, Elie, 1952: *Œuvres complètes*. Partie I: Groupes de Lie. Volume 1. Paris

Cauchy, Augustin L., 1815a: Sur le nombre des valeurs qu'une fonction peut acquérir, lorsqu'on y permute de toutes les manières possibles les quantités qu'elles renferment. *Journal de l'École Polytechnique* 10, 1-28. Zitiert nach: Cauchy 1905, 64-90

Cauchy, Augustin L., 1815b: Sur les fonctions qui ne peuvent obtenir que deux valeurs égales et de signes contraires par suite des transpositions opérées entre les variables qu'elles renferment. *Journal de l'École Polytechnique* 10, 29-112. Zitiert nach: Cauchy 1905, 91-169

Cauchy, Augustin L., 1844: Mémoire sur les arrangements qui l'on peut former avec des lettres données, et sur les permutations ou substitutions à l'aide desquelles on passe d'un arrangement à un autre. *Exercises d'analyse et de physique mathématique* 3, 151-252. Zitiert nach: Cauchy 1932, 171-282

Cauchy, Augustin L., 1845: Sur le nombre des valeurs égales ou inégales que peut acquérir une fonction de n variables indépendentes, quand on permute ces variables entre elles d'une manière quelconque. Zitiert nach: Cauchy 1896, 277-293

Cauchy, Augustin L., 1847a: Mémoire sur les racines des équations algébriques à coefficients entiers, et sur les polynômes radicaux. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* 24, 407-414

Cauchy, Augustin L., 1847b: Mémoire sur de nouvelles formules relatives à la théorie des polynômes radicaux, et sur le dernier théorème de Fermat. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* 24, 469-481

Cauchy, Augustin L., 1896: *Œuvres complètes d'Augustin Cauchy.* Publiées sous la direction de d'Académie des Sciences [...]. Série 1, Tome IX. Paris: Gauthier-Villars

Cauchy, Augustin L., 1905: *Œuvres complètes d'Augustin Cauchy.* Publiées sous la direction de d'Académie des Sciences [...]. Série 2, Tome I. Paris: Gauthier-Villars

Cauchy, Augustin L., 1932: *Œuvres complètes d'Augustin Cauchy.* Publiées sous la direction de d'Académie des Sciences [...]. Série 2, Tome XIII. Paris: Gauthier-Villars

Cayley, Arthur, 1846: Sur quelques propriétés des déterminants gauches. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 32, 119-123. Zitiert nach: Cayley 1963: I, 332-336

Cayley, Arthur, 1847: Sur les déterminants gauches. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 37, 93-96. Zitiert nach: Cayley 1963: I, 410-413

Cayley, Arthur, 1854a: On the theory of groups, as depending on the symbolic equation $\theta^n = 1$. *Philosophical Magazine* 7, 40-47. Zitiert nach: Cayley 1963: II, 123-130

Cayley, Arthur, 1854b: On the theory of groups, as depending on the symbolic equation $\theta^n = 1$. Second part. *Philosophical Magazine* 7, 408-479. Zitiert nach: Cayley 1963: II, 131-132

Cayley, Arthur, 1858: A Memoir on the theory of matrices. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 147, 17-37. Zitiert nach: Cayley 1963: II, 475-496

Cayley, Arthur, 1859: On the theory of groups, as depending on the symbolic equation $\theta^n = 1$. Third part. *Philosophical Magazine* 18, 34-37. Zitiert nach: Cayley 1963: IV, 88-91

Cayley, Arthur, 1860: Mathematics, recent terminology in. *English Cyclopædia* V, 534-542. Zitiert nach: Cayley 1963: IV, 594-608

Cayley, Arthur, 1867: An eighth memoir upon quantics. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 157, 513-554. Zitiert nach: Cayley 1963: VI, 147-608

Cayley, Arthur, 1878a: On the theory of groups. *Proceedings of the London Mathematical Society* 9, 126-133. Zitiert nach: Cayley 1963: X, 324-330

Cayley, Arthur, 1878b: A theorem on groups. *Mathematische Annalen* 13, 561-565. Zitiert nach: Cayley 1963: X, 149-152

Cayley, Arthur, 1878c: The theory of groups. *American Journal of Mathematics* 1, 50-52. Zitiert nach: Cayley 1963: X, 401-403

Cayley, Arthur, 1878d: The theory of groups; graphical representation. *American Journal of Mathematics* 1, 174-176. Zitiert nach: Cayley 1963: X, 403-405

Cayley, Arthur, 1887: On multiple algebra. *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics* 22, 270-308. Zitiert nach: Cayley 1963: XII, 459-489

Cayley, Arthur, 1891: On the substitution groups for two, three, four, five, six seven, and eight letters. *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics* 25, 71-88, 137-155. Zitiert nach: Cayley 1963: XIII, 117-149

Cayley, Arthur, 1963: *The Collected Mathematical Papers*. 13 vols. New York, London: Johnson

Chasles, Michel, 1855: Construction des racines des équations des troisième et des quatrièmes degrés. *Journal de mathématiques pures et appliquées* 20, 329-336

Clairaut, Alexis-Claude, 1731: *Recherches sur les courbes à double courbure*. Paris: Didot

Clairaut, Alexis-Claude, 1749: *Éléments d'algèbre*. Paris: David

Clairaut, Alexis-Claude, 1753: *Éléments de géométrie*. Paris: David

Clebsch, Alfred, 1862: Ueber eine Klasse von Gleichungen, welche nur reelle Wurzeln besitzen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 62, 232-245

Clebsch, Alfred, 1872: *Theorie der algebraischen Formen*. Leipzig: Teubner

Cole, Frank Nelson, 1887: Klein's Ikosaeder. *American Journal of Mathematics* 9, 45-61

Cole, Frank Nelson, 1892: Simple groups from order 201 to order 500. *American Journal of Mathematics* 14, 378-388

Cole, Frank Nelson, 1893: On a certain simple group. *Chicago Mathematical Congress papers, 1893*. New York: Macmillan & Co, 40-43

Cole, Frank Nelson, J. W. Glover, 1893: On groups whose orders are products of three prime factors. *American Journal of Mathematics* 15, 191-220

de l'Hospital, Guilleaume Marquis, 1696: *Analyse des infiniments petits*. Pour l'intelligence des lignes courbes. Paris: Imprimerie royale.

de Fermat, Pierre, 1891-1922: *Œuvres*. Ed. Paul Tannery, Charles Henry. 4 vols and supplement. Paris: Gauthier Villars

de Piles, Roger, 1668: *L'art de peinture*. Paris: Langlois. Zitiert nach: ders., *L'art de peinture de C. A. de Fresnoy*. Traduit en français [...]. Genève: Minkoff, 1973

de Séguier, Jean-Armand, 1902: Sur les équations de certains groupes. *Journal de mathématiques pures et appliquées* série 5, t. 8, 253-308

de Séguier, Jean-Armand, 1904: *Théorie des groupes finis*. Éléments de la théorie des groupes abstraits. Paris: Gauthier-Villars

Dedekind, Richard, Heinrich Weber, 1882: Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 181-290. Zitiert nach: Dedekind 1930, 238-350

Dedekind, Richard, 1854: Über die Einführung neuer Funktionen in der Mathematik. In: Dedekind 1932, 428-438

Dedekind, Richard, 1871: Über die Komposition der binären quadratischen Formen. In: Dirichlet 1871, 423-462. Zitiert nach: Dedekind 1932, 223-261

Dedekind, Richard, 1872: Stetigkeit und irrationale Zahlen. Braunschweig: Vieweg. Zitiert nach: Dedekind 1932, 315-334

Dedekind, Richard, 1876: Aus Briefen an R. Lipschitz. In: Dedekind 1932, 464-482

Dedekind, Richard, 1877a: Sur la théorie des nombres entiers algébriques. *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques* série 1, t. 11, série 2, t. 1. Zitiert nach: Dedekind 1932, 262-296

Dedekind, Richard, 1877b: Über die Anzahl der Ideal-Klassen in den verschiedenen Ordnungen eines endlichen Körpers. Werke I, 105-158

Dedekind, Richard, 1879: Über die Theorie der ganzen algebraischen Zahlen. In: Dirichlet 1879, 515-530. Zitiert nach: Dedekind 1932, 297-314

Dedekind, Richard, 1888: *Was sind und was sollen die Zahlen?* Braunschweig: Vieweg. Zitiert nach: Dedekind 1932, 335-391

Dedekind, Richard, 1894: Über die Theorie der ganzen algebraischen Zahlen. In: Dirichlet 1894, 434-657. Zitiert nach: Dedekind 1932, 1-222

Dedekind, Richard, 1895: Über die Begründung der Idealtheorie. Zitiert nach: Dedekind 1931, 50-58

Dedekind, Richard, 1897a: Über Gruppen, deren sämtliche Teiler Normalteiler sind. *Mathematische Annalen* 48, 548-561. Zitiert nach: Dedekind 1931, 87-102

Dedekind, Richard, 1897b: Über Zerlegungen von Zahlen durch ihre größten gemeinsamen Teiler. In: Heinrich Beckurts (ed.), *Festschrift der Herzoglichen Technischen Hochschule Carolo-Wilhelmina, dargeboten den naturwisschenschaftlichen Theilnehmern an der 69. Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte*. Braunschweig: Vieweg, 1-40. Zitiert nach: Dedekind 1931, 103-147

Dedekind, Richard, 1930: *Gesammelte mathematische Werke*. Herausgegeben von Robert Fricke, Emmy Noether, Öystein Ore. Erster Band. Braunschweig: Vieweg

Dedekind, Richard, 1931: *Gesammelte mathematische Werke*. Herausgegeben von Robert Fricke, Emmy Noether, Öystein Ore. Zweiter Band. Braunschweig: Vieweg

Dedekind, Richard, 1932: *Gesammelte mathematische Werke*. Herausgegeben von Robert Fricke, Emmy Noether, Öystein Ore. Dritter Band. Braunschweig: Vieweg

Dedekind, Richard, 1981: Eine Vorlesung über Algebra. Zitiert nach: Scharlau (ed.), 59-100

Dedekind, Richard, o. J.: Allgemeine Sätze über Räume. In: Dedekind 1931, 353-355

Dee, John, 1570: *The Mathematicall Praeface* to the Elements of Geometrie of Euclid of Megara. With an Introduction by Allen G. Debus (= Science History Publications). New York

Delafosse, Gabriel, 1858: *Nouveau cours de minéralogie comprenant la description de toutes les espèces minérales avec leurs applications directes aux arts*. Tome I. Paris: Librairie encyclopédique de Roret

Descartes, René, 1637: *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la vérité dans les sciences*. Leyen: Ian Maire

Descartes, René, 1886: *La Géométrie*. Nouvelle édition. Paris: Hermann

Devlin, Keith, 1992: *Sternstunden der modernen Algebra*. Berühmte Probleme und Lösungen. Aus dem Englischen übersetzt von Doris Gerstner. München: dtv

Dickson, Leonard E., 1903: Definitions of a field by independent postulates. *Transactions of the American Mathematical Society* 4, 13-20. Zitiert nach: ders., *The Collected Mathematical Papers of Leonard Eugene Dickson*. Edited by A. Adrian Albert. Vol. II. New York: Chelsea, 1975, 108-116

Dirichlet, P. G. Lejeune, 1871: *Vorlesungen über Zahlentheorie*. Herausgegeben und mit Zusätzen versehen von R. Dedekind. Zweite Auflage. Braunschweig: Vieweg

Dirichlet, P. G. Lejeune, 1879: *Vorlesungen über Zahlentheorie*. Herausgegeben und mit Zusätzen versehen von R. Dedekind. Dritte Auflage. Braunschweig: Vieweg

Dirichlet, P. G. Lejeune, 1894: *Vorlesungen über Zahlentheorie*. Herausgegeben und mit Zusätzen versehen von R. Dedekind. Vierte, umgearbeitete und vermehrte Auflage. Braunschweig: Vieweg

Dirichlet, P. G. Lejeune, 1889: *Werke*. Herausgegeben auf Veranlassung der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften von L. Kronecker. Erster Band. Berlin: Keimer

Dirichlet, P. G. Lejeune, 1897: *Werke*. Herausgegeben auf Veranlassung der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften von L. Kronecker. Zweiter Band. Berlin: Keimer

Dryden, John, 1695: *De Arte Graphica. The Art of Painting.* By C. A. Du Fresnoy. Translated into English. Together with an Original Preface Containing A Parallel Betwixt Poetry and Painting. By Mr. Dryden [...]. London: Rogers

du Fresnoy, Charles, 1667: *De arte graphica* [...]. Paris: Nicolas L'Anglois

Dürer, Albrecht, 1525: *Underweysung der messung mit dem zirckel vñ richtscheyd* [...]. Nürnberg [ohne Verlag]

Dyck, Walther, 1880: Ueber Aufstellung und Untersuchung von Gruppe und Irrationalität regulärer Riemann'scher Flächen. *Mathematische Annalen* 17, 473-509

Dyck, Walter, 1882: Gruppentheoretische Studien. *Mathematische Annalen* 20, 1-44

Dyck, Walter, 1883: Gruppentheoretische Studien. II. Ueber die Zusammensetzung einer Gruppe discreter Operationen, über ihre Primitivität und Transitivität. *Mathematische Annalen* 22, 70-108

Epsteen, Saul, J. H. Maclagan-Wedderburn, 1905/06: On the structure of hypercomplex number systems. *Transactions of the American Mathematical Society* 6-7, 172-178

Euklid, 1984: *Die Elemente.* 3. Teil (= Ostwald Klassiker der Wissenschaften 240). Nach Heibergs Text aus dem Griechischen übersetzt und herausgegeben von Clemens Thaler. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K. G.

Euler, Leonhard, 1770: *Vollständige Anleitung zur Algebra* [...]. St. Petersburg: Kayserliche Academie der Wissenschaften. Zitiert nach: Euler 1911

Euler, Leonhard, 1911: *Vollständige Anleitung zur Algebra* [...]. Mit den Zusätzen von Joseph Louis Lagrange. Hrsg. von Heinrich Weber. Leipzig: Teubner

Fine, Henry B., 1884: On the singularities of curves of double curvature. *American Journal of Mathematics* 8, 156-177

Forsyth, Andrew Russel, 1912: *Lectures on the Differential Geometry of Curves and Surfaces.* Cambridge: CUP

Frobenius, Ferdinand Georg, 1879: Ueber die schiefe Invariante einer bilinearen oder quadratischen Form. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 84, 44-71

Frobenius, Ferdinand Georg, L. Stickelberger, 1879: Ueber Gruppen von vertauschbaren Elementen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 86, 217-262

Frobenius, Ferdinand Georg, 1887: Neuer Beweis des Sylowschen Satzes. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 100, 179-181

Galois, Évariste, 1830: Sur la théorie des nombres. *Bulletin des sciences mathématiques de Feroussac* 13, 428-435. Zitiert nach: Galois 1976, 113-127

Galois, Évariste, [datiert vom 16. Januar 1831]: Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux. In: Galois 1976, 43-71

Galois, Évariste, [datiert vom 29. Mai 1832]: Lettre à Auguste Chevalier. In: Galois 1976, 173-185

Galois, Évariste, 1846: Œuvres mathématiques d'Évariste Galois. *Journal de mathématiques pures et appliquées* 16, 381-444

Galois, Évariste, 1976: *Écrits et mémoires mathématiques d'Évariste Galois.* Édition critique intégrale de ses manuscrits et publications. Par Robert Bourgne et J.-P. Azra. Paris: Gauthier-Villars

Gauß, Carl Friedrich, 1801: *Disquisitiones arithmeticæ.* Leipzig: Fleischer. Zitiert nach: Gauß 1973: I

Gauß, Carl Friedrich, 1831a: Theoria residorum biquadraticorum. Commentatio secunda. Zitiert nach: Gauß 1973: II, 93-148

Gauß, Carl Friedrich, 1831b: [Selbstanzeige Theoria residuorum biquadratorum. Commentatio secunda.] Zitiert nach: Gauß 1973: II, 169-178

Gauß, Carl Friedrich, 1849: Untersuchungen über höhere Arithmetik. Dt. von H. Maser. Berlin: Springer

Gauß, Carl Friedrich, 1973: *Carl Friedrich Gauß' Werke.* Herausgegeben von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. 12 Bde. Hildesheim, New York: Olms

Gericke, Samuel Theodor, 1699: *Kurtzer Begriff Der Theoretischen Mahler=Kunst.* Aus dem Lateinischen des C. A. du Fresnoy, Ins Teutsche übersetzet. Berlin: Rüdiger

Gibbs, Josiah Willard, 1881: Elements of Vector Analysis. New Haven [ohne Verlag]. Zitiert nach: ders., *The Scientific Papers of J. Willard Gibbs.* Vol. II. New York: Dover, 1961, 17-90

Gierster, J., 1881: Die Untergruppen der Galoisschen Gruppe der Modulargleichungen für den Fall eines primzahligen Transformationsgrades. *Mathematische Annalen* 18, 319-365

Gordan, Paul, 1887: *Paul Gordan's Vorlesungen über Invariantentheorie*. Herausgegeben von Georg Kerschensteiner. Band II. Binäre Formen. Leipzig: Teubner

Grassmann, Hermann, 1894: *Hermann Grassmanns gesammelte mathematische und physikalische Werke*. Ersten Bandes erster Theil: Die Ausdehnungslehre von 1844 und die geometrische Analyse. Unter der Mitwirkung von Eduard Study. Herausgegeben von Friedrich Engel. Leipzig: Teubner

Hamilton, William Rowan, 1844-1850: On Quaternions; or on a new system of imaginaries in algebra. *Philosophical Magazine* 25 (1844), 10-13, 241-246, 489-495; 26 (1845), 220-24; 29 (1846), 26-31, 113-122, 326-328; 30 (1847), 458-461; 31 (1847), 214-219, 278-293, 511-519; 32 (1848), 367-374; 33 (1848), 58-60; 34 (1849), 294-297, 340-343, 425-439; 35 (1849), 133-137, 200-204; 36 (1850), 305-306. Zitiert nach: Hamilton 1967: 227-297

Hamilton, William Rowan, 1850a: On the inscription of certain 'gauche' polygons in surfaces of the second degree. *Proceedings of the Royal Irish Academy* 4, 325-326. Zitiert nach: Hamilton 1967: 398

Hamilton, William Rowan, 1850b: On some results obtained by the quaternion analysis respecting the inscription of 'gauche' polygons in surfaces of the second order. *Proceedings of the Royal Irish Academy* 4, 380-387. Zitiert nach: Hamilton 1967: 403-406

Hamilton, William Rowan, 1850c: On 'gauche' polygons in central surfaces of the second order. *Proceedings of the Royal Irish Academy* 4, 541-557. Zitiert nach: Hamilton 1967: 407-415

Hamilton, William Rowan, 1864: On 'gauche' curves of the third degree. *Proceedings of the Royal Irish Academy* 8, 331-334. Zitiert nach: Hamilton 1967: 435-437

Hamilton, William Rowan, 1967: *The Mathematical Papers of Sir William Rowan Hamilton* (= Cunningham Memoir No. 15). Vol III. Algebra. Edited for the Royal Irish Court by H. Halberstam and R. E. Ingram. Cambridge: CUP

Hankel, Hermann, 1867: *Theorie der complexen Zahlsysteme, insbesondere der gemeinen imaginären Zahlen und der Hamilton'schen Quaternionen*. Leipzig:

Leopold Voss

Harkness, James, Frank Morley, 1893: *A Treatise on the Theory of Functions.* New York, London: Macmillan

Hathaway, Arthur S., 1884: Some papers on the theory of numbers. *American Journal of Mathematics* 6, 316-330

Hathaway, Arthur S., 1887: A memoir in the theory of numbers. *American Journal of Mathematics* 9, 162-179

Hausdorff, Felix, 1914: *Grundzüge der Mengenlehre.* Leipzig: Veit

Haüy, René Just, 1784: *Essai d'une théorie sur la structure des cristaux.* Paris: Gogue & Neé de la Rochelle

Haüy, René Just, 1801: *Traité de minéralogie.* 5 vols. Paris: Louis

Hayward, James, 1829: *Elements of Geometry upon the Inductive Method to which is added an Introduction to Descriptive Geometry.* Cambridge: Hilliard and Brown

Hermite, Charles, 1905-1912: *Œuvres de Charles Hermite.* Publiées sous les auspices de l'Académie des Sciences. Par Émile Picard. 3 vols. Paris: Gauthier-Villars

Hilbert, David, 1897: Die Theorie der algebraischen Zahlkörper. *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung* 4, 175-546. Zitiert nach: Hilbert 1970: I, 63-363

Hilbert, David, 1901: Mathematische Probleme. *Archiv für Mathematik und Physik.* 3. Reihe, Bd. 1, 44-63. Zitiert nach: Hilbert 1970: III, 290-329

Hilbert, David, 1912: *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen* (= Fortschritte der mathematischen Wissenschaften 3). Leipzig, Berlin: Teubner

Hilbert, David, 1970: *Gesammelte Abhandlungen.* Zweite Auflage. 3 vols. Berlin: Springer

Hölder, Otto, 1889: Zurückführung einer beliebigen algebraischen Gleichung auf eine Kette von Gleichungen. *Mathematische Annalen* 34, 26-56

Hölder, Otto, 1893: Die Gruppen der Ordnungen p^3, pq^2, pqr, p^4. *Mathematische Annalen* 43, 301-412

Hölder, Otto, 1895: Bildung zusammengesetzter Gruppen. *Mathematische Annalen* 46, 321-422

Huntington, Edward V., 1903: Definitions of fields by sets of independent postulates. *Transactions of the American Mathematical Society* 4, 31-37

Huntington, Edward V., 1905: Note on the definition of abstract groups and fields by sets of independent postulates. *Transactions of the American Mathematical Society* 3, 142-158

Hyde, Edward Wyllys, 1875: *Skew Arches*. New York: Van Nostrand

Jordan, Camille, 1861: Mémoire sur le nombre des valeurs des fonctions. *Journal de l'École Polytechnique* 22, 113-194. Zitiert nach: Jordan 1961, 1-82

Jordan, Camille, 1867a: Mémoire sur la résolution algébrique des équations. *Journal de mathématiques pures et appliquées* série 2, t. 12, 109-157. Zitiert nach: Jordan 1961, 93-104

Jordan, Camille, 1867b: Sur les groupes de mouvements. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* 65, 229-232. Zitiert nach: Jordan 1964, 113-116

Jordan, Camille, 1868: Théorèmes généraux sur les substitutions. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* 66, 836-837. Zitiert nach: Jordan 1961, 165-166

Jordan, Camille, 1868/69: Mémoire sur les groupes de mouvements. *Annales des mathématiques pures et appliquées* série 2, t. 2, 167-215, 322-345. Zitiert nach: Jordan 1964, 231-302

Jordan, Camille, 1869: Commentaire sur Galois. *Mathematische Annalen* 1, 141-160. Zitiert nach: Jordan 1961, 211-230

Jordan, Camille, 1870: *Traité des substitutions et des équations algébriques*. Paris: Gauthier-Villars

Jordan, Camille, 1873: Sur la limite de transitivité des groupes non alternés. *Bulletin de la Société Mathématique de France* 1, 175-221. Zitiert nach: Jordan 1961, 365-396

Jordan, Camille, 1961: *Œuvres de Camille Jourdan*. Publiées sous la direction de M. Gaston Julia par M. Jean Dieudonné. Tome I. Paris: Gauthier-Villars

Jordan, Camille, 1964: *Œuvres de Camille Jourdan*. Publiées sous la direction de M. Gaston Julia par M. Jean Dieudonné. Tome IV. Paris: Gauthier-Villars

Kästner, Abraham Gotthelf, 1753: *Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie und Perspectiv*. Der mathematischen Anfangsgründe Isten Theils, erstes Abtheil. Göttingen: Vandenhoek & Ruprecht

Kästner, Abraham Gotthelf, 1758ff.: *Mathematische Anfangsgründe.* 4 Teile in 6 Bänden. Göttingen: Vandenhoek & Ruprecht

Kästner, Abraham Gotthelf, 1790: *Geometrische Abhandlungen.* Erste Sammlung. Anwendungen der ebenen Geometrie und Trigonometrie. Der mathematischen Anfangsgründe Isten Theils, drittes Abtheil. Göttingen: Vandenhoek & Ruprecht

Killing, Wilhelm, 1888a: Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen. *Mathematische Annalen* 31, 252-290

Killing, Wilhelm, 1888b: Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen. Zweiter Theil. *Mathematische Annalen* 33, 1-48

Killing, Wilhelm, 1889: Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen. Dritter Theil. *Mathematische Annalen* 34, 57-122

Killing, Wilhelm, 1890a: Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen. Vierter Theil (Schluß). *Mathematische Annalen* 36, 161-189

Killing, Wilhelm, 1890b: Bestimmung der grössten Untergruppen von endlichen Transformationsgruppen. *Mathematische Annalen* 36, 239-254

Killing, Wilhelm, 1904: Der Bau einer besonderen Klasse von Transformationsgruppen. In: S. Meyer (ed.), *Festschrift Ludwig Boltzmann gewidmet zum 60. Geburtstage, 20. Februar 1904.* Leipzig: Barth, 715-720

Klein, Felix, 1872a: *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen.* Erlangen: Deichert. Zitiert nach: Klein 1921, 460-497

Klein, Felix, 1872b: Über Liniengeometrie und metrische Geometrie. *Mathematische Annalen* 5, 257-278. Zitiert nach: Klein 1921, 106-126

Klein, Felix, 1884: *Vorlesungen über das Ikoseader und die Auflösung der Gleichung vom fünften Grade.* Leipzig: Teubner

Klein, Felix, 1921: *Gesammelte mathematische Abhandlungen.* Erster Band. Linieneometrie. Grundlegung der Geometrie. Zum Erlanger Programm. Herausgegeben von R. Fricke und A. Ostrowski (von F. Klein mit ergänzenden Anmerkungen versehen). Berlin: Springer

Klein, Felix, 1926: *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert* (= Die Grundlehren der mathematischen Wissenschften. Bd. 24). Teil I. Für den Druck bearbeitet von R. Courant und O. Neugebauer. Berlin: Springer

Klein, Felix, 1986: *Riemannsche Flächen.* Vorlesungen, gehalten in Göttingen 1891/92. Herausgegeben und kommentiert von Günter Eisenreich und Walter Purkert (= Teubner-Archiv zur Mathematik 5). Leipzig: Teubner

König, Julius, 1876: Ein allgemeiner Ausdruck für die ihrem absoluten Betrage nach kleinste Wurzel der Gleichung n-ten Grades. *Mathematische Annalen* 9, 530-541

König, Julius, 1879: Die Factorenzerlegung ganzer Functionen und damit zusammenhängende Eliminationsprobleme. *Mathematische Annalen* 15, 161-173

König, Julius, 1881a: Zur Theorie der Resolventen. *Mathematische Annalen* 18, 78-81

König, Julius, 1881b: Ueber endliche Formensysteme in der Theorie der rationalen Functionen. *Mathematische Annalen* 18, 69-77

König, Julius, 1883: Beiträge zur Theorie der algebraischen Gleichungen. *Mathematische Annalen* 21, 424-433

König, Julius, 1906: Über die Grundlagen der Mengenlehre und das Kontinuumproblem. *Mathematische Annalen* 61, 156-160

Krebs, Heinrich Johannes, 1777: *Anfangsgründe der reinen Mathematik.* Erster Theil. Die Arithmetik. Copenhagen, Leipzig: Heineck und Faber

Kronecker, Leopold, 1856: Über die algebraisch auflösbaren Gleichungen (II. Abhandlung). *Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin* 1856, 203-215. Zitiert nach: Kronecker 1968: IV, 25-37

Kronecker, Leopold, 1870: Auseinandersetzung einiger Eigenschaften der Klassenanzahl idealer komplexer Zahlen. *Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin* 1870, 881-889. Zitiert nach: Kronecker 1968: I, 273-282

Kronecker, Leopold, 1881/82: Grundzüge einer Theorie der algebraischen Grössen. Berlin. Zitiert nach: Kronecker 1958: II, 239-387

Kronecker, Leopold, 1886: Zur Theorie der Gattungen rationaler Functionen von mehreren Variablen. *Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin* 1886, 251-253. Zitiert nach: Kronecker 1968: III.1, 275-280

Kronecker, Leopold, 1887: Über den Zahlbegriff. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 101, 261-274. Zitiert nach: Kronecker 1968: III.1, 251-

274

Kronecker, Leopold, 1968: *Leopold Kroneckers Werke.* Herausgegeben auf Veranlassung der Preussischen Akademie der Wissenschaften von K. Hensel. 5 Vols. New York, N. Y.: Chelsea Publishing Company

Krull, Wolfgang, 1935: *Idealtheorie* (= Ergebnisse der Mathematik). Berlin: Springer

Kummer, Ernst Eduard, 1847a: Zur Theorie der complexen Zahlen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 35, 319-326. Zitiert nach: Kummer 1975, 203-210

Kummer, Ernst Eduard, 1847b: Über die Zerlegung der aus Wurzeln der Einheit gebildeten complexen Zahlen in ihre Primfactoren. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 35, 327-367. Zitiert nach: Kummer 1975, 211-251

Kummer, Ernst Eduard, 1847c: Extrait d'une lettre de M. Kummer à M. Liouville. In: Kummer 1975, 298

Kummer, Ernst Eduard, 1847d: De numeris complexis, qui radicibus unitatis et numeris integris realibus constant. *Journal de mathématiques pures et appliquées* 12, 185-212. Zitiert nach: Kummer 1975, 165-192

Kummer, Ernst Eduard, 1851: Mémoire sur la théorie des nombres complexes composés de racines de l'unité et de nombres entiers. *Journal de mathématiques pures et appliquées* 16, 377-498. Zitiert nach: Kummer 1975, 363-484

Kummer, Ernst Eduard, 1975: *Collected Papers.* Volume I. Contributions to number theory. Edited by André Weil. Berlin et al.: Springer

Kunz, Ernst, 1991: *Algebra.* Braunschweig: Vieweg

Lagrange, Joseph Louis de, 1770/71: Réflexions sur la résolution algébrique des équations. *Nouveaux Mémoires de l'Academie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin.* Zitiert nach: Lagrange 1973, 203-421

Lagrange, Joseph Louis de, 1772: Sur la forme des racines imaginaires des équations. Zitiert nach: Lagrange 1973, 479-516

Lagrange, Joseph Louis de, 1973: *Œuvres de Lagrange.* Publiées par les soins de M. J.-A. Serret. Bd. 3. Hildesheim, New York: Olms

Lamé, Gabriel, 1847a: Démonstration générale du théorème de Fermat, sur l'impossibilité, en nombres entiers, de l'équation $x^n + y^n = z^n$. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* 24, 310-315

Lamé, Gabriel, 1847b: Note au sujet de la démonstration du théorème de Fermat. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* 24, 352

Lamé, Gabriel, 1847c: Mémoire sur la résolution, en nombres complexes, de l'équation $A^5 + B^5 + C^5 = 0$. *Journal de mathématiques pures et appliquées* 12, 137-171

Lamé, Gabriel, 1847d: Mémoire sur la résolution, en nombres complexes, de l'équation $A^n + B^n + C^n = 0$. *Journal de mathématiques pures et appliquées* 12, 172-184

La Pérouse, Jean François de Galaup, 1797: *Voyage de La Pérouse autour du monde* [...]. Paris: Imprimerie de la République

Legendre, Adrien-Marie, 1808: *Essai sur la théorie des nombres.* Seconde édition. Paris: Courcier

Legendre, Adrien Marie, 1817: *Éléments de Géométrie, avec des notes.* Onzième édition. Paris: Didot

Lie, Sophus, 1874: Über Gruppen von Transformationen. *Göttinger Nachrichten* 22, 529-542. Zitiert nach: Lie 1924, 1-8

Lie, Sophus, 1885: Allgemeine Untersuchungen über Differentialgleichungen, die eine kontinuierliche, endliche Gruppe gestatten. *Mathematische Annalen* 25, 71-151. Zitiert nach: Lie 1927, 138-223

Lie, Sophus, 1888: *Theorie der Transformationsgruppen.* Erster Abschnitt. Unter Mitwirkung von Dr. Friedrich Engel. Bearbeitet von Sophus Lie. Leipzig: Teubner. Zitiert nach: ders., *Theorie der Transformationsgruppen.* New York: Chelsea, 1970

Lie, Sophus, 1924: *Gesammelte Abhandlungen* [...] Herausgegeben von dem Norwegischen Mathematischen Verein durch Friedrich Engel und Poul Heegard. Fünfter Band. Leipzig: Teubner, Kristiania: H. Aschehoug

Lie, Sophus, 1927: *Gesammelte Abhandlungen* [...] Herausgegeben von dem Norwegischen Mathematischen Verein durch Friedrich Engel und Poul Heegard. Sechster Band. Leipzig: Teubner, Kristiania: H. Aschehoug

Liouville, Joseph, 1847: Observations de M. Liouville. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* 24, 310-311

Maclagan-Wedderburn, J. H., 1905: A theorem on finite algebras. *Transactions of the American Mathematical Society* 6, 349-352

Maschke, H., 1896: The representation of finite groups, especially of the rotation groups of the regular bodies of three- and four-dimensional space, by Cayley's color diagrams. *American Journal of Mathematics* 18, 156-194

McCoy, Neal, 1948: *Rings and Ideals.* Northampton, Mass.: Mathematical Association of America

Minkowski, Hermann, 1910: *Geometrie der Zahlen.* Leipzig, Berlin: Teubner

Mitscherlich, Eilhard, 1818/19: Ueber die Krystallisation der Salze, in denen das Metall der Basis mit zwei Proportionen Sauerstoff verbunden ist. *Abhandlungen der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften in Berlin* 1818-1819, 427-437. Zitiert nach: Mitscherlich 1896, 123-132

Mitscherlich, Eilhard, 1821: Ueber das Verhältniss zwischen der chemischen Zusammensetzung und der Krystallform arseniksaurer und phosphorsaurer Salze. Zitiert nach: Mitscherlich 1896, 133-173

Mitscherlich, Eilhard, 1822/23a: Ueber die künstliche Darstellung der Mineralien aus ihren Bestandteilen. *Abhandlungen der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften in Berlin* 1822-1823, 25-41. Zitiert nach: Mitscherlich 1896, 175-189

Mitscherlich, Eilhard, 1822/23b: Ueber die Körper, welche in zwei verschiedenen Formen krystallisieren. *Abhandlungen der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften in Berlin* 1822-1823, 43-48. Zitiert nach: Mitscherlich 1896, 189-194

Mitscherlich, Eilhard, 1896: *Gesammelte Schriften von Eilhard Mitscherlich.* Lebensbild, Briefwechsel, und Abhandlungen. Herausgegeben von A. Mitscherlich. Berlin: Ernst Siegfried Mittler und Sohn

Möbius, Augustus Ferdinand, 1827: *Der barycentrische Calcül* [...]. Leipzig: Barth

Molien, Theodor, 1893: Ueber Systeme höherer complexer Zahlen. *Mathematische Annalen* 41, 83-156

Molk, Jules, 1885: Sur une notion qui comprend celle de la divisibilité et sur la théorie générale de l'élimination. *Acta Mathematica* 6, 1-166

Monge, Gaspard, Jean-Nicolas-Pierre Hachette, 1802: Application d'algèbre à la géométrie. *Journal de l'École Polytechnique* 11, 143-169

Moore, Eliakim Hastings, 1893: A doubly-infinite system of simple groups. *Bulletin of the New York Mathematical Society* 3, 73-78

Moore, Eliakim Hastings, 1896: A doubly-infinite system of simple groups. In: ders. et al. (edd.), *Mathematical Papers read at the International Mathematical Congress held in Connection with the World's Columbian Exposition, Chicago 1893*. New York: Macmillan & Co, 208-243

Moore, Eliakim Hasting, 1897: Concerning transcendentally transcendental functions. *Mathematische Annalen* 48, 49-74

Moore, Eliakim Hastings, 1902: A definition of abstract groups. *Transactions of the American Mathematical Society* 3, 485-492

Moore, Eliakim Hastings, 1903: On the foundations of mathematics. *Science* 17, 401-416

Netto, Eugen, 1878: Neuer Beweis eines Fundamentaltheorems aus der Theorie der Substitutionslehre. *Mathematische Annalen* 13, 249-251

Netto, Eugen, 1882: *Substitutionentheorie und ihre Anwendungen auf die Algebra*. Leipzig: Teubner

Netto, Eugen, 1893: Über die arithmetisch-algebraischen Tendenzen Leopold Kroneckers. In: E. H. Moore et al. (edd.), *Mathematical Papers read at the International Mathematical Congress held in Connection with the World's Columbian Exposition, Chicago 1893*. New York: Macmillan & Co, 243-252

Netto, Eugen, 1896: *Vorlesungen über Algebra*. In zwei Bänden. Erster Band. Leipzig: Teubner

Netto, Eugen, 1892: *The Theory of Substitutions and its Applications to Algebra*. Tr. Frank N. Cole. Ann Arbor: Wahr

Noether, Emmy, 1983: *Gesammelte Abhandlungen. Collected Papers*. Herausgegeben von N. Jacobson. Berlin et al.: Springer

Pascal, Blaise, 1954: *Œuvres complètes*. Texte établi, présenté et annoté par Jacques Chevalier. Paris: Gallimard

Peirce, Benjamin, 1881: Linear associative algebra. *American Journal of Mathematics* 4, 97-229

Pierpont, James, 1899/1901: Galois' theory of algebraic equations. Part I. Rational resolvents. *Annals of Mathematics* 1/2, 113-143

Pierpont, James, 1905: *Lectures on the Theory of Functions of Real Variables*. Volume I. Boston et al: Ginn

Platon, 1975: *Nomoi*. Nach der Übersetzung von Hieronymus Müller mit der Stephanus-Numerierung herausgegeben von Walter F. Otto et al. Hamburg: Rowolth

Poncelet, Jean-Victor, 1822: *Traité des propriétés projectives des figures*. Paris: Gauthier-Villars

Reid, Legh Wilber, 1901: A table of class numbers for cubic number fields. *American Journal of Mathematics* 23, 68-84

Reid, Legh Wilber, 1910: *The Elements of the Theory of Algebraic Numbers*. With an Introduction by David Hilbert. New York: Macmillan

Rousseau, Jean-Jacques, 1762: *Du contract social; ou, principes du droit politique*. Amsterdam: Rey. Zitiert nach: Rousseau 1964, 347-470

Rousseau, Jean-Jacques, 1964: *Œuvres complètes*. III. Du contrat social. Écrits politiques. Édition publiée sous la direction de Bernard Gagnebin et Marcel Raymond. Paris: Gallimard

Rousseau, Jean-Jacques, 1990: *Essai sur l'origine des langues où il est parlé de la mélodie et de l'imitation musicale*. Texte établi et présenté par Jean Starobinski. Paris: Gallimard

Ruffini, Paolo, 1799: *Teoria generale delle Equazioni, in cui si demostra impossibile la soluzione algebraica delle equazioni generali di gradi superiore al quarto*. Bologna. Zitiert nach: Ruffini 1953, 1-324

Ruffini, Paolo, 1802: Della soluzione delle equazioni algebraiche determinate particolari di grado superiore al quarto. *Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana delle Scienze* 9, 444-526. Zitiert nach: Paolo Ruffini 1953, 343-406

Ruffini, Paolo, 1953: *Opere matematiche di Paolo Ruffini*. Pubblicate sotto gli auspici del circolo matematico di Palermo a cura del Prof. Dr. Ettore Botrolotti. Tomo primo. Roma: Edizioni Cremonese

Schoenflies, Arthur M., 1886: Über Gruppen von Bewegungen (Erste Abhandlung). *Mathematische Annalen* 28, 319-342

Schoenflies, Arthur M., 1887: Über Gruppen von Bewegungen (Zweite Abhandlung). *Mathematische Annalen* 29, 50-80

Schur, Issai, 1907: Untersuchungen über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 132, 85-137

Serret, Joseph-Alfred, 1877: *Cours d'algèbre supérieure*. Quatrième édition. Tome 1. Paris: Gauthier-Villars

Serret, Joseph-Alfred, 1879: *Cours d'algèbre supérieure*. Quatrième édition. Tome 2. Paris: Gauthier-Villars

Servois, François-Joseph, 1814: Essai sur un nouveau mode d'exposition des principes du calcul différentiel. *Annales des mathématiques pures et appliquées* 5, 93-140

Smith, Henry, 1859-1865: Report on the theory of numbers. Part I-VI. Zitiert nach: ders., *The Collected Papers of Henry John Stephen Smith*. Edited by J. W. L. Glaisher. Vol 1. New York: Chelsea, 1965, 38-364

Starkweather, G. P., 1899: Non-quaternion number-systems containing no skew units. *American Journal of Mathematics* 21, 369-386

Steinitz, Ernst, 1910: Algebraische Theorie der Körper. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 137, 167-309

Study, Ernst, 1887: Ueber ternäre lineare Formen. *Mathematische Annalen* 30, 120-126

Study, Ernst, 1889: *Methoden zur Theorie der ternären Formen*. Leipzig: Teubner

Study, Ernst, 1890a: Ueber Schnittpunktfiguren ebener algebraischer Curven. *Mathematische Annalen* 36, 216-229

Study, Ernst, 1890b: Ueber Systeme complexer Zahlen und ihre Anwendung in der Theorie der Transformationsgruppen. *Monatshefte für Mathematik* 1, 283-355

Sylow, Peter Ludwig, 1872: Théorèmes sur les groupes de substitutions. *Mathematische Annalen* 5, 584-594

Sylow, Peter Ludwig, 1888: Sur les groupes transitifs dont le degré est le carré d'un nombre premier. *Acta Mathematica* 11, 201-256

Sylvester, James J., 1878: On an application of the new atomic theory to the graphical representation of the invariants and covariants of binary quantics, - with three appendices. *American Journal of Mathematics* 1, 64-125. Zitiert nach: Sylvester 1973: III, 148-206

Sylvester, James J., 1973: *The collected mathematical papers of James Joseph Sylvester.* Vol. 1-4. New York: Chelsea

Taber, Henry, 1894: On orthogonal substitutions than can be expressed as a function of a simple alternate (or skew symmetric) linear substitution. *American Journal of Mathematics* 16, 123-130

Timerding, H. E., 1908: *Geometrie der Kräfte* (= B. G. Teubners Sammlung von Lehrbüchen auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen 1). Leipzig: Teubner

van der Waerden, Bartel L., 1930: *Moderne Algebra.* Berlin: Springer

Vandermonde, Alexandre-Théophile, 1771: Mémoire sur la résolution des équations. *Histoire de l'Académie des Sciiences Paris*, année 1771. Paris 1774, 365-414

Vessiot, Ernest, W. de Tannenberg, 1889: Compte rendu: Lie (Sophus) Theorie der Transformationsgruppen. *Bulletin des sciences mathématiques* 13, 113-148

Vogt, H., 1895: *Leçons sur la résolution des équations.* Paris: Librairie Nony

von Staudt, Georg Karl Christian, 1847: *Geometrie der Lage.* Nürnberg: Korn

Wantzel, Pierre Laurent, 1836: Recherches sur les moyens de reconnaître si un Problème de Géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas. *Journal des mathématiques pures et appliquées* 1, 366-372

Warren, S. Edward, 1883: *Problems, Theorems and Examples in Descriptive Geometry* [...]. New York: John Wiley & Sons

Weber, Heinrich, 1884: Über die Galois'sche Gruppe der Gleichung 28ten Grades, von welcher die Doppeltangenten einer Curve vierter Ordnung abhängen. *Mathematische Annalen* 23, 489-503

Weber, Heinrich, 1893a: Die allgemeinen Grundlagen der Galois'schen Gleichungstheorie. *Mathematische Annalen* 43, 521-549

Weber, Heinrich, 1893b: Leopold Kronecker. *Mathematische Annalen* 43, 1-25

Weber, Heinrich, 1895: *Lehrbuch der Algebra.* Erster Band. Braunschweig: Vieweg

Weber, Heinrich, 1896: *Lehrbuch der Algebra.* Zweiter Band. Braunschweig: Vieweg

Weber, Heinrich, 1899: *Lehrbuch der Algebra.* 2. Auflage. Zweiter Band. Braunschweig: Vieweg

Wellstein, Joseph, 1904: Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Größen einer unabhängigen Variablen. *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung* 13, 112-116

Wolff, Christian, 1716: *Mathematisches Lexicon* [...]. Leipzig: Joh. Friedrich Gleditschens seel. Sohn. Zitiert nach: ders., *Mathematisches Lexicon*. Herausgegeben und bearbeitet von J. E. Hofmann (= Gesammelte Werke. I. Abteilung. Deutsche Schriften. Band 11). Hildesheim, New York: Olms, 1978

Wolff, Christian, 1751: *Vernünftige Gedanken (2) (Deutsche Metaphysik)* [...]. Halle: Renger. Zitiert nach: ders., *Vernünftige Gedanken* [...]. Mit einer Einleitung versehen und einem kritischen Apparat von Charles A. Corr (= Gesammelte Werke. I. Abteilung. Deutsche Schriften. Band 2). Hildesheim, New York: Olms, 1983

Sekundärliteratur

Adamzik, Kirsten, 1998: Fachsprachen als Varietäten. In: Hoffmann et al. (edd.), 181-189

Aitchison, Jean, 1991: *Language Change: Progress or Decay?*. 2nd edition. Cambridge: CUP

Albrecht, Jörn, Richard Braun (edd.), 1992: *Fachsprache und Terminologie in Geschichte und Gegenwart* (= Forum für Fachsprachenforschung 14). Tübingen: Narr

Albrecht, Jörn, 1992: Wortschatz versus Terminologie: Einzelsprachliche Charakteristika in der Fachterminologie. In: Albrecht - Braun (edd.), 59-78

Albrecht, Jörn, 1997: Fünf Thesen zur „kognitiven Semantik“. In: Ulrich Hoinkes (ed.), *Kaleidoskop der lexikalischen Semantik*. Tübingen: Narr, 19-30

Ammon, Karl, 1936: Verdeutschungen für die Größenlehre oder Mathematik. *Muttersprache* 51, 147-150

Ammon, Ulrich, 1998: Fachsprachen als Subsprachen. In: Hoffmann et al. (edd.), 189-198

Anttila, Raimo, 1972: *An introduction to historical and comparative linguistics*. New York: Macmillan

Aspray, William, Philip Kitcher (edd.), 1988: *History and Philosophy of Modern Mathematics* (= Minnesota Studies in the Philosophy of Science 9). Minneapolis: University of Minnesota Press

Bammesberger, Alfred, 1979: *Beiträge zu einem etymologischen Wörterbuch des Altenglischen*. Berichtigungen und Nachträge zum Altenglischen etymologischen Wörterbuch von Ferdinand Holthausen (= Anglistische Forschungen 139). Heidelberg: Winter

Bartha, Magdolna, 1993: Der Einfluß der Prager Schule der Vorkriegszeit auf die modernen Fachsprachentheorien. In: Bungarten (ed.), Bd. 2, 551-566

Bätschmann, Oskar, 2000: Die Übersetzung von Charles-Alphonse du Fresnoys ‚De Arte Graphica' durch Samuel Theodor Gericke (1699). In: Uwe Fleckner et al. (edd.), *Jenseits der Grenzen*. Französische und deutsche Kunst vom Ancien Régime bis zur Gegenwart. Thomas W. Gaehtgens zum 60. Geburtstag. Band I. Inszenierung der Dynastien. Köln: Dumont, 85-100

Becker, Holger, 1995: Die sprachlichen Ausdrücke für ‚Forschung' bei Francis Bacon: Zusammenhang, Herkunft und Entwicklung. Schriftliche Hausarbeit zur Prüfung für das Lehramt an Gymnasien, Universität Oldenburg

Becker, Holger, 1999: The etymology of math(s). *English Today* 15.1, 55-56

Beckers, D. J., 1998: A. C. Clairaut (1713-1765) en de geschiedenis van de wiskunde. *Euclides* 73.4, 111-116

Béjoint, Henry, 2000: *Modern Lexicography*. An introduction. Oxford: OUP

Bekemeier, Bernd, 1982: ‚Die Arithmetisierung der Mathematik' - Ein grundlagentheoretisches Programm der Mathematik im 19. Jahrhundert. In: Bernd Bekemeier et al. (edd.), *Wissenschaft und Bildung im frühen 19. Jahrhundert II*. Materialien und Studien Bd. 30. Bielefeld: Institut für Didaktik der Mathematik der Universität Bielefeld, 1-96

Bekemeier, Bernd, 1987: *Martin Ohm (1792-1872)*. Universitäts- und Schulmathematik in der neuhumanistischen Bildungsreform (= Studien zur Wissenschafts-, Sozial- und Bildungsgeschichte der Mathematik 4). Göttingen: Vandenhoek & Ruprecht

Bendix, Edward H., 1971: The data of semantic description. In: Danny D. Steinberg, Leon A. Jakobovits (edd.), *Semantics*. An interdisciplinary reader in philosophy, linguistics and psychology. Cambridge: CUP, 393-409

Beneš, Eduard, 1981: Die formale Struktur der wissenschaftlichen Fachsprachen in syntaktischer Hinsicht. In: Bungarten (ed.), 185-212

Benis-Sinaceur, Hourya, 2000: The nature of progress in mathematics: the significance of analogy. In: Grosholz - Breger (edd.), 282-293

Benoit, Paul, 1988: Langue populaire et langue savant: remarques sur la naissance du vocabulaire arithmétique élémentaire en langue française. In: Groult (ed.), 207-211

Berlin, B., P. Kay, 1969: *Basic Color Terms.* Their Universality and Evolution. Berkeley, Los Angeles: University of California Press

Black, Max, 1962a: Metaphor. In: ders., *Models and Metaphors.* Ithaca: Cornell University Press, 25-47

Black, Max, 1962b: Models and archetypes. In: ders., *Models and Metaphors.* Ithaca: Cornell University Press, 219-243

Black, Max, 1993: More about metaphor. In: Ortony (ed.), 19-41

Blank, Andreas, 1997: *Prinzipien des lexikalischen Bedeutungswandels am Beispiel der romanischen Sprachen* (= Beihefte zur Zeitschrift für romanische Philologie 285). Tübingen: Niemeyer

Blumenberg, Hans, 1960: Paradigmen zu einer Metaphorologie. *Archiv der Begriffsgeschichte* 6, 1-166. Zitiert nach: ders., *Paradigmen zu einer Metaphorologie* (= suhrkamp taschenbuch 1303). Frankfurt a. M.: Suhrkamp, 1998

Blumenberg, Hans, 1996: Ausblick auf eine Theorie der Unbegrifflichkeit. In: Anselm Haverkamp (ed.), *Theorie der Metapher.* Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 438-454

Blutner, Reinhard, 1995: Prototypen und Kognitive Semantik. In: Gisela Harras (ed.), *Die Ordnung der Wörter.* Kognitive und lexikalische Strukturen (= Jahresbericht IDS Mannheim). Berlin, New York: de Gruyter, 227-270

Bochner, Salomon, 1974: Mathematical reflections. *American Mathematical Monthly* 81, 827-852

Bourbaki, Nicolas, 1950: The architecture of mathematics. *American Mathematical Monthly* 57, 221-232

Bourbaki, Nicolas, 1994: *Elements of the History of Mathematics.* Translated from the French by John Meldrum. Berlin et al.: Springer

Boyd, Richard, 1979: Metaphor and theory change: What is „metaphor" a metaphor for? In: Ortony (ed.), 356-408

Boyd, Richard, 1993: Metaphor and theory change: What is „metaphor" a metaphor for? In: Ortony (ed.), 481-532

Bradie, Michael, 1984: The metaphorical character of science. *Philosophia Naturalis* 21, 229-243

Breger, Herbert, 1991: Der mechanistische Denkstil in der Mathematik des 17. Jahrhunderts. In: Hartmut Hecht (ed.), *Gottfried Wilhelm Leibniz im philosophischen Diskurs über Geometrie und Erfahrung.* Berlin: Akademie-Verlag, 15-46

Bromme, Rainer, 1990: Prototypikalität bei exakt definierten Begriffen. Das Beispiel der geraden und ungeraden Zahlen. *Sprache und Kognition* 9, 155-167

Budin, Gerhard, 1993: Wissenschaftstheoretische Aspekte der Erforschung von Wissenschaftssprachen. In: Hartmut Schröder (ed.), *Fachtextpragmatik* (= Forum für Fachsprachen-Forschung 19). Tübingen: Narr, 19-30

Bühler, Karl, 1968: *Sprachtheorie.* 2., unveränderte Auflage. Stuttgart: Fischer

Bungarten, Theo (ed.), 1981: *Wissenschaftssprache.* Beiträge zur Methodologie, theoretischen Fundierung und Deskription. München: Fink

Bungarten, Theo, (ed.), 1992: *Beiträge zur Fachsprachenforschung.* Sprache in Wissenschaft und Technik, Wirtschaft und Rechtswesen. (= HAFF. Hamburger Arbeiten zur Fachsprachenforschung 1). Tostedt: Attikon

Bungarten, Theo (ed.), 1993: *Fachsprachentheorie.* Bd. 1. Fachsprachliche Terminologie. Begriffs- und Sachsysteme. Bd. 2. Methodologie. Tostedt: Attikon

Bungarten, Theo, 1981: Wissenschaft, Sprache und Gesellschaft. In: Bungarten (ed.), 19-53

Burkhardt, Heinrich, 1892: Die Anfänge der Gruppentheorie und Paolo Ruffini. *Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik* 6, 119-159

Burkhardt, Armin, 1991: Vom Nutzen und Nachteil der Pragmatik für die diachrone Semantik. In: Dietrich Busse (ed.), *Diachrone Semantik und Pragmatik.* Untersuchungen zur Erklärung und Beschreibung des Sprachwandels. Tübingen, 7-36

Burns, J. E., 1913: The foundation period in the history of group theory. *American Mathematical Monthly* 20, 141-148

Burri, Alex, 1995: Metaphern, Modelle und wissenschaftliche Erklärungen. In: Danneberg et al. (edd.), 268-289

Busch, Wilhelm, 1933: *Die deutsche Fachsprache der Mathematik*. Ihre Entwicklung und ihre wichtigsten Erscheinungen mit besonderer Rücksicht auf Johann Heinrich Lambert (= Gießener Beiträge zur deutschen Philologie 30). Gießen: von Münchowsche Universitäts-Druckerei Otto Kindt

Busse, Dietrich, 1987: *Historische Semantik*. Analye eines Programms (= Sprache und Geschichte 13). Stuttgart: Klett-Cotta

Busse, Dietrich, 1992: *Textinterpretation*. Sprachtheoretische Grundlagen einer explikativen Semantik. Opladen: WDV

Cajori, Florian, 1980: *A History of Mathematics*. New York: Chelsea Publishing Company

Candel, Danielle, Danielle Lejeune, 1998: Définir en mathématiques: regards lexicographiques sur les textes de mathematique. *Cahiers de Lexicologie* 73, 43-60

Candel, Danielle, 1997: Lexicographie de specialité: domaine: mathématiques. *Cahiers de Lexicologie* 71, 21-36

Cantor, Paul, 1982: Friedrich Nietzsche: The use and abuse of metaphor. In: Miall (ed.), 71-88

Cassinet, Jean, 1988: Paolo Ruffini (1765-1822): la résolution algébrique des équations et les groupes de permutations. *Bolletino di Storia delle Scienze Mathematiche* 8, 21-69

Cassirer, Ernst, 1977: *Philosophie der symbolischen Formen*. Dritter Teil. Phänomenologie der Erkenntnis. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft

Chandler, B., W. Magnus, 1982: *The History of Combinatorial Group Theory*. A case study in the history of ideas. New York: Springer

Cohen, Ted, 1979: Metaphor and the cultivation of intimacy. In: Sacks (ed.), 1-10

Cohn, P. M., 1977: *Skew Field Constructions* (= London Mathematical Society Lecture Notes 27). Cambridge: CUP

Collison, M. J., 1980: The unique factorization theorem: from Euclid to Gauß. *Mathematical Magazine* 53, 96-100

Cooper, David E., 1986: *Metaphor* (= Aristotelian Society Series 5). Oxford: Blackwell

Corry, Leo, 1996: *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures*. Basel: Birkhäuser

Coulson, Sena, Todd Oakley, 2000: Blending basics. *Cognitive Linguistics* 11.3, 175-196

Croft, William, 1993: The role of domains in the interpretation of metaphors and metonymies. *Cognitive Linguistics* 4.4, 335-370

Crowe, Michael J., 1967: *A History of Vector Analysis*. The Evolution of the Idea of a Vectorial System. London: University of Notre Dame Press

Crowe, Michael, 1988: Ten misconceptions about mathematics and its history. In: Aspray - Kitcher (edd.), 260-277

Cruse, David Alan, 1986: *Lexical Semantics*. Cambridge: CUP

Cruse, David Alan, 1990: Prototype theory and lexical semantics. In: Tsohatzidis (ed.), 382-402

Cruse, David Alan, 2000: *Meaning in Language*. An Introduction to Semantics and Pragmatics. Oxford: OUP

Cruse, D. Alan et al. (edd.), 2002: *Lexikologie/Lexicology*. Ein internationales Handbuch zur Natur und Struktur von Wörtern und Wortschätzen / An international handbook on the nature and structure of words and vocabularies. Herausgegeben von / edited by D. Alan Cruse, Franz Hundsnurscher, Michael Job, Peter Rolf Lutzeier. 1. Halbband / Volume 1. Berlin, New York: de Gruyter

Dahan, Amy, 1980: Les travaux de Cauchy sur les substitutions. Étude de son approche du concept de groupe. *Archive for History of Exact Sciences* 23, 279-319

Danneberg, Lutz et al. (edd.), 1995: *Metapher und Innovation*. Die Rolle der Metapher im Wandel von Sprache und Wissenschaft (= Berner Reihe philosophischer Studien 16). Bern et al.: Haupt

Dauben, Joseph W. (ed.), 1981: *Mathematical Perspectives*. Essays on Mathematics and its Historical Development. New York et al.: Academic Press

Dauben, Joseph W. et al. (ed.), 1996: *History of Mathematics*. States of the art. Flores quadrivii - Studies in Honor of Christoph J. Scriba. San Diego et al.: Academic Press

David, H. A., 1995: First (?) Occurrence of Common Terms in Mathematical Statistics. *The American Statistician* 49.2, 121-133

David, H. A., 1998: First (?) Occurrence of Common Terms in Probability and Statistics – A Second List, with Corrections. *The American Statistician* 52.1, 36-40

Davis, Philip J., Reuben Hersh, 1994: *Erfahrung Mathematik*. Mit einer Einleitung von Hans Freudenthal. Aus dem Amerikanischen von Jeannette Zehnder. Basel et al.: Birkhäuser

de Beaugrande, Robert, 1993: 'Register' in discourse studies: a concept in search of a theory. In: Ghadessy (ed.), 7-25

de Saussure, Ferdinand, 1985: *Cours de linguistique générale*. Publié par Charles Bally et Albert Séchehaye. Avec la collaboration de Albert Riedlinger. Édition critique préparée par Tullio de Mauro. Postface de Louis-Jean Calvet (= Bibliothèque scientifique Payot). Paris: Payot

Debatin, Bernhard, 1995: *Die Rationalität der Metapher*. Eine sprachphilosophische und kommunikationstheoretische Untersuchung (= Grundlagen der Kommunikation und Kognition). Berlin, New York: de Gruyter

Dewell, Robert B., 1994: Over again: Image-schema transformations in semantic analysis. *Cognitive Linguistics* 5.4, 351-380

Dickson, Leonard E., 1951: *History of the Theory of Numbers*. 3 vols. New York: Chelsea

Dieudonné, Jean (ed.), 1978: *Abrégé d'histoire des mathématiques 1700-1900*. I. Algèbre, Analyse classique, Théorie des nombres. II. Fonctions elliptiques, Analyse fonctionnelle, Topologie, Géométrie différentielle, Probabilités, Logique mathématique. Paris: Hermann

Dieudonné, Jean, 1976: Le développement historique de la notion de groupe. *Bulletin de la Société Mathématique de Belgique* 28, 267-296

Dieudonné, Jean, 1982: The work of Bourbaki during the last thirty years. *Notices of the American Mathematical Society* 29, 618-623

Dieudonné, Jean, 1987: *Pour l'honneur de l'esprit humain*. Les mathématiques aujourd'hui. Paris: Hachette

Dirven, René, 1985: Metaphor and polysemy. *Cahiers de l'Institut de Linguistique de Louvain* 11.3-4, 9-27

Dorier, Jean-Luc, 1995: A general outline of the genesis of vector space theory. *Historia Mathematica* 22, 227-261

Dreistadt, Roy, 1968: An analysis of the use of analogies and metaphors in science. *Journal of Psychology* 68, 97-117

Drozd, L., Seibicke, W., 1973. *Deutsche Fach- und Wissenschaftssprache.* Bestandsaufnahme - Theorie - Geschichte. Wiesbaden: Oscar Brandstetter

du Sautoy, Maurice, 2003: *The Music of the Primes.* New York: HarperCollins

Dubinsky, Ed, 1999: Mathematical reasoning: analogies, metaphors, and images. *Notices of the American Mathematical Society* 46.5, 555-559

Dubinsky, Ed, 2000: Meaning and formalism in mathematics. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 5, 211–240

Dugac, Pierre, 1976: *Richard Dedekind et les fondements des mathématiques* (avec de nombreux textes inédits). Paris: Vrin

Dunmore, Caroline, 1992: Meta-level revolutions in mathematics. In: Gillies (ed.), 209-225

Ebbinghaus, Heinz-Dieter, 1992: Mengenlehre und Mathematik. In: Ebbinghaus et al. (edd.), 298-319

Ebbinghaus, Heinz-Dieter, et al. (edd.), 1992: *Zahlen.* 3. Auflage. Berlin et al.: Springer

Ebert, Wolfgang, 1970: Linguistische Fragen des Fachwortschatzes. *Sprachpflege* 19, 227-231

Edwards, Harold, Olaf Neumann, Walter Purkert, 1982: Dedekinds ‚Bunte Bemerkungen' zu Kroneckers ‚Grundzüge'. *Archive for History of Exact Sciences* 27, 49-85

Edwards, Harold M., 1975: The background of Kummer's proof of Fermat's last theorem. *Archive for History of Exact Sciences* 14, 219-236

Edwards, Harold M., 1977a: Postscript to 'The background of Kummer's proof of Fermat's last theorem'. *Archive for History of Exact Sciences* 17, 381-394

Edwards, Harold M., 1977b: *Fermat's Last Theorem.* A genetic introduction to algebraic number theory. New York et al.: Springer

Edwards, Harold M., 1980: The genesis of ideal theory. *Archive for the History of Exact Sciences* 23, 321-378

Edwards, Harold M., 1983: Dedekind's invention of ideals. *Bulletin of the London Mathematical Society* 15, 8-17

Edwards, Harold M., 1988: Kronecker's place in history. In: Aspray - Kitcher (edd.), 139-144

Edwards, Harold M., 1989: Kronecker's views on the foundations of mathematics. In: D. Rowe, J. McCleary (edd.), *The History of Modern Mathematics*. Vol. I: Ideas and their reception. Boston, London: Academic Press, 67-77

Edwards, Harold, 1992: Kronecker's arithmetical theory of algebraic quantities. *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung* 94, 130-139

Eisenreich, Günther, 1998: Die Fachlexikographie der Mathematik: eine Übersicht. In: Hoffmann et al. (edd.), 1959-1966

Eisenreich, Günther, 1999: Die neuere Fachsprache der Mathematik seit Carl Friedrich Gauß. In: Hoffmann et al. (edd.), 1222-1230

Elgin, Catherine Z., 1995: Metaphor and reference. In: Radman (ed.), 53-72

English, Lyn D. (ed.), 1997: *Mathematical Reasoning*. Analogies, Metaphors, and Images (= Studies in Mathematical Thinking and Learning). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates

English, Lyn D., 1997: Analogies, metaphors, and images: vehicles for mathematical reasoning. In: English (ed.), 3-18

Eucken, Rudolf, 1964: *Geschichte der philosophischen Terminologie im Umriss*. Hildesheim: Olms

Evans, Nicholas, 1992: Multiple semiotic systems, hyperpolysemy, and the reconstruction of semantic change in Australian languages. In: Gunter Kellermann, Michael D. Morissey (edd.), *Diachrony within Synchrony*. Language, History and Cognition. Frankfurt a. M.: Lang, 475-508

Ferreirós, José, 1999: *Labyrinth of Thought*. A history of set theory and its role in modern mathematics (= Science Networks 23). Basel et al.: Birkhäuser

Fillmore, Charles J., 1975: An alternative to checklist theories of meaning. In: Cathy Cogen (ed.), *Proceedings of the first annual meeting of the Berkeley Linguistics Society*. February 15-17, 1975. Berkeley: Berkeley Linguistics Society, 123-131

Fischer, Andreas, 1997: Lexical and semantic change: an evaluation of structural, pragmatic and cognitive explanations. In: Uwe Böker, Hans Sauer (edd.), *Anglistentag 1996 Dresden*. Proceedings. Trier: Wissenschaftlicher Verlag Trier, 61-69

Fraas, Claudia, 1990: Terminologiebetrachtung zwischen Theorie und Praxis. *Zeitschrift für Germanistik* 5, 524-542

Fraas, Claudia, 1992: Terminologiebetrachtung im Kontext der modernen Sprachwissenschaft. In: Bungarten (ed.), 152-161

Fraas, Claudia, 1998: Lexikalisch-semantische Eigenschaften von Fachsprachen. In: Hoffmann et al. (edd.), 428-438

Franci, Raffaella, 1992: On the axiomatization of group theory by American mathematicians: 1902-1905. In: Sergei S. Demidov et al. (edd.), *Amphora*. Festschrift für Hans Wußing. Basel: Birkhäuser, 261-277

Fritz, Gerd, 1998: *Historische Semantik* (= Sammlung Metzler 313). Stuttgart, Weimar: Metzler

Geckeler, Horst, 1982: *Strukturelle Semantik und Wortfeldtheorie*. München: Fink

Geeraerts, Dirk, 1988: Cognitive grammar and the history of lexical semantics. In: Rudzka-Ostyn (ed.), 647-677

Geeraerts, Dirk, 1989: Introduction. Prospects and problems of prototype theory. *Linguistics* 27, 587-612

Geeraerts, Dirk, 1997: *Diachronic Prototype Semantics*. A contribution to historical lexicology. Oxford: Clarendon

Gentilhomme, Yves, 1993: Réflexions sur les discours scientifiques. In: Bungarten (ed.), 430-494

Gentilhomme, Yves, 1994: L'éclatement du signifié dans les discours techno-scientifiques. *Cahiers de Lexicologie* 64, 5-35

Gentilhomme, Yves, 1995: Contributions à une réflexion sur les locutions mathématiques. *Cahiers de Lexicologie* 66, 5-37

Gentilhomme, Yves, 2000: Termes et textes mathématiques. Réflexions linguistiques non standard. *Cahiers de lexicologie* 76, 57-90

Gentner, Dedre, Michael Jeziorski, 1993: The shift from metaphor to analogy in Western science. In: Ortony (ed.), 447-480

Gentner, Dedre, A. B. Markman, 1997: Structure mapping in analogy and similarity. *American Psychologist* 52, 45-56

Gentner, Dedre, 1982: Are scientific analogies metaphors? In: Miall (ed.), 106-132

Gentner, Dedre, 1998: Analogy. In: W. Bechtel, G. Graham (edd.), *A Companion to Cognitive Science*. Oxford: Blackwell, 107-113

Gentner, Dedre et al., 2001: Metaphor is like analogy. In: D. Gentner et al. (edd.), *The Analogical Mind*. Perspectives from cognitive science. Cambridge, MA: MIT Press, 199-253

Gericke, Helmut, 1970: *Geschichte des Zahlbegriffs* (= BI-Hochschultaschenbücher 172). Mannheim et al.: BI Wissenschaftsverlag

Gericke, Helmut, 1973: Vorgeschichte der Mengenlehre. *Mathematisch-Physikalische Semesterberichte*. Neue Folge 20, 151-170

Gerisch, Peter, 1988: Fachbedingte sprachliche Charakteristika mathematischer Texte. *Special Language / Fachsprache* 10.1-2, 50-65

Gessinger, Joachim, 1992: Metaphern in der Wissenschaftssprache. In: Bungarten (ed.), 29-56

Ghadessy, Mohsen (ed.), 1993: *Register Analysis*. Theory and Practice (= Open Linguistic Series). London: Pinter

Gibbs, Raymond, Gerard Sheen (edd.), 1997: *Metaphor in Cognitive Linguistics*. Selected papers from the 5th international cognitive linguistics conference. Amsterdam: Benjamins

Gogin, Olaf, Laila Zimmermann, 1975: *Platon*. Lexikon der Namen und Begriffe. Zürich, München: Artemis

Gillies, Donald (ed), 1992: *Revolutions in mathematics*. Oxford: Clarendon Press

Gilliver, Peter M., 1999: Specialized lexis in the *Oxford English Dictionary*. In: Hoffmann et al. (edd.), 1677-1684

Gipper, Helmut, 1964: Muttersprachliche Wirkungen auf die wissenschaftliche Begriffsbildung und ihre Folgen. *Archiv für Begriffsgeschichte* 9, 243-259

Gläser, Rosemarie, 1993: Der britische Registerbegriff im Lichte der Fachsprachenforschung. In: Bungarten (ed.), Bd. 2, 567-594

Gloy, Klaus, 1998: Sprachnormen und die Isolierung und Integration von Fachsprachen. In: Hoffmann et al. (edd.), 100-109

Goatly, Andrew, 1993: Species of metaphor in written and spoken varieties. In: Ghadessy (ed.), 110-148

Goatly, Andrew, 1997: *The Language of Metaphors*. London: Routledge

Gold, B., 2001: Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being. *Read this! The MAA Online book review forum.* http://www.maa.org/review/wheremath.html

Goldin, G., 2001: Counting on the metaphorical. Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being. *Nature* 413 (6851), 18-19

Goldstein, Catherine, 1992: On a seventeenth-century version of the fundamental theorem of arithmetic. *Historia Mathematica* 19, 177-187

Gotti, Maurizio, 1992: The development of a scientific English language in the 17th century. In: C. Nocera Avila et al. (edd.), *Early Modern English*: trends, forms, and texts. Papers read at the IV National Conference of History of English. Catalania 2-3 May 1991 (= Cultura Straniera 49). Fasano: Schema editore, 321-343

Götze, Alfred, 1919: *Anfänge einer mathematischen Fachsprache in Keplers Deutsch* (= Germanische Studien 1). Berlin: Emil Ebering

Grabiner, Judith V., 1990: *Calculus As Algebra*. J.-L. Lagrange, 1736-1813 (= Harvard Dissertations in the History of Science). New York, London: Garland

Grattan-Guiness, Ivor (ed.), 1994: *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of Mathematics*. 2 vols. London: Routledge

Gray, Jeremy J., 1990: Herausbildung von strukturellen Grundkonzepten der Algebra im 19. Jahrhundert. In: Scholz (ed.), 293-323

Gray, Jeremy, 1992: The nineteenth-century revolution in mathematical ontology. In: Gillies (ed), 226-247

Grice, Herbert Paul, 1975: Logic and conversation. In: Peter Cole, Jerry L. Morgan (edd.), *Speech Acts* (= Syntax and Semantics 3). New York et al.: Academic Press, 41-58

Grosholz, Emily, Herbert Breger (edd.), 2000: *The Growth of Mathematical Knowledge* (= Synthese Library). Dordrecht, Boston, London: Kluver

Grosholz, Emily, 2000a: Introduction. In: Grosholz - Breger (edd.), xi-xxxvi

Grosholz, Emily, 2000b: The partial unification of domains, hybrids, and the growth of mathematical knowledge. In: Grosholz - Breger (edd.), 81-91

Groth, Paul, 1926: *Entwicklungsgeschichte der mineralogischen Wissenschaften*. Berlin: Springer

Groult, Martine (ed.), 1988: *Transfert du vocabulaire dans les sciences*. Paris: Éditions du centre national de la recherche scientifique

Guérindon, Jean, Jean Dieudonné, 1978: L'algèbre et la géométrie jusqu'en 1840. In: Dieudonné (ed.), vol. I, 55-90

Gunnarson, Britt-Louise, 1993: Fachsprachen und soziolinguistische Theorien: Eine Untersuchung über ihre Relevanz für die Fachsprachenforschung. In: Bungarten (ed.), Bd. 2, 618-676

Hadamard, Jacques, 1954: *The Psychology of Invention in the Mathematical Field*. New York: Dover

Haiman, J., 1985: *Natural Syntax*. Iconicity and erosion. Cambridge: CUP

Halliday, M. A. K., Robin P. Fawcett (edd.), 1987: *New Developments in Systemic Linguistics*. Volume 1: Theory and Description. London, New York: Pinter

Halliday, M. A. K., Ruqaiya Hasan, 1976: *Cohesion in English* (= English Language Series 9). New York, London: Longman

Halliday, M. A. K., Ruquaiya Hasan, 1985: *Language, Context, and Text*. Aspects of a language in a social-semiotic perspective. Oxford: OUP

Halliday, M. A. K., J. R. Martin, 1993: *Writing Science*. Literacy and Discursive Power. London: The Falmer Press

Halliday, M. A. K., Angus McIntosh, Peter Strevens, 1964: *The Linguistic Sciences and Language Teaching*. London: Longman

Halliday, M. A. K., 1978: Sociolinguistic aspects of mathematical education. In: ders., *Language as social semiotic*. The social interpretation of language and meaning. London: Arnold, 194-204

Halliday, M. A. K., 1988: On the language of physical science. In: Ghadessy (ed.), 162-178

Hallyn, Fernand (ed.), 2000: *Metaphor and Analogy in the Sciences* (= Origins. Studies in the sources of scientific creativity 1). Dordrecht: Kluwer

Hamburg, Robin Rider, 1976/77: The Theory of Equations in the 18th Century: The Work of Joseph Lagrange. *Archive for History of Exact Sciences* 16, 17-36

Hankinson, R. J., 1998: Usage and abusage: Galen on language. In: Stephen Everson (ed.), *Language* (= Companions to Ancient Thought 3). Cambridge: CUP, 166-187

Harm, Volker, 2000: *Regularitäten des semantischen Wandels bei Wahrnehmungsverben des Deutschen* (= Zeitschrift für Dialektologie und Linguistik. Beihefte 110). Stuttgart: Franz Steiner

Hartmann, Dietrich, 1980: Über den Einfluß von Fachsprachen auf die Gemeinsprache. Semantische und variationstheoretische Überlegungen zu einem wenig erforschten Zusammenhang. In: Claus Gnutzmann, John Turner (edd.), *Fachsprachen und ihre Anwendung* (= Tübinger Beiträge zur Linguistik 144). Tübingen: Narr, 27-48

Haubrich, Ralf, 1992: Zur Entstehung der algebraischen Zahlentheorie Richard Dedekinds. Diss. Göttingen

Haugen, Einar, 1950: The analysis of linguistic borrowing. *Language* 26, 210-231

Hausmann, Franz Josef et al. (edd.), 1989, 1990, 1991: *Wörterbücher/Dictionaries/Dictionnaires.* Ein internationales Handbuch zur Lexikographie. International Encyclopedia of Lexicography. Encyclopédie internationale de lexicographie (= Handbücher zur Sprach- und Kommunikationswissenschaft 5). 3 Bde. Berlin, New York: de Gruyter

Havránek, Bohuslav, 1932: Úkoly spisovného jazyka a jeho kultura. In: B. Havránek, M. Weingart (edd.), *Spisovná čeština a jazyková kultura.* Prag: Melantrich, 32-84. Zitiert nach: Havránek 1976

Havránek, Bohuslav, 1964: The functional differentiation of the standard language. In: Paul L. Garvin (ed.), *A Prague School Reader on Esthetics, Literary Structure, and Style.* Washington, D. C.: Georgetown University Press, 3-16

Havránek, Bohuslav, 1969: Die Theorie der Schriftsprache. In: E. Beneš, J. Vachek (edd.), *Stilistik und Soziolinguistik.* Beiträge der Prager Schule zur strukturellen Sprachbetrachtung und Spracherziehung. Berlin [ohne Verlag], 19-37

Havránek, Bohuslav, 1976: Die Aufgaben der Literatursprache und die Sprachkultur. In: Scharnhorst - Ising (edd.), 103-141

Hawkins, Thomas, 1977: Another look at Cayley and the theory of matrices. *Archives Internationales d'Histoire des Sciences* 27, 82-112

Hawkins, Thomas, 1982: Wilhelm Killing and the structure of Lie algebras. *Archive for History of Exact Sciences* 26, 127-192

Hawkins, Thomas, 2000: *Emergence of the Theory of Lie Groups.* An Essay in the History of Mathematics 1869-1926 (= Sources and Studies in the History of Mathematics and Physcial Sciences). New York et al.: Springer

Heath, Thomas L. (ed.), 1956: *The Thirteen Books of Euclid's Elements.* Translated from the text of Heiberg. With Introduction and Commentary. Second Edition. Revised with Additions. 3 Vols. New York: Dover

Heath, Thomas L., 1980: *Mathematics in Aristotle.* New York, London: Garland

Heger, Klaus, 1969: Die Semantik und die Dichotomie von Langue und Parole. *Zeitschrift für Romanische Philologie* 85, 144-215

Heintz, Bettina, 2000: *Die Innenwelt der Mathematik.* Zur Kultur und Praxis einer beweisenden Disziplin (= Ästhetik der Naturwissenschaften). Wien: Springer

Hendy, M. D., 1975: Euclid and the fundamental theorem of arithmetic. *Historia Mathematica* 2, 189-191

Henwood, Mervyn R., Ivan Rival, 1980: Eponymy in mathematical nomenclature: What's in a name, and what should be? *The Mathematical Intelligencer* 2.4, 204-205

Herbermann, Clemens-Peter, 1995: Felder und Wörter. In: U. Hoinkes (ed.), *Panorama der lexikalischen Semantik.* Thematische Festschrift aus Anlaß des 60. Geburtstags von Horst Geckeler. Tübingen: Narr, 263-291

Herbermann, Clemens-Peter, 1998: Benennungsprinzipien und Benennungssituationen. Zu einigen Grundbegriffen der Etymologie. In: Eva Schmitsdorf et al. (edd.), *Lingua Germanica.* Studien zur deutschen Philologie. Jochen Splett zum 60. Geburtstag. Münster, 70-91

Hesse, Mary, 1995: Models, metaphors and truth. In: Radman (ed.), 351-371

Hesse, Mary, 2000: Models and analogies. In: W. H. Newton-Smith, *A Companion to the Philosophy of Science* (= Blackwell Companions to Philosophy 18). Oxford: Blackwell, 299-307

Hilty, Gerold, 1971: Bedeutung als Semstruktur. *Vox romanica* 30, 242-263

Hoffman, Robert, 1985: Some implications of metaphor for the philosophy and psychology of science. In: Paprotté - Dirven (edd.), 327-380

Hoffmann, Lothar, 1976: *Kommunikationsmittel Fachsprache.* Eine Einführung (= Sammlung Akademie-Verlag. Sprache. 44). Berlin: Akademie

Hoffmann, Lothar, 1985: *Kommunikationsmittel Fachsprache*. Eine Einführung (= Forum für Fachsprachenforschung 1). Tübingen: Narr

Hoffmann, Lothar, 1988: *Vom Fachwort zum Fachtext*. Beiträge zur Angewandten Linguistik (= Forum für Fachsprachen-Forschung 5). Tübingen: Narr

Hoffmann, Lothar, 1998a: Fachsprachen und Gemeinsprache. In: Hoffmann et al. (edd.), 157-168

Hoffmann, Lothar, 1998b: Anwendungsmöglichkeiten und bisherige Anwendung von linguistischen Methoden in der Fachsprachenforschung. In: Hoffmann et al. (edd.), 249-269

Hoffmann, Lothar, 1998c: Austauschprozesse zwischen fachlichen und anderen Kommunikationsbereichen: theoretische und methodische Probleme. In: Hoffmann et al. (edd.), 679-689

Hoffmann, Lothar, 1998d: Fachsprachen als Subsprachen. In: Hoffmann et al. (edd.), 189-199

Hoffmann, Lothar et al. (edd.), 1998/1999: *Fachsprachen*. Ein internationales Handbuch zur Fachsprachenforschung und Terminologiewissenschaft (= Handbücher zur Sprach- und Kommunikationswissenschaft 14). 2 Bde. Berlin et al.: de Gruyter

Hoffmann, Lothar, Hartwig Kalverkämper, 1998: Forschungsdesiderate und aktuelle Entwicklungstendenzen in der Fachsprachenforschung. In: Hoffmann et al. (edd.), 355-372

Hofmann, Karl H., 1992: Zur Geschichte des Halbgruppenbegriffs. *Historia Mathematica* 19, 40-59

Holton, Gerard, 1995: Metaphors in science and education. In: Radman (ed.), 259-288

Hüllen, Werner, 1981: On defining and describing 'special language'. In: Jürgen Esser, Axel Hübler (edd.), *Form and Function* (= Tübinger Beiträge zur Linguistik 149). Tübingen: Narr, 185-196

Hüllen, Werner, 1984: Bischof Wilkins und die Fachsprachen unserer Zeit. *Special Language/Fachsprache* 6, 115-122

Hüllen, Werner, 1989: *„Their Manner of Discourse"*. Nachdenken über Sprache im Umkreis der Royal Society. Tübingen: Narr

Hüllen, Werner, 1999: The Royal Society and the plain style debate. In: Hoffmann et al. (edd.), 2465-2471

Hums, Lothar, 1988: Zur Problematik metaphorischer Benennungen in Wissenschaft und Technik. *Zeitschrift für Germanistik* 9, 43-56

Hunger, Karl Gottlob, 1874: Die arithmetische Terminologie der Griechen als Kriterium für das System der griechischen Arithmetik. Pr. Hildburghausen

Hymes, Dell, 1979: *Soziolinguistik*. Zur Ethnographie der Kommunikation. Eingeleitet und herausgegeben von Florian Coulmas (= suhrkamp taschenbuch wissenschaft 299). Frankfurt a. M.: Suhrkamp

Jahnke, Hans Niels, M. Otte (edd.), 1981: *Epistemological and Social problems of the Sciences in the Early Nineteenth Century*. Dordrecht: Reidel

Jahnke, Hans Niels, Michael Otte, 1981: On 'Science as a Language'. In: Jahnke - Otte (edd.), 75-89

Jahnke, Hans Niels, 1987: Motive und Probleme der Arithmetisierung der Mathematik in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts - Cauchys Analysis in der Sicht des Mathematikers Martin Ohm. *Archive for History of Exact Sciences* 37, 101-182

Jahr, Silke, 1992: Die Verknüpfung des merkmalsemantischen und prototypischen Ansatzes bei der Beschreibung von Fachtermini. *Fachsprache* 1.2, 41-45

Jahr, Silke, 1993: Zum Verhältnis von Bedeutung, Begriff und Wissen bei Fachtermini. *Fachsprache* 15.1-2, 38-44

Jäkel, Olaf, 1997: European Predecessors of a Cognitive Theory of Metaphor. In: Birgit Smieja, Meike Tasch (edd.), *Human Contact through Language and Linguistics*. Frankfurt a. M. et al.: Peter Lang, 69-86

Jakob, Karlheinz, 1998: Fachsprachliche Phänomene in der Alltagskommunikation. In: Hoffmann et al. (edd.), 710-717

Jakobson, Roman, 1956: Two aspects of language and two types of aphasic disturbances. In: R. Jakobson, M. Halle (edd.), *Fundamentals of Language* (= Janua linguarum 1). 's Gravenhage: Mouton, 53-87

Jakobson, Roman, 1960: Closing statement: linguistics and poetics. In: Thomas Sebeok (ed.), *Style in Language*. Cambridge, Mass.: MIT Press, 350-377. Zitiert nach: Stephen Rudy (ed.), *Selected Writings* [...]. Vol. III. The Hague: Mouton, 1981, 18-51

Johnson, Mark, 1987: *The Body in the Mind*. The bodily basis of meaning, imagination, and reason. Chicago - London: University of Chicago Press

Johnson, Art, 1994: History of mathematical terms. In: Art Johnson, *Classic Math*. History topics for the Classroom. Palo Alto: Dale Seymour Publications, 151-160

Johnson, Francis R., 1944: Latin versus English: The sixteenth-century debate over scientific terminology. *Studies in Philology* 41.2, 109-136

Jones, Richard Foster, 1932: Science and language in England in the Mid-Seventeenth century. *Journal of English and Germanic Philology* 30, 315-331

Kalverkämper, Hartwig, (ed.), 1988: *Fachsprachen in der Romania*. Tübingen: Narr

Kalverkämper, Hartwig, 1990: Gemeinsprache und Fachsprachen - Plädoyer für eine integrierende Sichtweise. In: Gerhard Stickel (ed.), *Deutsche Gegenwartssprache*. Tendenzen und Perspektiven. Berlin, New York: de Gruyter, 88-133

Kalverkämper, Hartwig, 1993: Diachronie in der Fachsprachenforschung - Überlegungen zu Inhalt, Methoden und Zielen. *Finlance* 12, 18-47

Kalverkämper, Hartwig, 1998a: Fach und Fachwissen. In: Hoffmann et al. (edd.), 1-24

Kalverkämper, Hartwig, 1998b: Fachsprache und Fachsprachenforschung. In: Hoffmann et al. (edd.), 48-59

Kalverkämper, Hartwig, 1998c: Darstellungsformen und Leistungen schriftlicher Fachkommunikation. In: Hoffmann et al. (edd.), 60-92

Kalverkämper, Hartwig, 1998d: Rahmenbedingungen für die Fachkommunikation. In: Hoffmann et al. (edd.), 25-47

Karpinski, Louis C., Adeleide M. Fiedler, 1924: The terminology of elementary geometry. *School Science and Mathematics* 24, 162-167

Kasner, Edward, James R. Newman, 1989: *Mathematics and the Imagination*. Redmond, Washington: Tempus Books

Kästner, Abraham Gotthelf, 1791: Über Kunstwörter, besonders in der Mathematik. *Philosophisches Magazin* 4, 255-270

Keller, Rudi, 1994: *Sprachwandel*. Von der unsichtbaren Hand in der Sprache (= UTB 1567). Tübingen: Francke

Keller, Rudi, 1995: *Zeichentheorie*. Zu einer Theorie semiotischen Wissens (= UTB 1849). Tübingen: Francke

Kiernan, B. Melvin, 1971/72: The development of Galois Theory from Lagrange to Artin. *Archive for History of Exact Sciences* 8, 40-154

Kittay, Eve Feder, Adrienne Lehrer, 1992: Introduction. In: dies., (edd.), *Frames, Fields, and Contrasts*. New Essays in Semantic and Lexical Organization. Hillsdale, N. J.: Lawrence Erlbaum, 1-18

Kittay, Eve Feder, 1987: *Metaphor*. Its cognitive force and linguistic structure. Oxford: Clarendon

Kleiber, Georges, 1998: *Prototypensemantik*. Eine Einführung. Übersetzt von Michael Schreiber (= Narr Studienbücher). 2. Auflage. Tübingen: Narr

Klein, Franz-Josef, 1997: *Bedeutungswandel und Sprachendifferenzierung*. Die Entstehung der romanischen Sprachen aus wortsemantischer Sicht (= Beihefte zur Zeitschrift für romanische Philologie 281). Tübingen: Niemeyer

Kleiner, Israel, 1996: The genesis of the abstract ring concept. *American Mathematical Monthly* 103, 417-424

Kleiner, Israel, 1998: From Numbers to Rings: The Early History of Ring Theory. *Elemente der Mathematik* 53, 18-35

Kline, Morris, 1972: *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. New York: OUP

Klostermann, H. D., 1933: Geschiedenis der ideaaltheorie. *Euclides* 10, 110-124

Knobloch, Eberhard, 1989: Analogie und mathematisches Denken. *Berichte zur Wissenschaftsgeschichte* 12, 35-47

Knobloch, Eberhard, 2000: Analogy and the Growth of Mathematical Knowledge. In: Grosholz - Breger (edd.), 295-314

Knorr, W., 1976: Problems in the interpretation of Greek number theory: Euclid and the „fundamental theorem of arithmetic“. *Studies in the History and Philosophy of Science* 7.3, 353-368

Knudsen, Susanne, 2003: Scientific metaphors going public. *Journal of Pragmatics* 35, 1247-1263

Koch, Peter, 1994: Gedanken zur Metapher - und zu ihrer Alltäglichkeit. In: Annette Sabban, Christian Schmitt (edd.), *Sprachlicher Alltag*. Linguistik - Rhetorik - Literaturwissenschaft. Festschrift für Wolf-Dieter Stempel. Tübingen: Niemeyer, 201-225

Koch, Peter, 1995: Der Beitrag der Prototypentheorie zur Historischen Semantik: eine kritische Bestandsaufnahme. *Romanistisches Jahrbuch* 46, 27-46

Koch, Peter, 1996a: Le prototype entre signifié, désigné et référent. In: Hiltraud Dupuy-Engelhardt (ed.), *Questions de méthode et de délimitation en sémantique lexicale*. Actes d'EUROSEM 1994. Reims: Presses universitaires, 113-135

Koch, Peter, 2001: Bedeutungswandel und Bezeichnungswandel. Von der kognitiven Semasiologie zur kognitiven Onomasiologie. *Zeitschrift für Literaturwissenschaft und Linguistik* 121, 7-36

Kocourek, Rostislav, 1991: *La langue française de la technique et de la science*. Vers une linguistique de la langue savante. Wiesbaden: Brandstätter

König, Gert (ed.), 1990: *Konzepte des mathematisch Unendlichen* (= Studien zur Wissenschafts-, Sozial- und Bildungsgeschichte 5). Göttingen: Vandenhoek & Ruprecht

Koppelman, Elaine, 1971/72: The Calculus of Operations and the Rise of Abstract Algebra. *Archive for History of Exact Sciences* 8, 155-242

Kothmann, Hella, 1998: Vom Kunst-Wort zur Wissenschaftssprache. Johannes Keplers Beitrag zur deutschen Fachsprache. In: Ulrich Grigull, Volker Bialas (edd.), *Johannes Keplers Beitrag zur Deutschen Fachsprache* (= Berichte der Kepler-Kommission 9). München: Bayerische Akademie der Wissenschaften, 7-49

Kretzenbacher, Heinz L., 1991: Zur Linguistik und Stilistik des wissenschaftlichen Fachworts (1). *Deutsch als Fremdsprache* 28.4, 195-201

Kretzenbacher, Heinz L., 1992: Zur Linguistik und Stilistik des wissenschaftlichen Fachworts (2). *Deutsch als Fremdsprache* 29.1, 38-46

Kretzenbacher, Heinz L., 1998: Fachsprache als Wissenschaftssprache. In: Hoffmann et al. (edd.), 133-142

Kretzenbacher, Heinz L., Harald Weinrich (edd.), 1995: *Linguistik der Wissenschaftssprache* (= Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Forschungsbericht 10). Berlin, New York: de Gruyter

Kroesch, S., 1926: Analogy as a factor in semantic change. *Language* 2, 35-45

Krömer, Ralf, 1999: Zur Geschichte des axiomatischen Vektorraumbegriffs. Diplomarbeit, Universität des Saarlandes

Krüger, Dagobert, 1992: Anmerkungen zur Entstehung und Diskussion mathematischer Termini an Beispielen des 17. und 18. Jahrhunderts. In: Albrecht - Braun (edd.), 117-133

Kuhn, Thomas S., 1979: Metaphor in science. In: Ortony (ed.), 409-419

Kuhn, Thomas S., 1993: Metaphor in science. In: Ortony (ed.), 533-542

Kupsch-Losereit, Sigrid, 1987: Hat das charmante Teilchen eine Farbe? Anmerkungen zur Begriffsmetaphorik in der Physik. In: Jörn Albrecht et al. (edd.), *Translation und interkulturelle Kommunikation.* 40 Jahre Fachbereich Angewandte Sprachwissenschaft der Johannes-Gutenberg-Universität Mainz in Germersheim (= Publikationen des Fachbereichs Angewandte Sprachwissenschaft der Johannes-Gutenberg-Universität Mainz in Germersheim 8). Frankfurt a. M. et al.: Lang, 199-214

Lakatos, Imre, 1976: *Proofs and Refutations.* The Logic of Mathematical Discovery. Cambridge: CUP

Lakoff, George, Mark Johnson, 1980: *Metaphors we Live by.* Chicago: University of Chicago Press

Lakoff, George, Mark Johnson, 1999: *Philosophy in the Flesh.* The embodied mind and its challenge to Western thought. New York: Basic Books

Lakoff, George, Rafael E. Núñez, 1997: The metaphorical structure of mathematics: sketching out cognitive foundations for a mind-based mathematics. In: English (ed.), 21-89

Lakoff, George, Rafael E. Núñez, 1998: Conceptual metaphor in mathematics. In: Jean-Pierre Koenig (ed.), *Discourse and Cognition.* Bridging the Gap. Stanford: CSLI Publications, 219-237

Lakoff, George, Rafael E. Núñez, 2000: *Where Mathematics Comes From.* How the embodied mind brings mathematics into being. New York: Basic Books

Lakoff, George, 1986: The Meanings of Literal. *Metaphor and Symbolic Activity* 1, 291-296

Lakoff, George, 1987: *Women, Fire, and Dangerous Things.* What categories reveal about the mind. Chicago: University of Chicago Press

Lakoff, George, 1990: The invariance hypothesis: is abstract reason based on image-schemas? *Cognitive Linguistics* 1, 39-74

Lakoff, George, 1993: The contemporary theory of metaphor. In: Ortony (ed.), 202-251

Langacker, Ronald W., 1987: *Foundations of Cognitive Grammar*. Vol. 1: Theoretical prerequisites. Stanford, California: Stanford UP

Langacker, Ronald W., 1988: A view of cognitive semantics. In: Rudzka-Ostyn (ed.), 49-90

Langacker, Ronald W., 1998: Conceptualiziation, symbolization, and Grammar. In: Michael Tomasello (ed.), *The New Psychology of Language*. Cognitive and Functional Approaches to Language Structure. London: Lawrence Erlbaum, 1-39

Laugwitz, Detlef, 1965: Bemerkungen zu Bolzanos Größenlehre. *Archive for History of Exact Sciences* 2, 398-409

Lausberg, Heinrich, 1963: *Elemente der literarischen Rhetorik*. München: Hueber

Lehrer, Adrienne, Eve Feder Kittay (edd.), 1992: *Frames, Fields, and Contrasts*. New essays in semantic and lexical organization. Hillsdale, N. J.: Erlbaum

Lehrer, Adrienne, 1985: The influence of semantic fields on semantic change. In: Jacek Fisiak (ed.), Historical Semantics and Historical Word-Formation (= Trends in Linguistics. Studies and Monographs 29). Berlin et al.: Mouton, 283-296

Leisi, Ernst, 1985: *Praxis der englischen Semantik*. 2., durchgesehene und ergänzte Auflage. Heidelberg: Winter

Lemmermeyer, Franz, o. J.: The failure of unique factorization. http://www.rzuser.uni-heidelberg.de/hb3/ (Zugriff 09/2002)

Lemmermeyer, Franz, 2000: *Reciprocity Laws*. Berlin, Heidelberg: Springer

Li Carillo, Víctor, 1981: Génesis y evolución del concepto matemático de isomorfismo. *Revista Venezolana de Filosofia* 14-15, 75-137

Lichtenberg, Donovan Royce, 1966: The Emergence of Structure in Algebra. Diss., University of Wisconsin

Lipka, Leonhard, 1986: Semantic features and prototype theory in English lexicology. In: Dieter Kastovsky, Aleksander Szwedek (ed.), *Linguistics across Historical and Geographical Boundaries*. Berlin: de Gruyter, 85-94

Lüdi, Georges, 1985: Zur Zerlegbarkeit von Wortbedeutungen. In: Schwarze - Wunderlich (edd.), 64-102

Lüttich, Ernest W. B., 1998: Fachsprachen als Register. In: Hoffmann et al. (edd.), 208-218

Lutzeier, Peter Rolf (ed.), 1993: *Studien zur Wortfeldtheorie/Studies in Lexical Field Theory.* Tübingen: Niemeyer

Lutzeier, Peter Rolf, 1981: *Wort und Feld.* Wortsemantische Fragestellungen mit besonderer Berücksichtigung des Wortfeldbegriffs. Tübingen: Niemeyer

Lutzeier, Peter Rolf, 1985a: *Linguistische Semantik.* Stuttgart: Metzler

Lutzeier, Peter Rolf, 1985b: Die semantische Struktur des Lexikons. In: Schwarze - Wunderlich (edd.), 103-133

Lutzeier, Peter Rolf, 1992: Wortfeldtheorie und kognitive Linguistik. *Deutsche Sprache* 20, 62-81

Lutzeier, Peter Rolf, 1995: Lexikalischer Felder - was sie waren, was sie sind und was sie sein könnten. In: Gisela Harras (ed.), *Die Ordnung der Wörter.* Kognitive und lexikalische Strukturen. Berlin, New York: de Gruyter, 4-29

Lyons, John, 1977: *Semantics.* Volume 1. Cambridge: CUP

Lyons, John, 1995: *Linguistic Semantics.* An introduction. Cambridge: CUP

Maasen, Sabine, 2000: Metaphors in the social sciences: Making use and making sense of them. In: Hallyn (ed.), 199-244

Madden, James J., 2001: Book Review: Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being. *Notices of the American Mathematical Society* 48.10, 1182-1188

Magidin, Arturo, David McKinnon, erscheint: Gauss's Lemma for number fields. To appear, pending revision, in *American Mathematical Monthly.* Preprint unter http:// www.math.uwaterloo.ca/∼dmckinnon/

Mainzer, Klaus, 1980: *Geschichte der Geometrie.* Mannheim: BI Wissenschaftsverlag

Marcus, Solomon, 1973: Eine rein denotierende Sprache: die mathematische Sprache. In: ders., *Mathematische Poetik* (= Linguistische Forschungen 13). Frankfurt a. M., 79-117

Martin, Janet, Rom Harré, 1982: Metaphor in Science. In: Miall (ed.), 89-105

Martin, J. R., Robert Veel (edd.), 1998: *Reading Science*. Critical and Functional Perspectives on Discourses of Science. London: Routledge

Martin, J. R., 1992: *English Text*. System and Structure. Philadelphia, Amsterdam: Benjamins

Martin Soskice, Janet, Rom Harré, 1995: Metaphor in science. In: Radman (ed.), 289-307

Matthiesen, Christian, 1993: Register in the round: diversity in a unified theory of register analysis. In: Ghadessy (ed.), 110-148

Mauskopf, Seymour H., 1976: *Crystals and compounds*. Molecular structure and composition in nineteenth-century France (= Transactions of the American Philosophical Society 66.3). Philadelphia: The American Philosophical Society

Mehrtens, Herbert, 1979a: *Die Entstehung der Verbandstheorie* (= arbor scientiarum. Beiträge zur Wissenschaftsgeschichte. Reihe A: Abhandlungen 6). Hildesheim: Gerstenberg

Mehrtens, Herbert, 1979b: Das Skelett der modernen Algebra. Zur Bildung mathematischer Begriffe bei Richard Dedekind. In: Christoph J. Scriba (ed.), *Disciplinae Novae*. Zur Entstehung neuer Denk- und Arbeitsrichtungen in der Naturwissenschaft. Festschrift zum 90. Geburtstag von Hans Schimank. Göttingen: Vandenhoek & Ruprecht, 25-43

Mehrtens, Herbert, 1990: *Moderne - Sprache - Mathematik*. Eine Geschichte des Streits um die Grundlagen der Disziplin und des Subjekts formaler Systeme. Frankfurt a .M.: Suhrkamp

Meillet, Antoine, 1905/06: Comment les mots changent de sens. *Année sociologique* 9, 1-38. Zitiert nach: ders., *Linguistique historique et linguistique générale*. Paris: Edition Honoré Champion, 1975, 230-271

Melhado, Evan M., 1980: Mitscherlich's discovery of isomorphism. *Historical Studies in the Physical Sciences* 11, 87-123

Menzel, Wolfgang Walter, 1996: *Vernakuläre Wissenschaft*. Christian Wolffs Bedeutung für die Herausbildung und Durchsetzung des Deutschen als Wissenschaftssprache (= Reihe Germanistische Linguistik 166). Tübingen: Niemeyer

Mertens, Hans-Jochem, Bruno Servos, Frank Stadler, 1973: Die Sprache der Mathematik. Das Wortmaterial und seine Beziehung zur Gemeinsprache. *Muttersprache* 83, 416-433

Meschkowski, Herbert, 1978: *Problemgeschichte der neueren Mathematik (1800-1950).* Mannheim: BI Wissenschaftsverlag

Metzger, Hélène, 1969: *La genèse de la science des cristaux.* Paris: Blanchard

Meyer, Ingrid, Kristen Mackintosh, 2000: When terms move into our everyday lives: An overview of de-terminologization. *Terminology* 6.1, 111-138

Miall, David (ed.), 1982: *Metaphor.* Problems and Perspectives. Brighton et al.: Harvester Press

Miller, George Abram, 1935a: *The Collected Works of George Abram Miller.* Volume I. Urbana, Ill.: University of Illinois

Miller, George Abram, 1935b: History of the theory of groups to 1900. In: Miller 1935a, 427-467

Miller, Arthur, 1995: Imagery and metaphor: the cognitive science connection. In: Radman (ed.), 199-224

Molino, J., 1979: Métaphores, modèles et analogies dans les sciences. *Langages* 54, 83-102

Monna, A. F., 1972: The concept of function in the 19th and 20th century. *Archive for History of Exact Sciences* 9, 57-84

Montuschi, Eleonora, 1995: What is wrong with talking of metaphors in science? In: Radman (ed.), 309-327

Montuschi, Eleonora, 2000: Metaphor in science. In: W. H. Newton-Smith, *A Companion to the Philosophy of Science* (= Blackwell Companions to Philosophy 18). Oxford: Blackwell, 277-282

Moretto, Antonio, 1990: Hegels Auseinandersetzung mit Cavalieri und ihre Bedeutung für seine Philosophie der Mathematik. In: König (ed.), 64-99

Motsch, Wolfgang, 1999: *Deutsche Wortbildung in Grundzügen* (= Schriften des Instituts für deutsche Sprache 8). Berlin, New York: de Gruyter

Mugler, Charles, 1948: *Platon et la recherche mathématique de son époque.* Strasbourg, Zurich: Éditions P. H. Heitz

Muir, Thomas, 1960: *The Theory of Determinants in the Historical Order of Development.* Four volumes bound as two. New York: Dover

Müller, Felix, 1887: *Historisch-etymologische Studien über mathematische Terminologie* (= Wissenschaftliche Beilage zum Programm des Königlichen Luisen-Gymnasiums. Ostern, 1887). Berlin

Müller, Felix, 1899: Zur Terminologie der ältesten mathematischen Schriften in deutscher Sprache. *Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik* 9, 301-333

Müller, Felix, 1909: *Führer durch die mathematische Literatur, mit besonderer Berücksichtigung der historisch wichtigen Schriften* (= Abhandlungen zur Geschichte der Wissenschaft 27). Leipzig: Teubner

Müller, Peter O., 1999: Die Fachsprache der Geometrie in der frühen Neuzeit. In: Hoffmann et al. (edd.), 2369-2377

Naumann, Hans (ed.), 1973: *Der moderne Strukturbegriff.* Materialien zu seiner Entwicklung (= Wege der Forschung 155). Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft

Nabrings, Kirsten, 1981: *Sprachliche Varietäten* (= Tübinger Beiträge zur Linguistik 147). Tübingen: Narr

Nerlich, Brigitte, 1992: *Semantic Theories in Europe 1830-1930.* From etymology to contextuality (= Amsterdam Studies in the theory and history of linguistic science 59). Amsterdam: Benjamins

Netto, Eugen, R. La Vavasseur, 1907: Les fonctions rationelles. In: Jules Molk (ed.), *Encyclopédie des mathématiques pures et appliquées.* Édition française. Tome I (deuxième volume). Algèbre. Paris: Gauthier-Villars, 1-232

Neumann, Olaf, 1981: Über die Anstöße zu Kummers Schöpfung der ‚idealen komplexen Zahlen'. In: Dauben (ed.), 179-199

Neumann, Olaf, 1996/97: Die Entwicklung der Galois-Theorie zwischen Arithmetik und Topologie (1850-1960). *Archive for History of Exact Sciences* 50, 291-329

Neumann, Peter, 1999: What groups were: a study of the development of the axiomatics of group theory. *Bulletin of the Australian Mathematical Society* 60, 285-301

Nicholson, Julia, 1993: The development and understanding of the concept of quotient group. *Historia Mathematica* 20, 68-88

Niederhauser, Jürg, 1995: Metaphern in der Wissenschaftssprache als Thema der Linguistik. In: Danneberg et al. (edd.), 290-298

Nordon, Didier, 1993: *Les mathématiques pures n'existent pas!* (= Mathématiques et société). Edition revue et augmentée. Dessins de Michel Mendès France. Arles: Actes Sud

Nový, Luboš, 1973: *Origins of Modern Algebra*. Leyden: Noordhoff

Núñez, Rafael, 2000: Conceptual metaphor and the embodied mind: What makes mathematics possible? In: Hallyn (ed.), 125-145

Olschki, Leonardo L., 1965: *Geschichte der neusprachlichen wissenschaftlichen Literatur*. Erster Band: Die Literatur der Technik und der angewandten Wissenschaften vom Mittelalter bis zur Renaissance. Vaduz: Klaus Reprint Ltd. [orig. Heidelberg: Winter, 1919]

O'Malley, M. T., 1973: The Emergence of the Concept of an Abstract Group. Diss., Columbia University

O'Neill, John, 1993: Intertextual reference in 19th-century mathematics. *Science in Context* 6, 435-468

Ore, Oystein, 1948: *Number Theory and its History*. New York: McGraw-Hill

Ortner, Hanspeter, 1994: Nachdenken über die Funktionen der Sprache. *Zeitschrift für germanistische Linguistik* 20, 271-297

Ortony, Andrew (ed.), 1979: *Metaphor and Thought*. Cambridge: CUP

Ortony, Andrew (ed.), 1993: *Metaphor and Thought*. 2nd edition. Cambridge: CUP

Ortony, Andrew, 1993: Metaphor, language, and thought. In: Ortony, A. (ed.), 1-16

Paprotté, Wolf, René Dirven (edd.), 1985: *The Ubiquity of Metaphor*. Metaphors in Language and Thought (= Amsterdam studies in the theory and history of linguistic science IV, Current issues in linguistic theory 29). Amsterdam: Benjamins

Parshall, Karen Hunger, Adrain C. Rice, 2002: The evolution of an international mathematical research community, 1800-1945: An overview and an agenda. In: Parshall - Rice (edd.), 1-15

Parshall, Karen, 1991: A study in group theory: Leonard Eugene Dickson's *Linear Groups*. *The Mathematical Intelligencer* 13.1, 7-11

Paul, Hermann, 1894: Über die Aufgaben der wissenschaftlichen Lexikographie mit besonderer Rücksicht auf das deutsche Wörterbuch. *Sitzungsberichte der philosophisch-philologischen und der historischen Classe der Königlich bayrischen Akademie der Wissenschaften.* Heft 1. München, 53-91. Zitiert nach: Helmut Henne, Jörg Kilian (edd.), *Hermann Paul.* Sprachtheorie, Sprachgeschichte, Philologie. Reden, Abhandlungen und Biographie (= RGL 200). Tübingen: Niemeyer, 1998, 131-169

Paulos, John Allen, 2001: Maths at 98.6°. *The American Scholar* 70.1, 151-152

Peiffer, Jeanne, Amy Dahan-Dalmedico, 1994: *Wege und Irrwege - Eine Geschichte der Mathematik.* Mit einem Vorwort von D. Laugwitz. Aus dem Französischen von Klaus Volkert. Basel et al.: Birkkäuser

Pepper, Stephen C., 1935: The root metaphor of metaphysics. *Journal of Philosophy* 32, 365-374

Petöfi, János S., 1981: Einige allgemeine Aspekte der Analyse und Beschreibung wissenschaftssprachlicher Texte. In: Bungarten (ed.), 140-168

Pickering, Neil, 1999: Metaphors and models in medicine. *Theoretical Medicine and Bioethics* 20, 361–375

Pielenz, Michael, 1993: *Argumentation und Metapher* (= Tübinger Beiträge zur Linguistik 381). Tübingen: Narr

Pimm, David, 1987: *Speaking mathematically.* Communications in the mathematics classroom. New York: Routledge

Pisani, Vittore, 1975: *Die Etymologie.* Geschichte - Fragen - Methode. München: Fink

Piur, Paul, 1903: *Studien zur sprachlichen Würdigung Christian Wolffs.* Ein Beitrag zur Geschichte der neuhochdeutschen Sprache. Halle: Karras

Poincaré, Henri, 1909: L'avenir des mathématiques. In: G. Castelnuovo (ed.), *Atti del IV congresso internazionale dei matematici.* Vol. 1. Roma: Accademia dei Lincei, 167-182

Pörksen, Uwe, 1983: Der Übergang vom Gelehrtenlatein zur deutschen Wissenschaftssprache. Zur frühen deutschen Fachliteratur und Fachsprache in den naturwissenschaftlichen und mathematischen Fächern (ca. 1500-1800). *Zeitschrift für Literaturwissenschaft und Linguistik* 13, 227-258

Pörksen, Uwe, 1986: *Deutsche Naturwissenschaftssprachen.* Historische und kritische Studien (= Forum für Fachsprachen-Forschung 2). Tübingen: Narr

Presmeg, Norma, 2002: Mathematical Idea Analysis: A Science of Embodied Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education* 33.1, 59-63

Pulaczewska, Hanna, 1999: *Aspects of Metaphor in Physics.* Examples and Case Studies (= Linguistische Arbeiten 407). Tübingen: Niemeyer

Purkert, Walter, 1971: Zur Genesis des abstrakten Körperbegriffs. 1. Teil. *Zeitschrift für Geschichte der Naturwissenschaft, Technik und Medizin (NTM)* 8.1, 23-37

Purkert, Walter, 1972: Die Entwicklung des abstrakten Körperbegriffs. Diss. Leipzig

Purkert, Walter, 1973: Zur Genesis des abstrakten Körperbegriffs. 2. Teil. *Zeitschrift für Geschichte der Naturwissenschaft, Technik und Medizin (NTM)* 10.2, 8-20

Raad, B. L., 1989: Modern trends in scientific terminology: morphology and metaphor. *American Speech* 64.2, 128-136

Radman, Zdravko, (ed.), 1995: *From a metaphorical point of view.* A multidisciplinary approach to the cognitive content of metaphor (= Philosophie und Wissenschaft 7). Berlin et al.: de Gruyter

Radman, Zdravko, 1995: How to make our ideas clear with metaphors. In: Radman (ed.), 225-256

Rautenberg, Wolfgang, 1965: Über den Sprachgebrauch in der Mathematik. *Deutsche Zeitschrift für Philosophie* 6, 721-738

Reddy, Michael, 1979: The conduit metaphor. In: Ortony (ed.), 284-324

Reich, Karin, 1996: Die Rolle Arnold Sommerfelds bei der Diskussion um die Vektorrechnung, dargestellt anhand der Quellen im Nachlaß des Mathematikers Rudolf Mehmke. In: Dauben (ed.), 310-341

Reid, T. B., 1956: Linguistics, structuralism, and philology. *Archivum Linguisticum* 8, 28-37

Reiner, Karl, 1961: Die Terminologie der ältesten mathematischen Werke in deutscher Sprache nach den Beständen der Bayrischen Staatsbibliothek. Diss. München

Remmert, Reinhold, 1992: Fundamentalsatz der Algebra. In: Ebbinghaus et al. (edd.), 79-99

Richards, I. A., 1979: *The Philosophy of Rhetoric*. London et al.: OUP

Ricken, Ulrich, 1995: Zum Thema Christian Wolff und die Wissenschaftssprache der deutschen Aufklärung. In: Weinrich - Kretzenbacher (edd.), 41-90

Ricken, Ulrich, 1999: Christian Wolffs Einfluß auf die Wissenschaftssprache der Aufklärung. In: Hoffmann et al. (edd.), 2420-2430

Ricœur, Paul, 1986: *Die lebendige Metapher*. Mit einem Vorwort zur deutschen Ausgabe. Aus dem Französischen von Rainer Rochlitz (= Übergänge. Texte und Studien zu Handlung, Sprache und Lebenswelt 12). München: Fink

Roelcke, Thorsten, 1999a: Sprachwissenschaft und Wissenschaftssprache. In: Wiegand (ed.), 595-618

Roelcke, Thorsten, 1999b: *Fachsprachen* (= Grundlagen der Germanistik 37). Berlin: Erich Schmidt Verlag

Rosch, Eleanor, C. Mervis, 1975: Family resemblances: studies in the internal structure of categories. *Cognitive Psychology* 7, 573-605

Rosch, Eleanor, 1973a: Natural categories. *Cognitive Psychology* 4, 328-350

Rosch, Eleanor, 1973b: On the internal structure of perceptual and semantic categories. In: T. E. Moore (ed.), *Cognitive development and the acquisition of language*. New York, San Francisco, London, 111-144

Rosch, Eleanor, 1975a: Cognitive reference points. *Cognitive Psychology* 7, 532-547

Rosch, Eleanor, 1975b: Cognitive representations of semantic categories. *Journal of Experimenal Psychology* 104, 192-233

Rosch, Eleanor, 1975c: Universals and cultural specifics in human categorization. In: R. W. Brislin (ed.), *Cross-cultural Perspectives on Learning*. New York: Sage, 177-206

Rosch, Eleanor, 1977: Human categorization. In: N. Warren (ed.), *Studies in Cross-Cultural Psychology*. Vol. 1. London: Academic Press, 3-39

Rosch, Eleanor, 1978: Principles of categorization. In: E. Rosch, B. B. Lloyd (edd.), *Cognition and Categorization*. Hillsdale, N. J.: Lawrence Erlbaum, 27-48

Rothbart, Daniel, 1997: *Explaining the growth of scientific knowledge*: metaphors, models, and meanings (= Problems in Contemporary Philosophy 37). Lewiston, N. Y. et al.: Edwin Mellen Press

Rotman, Brian, 1988: Towards a semiotics of mathematics. *Semiotica* 72, 1-35

Rudwick, M. J. S., 1979: Transposed concepts from the human sciences in the early work of Charles Lyell. In: L. J. Jordanova, R. S. Porter (edd.), *Images of the Earth*. Chalfont St. Giles: British Society for the History of Science, 67-83

Rudzka-Ostyn, B. (ed.), 1988: *Topics in Cognitive Linguistics*. Amsterdam: Benjamins

Sacks, Sheldon (ed.), 1979: *On Metaphor*. Chicago, London: Chicago University Press

Sapir, J. David, 1977: The anatomy of metaphor. In: J. David Sapir, J. C. Crocker (edd.), *The Social Use of Metaphor*. Essays on the anthropology of rhetoric. Philadelphia: University of Philadelphia Press, 3-32

Schaeder, Burkhard, 1996: Ansichten von Bedeutung: Fachsprachliche vs. gemeinsprachliche Semantik. In: Nico Weber (Hrsg.), *Semantik, Lexikographie und Computeranwendungen* (= Sprache und Information 33). Tübingen: Niemeyer, 183-186

Scharlau, Winfried (ed.), 1981: *Richard Dedekind 1831/1981*. Ein Würdigung zu seinem 150. Geburtstag. Braunschweig: Vieweg

Scharlau, Winfried, 1981: Erläuterungen zu Dedekinds Manuskript über Algebra. In: Scharlau (ed.), 101-108

Scharlau, Winfried, 1988: Die Entdeckung der Sylow-Sätze. *Historia Mathematica* 15, 40-52

Scharnhorst, J., E. Ising (edd.), 1976: *Grundlagen der Sprachkultur*. Beiträge der Prager Linguisten zur Sprachtheorie und Sprachpflege. Teil 1. Berlin: Akademie

Schiewe, Jürgen, 1991: Fach- und Wissenschaftssprache im deutschen Wörterbuch. In: Alan Kirkness, Peter Kühn, Herbert Ernst Wiegand (edd.), *Studien zum Deutschen Wörterbuch von Jacob Grimm und Wilhelm Grimm I* (= Lexicographica. Series Maior 33-34). Tübingen: Niemeyer, 225-263

Schiewe, Jürgen, 1999: Die Fachlexik im *Deutschen Wörterbuch* von Jacob Grimm und Wilhelm Grimm. In: Hoffmann et al. (edd.), 1669-1676

Schildknecht, Christiane, 1995: Experiments with metaphors: on the connection between scientific method and literary form in Francis Bacon. In: Radman (ed.), 27-50

Schippan, Thea, 1992: *Lexikologie der deutschen Gegenwartssprache*. Tübingen: Niemeyer

Sciralli, Martin, Nathalie Sinclair, 2003: A constructive response to „Where mathematics comes from". *Educational Studies in Mathematics* 52, 79-91

Schmid, Hans-Jörg, 2000: Methodik der Prototypentheorie. In: Martina Mangasser-Wahl (ed.), *Prototypentheorie in der Linguistik*. Anwendungsbeispiele - Methodenreflexion - Perspektiven. Unter Mitarbeit von Ulla Bohme. Tübingen: Stauffenburg, 33-53

Schneider, Edgar W., 1988: *Variabilität, Polysemie und Unschärfe der Wortbedeutung*. Band 1. Theoretische und methodische Grundlagen (= Linguistische Arbeiten 196). Tübingen: Niemeyer

Scholz, Erhard (ed.), 1990: *Geschichte der Algebra*. Eine Einführung. Mannheim: BI Wissenschaftsverlag

Scholz, Erhard, 1980: *Geschichte des Mannigfaltigkeitsbegriffs von Riemann bis Poincaré*. Basel: Birkhäuser

Scholz, Erhard, 1989a: *Symmetrie - Gruppe - Dualität*. Zur Beziehung zwischen theoretischer Mathematik und Anwendungen in Kristallographie und Baustatik des 19. Jahrhunderts (= Science Networks - Historical Studies 1). Basel et al.: Birkhäuser

Scholz, Erhard, 1989b: Crystallographic symmetry concepts and group theory (1850-1880). In: David E. Rowe, John McCleary (edd.), *The History of Modern Mathematics*. Vol. II: Institutions and Applications. Boston et al.: Academic Press, 3-27

Scholz, Erhard, 1990: Die Entstehung der Galoistheorie. In: Scholz (ed.), 365-398

Scholz, Oliver R., 1983: Metaphern in der Wissenschaft. In: Janos G. Petöfi (ed.), *Texte und Sachverhalte*. Aspekte der Wort- und Textbedeutung (= Papiere zur Textlinguistik 42). Hamburg, 23-33

Schreiber, M., 1993: Strukturelle Semantik und Prototypensemantik: Semantik der Einzelsprachen oder Universalsemantik? *Papiere zur Linguistik* 49, 159-165

Schütt, Hans-Werner, 1998: Die Entdeckung des Isomorphismus und ihre Folgen in der französischen mineralogischen Forschung. In: Bernhard Fritscher, Fergus Henderson (edd.), *Toward a History of Mineralogy, Petrology, and Geochemistry*. Proceedings of the International Symposium on the History of

Mineralogy, Petrology, and Geochemistry, Munich, March 8-9, 1996 (= Algorismus 23). München: Institut für Geschichte der Naturwissenschaften, 207-217

Schwanzer, Viliam, 1981: Syntaktisch-stilistische Universalia in den wissenschaftlichen Fachsprachen. In: Bungarten (ed.), 212-230

Schwarze, Christoph, 1982: Stereotyp und lexikalische Bedeutung. *Studium Linguistik* 13, 1-16

Schwarze, Christoph - Dieter Wunderlich (edd.), 1985: *Handbuch zur Lexikologie*. Königstein/Ts.: Athenäum

Searle, John, 1972: What is a speech act? In: Pier Paolo Giglioli (ed.), *Language and Social Context*. Selected Readings. Penguin: Harmondsworth, 136-154

Seebold, Elmar, 1981: *Etymologie*. Eine Einführung am Beispiel der deutschen Sprache. München: Beck

Sfard, Anna, 1994: Reification as the birth of metaphor. *For the Learning of Mathematics* 14.1, 44-54

Siegmund-Schultze, Reinhard, 1998: Eliakim Hastings Moore's 'General Analysis'. *Archive for History of Exact Sciences* 52, 51-89

Silvestri, Rochard, 1979: Simple groups of finite order in the nineteenth century. *Archive for History of Exact Science* 20, 313-356

Simon, Gérard, 2000: Analogies and metaphors in Kepler. In: Hallyn (ed.), 71-82

Sinaceur, Mohammed Allal, 1971: Appartenance et inclusion. Un inédit de Richard Dedekind. *Revue d'histoire des sciences* 24, 247-254

Sinaceur, Mohamed Allal, 1979: La méthode mathématique de Richard Dedekind. *Revue d'histoire des sciences* 32, 107-142

Smith, David Eugene, 1935: Changes in elementary mathematical terms in the last three centuries. *Scripta Mathematica* 3, 291-300

Snell, Bruno, 1955: *Die Entdeckung des Geistes*. Studien zur Entstehung des europäischen Denkens bei den Griechen. Dritte Auflage, neu durchgesehen und abermals erweitert. Hamburg: Claassen

Spalt, Detelf D., 1990: Die Unendlichkeiten bei Bernard Bolzano. In: König (ed.), 189-218

Sperber, Dan, Deidre Wilson, 1986: *Relevance*. Communication and Cognition. Oxford: Blackwell

Sperber, Dan, Deidre Wilson, 1987: Précis of *Relevance*. Communication and Cognition. *Behavioural and Brain Sciences* 10, 697-754

Sperber, Hans, 1965: *Einführung in die Bedeutungslehre*. Bonn: Schroeder

Spillner, Bernd, 1981: Termini und Sprachfunktion in der literaturwissenschaftlichen Fachsprache. In: Bungarten (ed.), 372-403

Spillner, Bernd, 1987: Style and register. In: Ammon et al. (edd.), 273-285

Sprengel, Konrad, 1980: Über semantische Merkmale. In: Dieter Kastovsky (ed.), *Perspektiven der lexikalischen Semantik*. Beiträge zum Wuppertaler Semantikkolloquium vom 2.-3. September 1977 (= Gesamthochschule Wuppertal. Schriftenreihe Linguistik 2). Bonn: Bouvier, 145-177

Steinig, Wolfgang, 1981: Psychologische Fachsprache und Alltagskommunikation. In: Bungarten (ed.), 422-453

Stern, Gustav, 1975: *Meaning and Change of Meaning*. With Special Reference to the English Language. Westport, Connecticut: Greenwood Press

Stierle, Karl-Heinz, 1978: Historische Semantik und die Geschichtlichkeit der Bedeutung. In: R. Kosellek (ed.), *Historische Semantik und Begriffsgeschichte*. Stuttgart: Klett-Cota, 154-189

Sweetser, Eve E., 1990: *From Etymology to Pragmatics*. Metaphorical and cultural aspects of semantic structure (= Cambridge Studies in Linguistics 54). Cambridge: CUP

Taton, René, 1971: Sur les relations scientifiques d'Augustin Cauchy et d'Évariste Galois. *Revue d'histoire des sciences* 24, 123-148

Taton, René, 1988: Quelques emplois successifs des termes analyse et analytique en Mathématiques (XVIIe-XX siècle). In: Groult (ed.), 195-205

Taylor, John R., 1995: *Linguistic Categorization*. Prototypes in linguistic theory. Oxford: OUP

Thiel, Felicitas, Friedrich Rost, 2001: Wissenschaftssprache und Wissenschaftsstil. In: Theodor Hug (ed.), *Einführung in die Wissenschaftstheorie und Wissenschaftsforschung*. Baltmannsweiler: Schneider Hohengehren, 117-134

Thomas, Robert, 2002: Idea analysis of algebraic groups. A critical review of Lakoff and Núñez' Where Mathematics Comes from. *Philosophical Psychology* 15.2, 185-195

Trabant, Jürgen, 1983: Das Andere der Fachsprache. Die Emanzipation der Sprache von der Fachsprache im neuzeitlichen europäischen Sprachdenken. *Zeitschrift für Literaturwissenschaft und Linguistik* 13, 27-47

Trier, Jost, 1931: *Der deutsche Wortschatz im Sinnbezirk des Verstandes.* Die Geschichte eines sprachlichen Feldes. Bd. 1. Von den Anfängen bis zum Beginn des 13. Jahrhunderts. Heidelberg: Winter

Trier, Jost, 1934: Das sprachliche Feld. *Neue Jahrbücher für Wissenschaft und Bildung* 10, 428-449. Zitiert nach: Laszlo Antal (ed.), *Aspekte der Semantik.* Zu ihrer Theorie und Geschichte 1662-1969. Frankfurt a. M.: Athenäum, 1972, 79-103

Tropfke, Johannes, 1924: *Geschichte der Elementar-Mathematik.* In systematischer Darstellung mit besonderer Berücksichtigung der Fachwörter. Sechster Band. Berlin, Leipzig: de Gruyter

Tropfke, Johannes, 1924a: *Geschichte der Elementar-Mathematik.* In systematischer Darstellung mit besonderer Berücksichtigung der Fachwörter. Siebenter Band. Stereometrie. Verzeichnisse. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. Berlin, Leipzig: de Gruyter

Tropfke, Johannes, 1930: *Geschichte der Elementar-Mathematik.* In systematischer Darstellung mit besonderer Berücksichtigung der Fachwörter. Erster Band. Rechnen. Dritte, verbesserte und vermehrte Auflage. Berlin, Leipzig: de Gruyter

Tropfke, Johannes, 1933: *Geschichte der Elementar-Mathematik.* In systematischer Darstellung mit besonderer Berücksichtigung der Fachwörter. Zweiter Band. Allgemeine Arithmetik. Dritte, verbesserte und vermehrte Auflage. Berlin, Leipzig: de Gruyter

Tropfke, Johannes, 1940: *Geschichte der Elementar-Mathematik.* In systematischer Darstellung mit besonderer Berücksichtigung der Fachwörter. Vierter Band. Ebene Geometrie. Dritte, verbesserte und vermehrte Auflage besorgt von Dr. Kurt Vogel. Berlin, Leipzig: de Gruyter

Tropfke, Johannes, 1980: *Geschichte der Elementarmathematik.* 4. Auflage. Band 1: Arithmetik und Algebra. Vollständig neu bearbeitet von Kurt Vogel, Karin Reich, Helmuth Gericke. Berlin, New York: de Gruyter

Tsohatzidis, Savas L. (ed.), 1990, *Meanings and Prototypes.* Studies on linguistic categorization. London: Routledge

Ullmann, Stephen, 1957: *The Principles of Semantics.* A linguistic approach to meaning. Oxford: Blackwell

Ullmann, Stephen, 1962: *Semantics.* An introduction to the science of meaning. Oxford: Blackwell

Ullrich, Peter, 1998: The genesis of Hensels p-adic numbers. In: P. L. Butzer, H. Th. Jongen, W. Oberschelp (edd.), *Charlemagne and his Heritage.* 1200 Years of Civilization and Science in Europe. / *Karl der Große und sein Nachwirken.* 1200 Jahre Kultur und Wissenschaft in Europa. Vol. 2. Mathematical Arts. Thurnhout: Brepols, 163-178

Ullrich, Peter, 1999: Die Entdeckung der Analogie zwischen Zahl- und Funktionenkörpern: der Ursprung der Dedekind-Ringe. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 101, 116-134

Ungerer, Friedrich, Hans-Jörg Schmid, 1996: *An Introduction to Cognitive Linguistics.* London, New York: Longman

Vachek, Josef, 1966: *Dictionnaire de linguistique de l'école de Prague* (= Comité International Permanent de Linguistes). Utrecht: Spectrum

Vaihinger, Hans, 1927: *Die Philosophie des Als Ob.* System der theoretischen, praktischen und religiösen Fiktionen der Menschheit. Auf Grund eines idealistischen Positivismus. Mit einem Anhang über Kant und Nietzsche. Neunte und zehnte Auflage. Leipzig: Meiner

van der Waerden, Bartel L., 1985: *A History of Algebra.* From al-Khwārizmi to Emmy Noether. Berlin et al.: Springer

van Leeuwen - Turnovcová, Jiřina, 1990: *Rechts und Links in Europa.* Ein Beitrag zur Semantik und Symbolik der Geschlechterpolarität (= Osteuropa-Institut an der Freien Universität Berlin. Balkanologische Veröffentlichungen 16). Wiesbaden: Harrassowitz

van Rootselaar, Bob, 1990: Die „mengentheoretischen" Begriffe Bolzanos. In: Detlef D. Spalt (ed.), *Rechnen mit dem Unendlichen.* Beiträge zur Entwicklung eines kontroversen Gegenstandes. Basel: Birkhäuser

von Hahn, Walther, 1983: *Fachkommunikation.* Entwicklung. Linguistische Konzepte. Betriebliche Beispiele (= Sammlung Göschen 2223). Berlin et al.: de Gruyter

von Hahn, Walther, 1993: Kritische Aspekte zur diachronischen Fachsprachenforschung. *Finlance* 12, 9-17 von Hahn, Walther, 1998a: Vagheit bei der Verwendung von Fachsprachen. In: Hoffmann et al. (edd.), 378-382

von Hahn, Walther, 1998b: Das Postulat der Explizitheit für den Fachsprachengebrauch. In: Hoffmann et al. (edd.), 383-389

Voorhees, Burton, 2004: Embodied Mathematics. Comments on Lakoff & Núñez. *Journal of Consciousness Studies* 11, 83-88

Waterhouse, William C., 1980: The early proofs of Sylow's theorem. *Archive for History of Exact Sciences* 21, 279-290

Wellmann, Hans, 1998: Die Wortbildung. In: *Duden.* Grammatik der deutschen Gegenwartssprache. Herausgegeben von der Dudenredaktion. Bearbeitet von Peter Eisenberg et al. 6., neu bearbeitete Auflage. Mannheim et al.: Dudenverlag, 408-557

Weinreich, Ulrich, William Labov, Marvin I. Herzog, 1968: Empirical foundations for a theory of language change. In: Winfred P. Lehmann, Yakov Malkiel (edd.), *Directions for Historical Linguistics.* A Symposium. Austin, Texas: University of Texas Press, 97-188

Weinrich, Harald, Heinz L. Kretzenbacher (edd.), 1995: *Linguistik der Wissenschaftssprache* (= Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Forschungsbericht 10). Berlin, New York: de Gruyter

Weinrich, Harald, 1976: *Sprache in Texten.* Stuttgart: Klett

Weinrich, Harald, 1976: Semantik der kühnen Metapher. In: ders. 1976, 295-316

Weinrich, Harald, 2001a: *Sprache, das heißt Sprechen.* Mit einem vollständigen Schriftenverzeichnis des Autors 1956-2001 (= Forum für Fachsprachen-Forschung 50). Tübingen: Narr

Weinrich, Harald, 2001b: Formen der Wissenschaftssprache. In: Weinrich 2001a, 221-252

Weyl, Hermann, 1980: *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft.* 5. Auflage. München, Wien: Oldenbourg

Wichter, Sigurd, 1994: *Experten- und Laienwortschätze.* Umriß einer Lexikologie der Vertikalität (= Reihe Germanistische Linguistik 144). Tübingen: Niemeyer

Wiegand, Herbert Ernst, (ed.), 1999: *Sprachen und Sprache in den Wissenschaften.* Geschichte und Gegenwart. Festschrift für Walter de Gruyter anläßlich einer

250jährigen Verlagstradition. Berlin, New York: de Gruyter

Wilder, Raymond L., 1981: *Mathematics as a Cultural System* (= Foundations and philosophy of Science). Oxford et al.: Pergamon Press

Windisch, Rudolf, 1988: *Zum Sprachwandel.* Von den Junggrammatikern zu Labov. Frankfurt a. M.: Lang

Wittgenstein, Ludwig, 1969: *Philosophische Untersuchungen.* Frankfurt a. M.: Suhrkamp

Woll, Dieter, 1971: Zur Etymologie und Wortgeschichte von frz. gauche. *Romanische Forschungen* 83, 182-200

Wolski, Werner, 1988: Zu Problemen und Perspektiven des Prototypen- und Stereotypenansatzes in der lexikalischen Semantik. In: Werner Hüllen, Rainer Schulze (edd.), *Understanding the lexicon.* Tübingen: Narr, 415-425

Wußing, Hans, 1967: Zum historischen Verhältnis von Intension und Extension des Begriffes Gruppe im Herausbildungsprozeß des abstrakten Gruppenbegriffs. *Zeitschrift für Geschichte der Naturwissenschaft, Technik und Medizin (NTM)* 4 (H.10), 23-34

Wußing, Hans, 1969: *Die Genesis des abstrakten Gruppenbegriffs.* Ein Beitrag zur Entstehung der abstrakten Gruppentheorie. Berlin: VEB

Wußing, Hans, 1979: Zur Entwicklungsgeschichte naturwissenschaftlicher Begriffe. *Zeitschrift für Geschichte der Naturwissenschaft, Technik und Medizin (NTM)* 7 (H.2), 15-29

Wußing, Hans, 1979: *Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik.* Berlin: VEB

Yaglom, I. M., 1988: *Felix Klein and Sophus Lie.* Evolution of the idea of symmetry in the nineteenth century. Translated by Sergei Sossinsky. Edited by Hardy Grant and Abe Shenitzer. Boston, Basel: Birkhäuser

Youshkevitch, A. P., 1976: The concept of function up to the middle of the 19th century. *Archive for History of Exact Science* 16, 37-85

Danksagungen

Mein erster Dank gebührt meinem Erstgutachter Herrn Prof. Dr. Winfried Boeder. Er hat bereitwillig die Betreuung einer Arbeit aus einem Bereich übernommen, der seinem eigenen Forschungsgebiet fern lag und mir durch unermüdliche Diskussionsbereitschaft, zahlreiche anregende Hinweise und konstruktive Arbeitsvorschläge wertvolle Hilfe geleistet.

Weiterhin danke ich Herrn Prof. Dr. Erhard Scholz und Herrn Prof. Dr. Klaus Gloy für ihre Bereitschaft, die Zweitgutachten zu verfassen.

Mit Frau Prof. Dr. Irene Pieper-Seier, die auch frühere Versionen dieser Dissertation teilweise las, habe ich über mathematische und wissenschaftshistorische Zusammenhänge diskutiert. Von ihr erhielt ich viele konstruktive Vorschläge, die in die Arbeit eingeflossen sind.

Herrn H. C. von Steuber danke ich für technische Unterstützung bei der Beschaffung zahlreicher in elektronischer Form vorliegender historischer Dokumente. Jonathan Blaney war für mich immer ein wichtiger Ansprechpartner, der mir Zugang zu ansonsten unzugänglichen Recherchemöglichkeiten verschaffte. Freerk Oltmanns war mir bei chemischen Fragen behilflich.

Bei Teilen der Korrektur waren Margret und Daniel Schiavo kritisch-konstruktive Leser. Besonderer Dank gebührt Barbara Pohl, die die gesamte Dissertation mehrfach Korrektur las und mich auf stilistische und andere Unzulänglichkeiten aufmerksam machte, besonders in der Schlußphase der Arbeit. Sie hat mir stets aufbauend zur Seite gestanden und für die oft zeitraubende Arbeit Verständnis gezeigt.

Meinen Freunden danke ich für die Geduld und Unterstützung, mit der sie die Höhen und Tiefen während des Verfassens dieser Arbeit mitgetragen haben.

Zum Schluß möchte ich mich bei meinen Eltern für die stetige Unterstützung in all den Jahren meiner Ausbildung bedanken.

Lebenslauf

Zur Person:

Holger Becker

geb. am 30.11.1969 in Brake/Unterweser

Staatsangehörigkeit: deutsch

Anschrift: Böversweg 10, 26131 Oldenburg

Zum Bildungsweg:

1989	Abitur, Gymnasium Nordenham
1990 - 1996	Studium der Anglistik und Mathematik für das Lehramt an Gymnasien, Carl von Ossietzky Universität Oldenburg Abschluß: 1. Staatsexamen
1997 - 1998	Studium der Lexikographie Exeter University, England Abschluß: M. A.

Berufliche Tätigkeiten:

seit 1998	freischaffender Lexikograph, Terminologe und Dozent

Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Dissertation selbstständig und ohne unerlaubte Hilfe verfasst und nur die angegebenen Hilfsmittel verwendet habe.

Oldenburg, den 4.12.2004

Holger Becker