

Berufsbegleitender Masterstudiengang
Risikomanagement für Finanzdienstleister (M.Sc.)



Carl von Ossietzky Universität Oldenburg

Masterstudiengang Risikomanagement für Finanzdienstleister mit dem Abschluss
„Master of Science (M.Sc.)“

Masterarbeit

Kurzfristige Kopfschadenprojektionen auf Basis ausgewählter stochastischer
Sterblichkeitsmodelle

vorgelegt von:

André Wolke

Betreuender Gutachter:

Prof. Dr. Marcus C. Christiansen

Zweite Gutachterin:

Prof. Dr. Angelika May

Oldenburg, 15. November 2021

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis.....	I
Abkürzungsverzeichnis.....	III
Symbolverzeichnis.....	IV
Abbildungsverzeichnis.....	VI
Tabellenverzeichnis.....	X
1 Einleitung.....	1
1.1 Motivation und Problemstellung.....	1
1.2 Stand der Forschung.....	4
1.3 Vorgehen.....	7
2 Grundlagen der Krankenversicherungsmathematik in Deutschland.....	8
2.1 Überblick zu Historie und Beitragskalkulation.....	8
2.2 Definition von Kopfschäden.....	10
2.3 Multiplikative Kopfschadenzerlegung nach dem Ansatz von Rusam.....	14
2.4 Gründe für die Kopfschadenbestimmung.....	15
2.5 Herleitung von rechnungsmäßigen Kopfschäden.....	16
3 Einführung in stochastische Sterblichkeitsmodelle.....	22
3.1 Verwendete Notation.....	22
3.2 Komponenten von Sterblichkeitsmodellen.....	23
3.3 Sterblichkeitsmodelle aus der Lee-Carter-Familie.....	26
3.4 Sterblichkeitsmodelle aus der Cairns-Blake-Dowd-Familie.....	28
3.5 Sterblichkeitsmodelle nach PLAT.....	29
3.6 RUSAM-Modell.....	30
4 Theoretischer Ablauf der Modelluntersuchung.....	32
4.1 Erweiterung der Kopfschadendefinition.....	32
4.2 Übertragung der Sterblichkeitsmodelle auf Kopfschäden.....	33
4.3 Parameterschätzung.....	35

4.4	Kopfschadenprojektion.....	36
4.5	Risikomaße und grafische Auswertungsmethoden	37
4.6	Ergebnisvergleich mit alternativen Modellen zur Kopfschadenprojektion	39
5	Beschreibung des verwendeten Datensatzes	42
6	Praktischer Ablauf der Modelluntersuchung.....	47
6.1	Nutzung der Statistik-Software R.....	47
6.2	R-Paket StMoMo als Basis der Programmierung	47
6.3	Datenimport und Implementierung der untersuchten Modelle in R.....	48
6.4	Umsetzung der Parameterschätzung und Kopfschadenprojektion in R	49
6.5	Implementierung der Risikomaße und grafischen Auswertungen in R.....	53
7	Auswertung der Fitting- und Projektionsergebnisse	54
7.1	Analyse der gefitteten Parameter.....	54
7.2	Veranschaulichung und Bewertung der Residuen.....	58
7.3	Analyse der Güteparameter AIC und BIC.....	60
7.4	Grafische Auswertung der Projektionsergebnisse.....	62
7.5	Analyse der Risikomaße MAE und RMSE	65
7.6	Auswahl des Modells mit den besten Projektionseigenschaften.....	69
8	Zukunftsgerichtete Kopfschadenprojektion auf Basis des PLAT2-Modells.....	71
8.1	Kopfschadenprojektion unter Anwendung von Bootstrap-Techniken	71
8.2	Visualisierung der Bootstrap-Ergebnisse	74
8.3	Projektionsintervalle im ökonomischen Kontext	77
9	Fazit und Ausblick.....	79
10	Anhang	81
11	Literaturverzeichnis	108
12	Ehrenwörtliche Versicherung.....	115

Abkürzungsverzeichnis

Abkürzung	Bedeutung
AF	Auslösender Faktor
AIC	Akaike-Informationskriterium
APC	age-period-cohort / Alter-Periode-Kohorte
ARIMA	autoregressive integrated moving average
BaFin	Bundesanstalt für Finanzdienstleistungsaufsicht
BIC	Bayessches Informationskriterium
CBD	Cairns-Blake-Dowd
GAPC	generalized age-period-cohort
GKV	Gesetzliche Krankenversicherung
KVAV	Krankenversicherungsaufsichtsverordnung
LC	Lee-Carter
PKV	Private Krankenversicherung
PKV-Verband	Verband der Privaten Krankenversicherung e.V.
rech	rechnerisch / rechnungsmäßig
RH	Renshaw-Haberman
RWD	Random-walk Prozess mit Drift
StMoMo	Stochastic Mortality Modelling
tats	tatsächlich
VAG	Versicherungsaufsichtsgesetz
WSE	Wartezeit- und Selektionseffekte

Symbolverzeichnis

Symbol	Erläuterung
A	Altersbereich
a	Hilfsparameter
b	Hilfsparameter
BJ	Menge der Beobachtungsjahre
c	Geburtsjahr
$J(t)$	Menge der Versicherten eines Versicherungskollektivs im Jahr t
$D_{x,t}$	Anzahl der Toten, die als x -Jährige das letzte Mal während des Kalenderjahres t Geburtstag hatten
$d_{x,t}$	Beobachtungswerte zu $D_{x,t}$
e	Eintrittsjahr
$E_{x,t}^c$	durchschnittliche Bestandsgröße der x -Jährigen, die das letzte Mal während des Kalenderjahres t Geburtstag hatten
$E_{x,t}^0$	anfängliche Bestandsgröße der x -Jährigen im Jahr t , die das letzte Mal während des Kalenderjahres t Geburtstag hatten
$E_{x,t}$	zusammenfassende Notation von $E_{x,t}^c$ und $E_{x,t}^0$ bei eindeutigem Kontext
$G(t)$	Grundkopfschaden zum Normierungsalter x_0
i	versicherte Person
$K_x(t)$	Kopfschaden eines x -jährigen Versicherten im Kalenderjahr t
$k_x(t)$	Profilwert eines x -jährigen Versicherten im Kalenderjahr t
$m_i(t)$	Versicherungsdauer im Jahr t
m^*	Versicherungsdauer, bis zu der WSE zu berücksichtigen sind
$m_{x,t}$	zentrale Sterberate im Jahr t von Individuen im Alter x
$n_x(t)$	durchschnittliche Anzahl der x -jährigen Versicherten im Jahr t
$q_{x,t}$	einjährige Sterbewahrscheinlichkeit im Jahr t von Individuen im Alter x
$rz_x^{sum}(t)$	Risikozuschlag der x -jährigen Versicherten im Jahr t
$S(t)$	Gesamtschadenhöhe im Jahr t
$s_x^{sum}(t)$	Summe der Schadenleistungen der x -jährigen Versicherten im Jahr t (bereinigt)
$so_x^{sum}(t)$	Sondereffekte der x -jährigen Versicherten im Jahr t

Symbol	Erläuterung
T	Kalenderzeitbereich
t	Kalenderjahr
$wS_x^{sum}(t)$	Zuschlagsterm zur Berücksichtigung von WSE der x -jährigen Versicherten im Jahr t
x	Alter
$x_i(t)$	versicherungstechnisches Alter im Jahr t
$Y_i(t)$	Summe der Erstattungsbeträge für Person i im Jahr t
$y_i(t)$	Realisierungen von $Y_i(t)$
$Y_x(t)$	mittlerer Gesamterstattungsbetrag der x -jährigen Versicherten im Jahr t
$y_x(t)$	Realisierungen von $Y_x(t)$
α_x	altersabhängiges Grundniveau der Sterberaten
α	Irrtumswahrscheinlichkeit
$\beta_x^{(i)}$	Parameter zur altersabhängigen Gewichtung des Mortalitätsfaktors oder des Kohorteneffektes
γ_{t-x}	Kohorteneffekt
θ	Vektor von Parametern
$\kappa_t^{(i)}$	Mortalitätsfaktor
$\mu_{x,t}$	Sterbeintensität im Jahr t von Individuen im Alter x
$\eta_{x,t}$	Prädiktorstruktur
σ	Standardabweichung
ω_E	Höchstalter von Erwachsenen
ω_K	Höchstalter von Kindern
ω_J	Höchstalter von Jugendlichen

Abbildungsverzeichnis

Abb. 1: Rohe Sterbewahrscheinlichkeiten, Männer und Frauen, Deutschland.	3
Abb. 2: Kopfschäden für stationäre, allgemeine Krankenhausleistungen für männliche und weibliche Vollkosten-Versicherte, Verband der Privaten Krankenversicherung.	3
Abb. 3: Kopfschäden des ambulanten Leistungsbereichs für männliche und weibliche Vollkosten-Versicherte, Verband der Privaten Krankenversicherung.....	45
Abb. 4: Kopfschäden des Leistungsbereichs Zahn für männliche und weibliche Vollkosten-Versicherte, Verband der Privaten Krankenversicherung.....	45
Abb. 5: Gefittete Parameter des LC-Modells auf Basis der Kopfschäden des stationären Leistungsbereichs für den Testdatenzeitraum $BJ4 = 2015,2016,2017$	54
Abb. 6: Gefittete Parameter des CBD-Modells auf Basis der Kopfschäden des stationären Leistungsbereichs für den Testdatenzeitraum $BJ4 = 2015,2016,2017$	55
Abb. 7: Gefittete Parameter des PLAT2-Modells auf Basis der Kopfschäden des stationären Leistungsbereichs für den Testdatenzeitraum $BJ4 = 2015,2016,2017$	55
Abb. 8: Residuen der GAPC-Modelle auf Basis der Kopfschäden des stationären Leistungsbereichs für den Testdatenzeitraum $BJ4 = 2015,2016,2017$	58
Abb. 9: Vergleich der tatsächlichen Kopfschäden des stationären Leistungsbereichs des PKV-Verbandes aus dem Validierungsjahr $VJ4 = 2019$ gegen die projizierten Kopfschäden der einzelnen Modelle für das Jahr 2019 auf Basis der gefitteten Parameter für den Testdatenzeitraum $BJ4 = 2015,2016,2017$. Die linke Grafik zeigt die absoluten Werte. Rechts ist die relative Abweichung $y_{x,t} - y_{x,t}/y_{x,t}$ der einzelnen Modelle zu den Echtdaten dargestellt.....	63
Abb. 10: Fan-Charts der für das Jahr 2021 projizierten Kopfschäden der Leistungsbereiche $\{ambulant, stationär\}$	75

Abb. 11: Fan-Chart der für das Jahr 2021 projizierten Kopfschäden des Leistungsbereichs {Zahn}.	76
Abb. 12: Entwicklung der Kopfschäden des ambulanten Leistungsbereichs in den Jahren 2012 bis 2019: Männliche und weibliche Vollkosten-Versicherte, Verband der Privaten Krankenversicherung.	85
Abb. 13: Entwicklung der Kopfschäden des stationären Leistungsbereichs in den Jahren 2012 bis 2019: Männliche und weibliche Vollkosten-Versicherte, Verband der Privaten Krankenversicherung.	85
Abb. 14: Entwicklung der Kopfschäden des Leistungsbereichs Zahn in den Jahren 2012 bis 2019: Männliche und weibliche Vollkosten-Versicherte, Verband der Privaten Krankenversicherung.	86
Abb. 15: Gefittete Parameter des LC-Modells auf Basis der Kopfschäden der drei Leistungsbereiche {ambulante, stationär, Zahn} für den Testdatenzeitraum BJ4 = 2015,2016,2017.	89
Abb. 16: Gefittete Parameter des RH-Modells auf Basis der Kopfschäden der drei Leistungsbereiche {ambulante, stationär, Zahn} für den Testdatenzeitraum BJ4 = 2015,2016,2017.	90
Abb. 17: Gefittete Parameter des APC-Modells auf Basis der Kopfschäden der drei Leistungsbereiche {ambulante, stationär, Zahn} für den Testdatenzeitraum BJ4 = 2015,2016,2017.	91
Abb. 18: Gefittete Parameter des CBD-Modells auf Basis der Kopfschäden der drei Leistungsbereiche {ambulante, stationär, Zahn} für den Testdatenzeitraum BJ4 = 2015,2016,2017.	92
Abb. 19: Gefittete Parameter des M7-Modells auf Basis der Kopfschäden der drei Leistungsbereiche {ambulante, stationär, Zahn} für den Testdatenzeitraum BJ4 = 2015,2016,2017.	93
Abb. 20: Gefittete Parameter des PLAT-Modells auf Basis der Kopfschäden der drei Leistungsbereiche {ambulante, stationär, Zahn} für den Testdatenzeitraum BJ4 = 2015,2016,2017.	94

Abb. 21: Gefittete Parameter des PLAT2-Modells auf Basis der Kopfschäden der drei Leistungsbereiche $\{ambulant, stationär, Zahn\}$ für den Testdatenzeitraum $BJ4 = 2015, 2016, 2017$	95
Abb. 22: Gefittete Parameter des RUSAM-Modells auf Basis der Kopfschäden der drei Leistungsbereiche $\{ambulant, stationär, Zahn\}$ für den Testdatenzeitraum $BJ4 = 2015, 2016, 2017$	96
Abb. 23: Gefittete Parameter des LC-Modells auf Basis der Kopfschäden des ambulanten Leistungsbereichs für die Testdatenzeiträume $BJ1 = 2012, 2013, 2014$, $BJ2 = 2013, 2014, 2015$, $BJ3 = 2014, 2015, 2016$ und $BJ4 = 2015, 2016, 2017$	97
Abb. 24: Gefittete Parameter des LC-Modells auf Basis der Kopfschäden des stationären Leistungsbereichs für die Testdatenzeiträume $BJ1 = 2012, 2013, 2014$, $BJ2 = 2013, 2014, 2015$, $BJ3 = 2014, 2015, 2016$ und $BJ4 = 2015, 2016, 2017$	98
Abb. 25: Gefittete Parameter des LC-Modells auf Basis der Kopfschäden des Leistungsbereichs Zahn für die Testdatenzeiträume $BJ1 = 2012, 2013, 2014$, $BJ2 = 2013, 2014, 2015$, $BJ3 = 2014, 2015, 2016$ und $BJ4 = 2015, 2016, 2017$	99
Abb. 26: Residuen des LC-, RH-, APC- sowie CBD-Modells auf Basis der Kopfschäden der drei Leistungsbereiche $\{ambulant, stationär, Zahn\}$ für den Testdatenzeitraum $BJ4 = 2015, 2016, 2017$	100
Abb. 27: Residuen des M7-, PLAT-, PLAT2- sowie RUSAM-Modells auf Basis der Kopfschäden der drei Leistungsbereiche $\{ambulant, stationär, Zahn\}$ für den Testdatenzeitraum $BJ4 = 2015, 2016, 2017$	101
Abb. 28: Residuen des APC-Modells auf Basis der Kopfschäden der drei Leistungsbereiche $\{ambulant, stationär, Zahn\}$ für die Testdatenzeiträume $BJ1 = 2012, 2013, 2014$, $BJ2 = 2013, 2014, 2015$, $BJ3 = 2014, 2015, 2016$ und $BJ4 = 2015, 2016, 2017$	102
Abb. 29: Vergleich der tatsächlichen Kopfschäden des ambulanten Leistungsbereichs des PKV-Verbandes aus dem Validierungsjahr $VJ4 = 2019$ gegen die projizierten Kopfschäden der einzelnen Modelle für das Jahr 2019 auf Basis der gefitteten	

Parameter für den Testdatenzeitraum $BJ4 = 2015,2016,2017$. Die linke Grafik zeigt die absoluten Werte. Rechts ist die relative Abweichung $yx,t - yx,t/yx,t$ der einzelnen Modelle zu den Echtdatein dargestellt.....	103
Abb. 30: Vergleich der tatsächlichen Kopfschäden des Zahn-Leistungsbereichs des PKV-Verbandes aus dem Validierungsjahr $VJ4 = 2019$ gegen die projizierten Kopfschäden der einzelnen Modelle für das Jahr 2019 auf Basis der gefitteten Parameter für den Testdatenzeitraum $BJ4 = 2015,2016,2017$. Die linke Grafik zeigt die absoluten Werte. Rechts ist die relative Abweichung $yx,t - yx,t/yx,t$ der einzelnen Modelle zu den Echtdatein dargestellt.....	104

Tabellenverzeichnis

Tab. 1: Prädiktorstrukturen der untersuchten Mortalitätsmodelle, die für die Kopfschadenprojektion genutzt werden (x: Alter, t: Kalenderjahr).	33
Tab. 2: AIC-Werte (mit dem entsprechenden Rang in Klammern) diverser Modelle auf Basis der Kopfschäden der drei Leistungsbereiche { <i>ambulant, stationär, Zahn</i> } für die Testdatenzeiträume $BJ1 = 2012,2013,2014$, $BJ2 = 2013,2014,2015$, $BJ3 = 2014,2015,2016$ und $BJ4 = 2015,2016,2017$	61
Tab. 3: BIC-Werte (mit dem entsprechenden Rang in Klammern) diverser Modelle auf Basis der Kopfschäden der drei Leistungsbereiche { <i>ambulant, stationär, Zahn</i> } für die Testdatenzeiträume $BJ1 = 2012,2013,2014$, $BJ2 = 2013,2014,2015$, $BJ3 = 2014,2015,2016$ und $BJ4 = 2015,2016,2017$	61
Tab. 4: MAE-Werte (mit dem entsprechenden Rang in Klammern) diverser Modelle auf Basis der Kopfschäden der drei Leistungsbereiche { <i>ambulant, stationär, Zahn</i> } für die Testdatenzeiträume $BJ1 = 2012,2013,2014$, $BJ2 = 2013,2014,2015$, $BJ3 = 2014,2015,2016$ und $BJ4 = 2015,2016,2017$ für den Altersbereich $A = 21, \dots, 80$	66
Tab. 5: RMSE-Werte (mit dem entsprechenden Rang in Klammern) diverser Modelle auf Basis der Kopfschäden der drei Leistungsbereiche { <i>ambulant, stationär, Zahn</i> } für die Testdatenzeiträume $BJ1 = 2012,2013,2014$, $BJ2 = 2013,2014,2015$, $BJ3 = 2014,2015,2016$ und $BJ4 = 2015,2016,2017$ für den Altersbereich $A = 21, \dots, 80$	66
Tab. 6: Gesamtschäden auf Basis der empirischen Perzentile $y_x, tb\zeta$ der drei Leistungsbereiche { <i>ambulant, stationär, Zahn</i> } für das Jahr 2021 und den Bestandsdaten des Jahres 2019 (Altersbereich $A = 21, \dots, 80$). Verglichen werden diese gegen die Gesamtschäden, die sich in Folge der mittels Punktprojektion ermittelten Kopfschäden ergeben. Letztere werden mit den übrigen Gesamtschäden – je Leistungsbereich – auch relativ ins Verhältnis gesetzt.	78
Tab. 7: Parametereinschränkungen der untersuchten Mortalitätsmodelle (x: Alter, t: Kalenderjahr, c: Geburtsjahr).....	83

Tab. 8: Aufschlüsselung der Leistungsbereiche nach den ausgewerteten Leistungsarten bzw. Leistungen. Datenquelle: RePortal..... 84

Tab. 9: Historie der RePortal-Aktualisierungen je Beobachtungsjahr (Stand: August 2021). 84

Tab. 10: MAE-Werte (mit dem entsprechenden Rang in Klammern) diverser Modelle auf Basis der Kopfschäden der drei Leistungsbereiche $\{ambulant, stationär, Zahn\}$ für die Testdatenzeiträume $BJ1 = 2012,2013,2014$, $BJ2 = 2013,2014,2015$, $BJ3 = 2014,2015,2016$ und $BJ4 = 2015,2016,2017$ für den Altersbereich $A1 = 21, \dots, 40$ 105

Tab. 11: RMSE-Werte (mit dem entsprechenden Rang in Klammern) diverser Modelle auf Basis der Kopfschäden der drei Leistungsbereiche $\{ambulant, stationär, Zahn\}$ für die Testdatenzeiträume $BJ1 = 2012,2013,2014$, $BJ2 = 2013,2014,2015$, $BJ3 = 2014,2015,2016$ und $BJ4 = 2015,2016,2017$ für den Altersbereich $A1 = 21, \dots, 40$ 105

Tab. 12: MAE-Werte (mit dem entsprechenden Rang in Klammern) diverser Modelle auf Basis der Kopfschäden der drei Leistungsbereiche $\{ambulant, stationär, Zahn\}$ für die Testdatenzeiträume $BJ1 = 2012,2013,2014$, $BJ2 = 2013,2014,2015$, $BJ3 = 2014,2015,2016$ und $BJ4 = 2015,2016,2017$ für den Altersbereich $A2 = 41, \dots, 60$ 106

Tab. 13: RMSE-Werte (mit dem entsprechenden Rang in Klammern) diverser Modelle auf Basis der Kopfschäden der drei Leistungsbereiche $\{ambulant, stationär, Zahn\}$ für die Testdatenzeiträume $BJ1 = 2012,2013,2014$, $BJ2 = 2013,2014,2015$, $BJ3 = 2014,2015,2016$ und $BJ4 = 2015,2016,2017$ für den Altersbereich $A2 = 41, \dots, 60$ 106

Tab. 14: MAE-Werte (mit dem entsprechenden Rang in Klammern) diverser Modelle auf Basis der Kopfschäden der drei Leistungsbereiche $\{ambulant, stationär, Zahn\}$ für die Testdatenzeiträume $BJ1 = 2012,2013,2014$, $BJ2 = 2013,2014,2015$, $BJ3 = 2014,2015,2016$ und $BJ4 = 2015,2016,2017$ für den Altersbereich $A3 = 61, \dots, 80$ 107

Tab. 15: RMSE-Werte (mit dem entsprechenden Rang in Klammern) diverser Modelle auf Basis der Kopfschäden der drei Leistungsbereiche $\{ambulant, stationär, Zahn\}$ für die Testdatenzeiträume $BJ1 = 2012, 2013, 2014$, $BJ2 = 2013, 2014, 2015$, $BJ3 = 2014, 2015, 2016$ und $BJ4 = 2015, 2016, 2017$ für den Altersbereich $A3 = 61, \dots, 80$ 107

1 Einleitung

1.1 Motivation und Problemstellung

Versicherungsmathematiker stehen regelmäßig vor der Aufgabe, anhand vergangenheitsbezogener Beobachtungswerte Projektionen in die Zukunft vorzunehmen und Prämien festzusetzen, die den zu erwartenden Schaden- bzw. Leistungsbedarf einer Versicherung abdecken.¹ Wird der Beitrag dabei zu niedrig angesetzt, können daraus versicherungstechnische Verluste resultieren. Bei einem zu hohen Preis für das Versicherungsprodukt droht hingegen eine eingeschränkte Wettbewerbsfähigkeit. Ziel muss es daher sein, sowohl marktgerechte als auch auskömmliche Prämien zu bestimmen. Dies gilt insbesondere für Versicherungsunternehmen mit einer langfristigen Kundenbindung, wie beispielsweise Lebens- und Rentenversicherer, aber auch private Krankenversicherer. Die beiden erstgenannten müssen dabei neben der Entwicklung des zukünftigen Zinsniveaus unter anderem auch die langfristige Entwicklung zukünftiger Sterbewahrscheinlichkeiten adäquat in ihrer Tarifierung berücksichtigen. Obwohl diese auch für private Krankenversicherungsunternehmen eine gewisse Relevanz haben, liegt ihr Hauptaugenmerk vor allem auf der richtigen Prognose künftiger Gesundheitsausgaben.

Auf dem deutschen Versicherungsmarkt für Gesundheitsleistungen ist es den Unternehmen nicht gestattet, die mitunter volatilen, aber – verursacht durch die medizinische Inflation – im Mittel meist steigenden Kosten prozyklisch beispielsweise in Form von fest definierten Steigerungssätzen in die Versicherungsbeiträge einzupreisen. Außerdem dürfen die Versicherungsunternehmen keine ordentlichen Kündigungen aussprechen. Stattdessen wird ihnen das Recht eingeräumt, die nach Art der Lebensversicherung kalkulierten Krankenversicherungstarife unter bestimmten Voraussetzungen auch nach dem Tarifabschluss anzupassen.² Damit bei dieser Nachkalkulation keine ungerechtfertigten Beitragsänderungen durchgeführt werden, die sich bei Beitragserhöhungen insbesondere zu Lasten der bereits im Bestand versicherten Personen auswirken würden, müssen die Beitragsanpassungen durch eine unabhängige Institution, den sogenannten Treuhänder, geprüft und bestätigt werden.³ Dieser Kontrollmechanismus stellt sicher, dass die Gesundheitsausgaben – trotz der regelmäßigen Anpassungsmöglichkeit – auch in der kurzen Frist geeignet projiziert werden.

¹ Gender-Hinweis: Um die Lesefreundlichkeit dieser Masterarbeit zu verbessern, wird an einigen Stellen bei Personenbezeichnungen und personenbezogenen Hauptwörtern ausschließlich die männliche Form verwendet. Im Sinne der Gleichbehandlung gelten entsprechende Begriffe grundsätzlich für alle Geschlechter.

² Vgl. § 155 Abs. 3 Satz 1 und 2 VAG.

³ Vgl. § 155 Abs. 1 und 2 VAG.

In der Praxis wird die Projektion zukünftiger Gesundheitskosten auf Basis der sogenannten Kopfschäden vorgenommen. Diese beschreiben vereinfacht ausgedrückt den Betrag, den ein Versicherer jährlich für einen Versicherten, abhängig von dessen Alter, für Leistungsausgaben bereithalten muss.⁴ Die Kopfschäden werden in der Regel mithilfe robuster Punktschätzungsverfahren unter Anwendung des im zweiten Kapitel detailliert beschriebenen Rusam-Ansatzes bestimmt. Hinter diesem Vorgehen verbirgt sich die Idee, dass sich die Gesundheitskosten im Zeitablauf nicht für jedes Einzelalter, sondern gleichmäßig mit einem bestimmten Faktor bzw. Kostentrend über die gesamte Altersstruktur verändern. Dieser Faktor lässt sich durch eine einfache Extrapolation ermitteln. Im Allgemeinen sieht diese Verfahrensweise jedoch nur eine Punktschätzung zukünftiger Gesundheitsausgaben vor, die – ohne eine Erweiterung um stochastische Elemente – prinzipiell keine weitere Quantifizierung der Vorhersagegenauigkeit erlaubt. Es lässt sich somit beispielsweise nicht abschätzen, mit welcher Wahrscheinlichkeit bestimmte Schadenergebnisse eintreten werden. Dem schließt sich die Frage an, ob es alternative Vorhersagemodelle gibt, die die künftigen Kostensteigerungen z. B. durch die Berücksichtigung von Alterseffekten und/oder geburtsjahrgangsspezifischen Einflüssen sinnvoller projizieren können oder zumindest eine bessere Einschätzung der Vorhersagegenauigkeit erlauben. Erfolgversprechend könnte dabei ein Blick auf die eingangs erwähnten Renten- und Lebensversicherer sein, die langfristige Projektionen zukünftiger Sterbewahrscheinlichkeiten vornehmen müssen. Aufgrund stetiger Verbesserungen im Bereich der Langlebigkeit wurden die Sterberaten innerhalb der Bevölkerung in den letzten Jahrzehnten regelmäßig überschätzt. Dies ist einer der Hauptgründe, warum mittlerweile eine Vielzahl an stochastischen Sterblichkeitsmodellen entwickelt wurden, die die langfristigen Trends in diesem Bereich besser abdecken sollen. Zudem bieten sie durch den Einschluss stochastischer Prozesse die Möglichkeit zur Erzeugung von Prognoseintervallen, anhand derer eine Quantifizierung in Bezug auf die Vorhersagequalität vorgenommen werden kann. Beim Vergleich von Sterblichkeitsraten und Kopfschäden im Altersbereich von 0-80 Jahren fällt auf, dass diese eine durchaus ähnliche Struktur aufweisen. Beispielhaft wurden dazu – jeweils für die Jahre 2015 bis 2017 – in Abb. 1 die logarithmierten Sterbewahrscheinlichkeiten in der deutschen Gesamtbevölkerung sowie in Abb. 2 die logarithmierten Kopfschäden im Bereich der allgemeinen, stationären Krankenhausleitungen je Einzelalter dargestellt.

⁴ Vgl. § 6 KVAV.

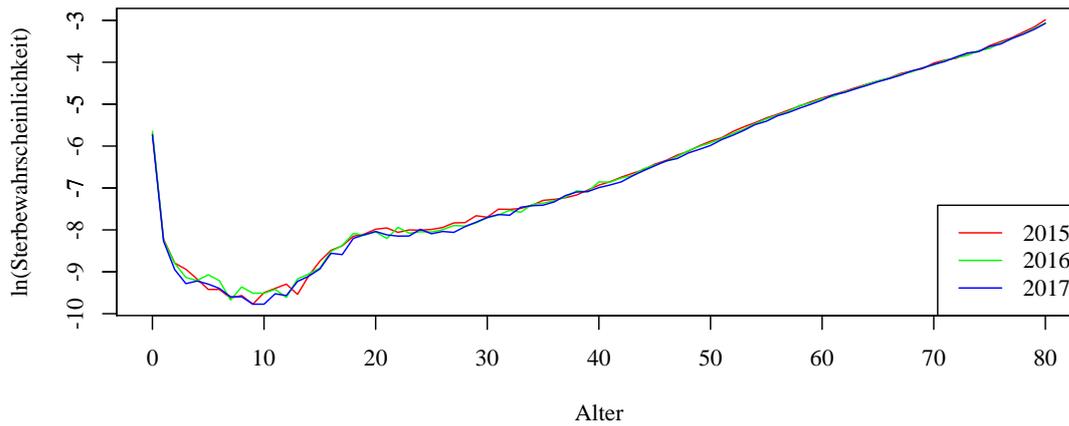


Abb. 1: Rohe Sterbewahrscheinlichkeiten, Männer und Frauen, Deutschland.⁵

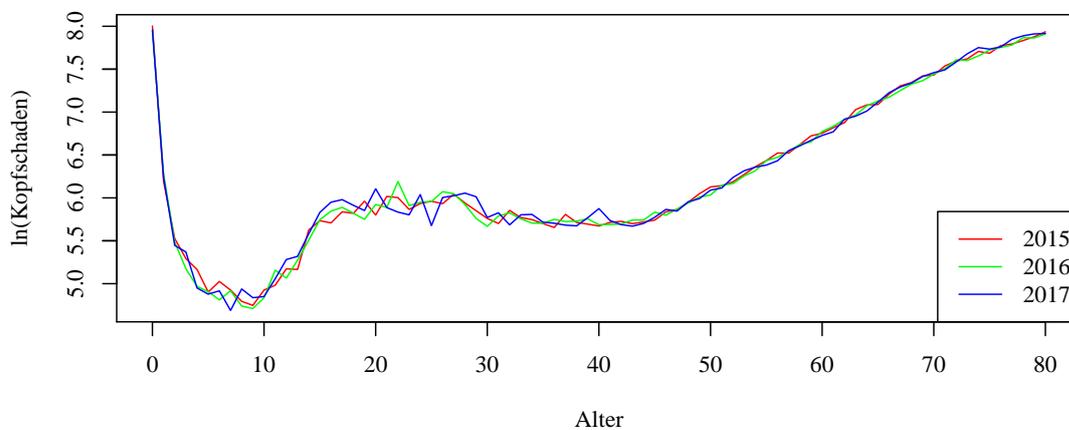


Abb. 2: Kopfschäden für stationäre, allgemeine Krankenhausleistungen für männliche und weibliche Vollkosten-Versicherte, Verband der Privaten Krankenversicherung.⁶

Angefangen im Säuglingsalter, in dem neben erhöhten Kosten rund um die Geburt auch eine erhöhte Sterblichkeit zu verzeichnen ist, weisen beide Grafiken im Grundschulalter sowie den Folgejahren deutlich niedrigere Werte auf.⁷ Im Altersbereich von circa 20 Jahren nehmen die Verläufe dann einen lokalen Hochpunkt an, der sich bei den Sterblichkeiten insbesondere durch die erhöhte Teilnahme der heranwachsenden Bevölkerung am Straßenverkehr (sogenannter Unfallbuckel) begründen lässt und im Bereich der Gesundheitsausgaben speziell durch erhöhte Ausgaben im Rahmen von Schwangerschaften verursacht wird. Nach einer gewissen Plateaubildung setzt bei beiden Abbildungen im mitt-

⁵ Eigene Abbildung: Die Daten entstammen www.mortality.org. Der Abruf der Daten erfolgte mit der Statistik-Software R über die im Paket **demography** hinterlegte Funktion `hmd.mx()` und dem Länderkürzel **DEUTNP**. Zum Zeitpunkt der Anfertigung dieser Arbeit lagen Daten bis einschließlich des Jahres 2017 vor.

⁶ Eigene Abbildung: Genauere Erklärungen zur hier verwendeten Datenbasis erfolgen in Kapitel 5.

⁷ Statistisches Bundesamt (2020b), S. 12 ff.

leren Alter ein nahezu konstantes Wachstum ein. Insgesamt weisen die Sterbewahrscheinlichkeiten sowie die Gesundheitsausgaben pro Person einen recht ähnlichen Verlauf auf und es liegt nahe, die im Bereich der Sterblichkeitsprognose entwickelten Modelle auch auf die Projektion der sich dynamisch entwickelnden Krankheitskosten zu übertragen.

Im Rahmen dieser Masterarbeit soll eine Auswahl stochastischer Sterblichkeitsmodelle dahingehend untersucht werden, ob diese zu einer Verbesserung der kurzfristigen Kopfschadenprojektionen und somit auch insgesamt zu einer sachgerechteren Kalkulation führen können. Zur Validierung der Modelle werden dabei neben den in Abb. 2 dargestellten stationären Leistungen auch ambulante Leistungen sowie Zahnleistungen analysiert. Zusammen decken diese Leistungsbereiche ein breites Spektrum der im Rahmen der Kalkulation zu projizierenden Schadenentwicklungen ab. Ausgangspunkt der Auswertungen bildet ein Datenpool des Verbandes der Privaten Krankenversicherung e.V. (PKV-Verband) in Deutschland mit Kopfschadenreihen für die Jahre 2012 bis 2019. Diese werden in mehrere dreijährige Beobachtungszeiträume zerlegt, die jeweils als Testdatensatz zur Parameterschätzung der einzelnen Modelle dienen. Auf Basis dessen wird analog dem üblichen Vorgehen bei der Tarifikalkulation eine zweijährige Projektion vorgenommen, deren Ergebnisse gegen die realen Beobachtungswerte verglichen werden. Das Modell mit den besten Performanceeigenschaften dient anschließend als Ausgangspunkt für eine Kurzfristprojektion auf das Jahr 2021. Die Berechnungen erfolgen mit Hilfe der freien Programmiersprache R.

1.2 Stand der Forschung

In den vergangenen zwei Jahrhunderten hat sich die Lebenserwartung der Menschen stetig erhöht.⁸ Oeppen/Vaupel (2002) untersuchten beispielsweise die Mortalitätsdaten diverser Nationen und ermittelten für die Lebenserwartung der Frauen, dass diese über die letzten 160 Jahre – nahezu konstant – um bis zu drei Monate pro Jahr angestiegen ist. Unter anderem ausgelöst durch Weiterentwicklungen in den Bereichen der Medizin, der Ernährung oder auch der Bildung, ist dies auf der einen Seite zwar ein deutliches Signal des sozialen Fortschritts, auf der anderen Seite werden jedoch insbesondere Regierungen oder auch Versicherer vor die Aufgabe gestellt, diese Verbesserungen langfristig in ihre Leistungen beispielsweise für Gesundheitskosten oder Rentenzahlungen einzukalkulieren.

⁸ Vgl. Oeppen/Vaupel (2002), S. 1029, vgl. Villegas u. a. (2018b), S. 1.

Dies ist einer der Hauptgründe, warum inzwischen etliche Sterblichkeitsmodelle entwickelt wurden, die die Entwicklung der Sterblichkeiten besser abbilden sollen.

Ein besonders populäres und auch in der heutigen Zeit noch viel zitiertes Sterblichkeitsmodell wurde von Lee/Carter (1992) veröffentlicht.⁹ Sie zerlegen Sterbewahrscheinlichkeiten unter Anwendung der Singulärwertzerlegung in eine bilineare Kombination von Alters- und Kalenderzeitparametern mit zwei altersspezifischen Parametern und einem Parameter für den Periodeneffekt. Der von der Kalenderzeit abhängige Parameter wird dabei als Zeitreihe betrachtet und ermöglicht die Zukunftsprojektion von Sterbewahrscheinlichkeiten. Das entsprechend den Autoren als Lee-Carter-Modell (LC-Modell) bekannt gewordene Modell diente in den Folgejahren als Basis vieler anderer Arbeiten und wurde teilweise deutlich erweitert. Als Beispiele können hier die Veröffentlichungen von Lee/Miller (2001), Booth u. a. (2002), Jong/Tickle (2006) oder auch Delwarde u. a. (2007) genannt werden.¹⁰ Brouhns u. a. (2002a) setzten außerdem einen Vorschlag von Alho (2000) um und integrierten das LC-Modell in ein Poisson-Regressionsmodell anstelle der Singulärwertzerlegung.¹¹ Für Ergänzungen auf Basis zusätzlicher Alters-Perioden-Parameter sorgten Renshaw/Haberman (2003) sowie Hyndman/Shahid Ullah (2007), während Renshaw/Haberman (2006) den LC-Ansatz erstmals durch einen zusätzlichen Parameter zur Abbildung möglicher Kohorteneffekte bzw. geburtsjahrgangsspezifischer Einflüsse erweiterten.¹² In Anlehnung an Dowd u. a. (2020) können die genannten Modelle – als Abkömmlinge des LC-Modells – der ersten von zwei Hauptfamilien von stochastischen Mortalitätsmodellen zugeordnet werden, der LC-Familie.¹³

Die zweite Hauptfamilie stochastischer Sterblichkeitsmodelle basiert auf dem von Cairns u. a. (2006) veröffentlichten Cairns-Blake-Dowd-Modell (CBD-Modell) und wird im Rahmen dieser Masterarbeit als CBD-Familie bezeichnet.¹⁴ In seiner Grundform enthält das CBD-Modell keine alters- oder kohortenspezifischen Parameter, dafür aber zwei Parameter zur Abbildung von Periodeneffekten. Die damit verbundene Zielsetzung liegt insbesondere in einer besseren Abbildung höherer Altersbereiche. Spätere Erweiterungen durch Cairns u. a. (2009) ergänzten das Modell unter anderem um einen Parameter zur

⁹ Vgl. Lee/Carter (1992), S. 659 ff.

¹⁰ Vgl. Lee/Miller (2001), vgl. Booth u. a. (2002), vgl. Jong/Tickle (2006), vgl. Delwarde u. a. (2007).

¹¹ Vgl. Alho (2000), vgl. Brouhns u. a. (2002a), S. 373 ff.

¹² Vgl. Renshaw/Haberman (2003), vgl. Hyndman/Shahid Ullah (2007), vgl. Renshaw/Haberman (2006).

¹³ Vgl. Dowd u. a. (2020), S. 445.

¹⁴ Vgl. Cairns u. a. (2006), S. 687 ff.

Abbildung geburtsjahrgangsspezifischer Einflüsse sowie einen weiteren Parameter für den Periodeneffekt.¹⁵

Plat (2009) griff auf die bereits veröffentlichten stochastischen Sterblichkeitsmodelle zurück und versuchte die Vorzüge der einzelnen Modelle, wie beispielsweise die Anpassungsfähigkeit über die gesamte Altersstruktur oder auch die Berücksichtigung von Kohorteneffekten, in einem Modell zu vereinen.¹⁶ Eine Generalisierung aller genannten Sterblichkeitsmodelle wurde z. B. von Villegas u. a. (2018b) angestrebt, die diese auf Basis der Ausführungen von Hunt/Blake (2015) in einer verallgemeinerten Alters-Perioden-Kohorten-Struktur zusammenführten.¹⁷

Obwohl Sterblichkeitsmodelle vorrangig zur Abbildung demografischer Größen wie der Sterblichkeit entwickelt wurden, sind sie in der Vergangenheit gelegentlich auch in anderen Forschungsgebieten eingesetzt worden. Zu den ersten Arbeiten gehörte dabei Frees (2006), der auf Basis der Veröffentlichungen von Lee/Carter (1992) eine Prognose zukünftiger Erwerbsquoten vornahm, um diese beispielsweise im Bereich der Sozialversicherung oder auch für andere staatliche Planungsaufgaben zu verwenden.¹⁸ Christiansen u. a. (2012) sowie Levantesi/Menzietti (2012) übertrugen die Sterblichkeitsmodelle hingegen auf die Projektion zukünftiger Invaliditätsraten, während Rodrigues u. a. (2013) diese für die Prognose der Einweisungsraten in öffentliche Krankenhäuser in Brasilien nutzten.¹⁹ Neben den genannten Beispielen ist für diese Masterarbeit insbesondere die Übertragung der Sterblichkeitsmodelle auf die Projektion von Kopfschäden von Interesse. Diesen Schritt vollzogen unter anderem Christiansen u. a. (2018), die mehrere stochastische Modelle hinsichtlich der Prognoseeigenschaften zukünftiger Gesundheitsleistungen verglichen.²⁰ Als bestes Modell identifizierten sie dabei einen Ansatz entsprechend dem Lee-Carter-Modell i. V. m. einer Normalverteilungsannahme. Piontkowski (2020) setzte auf diese Beobachtungen auf und nahm verschiedene Anpassungen vor.²¹ Entsprechend seiner Ausführungen führte die Hinzunahme weiterer Parameter zur Abbildung des Alters-Kalenderzeiteffektes zu einer Verbesserung des Prognoseergebnisses, während die Variation der Prognoseansätze (ARIMA(0,1,0) mit Drift vs. ARIMA(0,2,2)) keinen eindeutigen Favoriten hervorbrachte.²²

¹⁵ Vgl. Cairns u. a. (2009), S. 9 f.

¹⁶ Vgl. Plat (2009), S. 395.

¹⁷ Vgl. Hunt/Blake (2015), S. 3, vgl. Villegas u. a. (2018b), S. 4.

¹⁸ Vgl. Frees (2006), S. 482, vgl. Lee/Carter (1992).

¹⁹ Vgl. Christiansen u. a. (2012), vgl. Levantesi/Menzietti (2012), vgl. Rodrigues u. a. (2013).

²⁰ Vgl. Christiansen u. a. (2018), S. 191 ff.

²¹ Vgl. Piontkowski (2020), S. 81 f.

²² ARIMA: Abkürzung für *autoregressive integrated moving average* (vgl. Box u. a. (2015), S. 88).

1.3 Vorgehen

In Kapitel 2 wird nach einem kurzen Abriss über die Historie des Krankenversicherungssystems in Deutschland zunächst beschrieben, wie sich Kopfschäden allgemein definieren lassen und wie sie unter Anwendung des Rusam-Ansatzes mathematisch zerlegt werden. Anschließend wird auf Basis dieses Ansatzes ein Verfahren aufgezeigt, mit dem anhand tatsächlich beobachteter Kopfschäden sogenannte rechnungsmäßige Kopfschäden hergeleitet werden können, welche für die Kalkulation von Tarifen genutzt werden. In Kapitel 3 folgt eine Einführung in Sterblichkeitsmodelle und deren generellen Aufbau. Das Hauptaugenmerk liegt auf der Vorstellung diverser Mortalitätsmodelle, die im weiteren Verlauf der Arbeit auf ihre Eignung hinsichtlich der Projektionseigenschaften von Kopfschäden untersucht werden. In Kapitel 4 erfolgt die Zusammenführung von Sterblichkeitsmodellen und Kopfschäden und es wird beschrieben, auf Basis welcher mathematischen Grundlagen die besten Modellparameter im Rahmen der Parameterschätzung ermittelt werden. Diese dienen anschließend zur Projektion der Kopfschäden mit Hilfe von ARIMA-Prozessen. Ergänzt wird das Kapitel 4 um Risikomaße und grafische Auswertungsmethoden, die bei der Entscheidungsfindung für das am besten geeignete Modell zum Einsatz kommen. Außerdem werden die bereits von Christiansen u. a. (2018) und Piontkowski (2020) untersuchten Methoden zur Kopfschadenprojektion näher betrachtet. Dem folgt in Kapitel 5 die Darstellung des in dieser Arbeit verwendeten Datensatzes. Der praktische Teil der Masterarbeit beginnt in Kapitel 6 mit der Beschreibung des Modellierungsprozesses, für den die Statistik-Software R eingesetzt wird. Es wird dargelegt, welche Vorteile die Programmiersprache R bietet und welche R-Funktionen im Rahmen der Untersuchungen eingesetzt werden. Einen Schwerpunkt der Arbeit bildet danach das Kapitel 7, in dem die geschätzten Parameter der einzelnen Sterblichkeitsmodelle dargestellt und die Ergebnisse anhand der Residuen sowie verschiedener Güteparameter interpretiert werden. Dem schließt sich die Auswertung der Projektionsergebnisse sowohl in qualitativer, grafischer als auch in quantitativer, numerischer Form an. Das Kapitel endet mit der Wahl des Modells, welches am besten zur Projektion von Kopfschäden geeignet erscheint und mit dem in Kapitel 8 zukünftige Kopfschäden projiziert werden. Dabei werden Bootstrap-Techniken verwendet und Fan-Charts erzeugt, die eine Aussage zur Vorhersagegenauigkeit ermöglichen. Nach der Zusammenfassung der Projektionsergebnisse und der Betrachtung möglicher ökonomischer Anwendungsszenarien folgt abschließend ein kurzes Fazit, in dem die wichtigsten Erkenntnisse zusammengestellt und mögliche weitere Forschungsansätze aufgezeigt werden.

2 Grundlagen der Krankenversicherungsmathematik in Deutschland

2.1 Überblick zu Historie und Beitragskalkulation

Das Krankenversicherungssystem in Deutschland hat eine lange Geschichte, deren Anfänge bis in das 14. Jahrhundert zurückreichen.²³ Zu dieser Zeit waren es die Zünfte und Gilden, die ihre Mitglieder gegen Zahlung von Beiträgen in Notsituationen unterstützten und im Krankheitsfall, bei Unfällen, bei Invalidität oder zur Hinterbliebenenversorgung für notwendige Versorgungsleistungen aufkamen. Das heutige System, bestehend aus der gesetzlichen Krankenversicherung (GKV) und der privaten Krankenversicherung (PKV) hat seinen Ursprung erst bedeutend später und lässt sich für die GKV in die Epoche der Industrialisierung zum Ende des 19. Jahrhunderts einordnen.²⁴ Hier kam es erstmals unter Otto von Bismarck zur Etablierung eines umfänglichen Sozialversicherungssystems, in das 1883/84 zunächst nur für eine bestimmte Gruppe von Arbeitern sowie Gewerbetreibenden und später auch für andere Anspruchsgruppen die Krankenversicherung eingeschlossen wurde. Die Anfänge der PKV lassen sich bedeutend schwerer abgrenzen, können letztlich aber bis in die Mitte des 19. Jahrhunderts zurückverfolgt werden, als diverse Selbsthilfeeinrichtungen (die sogenannten Hilfskassen) Industriearbeiter gegen das Risiko einer Erkrankung absicherten.²⁵ Bis zum heutigen Zeitpunkt erlebte die PKV allerdings noch zahlreiche Anpassungen und Gesetzesänderungen, für die beispielsweise auf die detaillierten Ausführungen von Milbrodt/Röhrs (2016) verwiesen werden kann.²⁶

Wie schon in der Zeit von Bismarcks ist die GKV auch heute Teil des deutschen Sozialversicherungssystems und bildet neben der Pflege-, Renten-, Unfall- und Arbeitslosenversicherung eine von fünf Säulen der Absicherung.²⁷ Mit ihr verbunden ist das sogenannte Solidarprinzip, wonach die anfallenden Kosten aller Versicherten gleichermaßen auf alle Beitragszahler – entsprechend ihrem Bruttoverdienst – aufgeteilt werden.²⁸ Die erhobenen Beiträge werden dabei unmittelbar zur Deckung anfallender Gesundheitsausgaben genutzt, weshalb dieses Verfahren auch als Umlageverfahren bezeichnet wird. Demgegenüber kommt in der PKV, die nicht nach dem Solidarprinzip verfährt, das sogenannte Anwartschaftsdeckungsverfahren zur Anwendung.²⁹ Dabei wird entsprechend dem „versicherungstechnischen Risiko“³⁰ eines Versicherten eine Prämie ermittelt, die

²³ Vgl. Milbrodt/Röhrs (2016), S. 29.

²⁴ Vgl. Milbrodt/Röhrs (2016), S. 33 f.

²⁵ Vgl. Milbrodt/Röhrs (2016), S. 31.

²⁶ Vgl. Milbrodt/Röhrs (2016), S. 29 ff.

²⁷ Vgl. Becker (2017), S. 5.

²⁸ Vgl. Becker (2017), S. 10 f.

²⁹ Vgl. Becker (2017), S. 15.

³⁰ Wagner (2011), S. 731. Hier findet sich auch eine ausführliche Beschreibung dieses Begriffs.

bei barwertiger Betrachtung den zukünftig zu erwartenden Schadenleistungen entspricht (Äquivalenzprinzip) und die prinzipiell über die gesamte Vertragslaufzeit konstant bleibt.³¹ Um dies zu erreichen, wird in den ersten Jahren nach dem Versicherungsbeginn ein Beitrag erhoben, der im Normalfall oberhalb der zu erwartenden Versicherungsleistungen liegt. Der entstehende Differenzbetrag dient zur Bildung einer Rückstellung (die sogenannte Alterungsrückstellung), die für den Zeitraum der Vertragslaufzeit verwendet wird, in dem die kalkulierten Kosten die zu entrichtende Prämie übersteigen. Neben dem Äquivalenzprinzip ist dieser Aufbau von Alterungsrückstellungen ein typisches Merkmal einer Krankenversicherung, die „nach Art der Lebensversicherung“³² kalkuliert wurde und die im Fokus der weiteren Ausführungen steht.

Gesetzliche Regelungen zur Ermittlung von Prämien und Rückstellungen finden sich in Kapitel 1 der Krankenversicherungsaufsichtsverordnung (KVAV). Dort heißt es in § 1 KVAV, dass alle Berechnungen nach versicherungsmathematischen Grundsätzen und unter Anwendung sogenannter Rechnungsgrundlagen erfolgen müssen.³³ Diese in § 2 KVAV genannten und in §§ 4 bis 8 KVAV detaillierter beschriebenen Rechnungsgrundlagen setzen sich unter anderem aus dem sogenannten Rechnungszins zur Verzinsung der zuvor genannten Alterungsrückstellungen sowie der Ausscheideordnung zusammen, die mögliche Abgänge aus der PKV beispielsweise durch Tod oder Kündigung berücksichtigt und damit die Vererbung von Alterungsrückstellungen kalkulatorisch einschließt. Darüber hinaus gehören zu den Rechnungsgrundlagen Sicherheits- und sonstige Zuschläge, insbesondere aber auch die Kopfschäden, die in Abhängigkeit vom Alter den erwarteten Wert der Krankheitskosten innerhalb eines Jahres angeben. Näher beschrieben in § 6 KVAV haben Kopfschäden eine essenzielle Bedeutung für die Kalkulation von Krankenversicherungsbeiträgen und bilden den Schwerpunkt des restlichen Kapitels 2. Obwohl auch die übrigen Rechnungsgrundlagen Einfluss auf die versicherungsmathematischen Berechnungen nehmen können, wird für diese – vor dem Hintergrund der Themenstellung dieser Masterarbeit – beispielhaft auf Milbrodt/Röhrs (2016) verwiesen.³⁴

³¹ Vgl. Becker (2017), S. 15, vgl. PKV-Verband (o. J.).

³² § 257 Abs. 2a Satz 1 SGB V, § 155 Abs. 1 VAG.

³³ Vgl. § 1 KVAV.

³⁴ Vgl. Milbrodt/Röhrs (2016), S. 142 ff.

2.2 Definition von Kopfschäden

Kopfschäden werden gemäß § 6 Abs. 1 KVAV wie folgt definiert:

„Kopfschäden sind die im Beobachtungszeitraum auf einen Versicherten entfallenden durchschnittlichen Versicherungsleistungen; sie sind für jeden Tarif in Abhängigkeit vom Alter des Versicherten zu ermitteln. Der Beobachtungszeitraum erstreckt sich auf zusammenhängende zwölf Monate [...]“³⁵.

Auch wenn Milbrodt/Röhrs (2016) dieser Definition deutliche Schwächen zuschreiben, da der modelltheoretische Ansatz der Kopfschäden mit den real beobachteten Daten der Vergangenheit vertauscht wird, soll sie im Folgenden als Grundlage zur mathematischen Aufbereitung des Kopfschadenbegriffs dienen.³⁶ Statt der durchschnittlichen Versicherungsleistungen werden für die Modellierung jedoch die in die Zukunft gerichteten Leistungen betrachtet.³⁷ Außerdem wird – wie üblich im Bereich der Krankenversicherungsmathematik – in der späteren Kopfschadenherleitung unterschieden „zwischen wahren Größen (= abstrakten / theoretischen mathematischen Größen), tatsächlichen Werten (= aktuellen empirischen Werten, auf Beobachtungsbasis geschätzt [...]) und rechnerischen/rechnungsmäßigen Werten (= in der Tarifikalkulation de facto verwendeten Werten [...])“³⁸. Zur Kennzeichnung der tatsächlichen und rechnerischen Werte werden im Folgenden die Oberindizes ^{tats} und ^{rech} verwendet. Die darüber hinaus aufgeführten Definitionen, Variablen und Indizes orientieren sich im Wesentlichen an den Ausführungen von Becker (2017) und Milbrodt/Röhrs (2016).³⁹

Der in der Kopfschadendefinition genannte Beobachtungszeitraum soll jeweils als ein Kalenderjahr im Kalenderzeitbereich $T \subset [0, \infty)$ aufgefasst werden.⁴⁰ Entsprechend wird die Menge der Versicherten eines Versichertenkollektiv im Jahr $t \in T$ wie folgt definiert:

$$J(t) := \text{Menge der Versicherten eines Versichertenkollektivs im Jahr } t \quad (1)$$

Ein Versichertenkollektiv beschreibt dabei die Zusammenfassung mehrerer versicherter Personen mit vergleichbaren Risikomerkmale/-ausprägungen und wird im weiteren Verlauf dieses Kapitels noch ausführlich erläutert. Um das Problem unterjähriger Zu- und Abgänge zu berücksichtigen, muss in der praktischen Anwendung festgelegt werden, ob z. B. nur die zu Beginn oder am Ende eines Kalenderjahres versicherten Personen erfasst werden oder eine Durchschnittsbildung vorgenommen wird. Darüber hinaus ist es üblich,

³⁵ § 6 Abs. 1 KVAV.

³⁶ Vgl. Milbrodt/Röhrs (2016), S. 86.

³⁷ Vgl. Becker (2017), S. 40 f.

³⁸ Milbrodt/Röhrs (2016), S. 86.

³⁹ Vgl. Becker (2017), S. 40 ff., vgl. Milbrodt/Röhrs (2016), S. 86 ff.

⁴⁰ Vgl. Becker (2017), S. 41, vgl. Milbrodt/Röhrs (2016), S. 87.

Kriterien zu definieren, dass z. B. Versicherte erst ab einer bestimmten Mindestversicherungsdauer in der Menge $J(t)$ erfasst werden. Neben dieser Festlegung werden für eine versicherte Person $i \in J(t)$ – mit Geburtsjahr c (Englisch: cohort) und e als dem Eintrittsjahr in das Kollektiv – das versicherungstechnische Alter $x_i(t)$ sowie die bisherige Versicherungsdauer $m_i(t)$ im Jahr t wie folgt definiert:

$$x_i(t) := t - c \qquad m_i(t) := t - e$$

Grundsätzlich lassen sich in der PKV gemäß § 10 Abs. 3 KVAV drei Kalkulationsgruppen unterscheiden.⁴¹ Angefangen bei Kindern mit einem versicherungstechnischen Höchstalter ω_K von maximal 15 Jahren, folgen bis zu einem Maximalalter ω_J von 20 Jahren die Jugendlichen. Die übrigen Versicherten werden der Altersgruppe der Erwachsenen zugeordnet. Ihr versicherungstechnisches Höchstalter wird im Folgenden mit ω_E bezeichnet. Demnach lassen sich beispielsweise die ganzzahligen Alter der Erwachsenen dem Altersbereich $A := \{\omega_J + 1, \dots, \omega_E\}$ zuordnen. Auf diese Gruppe wird der Fokus der weiteren Ausführungen gelegt. Zunächst folgt jedoch ein kurzer Exkurs zum Versicherungskollektiv und zu weiteren Begrifflichkeiten im Kontext von Kopfschäden.

Ein Versicherungskollektiv beschreibt den Zusammenschluss mehrerer Versicherter, die eine vergleichbare Schadenverteilung erwarten lassen.⁴² Diese Kollektive werden gebildet, um die Risiken einzelner versicherter Personen über eine größere Gruppe auszugleichen. Unter der Annahme der gleichen Risikoverteilung sowie der Prämisse, dass das Schadenverhalten der einzelnen Personen unabhängig voneinander ist, wird das Kollektiv auch als homogenes Kollektiv bezeichnet. Der Begriff des Schadens ist dabei als der Wert zu betrachten, den ein Krankenversicherungsunternehmen einem Versicherten auf Basis eines Schadenereignisses (z. B. ärztliche Behandlung) erstattet. Für die Modellierung werden die Schäden eines Versicherten in der Regel zu Jahresschäden aggregiert. Um nun Personen mit einer vergleichbaren Verteilung hinsichtlich ihrer Jahresschäden zu identifizieren und zusammenzustellen, werden sogenannte Risikomerkmale herangezogen. Dies sind objektiv zu ermittelnde, messbare Größen, die erfahrungsgemäß einen wesentlichen Einfluss auf den zu erwartenden Jahresschaden eines Versicherten ausüben.⁴³ Unmittelbar quantifizierbar sind beispielsweise das versicherungstechnische Alter oder die bisherige Versicherungsdauer eines Versicherten. Qualitative Merkmale sind darüber hinaus auch das Geschlecht, die ausgeübte berufliche Tätigkeit, bereits bekannte

⁴¹ Vgl. Becker (2017), S. 41, vgl. Milbrodt/Röhrs (2016), S. 88 f.

⁴² Vgl. Becker (2017), S. 25 ff.

⁴³ Vgl. Becker (2017), S. 29 ff., vgl. Milbrodt/Röhrs (2016), S. 91 ff.

Vorerkrankungen sowie die mit dem vereinbarten Versicherungsschutz abgedeckten Versicherungsleistungen. Die zuletzt genannten Versicherungsleistungen sind von Interesse, da die Versicherungsunternehmen zumeist mehrere, individuell wählbare Versicherungspakete anbieten. Diese können sich sowohl in den abgesicherten Leistungen, aber beispielsweise auch in den Erstattungshöhen oder möglichen Selbsthalten unterscheiden. Die Unterteilung der Leistungen wiederum wird über die sogenannten Leistungsbereiche (ambulante Leistungen, stationäre Leistungen, Leistungen für Zahnersatz und -behandlung etc.) vorgenommen, die jeweils unterschiedliche Erwartungswerte hinsichtlich der zu erwartenden Schadenssummen aufweisen und daher einen entscheidenden Einfluss auf die Festlegung der eingangs erwähnten Versichertenkollektive haben. Damit einher geht auch der in die obige Definition der Kopfschäden aufgenommene Begriff des Tarifs.⁴⁴ Vereinfacht ausgedrückt umfasst dieser in der Regel einen oder mehrere Leistungsbereiche mit fest definiertem Leistungsumfang.

Bezugnehmend auf die zu erwartenden Schäden einer versicherten Person aus $J(t)$ im Jahr t weist das in (1) definierte Versichertenkollektiv $J(t)$ noch keine homogene Struktur auf.⁴⁵ Entsprechend den beschriebenen Risikomerkmale wird deshalb eine weitergehende Differenzierung nach dem versicherungstechnischen Alter, dem Geschlecht sowie der zurückgelegten Versicherungszeit vorgenommen. Die Versicherungsdauer spielt insofern eine Rolle, dass Versicherte vor Aufnahme in die private Krankenversicherung regelmäßig einer Prüfung ihres Gesundheitszustandes unterzogen werden. Daher ist anzunehmen, dass diese tendenziell weniger Schäden verursachen als versicherte Personen, deren Gesundheitsprüfung schon länger zurückliegt und die schon länger versichert sind. Dieser sogenannte Selektionseffekt tritt jedoch vornehmlich zu Beginn der Versicherungszeit auf und nimmt mit den Jahren langsam ab. Eine ähnliche Wirkung erzeugen auch die sogenannten Wartezeiteffekte, die bewirken, dass eine vollständige Kostenerstattung erst nach Ablauf vorher festzulegender Wartezeiten erfolgt. Um diese beiden Effekte abgrenzen zu können, werden die Dauern $m \in \{0, \dots, m^* - 1\}$ und $m \geq m^*$ für ein gewisses m^* unterschieden. m^* steht für die Versicherungsdauer, bis zu dem die beiden Effekte eine Wirkung auf das versicherungstechnische Risiko der Versicherten ausüben.

⁴⁴ Vgl. § 6 Abs. 1 KVAV.

⁴⁵ Vgl. Becker (2017), S. 41 ff.

Darauf aufbauend wird die Definition von $J(t)$ für $x \in A$ wie folgt erweitert:⁴⁶

$$J_{x,m}(t) := \{i \in J(t) : x_i(t) = x, m_i(t) = m\} \quad (2)$$

Auf der Grundlage von (2) können die Versicherten sowohl zu einem Kollektiv $J_x(t)$ ohne Eliminierung der Wartezeit- und Selektionseffekte (WSE) als auch zu einem Kollektiv $J_x^*(t)$ unter Berücksichtigung der WSE abgegrenzt werden:

$$J_x(t) := \bigcup_{m \geq 0} J_{x,m}(t) \quad (3a) \quad \text{bzw.} \quad J_x^*(t) := \bigcup_{m \geq m^*} J_{x,m}(t) \quad (3b)$$

Für Versicherte aus $J_x^*(t)$ kann angenommen werden, dass sie in Bezug auf das Alter, das Geschlecht und die Versicherungsdauer vergleichbar sind mit anderen x -jährigen des betrachteten Versichertenbestands. Einschränkend muss jedoch ergänzt werden, dass für ein homogenes Kollektiv theoretisch auch weitere Risikomerkmale wie Vorerkrankungen oder die berufliche Tätigkeit modelliert werden müssten. Während sich diese noch durch zusätzliche Risikozuschläge oder Leistungsausschlüsse abbilden lassen, gibt es darüber hinaus eine Reihe weiterer, subjektiver Merkmale wie die durchgeführten Freizeitaktivitäten oder Schlaf- und Essgewohnheiten, die zwar potenziell einen Einfluss auf das zu erwartende Schadenverhalten ausüben, sich aber nicht objektiv bewerten lassen und daher in der Kalkulation der Krankenversicherung aktuell nicht betrachtet werden.

In Anlehnung an die Festlegung des Schadenbegriffs – als Erstattungsbetrag durch das Versicherungsunternehmen – gelte für $i \in J(t)$ und $t \in T$ die folgende Definition:⁴⁷

$$Y_i(t) := \text{Summe der Erstattungsbeträge für Person } i \text{ im Jahr } t \quad (4)$$

$Y_i(t)$ stellt für in die Zukunft gerichtete Jahre t eine Zufallsvariable dar, während sich die Realisierungen von $Y_i(t)$ als $y_i(t)$ ausdrücken lassen. Um auf Basis von $Y_i(t)$ Kopfschäden zu definieren, werden noch zwei weitere Annahmen getroffen. Einerseits sei vorausgesetzt, dass die für das Kollektiv $J_x^*(t)$ hinsichtlich der Risikomerkmale getroffene Differenzierung ausreichend ist. Dies führt dazu, dass die zusammengefassten Versicherten ein vergleichbares Risikoprofil aufweisen, die Zufallsvariablen $\{Y_i(t) : i \in J_x^*(t)\}$ somit identisch verteilt sind und insgesamt die Kriterien eines homogenen Versichertenkollektivs erfüllt werden. Andererseits wird angenommen, dass die Zufallsvariablen $Y_i(t)$ und $Y_j(t)$ für zwei Versicherte $i \in J_x^*(t)$ und $j \in J_x^*(t)$ für eine gewisse Anzahl an in die

⁴⁶ Das Symbol x repräsentiert grundsätzlich das Alter der Männer. y steht für das Alter von Frauen, u für das Alter von Erwachsenen. Zur Wahrung der Übersichtlichkeit wird in allen Formeln die Indizierung für Männer $[x]$ verwendet. Die Formeln gelten gleichfalls für Frauen $[y]$ bzw. Erwachsene $[u]$.

⁴⁷ Vgl. Becker (2017), S. 43, vgl. Milbrodt/Röhrs (2016), S. 89 f.

Zukunft gerichteten Jahre t stochastisch unabhängig voneinander sind.⁴⁸ Damit lässt sich der Kopfschaden eines x -jährigen Versicherten im Kalenderjahr $t \in T$ wie folgt definieren:

$$K_x(t) := E[Y_i(t)], i \in J_x^*(t) \quad (5)$$

Wie bereits angedeutet sind nicht die ursprünglich in § 6 Abs. 1 KVAV beschriebenen „durchschnittlichen Versicherungsleistungen“⁴⁹ Teil dieser Definition, da sie sich prinzipiell auf bereits erfasste Beobachtungswerte beziehen. Da für eine (Nach-)Kalkulation die in die Zukunft gerichteten Leistungen analysiert werden, sind die Kopfschäden – wie in (5) dargestellt – vielmehr als Erwartungswerte zu interpretieren.

2.3 Multiplikative Kopfschadenzerlegung nach dem Ansatz von Rusam

Die in (5) beschriebene Definition des Kopfschadens weist sowohl eine Abhängigkeit vom versicherungstechnischen Alter als auch vom Kalenderjahr auf.⁵⁰ Bereits Mitte der 1930er Jahre griff Friedrich Rusam diesen Zusammenhang auf und es entstand die Idee, den Kopfschaden $K_x(t)$ in einen nur vom Alter $x \in A$ abhängigen Faktor k_x (das sogenannte Profil) sowie einen nur vom Kalenderjahr $t \in T$ abhängigen Faktor $G(t)$ (den sogenannten Grundkopfschaden) zu zerlegen. Letzterer ist dabei als das Leistungsniveau der betrachteten Tarifeinheit zu interpretieren und wird auf den Kopfschaden einer stark besetzten Bestandsstufe mit dem Normierungsalter $x_0 \in A$ festgesetzt. Dieses beträgt heute regelmäßig 40 Jahre, kann aber unternehmensindividuell bestimmt werden.⁵¹ Definieren lassen sich $G(t)$ sowie – das zunächst neben dem Alter x auch von der Zeit t abhängige Profil – $k_x(t)$ analog zu den Ausführungen von Milbrodt wie folgt:⁵² Seien $t \in T$, $(K_x(t))_{x \in A}$ eine Reihe von Kopfschäden und $x_0 \in A$ fest. Dann bezeichnen

$$G(t) := K_{x_0}(t) \quad \text{den (wahren) Grundkopfschaden} \quad (6a)$$

zum Normierungsalter x_0 und

$$(k_x(t))_{x \in A} := \left(\frac{K_x(t)}{G(t)} \right)_{x \in A} \quad \text{das entsprechende (wahre) Profil.} \quad (6b)$$

Wird nun die Annahme getroffen, dass das Profil $k_x(t)$ zumindest für eine kurze Zeit nahezu konstant ist, kann an dessen Stelle das zeitunabhängige Profil k_x gesetzt und

⁴⁸ Abhängig sind die zu erstattenden Beiträge beispielsweise dann, wenn sie durch einen gleichen Anlass (z. B. eine Pandemie) verursacht werden. Auch wenn derzeit die Corona-Pandemie grassiert, scheint diese Annahme für „normale“ Zeiten sachgemäß zu sein, vgl. Becker (2017), S. 27.

⁴⁹ § 6 Abs. 1 KVAV.

⁵⁰ Vgl. Becker (2017), S. 43 f., vgl. Milbrodt/Röhrs (2016), S. 95 f., vgl. Rusam (1935), S. 148 ff.

⁵¹ Vgl. Milbrodt/Röhrs (2016), S. 96, vgl. Bundesanstalt für Finanzdienstleistungsaufsicht (2020).

⁵² Vgl. Milbrodt/Röhrs (2016), S. 96 f.

anschließend auf Basis der genannten Definitionen (6a) und (6b) folgende modellhafte Zerlegung der Kopfschäden vorgenommen werden:

$$K_x(t) = G(t) \cdot k_x \quad (7)$$

Dieser multiplikative Ansatz bietet diverse Vorteile, insbesondere Interpretations- und Anwendungsmöglichkeiten.⁵³ Beispielsweise lässt sich anhand der zeitlichen Entwicklung des Grundkopfschadens ableiten, welchen Einfluss das sich ändernde Preisniveau im Gesundheitswesen (die sogenannte medizinische Inflation) auf die Kopfschäden ausübt. Außerdem lässt sich das Profil zum Alter $x \in A$ als die zu erwartende Schadenhöhe relativ zum Alter x_0 interpretieren. In Bezug auf die praktische Anwendbarkeit können mitunter gleiche Kopfschadenprofile für mehrere Tarife eines – und ggf. auch anderer – Versicherungsunternehmen verwendet werden, wenn die Bestandsversicherten der Tarife eine ähnliche Struktur aufweisen, prinzipiell ähnliche Leistungen verbrieft sind und die auflaufenden Schäden in vergleichbarer Weise reguliert werden. Die Unterscheidung zwischen den Tarifen wird dann lediglich über die unterschiedlichen Grundkopfschäden vorgenommen. Abschließend soll festgehalten werden, dass es sich bei der multiplikativen Zerlegung der Kopfschäden um ein Modell handelt, das die Realität nicht 1:1 abbilden kann. Hier sei insbesondere auf die Altersabhängigkeit des Profils hingewiesen, die zumindest mittel- und langfristig Änderungen unterliegt. Hinsichtlich kürzerer Zeiträume scheint die obige Annahme eines zeitunabhängigen Profils dennoch zumindest näherungsweise geeignete Resultate zu liefern und kommt in der Praxis zum Einsatz.

2.4 Gründe für die Kopfschadenbestimmung

Kopfschäden müssen in regelmäßigen Abständen durch die PKV-Unternehmen bestimmt werden. Zum einen werden sie zur Ermittlung des sogenannten Auslösenden Faktors (AF) ermittelt, um einen Vergleich der kalkulierten mit den später tatsächlich beobachteten Versicherungsleistungen vorzunehmen.⁵⁴ Ergibt sich dabei eine zu große Abweichung, sind die Beiträge zu überprüfen und ggf. auch anzupassen. Die gesetzlichen Regelungen dazu finden sich in § 155 Abs. 3 VAG i. V. m. § 15 KVAV. Hier wird auch festgelegt, dass die Berechnungen jährlich nach einem genau beschriebenen Muster entsprechend Anlage 2 KVAV durchgeführt werden müssen. Zum anderen werden Kopfschäden als Rechnungsgrundlage im Rahmen der Tarifierung benötigt.⁵⁵ Die Ermittlung kann dabei

⁵³ Vgl. Becker (2017), S. 44 f., vgl. Milbrodt/Röhrs (2016), S. 96.

⁵⁴ Vgl. Becker (2017), S. 40, vgl. Becker (2017), S. 204 ff.

⁵⁵ Vgl. Becker (2017), S. 40.

sowohl in Folge einer Beitragsanpassung für bereits bestehende Tarife – gesetzlich geregelt in § 6 Abs. 3 KVAV – notwendig werden als auch für den Zweck der Einführung eines neuen Tarifs entsprechend § 6 Abs. 2 KVAV. Entgegen der AF-Berechnung sind die Vorgaben zur Ermittlung der Kopfschäden im Rahmen der Tarifierung jedoch deutlich weniger streng reglementiert, solange diese auf versicherungsmathematischen und mathematisch-statistischen Grundsätzen durchgeführt wird. Ein möglicher Weg zur Bestimmung von Kopfschäden für die Tarifikalkulation wird im nächsten Kapitel beschrieben.

2.5 Herleitung von rechnungsmäßigen Kopfschäden

Zur (Nach-)Kalkulation eines bestehenden Tarifs werden sogenannte rechnungsmäßige Kopfschäden benötigt, die sich auf unterschiedliche Berechnungsweisen anhand von Beobachtungswerten herleiten lassen. Möglich ist dies beispielsweise auf Basis des Rusam-Ansatzes und der Annahme einer zumindest kurzfristigen, relativen Altersunabhängigkeit der Kopfschäden. Demnach treten Änderungen im Kopfschadenniveau nicht nur in einzelnen Altersbereichen auf, sondern wirken sich jeweils über die gesamte Altersstruktur aus. Dies ermöglicht die Zerlegung der rechnungsmäßigen Kopfschäden in ein rechnungsmäßiges Profil und einen rechnungsmäßigen Grundkopfschaden. In Schritt 1 werden aus den beobachteten Schadendaten die tatsächlichen Kopfschäden sowie daraus das rechnungsmäßige Profil hergeleitet.

Als Basis zur Berechnung von tatsächlichen Kopfschäden werden regelmäßig die Beobachtungsdaten der letzten drei Jahre herangezogen, wobei auch längere Zeiträume denkbar sind.⁵⁶ Das Jahr t_0 soll im Folgenden das Jahr mit den letzten verwendeten Beobachtungswerten darstellen, die Menge aller untersuchten $n + 1$ Beobachtungsjahre sei entsprechend $BJ = \{t_0 - n, \dots, t_0 - 1, t_0\}$. Die Berechnung der rechnungsmäßigen Werte erfolgt jeweils im Jahr $t_0 + 1$ für das Jahr $t_0 + 2$.

Zur Ermittlung der tatsächlichen Kopfschäden wird die durchschnittliche Anzahl der x -jährigen Versicherten $n_x(t)$ im Jahr $t \in BJ$ benötigt, die allerdings entsprechend der in (3b) vorgenommenen Definition bei Vorliegen ausreichend großer Bestände auf Versicherte mit einer vorher festzulegenden Versicherungszeit eingeschränkt werden kann:

$$n_x(t) = \#J_x^*(t) \tag{8}$$

⁵⁶ Vgl. Becker (2017), S. 53 f. Hinweis zu (8): $\#A$ gibt die Anzahl der Elemente in einer Menge A an.

Die aufsummierten Erstattungsbeträge $y_x^{sum}(t)$ der Versicherten lassen sich je Einzelalter wie folgt ausdrücken:

$$y_x^{sum}(t) = \sum_{i \in J_x^*(t)} y_i(t) \quad (9)$$

Um die tatsächlichen Kopfschäden zu bestimmen, müssen die Erstattungsbeträge $y_x^{sum}(t)$ noch um bestimmte Effekte bereinigt werden.⁵⁷ Zunächst ist der Teil an Leistungen aus den Erstattungsbeträgen zu eliminieren, der beispielsweise durch bestimmte Vorerkrankungen schon bei Vertragsabschluss erwartbar war und der über die im Normalfall zu erwartenden Schadenleistungen hinausgeht. Dieser Wert wird regelmäßig durch einen zusätzlichen Risikozuschlag auf die Prämie berücksichtigt. Da in der Praxis allerdings schwer einzuschätzen ist, welcher Anteil der Erstattungsbeträge sich exakt dem erhöhten Risiko zuordnen lässt, werden für die x -jährigen Versicherten im Jahr $t \in BJ$ die vereinnahmten Risikozuschläge $rz_x^{sum}(t)$ pauschal gegen die erstatteten Beträge verrechnet. Eine weitere Korrektur ist vorzunehmen, wenn zwischenzeitliche Sondereffekte innerhalb der Beobachtungsjahre eingetreten sind. Diese können beispielsweise durch Gesetzesänderungen und damit einhergehende Anpassungen im Leistungsniveau verursacht werden oder auch in einer veränderten Schadenregulierung begründet sein. Die Korrektur mit dem – auf Basis der Sondereffekte geschätzten – Term $so_x^{sum}(t)$ kann dabei sowohl zu höheren als auch zu niedrigeren tatsächlichen Kopfschäden führen. Zuletzt sind ggf. auch WSE zu berücksichtigen, wenn Versicherte mit einer kurzen Versicherungsdauer und einer erwartungsgemäß geringeren Leistungsanspruchnahme in die Berechnung mit einbezogen werden. Der positive Effekt muss quantifiziert und als Zuschlagsterm $ws_x^{sum}(t)$ berücksichtigt werden. Werden hingegen nur Versicherte mit einer ausreichend langen Versicherungszeit ausgewählt, kann diese Korrektur unterbleiben. In der Praxis wird hier – analog den gemäß § 23 Abs. 2 KVAV zu meldenden Bestandsdaten – in der Regel ein Wert von drei Jahren zugrunde gelegt. Unter Berücksichtigung aller genannten Komponenten lassen sich die Erstattungsbeträge $y_x^{sum}(t)$ aus (9) anschließend wie folgt zu tatsächlich auf das Beobachtungsjahr t entfallenden Schadenleistungen $s_x^{sum}(t)$ modifizieren:

$$s_x^{sum}(t) = y_x^{sum}(t) - rz_x^{sum}(t) \pm so_x^{sum}(t) + ws_x^{sum}(t) \quad (10)$$

⁵⁷ Vgl. Becker (2017), S. 54 f., vgl. Milbrodt/Röhrs (2016), S. 109 f.

Der tatsächliche Kopfschaden eines x -jährigen Versicherten kann damit als Mittelwert über die Beobachtungsjahre t folgendermaßen definiert werden:

$$K_x^{\emptyset,tats} := \frac{\sum_{t \in BJ} S_x^{sum}(t)}{\sum_{t \in BJ} n_x(t)} \quad (11a)$$

Alternativ ergibt sich für einen x -jährigen Versicherten im letzten Beobachtungsjahr t_0

$$K_x^{tats}(t_0) := \frac{S_x^{sum}(t_0)}{n_x(t_0)}. \quad (11b)$$

In § 6 Abs. 3 KVAV wird vorgeschrieben, dass die auf diese Weise ermittelten Kopfschäden anschließend mittels geeigneter Verfahren geglättet werden müssen, um die zufällig auftretenden Schwankungen aus den Daten zu eliminieren. Dies kann beispielsweise mit dem Whittaker-Henderson-Verfahren durchgeführt werden, das von Milbrodt/Röhrs (2016) in Bezug auf die Glättung von Sterbewahrscheinlichkeiten ausführlich dargestellt wird.⁵⁸ Möglich sind aber auch Glättungsverfahren wie die quadratische Regression oder eine Spline-Interpolation. Auf eine genauere Beschreibung wird an dieser Stelle verzichtet, da die im Verlauf dieser Arbeit durchgeführten Untersuchungen auf Basis nicht geglätteter, sogenannter roher Kopfschäden durchgeführt werden. Eine Begründung dieses Vorgehens erfolgt in Kapitel 5. Stattdessen werden die tatsächlichen Profilwerte $k_x^{\emptyset,tats}$ und $k_x^{tats}(t_0)$ für einen x -jährigen Versicherten im nächsten Schritt direkt – und damit abweichend beispielsweise zum Vorgehen von Becker (2017) mit einer vorherigen Glättung der Daten – aus den rohen Kopfschäden abgeleitet.⁵⁹ Dies ist mit $K_x^{\emptyset,tats}$ entsprechend (11a) sowie $K_x^{tats}(t_0)$ gemäß (11b) möglich. Auf Grundlage des Normierungsalters x_0 ergeben sich daraus folgende Definitionen:

$$k_x^{\emptyset,tats} := \frac{K_x^{\emptyset,tats}}{K_{x_0}^{\emptyset,tats}} \quad (12a) \quad \text{bzw.} \quad k_x^{tats}(t_0) := \frac{K_x^{tats}(t_0)}{K_{x_0}^{tats}(t_0)} \quad (12b)$$

Aufgrund der Annahme eines zumindest in der kurzen Frist konstanten Kopfschadenprofils kann einerseits das durchschnittliche Profil $k_x^{\emptyset,tats}$ als rechnungsmäßiges Profil $(k_x^{rech})_{x \in A}$ für die Kalkulation von rechnungsmäßigen Kopfschäden im Jahr $t_0 + 2$ verwendet werden. Andererseits ist auch der Rückgriff auf das Profil $k_x^{tats}(t_0)$ des letzten Beobachtungsjahres t_0 möglich. Da $k_x^{tats}(t_0)$ in der Praxis häufig zum Einsatz kommt und deshalb auch in den späteren Berechnungen dieser Masterarbeit verwendet werden soll, sei im Folgenden definiert:

⁵⁸ Vgl. Milbrodt/Röhrs (2016), S. 110 f., vgl. Whittaker (1923), vgl. Milbrodt/Röhrs (2016), S. 156 ff.

⁵⁹ Vgl. Becker (2017), S. 56, vgl. Milbrodt/Röhrs (2016), S. 116, vgl. Christiansen u. a. (2018), S. 189 f.

$$k_x^{rech} := k_x^{tats}(t_0) \quad (13)$$

Während sich das rechnungsmäßige Profil nur auf Basis vergangenheitsbezogener Werte bestimmen lässt, wird der rechnungsmäßige Grundkopfschaden in Schritt 2 durch eine auf das Jahr $t_0 + 2$ ausgerichtete Extrapolation bestimmt.⁶⁰ Hintergrund ist das sich auch in der kurzen Frist ändernde Niveau der Gesundheitskosten. Zur Ermittlung des rechnungsmäßigen Grundkopfschadens werden zunächst die Grundkopfschäden aller Beobachtungsjahre bestimmt. Dazu wird angenommen, dass sich der Schaden sämtlicher Versicherten $i \in J_x^*(t)$ für das Jahr $t \in BJ$ unter Anwendung des Rusam-Ansatzes und der damit einhergehenden Zerlegung in das rechnungsmäßige Profil $(k_x^{rech}(t))_{x \in A}$ sowie den Grundkopfschaden $G(t)$ wie folgt ausdrücken lässt:

$$\sum_{x \in A} \sum_{i \in J_x^*(t)} K_x(t) = G(t) \cdot \sum_{x \in A} n_x(t) \cdot k_x^{rech}(t) \quad (14a)$$

Umgeformt zu $G(t)$ ergibt sich daraus

$$G(t) = \frac{\sum_{x \in A} \sum_{i \in J_x^*(t)} K_x(t)}{\sum_{x \in A} n_x(t) \cdot k_x^{rech}(t)}. \quad (14b)$$

Die Summe aller tatsächlichen Schäden $S^{tats}(t)$ im Jahr $t \in BJ$ lässt sich wiederum im Rückgriff auf die modifizierten Schadenleistungen aus (10) formulieren als

$$S^{tats}(t) = \sum_{x \in A} s_x^{sum}(t). \quad (15)$$

Werden in (14b) nun die Schäden aller Versicherten – dargestellt durch den Zähler im rechten Teil der Gleichung – durch die tatsächlichen Schäden gemäß (15) ersetzt, lässt sich der tatsächliche Grundkopfschaden im Jahr $t \in BJ$ wie folgt definieren:

$$G^{tats}(t) := \frac{S^{tats}(t)}{\sum_{x \in A} n_x(t) \cdot k_x^{rech}(t)} = \frac{\sum_{x \in A} s_x^{sum}(t)}{\sum_{x \in A} n_x(t) \cdot k_x^{rech}(t)} \quad (16)$$

Diese Darstellung erlaubt es, dass die tatsächlichen Grundkopfschäden auf Basis beliebig einsetzbarer Kopfschadenprofile ermittelt werden können. Unterschiedliche Profile führen lediglich zu einer Umskalierung des zu ermittelnden Grundkopfschadens im Jahr $t \in BJ$. Wird infolgedessen das in (13) definierte und für das Jahr $t_0 + 2$ übernommene rechnungsmäßige Profil k_x^{rech} als einheitliches Profil in (16) anstelle der ggf. unterschiedlichen $k_x^{rech}(t)$ eingesetzt, ergibt sich folgender umskalierter Grundkopfschaden:

$$\hat{G}(t) := \frac{\sum_{x \in A} s_x^{sum}(t)}{\sum_{x \in A} n_x(t) \cdot k_x^{rech}} \quad (17)$$

⁶⁰ Vgl. Becker (2017), S. 57 f.

Zur Ermittlung des rechnungsmäßigen Grundkopfschadens G^{rech} im Jahr $t_0 + 2$ müssen die so definierten, jährlichen Grundkopfschäden anschließend geeignet extrapoliert werden. Dazu wird G^{rech} wie folgt festgelegt:

$$G^{rech} := \text{Extrapolation} \left(\hat{G}(t_0 - n), \dots, \hat{G}(t_0 - 1), \hat{G}(t_0) \right) \quad (18)$$

Möglichkeiten zur Extrapolation bieten beispielsweise die lineare oder log-lineare Regression, die unter anderem von Milbrodt/Röhrs (2016) ausführlich vorgestellt werden.⁶¹ Ohne an dieser Stelle detaillierter auf die Herleitung einzugehen, ergibt sich exemplarisch für die lineare Regression auf Basis von drei Beobachtungsjahren und in Übereinstimmung mit Anlage 2 Abschnitt B KVAV die Formel

$$\begin{aligned} G^{rech} &= \frac{3}{2} \left(\hat{G}(t_0) - \hat{G}(t_0 - 2) \right) + \frac{1}{3} \left(\hat{G}(t_0 - 2) + \hat{G}(t_0 - 1) + \hat{G}(t_0) \right) \\ &= \frac{11}{6} \hat{G}(t_0) + \frac{1}{3} \hat{G}(t_0 - 1) - \frac{7}{6} \hat{G}(t_0 - 2) \end{aligned}$$

Auf Basis von G^{rech} und k_x^{rech} lassen sich die rechnungsmäßigen Kopfschäden K_x^{rech} , die ab dem Jahr $t_0 + 2$ eingesetzt werden und in der Regel mindestens bis zur nächsten Beitragsanpassung gelten, anschließend bestimmen als

$$K_x^{rech} = G^{rech} \cdot k_x^{rech}, x \in A. \quad (19)$$

Für den Einsatz in der Kalkulation sind die rechnungsmäßigen Kopfschäden gemäß § 2 Abs. 3 KVAV noch mit zusätzlichen Sicherheiten gegen länger anhaltende, negative Schadenentwicklungen sowie unvorteilhafte zufällige Schwankungen im Schadenverhalten der Versicherten auszustatten. Auch in der Zukunft bereits bekannte preistreibende Faktoren wie beispielsweise eine anstehende, signifikante Veränderung in der Schadenregulierung müssen proaktiv bei der Kalkulation berücksichtigt werden. Möglichkeiten zur Bestimmung eines quantifizierbaren Sicherheitszuschlags insbesondere gegen Zufallsschwankungen werden z. B. von Milbrodt/Röhrs (2016) beschrieben.⁶³ Da die Festlegung zusätzlicher Sicherheiten in der Praxis jedoch im Allgemeinen auf Basis von Expertenschätzungen erfolgt, soll dieser Ansatz hier nicht weiter vertieft werden. Gleiches gilt für diverse andere Aspekte, die aufgrund des Umfangs dieser Masterarbeit nicht detaillierter betrachtet wurden. Dazu gehört z. B. die Zusammenfassung mehrerer Tarife mit vergleichbarem Leistungsversprechen, aber unterschiedlichen Erstattungshöhen, für die nach dem Verfahren von Bahr ein tarifübergreifendes Profil bestimmt werden kann.⁶⁴

⁶¹ Vgl. Milbrodt/Röhrs (2016), S. 118 ff.

⁶² Vgl. Milbrodt/Röhrs (2016), S. 116.

⁶³ Vgl. Milbrodt/Röhrs (2016), S. 125 ff.

⁶⁴ Vgl. Milbrodt/Röhrs (2016), S. 113 ff., vgl. Becker (2017), S. 56 f.

Auch die Bildung von Altersgruppen mit Versicherten mehrerer zusammenhängender Einzelalter (beispielsweise 21-25 Jahre, 26-30 Jahre, ...) ist möglich, wurde hier aber ebenso wenig thematisiert wie eine Analyse des Einflusses relativer und/oder absoluter Selbstbehalte auf die Kopfschadenentwicklung.⁶⁵ Davon ungeachtet bietet der hier beschriebene Weg dennoch einen detaillierten Überblick, wie sich auf Basis von beobachteten Schadendaten unter Anwendung des Rusam-Ansatzes rechnerische Kopfschäden zur (Nach-)Kalkulation eines bestehenden Tarifs ermitteln lassen.

⁶⁵ Vgl. Milbrodt/Röhrs (2016), S. 94 f. + 99 ff., vgl. Becker (2017), S. 46 ff., vgl. Becker (2017), S. 54.

3 Einführung in stochastische Sterblichkeitsmodelle

3.1 Verwendete Notation

Für die Beschreibung stochastischer Sterblichkeitsmodelle müssen zunächst einige Notationen eingeführt werden, die sich wie die weiteren Ausführungen dieses Kapitels an den Arbeiten von Villegas u. a. (2018b) orientieren.⁶⁶ Im Kontext von Mortalitätsmodellen werden regelmäßig die Begriffe der einjährigen Sterbewahrscheinlichkeiten $q_{x,t}$, der zentralen Sterberaten $m_{x,t}$ sowie der Sterbeintensitäten $\mu_{x,t}$ verwendet.⁶⁷ $m_{x,t}$ lassen sich dabei entsprechend Cairns u. a. (2009) wie folgt ermitteln:

$$m_{x,t} = \frac{D_{x,t}}{E_{x,t}^c} = \frac{\text{Number of deaths during calendar year } t \text{ aged } x \text{ last birthday}^{68}}{\text{Average population during calendar year } t \text{ aged } x \text{ last birthday}}$$

Die Zufallsvariable $D_{x,t}$ mit den zugehörigen Beobachtungswerten $d_{x,t}$ entspricht somit der Anzahl der Toten, die als x -Jährige das letzte Mal während des Kalenderjahres t Geburtstag hatten, und $E_{x,t}^c$ der entsprechenden durchschnittlichen Bestandsgröße. Analog zu $E_{x,t}^c$ lässt sich $E_{x,t}^0$ als die zu Beginn des Kalenderjahres t bestehende Population definieren und daraus $q_{x,t} = D_{x,t}/E_{x,t}^0$ bestimmen. $q_{x,t}$ ist somit die Wahrscheinlichkeit einer Person, die genau zum Zeitpunkt t x Jahre alt ist, zwischen t und $t + 1$ zu versterben. $E_{x,t}^c$ und $E_{x,t}^0$ können näherungsweise durch $E_{x,t}^0 \approx E_{x,t}^c + \frac{1}{2} \cdot d_{x,t}$ ineinander überführt werden. Besteht keine Mehrdeutigkeit, wird anstelle von $E_{x,t}^0$ oder $E_{x,t}^c$ die zusammenfassende Notation $E_{x,t}$ verwendet.

Neben $m_{x,t}$ und $q_{x,t}$ dienen als drittes Maß zur Sterblichkeitsmessung die Sterbeintensitäten $\mu_{x,t}$, die als „relative Momentansterblichkeit“⁶⁹ im Kalenderjahr t im Alter x zu interpretieren sind. Unter der Annahme, dass $\mu_{x,t}$ innerhalb der einzelnen Altersklassen und innerhalb eines Kalenderjahres konstant bleiben und eine stationäre Population vorliegt, kann $m_{x,t} = \mu_{x,t}$ gesetzt werden.⁷⁰ Davon wird im Folgenden stets ausgegangen. Da im weiteren Verlauf dieser Arbeit allerdings nicht die Projektion von Sterblichkeiten, sondern von Kopfschäden im Vordergrund steht und die genannten Begrifflichkeiten nur für das Verständnis der Sterblichkeitsmodelle benötigt werden, erfolgt an dieser Stelle keine weiterführende, mathematische Präzisierung der einzelnen Definitionen. Hierfür kann beispielsweise auf die Ausführungen von Forfar u. a. (1988), Bowers u. a. (1997)

⁶⁶ Vgl. Villegas u. a. (2018b), S. 4 ff.

⁶⁷ Vgl. Cairns u. a. (2009), S. 2 f.

⁶⁸ Cairns u. a. (2009), S. 2. Auf „ wurde beim Zitieren hier ausnahmsweise verzichtet.

⁶⁹ Milbrodt/Helbig (1999), S. 62.

⁷⁰ Vgl. Lovász (2011), S. 73.

oder Milbrodt/Helbig (1999) zurückgegriffen werden.⁷¹ Abschließend sei angemerkt, dass mit der – beispielsweise bei der Anzahl der Toten $d_{x,t}$ – verwendeten Indexschreibweise x,t die Annahme einhergeht, dass die Daten im Format einer $k \times n$ -Matrix mit k Zeilen für die Alter $x = x_1, x_2, \dots, x_k$ sowie n Spalten für die Kalenderjahre $t = t_1, t_2, \dots, t_n$ vorliegen.⁷²

3.2 Komponenten von Sterblichkeitsmodellen

Zur Beschreibung verschiedener Sterblichkeitsmodelle ist es nützlich, zunächst einige Gemeinsamkeiten herauszuarbeiten. Hierfür kann beispielsweise auf Hunt/Blake (2015) zurückgegriffen werden, die eine Vielzahl an stochastischen Mortalitätsmodellen in ihrer Alter-Perioden-Kohorten-Modellstruktur (APC-Modellstruktur) erfassen.⁷³ I. V. m. den Ausführungen von Currie (2016), der zeigt, dass sich viele gebräuchliche Sterblichkeitsmodelle entweder in Form von „generalized linear models or generalized non-linear models“⁷⁴ ausdrücken lassen, entwickelten Villegas u. a. (2018b) „the family of generalized age-period-cohort (GAPC) stochastic mortality models“⁷⁵. Diese wiederum bestehen – analog zu den von McCullagh/Nelder (1989) beschriebenen Komponenten eines verallgemeinerten linearen Modells – aus vier Bestandteilen:⁷⁶

Komponente 1: Zufallskomponente

Die Zufallskomponente beschreibt die Verteilung der Anzahl der Toten $D_{x,t}$. Unter der Annahme, dass diese poissonverteilt sind, ergibt sich

$$D_{x,t} \sim \text{Poisson}(E_{x,t}^c \mu_{x,t}) \text{ mit } E[D_{x,t}/E_{x,t}^c] = \mu_{x,t}.$$

Unter der Annahme einer Binomialverteilung folgt hingegen

$$D_{x,t} \sim \text{Binomial}(E_{x,t}^0, q_{x,t}) \text{ mit } E[D_{x,t}/E_{x,t}^0] = q_{x,t}.$$

Komponente 2: Systematische Komponente

Die systematische Komponente bildet das Herzstück stochastischer Sterblichkeitsmodelle und charakterisiert die Schätzerstruktur. Sie lässt sich mithilfe der von Hunt/Blake (2015) beschriebenen APC-Struktur (age/period/cohort) mit dem Prädiktor $\eta_{x,t}$ darstellen, der die Auswirkungen des Alters x , des Kalenderjahres t sowie des Geburtsjahrgangs c berücksichtigt:⁷⁷

⁷¹ Vgl. Forfar u. a. (1988), S. 3 ff., vgl. Bowers u. a. (1997), S. 52 ff., vgl. Milbrodt/Helbig (1999), S. 56 ff.

⁷² Vgl. Villegas u. a. (2018b), S. 4.

⁷³ Vgl. Hunt/Blake (2015), S. 3.

⁷⁴ Currie (2016), S. 356.

⁷⁵ Villegas u. a. (2018b), S. 4.

⁷⁶ Vgl. McCullagh/Nelder (1989), S. 26 ff., vgl. Villegas u. a. (2018b), S. 4.

⁷⁷ Vgl. Hunt/Blake (2015), S. 3 f.

$$\eta_{x,t} = \underbrace{\alpha_x}_{\text{Age}} + \sum_{i=1}^N \underbrace{\beta_x^{(i)} \kappa_t^{(i)}}_{\text{Period}} + \underbrace{\beta_x^{(0)} \gamma_{t-x}}_{\text{Cohort}}$$

Der Term α_x beschreibt als altersspezifische Konstante die mittlere Sterblichkeit für ein bestimmtes Alter x und bleibt im Zeitablauf unverändert. Die Menge von N Termen $\beta_x^{(i)} \kappa_t^{(i)}$ stellt die Veränderung der Sterblichkeit im Zeitablauf dar. $\beta_x^{(i)}$ misst dabei – ebenfalls als altersspezifische, zeitinvariante Konstante – die Richtung und das Ausmaß der Veränderung der Sterblichkeiten für ein bestimmtes Alter x , während $\kappa_t^{(i)}$ als Anzeiger für ein mit der Zeit zu- oder abnehmendes Mortalitätslevel interpretiert werden kann. Je größer N gewählt wird, desto genauer können Sterblichkeitstrends modelliert werden. Der Term γ_{t-x} ermöglicht es, geburtsjahrgangsspezifische Effekte bei der Modellierung zu berücksichtigen. Mit $\beta_x^{(0)}$ wird die Stärke dieser Effekte je Einzelalter x beeinflusst.

Entsprechend den Ausführungen von Villegas u. a. (2018b) können die altersspezifischen $\beta_x^{(i)}, i = 0, 1, \dots, N$ einerseits als vorab zu definierende, vom Alter abhängige Funktionen bestimmt werden.⁷⁸ Andererseits ist es auch möglich, diese ohne vorherige Festlegung im Rahmen der Parameterschätzung entsprechend dem zugrundeliegenden Modell bestimmen zu lassen. Außerdem werden die Periodenindizes $\kappa_t^{(i)}, i = 1, \dots, N$ sowie die Kohortenindizes γ_{t-x} als stochastische Prozesse interpretiert. Dies ermöglicht die Projektion zukünftiger Sterblichkeiten – auf Basis von in Kapitel 4.4 näher beschriebenen ARIMA-Prozessen – anhand ihrer Veränderung von einer Periode $t - 1$ zur nächsten Periode t .

Komponente 3: Linkfunktion

Die Linkfunktion g sorgt für die Verknüpfung der Zufallskomponente mit der systematischen Komponente:⁷⁹

$$g(E[D_{x,t}/E_{x,t}]) = \eta_{x,t}$$

Prinzipiell sind je nach angenommener Wahrscheinlichkeitsverteilung unterschiedliche Linkfunktionen denkbar. Generell kann es jedoch sinnvoll sein, die sogenannte kanonische Linkfunktion der jeweiligen Verteilung zu verwenden. Für die Poissonverteilung ist dies die log-Linkfunktion und für die Binomialverteilung die logit-Linkfunktion. Im Rahmen dieser Masterarbeit wird die Poissonverteilung im Vordergrund stehen und nur auf

⁷⁸ Vgl. Villegas u. a. (2018b), S. 5.

⁷⁹ Vgl. Villegas u. a. (2018b), S. 5.

die kanonische log-Linkfunktion zurückgegriffen. Für weiterführende Informationen zur Linkfunktion sei beispielsweise auf Hunt/Blake (2015) oder Currie (2016) verwiesen.⁸⁰

Komponente 4: Parametereinschränkungen

Die vierte Komponente stellen Parametereinschränkungen dar, die als technische Komponente betrachtet werden können.⁸¹ Bei den meisten stochastischen Sterblichkeitsmodellen liegt ein Problem in der Identifizierbarkeit bei der Parameterschätzung vor. Die Parametereinschränkungen werden daher dazu benötigt, eindeutige Parameterschätzungen zu erzeugen. Die zusätzlichen Bedingungen werden mithilfe der Beschränkungsfunktion ν auf einen beliebigen Vektor von Parametern

$$\theta := \left(\alpha_x, \beta_x^{(1)}, \dots, \beta_x^{(N)}, \kappa_t^{(1)}, \dots, \kappa_t^{(N)}, \beta_x^{(0)}, \gamma_{t-x} \right)$$

angewendet, um anschließend einen Vektor mit transformierten Parametern

$$\nu(\theta) = \hat{\theta} = \left(\hat{\alpha}_x, \hat{\beta}_x^{(1)}, \dots, \hat{\beta}_x^{(N)}, \hat{\kappa}_t^{(1)}, \dots, \hat{\kappa}_t^{(N)}, \hat{\beta}_x^{(0)}, \hat{\gamma}_{t-x} \right)$$

zu erhalten, für den einerseits die Parametereinschränkungen erfüllt sind und für den sich andererseits sowohl mit θ als auch $\hat{\theta}$ der gleiche Prädiktor $\eta_{x,t}$ ergibt.

Villegas u. a. (2018b) führen eine Vielzahl von stochastischen Sterblichkeitsmodellen auf, die sich durch die GAPC-Struktur ausdrücken lassen.⁸² Dazu gehören unter anderem das ursprünglich von Lee/Carter (1992) veröffentlichte LC-Modell sowie die meisten darauf aufbauenden Erweiterungen, beispielsweise von Renshaw/Haberman (2003), Renshaw/Haberman (2006) sowie das APC-Modell von Currie (2016).⁸³ Auch das originale – von Cairns u. a. (2006) beschriebene – Cairns-Blake-Dowd-Modell (CBD-Modell) mit entsprechenden Weiterentwicklungen sowie das Modell von Plat (2009) lassen sich als Teil der GAPC-Familie formulieren.⁸⁴ Gleiches gilt letztlich auch für das RUSAM-Modell, das auf Basis der Ausführungen in Kapitel 2.3 abgeleitet werden kann, an sich aber weniger Beachtung im Bereich der Sterblichkeitsmodellierung findet. Genauere Informationen zu den genannten Modellen und mit ihnen verbundene Merkmale werden in den nächsten Kapiteln dargestellt. Für weitere ebenfalls auf die GAPC-Struktur zurückzuführende Modellvarianten sei an dieser Stelle auf Villegas u. a. (2018b) verwiesen.⁸⁵

⁸⁰ Vgl. Hunt/Blake (2015), S. 15 ff., vgl. Currie (2016), S. 359 ff.

⁸¹ Vgl. Villegas u. a. (2018b), S. 5.

⁸² Vgl. Villegas u. a. (2018b), S. 5 f.

⁸³ Vgl. Lee/Carter (1992), vgl. Renshaw/Haberman (2003), vgl. Renshaw/Haberman (2006), vgl. Currie (2006).

⁸⁴ Vgl. Cairns u. a. (2006), vgl. Cairns u. a. (2009), vgl. Plat (2009).

⁸⁵ Vgl. Villegas u. a. (2018b), S. 6.

3.3 Sterblichkeitsmodelle aus der Lee-Carter-Familie

Die Sterblichkeitsmodelle der Lee-Carter-Familie begründen sich originär durch das von Lee/Carter (1992) veröffentlichte LC-Modell.⁸⁶ Dieses sieht die altersspezifischen Konstanten α_x und β_x sowie einen zeitvariierenden Index κ_t – gemäß GAPC-Struktur mit $N = 1$ – ohne Berücksichtigung eines Kohorteneffektes vor und lässt sich wie folgt darstellen:

$$\eta_{x,t} = \alpha_x + \beta_x^{(1)} \kappa_t^{(1)} \quad (\text{LC})$$

Wie bereits angedeutet lassen sich die Parameter vieler stochastischer Sterblichkeitsmodelle ohne zusätzliche Beschränkungen nicht eindeutig identifizieren. Dies gilt auch für das LC-Modell, wie folgende geänderte Parametrisierung zeigt:⁸⁷

$$\eta_{x,t} = \tilde{\alpha}_x + \tilde{\beta}_x^{(1)} \tilde{\kappa}_t^{(1)} \text{ mit}$$

$$\bullet \quad \tilde{\alpha}_x = \alpha_x + b \cdot \beta_x^{(1)} \quad \bullet \quad \tilde{\beta}_x^{(1)} = \frac{\beta_x^{(1)}}{a} \quad \bullet \quad \tilde{\kappa}_t^{(1)} = a \cdot (\kappa_t^{(1)} - b)$$

Durch Einsetzen folgt:

$$\eta_{x,t} = \alpha_x + b \cdot \beta_x^{(1)} + \frac{\beta_x^{(1)}}{a} \cdot a \cdot (\kappa_t^{(1)} - b) = \alpha_x + \beta_x^{(1)} \kappa_t^{(1)}$$

Beide Varianten $\left(\theta^{LC} := (\alpha_x, \beta_x^{(1)}, \kappa_t^{(1)}), \tilde{\theta}^{LC} := (\tilde{\alpha}_x, \tilde{\beta}_x^{(1)}, \tilde{\kappa}_t^{(1)}) \right)$ führen somit zum gleichen Prädiktor $\eta_{x,t}$. Um diesen Konflikt zu lösen, wählten Lee/Carter (1992) die folgenden Nebenbedingungen:⁸⁸

$$\sum_x \beta_x^{(1)} = 1, \sum_t \kappa_t^{(1)} = 0$$

Die zweite Bedingung führt dazu, dass α_x im Rahmen der Parameterschätzung für jedes Alter x den gleichen Mittelwert wie der Prädiktor $\eta_{x,t}$ annimmt, während die erste Bedingung zur Festlegung der oben genutzten (Hilfs-)Parameter a und b dient. Solange die Festsetzung der Parametereinschränkungen keinen Einfluss auf die Qualität der Schätzung hat, können auch abweichende Nebenbedingungen formuliert werden. Während diese Bedingungen auch für (nahezu) alle weiteren, noch folgenden Modelle festgelegt werden, wird im Hinblick auf den Umfang dieser Arbeit auf den Nachweis der mangelnden Identifizierbarkeit für jedes einzelne Modell verzichtet. Unterschiedliche Möglichkeiten zur Parametrisierung entsprechend θ und $\tilde{\theta}$ können aber beispielsweise

⁸⁶ Vgl. Lee/Carter (1992), vgl. Villegas u. a. (2018b), S. 6.

⁸⁷ Vgl. Lovász (2011), S. 81 f., vgl. Villegas u. a. (2018b), S. 6.

⁸⁸ Vgl. Lee/Carter (1992), S. 661, vgl. Lovász (2011), S. 82, vgl. Cairns u. a. (2009), S. 7.

Villegas u. a. (2018b) oder für einen Großteil der Modelle auch Cairns u. a. (2009) entnommen werden.⁸⁹

Renshaw/Haberman (2006) griffen das LC-Modell auf und ergänzten dieses um einen Parameter γ_{t-x} , um mögliche geburtsjahrgangsspezifische Einflüsse mit abbilden zu können. Ergebnis war die folgende – im Rahmen dieser Arbeit in Anlehnung an die Autoren mit RH* bezeichnete – Modellstruktur:⁹⁰

$$\eta_{x,t} = \alpha_x + \beta_x^{(1)} \kappa_t^{(1)} + \beta_x^{(0)} \gamma_{t-x} \quad (\text{RH}^*)$$

Wie beim LC-Modell können die Parameter auch beim RH*-Modell nicht ohne zusätzliche Einschränkungen eindeutig bestimmt werden. Möglich wird dies beispielsweise durch folgende Nebenbedingungen:⁹¹

$$\sum_x \beta_x^{(1)} = 1, \sum_t \kappa_t^{(1)} = 0, \sum_x \beta_x^{(0)} = 1, \sum_{c=t_1-x_k}^{t_n-x_1} \gamma_c = 0.$$

Die Bedingungen zwei und vier bewirken, dass α_x im Zeitablauf nahe dem mittleren Wert von $\eta_{x,t}$ liegt, während die Einschränkungen eins und drei – ähnlich zu der ersten Nebenbedingung des LC-Modells – keinen qualitativen Einfluss auf die Schätzung haben.

Auf Basis des RH*-Modells untersuchten Haberman/Renshaw (2011) diverse Varianten mit unterschiedlichen Parameterausprägungen.⁹² Als besonders vielversprechend erwies sich dabei $\beta_x^{(0)} = 1$ zu setzen. Dies führte zu einer Vereinfachung des Modells – inklusive des Wegfalls der dritten Nebenbedingung für $\beta_x^{(0)}$ –, löste zugleich aber auch bestimmte Konvergenzprobleme, die sich im Rahmen der Kalibrierung des originalen Modells ergeben hatten. Der modifizierten Modellstruktur wird die Abkürzung RH zugeordnet.⁹³

$$\eta_{x,t} = \alpha_x + \beta_x^{(1)} \kappa_t^{(1)} + \gamma_{t-x} \quad (\text{RH})$$

Eine weitere Variante des RH*-Modells stellt das sogenannte APC-Modell (age-period-cohort) dar, das im Bereich der Medizin- und Demografie-Forschung bereits in den 1980er Jahren beispielsweise von Clayton/Schiffers (1987), Hobcraft u. a. (1982) oder auch Osmond (1985) genutzt wurde.⁹⁴ Im Kontext der stochastischen Sterblichkeits-

⁸⁹ Vgl. Villegas u. a. (2018b), S. 6 ff., vgl. Cairns u. a. (2009), S. 6 ff.

⁹⁰ Vgl. Renshaw/Haberman (2006), S. 556 ff.

⁹¹ Vgl. Villegas u. a. (2018b), S. 7, vgl. Lovász (2011), S. 84, vgl. Cairns u. a. (2009), S. 7.

⁹² Vgl. Haberman/Renshaw (2011), S. 36 ff.

⁹³ Im Original nutzten Haberman/Renshaw (2011) die Bezeichnung H₁, die hier zu RH modifiziert wird.

⁹⁴ Vgl. Clayton/Schiffers (1987), S. 457 ff., vgl. Osmond (1985), S. 124 ff., vgl. Hobcraft u. a. (1982), S. 6 ff.

modelle rückte dieses aber erst wieder mit Currie (2006) in den Vordergrund und ergibt sich durch das Setzen von $\beta_x^{(1)} = 1$ und $\beta_x^{(0)} = 1$.⁹⁵

$$\eta_{x,t} = \alpha_x + \kappa_t^{(1)} + \gamma_{t-x} \quad (\text{APC})$$

Eine eindeutige Identifizierbarkeit lässt sich durch folgende Parametereinschränkungen erreichen:

$$\sum_t \kappa_t^{(1)} = 0, \quad \sum_{c=t_1-x_k}^{t_n-x_1} \gamma_c = 0, \quad \sum_{c=t_1-x_k}^{t_n-x_1} c \cdot \gamma_c = 0$$

Die Einschränkungen für den Kohortenparameter durch die zweite und dritte Nebenbedingung bewirken hier ein schwankendes Verhalten des Kohorteneffektes rund um den Wert Null, ohne dass dabei ein wahrnehmbarer linearer Trend angenommen wird.⁹⁶

3.4 Sterblichkeitsmodelle aus der Cairns-Blake-Dowd-Familie

Neben der Lee-Carter-Familie bilden die Arbeiten von Cairns u. a. (2006) die Basis für einen weiteren Zweig bekannter Sterblichkeitsmodelle.⁹⁷ Ihre Intention war es, bei der Projektion von Sterblichkeiten insbesondere eine bessere Abbildung der höheren Altersbereiche zu erreichen. Sie verzichten auf eine altersspezifische Konstante α_x sowie einen Kohortenparameter γ_{t-x} und setzen stattdessen auf zwei Alters-Perioden-Terme ($N = 2$: $\sum_{i=1}^2 \beta_x^{(i)} \kappa_t^{(i)}$) mit den vordefinierten Funktionen $\beta_x^{(1)} = 1$ und $\beta_x^{(2)} = x - \bar{x}$:⁹⁸

$$\eta_{x,t} = \kappa_t^{(1)} + (x - \bar{x}) \cdot \kappa_t^{(2)} \quad (\text{CBD})$$

\bar{x} entspricht dabei dem durchschnittlichen Alter im zu untersuchenden Datensatz. Entgegen den anderen in dieser Arbeit betrachteten Modellen kommt das CBD-Modell ohne weitere Nebenbedingungen aus und die Parameter sind eindeutig identifizierbar.

Cairns u. a. (2009) untersuchten in ihren Arbeiten eine Reihe unterschiedlicher Sterblichkeitsmodelle hinsichtlich ihrer Vorhersagegüte in Bezug auf Mortalitätsdaten aus England/Wales sowie den USA.⁹⁹ Neben den bereits in dieser Masterarbeit beschriebenen Modellen gehörte dazu unter anderem auch eine Erweiterung des CBD-Modells, das um einen Kohorteneffekt sowie einen quadratischen Alterseffekt ergänzt wurde und das unter dem Modellnamen M7 für beide Datensätze gute Ergebnisse lieferte.¹⁰⁰ Übersetzt in die

⁹⁵ Vgl. Currie (2006), S. 7 ff., vgl. Villegas u. a. (2018b), S. 7 f.

⁹⁶ Vgl. Villegas u. a. (2018b), S. 8.

⁹⁷ Vgl. Cairns u. a. (2006), S. 687.

⁹⁸ Vgl. Cairns u. a. (2006), S. 691, vgl. Lovász (2011), S. 86 f., vgl. Villegas u. a. (2018b), S. 8. In den Ausführungen von Cairns u. a. (2006), S. 691 wird eine abweichende Notation verwendet. Diese wurde auf die in dieser Masterarbeit verwendeten Parameter angepasst.

⁹⁹ Vgl. Cairns u. a. (2009), S. 1.

¹⁰⁰ Vgl. Cairns u. a. (2009), S. 9 f., vgl. Cairns u. a. (2009), S. 33, vgl. Villegas u. a. (2018b), S. 9.

GAPC-Struktur mit drei Alters-Perioden-Termen ($N = 3: \sum_{i=1}^3 \beta_x^{(i)} \kappa_t^{(i)}$) und den – zusätzlich zum originalen CBD-Modell – vorab zu definierenden Funktionen $\beta_x^{(3)} = ((x - \bar{x})^2 - \hat{\sigma}_x^2)$ sowie $\beta_x^{(0)} = 1$ ergibt sich folgende Darstellung:

$$\eta_{x,t} = \kappa_t^{(1)} + (x - \bar{x}) \cdot \kappa_t^{(2)} + ((x - \bar{x})^2 - \hat{\sigma}_x^2) \cdot \kappa_t^{(3)} + \gamma_{t-x} \quad (\text{M7})$$

$\hat{\sigma}_x^2$ entspricht hier dem mittleren Wert von $(x - \bar{x})^2$. Außerdem werden noch folgende Nebenbedingungen vorgeschlagen, um eine eindeutige Parameterschätzung zu erreichen:

$$\sum_{c=t_1-x_k}^{t_n-x_1} \gamma_c = 0, \quad \sum_{c=t_1-x_k}^{t_n-x_1} c \cdot \gamma_c = 0, \quad \sum_{c=t_1-x_k}^{t_n-x_1} c^2 \cdot \gamma_c = 0$$

Wie schon beim APC-Modell sorgen die Einschränkungen auch beim M7-Modell dafür, dass der Kohorteneffekt rund um den Wert Null schwanken wird und dabei keinen erkennbaren linearen oder quadratischen Trend verfolgt. Cairns u. a. (2009) schlugen darüber hinaus noch weitere Modellvarianten vor, die als Modelle M6 und M8 bezeichnet wurden und einen im Vergleich zum Modell M7 etwas simpleren Aufbau hatten.¹⁰¹ Diese werden hier jedoch nicht weiter betrachtet.

3.5 Sterblichkeitsmodelle nach PLAT

Plat (2009) griff auf die bereits veröffentlichten Sterblichkeitsmodelle zurück und schlug unter anderem auf Basis der Modelle aus der LC-Familie sowie der CBD-Familie das PLAT-Modell vor.¹⁰² Dabei versuchte er die Vorzüge der einzelnen Modelle wie die Anpassungsfähigkeit über die gesamte Altersstruktur, die Berücksichtigung von Kohorteneffekten oder auch eine nicht triviale Korrelationsstruktur der Parameter in einem einzigen Modell zu verbinden, das durch einen einfachen Aufbau dennoch gut zu interpretieren ist. Das Ergebnis ist ein Modell mit einer altersspezifischen Konstante α_x und drei Alters-Perioden-Termen ($N = 3: \sum_{i=1}^3 \beta_x^{(i)} \kappa_t^{(i)}$) mit den vordefinierten Funktionen $\beta_x^{(1)} = 1$, $\beta_x^{(2)} = \bar{x} - x$ und $\beta_x^{(3)} = (\bar{x} - x)^+ = \max(\bar{x} - x, 0)$.¹⁰³ Ergänzt wird dieses um den Kohortenparameter γ_{t-x} mit der zugehörigen Funktion $\beta_x^{(0)} = 1$:

$$\eta_{x,t} = \alpha_x + \kappa_t^{(1)} + (\bar{x} - x) \cdot \kappa_t^{(2)} + (\bar{x} - x)^+ \cdot \kappa_t^{(3)} + \gamma_{t-x} \quad (\text{PLAT})$$

Für eine eindeutige Parameterschätzung können beispielsweise die folgenden – von Villegas u. a. (2018b) beschriebenen – Parametereinschränkungen gesetzt werden:¹⁰⁴

¹⁰¹ Vgl. Cairns u. a. (2009), S. 9 f.

¹⁰² Vgl. Plat (2009), S. 395, vgl. Lovász (2011), S. 85 f.

¹⁰³ Vgl. Plat (2009), S. 395, vgl. Villegas u. a. (2018b), S. 9 f.

¹⁰⁴ Vgl. Villegas u. a. (2018b), S. 10.

$$\begin{aligned} \sum_t \kappa_t^{(1)} = 0, \quad \sum_t \kappa_t^{(2)} = 0, \quad \sum_t \kappa_t^{(3)} = 0, \\ \sum_{c=t_1-x_k}^{t_n-x_1} \gamma_c = 0, \quad \sum_{c=t_1-x_k}^{t_n-x_1} c \cdot \gamma_c = 0, \quad \sum_{c=t_1-x_k}^{t_n-x_1} c^2 \cdot \gamma_c = 0 \end{aligned}$$

Die ersten drei Bedingungen sorgen dafür, dass die Periodenindizes Werte rund um die Null annehmen, während die letzten drei Bedingungen wie schon beim M7-Modell dazu führen, dass der Kohorteneffekt rund um den Wert Null schwanken wird und dabei keinen erkennbaren linearen oder quadratischen Trend verfolgt. Prinzipiell ausgelegt für die gesamte Altersstruktur kann das PLAT-Modell auch dahingehend angepasst werden, dass dieses speziell für höhere Altersbereiche gute Ergebnisse liefert. Plat (2009) machte dazu den Vorschlag, den Faktor $\kappa_t^{(3)}$ zu eliminieren:¹⁰⁵

$$\eta_{x,t} = \alpha_x + \kappa_t^{(1)} + (\bar{x} - x) \cdot \kappa_t^{(2)} + \gamma_{t-x} \quad (\text{PLAT2})$$

Die Parametereinschränkungen des im Folgenden als PLAT2 bezeichneten Modells stimmen grundsätzlich mit denen des PLAT-Modells überein, reduzieren sich jedoch um die Bedingungen, die $\kappa_t^{(3)}$ betreffen.¹⁰⁶ Außerdem ergeben sich durch die Eliminierung des Terms $(\bar{x} - x)^+ \cdot \kappa_t^{(3)}$ Vereinfachungen bei der R-technischen Umsetzung, die in Kapitel 6.3 i. V. m. Anhang D genauer dargestellt werden.

3.6 RUSAM-Modell

Wie bereits in Kapitel 2 beschrieben wurde, können Kopfschäden auf Basis des Rusam-Ansatzes entsprechend (7) modellhaft in $K_x(t) = G(t) \cdot k_x$ zerlegt und Projektionen gemäß (19) mittels $K_x^{rech} = G^{rech} \cdot k_x^{rech}$ durchgeführt werden. G^{rech} ergibt sich dabei entsprechend (18) als Ergebnis einer Extrapolation (z. B. lineare Regression, log-lineare Regression) der jährlichen Grundkopfschäden zum Normierungsalter x_0 , während k_x^{rech} in der Regel als das letzte beobachtete Profil k_x^{tats} aus t_0 festgesetzt wird. Die mit diesem Vorgehen verbundene lineare Trendannahme soll im Folgenden – vergleichbar mit den Ausführungen von Christiansen u. a. (2018) – gelockert werden.¹⁰⁷ Dazu wird aus den obigen Kopfschadenzerlegungen analog zu den anderen stochastischen Sterblichkeitsmodellen eine Prädiktorstruktur abgeleitet, die wie das LC-Modell aufgebaut ist, aber auf

¹⁰⁵ Vgl. Plat (2009), S. 395 f.

¹⁰⁶ Vgl. Villegas u. a. (2018b), S. 10.

¹⁰⁷ Vgl. Christiansen u. a. (2018), S. 189 ff.

den altersspezifischen Parameter ($\alpha_x = 0$) verzichtet. Das resultierende Modell soll als RUSAM-Modell bezeichnet werden:

$$\eta_{x,t} = \beta_x^{(1)} \kappa_t^{(1)} \quad (\text{RUSAM})$$

$\beta_x^{(1)}$ rückt praktisch an die Stelle des Profils, während der Grundkopfschaden durch $\kappa_t^{(1)}$ ersetzt wird. Der Nutzen dieses Ansatzes liegt darin, dass die Parameter $\kappa_t^{(1)}$ und $\beta_x^{(1)}$ nicht an ein spezielles Alter x_0 bzw. ein spezielles Kalenderjahr t_0 gebunden sind, sondern bei der Parameterschätzung die in den Beobachtungsdaten enthaltenen Effekte über den gesamten Alters- sowie Kalenderbereich unmittelbar berücksichtigt werden können. Dennoch gehen die mit dem ursprünglichen Rusam-Ansatz verbundenen Vorteile nicht verloren und die Alters- und Kalenderzeiteffekte können weiterhin durch den einfachen, multiplikativen Modellaufbau anhand der Parameter $\beta_x^{(1)}$ bzw. $\kappa_t^{(1)}$ klar voneinander abgegrenzt werden. Darüber hinaus wird die lineare Trendannahme dadurch gelockert, dass anstelle einer linearen Extrapolation stochastische ARIMA-Prozesse zur Projektion zukünftiger Kopfschäden verwendet werden. Eine eindeutige Schätzung der Parameter wird abschließend z. B. durch die Integration folgender Nebenbedingung erreicht:

$$\sum_x \beta_x^{(1)} = 1$$

Diese Parametereinschränkung stimmt mit der ersten Bedingung des LC-Modells überein und hat keine Auswirkung auf die Güte der Schätzung.

4 Theoretischer Ablauf der Modelluntersuchung

4.1 Erweiterung der Kopfschadendefinition

Sterbewahrscheinlichkeiten und Kopfschäden des stationären Leistungsbereichs weisen einen durchaus ähnlichen Verlauf auf. Dieser Zusammenhang wurde bereits im einleitenden Kapitel 1.1 ausführlich dargestellt. In diesem Kapitel 4 erfolgt die Zusammenführung der in Kapitel 3 vorgestellten Sterblichkeitsmodelle und den in Kapitel 2 eingeführten Kopfschäden. Vor dem Transfer wird zunächst eine alternative Formulierung der Kopfschaden-Definition (5) vorgenommen. Dies liegt darin begründet, dass der in Kapitel 5 näher beschriebene Datensatz zum späteren Vergleich der untersuchten Modellvarianten keine Angaben zu einzelnen Versicherten enthält und die Definitionen, die sich auf $Y_i(t)$ (siehe (4)) mit den Realisierungen $y_i(t)$ beziehen, nicht direkt anwendbar sind. Stattdessen liegen die Daten in kumulierter Form einschließlich des mittleren Erstattungsbetrags eines x -jährigen Versicherten im Jahr t vor, der als $Y_x(t)$ mit den Realisierungen $y_x(t)$ bezeichnet werden soll. Daraus wird für den Kopfschaden $K_x(t)$ zum Alter $x \in A$ als Alternative zu (5) die folgende Definition abgeleitet:

$$K_x(t) := E[Y_x(t)] \quad (20)$$

In Kapitel 2.5 wurde beschrieben, wie die beobachteten Kopfschäden in tatsächliche Kopfschäden gemäß (11a) bzw. (11b) umgewandelt werden können. Letztere dienen einerseits als Grundlage zur Bestimmung der rechnungsmäßigen Kopfschäden entsprechend dem Rusam-Ansatz. Andererseits sollen sie im weiteren Verlauf auch für die Modellierung aller in dieser Masterarbeit betrachteten Sterblichkeitsmodelle verwendet werden. Die Umwandlung erfolgt über den Umweg der in (10) definierten, tatsächlich auf ein Beobachtungsjahr t entfallenden Schadenleistungen $s_x^{sum}(t) = y_x^{sum}(t) - rz_x^{sum}(t) \pm so_x^{sum}(t) + ws_x^{sum}(t)$, für deren Ermittlung die beobachteten Gesamtschadendaten $y_x^{sum}(t)$ je Alter x um die Einflüsse evtl. vereinnahmter Risikozuschläge $rz_x^{sum}(t)$, mögliche Sondereffekte $so_x^{sum}(t)$ sowie WSE $ws_x^{sum}(t)$ bereinigt werden. In Bezug auf den in Kapitel 5 beschriebenen Datensatz können aufgrund eines eingeschränkten Datenexports jedoch lediglich WSE durch eine Begrenzung bei den zurückgelegten Versicherungsdauern eliminiert werden. $rz_x^{sum}(t)$ und $so_x^{sum}(t)$ lassen sich aufgrund fehlender Selektionsmöglichkeiten nicht genauer determinieren. Da der Datensatz beim Übergang von beobachteten zu tatsächlichen Kopfschäden infolge dieser Restriktionen nicht weiter modifiziert wird, soll im weiteren Verlauf vereinfachend angenommen werden, dass die exportierten $y_x(t)$ in Form tatsächlicher Werte vorliegen und direkt zur Herleitung der rechnungsmäßigen Größen bzw. zur Analyse der einzelnen

Modelle verwendet werden können. In Bezug auf die Festlegungen in Kapitel 2.5 lässt sich dies erreichen, indem in (9) $\sum_{i \in J_x^*(t)} y_i(t) = \sum_x y_x(t) = y_x^{sum}(t)$ und in (10) $rz_x^{sum}(t) = so_x^{sum}(t) = ws_x^{sum}(t) = 0$ gesetzt wird. Für die Notation der $y_x(t)$ wird in den Folgekapiteln – entsprechend den Ausführungen in Kapitel 3.1 – $y_{x,t}$ verwendet. Gleiches gilt für $Y_x(t)$ mit der angepassten Indexschreibweise $Y_{x,t}$.

4.2 Übertragung der Sterblichkeitsmodelle auf Kopfschäden

Um die Sterblichkeitsmodelle auf die Kopfschäden zu übertragen, wird ähnlich zur multiplikativen Kopfschadenzerlegung nach dem Ansatz von Rusam in Kapitel 2.3 vorgegangen. Anstelle der modellhaften Zerlegung in $G(t)$ und k_x gemäß (7) werden jedoch die Prädiktorstrukturen $\eta_{x,t}$ der in den Kapiteln 3.3 bis 3.6 vorgestellten Modelle gesetzt. Da die Kopfschäden in höheren Altern deutlich ansteigen, ist die Parameterschätzung sowie spätere Projektion dabei auf Basis logarithmierter Werte vorgesehen. Werden alle genannten Informationen zusammengeführt, ergibt sich damit für die logarithmierten Kopfschäden $\ln(E[Y_{x,t}]) = \eta_{x,t}$ die nachstehende Übersicht:

Modell	Prädiktor	Alter	Kalenderzeit			Kohorte	
LC:	$\eta_{x,t} =$	α_x	$+\beta_x^{(1)} \cdot \kappa_t^{(1)}$				
RH:	$\eta_{x,t} =$	α_x	$+\beta_x^{(1)} \cdot \kappa_t^{(1)}$			$+\gamma_{t-x}$	
APC:	$\eta_{x,t} =$	α_x	$+$	$\kappa_t^{(1)}$		$+\gamma_{t-x}$	
CBD:	$\eta_{x,t} =$		$\kappa_t^{(1)}$	$+(x - \bar{x}) \cdot \kappa_t^{(2)}$			
M7:	$\eta_{x,t} =$		$\kappa_t^{(1)}$	$+(x - \bar{x}) \cdot \kappa_t^{(2)}$	$+\left((x - \bar{x})^2 - \hat{\sigma}_x^2\right) \cdot \kappa_t^{(3)}$	$+\gamma_{t-x}$	
PLAT:	$\eta_{x,t} =$	α_x	$+$	$\kappa_t^{(1)}$	$+(\bar{x} - x) \cdot \kappa_t^{(2)}$	$+(\bar{x} - x)^+ \cdot \kappa_t^{(3)}$	$+\gamma_{t-x}$
PLAT2:	$\eta_{x,t} =$	α_x	$+$	$\kappa_t^{(1)}$	$+(\bar{x} - x) \cdot \kappa_t^{(2)}$		$+\gamma_{t-x}$
RUSAM:	$\eta_{x,t} =$			$\beta_x^{(1)} \cdot \kappa_t^{(1)}$			

Tab. 1: Prädiktorstrukturen der untersuchten Mortalitätsmodelle, die für die Kopfschadenprojektion genutzt werden (x : Alter, t : Kalenderjahr).¹⁰⁸

Übertragen auf den in Kapitel 3.2 beschriebenen Aufbau von Sterblichkeitsmodellen stellen diese Prädiktorstrukturen die zweite Komponente dar. Die Interpretation der einzelnen Parameter bzw. Terme in Bezug auf Kopfschäden lässt sich weitgehend aus der Beschreibung für den altersabhängigen Verlauf der Sterblichkeiten ableiten, die ebenfalls in

¹⁰⁸ Eigene Darstellung. In Anlehnung an Dowd u. a. (2020), S. 448.

Kapitel 3.2 enthalten ist. Der Term α_x stellt beispielsweise, wenn er im Modell berücksichtigt wird, als altersspezifische Konstante den durchschnittlichen Kopfschaden für ein bestimmtes Alter x dar. Die übrigen Parameter bilden in diesem Fall – bei Vorliegen von γ_{t-x} ggf. auch abhängig vom Geburtsjahr – die Veränderung der Kopfschäden im Zeitablauf ab. Bei den Modellen CBD und M7 fehlen allerdings sowohl α_x als auch $\beta_x^{(1)}$. Hier kann der vorhandene Parameter $\kappa_t^{(1)}$ als eine Art identisches Kopfschadenniveau über alle Alter gedeutet werden, während die Unterschiede für die einzelnen Alter durch die übrigen Parameter bestmöglich abgebildet werden. Das RUSAM-Modell, in gleicher Weise wie die beiden vorigen Modelle nicht mit einem altersspezifischen Parameter α_x ausgestattet, hält je einen Parameter für den Alterseffekt und einen für den Kalenderzeiteffekt bereit ($\beta_x^{(1)}$ bzw. $\kappa_t^{(1)}$). Die Modelle aus Tab. 1 werden im weiteren Verlauf dieser Arbeit als GAPC-Modelle definiert.

Hinsichtlich der Wahrscheinlichkeitsverteilung und damit zur Festlegung der ersten (Zufalls-)Komponente sollen die Kopfschäden in dieser Masterarbeit als poissonverteilt angenommen werden, während die Kopplung der Zufallskomponenten mit der systematischen Komponente auf Basis der log-Linkfunktion (als dritter Komponente) erfolgt. Hierbei gilt es anzumerken, dass im Rahmen der Sterblichkeitsmodellierung die Anzahl der Toten $D_{x,t}$ zwar ebenfalls häufig als poissonverteilt (oder alternativ auch als binomialverteilt) festgesetzt wird, der Ermittlung aber eine Ereigniszählung zugrunde liegt.¹⁰⁹ Demgegenüber werden Kopfschäden als durchschnittliche Schadenhöhen betrachtet. Um den Transfer von dem einen auf den anderen Bereich zu erreichen, wird die Modellierung sowie spätere Projektion der Kopfschäden daher unabhängig etwaiger Bestandsgrößen vorgenommen und ein konstanter Bestand für alle Alter x und Jahre t festgesetzt. Für die Schätzung entsprechend dem LC-Modell ergibt sich damit beispielhaft

$$Y_{x,t} \sim \text{Poisson} \left(\exp \left(\alpha_x + \beta_x^{(1)} \cdot \kappa_t^{(1)} \right) \right) \quad (21)$$

mit dem Erwartungswert $\exp \left(\alpha_x + \beta_x^{(1)} \cdot \kappa_t^{(1)} \right)$. Durch den Austausch der in der Darstellung enthaltenen Prädiktorstruktur des LC-Modells kann diese auch auf die anderen GAPC-Modelle übertragen werden. Dies gelingt aufgrund der identischen Verteilungsannahme und einer einheitlich festgelegten Linkfunktion für alle Modellvarianten. Eine Verallgemeinerung mit $\exp \left(\alpha_x + \sum_{i=1}^N \beta_x^{(i)} \kappa_t^{(i)} + \beta_x^{(0)} \gamma_{t-x} \right)$ lässt sich unter Verwendung der GAPC-Struktur in Kapitel 3.2 entsprechend wie folgt formulieren:

¹⁰⁹ Vgl. Christiansen u. a. (2018), S. 191.

$$Y_{x,t} \sim \text{Poisson} \left(\exp \left(\alpha_x + \sum_{i=1}^N \beta_x^{(i)} \kappa_t^{(i)} + \beta_x^{(0)} \gamma_{t-x} \right) \right) \quad (22)$$

Darüber hinaus ermöglicht das konsistente, einheitliche Vorgehen für alle Modelle bei der späteren Analyse eine bessere Vergleichbarkeit der Ergebnisse. Dass für die Kopfschäden generell die Poissonverteilung und nicht beispielsweise die – von Christiansen u. a. (2018) präferierte – Normalverteilung verwendet wird, hat insbesondere pragmatische Gründe.¹¹⁰ So erlaubt diese Annahme den Zugriff auf bereits programmierte, qualitätsgesicherte R-Pakete, die in Kapitel 6 vorgestellt und für die Auswertungen ab Kapitel 7 genutzt werden. Inwieweit die Poissonverteilung dabei eine sinnvolle Annahme darstellt, soll ebenfalls in Kapitel 7 erörtert werden. Neben den drei bereits genannten Komponenten werden die Parametereinschränkungen – als vierte Komponente – abschließend analog den Ausführungen in den Kapiteln 3.3 bis 3.6 festgesetzt. Ein Überblick aller verwendeten Nebenbedingungen kann Tab. 7 in Anhang A entnommen werden.

4.3 Parameterschätzung

Wie bereits in Kapitel 2.5 beschrieben wurde, werden für die Kopfschadenbestimmung im Rahmen der Tarifikalkulation in der Regel die Beobachtungsdaten der letzten drei Jahre bzw. $B_{J_{(*)}} = \{t_0 - 2, t_0 - 1, t_0\}$ herangezogen. Dieser Zeitraum soll auch den ab Kapitel 7 beschriebenen Modelluntersuchungen zugrunde gelegt werden. Dazu werden unterschiedliche, in Kapitel 5 festgelegte Testdatensätze zur Bestimmung der Modellparameter jeweils in dieser Länge ausgestaltet. Auf Basis der Ergebnisse erfolgt anschließend eine Projektion für das Jahr $t_0 + 2$.

Die Schätzung der Parameter (im Folgenden auch als Fitting bezeichnet) der GAPC-Modelle wird – unter der Annahme poissonverteilter Kopfschäden – auf Basis der Maximum-Likelihood-Methode durchgeführt.¹¹¹ Anwendung findet dabei die Log-Likelihood-Funktion

$$L(y_{x,t}, \hat{y}_{x,t}) = \sum_{x,t} \omega_{x,t} \{y_{x,t} \cdot \ln(\hat{y}_{x,t}) - \hat{y}_{x,t} - \ln(y_{x,t}!)\}$$

mit den Realisierungen $y_{x,t}$ sowie

$$\hat{y}_{x,t} = g^{-1} \left(\alpha_x + \sum_{i=1}^N \beta_x^{(i)} \kappa_t^{(i)} + \beta_x^{(0)} \gamma_{t-x} \right) = \exp \left(\alpha_x + \sum_{i=1}^N \beta_x^{(i)} \kappa_t^{(i)} + \beta_x^{(0)} \gamma_{t-x} \right)$$

¹¹⁰ Vgl. Christiansen u. a. (2018), S. 191 ff.

¹¹¹ Vgl. Villegas u. a. (2018b), S. 14 f., vgl. Lovász (2011), S. 88.

als dem erwarteten Kopfschaden je Modell, wobei g^{-1} die Umkehrfunktion zu g darstellt. Durch Nullsetzen der Gewichtungsfaktoren $\omega_{x,t}$ ist es möglich, Datenpunkte für spezielle Alter und Kalenderjahre bei der Parameterschätzung unberücksichtigt zu lassen. Im Folgenden sollen jedoch alle Beobachtungswerte eingeschlossen werden und $\omega_{x,t} = 1 \forall x, t$ gelten. Für weitere Informationen zur Maximum-Likelihood-Methode sei beispielsweise auf Held/Sabanés Bové (2014) verwiesen.¹¹²

4.4 Kopfschadenprojektion

Die durch das Fitting gewonnenen Parameter werden genutzt, um Kopfschadenprojektionen für das Jahr $t_0 + 2$ vorzunehmen. Dies gelingt, in dem die von der Kalenderzeit t abhängigen Periodenindizes $\kappa_t^{(i)}, i = 1, \dots, N$ sowie der ggf. vorhandene Kohortenparameter γ_{t-x} als ARIMA-Prozesse modelliert werden.¹¹³ Diese stellen stochastische Prozesse dar, die zur Modellierung nicht-stationärer Zeitreihen genutzt werden können und bereits Anfang der 1970er Jahre durch Box/Jenkins (1970) populär gemacht wurden.¹¹⁴ Für weitergehende Informationen sei beispielsweise auf das mittlerweile in der fünften Auflage erschienene Buch Box u. a. (2015) verwiesen.¹¹⁵

Auch wenn ARIMA-Modelle prinzipiell beliebig komplex gestaltet werden können, wird in dieser Arbeit vor dem Hintergrund eines kurzen Beobachtungs- sowie Projektionszeitraums zur Projektion der $\kappa_t^{(i)}$ auf das vergleichsweise simple und zugleich robuste Modell eines (multivariaten) Random-walk Prozesses mit Drift (RWD) zurückgegriffen.¹¹⁶ Dieses lässt sich als Spezialfall eines ARIMA-Prozesses durch die Schreibweise *ARIMA(0,1,0) mit Drift* ausdrücken. In der Literatur kommt es häufig im Rahmen der Projektion von Sterbewahrscheinlichkeiten zur Modellierung der $\kappa_t^{(i)}$ zum Einsatz.¹¹⁷

Unter der Annahme, dass die $\kappa_t^{(i)}, i = 1, \dots, N$ einem (multivariaten) RWD folgen, lassen sich diese – in Abhängigkeit der Anzahl N der vorhandenen $\kappa_t^{(i)}$ in den einzelnen GAPC-Modellen – entsprechend der Notation von Villegas u. a. (2018b) wie folgt ausdrücken:¹¹⁸

¹¹² Vgl. Held/Sabanés Bové (2014), S. 13 ff.

¹¹³ Vgl. Villegas u. a. (2018b), S. 22.

¹¹⁴ Vgl. Box/Jenkins (1970).

¹¹⁵ Vgl. Box u. a. (2015), S. 88 ff.

¹¹⁶ Vgl. Vogel (2015), S. 130, vgl. Villegas u. a. (2018b), S. 22.

¹¹⁷ Vgl. Lee/Carter (1992), vgl. Cairns u. a. (2006), vgl. Lovász (2011), vgl. Christiansen u. a. (2018).

¹¹⁸ Vgl. Villegas u. a. (2018b), S. 22.

$$\kappa_t = \delta + \kappa_{t-1} + \xi_t^K, \quad \kappa_t = \begin{matrix} \kappa_t^{(1)} \\ \vdots \\ \kappa_t^{(N)} \end{matrix}, \quad \xi_t^K \sim N(0, \Sigma) \quad (23)$$

δ symbolisiert einen N -dimensionalen Vektor von Trend-Parametern, während Σ die Varianz-Kovarianz-Matrix des multivariaten weißen Rauschens ξ_t^K darstellt.

Analog zu κ_t wird für den Kohortenparameter γ_{t-x} vorgegangen und angenommen, dass sich dieser mit einem ARIMA(0,1,0)-Prozess mit Drift abbilden lässt. Diese Annahme wird – wie schon für $\kappa_t^{(i)}$ – vor dem Hintergrund der kurzen Untersuchungszeiträume getroffen, obwohl in anderen Studien wie Cairns u. a. (2011) oder Lovász (2011) für den Kohortenparameter auch davon abweichende ARIMA-Prozesse modelliert werden.¹¹⁹ Hingegen übereinstimmend mit den genannten Veröffentlichungen soll zusätzlich vorausgesetzt werden, dass κ_t und γ_{t-x} voneinander unabhängig sind.

4.5 Risikomaße und grafische Auswertungsmethoden

Um eine Entscheidung zu treffen, welches Modell sich am besten zur Projektion von Kopfschäden eignet, existieren eine Vielzahl unterschiedlicher quantitativer wie auch qualitativer Verfahren. Eine Möglichkeit besteht in der Betrachtung der (skalierten) Residuen $r_{x,t}$ der gefitteten Modelle durch den Vergleich der Beobachtungswerte $y_{x,t}$ gegen die geschätzten Werte $\hat{y}_{x,t}$.¹²⁰ Die $r_{x,t}$ können analog zu Villegas u. a. (2018b) wie folgt bestimmt werden:

$$r_{x,t} = \text{sign}(y_{x,t} - \hat{y}_{x,t}) \sqrt{\frac{\text{dev}(x,t)}{\hat{\phi}}}, \quad \hat{\phi} = \frac{D(y_{x,t}, \hat{y}_{x,t})}{K - \nu} \quad (24)$$

Unter der Annahme einer poissonverteilten Zufallskomponente werden die Einzelabweichungen $\text{dev}(x,t)$ je Alter x sowie Kalenderjahr t anhand der Formel $\text{dev}(x,t) = 2 \left[y_{x,t} \ln \left(\frac{y_{x,t}}{\hat{y}_{x,t}} \right) - (y_{x,t} - \hat{y}_{x,t}) \right]$ ermittelt. Für die Gesamtabweichung $D(y_{x,t}, \hat{y}_{x,t})$ eines Modells je Beobachtungszeitraum gelte $D(y_{x,t}, \hat{y}_{x,t}) = \sum_{x,t} \omega_{x,t} \text{dev}(x,t)$, wobei entsprechend der Festlegung in Kapitel 4.3 $\omega_{x,t} = 1 \forall x, t$ ist. Außerdem seien $K = \sum_{x,t} \omega_{x,t}$ die Gesamtanzahl aller Beobachtungswerte je Beobachtungszeitraum und ν die Anzahl der im jeweiligen Modell verwendeten Parameter.

¹¹⁹ Vgl. Cairns u. a. (2011), S. 357, vgl. Lovász (2011), S. 99.

¹²⁰ Vgl. Villegas u. a. (2018b), S. 17 f. Hinweis zu (24): Die Vorzeichenfunktion $\text{sign}(y_{x,t} - \hat{y}_{x,t})$ wird

definiert als $\text{sign}(y_{x,t} - \hat{y}_{x,t}) := \begin{cases} +1 & \text{falls } y_{x,t} - \hat{y}_{x,t} > 0 \\ 0 & \text{falls } y_{x,t} - \hat{y}_{x,t} = 0 \\ -1 & \text{falls } y_{x,t} - \hat{y}_{x,t} < 0 \end{cases}$.

Die Residuen werden grafisch dargestellt und analysiert.¹²¹ Dazu werden die Muster betrachtet, die sich durch die Abbildung von positiven und negativen Residuen ergeben. Je zufälliger ein derartiges Muster mit positiven und negativen Werten bestückt ist, desto besser erscheint die Anpassungsgüte des betrachteten Modells an den Datensatz. Treten hingegen regelmäßige Strukturen auf, ist dies ein Indiz dafür, dass das untersuchte Modell nicht alle Merkmale der Beobachtungswerte angemessen berücksichtigt.

Neben der qualitativen Untersuchung anhand der visualisierten Residuen bieten das Akaike-Informationskriterium (AIC) und das Bayessche Informationskriterium (BIC) die Möglichkeit, die Ergebnisse der Parameterschätzung auch quantitativ zu analysieren.¹²² Generell wird davon ausgegangen, dass eine höhere Anzahl an Modell-Parametern und eine höhere Modellkomplexität zu einer besseren Anpassung an die Beobachtungsdaten führen. Um auszuschließen, dass die hohe Anpassungsgüte eines Modells nur das Resultat einer Überparametrisierung ist, verbinden die beiden genannten Informationskriterien das Ergebnis der Log-Likelihood-Schätzung L (entsprechend Kapitel 4.3) mit der Anzahl der im Modell enthaltenen Parameter und ermöglichen auf diese Weise einen Vergleich der relativen Performance der einzelnen Modelle. AIC und BIC definieren sich wie folgt:

$$AIC = 2 \cdot \nu - 2 \cdot L, \quad BIC = \ln(K) \cdot \nu - 2 \cdot L \quad (25)$$

Das AIC und das BIC sind sehr ähnlich aufgebaut, da beide das Ergebnis der Log-Likelihood-Schätzung L berücksichtigen und beim Vergleich der Modelle kleinere Ergebnisse vorzuziehen sind. Der Unterschied der beiden Kriterien liegt darin, dass beim BIC die Anzahl der Parameter ν mit $\ln(K)$ multipliziert und daher die Komplexität eines Modells noch stärker bestraft wird als beim AIC, welches lediglich den Faktor 2 vorsieht.

Nach der Beurteilung der Parameterschätzung werden die auf Basis der gefitteten Parameter durchgeführten Kopfschadenprojektionen für das Jahr $t_0 + 2$ grafisch den tatsächlich beobachteten Kopfschäden des jeweiligen Projektionsjahres gegenübergestellt. Die Darstellung wird in absoluten Werten sowie als relative Abweichung der einzelnen Modelle zu den Echtdateen vorgenommen. Dem schließt sich die Analyse der Risikomaße des mittleren absoluten Prognosefehlers (MAE) sowie der Wurzel aus dem mittleren quadrierten Prognosefehler (RMSE) an, durch deren Berechnung die Projektionsergebnisse auch quantitativ den tatsächlich beobachteten Werten gegenübergestellt werden.¹²³ MAE und RMSE lassen sich wie folgt definieren:

¹²¹ Vgl. Pitacco et al. (2009), S. 218 ff., vgl. Villegas u. a. (2018b), S. 17.

¹²² Vgl. Villegas u. a. (2018b), S. 19 ff., vgl. Held/Sabanés Bové (2014), S. 227 ff.

¹²³ Vgl. Bohk (2012), S. 158 ff. Hinweis zu (26): $abs(y_{x,t} - \hat{y}_{x,t}) := \begin{cases} y_{x,t} - \hat{y}_{x,t} & \text{falls } y_{x,t} - \hat{y}_{x,t} \geq 0 \\ \hat{y}_{x,t} - y_{x,t} & \text{falls } y_{x,t} - \hat{y}_{x,t} < 0 \end{cases}$

$$MAE = \frac{\sum_{x,t} abs(y_{x,t} - \hat{y}_{x,t})}{K} \quad RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{x,t} (y_{x,t} - \hat{y}_{x,t})^2}{K}} \quad (26)$$

Beide Risikomaße nehmen ausschließlich positive Werte an. Je größer diese sind, desto stärker weichen die projizierten Ergebnisse von den tatsächlichen ab. Die RMSE-Berechnung unterscheidet sich von der des MAE vor allem hinsichtlich der Empfindlichkeit auf Ausreißer, da diese durch die Quadrierung einen deutlichen stärkeren Einfluss haben.

4.6 Ergebnisvergleich mit alternativen Modellen zur Kopfschadenprojektion

Wie bereits mit dem Blick auf den Stand der Forschung angedeutet wurde, haben Christiansen u. a. (2018) und Piontkowski (2020) Studien veröffentlicht, in denen sie Sterblichkeitsmodelle auf die Kopfschadenprojektion übertragen.¹²⁴ Hierbei greifen sie bei der Parameterschätzung der untersuchten Modelle auf eine Zeitspanne der Jahre 1995/1996 bis 2008 zurück. Dies geht zwar deutlich über die für diese Arbeit vorgesehenen, dreijährigen Beobachtungszeiträume hinaus, dennoch sollen die von den Autoren favorisierten Modelle auch auf Basis des hier genutzten Datensatzes angewendet und die Ergebnisse anschließend gegen die GAPC-Modelle verglichen werden. Dieser Vergleich soll auch die Kopfschadenprojektionen miteinbeziehen, wie sie nach dem Rusam-Ansatz entsprechend dem Vorgehen in Kapitel 2.5 durchgeführt werden. Aufgrund der unterschiedlichen Herangehensweisen bei der Anwendung der Modelle wird die Gegenüberstellung der GAPC-Modelle mit den drei alternativen Projektionsmodellen allerdings auf die reinen Projektionsergebnisse beschränkt. Die Analyse der Parameterschätzung wird ausschließlich für die GAPC-Modelle mit ihrem – entsprechend den Ausführungen in Kapitel 4.3 – einheitlich durchzuführenden Fitting vorgenommen. Um die GAPC-Modelle und die drei übrigen Modelle dennoch gleichwertig zu behandeln, wird die Untersuchung der Projektionsergebnisse das ausschlaggebende Kriterium bei der Entscheidung für das am besten für die Kopfschadenprojektion geeigneten Modells darstellen. Die Betrachtung der Parameterschätzung soll darüber hinaus aber Anhaltspunkte liefern, welche Modelle innerhalb der GAPC-Gruppe zu präferieren sind oder ggf. schlechtere Projektionsergebnisse erwarten lassen.

Nachdem der Rusam-Ansatz und die GAPC-Modelle bereits ausführlich vorgestellt wurden, sollen im nächsten Schritt die von Christiansen u. a. (2018) und Piontkowski (2020) favorisierten Modelle beschrieben werden. Christiansen u. a. (2018) identifizierten als

¹²⁴ Vgl. Christiansen u. a. (2018), S. 188 ff., vgl. Piontkowski (2020), S. 73 ff.

bestes Prognosemodell einen Ansatz nach Lee/Carter (1992), dem eine Normalverteilung der Kopfschäden zugrunde gelegt wurde.¹²⁵ Außerdem erfolgte vor der Parameterschätzung keine Logarithmierung des Datensatzes und zur Projektion wurde ein RWD genutzt. In Anlehnung an die Notation in Kapitel 4.2 lässt sich dieses Modell wie folgt darstellen:

$$Y_{x,t} \sim \text{Nor}\left(\alpha_x + \beta_x^{(1)} \cdot \kappa_t^{(1)}, \sigma^2\right) \quad (27)$$

Dieses weist eine starke Ähnlichkeit mit dem bereits vorgestellten LC-Modell auf, unterscheidet sich hiervon aber insbesondere in der Verteilungsannahme (Poisson vs. Normal) sowie der Nicht-Logarithmierung der Daten.

Piontkowski (2020) setzte auf das von Christiansen u. a. (2018) bevorzugte Modell auf und verallgemeinerte dieses auf Basis des von Hyndman/Shahid Ullah (2007) veröffentlichten funktionalen Datenansatzes (aus dem Englischen: functional data approach).¹²⁶ Damit verbunden ist die Idee, dass sich die Realisierungen $y_{x,t}$ als Summe einer glatten Funktion $f_t(x)$ sowie einem Fehlerterm $\epsilon_t(x)$ wie folgt ausdrücken lassen:

$$y_{x,t} = f_t(x) + \epsilon_t(x) \text{ mit } \epsilon_t(x) \sim \text{Nor}(0, \sigma_t^2(x)) \quad (28)$$

$f_t(x)$ nimmt dabei die Gestalt $f_t(x) = \mu(x) + \sum_{j=1}^J \kappa_j(t) \phi_j(x) + e_t(x)$ mit dem Fehlerterm $e_t(x) \sim \text{Nor}(0, v(x))$ an und es zeigen sich deutliche Ähnlichkeiten zur in Kapitel 3.2 vorgestellten GAPC-Struktur $\eta_{x,t} = \alpha_x + \sum_{i=1}^N \beta_x^{(i)} \kappa_t^{(i)} + \beta_x^{(0)} \gamma_{t-x}$. Während $\mu(x)$ – praktisch analog zu α_x – als mittleres Kopfschadenniveau interpretiert werden kann, repräsentieren die Menge von J Termen $\kappa_j(t) \phi_j(x)$ im Modell von Piontkowski (2020) bzw. N Termen $\beta_x^{(i)} \kappa_t^{(i)}$ in der GAPC-Struktur die Veränderung der Kopfschäden im Zeitablauf. Unterschiede ergeben sich vor allem durch die Ermittlung der Terme $\phi_j(x)$ und $\beta_x^{(i)}$. Während $\beta_x^{(i)}$ entweder als vorab zu definierende, vom Alter abhängige Funktionen oder alternativ ohne vorherige Festlegung im Rahmen der Parameterschätzung zu bestimmen sind, werden $\phi_j(x)$ als Menge von orthonormalen Basisfunktionen im Rahmen einer Hauptkomponentenanalyse ermittelt. Da sich die $\phi_j(x)$ wegen der Orthonormalität nicht gegenseitig beeinflussen, können die $\kappa_j(t)$ durch Piontkowski (2020) unabhängig voneinander modelliert werden. Bei der Parameterschätzung wählte der Autor eine Anzahl von drei Termen $\kappa_j(t) \phi_j(x)$ bzw. $J = 3$ und erreichte einerseits eine Verbesserung der Auswertungsergebnisse gegenüber Christiansen u. a. (2018), versuchte andererseits durch eine nicht zu starke Erhöhung der Parameteranzahl aber auch einer Überparametrisierung

¹²⁵ Vgl. Christiansen u. a. (2018), S. 191 ff.

¹²⁶ Vgl. Piontkowski (2020), S. 73 f., vgl. Hyndman/Shahid Ullah (2007).

vorzubeugen.¹²⁷ Für die Projektion der Kopfschäden, die auf Basis der von t abhängigen Parameter $\kappa_j(t)$ erfolgte, setzte Piontkowski (2020) sowohl auf das RWD-Modell als auch das lineare Trendmodell nach Holt (2004), wobei er keinen eindeutigen Favoriten identifizieren konnte.¹²⁸ Da sich der Ansatz nach Holt (2004) nicht eindeutig gegenüber dem des RWD durchsetzen konnte, wird jener in dieser Masterarbeit aufgrund der höheren Komplexität nicht weiter verfolgt. Für zusätzliche Details zu Piontkowski (2020) und auch Christiansen u. a. (2018) soll außerdem auf die jeweiligen Veröffentlichungen verwiesen werden.¹²⁹

In Anlehnung an den Ansatz nach Lee/Carter (1992) und im Vorgriff auf die in Kapitel 6 vorgestellte R-Programmierung wird das von Christiansen u. a. (2018) bevorzugte Modell im Folgenden mit *LCA* abgekürzt, das Modell auf Basis des funktionalen Datenansatzes von Piontkowski (2020) mit *FDM*. Die Kopfschadenprojektion nach dem Rusam-Ansatz, entsprechend Kapitel 2.5, erhält die Abkürzung *RUSAM2*.

¹²⁷ Vgl. Piontkowski (2020), S. 75 ff.

¹²⁸ Vgl. Piontkowski (2020), S. 81 f., vgl. Holt (2004).

¹²⁹ Vgl. Piontkowski (2020), vgl. Christiansen u. a. (2018).

5 Beschreibung des verwendeten Datensatzes

Ursprünglich war vorgesehen, die Untersuchungen dieser Masterarbeit auf Basis der von der Bundesanstalt für Finanzdienstleistungsaufsicht (BaFin) jährlich veröffentlichten Kopfschadenreihen durchzuführen, wie sie auch von Christiansen u. a. (2018) und Piontkowski (2020) bei der Projektion von Kopfschadenentwicklungen für stationäre Leistungen verwendet wurden. Christiansen u. a. (2018) deutet jedoch bereits auf Unregelmäßigkeiten des Datensatzes im Jahr 2003 hin, die Piontkowski (2020) mit Verweis auf Böcking u. a. (2005) und Ahrens u. a. (2004) auf eine Umstellung im Erstattungssystem von Krankenhäusern zurückführt.¹³⁰ Diese Änderung verursachte in den Jahren 2003 und 2004 fehlerhafte Leistungsabrechnungen, aus denen ein Bruch in den BaFin-Werten resultiert. Darüber hinaus hat die BaFin nach dem Jahr 2011 diverse Anpassungen in ihren Meldedaten vorgenommen. Besonders weitreichend war die Anpassung des von den PKV-Unternehmen zu meldenden Datensatzes gemäß § 103a Abs. 2 VAG aF im Jahr 2012, die zu deutlichen Änderungen in dem der Meldung zugrundeliegenden Personenkreis führte und eine Vergleichbarkeit zwischen älteren und neueren Daten aufgrund einer heterogenen Datenbasis daher nur noch sehr eingeschränkt möglich macht.¹³¹ Den wichtigsten Grund für die Nichtauswahl der BaFin-Daten liefert die Behörde jedoch selbst, indem sie darauf hinweist, dass bereits veröffentlichte Kopfschadenreihen bei späteren Korrekturmeldungen durch die PKV-Unternehmen nicht mehr nachträglich korrigiert werden und die „bisherigen Tafeln [...] aus heutiger Sicht nicht mehr für Kalkulationszwecke und sonstige aktuelle Auswertungen geeignet“¹³² sind.

Neben den von der BaFin veröffentlichten Kopfschadenreihen existieren praktisch keine öffentlich zugänglichen, über einen längeren Zeitraum erhobenen Datenreihen, mit denen Kopfschadenprojektionen auf Basis ausreichend großer Bestände durchgeführt werden können. Daher wurde alternativ auf die vom PKV-Verband zur Verfügung gestellten Kopfschadenstatistiken zurückgegriffen, die in einem passwortgeschützten Bereich über das sogenannte RePortal (<https://reportal.pkv.de/>) abrufbar sind. Die Statistiken werden aus den von den einzelnen PKV-Unternehmen gemeldeten Daten erzeugt, die diese entsprechend dem Statistik-Handbuch, Band III (Kopfschadenstatistik) des PKV-Verbandes

¹³⁰ Vgl. Christiansen u. a. (2018), S. 192, vgl. Piontkowski (2020), S. 76, vgl. Böcking u. a. (2005), S. 128 ff., vgl. Ahrens u. a. (2004), S. 61 ff.

¹³¹ Vgl. Bundesanstalt für Finanzdienstleistungsaufsicht (2014). Die Umstellung in den BaFin-Daten könnte der Grund dafür sein, dass Christiansen u. a. (2018) und Piontkowski (2020) nur Daten bis einschließlich des Jahres 2011 untersuchen, obwohl die entsprechenden Papers erst in den Jahren 2018 respektive 2020 veröffentlicht worden sind.

¹³² Bundesanstalt für Finanzdienstleistungsaufsicht (2020).

zusammenstellen.¹³³ Hintergrund ist die Erfüllung der Meldepflichten gemäß § 159 Abs. 2 VAG i. V. m. § 23 KVAV. Die Daten werden anschließend vom PKV-Verband aufbereitet und – kumuliert über alle PKV-Unternehmen – im RePortal hochgeladen. Die Aufbereitung beinhaltet dabei unter anderem die Bereinigung der Statistiken um Anwartschaftsversicherungen oder auch Berufsausbildungsversicherungen (z. B. Beamtenanwärter).¹³⁴ Die Kumulierung zeigt sich entsprechend den Ausführungen in Kapitel 4.1 zum einen darin, dass die Schadendaten nicht granular, sondern nur als durchschnittliche Realisierungen $y_{x,t}$ vorliegen. Zum anderen lassen sich die aus dem RePortal exportierten Kopfschäden hinsichtlich der Datenqualität in Bezug auf Risikozuschläge und Sondereffekte nicht weiter einschränken. Bereinigt werden können diese lediglich um Verträge mit einer bestimmten Versicherungsdauer. Diese Option wird dazu genutzt, um Versicherte innerhalb der ersten drei Versicherungsjahre ($m^* = 3$) aus dem Datenbestand zu eliminieren. Dies ist üblich bei Kalkulationen und soll eine Verfälschung der Kopfschäden durch WSE verhindern. Die resultierenden Kopfschäden werden anschließend unmittelbar als tatsächliche Kopfschäden angenommen, auf Basis derer die Parameterschätzungen, Projektionen und Ergebnisvergleiche der einzelnen Modellvarianten durchgeführt werden.

Als Auswertungsbasis dienen die tatsächlichen Kopfschäden der weiblichen und männlichen Vollkostenversicherten (Angestellte, Selbstständige, Freiberufler) im Altersbereich $A = \{21, \dots, 80\}$. Die gemeinsame Auswahl von Frauen und Männern bietet einerseits den Vorteil einer breiten Datenbasis und damit verbunden tendenziell stabileren Auswertungsergebnissen im Vergleich zur Wahl nur einer der beiden Gruppen. Andererseits lässt sich dieses Vorgehen mit Blick auf das Urteil des Europäischen Gerichtshofs vom 01.03.2011 (C-236/09) begründen, nach dem bei Tarif-Abschlüssen ab dem 21.12.2012 nicht mehr nach dem Geschlecht unterschieden werden darf. Die untere Grenze des Altersbereichs wurde – angelehnt an das Maximalalter der Jugendlichen $\omega_j = 20$ – mit $x = 21$ Jahren gewählt, um für die Auswertung nur die erwachsenen Versicherten zu berücksichtigen. Die Obergrenze wurde analog zu Christiansen u. a. (2018) mit $x = 80$ Jahren festgelegt, da die Zufallsschwankungen aufgrund abnehmender Bestände im hohen Altersbereich deutlich zunehmen.¹³⁵ Ausgewertet werden jeweils die drei Leistungsbe-
reiche $\{\textit{ambulant}, \textit{stationär}, \textit{Zahn}\}$ mit ambulanten Leistungen, stationären Leistun-

¹³³ Vgl. PKV-Verband (2020).

¹³⁴ Vgl. PKV-Verband (2020), S. 4 ff.

¹³⁵ Vgl. Christiansen u. a. (2018), S. 188.

gen sowie Leistungen für Zahnersatz und -behandlung.¹³⁶ Als Orientierung der damit verbundenen Leistungsversprechen dienen Versicherungstarife der drei privaten Krankenkversicherer Debeka Krankenversicherungsverein a. G., DKV Deutsche Krankenversicherung AG sowie der ALTE OLDENBURGER Krankenversicherung AG.¹³⁷ Genauere Informationen zu der für diese Masterarbeit getroffenen Abgrenzung finden sich in Tab. 8 (Anhang B). Wie bereits in Kapitel 2.5 beschrieben wurde, erfolgen alle Auswertungen auf Grundlage nicht geglätteter Kopfschadenwerte. Prinzipiell führt eine Glättung zur Eliminierung zufällig auftretender Schwankungen in der Datenbasis. Der Verzicht darauf bietet jedoch die Möglichkeit, dass die in natürlicher Weise vorkommenden Schwankungen durch die untersuchten Modelle antizipiert werden.

Für die Kopfschadenauswertungen stehen die Beobachtungsjahre $t = 2010, \dots, 2019$ zur Verfügung.¹³⁸ Die Daten der Jahre 2010 und 2011 werden nicht verwendet, da sie nach dem ersten Bereitstellen nicht mehr aktualisiert wurden. Die Kopfschäden der verbleibenden Jahre 2012 bis 2017 werden – wie bereits in Kapitel 4.3 festgelegt – in vier Testdatenzeiträume der Form $BJ_{(*)} = \{t_0 - 2, t_0 - 1, t_0\}$ mit je drei Beobachtungsjahren zerlegt, auf Basis derer die Parameter der einzelnen Modelle ermittelt werden: $BJ_1 = \{2012, 2013, 2014\}$, $BJ_2 = \{2013, 2014, 2015\}$, $BJ_3 = \{2014, 2015, 2016\}$, $BJ_4 = \{2015, 2016, 2017\}$. Die Fittingergebnisse der einzelnen Zeiträume werden genutzt, um Projektionen der Kopfschäden jeweils für das Jahr $t_0 + 2$ vorzunehmen. Für den Vergleich der projizierten mit den tatsächlichen Kopfschäden entsprechend den in Kapitel 4.5 vorgestellten Auswertungsmethoden werden die Daten der Validierungsjahre $VJ_1 = \{2016\}$, $VJ_2 = \{2017\}$, $VJ_3 = \{2018\}$ und $VJ_4 = \{2019\}$ herangezogen.

Die logarithmierten Kopfschäden für den stationären Leistungsbereich wurden bereits in Abb. 2 dargestellt und es zeigte sich ein sehr ähnlicher Verlauf im Vergleich zu den logarithmierten Sterbewahrscheinlichkeiten in Abb. 1. In Abb. 3 und Abb. 4 werden beispielhaft für die Jahre 2015 bis 2017 die logarithmierten Kopfschäden der männlichen und weiblichen Vollkosten-Versicherten für den ambulanten Leistungsbereich sowie für den Leistungsbereich Zahn dargestellt.

¹³⁶ In Kapitel 2.2 werden im Bereich Zahn die Leistungsbereiche Zahnersatz und Zahnbehandlung unterschieden. Diese werden im Folgenden unter dem Leistungsbereich $\{Zahn\}$ zusammengefasst.

¹³⁷ Vgl. Debeka Krankenversicherungsverein a. G. (o. J.), vgl. DKV Deutsche Krankenversicherung AG (o. J.), vgl. ALTE OLDENBURGER Krankenversicherung AG (o. J.).

¹³⁸ Eine Übersicht der vorliegenden Datenstände kann Tab. 9 in Anhang B entnommen werden.

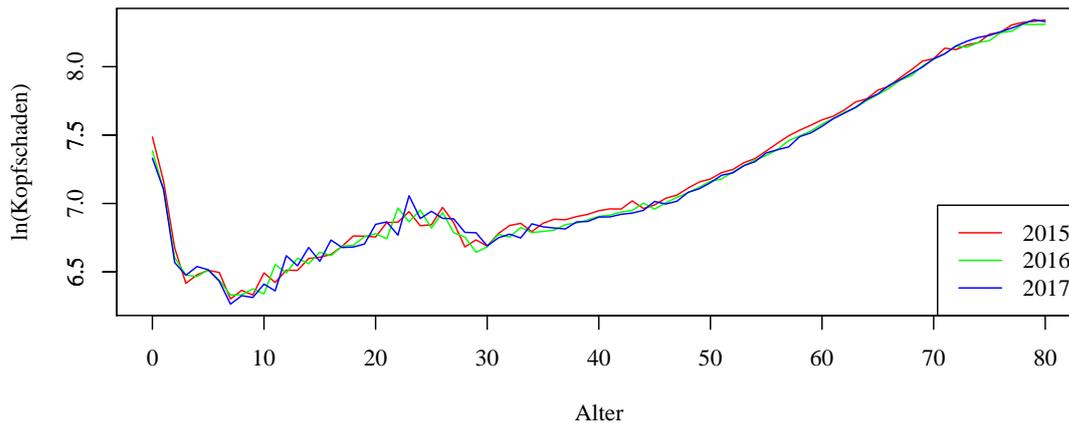


Abb. 3: Kopfschäden des ambulanten Leistungsbereichs für männliche und weibliche Vollkosten-Versicherte, Verband der Privaten Krankenversicherung.¹³⁹

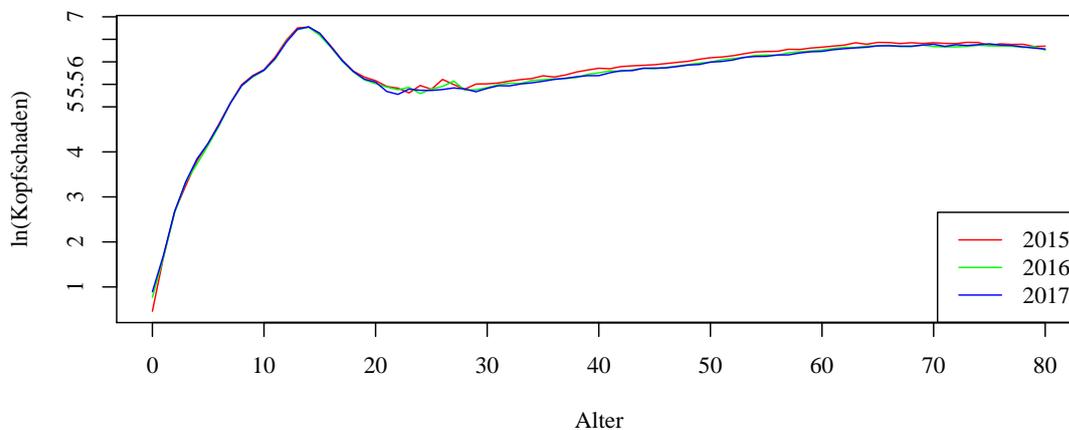


Abb. 4: Kopfschäden des Leistungsbereichs Zahn für männliche und weibliche Vollkosten-Versicherte, Verband der Privaten Krankenversicherung.¹⁴⁰

Während im ambulanten Leistungsbereich ein durchaus ähnlicher Schadenverlauf zum stationären Leistungsbereich erkennbar ist, zeigt sich im Leistungsbereich Zahn eine abweichende Situation. Entsprechend den Auswertungsdaten liegt im Jugendlichenalter ein deutlich erhöhtes Schadenniveau vor, das sich insbesondere auf die vermehrte Inanspruchnahme von kieferorthopädischen Leistungen zurückführen lässt. Nach einem Rückgang bis zum Alter von circa 20 Jahren ergibt sich bis in den oberen Altersbereich vor allem aufgrund zunehmender Leistungen im Bereich Zahnersatz ein leicht, aber stetig ansteigendes Kopfschadenniveau, welches erst in höheren Altern langsam wieder abfällt. Obwohl sich der Kopfschadenverlauf anschaulich von dem der Sterblichkeiten in Abb. 1 unterscheidet, sollen die Sterblichkeitsmodelle auch auf den Leistungsbereich Zahn

¹³⁹ Eigene Darstellung. Datenquelle: RePortal.

¹⁴⁰ Eigene Darstellung. Datenquelle: RePortal.

übertragen werden. Damit verbunden ist die Idee, dass die betrachteten Modelle nur die Struktur von Datenreihen aufgreifen, diese jedoch nicht zwingend dem Muster von Sterbewahrscheinlichkeiten entsprechen müssen. Neben den gezeigten Abbildungen sei an dieser Stelle außerdem auf die Abbildungen in Anhang C verwiesen. Dort werden ergänzend zu Abb. 2 bis Abb. 4 die Kopfschäden über alle zur Verfügung stehenden Beobachtungsjahre 2012 bis 2019 als 3D-Objekt dargestellt, um einen besseren Einblick in die Entwicklung der Kopfschäden der einzelnen Leistungsbereiche zu erhalten. Demnach zeigt sich im ambulanten und stationären Leistungsbereich (Abb. 12 und Abb. 13) ein – vor allem in jüngeren Altern – schwankendes, über die Zeit aber tendenziell steigendes Schadenniveau, wobei insbesondere in den Jahren 2016 und 2017 in einigen Altersbereichen auch leicht abnehmende Kopfschäden zu verzeichnen sind. Ein ähnliches Bild mit niedrigeren Kopfschäden in den Jahren 2016 und 2017 kann auch im Zahnbereich (Abb. 14) beobachtet werden. Entgegen den beiden anderen Leistungsbereichen scheint sich beim Vergleich der Jahre 2012 und 2019 allerdings in der langen Frist ein tendenziell geringeres Kopfschadenniveau eingestellt zu haben.

6 Praktischer Ablauf der Modelluntersuchung

6.1 Nutzung der Statistik-Software R

Für den praktischen Ablauf der Modelluntersuchung wird die kostenlose Statistik-Software R mit der darin implementierten, gleichnamigen Programmiersprache R eingesetzt. R ist eine Interpretersprache, demnach Anweisungen bzw. der Programmcode direkt ausgeführt und nicht erst im Gesamten kompiliert werden.¹⁴¹ Sie bietet die Möglichkeit, Daten auf verschiedenste Art und Weise statistisch zu analysieren und zu visualisieren.¹⁴² Zu den Methoden gehören beispielsweise „linear and nonlinear modelling, classical statistical tests, time-series analysis, classification, clustering“¹⁴³. Die Analysen können dabei auf Basis der standardmäßig in R enthaltenen Funktionen durchgeführt werden. Alternativ lassen sich aber auch eigene Bedingungen, Schleifen oder Funktionen formulieren. Darüber hinaus existieren – in Form sogenannter Pakete – viele Erweiterungen für R, mit denen sich die Funktionalität der Programmiersprache praktisch unbegrenzt erweitern lässt.¹⁴⁴ Möglich wird dies durch den Open-Source-Charakter von R, wodurch ihr Quelltext jederzeit öffentlich eingesehen, genutzt und auch geändert werden kann.¹⁴⁵ Durch das Mitwirken der Nutzer unterliegt R dabei einer ständigen Qualitätskontrolle. Außerdem können jene aktiv an der Weiterentwicklung von R mitwirken und die Anwendungsbereiche durch das Hinzufügen neuer Pakete stetig vergrößern.

6.2 R-Paket StMoMo als Basis der Programmierung

In den folgenden Abschnitten soll auf der einen Seite ein Überblick gegeben werden, welche Pakete (**fett markiert**) und Funktionen (**grau hinterlegt**) bei der Umsetzung der R-Programmierung verwendet wurden. Auf der anderen Seite wird beschrieben, welche Schwierigkeiten bei der Implementierung bewältigt werden mussten. Die Basis bildet das von Villegas u. a. (2018c) geschaffene **StMoMo**-Paket (als Kurzform für „Stochastic Mortality Modelling“¹⁴⁶), das die Funktionalitäten diverser anderer R-Pakete wie dem **demography**-Paket von Hyndman u. a. (2019a), dem **ilc**-Paket von Butt u. a. (2014) oder dem **LifeMetrics**-Paket zur Abbildung stochastischer Sterblichkeitsmodelle vereint.¹⁴⁷

¹⁴¹ Vgl. Ligges (2008), S. 6.

¹⁴² Vgl. The R Foundation (2021).

¹⁴³ The R Foundation (2021).

¹⁴⁴ Vgl. Sauer (2019), S. 14.

¹⁴⁵ Vgl. Ligges (2008), S. 5, vgl. Sauer (2019), S. 17.

¹⁴⁶ Villegas u. a. (2018c).

¹⁴⁷ Vgl. Villegas u. a. (2018b), S. 2 f., vgl. Hyndman u. a. (2019a), vgl. Butt u. a. (2014). Das R-Paket **LifeMetrics** ist nicht auf den offiziellen R-Servern hinterlegt, kann aber über die Internetseite von Andrew J. G. Cairns, dem Miterfinder des CBD-Modells, heruntergeladen werden (vgl. Cairns (o. J.)).

Darüber hinaus bietet das **StMoMo**-Paket diverse andere Vorteile. Beispielsweise können neben den bereits im Paket vordefinierten Sterblichkeitsmodellen auch weitere Modelle ergänzt werden, die sich durch die GAPC-Struktur darstellen lassen.¹⁴⁸ Außerdem enthält es Funktionen zur Analyse der Fitting- und Projektionsergebnisse in Kapitel 7 sowie zur Quantifizierung der Unsicherheit sowohl bei der Parameterschätzung der Modelle als auch bei der anschließenden Projektion von Kopfschäden. Letztere kommen in Kapitel 8 zum Einsatz. Nachteilig am **StMoMo**-Paket ist hingegen, dass bei der Wahl der Zufallskomponente nur zwischen der Poisson- und Binomialverteilung ausgewählt und nicht beispielsweise auf eine Normal- oder Log-Normalverteilung zurückgegriffen werden kann. Vor dem Hintergrund der kurzen Testdaten- sowie Projektionszeiträume und dem Umstand, dass der Schwerpunkt dieser Masterarbeit nicht in der R-technischen Umsetzung der unterschiedlichen Sterblichkeitsmodelle, sondern in der Untersuchung ihrer Projektionseigenschaften liegen soll, wird dieser Mangel jedoch in Kauf genommen. Alternative R-Pakete mit einer im Vergleich zu **StMoMo** derart simplen Möglichkeit, die GAPC-Modelle in R zu implementieren, scheinen nach entsprechenden Recherchen aktuell (noch) nicht zur Verfügung zu stehen. Auch die Vielzahl an komfortablen Auswertungsmöglichkeiten begründet die Wahl von **StMoMo**.

6.3 Datenimport und Implementierung der untersuchten Modelle in R

Die GAPC-Modelle LC, RH, APC, CBD sowie M7 sind fester Bestandteil des **StMoMo**-Pakets und lassen sich bei Annahme einer Poissonverteilung unter Anwendung der log-Linkfunktion mit den Funktionen `lc(link = "log")`, `rh(link = "log", cohortAgeFun = "1")`, `apc(link = "log")`, `cbd(link = "log")` und `m7(link = "log")` festlegen.¹⁴⁹ Die Modelle PLAT und PLAT2 stehen demgegenüber nicht als vorab definierte Funktionen zur Verfügung und werden entsprechend dem Vorschlag von Villegas u. a. (2018b) unter Zuhilfenahme der Funktion `StMoMo()` umgesetzt.¹⁵⁰ Da in dem genannten Paper nur eine Implementierung des um den Term $(\bar{x} - x)^+ \cdot \kappa_t^{(3)}$ reduzierten PLAT2-Modells vorgesehen ist, wird zusätzlich auf die Ausführungen von Villegas (2020) zur Implementierung des vollständigen PLAT-Modells zurückgegriffen.¹⁵¹ Das ebenfalls nicht vordefinierte RUSAM-Modell wird auf Basis des von Villegas u. a. (2018b) gezeigten Vorgehens für das LC-Modell definiert, dabei jedoch der

¹⁴⁸ Vgl. Villegas u. a. (2018b), S. 3.

¹⁴⁹ Vgl. Villegas u. a. (2018b), S. 13.

¹⁵⁰ Vgl. Villegas u. a. (2018b), S. 13 f.

¹⁵¹ Vgl. Villegas (2020).

α_x -Parameter mit dem Argument `staticAgeFun = FALSE` eliminiert und auf die Nebenbedingung $\sum_t \kappa_t^{(1)} = 0$ verzichtet.¹⁵² Eine genaue Beschreibung zur Umsetzung der drei zuletzt genannten Modelle findet sich in Anhang D. Unterschiede des PLAT- gegenüber dem PLAT2-Modell wurden dabei in roter Schriftfarbe kenntlich gemacht.

Um die in Kapitel 5 beschriebenen Beobachtungswerte in R zu importieren, werden diese zunächst im CSV-Format aus dem RePortal exportiert und anschließend mit dem Befehl `read.csv2()` aus dem R-Standardpaket `utils` in R eingelesen. Im nächsten Schritt werden die Daten mit der `StMoMo`-Funktion `demogdata()` in ein Objekt der Klasse „demogdata“ und anschließend mittels `StMoMoData()` in ein Objekt der Klasse „StMoMoData“ überführt, um diese für das Fitting der Modelle vorzubereiten.¹⁵³ Dabei erfolgt auch die Festlegung der Testdatenzeiträume B_{J_1} bis B_{J_4} entsprechend den Angaben in Kapitel 5 sowie die Einschränkung auf den Altersbereich $A = \{21, \dots, 80\}$. Zur Unterscheidung der Testdatenzeiträume sowie der drei Leistungsbereiche $\{ambulant, stationär, Zahn\}$ werden die Daten mit dem R-Standardbefehl `list()` in Listen überführt und die im weiteren Verlauf aufgeführten Funktionen unter Zuhilfenahme des `lapply()`-Befehls auf die einzelnen Datensätze angewendet.

6.4 Umsetzung der Parameterschätzung und Kopfschadenprojektion in R

Für das Fitting der GAPC-Modelle – gemäß den Ausführungen in Kapitel 4.3 – wird auf Basis der in `StMoMoData`-Objekte transformierten Testdatensätze die Funktion `fit()` genutzt. Mit dieser kombinieren Villegas u. a. (2018b) die einheitliche Struktur von Sterblichkeitsmodellen aus der GAPC-Familie mit der von Turner/Firth (2020c) veröffentlichten Funktion `gnm()` zur Parameterschätzung aus dem gleichnamigen R-Paket.¹⁵⁴ Mit Verweis auf Currie (2016) deuten Villegas u. a. (2018b) allerdings schon an, dass bei der Schätzung des RH-Modells teilweise Konvergenzprobleme auftreten und keine Parameter bestimmt werden können.¹⁵⁵ Currie (2016) schlägt vor, die Fittingergebnisse durch das Setzen von Startparametern zu verbessern. In der `fit()`-Funktion kann diese Optimierung durch die Argumente `start.ax`, `start.bx` sowie `start.kt` vollzogen werden. Da sich die genannten Konvergenzprobleme bei der Parameterschätzung des RH-Modells

¹⁵² Vgl. Villegas u. a. (2018b), S. 12 f.

¹⁵³ Vgl. Villegas u. a. (2018a), S. 51 f.

¹⁵⁴ Vgl. Villegas u. a. (2018b), S. 2, vgl. Turner/Firth (2020c), S. 30 ff. vgl. Turner/Firth (2020b).

¹⁵⁵ Vgl. Villegas u. a. (2018b), S. 16, vgl. Currie (2016), S. 373 ff.

auch auf Basis der in dieser Masterarbeit betrachteten Kopfschäden einstellten, wurde mehrfach auf diesen Workaround zurückgegriffen.

Ähnliche Schwierigkeiten wie beim RH-Modell ergeben sich bei der Parameterschätzung des selbst erzeugten RUSAM-Modells. Da hierzu in der Literatur keine Hilfestellungen ausgemacht werden konnten, wurde analog zum RH-Modell versucht, beim Fitting auf vorgegebene Startparameter anderer Modelle aufzusetzen. Dies missglückte jedoch mit den Werten der übrigen GAPC-Modelle. Nachdem auch diverse andere Fittingversuche mit dem `StMoMo()`-Befehl beispielsweise in Form der Variation von Parametereinschränkungen nicht zum Ziel führten, war letztlich der Rückgriff auf die der `fit()`-Funktion zugrundeliegende `gnm()`-Funktion erfolgreich. In Anlehnung an die Ausführungen von Turner/Firth (2020a) konnten mit der hier abgekürzt dargestellten Funktion `gnm(Kx ~ Mult(Alter, Kalenderjahr) - 1, family = "gaussian", ...)` Parameter ermittelt werden, die die Konvergenzprobleme beim Fitting des RUSAM-Modells lösen.¹⁵⁶ In der dargestellten Funktion lassen sich die Kopfschäden K_x mit den multiplikativ verbundenen Parametern $\beta_x^{(1)}$ und $\kappa_t^{(1)}$ – für den Alters- und Kalenderzeiteffekt – in Abhängigkeit bringen, während die Angabe `- 1` die Schätzung eines altersspezifischen Parameters α_x verhindert. Durch das Argument `family = "gaussian"` wird der Parameterschätzung eine Normalverteilung zugrunde gelegt. Die Parameter des auf diese Weise ermittelten Fittings werden anschließend noch entsprechend der in Kapitel 3.6 genannten Nebenbedingung $\sum_x \beta_x^{(1)} = 1$ aufbereitet und als Initialparameter in die `fit()`-Funktion zur Schätzung des RUSAM-Modells übernommen. Prinzipiell wäre es auch möglich gewesen, die gewonnenen Parameter aus der `gnm()`-Funktion direkt für die weiterführenden Analysen einzusetzen. Durch die Umsetzung als Startparameter für das Fitting mit der `fit()`-Funktion werden die Daten jedoch in ein Objekt der Klasse „fitStMoMo“ überführt und können anschließend komfortabel mit den Funktionen des **StMoMo**-Pakets untersucht werden. Dazu gehört unter anderem die Möglichkeit, die geschätzten Parameter direkt mit dem in **StMoMo** integrierten `plot()`-Befehl darzustellen, wie dies in Kapitel 7.1 für die GAPC-Modelle erfolgen wird.

Für die Projektion der Kopfschäden gemäß den Vorgaben in Kapitel 4.4 wird die Funktion `forecast(object, h = 2, kt.method = "mrwd", gc.order = c(0, 1, 0), jumpchoice = "fit")` verwendet. Diese bezieht sich ebenfalls auf Objekte der Klasse „fitStMoMo“ und wurde von Villegas u. a. (2018b) auf Basis des **forecast**-Pakets

¹⁵⁶ Vgl. Turner/Firth (2020a), S. 51 f., vgl. Turner/Firth (2020c), S. 30 ff.

programmiert.¹⁵⁷ Durch das Argument `h = 2` wird die Projektion für das Jahr $t_0 + 2$ festgelegt. Die Argumente `kt.method` sowie `gc.order` mit den hier gewählten Optionen `"mrwd"` bzw. `c(0, 1, 0)` sorgen dafür, dass die Parameter $\kappa_t^{(i)}, i = 1, \dots, N$ und – falls vorhanden – γ_{t-x} jeweils als (multivariate) RWD in die Zukunft projiziert werden. Durch die Angabe des Arguments `jumpchoice` kann vorgegeben werden, ob die Projektionen jeweils durch den letzten Beobachtungswert verlaufen (Option `"actual"`), oder als Startpunkt (Englisch: jump-off point) die Kopfschäden herangezogen werden, die sich auf Basis der vorgenommenen Parameterschätzung ergeben (Option `"fit"`).¹⁵⁸ Prinzipiell lassen sich Argumente für beide Varianten finden. Für die Option `"actual"` spricht, dass der Informationsgehalt des letzten Beobachtungsjahres t_0 möglicherweise am höchsten ist und durch die Festlegung als Ausgangspunkt maßgeblich bei der Projektion berücksichtigt werden sollte. Andererseits ist es auch denkbar, dass in t_0 ein nicht erkanntes atypisches Schadenniveau vorliegt und die Projektionen daher zu hohe oder niedrige Kopfschäden hervorbringen würden. Aus diesem Grund wird in dieser Masterarbeit die Option `"fit"` gewählt, bei der das letzte Beobachtungsjahr nicht überbetont wird und die Variante insofern weniger sensibel auf Ausreißer reagiert. Weitere Ausführungen zur Bedeutung des Startpunktes der Projektion finden sich beispielsweise in Booth u. a. (2006).¹⁵⁹

Entgegen dem Fitting der GAPC-Modelle werden die drei alternativen Modelle zur Kopfschadenprojektion (LCA, FDM und RUSAM2) nicht auf Basis des **StMoMo**-Pakets umgesetzt. Stattdessen wird für die beiden erstgenannten Modelle auf Funktionen des Pakets **demography** und für das RUSAM2-Modell auf standardmäßig in R implementierte Befehle zurückgegriffen. Die Parameterschätzung des bevorzugten LCA-Modells von Christiansen u. a. (2018) erfolgt mit der Funktion `lca()`, die mit dem Argument `adjust = "none"` versehen wird und die letztlich namensgebend für die in dieser Masterarbeit gewählte Abkürzung ist.¹⁶⁰ Die nach dem Fitting als Objekte der Klasse „lca“ vorliegenden Datensätze werden mit dem Befehl `forecast(object, h = 2, se = "innovdrift", jumpchoice = "fit")` in die Zukunft projiziert.¹⁶¹ Die Verwendung der Argumente `h = 2` und `jumpchoice = "fit"` erfolgt dabei analog zum **StMoMo**-Paket, wohingegen die Festlegung der RWD-Projektionsmethode davon abweichend mit dem Argument `se = "innovdrift"` vorgenommen wird.

¹⁵⁷ Vgl. Villegas u. a. (2018b), S. 23 f.

¹⁵⁸ Vgl. Villegas u. a. (2018a), S. 18.

¹⁵⁹ Vgl. Booth u. a. (2006), S. 291 ff.

¹⁶⁰ Vgl. Hyndman u. a. (2019b), S. 21.

¹⁶¹ Vgl. Hyndman u. a. (2019b), S. 15.

Das Fitting des FDM-Modells erfolgt analog zu dem von Piontkowski (2020) gewählten Vorgehen mit der – auch für die Benennung ausschlaggebenden – Funktion `fdm()`.¹⁶² Prinzipiell ist das FDM-Modell darauf ausgelegt, die Testdaten auf der einen Seite möglichst effektiv abzubilden, indem eine ausreichend große Anzahl an Termen $\kappa_j(t)\phi_j(x)$ gewählt wird.¹⁶³ Auf der anderen Seite sollten nicht zu viele Terme genutzt werden, um eine Überparametrisierung zu vermeiden. Entsprechend den Ausführungen in Kapitel 4.6 wählt Piontkowski (2020) in seiner Arbeit $J = 3$, konnte mit dem BaFin-Datensatz aber auch auf einen Testdatenzeitraum der Jahre 1995/1996 bis 2008 zurückgreifen. Bei der Übertragung auf die in dieser Masterarbeit betrachteten, dreijährigen Beobachtungszeiträume zeigte sich, dass die `fdm()`-Funktion in Bezug auf kurze Datenzeiträume deutlich limitiert ist und die im Rahmen der Parameterschätzung eingesetzte Hauptkomponentenanalyse dadurch lediglich auf Basis genau eines Terms $\kappa_j(t)\phi_j(x)$ bzw. mit $J = 1$ durchgeführt werden konnte.¹⁶⁴ Eine Erhöhung von J wäre nur durch eine Verlängerung der Testdatenzeiträume möglich gewesen. Angewendet auf den in (28) vorgestellten Aufbau des FDM-Modells (siehe Kapitel 4.6) hat diese Einschränkung zur Folge, dass jenes sich mit der Festlegung $J = 1$ vom ursprünglichen Modell nach Lee/Carter (1992) ausschließlich durch die Annahme der glatten Funktion $f_t(x)$ unterscheidet.¹⁶⁵ Um zu untersuchen, ob der FDM-Ansatz – trotz dieser wesentlichen Restriktion hinsichtlich der Parameteranzahl – weiterhin verwertbare Projektionsergebnisse liefert, wird dieses Modell im weiteren Verlauf nicht aus den Untersuchungen ausgeschlossen. Die beschriebene Einschränkung wird in der `fdm()`-Funktion mit dem Argument `order = 1` umgesetzt und es resultiert nach dem Fitting ein Objekt der Klasse „fdm“.¹⁶⁶ Auf Basis dessen erfolgt die anschließende Projektion mit dem Befehl `forecast(object, h = 2, method = "rwdrift", jumpchoice = "fit")`, der sich vom `forecast()`-Befehl der anderen Modelle durch das Argument `method = "rwdrift"` für den RWD der $\kappa_j(t)$ unterscheidet, ansonsten aber identisch aufgebaut ist.¹⁶⁷

Zur Implementierung des RUSAM2-Modells wird der in Kapitel 2.5 vorgeschlagene Rechenweg nachempfunden. Herausgehoben werden soll dabei lediglich die in (18)

¹⁶² Vgl. Piontkowski (2020), S. 73, vgl. Piontkowski (2018), vgl. Hyndman u. a. (2019b), S. 11.

¹⁶³ Vgl. Piontkowski (2020), S. 73 ff.

¹⁶⁴ Die der `fdm()`-Funktion zugrundeliegenden Befehle `ftsm()` bzw. `fdpca()` aus dem `ftsa`-Paket führen zum Abbruch der `fdm()`-Funktion, wenn bei Vorliegen von `#t` Beobachtungszeiträumen mehr als `#t - 2` Hauptkomponenten ermittelt werden sollen. Vgl. Hyndman/Shang (2020).

¹⁶⁵ Vgl. Piontkowski (2020), S. 74.

¹⁶⁶ Vgl. Hyndman u. a. (2019b), S. 11.

¹⁶⁷ Vgl. Hyndman u. a. (2019b), S. 13.

dargestellte Extrapolation. Diese wird auf Basis einer linearen Regression mit der Funktion `lm()` und der anschließenden Projektion auf das Jahr $t_0 + 2$ mit dem `predict()`-Befehl durchgeführt. Beide Funktionen sind im R-Standardpaket **stats** enthalten.

6.5 Implementierung der Risikomaße und grafischen Auswertungen in R

Wie bereits in Kapitel 4 beschrieben wurde, werden für die GAPC-Modelle die Residuen der jeweiligen Parameterschätzungen ermittelt. Dies gelingt über die im **StMoMo**-Paket hinterlegte Funktion `residuals()`.¹⁶⁸ Die Darstellung der Residuen wird über den im gleichen Paket festgelegten Befehl `plot()` mit dem Argument `type = "colourmap"` umgesetzt. Darüber hinaus werden für die gefitteten Parameter auch die Risikomaße AIC und BIC mittels der Funktionen `AIC()` und `BIC()` berechnet und die Modelle anschließend – tabellarisch gegenübergestellt – miteinander verglichen.¹⁶⁹ Außerdem werden mit dem standardmäßig in R hinterlegten `rank()`-Befehl Rangfolgen gebildet, um zu bestimmen, welche Modelle für die einzelnen Leistungsbereiche und Auswertungszeiträume die besten Ergebnisse liefern.

Im Gegensatz zur Analyse der Parameterschätzung werden beim Vergleich der Projektionsergebnisse neben den GAPC-Modellen auch die Resultate der Modelle LCA, FDM sowie RUSAM2 mit einbezogen. Für die grafischen Auswertungen wird dabei auf den standardmäßig in R hinterlegten `plot()`-Befehl zurückgegriffen. Die quantitative Bewertung wird auf Basis der Risikomaße MAE und RMSE mit den Funktionen `mae()` und `rmse()` aus dem Paket **Metrics** durchgeführt.¹⁷⁰ Die Ergebnisse werden analog zu AIC und BIC in Tabellenform zusammengefasst und können anschließend anhand ihrer Ränge gegeneinander abgewogen werden. Um beurteilen zu können, ob sich die Ergebnisse in Bezug auf den gesamten Altersbereich ggf. abweichend gegenüber einzelnen Teilaltersbereichen verhalten, wird neben der Untersuchung von $A = \{21, \dots, 80\}$ zusätzlich eine Unterteilung der Alter in $A_1 = \{21, \dots, 40\}$, $A_2 = \{41, \dots, 60\}$ und $A_3 = \{61, \dots, 80\}$ vorgenommen.

¹⁶⁸ Vgl. Villegas u. a. (2018b), S. 19.

¹⁶⁹ Vgl. Villegas u. a. (2018b), S. 21.

¹⁷⁰ Vgl. Hamner/Frasco (2018a), vgl. Hamner/Frasco (2018b), S. 10, vgl. Hamner/Frasco (2018b), S. 19.

7 Auswertung der Fitting- und Projektionsergebnisse

7.1 Analyse der gefitteten Parameter

Nachdem in den vorangegangenen Kapiteln die theoretischen Grundlagen sowie die programmtechnische Umsetzung der Modelluntersuchungen beschrieben wurden, werden im nächsten Schritt die Ergebnisse der Parameterschätzung analysiert und auch die daran anschließenden Kopfschadenprojektionen genauer untersucht. Den Auftakt bildet die Darstellung der gefitteten Parameter, wobei die Auswahl entsprechend den Ausführungen in Kapitel 4.6 auf die GAPC-Modelle eingeschränkt wird. Da sich je Modell durch die drei betrachteten Leistungsbereiche $\{ambulant, stationär, Zahn\}$ sowie die vier dreijährigen Testdatenzeiträume $B_{J_1}, B_{J_2}, B_{J_3}$ und B_{J_4} jeweils zwölf Abbildungen mit einer modellabhängigen Anzahl an Parametern ergeben, erlaubt es der Umfang dieser Masterarbeit nicht, alle Ergebnisse vollständig darzustellen. Stattdessen werden im Folgenden exemplarisch für die Lee-Carter-Familie das LC-Modell (Abb. 5), für die Cairns-Blake-Dowd-Familie das CBD-Modell (Abb. 6) sowie das die Vorzüge der beiden anderen Modelle vereinende PLAT2-Modell (Abb. 7) abgebildet. Die Darstellung beschränkt sich dabei auf den Stationärbereich für den Testdatenzeitraum $B_{J_4} = \{2015, 2016, 2017\}$. Die gefitteten Parameter der übrigen Leistungsbereiche $\{ambulant, Zahn\}$ sowie der weiteren GAPC-Modelle sind in Anhang E veranschaulicht (Abb. 15 bis Abb. 22), werden aber ebenso auf den Zeitraum B_{J_4} begrenzt. Auf die Darstellung der Parameter $\beta_x^{(i)}, i = 0, 1, \dots, N$ wird jeweils verzichtet, wenn es sich bei ihnen entsprechend den Ausführungen in Kapitel 3 um vordefinierte Funktionen handelt und sie damit nicht geschätzt werden müssen.

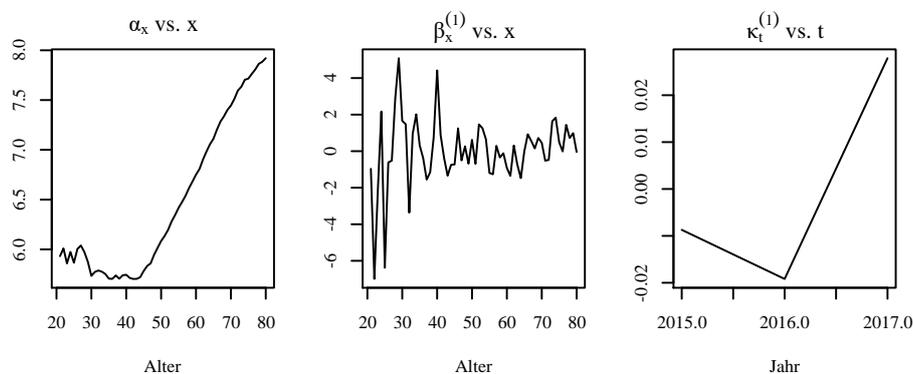


Abb. 5: Gefittete Parameter des LC-Modells auf Basis der Kopfschäden des stationären Leistungsbereichs für den Testdatenzeitraum $B_{J_4} = \{2015, 2016, 2017\}$.¹⁷¹

¹⁷¹ Eigene Darstellung. Datenquelle: RePortal.

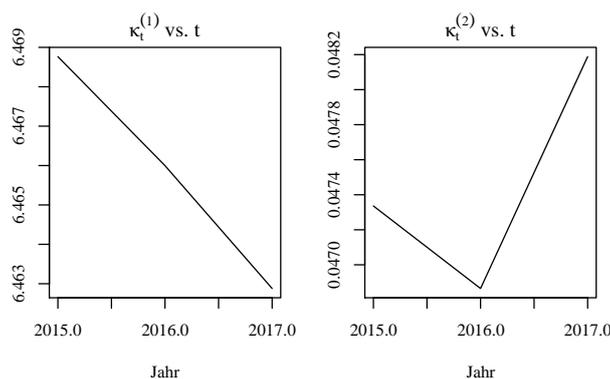


Abb. 6: Gefittete Parameter des CBD-Modells auf Basis der Kopfschäden des stationären Leistungsbereichs für den Testdatenzeitraum $BJ_4 = \{2015, 2016, 2017\}$.¹⁷²

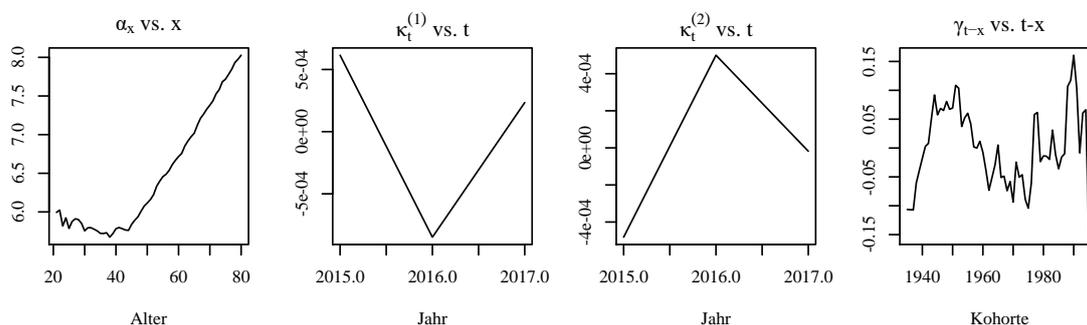


Abb. 7: Gefittete Parameter des PLAT2-Modells auf Basis der Kopfschäden des stationären Leistungsbereichs für den Testdatenzeitraum $BJ_4 = \{2015, 2016, 2017\}$.¹⁷³

Die α_x -Parameter des LC- sowie PLAT2-Modells (Abb. 5 + Abb. 7) spiegeln sehr deutlich den altersabhängigen Verlauf der logarithmierten Kopfschäden wider und bestätigen insofern die theoretischen Ausführungen in Kapitel 4.2. Dies gilt prinzipiell auch für die weiteren in Anhang E dargestellten Modelle und Leistungsbereiche, die die Schätzung eines α_x -Parameter vorsehen. Beispielhaft sei hier auf das APC-Modell (Abb. 17) verwiesen. Größere Abweichungen weist lediglich das PLAT-Modell (Abb. 20) auf, bei dem die α_x entgegen dem eigentlichen Verlauf der Kopfschäden insbesondere in den Leistungsbereichen $\{stationär\}$ und $\{Zahn\}$ mit einem ausgeprägten wellenförmigen Verlauf bestimmt werden.

Die für die Richtung und das Ausmaß der Veränderung der Kopfschäden formgebenden Parameter $\beta_x^{(1)}$ werden für das LC-Modell (Abb. 5 + Anhang E: Abb. 15) sowie die in Anhang E befindlichen RH- und RUSAM-Modelle (Abb. 16 + Abb. 22) im Rahmen der Parameterschätzung mit Ausnahme der in Tab. 7 beschriebenen Nebenbedingungen frei bestimmt. Sowohl beim LC-Modell als auch beim RH-Modell weisen die je Leistungs-

¹⁷² Eigene Darstellung. Datenquelle: RePortal.

¹⁷³ Eigene Darstellung. Datenquelle: RePortal.

bereich und Testdatenzeitraum unterschiedlichen $\beta_x^{(1)}$ dabei nach einem anfänglich stark volatilen Verhalten in den jüngeren Altern im weiteren Verlauf regelmäßig einen Wert nahe 0 auf. Lediglich im Zahnbereich deutet sich in sehr hohen Altern ein Abwärtstrend an, der sich durch das bereits in Abb. 4 andeutungsweise erkennbare, langsam fallende Niveau der Kopfschäden im oberen Altersbereich begründen lässt. Während beim RUSAM-Modell für die Interpretation des $\beta_x^{(1)}$ -Parameters auf das Ende des nächsten Absatzes verwiesen wird, werden die $\beta_x^{(i)}$ der übrigen Modelle nicht weiter erörtert, da sie vorab definierten Funktionen folgen und somit keine vom Fitting bzw. den Daten abhängigen Informationen bereitstellen.

Die Periodenindizes $\kappa_t^{(i)}, i = 1, \dots, N$ stellen zusammen mit den $\beta_x^{(i)}$ die Veränderung der Kopfschäden im Zeitablauf dar. Sie werden entsprechend der Länge der Testdatenzeiträume jedoch nur für jeweils drei Jahre angegeben und wirken sich aufgrund der unterschiedlichen Parameteranzahl je Modell recht unterschiedlich aus. Dies zeigen einerseits die hier im Hauptteil abgebildeten $\kappa_t^{(1)}$ - und $\kappa_t^{(2)}$ -Parameter der Modelle LC, CBD und PLAT2, andererseits aber auch die darüber hinaus in Anhang E dargestellten $\kappa_t^{(i)}$ -Parameter der übrigen Modelle. Insofern fällt es schwer, eine grundlegende Interpretation vorzunehmen. Hingewiesen werden soll allerdings auf die deutlich voneinander abweichenden Wertebereiche der $\kappa_t^{(1)}$ -Parameter zwischen den Modellen, die mit und ohne das Vorhandensein des α_x -Parameters modelliert werden. In Anlehnung an die Ausführungen in Kapitel 4.2 lassen sich $\kappa_t^{(1)}$ sowohl beim CBD-Modell (Abb. 6 + Abb. 18) als auch beim M7-Modell (Abb. 19) aufgrund $\beta_x^{(1)} = 1$ als eine Art mittleres Kopfschadenniveau über alle Alter auffassen und sind hinsichtlich des Wertebereichs vergleichbar mit den α_x -Parametern der anderen Modelle. Die weiteren $\kappa_t^{(i)}$ weisen demgegenüber Ausprägungen deutlich näher zur 0 auf. Eine ähnliche Wirkung wie bei den CBD- und M7-Modellen, allerdings mit einem deutlich abweichenden Wertebereich durch die Multiplikation mit dem nicht vordefinierten $\beta_x^{(1)}$, geht vom $\kappa_t^{(1)}$ -Parameter im RUSAM-Modell (Abb. 22) aus. Auch in diesem Modell lässt sich $\kappa_t^{(1)}$ als Kopfschadenniveau deuten. Ein wesentlicher Unterschied zu den übrigen Modellen zeigt sich jedoch darin, dass die generelle, altersabhängige Entwicklung der Kopfschäden nicht wie beispielsweise im LC- oder RH-Modell durch α_x , sondern $\beta_x^{(1)}$ abgebildet wird.

Bei Modellen mit einem Kohortenparameter γ_{t-x} – wie beispielsweise dem in Abb. 7 dargestellten PLAT2-Modell oder den weiteren in Anhang E befindlichen Modellen

RH (Abb. 16), APC (Abb. 17), M7 (Abb. 19) sowie PLAT (Abb. 20) – lässt sich bei den meisten von ihnen ein wellenförmiger Verlauf beobachten. Dieser beginnt bei den älteren Jahrgängen ab den 1930er Jahren im negativen Bereich, nimmt bei den Kohorten um 1950 einen zwischenzeitlichen Höhepunkt an, sinkt anschließend für die in den 1970er/1980er geborenen Personen wieder ab und steigt für die jüngeren Versicherten mit einem Geburtsjahr um 1990 erneut an. Vor dem Hintergrund geringerer Bestandszahlen im unteren Altersbereich gibt es darüber hinaus insbesondere im Bereich des stationären Leistungsbereichs – und vereinzelt in den Bereichen $\{ambulant, Zahn\}$ – mehrere Parameterschätzungen, die den jüngsten betrachteten Versicherten der mittleren 1990er Jahrgänge einen günstigeren Einfluss in Bezug auf die Kopfschäden beimessen. Berücksichtigung findet dies in einem für diese Jahrgänge abermals fallenden Chartverlauf von γ_{t-x} .

Um beurteilen zu können, wie sich die gefitteten Parameter im Zeitablauf verändern, wurden beispielhaft am LC-Modell sämtliche Parameterschätzungen für die Testdatenzeiträume BJ_1 , BJ_2 , BJ_3 sowie BJ_4 für alle drei Leistungsbereiche aufbereitet (Anhang E: Abb. 23 bis Abb. 25). Dabei zeigt sich, dass die α_x -Parameter jeweils einen sehr ähnlichen Verlauf aufweisen. Mit Abstrichen gilt diese Beobachtung auch für die $\beta_x^{(1)}$ im mittleren und oberen Altersbereich. In den jüngeren sowie sehr hohen Altern werden die Darstellungen allerdings von deutlichen Schwankungen beeinflusst und lassen keinen klaren Trend erkennen. Bei der Beurteilung der $\kappa_t^{(1)}$ -Parameter wird ersichtlich, dass diese nicht nur – wie schon zuvor beschrieben – zwischen den Modellen voneinander abweichen, sondern auch innerhalb eines Modells für verschiedene Testdatenzeiträume jeweils unterschiedliche Verläufe annehmen. Insofern ist eine für mehrere Zeiträume gleichzeitig gültige Analyse nur bedingt möglich und jeder Beobachtungszeitraum sowie Leistungsbereich müsste ggf. isoliert betrachtet werden. Da dadurch jedoch nur noch wenig weiterführende Erkenntnisse gewonnen werden würden, wird darauf vor dem Hintergrund des begrenzten Umfangs dieser Arbeit verzichtet. Das gleiche Argument eines fehlenden Mehrwertes an Informationen gilt für die Interpretation bzw. Darstellung der gefitteten Parameter der weiteren Modelle für die Testdatenzeiträume BJ_1 , BJ_2 und BJ_3 , weshalb lediglich die Ergebnisse für BJ_4 ausführlich untersucht wurden. Losgelöst von der Beurteilung einzelner Parameter soll abschließend angemerkt werden, dass das RH-Modell unter Zugrundelegung dreijähriger Testdatenzeiträume bei Anwendung des in Kapitel 6.4 beschriebenen Workarounds jeweils erfolgreich gefittet werden konnte. Bereits bei einer testweisen Verlängerung des Zeitraums auf vier Kalenderjahre war das Fitting für alle

drei Leistungsbereiche jedoch nicht mehr durchgehend möglich. Ähnliche Probleme ergaben sich ansonsten bei keinem weiteren der betrachteten Modelle.

7.2 Veranschaulichung und Bewertung der Residuen

Wie bereits in Kapitel 4.5 beschrieben wurde, lässt sich mithilfe von Residuen eine Aussage darüber treffen, ob die in den Beobachtungswerten enthaltenen Merkmale adäquat durch die einzelnen Modelle abgebildet werden. Zu favorisieren sind dabei Muster mit zufällig auftretenden positiven und negativen Residuen. Sind hingegen regelmäßige Strukturen zu erkennen, deutet dies auf eine tendenziell schlechtere Anpassungsgüte hin. Entsprechend dieser Vorgaben werden die GAPC-Modelle analysiert und in Abb. 8 die Residuen für jedes Modell exemplarisch auf Basis der Kopfschäden des stationären Leistungsbereichs für den Testdatenzeitraum BJ_4 dargestellt.

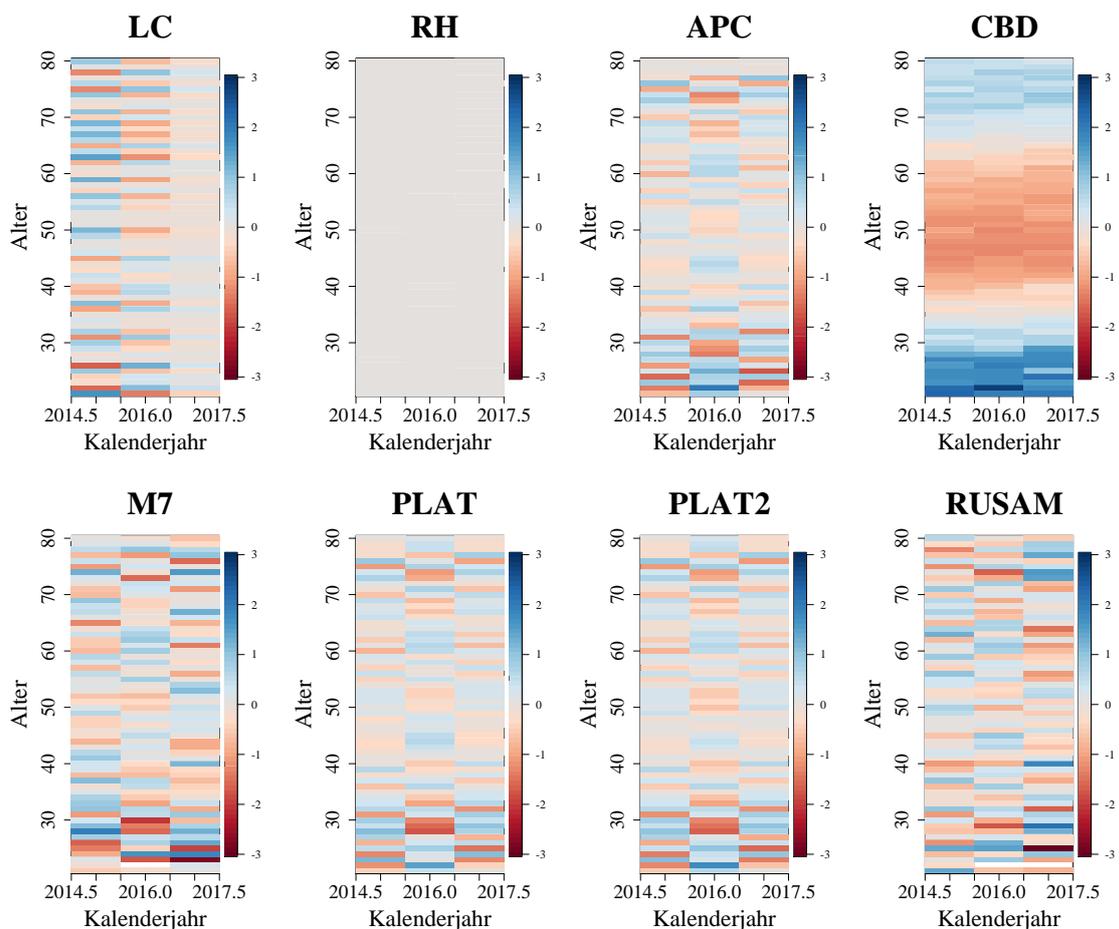


Abb. 8: Residuen der GAPC-Modelle auf Basis der Kopfschäden des stationären Leistungsbereichs für den Testdatenzeitraum $BJ_4 = \{2015, 2016, 2017\}$.¹⁷⁴

¹⁷⁴ Eigene Darstellung. Datenquelle: RePortal.

Bereits auf den ersten Blick werden einige Unterschiede zwischen den einzelnen Modellen sichtbar, wobei sich insbesondere das RH- und CBD-Modell deutlich von den übrigen Modellen abheben. Beim RH-Modell scheint im Rahmen der Parameterschätzung eine perfekte Anpassung an die Ausgangsdaten zu gelingen, was sich in der Gleichheit der gefitteten Kopfschäden zu den tatsächlichen Kopfschäden widerspiegelt. Ohne hierzu auf gesicherte Informationen in der Literatur zurückgreifen zu können, liegt die Vermutung nahe, dass dies das Resultat der beim Fitting frei bestimmbaren, nicht vorab definierten Parameter α_x , $\beta_x^{(1)}$, $\kappa_t^{(1)}$ und γ_{t-x} sein dürfte. Diese werden in der beschriebenen Kombination von keinem anderen der untersuchten Modelle geboten. Obwohl eine perfekte Anpassung vorteilhaft erscheinen mag, ist dieser Umstand hinsichtlich der Annahme zufällig auftretender Schadenereignisse nicht realistisch. Vielmehr dürfte sie die Folge einer Überparametrisierung sein, weshalb die Projektionsergebnisse mit besonderer Vorsicht zu betrachten sind. Die Vermutung der Überparametrisierung deckt sich mit der Beobachtung, dass die Residuen bereits bei einer testweisen Verlängerung der Testdatenzeiträume auf vier oder mehr Jahre von Null abweichen und kein perfektes Fittingergebnis erzielt wurde. Gegenüber dem RH-Modell ist beim CBD-Modell keine perfekte Anpassung der gefitteten Werte an die Beobachtungsdaten auszumachen. Die Residuen bilden vielmehr eine Art wellenförmiges Muster, das sich über die gesamte Altersstruktur erstreckt. Ursächlich hierfür dürfte die mangelnde Altersanpassungsfähigkeit des Modells aufgrund der Abwesenheit des α_x -Parameters sein, welche nicht wie beispielsweise beim M7-Modell durch zusätzliche Parameter ausgeglichen wird.

Im Vergleich mit dem CBD-Modell scheinen die Residuen beim APC-, M7- und RUSAM-Modell sowie den beiden PLAT-Varianten deutlich zufälliger verteilt und damit vorteilhaft in Bezug auf die Anpassungsgüte zu sein. Ansatzweise auffällige Strukturen deuten sich bei den genannten Modellen lediglich im unteren und speziell beim M7- sowie RUSAM-Modell auch im oberen Altersbereich an. Außerdem ist bei den beiden PLAT-Modellen sowie dem APC-Modell noch eine Art – um ein Alter verschobene – Spiegelung zwischen dem ersten und letzten Beobachtungsjahr erkennbar, was möglicherweise auf das Vorhandensein des α_x -Parameters zurückzuführen ist, an dieser Stelle aber nicht abschließend ergründet werden konnte. Besonders interessant ist die Beobachtung, dass die vorigen Schilderungen nicht nur für die Residuen der Parameterschätzung auf Basis der Kopfschäden des stationären Leistungsbereichs gelten, sondern nahezu eins-zu-eins auch auf die in Abb. 26 und Abb. 27 (siehe Anhang F) dargestellten Leistungsbereiche $\{\textit{ambulant}, \textit{Zahn}\}$ übertragen werden können. Darüber hinaus

weisen die Residuen für die einzelnen Leistungsbereiche auch im Zeitablauf sehr ähnliche Muster auf. Dies kann exemplarisch am APC-Modell in Abb. 28 nachvollzogen werden. Für dieses Modell wurden neben den Residuen auf Basis des Testdatenzeitraums BJ_4 zusätzlich die Ergebnisse für die Testdatenzeiträume BJ_1 , BJ_2 und BJ_3 angehängt.

Im Gegensatz zu den über die Leistungsbereiche und Zeit sehr ähnlichen Residuen-Plots der übrigen Modelle stehen die Ergebnisse des LC-Modells, das bislang als einziges Modell noch nicht betrachtet wurde. Die in Abb. 26 links dargestellten Residuen zeigen für alle drei Leistungsbereiche nicht das bevorzugte, zufällige Rauschen. Vielmehr ergibt sich im Ambulant- sowie Stationärbereich im letzten Beobachtungsjahr eine nahezu perfekte Übereinstimmung der gefitteten Werte mit den Echtdaten, während in den jeweils anderen beiden Beobachtungsjahren deutliche Muster erkennbar sind. Im Bereich $\{Zahn\}$ verschieben sich die fast perfekten Residuen ins erste Beobachtungsjahr und das zweite und dritte Jahr deuten vor allem im unteren und oberen Altersbereich verstärkte Abweichungen der gefitteten zu den tatsächlich beobachteten Kopfschäden an. In den übrigen, hier nicht extra dargestellten Testdatenzeiträumen bestätigen sich diese Ergebnisse.

Zum Abschluss der Residuen-Betrachtung soll angemerkt werden, dass mit den APC-, M7-, RUSAM- sowie PLAT-Modellen anscheinend gleich mehrere Modelle dazu in der Lage sind, die in den Beobachtungsdaten enthaltenen Merkmale adäquat wiederzugeben. Auch wenn lediglich dreijährige Testdatenzeiträume betrachtet wurden, weisen jene insbesondere im Vergleich zu den LC- und CBD-Modellen deutlich zufälliger Residuen auf. In Anbetracht dessen kann dies als erstes Indiz gewertet werden, dass die in Kapitel 4.2 angenommene Poissonverteilung nicht generell zur Schätzung unpassender Fittingparameter geführt hat.

7.3 Analyse der Güteparameter AIC und BIC

Die quantitative Analyse der Fittingergebnisse wird mittels der in Kapitel 4.5 beschriebenen Risikomaße AIC und BIC durchgeführt. Die AIC- und BIC-Werte für die einzelnen GAPC-Modelle finden sich aufgeteilt nach Leistungsbereich und Testdatenzeitraum in Tab. 2 und Tab. 3. Angereichert – und dargestellt als Wert in Klammern – wurden diese um den jeweiligen Rang, den ein Modell im Vergleich zu den anderen Modellen einnimmt, wobei kleinere Ergebnisse präferiert werden. In den beiden letzten Zeilen wurden die einzelnen Ränge aufaddiert und auf Basis dessen eine Gesamtreihenfolge abgeleitet.

	AIC	LC	RH	APC	CBD	M7	PLAT	PLAT2	RUSAM
Ambulant	BJ1	2024 (7)	2014 (6)	1918 (3)	4689 (8)	1884 (1)	1920 (4)	1916 (2)	2001 (5)
	BJ2	1951 (5)	2015 (7)	1924 (2)	5668 (8)	1873 (1)	1930 (4)	1926 (3)	1973 (6)
	BJ3	1962 (6)	2016 (7)	1927 (3)	6534 (8)	1918 (1)	1932 (5)	1929 (4)	1921 (2)
	BJ4	1981 (6)	2015 (7)	1919 (2)	7382 (8)	1893 (1)	1925 (4)	1921 (3)	1927 (5)
Stationär	BJ1	1808 (2)	1853 (7)	1832 (6)	9211 (8)	1795 (1)	1831 (4)	1831 (4)	1822 (3)
	BJ2	1792 (4)	1854 (7)	1791 (3)	9652 (8)	1741 (1)	1796 (6)	1793 (5)	1753 (2)
	BJ3	1787 (5)	1856 (7)	1784 (3)	9847 (8)	1736 (2)	1788 (6)	1785 (4)	1728 (1)
	BJ4	1785 (2)	1856 (7)	1814 (5)	10043 (8)	1760 (1)	1814 (5)	1812 (4)	1787 (3)
Zahn	BJ1	1676 (4)	1780 (7)	1674 (3)	2860 (8)	1584 (1)	1680 (6)	1676 (4)	1595 (2)
	BJ2	1669 (3)	1776 (7)	1669 (3)	2536 (8)	1579 (1)	1674 (6)	1671 (5)	1581 (2)
	BJ3	1668 (5)	1771 (7)	1664 (3)	2328 (8)	1572 (1)	1669 (6)	1665 (4)	1577 (2)
	BJ4	1661 (5)	1766 (7)	1659 (3)	2161 (8)	1563 (1)	1663 (6)	1660 (4)	1566 (2)
Summe	(54)	(83)	(39)	(96)	(13)	(62)	(46)	(35)	
Rang	5	7	3	8	1	6	4	2	

Tab. 2: AIC-Werte (mit dem entsprechenden Rang in Klammern) diverser Modelle auf Basis der Kopfschäden der drei Leistungsbereiche {ambulant, stationär, Zahn} für die Testdatenzeiträume $BJ_1 = \{2012, 2013, 2014\}$, $BJ_2 = \{2013, 2014, 2015\}$, $BJ_3 = \{2014, 2015, 2016\}$ und $BJ_4 = \{2015, 2016, 2017\}$.

	BIC	LC	RH	APC	CBD	M7	PLAT	PLAT2	RUSAM
Ambulant	BJ1	2410 (6)	2589 (7)	2308 (3)	4708 (8)	2101 (1)	2319 (5)	2309 (4)	2199 (2)
	BJ2	2337 (6)	2590 (7)	2314 (3)	5687 (8)	2090 (1)	2329 (5)	2319 (4)	2171 (2)
	BJ3	2348 (6)	2591 (7)	2316 (3)	6553 (8)	2135 (2)	2331 (5)	2321 (4)	2119 (1)
	BJ4	2368 (6)	2590 (7)	2309 (3)	7401 (8)	2110 (1)	2324 (5)	2314 (4)	2125 (2)
Stationär	BJ1	2194 (3)	2428 (7)	2222 (4)	9230 (8)	2012 (1)	2230 (6)	2224 (5)	2020 (2)
	BJ2	2179 (3)	2429 (7)	2180 (4)	9671 (8)	1958 (2)	2195 (6)	2185 (5)	1951 (1)
	BJ3	2173 (3)	2430 (7)	2174 (4)	9867 (8)	1953 (2)	2187 (6)	2177 (5)	1926 (1)
	BJ4	2172 (3)	2431 (7)	2204 (4)	10062 (8)	1978 (1)	2213 (6)	2204 (4)	1985 (2)
Zahn	BJ1	2062 (3)	2355 (7)	2064 (4)	2879 (8)	1801 (2)	2079 (6)	2069 (5)	1793 (1)
	BJ2	2055 (3)	2351 (7)	2059 (4)	2555 (8)	1796 (2)	2073 (6)	2063 (5)	1779 (1)
	BJ3	2054 (4)	2346 (7)	2053 (3)	2348 (8)	1789 (2)	2068 (6)	2058 (5)	1775 (1)
	BJ4	2047 (3)	2341 (8)	2049 (4)	2181 (7)	1780 (2)	2063 (6)	2053 (5)	1763 (1)
Summe	(49)	(85)	(43)	(95)	(19)	(68)	(55)	(17)	
Rang	4	7	3	8	2	6	5	1	

Tab. 3: BIC-Werte (mit dem entsprechenden Rang in Klammern) diverser Modelle auf Basis der Kopfschäden der drei Leistungsbereiche {ambulant, stationär, Zahn} für die Testdatenzeiträume $BJ_1 = \{2012, 2013, 2014\}$, $BJ_2 = \{2013, 2014, 2015\}$, $BJ_3 = \{2014, 2015, 2016\}$ und $BJ_4 = \{2015, 2016, 2017\}$.

Die beiden besten Modelle scheinen das M7- sowie das hinsichtlich seiner Prädiktorstruktur sehr simpel aufgebaute RUSAM-Modell zu sein, die sowohl beim AIC als auch BIC

je einmal den Spitzenplatz und einmal die zweite Position belegen. Beschränkt sich der Vergleich nur auf diese beiden Modelle, sind beim M7-Modell durch den deutlichen Vorsprung bei den AIC-Werten leichte Vorteile auszumachen, da das RUSAM-Modell bei den BIC-Ergebnissen nur knapp vor dem M7-Modell liegt. Gefolgt werden die zwei Modelle vom APC-Modell auf dem dritten Rang, den dieses auch in etlichen einzelnen Leistungsbereichen und Testdatenzeiträumen einnimmt. Den geteilten 4./5. Rang belegen das PLAT2- sowie LC-Modell, welche in Teilbereichen besser und in anderen schlechter abschneiden, bei Addition der Summenwerte aus AIC- und BIC-Betrachtung aber ein nahezu identisches Ergebnis erzielen (LC: $54 + 49 = 103$; PLAT2: $46 + 55 = 101$). Mit etwas Abstand folgt auf dem sechsten Platz das PLAT-Modell. Obwohl insbesondere im ambulanten und teilweise auch im stationären Leistungsbereich mehrfach der vierte oder fünfte Platz erzielt wird, dürfte die hohe Anzahl an Fittingparametern ausschlaggebend dafür sein, dass es insgesamt nur für eine Platzierung im hinteren Mittelfeld reicht.

Die Modelle mit den schlechtesten AIC- und BIC-Werten sind das RH- sowie CBD-Modell. Hier bestätigen die beiden Informationskriterien den Eindruck aus Kapitel 7.2, dass die perfekte Anpassung der Residuen beim RH-Modell Folge einer Überparametrisierung sein könnte. Außerdem werden für das ebenfalls schon bei der Analyse der Residuen negativ beurteilte CBD-Modell – verglichen mit den übrigen Modellen – deutlich höhere AIC- und BIC-Werte berechnet. Generell sieht es danach aus, als würden die betrachteten Modelle mit Ausnahme des CBD-Modells durchaus ähnliche AIC- und BIC-Ergebnisse hervorbringen, die sich in einem Wertebereich zwischen 1.500 und 2.500 befinden. Trotz der zuvor festgelegten Platzierungen dürften die Unterschiede in der Anpassungsgüte demnach nicht allzu ausgeprägt sein.

7.4 Grafische Auswertung der Projektionsergebnisse

Nach der Analyse der Parameterschätzung werden im Folgenden die Kopfschadenprojektionen näher betrachtet, die sich auf Basis der gefitteten Parameter jeweils für das Jahr $t_0 + 2$ ergeben. Dabei werden neben den GAPC-Modellen auch die drei Modelle RUSAM2, LCA und FDM in die Untersuchungen eingeschlossen. Zunächst werden die Projektionsergebnisse der einzelnen Modelle visualisiert. Aufgrund des Umfangs dieser Masterarbeit ist es nicht möglich, die Daten sämtlicher Leistungsbereiche und Projektionsjahre wiederzugeben. Stattdessen werden in Abb. 9 – exemplarisch für den stationären Leistungsbereich – die Projektionen in das Jahr 2019 dargestellt, die sich auf Basis der gefitteten Parameter für den Testdatenzeitraum BJ_4 ergeben. Aufgetragen werden die

Ergebnisse gegen die real im Validierungsjahr $VJ_4 = 2019$ eingetretenen PKV-Werte. Die Grafiken links zeigen den Vergleich in absoluten Zahlen, die Grafiken rechts als relative Abweichung zu den Echtdaten. In Anhang G wurden in Abb. 29 und Abb. 30 darüber hinaus die Resultate für die Leistungsbereiche $\{ambulant, Zahn\}$ festgehalten, allerdings ebenfalls beschränkt auf das Jahr 2019.

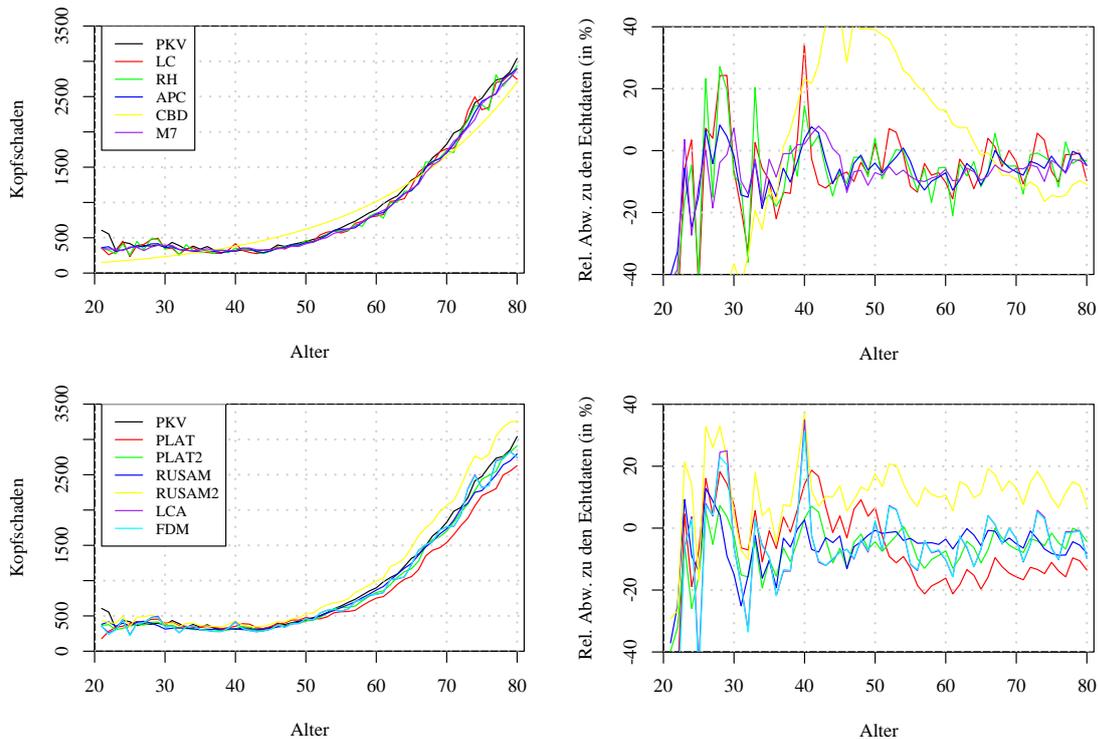


Abb. 9: Vergleich der tatsächlichen Kopfschäden des stationären Leistungsbereichs des PKV-Verbandes aus dem Validierungsjahr $VJ_4 = 2019$ gegen die projizierten Kopfschäden der einzelnen Modelle für das Jahr 2019 auf Basis der gefitteten Parameter für den Testdatenzeitraum $BJ_4 = \{2015, 2016, 2017\}$. Die linke Grafik zeigt die absoluten Werte. Rechts ist die relative Abweichung $(\hat{y}_{x,t} - y_{x,t})/y_{x,t}$ der einzelnen Modelle zu den Echtdaten dargestellt.¹⁷⁵

Auf den ersten Blick zeigen die Abbildungen aller drei Leistungsbereiche auf Basis der absoluten Werte, dass die Modelle den altersabhängigen Verlauf der Kopfschäden grundsätzlich wiedergeben können. Lediglich das CBD-Modell hebt sich in Anbetracht eines sehr geradlinigen Verlaufs in allen Leistungsbereichen merklich von den übrigen Modellen ab. Dass mitunter auch deutliche Unterschiede zwischen den anderen Modellen bestehen, wird erst auf den zweiten Blick durch die relativen Abweichungen zu den PKV-Daten offensichtlich. Im unteren Altersbereich weisen die Projektionen praktisch aller Modelle verglichen mit den Echtdaten eine starke Volatilität auf. Dies ist Folge der für das Fitting der Modelle verwendeten Eingangsdaten, die in jüngeren Altern teils

¹⁷⁵ Eigene Darstellung. Datenquelle: RePortal.

erhebliche Schwankungen aufweisen (vgl. Abb. 2 bis Abb. 4 bzw. Abb. 12 bis Abb. 14). Mit zunehmendem Alter nimmt das Schwankungsverhalten dann deutlich ab, wobei sich das Niveau bei den meisten Modellen in einem Bereich von 0 % bis -20 % einpendelt und speziell im Ambulantbereich sogar ein noch engerer Korridor von -5 % bis -15 % erreicht wird. Stärkere Abweichungen davon weist regelmäßig das bereits erwähnte CBD-Modell auf, wobei beispielsweise im Zahnbereich im hohen Altersbereich auch die Modelle RH, LC und APC den beschriebenen Korridor verlassen. Unterschiede zu den übrigen Modellen und insbesondere zu den Echtdateen weisen ab einem Alter von circa 50 Jahren auch das PLAT- sowie RUSAM2-Modell insbesondere in den Leistungsbereichen $\{stationär, Zahn\}$ auf. Erstaunlich ist dabei auf der einen Seite der Verlauf des PLAT-Modells, dessen Kopfschadenprojektionen sich bis zum Alter von gut 50 Jahren zumindest in der Nähe der Echtdateen befinden, im Anschluss daran gegenüber diesen aber sichtbar abfallen. Auf der anderen Seite heben sich die projizierten Kopfschäden des RUSAM2-Modells im Stationärbereich deutlich von den anderen Modellen ab, indem jene die tatsächlichen PKV-Werte nicht nur nicht unterschätzen, sondern sogar um rund +10 % bis +20 % überschätzen. Darüber hinaus ließen sich bei einer individuellen Betrachtung jedes projizierten Kopfschadenverlaufs und der Hinzunahme der Projektions- bzw. Validierungsjahre $VJ_1 = 2016$, $VJ_2 = 2017$ und $VJ_3 = 2018$ noch weitere Unterschiede herausarbeiten. Darauf soll im Hinblick auf die sich diesem Kapitel anschließende quantitative Untersuchung mittels der in Kapitel 4.5 beschriebenen Risikomaße MAE und RMSE jedoch verzichtet werden. Stattdessen wird der Fokus noch einmal auf die Beobachtung gerichtet, dass für das Jahr 2019 nahezu alle Modelle im Vergleich zu den PKV-Daten (VJ_4) – im ambulanten sowie stationären Leistungsbereich und mit Einschränkungen auch im Zahnbereich – ab dem mittleren Altersbereich durchgehend niedrigere Kopfschäden vorhersagen.

Es ist zu vermuten, dass das erhebliche Unterschätzen der Schadenentwicklung in den Leistungsbereichen $\{ambulant, stationär\}$ dadurch ausgelöst wird, dass sich die Kopfschäden des Testdatenzeitraums $BJ_4 = \{2015, 2016, 2017\}$ verhältnismäßig wenig erhöht oder sogar reduziert haben. Auf dieser Grundlage wird folgerichtig kein starker Anstieg der Kopfschäden für das Jahr 2019 vorhergesagt. Demgegenüber verzeichneten die tatsächlichen Kopfschäden des PKV-Verbandes in VJ_4 im Vergleich zu den Vorjahren einen deutlichen Zuwachs und führen daher zu der großen Diskrepanz zwischen Projektions- und Vergleichsdaten. Ohne dass dieser Sachverhalt hier genauer quantifiziert werden soll, lassen sich sowohl die moderate Kopfschadenentwicklung in den Jahren 2015

bis 2017 als auch der starke Anstieg im Jahr 2019 anschaulich mit den in Anhang C in 3D-Optik abgebildeten Kopfschäden (Abb. 12 + Abb. 13) nachvollziehen. Ähnliche Zusammenhänge können prinzipiell auch für die Testdatenzeiträume BJ_1 , BJ_2 und BJ_3 beobachtet werden und es zeigt sich, dass trotz der – im Verhältnis zu den Bestandsdaten einzelner Versicherungsunternehmen – deutlich größeren Datenbasis des PKV-Verbandes in Bezug auf einzelne Kalenderjahre teils noch erhebliche Schwankungen in den Kopfschäden enthalten sind.

Generell lässt sich festhalten, dass Unterschiede in der Schadenentwicklung zwischen den für die Parameterschätzung verwendeten Jahren $t_0 - 2$ bis t_0 und dem darauffolgenden Zeitraum bis zum Jahr $t_0 + 2$, auf Basis dessen die Projektionen mit den Echtdateen verglichen werden, zu einer gewissen Projektionsunschärfe praktisch aller Modelle führen können. Dies gilt insbesondere vor dem Hintergrund der kurzen Testdatenzeiträume, die nur aus drei Kalenderjahren bestehen. Eine Verringerung der Unschärfe ließe sich möglicherweise durch eine Verlängerung der für das Fitting verwendeten Datenbasis erreichen. Andererseits würden aktuelle Schadenentwicklungen durch die Hinzunahme weiter zurückliegender, ggf. nicht mehr repräsentativer Schadenjahre an Bedeutung verlieren. Aus diesem Grund wird hier keine Erweiterung der Testdatenzeiträume vorgenommen und nicht von den in der Kalkulation regelmäßig eingesetzten dreijährigen Beobachtungszeiträumen abgewichen.

7.5 Analyse der Risikomaße MAE und RMSE

Neben dem grafischen, rein qualitativen Vergleich der Kopfschadenprojektionen mit den PKV-Echtdateen werden in diesem Kapitel die Abweichungen mit den Risikomaßen MAE und RMSE quantifiziert und untersucht, welche Modelle die besten Projektionsergebnisse liefern. In Tab. 4 und Tab. 5 wurden dazu die MAE- und RMSE-Werte aller Modelle, Leistungsbereiche und Projektionsjahre zusammengefasst und als Wert in Klammern notiert, welchen Rang ein Modell in der jeweiligen Auswertungsvariante belegt. Wie schon bei der Ermittlung der Risikomaße AIC und BIC in Kapitel 7.3 werden kleinere Ergebnisse präferiert. In den beiden letzten Zeilen werden erneut die einzelnen Ränge zusammenaddiert und auf dieser Grundlage eine Gesamtposition bestimmt.

MAE	LC	RH	APC	CBD	M7	PLAT	PLAT2	RUSAM	RUSAM2	LCA	FDM	
Ambulant	2016	61 (4)	61 (4)	51 (3)	187 (11)	70 (7)	49 (1)	49 (1)	72 (9)	93 (10)	64 (6)	70 (7)
	2017	117 (7)	121 (9)	101 (4)	207 (11)	98 (2)	124 (10)	100 (3)	118 (8)	73 (1)	116 (6)	111 (5)
	2018	133 (8)	126 (5)	119 (2)	227 (11)	127 (6)	122 (4)	119 (2)	116 (1)	198 (10)	132 (7)	136 (9)
	2019	185 (2)	215 (4)	215 (4)	273 (10)	220 (8)	230 (9)	216 (6)	212 (3)	284 (11)	180 (1)	219 (7)
Stationär	2016	45 (7)	33 (4)	31 (2)	144 (11)	35 (5)	61 (10)	31 (2)	29 (1)	52 (9)	46 (8)	40 (6)
	2017	63 (8)	83 (9)	41 (2)	139 (11)	35 (1)	86 (10)	42 (4)	41 (2)	46 (5)	53 (6)	62 (7)
	2018	52 (5)	56 (8)	50 (2)	160 (11)	55 (7)	64 (9)	50 (2)	47 (1)	106 (10)	53 (6)	50 (2)
	2019	74 (6)	74 (6)	61 (2)	165 (11)	67 (4)	132 (10)	61 (2)	59 (1)	124 (9)	74 (6)	73 (5)
Zahn	2016	17 (6)	22 (10)	10 (1)	34 (11)	11 (3)	16 (5)	10 (1)	18 (9)	14 (4)	17 (6)	17 (6)
	2017	30 (7)	49 (11)	25 (2)	36 (10)	25 (2)	28 (5)	25 (2)	29 (6)	24 (1)	30 (7)	30 (7)
	2018	30 (6)	34 (9)	29 (4)	37 (10)	28 (3)	27 (1)	29 (4)	27 (1)	38 (11)	31 (7)	32 (8)
	2019	37 (5)	37 (5)	35 (2)	45 (9)	35 (2)	51 (10)	35 (2)	34 (1)	69 (11)	38 (7)	38 (7)
Summe	(71)	(84)	(30)	(127)	(50)	(84)	(31)	(43)	(92)	(73)	(76)	
Rang	5	8	1	11	4	8	2	3	10	6	7	

Tab. 4: MAE-Werte (mit dem entsprechenden Rang in Klammern) diverser Modelle auf Basis der Kopfschäden der drei Leistungsbereiche {ambulant, stationär, Zahn} für die Testdatenzeiträume $BJ_1 = \{2012, 2013, 2014\}$, $BJ_2 = \{2013, 2014, 2015\}$, $BJ_3 = \{2014, 2015, 2016\}$ und $BJ_4 = \{2015, 2016, 2017\}$ für den Altersbereich $A = \{21, \dots, 80\}$.

RMSE	LC	RH	APC	CBD	M7	PLAT	PLAT2	RUSAM	RUSAM2	LCA	FDM	
Ambulant	2016	97 (8)	91 (7)	78 (3)	211 (11)	87 (6)	77 (1)	77 (1)	86 (5)	126 (10)	99 (9)	85 (4)
	2017	154 (8)	165 (10)	124 (3)	238 (11)	132 (4)	161 (9)	123 (2)	132 (4)	83 (1)	153 (7)	143 (6)
	2018	172 (8)	163 (4)	146 (1)	286 (11)	163 (4)	151 (3)	146 (1)	165 (6)	245 (10)	170 (7)	176 (9)
	2019	222 (2)	252 (5)	249 (3)	371 (11)	264 (6)	274 (9)	249 (3)	265 (7)	336 (10)	218 (1)	267 (8)
Stationär	2016	63 (7)	46 (5)	45 (3)	163 (11)	44 (2)	81 (10)	45 (3)	41 (1)	71 (9)	65 (8)	58 (6)
	2017	92 (8)	123 (10)	55 (3)	158 (11)	45 (1)	118 (9)	55 (3)	50 (2)	69 (5)	74 (6)	90 (7)
	2018	71 (5)	76 (7)	69 (1)	186 (11)	77 (8)	90 (9)	70 (4)	69 (1)	141 (10)	73 (6)	69 (1)
	2019	103 (6)	100 (5)	81 (2)	195 (11)	89 (4)	182 (10)	80 (1)	87 (3)	162 (9)	103 (6)	104 (8)
Zahn	2016	23 (5)	31 (10)	12 (1)	44 (11)	14 (3)	23 (5)	12 (1)	23 (5)	18 (4)	23 (5)	23 (5)
	2017	38 (8)	67 (11)	28 (3)	51 (10)	27 (1)	34 (6)	28 (3)	33 (5)	27 (1)	38 (8)	37 (7)
	2018	35 (4)	40 (9)	33 (3)	49 (11)	32 (1)	35 (4)	32 (1)	35 (4)	44 (10)	35 (4)	37 (8)
	2019	40 (5)	42 (8)	38 (1)	54 (9)	38 (1)	66 (10)	38 (1)	39 (4)	73 (11)	41 (6)	41 (6)
Summe	(74)	(91)	(27)	(129)	(41)	(85)	(24)	(47)	(90)	(73)	(75)	
Rang	6	10	2	11	3	8	1	4	9	5	7	

Tab. 5: RMSE-Werte (mit dem entsprechenden Rang in Klammern) diverser Modelle auf Basis der Kopfschäden der drei Leistungsbereiche {ambulant, stationär, Zahn} für die Testdatenzeiträume $BJ_1 = \{2012, 2013, 2014\}$, $BJ_2 = \{2013, 2014, 2015\}$, $BJ_3 = \{2014, 2015, 2016\}$ und $BJ_4 = \{2015, 2016, 2017\}$ für den Altersbereich $A = \{21, \dots, 80\}$.

Beim Vergleich der einzelnen MAE- und RMSE-Werte zeigt sich, dass diese in Abhängigkeit von Leistungsbereich und Testdatenzeitraum teilweise deutlich voneinander abweichen und sich hinsichtlich der Einzelränge keines der Modelle eindeutig gegenüber den übrigen durchsetzen kann. Daher wird auf die Gesamtränge der beiden Kennzahlen

zurückgegriffen, bei denen das PLAT2- sowie das APC-Modell mit jeweils einem ersten und einem zweiten Platz die besten Ergebnisse aufweisen können. Dieser positive Eindruck wird auch durch die Einzelresultate bestätigt und die Modelle belegen – bis auf eine Ausnahme des PLAT2-Modells bei den MAE-Werten – jeweils einen der ersten vier Ränge mit insgesamt acht (PLAT2-Modell) bzw. fünf Spitzenplätzen (APC-Modell).

Auf der geteilten dritten Position reihen sich das M7- sowie RUSAM-Modell ein, die zwischen den Leistungsbereichen durchaus unterschiedlich abschneiden. Verhältnismäßig gut im Vergleich zu den anderen Modellen zeigt sich das M7-Modell beispielsweise im Zahnbereich, während im ambulanten Leistungsbereich nur mittelmäßige Ergebnisse erzielt werden. Die Stärken des RUSAM-Modells liegen insbesondere im stationären Leistungsbereich mit fünf von acht möglichen ersten Plätzen in der Einzelwertung. Auch wenn das RUSAM-Modell in der Gesamtbetrachtung keinen der ersten beiden Ränge belegt, ist der geteilte dritte Platz vor dem Hintergrund der simplen Prädiktorstruktur ein sehr beachtliches Ergebnis. Insbesondere kann es sich wie die anderen drei genannten Modelle deutlich von dem auf dem zehnten bzw. neunten Rang (MAE bzw. RMSE) geführten RUSAM2-Modell abheben. Letzteres kann zwar speziell für das Projektionsjahr 2017 in den Leistungsbereichen $\{ambulant, Zahn\}$ mit einigen Spitzenpositionen aufwarten, belegt ansonsten aber zusammen mit dem bereits beim Fitting unterlegenen CBD-Modell regelmäßig einen der letzten beiden Plätze.

Nicht so schlecht wie das RUSAM2-Modell, aber dennoch nur mit einem der Ränge 5 bis 7 abschneidend, sortieren sich die LCA- und FDM-Modelle der Autoren Christiansen u. a. (2018) und Piontkowski (2020) sowie das LC-Modell im Mittelfeld ein. Dass die Ergebnisse dabei so eng zusammen liegen, ist wenig überraschend, da alle drei Modelle in Folge der deutlichen Einschränkung des FDM-Modells in Kapitel 6.4 eine sehr ähnliche Struktur aufweisen. Unter der Prämisse, dass die von Christiansen u. a. (2018) zugrunde gelegte Normalverteilung sinnvolle Projektionsergebnisse ermöglicht, bestätigt sich durch die nahezu identischen MAE- und RMSE-Werte des LC- sowie LCA-Modells außerdem der positive Eindruck in Bezug auf die in dieser Masterarbeit verwendete Poissonverteilungsannahme.¹⁷⁶ Nachdem in Kapitel 7.2 anhand der Residuen bereits festgestellt wurde, dass die Poissonverteilung zumindest in der kurzen Frist nicht generell zur Schätzung unpassender Fittingparameter führen sollte, scheint diese Beobach-

¹⁷⁶ Vgl. Christiansen u. a. (2018), S. 191.

tung – angesichts der vergleichbaren MAE- und RMSE-Ergebnisse – auch auf die Projektion zukünftiger Kopfschäden übertragbar zu sein.

Obwohl mit dem PLAT-Modell prinzipiell die Vorzüge verschiedener Modelle vereint werden sollen, landet es bei der MAE- und RMSE-Auswertung jeweils nur auf dem achten Gesamtrang und ist damit ähnlich schlecht wie das RH-Modell. Dieses belegt bei der MAE-Berechnung ebenfalls Platz 8 und bei den RMSE-Werten mit einer strengeren Beachtung von Ausreißern sogar nur Position 10. Gefolgt wird dieses nur noch vom CBD-Modell, welches das Modell mit den schlechtesten Projektionsergebnissen darstellt und auch hinsichtlich der einzelnen MAE- und RMSE-Werte insbesondere in den Leistungsbereichen $\{ambulant, stationär\}$ deutlich von den übrigen Modellen abweicht.

Für die Ermittlung der MAE- und RMSE-Werte in Tab. 4 und Tab. 5 wurden die Projektionsergebnisse des gesamten Altersbereichs $A = \{21, \dots, 80\}$ zugrunde gelegt. Dies erlaubt jedoch keine Aussage darüber, ob einzelne Modelle in bestimmten Altersbereichen nicht besser abschneiden können als bei einer Gesamtbetrachtung über alle Alter. Daher wurde die MAE- und RMSE-Ermittlung entsprechend der in Kapitel 6.5 vorgestellten Unterteilung mit den Altersbereichen $A_1 = \{21, \dots, 40\}$, $A_2 = \{41, \dots, 60\}$ und $A_3 = \{61, \dots, 80\}$ wiederholt und die Ergebnisse in Tab. 10 bis Tab. 15 in Anhang H dargestellt. Hier zeigt sich, dass das zuvor favorisierte PLAT2-Modell auch auf Ebene der kürzeren (Teil-)Altersbereiche – in der Gesamtbetrachtung über alle Leistungsbereiche und Testdatenzeiträume – sowohl für die MAE- als auch die RMSE-Berechnungen immer die besten Projektionsergebnisse liefert. Auch beim APC-Modell ergeben sich auf dieser Ebene im Vergleich zu den übrigen Modellen sehr gute Resultate und es belegt entweder zusammen mit dem PLAT2-Modell Rang 1 oder den Folgerang. Einzig bei den MAE-Werten für Altersbereich A_1 wird das APC-Modell durch die minimal besseren Ergebnisse des RUSAM-Modells übertroffen. Das RUSAM-Modell selbst kommt ansonsten aber nicht über Position 4 hinaus. Etwas besser präsentiert sich demgegenüber das Modell M7, das bei den MAE-Werten für Altersbereich A_2 zusammen mit den APC- und PLAT2-Modellen auf Rang 1 vorrückt. Neben einem zweiten Platz bei den RMSE-Werten für den Altersbereich A_1 reicht es für das M7-Modell sonst aber maximal für Platz 3. Auch wenn bei den übrigen Modellen teilweise kleinere Positionswechsel stattfinden, ergeben sich durch die Aufteilung in drei Altersbereiche keine maßgeblichen Verbesserungen, die eine Aufnahme zu den bevorzugten Modellen rechtfertigen. Daher werden ihre Ergebnisse hier nicht weiter beschrieben. Es soll lediglich noch festgehalten werden, dass die speziell zur Modellierung der höheren Alter konstruierten Modelle der CBD-Familie keine

nennenswerten Vorteile bei den Ergebnissen des oberen Altersbereichs aufweisen. Die Ursachen hierfür können der für diese Arbeit verwendete Datensatz oder auch die kurzen Testdaten- und Projektionszeiträume sein, wurden hier aber nicht weiter untersucht.

7.6 Auswahl des Modells mit den besten Projektionseigenschaften

Das erste Hauptziel dieser Masterarbeit ist die Identifizierung von Modellen, die – verglichen mit dem häufig für die Kalkulation verwendeten Rusam-Ansatz bzw. dem RUSAM2-Modell – zu einer Verbesserung von kurzfristigen Kopfschadenprojektionen führen können. Die dazu vorgenommenen Untersuchungen haben gezeigt, dass keines der betrachteten Modelle sowohl bei der Analyse der Parameterschätzung als auch bei den anschließenden Projektionen die mit Abstand besten Ergebnisse liefern konnte. Dennoch lässt sich ein Modell identifizieren, das insbesondere aufgrund seiner Projektionseigenschaften Vorteile gegenüber den anderen aufweist.

Bei der Untersuchung des Fittings zeichnete sich ab, dass die Modelle M7 und RUSAM entsprechend den Informationskriterien AIC und BIC die Spitzenplätze belegen, gefolgt vom APC- und PLAT2-Modell. Bei den Residuen deuten prinzipiell alle vier Modelle eine adäquate Wiedergabe der in den Beobachtungsdaten enthaltenen Merkmale an. Die übrigen GAPC-Modelle (LC, RH, CBD, PLAT) liefern bei den aufgeführten Kriterien mitunter deutlich schlechtere Ergebnisse, sodass die vier erstgenannten Modelle für den Fall vergleichbarer Projektionsergebnisse zu präferieren gewesen wären. Dies ist jedoch nicht notwendig, da die Modelle M7, RUSAM, APC sowie PLAT2 auch bei der Analyse der Projektionsergebnisse in Bezug auf die Kennzahlen MAE und RMSE die besten Resultate erzielen. Hier setzen sie sich jedoch nicht nur gegen die Modelle LC, RH, CBD und PLAT durch, sondern verweisen auch die zusätzlich betrachteten LCA-, FDM- sowie RUSAM2-Modelle auf einen der Folgeränge. Demnach verbleiben für die Entscheidung des zu favorisierenden Modells nur noch die Kandidaten M7, RUSAM, APC sowie PLAT2. Diese Auswahl wird im nächsten Schritt auf das APC- sowie PLAT2-Modell eingegrenzt, da beide bei der Betrachtung der MAE- und RMSE-Werte über die gesamte Altersstruktur die besten Projektionsergebnisse aufweisen können. Da das PLAT2-Modell darüber hinaus auch in allen Teilaltersbereichen jeweils die Spitzenposition hinsichtlich dieser Kriterien einnimmt, wird jenes verglichen mit den übrigen untersuchten Sterblichkeitsmodellen insgesamt als das am besten zur Kopfschadenprojektion geeignete Modell bestimmt.

In Bezug auf den in dieser Masterarbeit verwendeten Datensatz mit weiblichen und männlichen Vollkostenversicherten, kumuliert über alle PKV-Unternehmen, kann mit dem PLAT2-Modell ein Modell identifiziert werden, dass sich gegenüber allen anderen hier betrachteten Modellen durchsetzen kann. Insbesondere liefert es bessere Projektionsergebnisse als der häufig für die Kalkulation verwendete Rusam-Ansatz. Dabei gilt es jedoch anzumerken, dass sich dieses Resultat nicht zwangsläufig auch für andere Versichertenbestände, insbesondere mit geringeren Versichertenanzahlen und einer ggf. größeren Volatilität der Kopfschäden, einstellen muss. Vor der Übernahme des PLAT2-Modells auf andere Versichertenkollektive – beispielsweise mit einer Einschränkung der Bestandsdaten auf einzelne Versicherungsunternehmen, einzelne oder zusammengehörige Tarife, einzelne Geschlechter usw. – sollten daher die Projektionseigenschaften des Siegermodells erneut gegen die übrigen in dieser Arbeit betrachteten Modelle verifiziert werden. Gleiches gilt für die Übertragung auf einen anderen Versichertenkreis, wenn nicht wie in dieser Arbeit Vollkostenversicherte, sondern z. B. Beihilfeversicherte (zumeist Beamte) betrachtet werden, welche ebenfalls durch die PKV-Unternehmen abgesichert werden.¹⁷⁷

Im Rahmen dieser Arbeit wurde der Gesamtdatensatz testweise auf die männlichen Vollkostenversicherten eingegrenzt und die in den vorigen Kapiteln beschriebene Untersuchung auf Basis der reduzierten Bestandsgröße erneut durchgeführt. Dabei konnte sich trotz der im Vergleich zum zusammengefassten Männer- und Frauenbestand etwas höheren Volatilität der Kopfschäden wieder das PLAT2-Modell als das am besten für die Projektion von Kopfschäden geeignete Modell auszeichnen. Gestützt auf diesen positiven Untersuchungsausgang wird im nächsten Kapitel auf Grundlage des PLAT2-Modells – und im Hinblick auf das zweite Hauptziel dieser Arbeit – eine in die Zukunft gerichtete Kopfschadenprojektion vorgenommen, wobei die Ergebnisse um Vorhersagebereiche zur Quantifizierung der Vorhersagegenauigkeit erweitert werden.

¹⁷⁷ Vgl. § 2 BBhV.

8 Zukunftsgerichtete Kopfschadenprojektion auf Basis des PLAT2-Modells

8.1 Kopfschadenprojektion unter Anwendung von Bootstrap-Techniken

Um eine in die Zukunft gerichtete Kopfschadenprojektion vorzunehmen, wird zunächst der Beobachtungszeitraum $B_{J_5} = \{2017, 2018, 2019\}$ definiert, der die letzten drei zur Verfügung stehenden Beobachtungsjahre enthält. Auf Basis dessen erfolgt – unter Zugrundelegung des PLAT2-Modells – eine Projektion der Kopfschäden für das Jahr $t_0 + 2$ bzw. 2021. Dies lässt sich entsprechend den Vorgaben in den Kapiteln 4.3 und 4.4 analog zum bisherigen Vorgehen umsetzen. Nach dem Fitting der entsprechenden Parameter kann demnach eine Punktprojektion für das Jahr 2021 durchgeführt werden. Dadurch ist es jedoch nicht möglich, Aussagen zur Vorhersagegenauigkeit bzw. zur Unsicherheit der Kopfschadenprojektion zu treffen.¹⁷⁸ Dafür werden typischerweise Vorhersageintervalle verwendet, die sich für den in dieser Arbeit betrachteten Anwendungsfall allerdings nicht analytisch ermitteln lassen. Ursächlich hierfür sind zwei Arten von Unsicherheiten. Einerseits beeinflussen Stichprobenschwankungen die Bestimmung der Parameter $\alpha_x, \kappa_t^{(1)}, \kappa_t^{(2)}, \gamma_{t-x}$ des PLAT2-Modells. Andererseits besteht die Gefahr von Projektionsfehlern auf Basis der von t abhängigen Parameter $\kappa_t^{(1)}, \kappa_t^{(2)}, \gamma_{t-x}$. Erschwerend hinzu kommt der Umstand, dass sich die im Rahmen der Projektion gesuchten zukünftigen Kopfschäden $E[Y_{x,t}]$ als Ergebnis nicht-linearer Funktionen der Modellparameter sowie der ARIMA-Parameter ergeben. Aus diesen Gründen wird zur Erzeugung von Vorhersageintervallen auf Bootstrap-Techniken zurückgegriffen, die sich auf das sogenannte Resampling stützen. Dabei wird aus dem gegebenen Datensatz eine wiederholte Ziehung von Stichproben vorgenommen, mithilfe derer die Variabilität der interessierenden Kopfschäden beurteilt werden kann.

Durch die Anwendung von Bootstrap-Verfahren ist es möglich, eine Anzahl von B Stichproben zu generieren. Auf Basis derer lassen sich B Parametersets $\alpha_x, \kappa_t^{(1)}, \kappa_t^{(2)}, \gamma_{t-x}$ ableiten, die im Folgenden durch die Notation $\alpha_x^b, \kappa_t^{(1),b}, \kappa_t^{(2),b}, \gamma_{t-x}^b$, $b = 1, \dots, B$ unterschieden werden.¹⁷⁹ Prinzipiell stehen diverse Bootstrap-Verfahren zur Verfügung. Dazu gehören beispielsweise das von Koissi u. a. (2006) vorgestellte Residuen-Bootstrapping, bei dem ein Resampling der Residuen $r_{x,t}$ durchgeführt wird.¹⁸⁰ Ergebnis sind B Replikationen $r_{x,t}^b$, $b = 1, \dots, B$, aus denen mittels der Umkehrung der Formel (24) in

¹⁷⁸ Vgl. Brouhns u. a. (2005), S. 217 f., vgl. Christiansen u. a. (2018), S. 197.

¹⁷⁹ Vgl. Villegas u. a. (2018b), S. 30 f.

¹⁸⁰ Vgl. Koissi u. a. (2006), S. 12, vgl. Villegas u. a. (2018b), S. 31.

Kapitel 4.5 die entsprechenden $y_{x,t}^b$, $b = 1, \dots, B$ abgeleitet und anschließend die Parameter $\alpha_x^b, \kappa_t^{(1),b}, \kappa_t^{(2),b}, \gamma_{t-x}^b$, $b = 1, \dots, B$ geschätzt werden. Für weitere Details zu diesem Verfahren sei auf Koissi u. a. (2006) verwiesen. Eine andere Möglichkeit stellt das semiparametrische Bootstrap-Verfahren nach Brouhns u. a. (2005) dar.¹⁸¹ Bei diesem Verfahren wird auf Basis der Poissonverteilung mit Mittelwert $y_{x,t}$ ein Resampling der tatsächlichen Kopfschäden vorgenommen, aus dem die Replikationen $y_{x,t}^b$, $b = 1, \dots, B$ hervorgehen. Diese werden anschließend – analog zum Residuen-Bootstrapping – dazu genutzt, B Parametersets $\alpha_x^b, \kappa_t^{(1),b}, \kappa_t^{(2),b}, \gamma_{t-x}^b$, $b = 1, \dots, B$ zu schätzen. Anstatt beim Resampling gemäß Brouhns u. a. (2005) auf die tatsächlichen Beobachtungswerte zurückzugreifen, ist es auch möglich, bereits gefittete Daten als Ausgangspunkt zu nutzen. Dies praktizieren beispielsweise Renshaw/Haberman (2008).¹⁸² Darüber hinaus kann das Bootstrapping beispielsweise auch anhand einer Monte-Carlo-Simulation durchgeführt werden. Auf diese Technik wird aus Gründen des Umfangs dieser Arbeit hier aber nicht näher eingegangen. Stattdessen sei auf die Ausführungen von Brouhns u. a. (2002b) verwiesen.¹⁸³

Bei der Entscheidung für eine geeignete, aber zugleich auch mit einem begrenzten zeitlichen Aufwand umsetzbare Bootstrap-Methode wurden die Verfahren näher betrachtet, die das schon zuvor genutzte R-Paket **StMoMo** bereitstellt. Darin sind sowohl Funktionen zur Umsetzung des semiparametrischen aber auch des Residuen-Bootstrappings enthalten. Da sich bei der Anwendung zeigte, dass beide Varianten für den untersuchten Datensatz praktisch gleiche Ergebnisse liefern, fiel die Wahl auf das etwas intuitivere Vorgehen beim semiparametrischen Bootstrapping. Bei diesem zielt das Resampling direkt auf Kopfschäden und nicht erst auf zunächst noch umzurechnende Residuen ab.

Die praktische Umsetzung des semiparametrischen Bootstrappings auf Basis des R-Pakets **StMoMo** erfolgt über die Funktion `bootstrap()`.¹⁸⁴ Diese wird mit gefitteten Objekten der Klasse „fitStMoMo“ befüllt, die sich im Rahmen des Fitting-Prozesses auf Grundlage der Beobachtungswerte des Beobachtungszeitraums BJ_5 ergeben. Des Weiteren wird der `bootstrap()`-Befehl durch die Argumente `type = "semiparametric"` und `deathType = c("observed")` auf die Verwendung des semiparametrischen Bootstrapping auf Basis des Resamplings der tatsächlichen Beobachtungswerte ausgerichtet. Die

¹⁸¹ Vgl. Brouhns u. a. (2005), S. 220 f., vgl. Villegas u. a. (2018b), S. 30 f.

¹⁸² Vgl. Renshaw/Haberman (2008), S. 800 ff.

¹⁸³ Vgl. Brouhns u. a. (2002b), S. 105 ff.

¹⁸⁴ Vgl. Villegas u. a. (2018b), S. 32, vgl. Villegas u. a. (2018a), S. 4 ff.

Anzahl der Simulationen wird mit $B = 1.000$ festgesetzt und durch das Argument `nBoot = 1000` berücksichtigt. Ergebnis des Bootstrappings sind – wie zuvor beschrieben – die Parameter $\alpha_x^b, \kappa_t^{(1),b}, \kappa_t^{(2),b}, \gamma_{t-x}^b, b = 1, \dots, B$. Diese werden dazu genutzt, um zukünftige Kopfschäden $\hat{y}_{x,t}^b, b = 1, \dots, B$ zu simulieren. Im **StMoMo**-Paket wird dies mit der Funktion `simulate()` ermöglicht.¹⁸⁵ Villegas u. a. (2018b) adaptieren dabei zur Projektion der $\kappa_t^{(1),b}, \kappa_t^{(2),b}$ den Algorithmus 2 von Haberman/Renshaw (2009), der in dieser Arbeit jedoch nicht weiter betrachtet werden soll. Für die Simulation der Kohortenparameter γ_{t-x}^b greifen Villegas u. a. (2018b) mit ihrer `simulate()`-Funktion auf den `simulate()`-Befehl für Objekte der Klasse „Arima“ aus dem Paket **forecast** zurück. Die Simulation wird mit den Argumenten `h = 2, gc.order = c(0,1,0), jumpchoice = "fit"` sowie `kt.method = "mrwd"` durchgeführt. Diese können analog zur `forecast()`-Funktion in Kapitel 6.4 interpretiert werden. Damit einher geht die Festlegung, dass bei der Simulation entsprechend diesem Vorgehen – vor dem Hintergrund eines kurzen Testdaten- und Projektionszeitraums – wieder ein (multivariater) RWD für die $\kappa_t^{(1),b}, \kappa_t^{(2),b}$ bzw. γ_{t-x}^b genutzt wird. Darüber hinaus wird das Argument `nsim = 1` gesetzt, um für jedes durch das Bootstrapping erhaltene Parameterset genau eine Simulation durchzuführen. Daraus resultieren insgesamt B Kopfschadenprojektionen $\hat{y}_{x,t}^b, b = 1, \dots, B$.

Zur theoretischen Herleitung der zu Beginn dieses Kapitels genannten Vorhersageintervalle wird nun angenommen, dass die zuletzt genannten B Kopfschäden $\hat{y}_{x,t}^b, b = 1, \dots, B$, die sich auf die gesuchten zukünftigen $E[Y_{x,t}]$ beziehen, auf Basis des Bootstrappings simuliert wurden.¹⁸⁶ Das $(1 - 2\alpha)$ -Perzentil-Intervall für $E[Y_{x,t}]$ lässt sich dann – in Anlehnung an die Schreibweise von Christiansen u. a. (2018) – darstellen als $(\hat{y}_{x,t}^{b(\alpha)}, \hat{y}_{x,t}^{b(1-\alpha)})$, $0 < \alpha < 0,5$. $\hat{y}_{x,t}^{b(\zeta)}$ repräsentiert dabei das $100 \times \zeta$ ste empirische Perzentil der durch das Bootstrapping erzeugten $\hat{y}_{x,t}^b$. Dies ist gleichbedeutend mit dem $B \times \zeta$ sten Wert aus der Liste, die sich durch das größtmäßig aufsteigende Sortieren der Replikationen $\hat{y}_{x,t}^b, b = 1, \dots, B$ ergibt. Werden beispielsweise wie bei der aktuellen Untersuchung $B = 1.000$ Bootstrap-Durchgänge durchgeführt und die sich durch die anschließende Simulation ergebenden $\hat{y}_{x,t}^b$ sortiert, entsprechen die empirischen 75 %- bzw. 25 %-Perzentile den 750sten bzw. 250sten Werten aus der sich ergebenden Liste. Durch

¹⁸⁵ Vgl. Villegas u. a. (2018b), S. 26 ff., vgl. Villegas u. a. (2018a), S. 41 f., vgl. Haberman/Renshaw (2009), S. 264 ff.

¹⁸⁶ Vgl. Pitacco et al. (2009), S. 232, vgl. Christiansen u. a. (2018), S. 198.

eine entsprechende Auswahl bestimmter Perzentil-Intervalle lassen sich auf diese Weise Vorhersageintervalle ableiten. Diese werden in Kapitel 8.2 mit der im R-Paket **fanplot** enthaltenen Funktion `fan()` in Form eines sogenannten Fan-Charts visualisiert. Die darzustellenden Intervalle können mit dem Argument $probs = c(\dots)$ vorgegeben werden.

8.2 Visualisierung der Bootstrap-Ergebnisse

Entsprechend den theoretischen Ausführungen in Kapitel 8.1 wird auf Basis der Kopfschäden des Testdatenzeitraums BJ_5 und dem PLAT2-Modell für die Leistungsbereiche $\{ambulant, stationär, Zahn\}$ eine Parameterschätzung durchgeführt und eine Punktprojektion für das Jahr 2021 vorgenommen. Außerdem erfolgt ein Bootstrapping mit $B = 1.000$ Replikationen, auf Grundlage dessen B Parametersets $\alpha_x^b, \kappa_t^{(1),b}, \kappa_t^{(2),b}, \gamma_{t-x}^b, b = 1, \dots, B$ geschätzt werden. Letztere werden dazu verwendet, zukünftige Kopfschäden $\hat{y}_{x,t}^b, b = 1, \dots, B$ zu simulieren. Diese werden zusammen mit den Ergebnissen der Punktprojektion in Abb. 10 für die Leistungsbereiche $\{ambulant, stationär\}$ und in Abb. 11 für den Leistungsbereich $\{Zahn\}$ dargestellt. Die Vorhersagen für $E[Y_{x,t}]$ sind dabei jeweils als zentrale, rote Linie innerhalb der einzelnen Kopfschadenverläufe abgebildet. Die sie umgebenden Schattierungen spiegeln von innen nach außen betrachtet die Projektionsintervalle $(\hat{y}_{x,t}^{b(0,250)}, \hat{y}_{x,t}^{b(0,750)})$, $(\hat{y}_{x,t}^{b(0,100)}, \hat{y}_{x,t}^{b(0,900)})$ und $(\hat{y}_{x,t}^{b(0,025)}, \hat{y}_{x,t}^{b(0,975)})$ wider. Die Intervalle um die wahrscheinlicheren Projektionen sind am dunkelsten eingefärbt, weniger wahrscheinliche entsprechend transparenter. Diese können je nach Anwendungszweck frei gewählt werden.

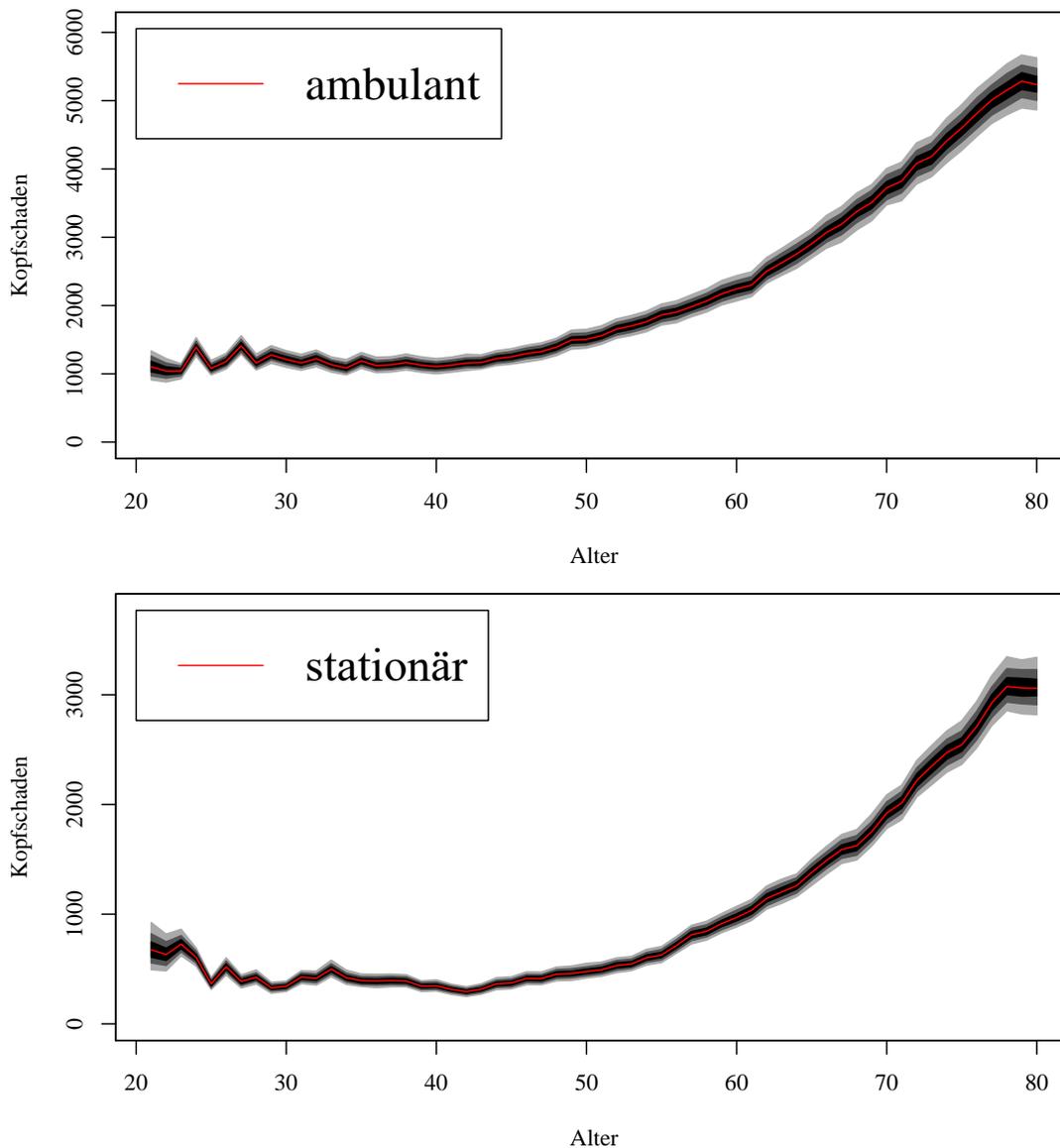


Abb. 10: Fan-Charts der für das Jahr 2021 projizierten Kopfschäden der Leistungsbereiche {ambulant, stationär}.¹⁸⁷

Die Projektionsintervalle für die Kopfschäden der Leistungsbereiche {ambulant, stationär} in Abb. 10 deuten darauf hin, dass insbesondere im unteren Altersbereich zwischen 25 und 35 Jahren größere Sprünge in den simulierten Kopfschäden auftreten. Hier scheint der glättende Effekt durch das PLAT2-Modell nicht ausreichend zu sein, um die in den Beobachtungsdaten in natürlicher Weise vorliegenden Schwankungen insbesondere bei geringeren Beständen effektiv auszugleichen. Sollte das Modell beispielsweise im Bereich der Kalkulation eingesetzt werden, wäre zu überlegen, zumindest in diesem Altersbereich eine vorgelagerte Glättung der Beobachtungswerte beispielsweise

¹⁸⁷ Eigene Darstellung. Datenquelle: RePortal.

mit dem Whittaker-Henderson-Verfahren vorzunehmen. Auffallend sind außerdem die breiter werdenden Projektionsintervalle im oberen Altersbereich. Diese lassen sich zum einen durch abnehmende Bestände, zum anderen aber auch durch eine höhere Leistungsanspruchnahme erklären, da aus dem Zusammenspiel dieser beiden Effekte – gemessen in absoluten Zahlen – größere Zufallsschwankungen resultieren. Insgesamt zeigt sich, dass nicht nur die Form der Kopfschadenverläufe, sondern auch die relativen Schwankungsbreiten des ambulanten und des stationären Leistungsbereichs durchaus vergleichbar erscheinen.

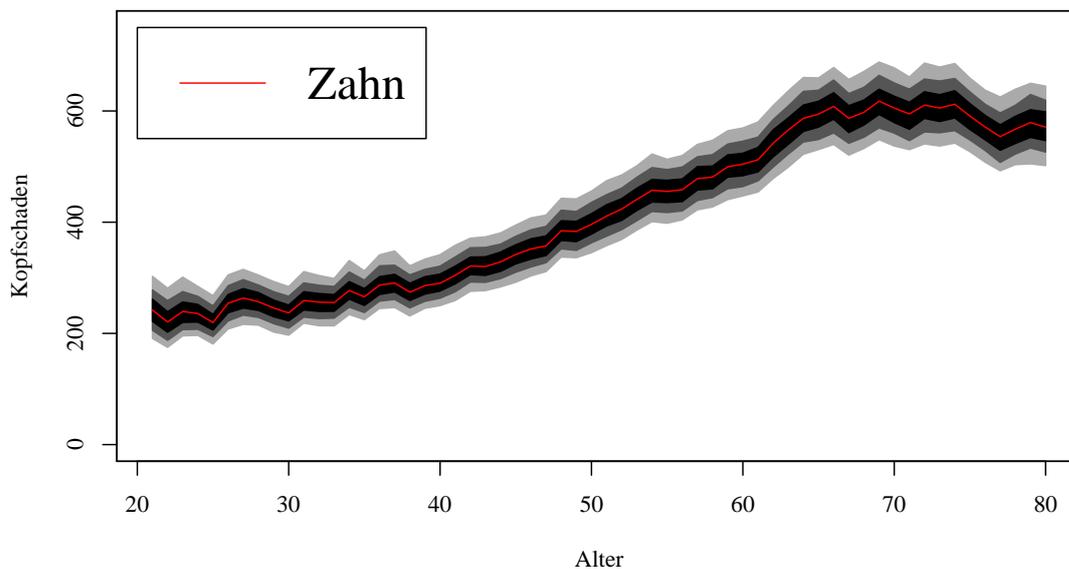


Abb. 11: Fan-Chart der für das Jahr 2021 projizierten Kopfschäden des Leistungsbereichs {Zahn}.¹⁸⁸

Die Projektionsintervalle für den Leistungsbereich {Zahn} in Abb. 11 weisen gegenüber den beiden anderen Leistungsbereichen – relativ betrachtet – größere Schwankungsbreiten auf, wenngleich sich diese über die gesamte Altersstruktur betrachtet als verhältnismäßig konstant darstellen. Letzteres lässt sich daraus schlussfolgern, dass zwar auch im Zahn-Leistungsbereich im oberen Altersbereich tendenziell breitere Projektionsintervalle erzeugt werden, der Unterschied beispielsweise zum Alter 40 Jahre jedoch nicht so deutlich wie im ambulanten oder stationären Leistungsbereich ausfällt.

Alles in allem lässt sich festhalten, dass ein gewisses Sprungverhalten innerhalb der Kopfschadenprojektionen aufgrund des kurzen Testdatenzeitraums und der Verwendung nicht geglätteter Ausgangswerte nicht ausgeschlossen werden kann. Dennoch bietet die Verwendung von Projektionsintervallen eine gute Möglichkeit, die in der Parameter-

¹⁸⁸ Eigene Darstellung. Datenquelle: RePortal.

schätzung und auch der Projektion enthaltenen Unsicherheiten zu quantifizieren und eine Abschätzung zu treffen, wie wahrscheinlich oder unwahrscheinlich das Eintreten bestimmter Kopfschäden ist. Diese Ergebnisse können beispielsweise in der Tarifikkulation genutzt werden, bei der die rechnungsmäßigen Kopfschäden entsprechend den Ausführungen in Kapitel 2.5 noch mit zusätzlichen Sicherheiten auszustatten sind. Auf diesen Anwendungszweck soll im Folgenden aufgrund des Umfangs einer vollständigen Kalkulation jedoch nicht näher eingegangen werden. Stattdessen wird in Kapitel 8.3 ermittelt, welche unterschiedlichen Gesamtschäden sich in Folge der einzelnen Projektionsintervalle ergeben würden. Abschließend gilt es anzumerken, dass beim gezeigten Vorgehen der Schwerpunkt auf die Quantifizierung der Unsicherheiten bei der Parameterschätzung sowie späteren Projektion gelegt wurde. Darüber hinaus bestehen noch weitere Unsicherheiten beispielsweise in der Art der Projektion, für die das Modell eines RWD genutzt wurde. Je nach Anwendungsbereich sollte analysiert werden, ob ggf. auch andere Modelle (z. B. komplexere ARIMA-Modelle) in Betracht gezogen werden müssen. Vor dem Hintergrund des kurzen Testdaten- sowie Projektionszeitraums wurden diese Überlegungen hier jedoch nicht weiter vertieft.

8.3 Projektionsintervalle im ökonomischen Kontext

Als möglicher Anwendungsfall im ökonomischen Kontext werden die entsprechend den Kapiteln 8.1 und 8.2 hergeleiteten Bootstrap-Ergebnisse dazu genutzt, die Gesamtschäden für einen Versichertenbestand zu ermitteln. Dies erfolgt auf Basis der empirischen Perzentile $\hat{y}_{x,t}^{b(\zeta)}$ der durch das Bootstrapping erzeugten $\hat{y}_{x,t}^b$ für $\zeta = 2,5 \%, 10 \%, 25 \%, 75 \%, 90 \%, 97,5 \%$. Für die Berechnung werden die zugehörigen, für das Jahr 2021 simulierten Kopfschäden im Altersbereich $A = \{21, \dots, 80\}$ mit den zuletzt verfügbaren Bestandsdaten des Jahres 2019 multipliziert und die Ergebnisse anschließend addiert. Gleichermaßen wird mit den Kopfschäden verfahren, die sich durch die entsprechend den Vorgaben in Kapitel 4.4 durchgeführte Punktprojektion ergeben. Die Berechnungen werden für die Leistungsbereiche $\{\textit{ambulant}, \textit{stationär}, \textit{Zahn}\}$ durchgeführt und der aus der Punktprojektion resultierende Gesamtschaden anschließend mit den übrigen Gesamtschäden auf Basis der zuvor genannten empirischen Perzentile ins Verhältnis gesetzt. Die Ergebnisse können Tab. 6 entnommen werden. Da bei der R-technischen Umsetzung ausschließlich Standardbefehle verwendet wurden, werden diese hier nicht weiter erläutert.

		Punktprojektion	Perzentile					
			2,5 %	10,0 %	25,0 %	75,0 %	90,0 %	97,5 %
Ambulant	Gesamtschaden (in TEUR)	5.212.227	4.803.512	4.948.860	5.072.745	5.355.430	5.493.770	5.656.622
	Abweichung ggü. Punktprojektion	0,0 %	-7,8 %	-5,1 %	-2,7 %	2,7 %	5,4 %	8,5 %
Stationär	Gesamtschaden (in TEUR)	2.261.391	2.050.853	2.124.358	2.189.079	2.338.280	2.411.149	2.498.141
	Abweichung ggü. Punktprojektion	0,0 %	-9,3 %	-6,1 %	-3,2 %	3,4 %	6,6 %	10,5 %
Zahn	Gesamtschaden (in TEUR)	1.083.689	951.079	993.662	1.035.046	1.131.410	1.177.823	1.232.364
	Abweichung ggü. Punktprojektion	0,0 %	-12,2 %	-8,3 %	-4,5 %	4,4 %	8,7 %	13,7 %

Tab. 6: Gesamtschäden auf Basis der empirischen Perzentile $\hat{y}_{x,t}^{b(\zeta)}$ der drei Leistungsbereiche {ambulante, stationär, Zahn} für das Jahr 2021 und den Bestandsdaten des Jahres 2019 (Altersbereich $A = \{21, \dots, 80\}$). Verglichen werden diese gegen die Gesamtschäden, die sich in Folge der mittels Punktprojektion ermittelten Kopfschäden ergeben. Letztere werden mit den übrigen Gesamtschäden – je Leistungsbereich – auch relativ ins Verhältnis gesetzt.

Wie bereits intuitiv zu erwarten war, ergeben sich auf Basis der unteren 2,5 %-, 10 %- und 25 %-Perzentile Gesamtschäden unterhalb des Gesamtschadens in Folge der Punktprojektion. Die Gesamtschäden auf Basis der oberen 75 %-, 90 %- und 97,5 %-Perzentile liegen hingegen darüber. Außerdem weist der Zahnbereich bei der Betrachtung der drei Leistungsbereiche in Bezug auf die einzelnen Perzentile die größten relativen Abweichungen zur Punktprojektion auf. Damit bestätigen sich die Beobachtungen in Kapitel 8.2 hinsichtlich der größeren, relativen Schwankungsbreite der dort untersuchten Projektionsintervalle. Die prozentualen Abweichungen der Gesamtschäden für die Leistungsbereiche {ambulante, stationär} fallen demgegenüber geringer aus, wobei die Werte des stationären Leistungsbereichs noch leicht oberhalb des ambulanten Leistungsbereichs liegen. Anhand der Ergebnisse kann eine Einschätzung getroffen werden, wie wahrscheinlich oder unwahrscheinlich das Erreichen bestimmter Gesamtschadenhöhen in den einzelnen Leistungsbereichen ist. Darauf aufbauend wäre es beispielsweise möglich, bestimmte Liquiditätspuffer für die Schadenregulierung zu ermitteln, die aus Sicherheitsgründen nicht unterschritten werden sollten. Dies soll hier jedoch nicht weiter vertieft werden. Stattdessen werden im anschließenden Fazit noch einmal die wichtigsten Erkenntnisse zusammengestellt und mögliche weitere Forschungsfragen aufgezeigt.

9 Fazit und Ausblick

In der vorliegenden Masterarbeit wurden verschiedene stochastische Sterblichkeitsmodelle dahingehend untersucht, ob sie – verglichen mit der häufig für Kalkulationszwecke eingesetzten Rusam-Methode – zu einer Verbesserung kurzfristiger Kopfschadenprojektionen führen können. Dabei konnte das PLAT2-Modell als das Modell mit den besten Performanceeigenschaften identifiziert werden, welches eine vereinfachte Variante des ursprünglich von Plat (2009) veröffentlichten PLAT-Modells darstellt. Auf Basis des PLAT2-Modells wurden eine in die Zukunft gerichtete Kopfschadenprojektion durchgeführt und Vorhersageintervalle abgeleitet, die eine Quantifizierung der Vorhersagegenauigkeit ermöglichen. Diese können beispielsweise im Bereich der Kalkulation oder durch die Ermittlung von Gesamtschadenhöhen auch für Liquiditätsberechnungen verwendet werden, wie dies am Ende des Kapitels 8 gezeigt wurde.

Als deutlich ausbaufähig darf der nur für die Beobachtungsjahre 2012 bis 2019 zur Verfügung stehende Datensatz angesehen werden. Zwar scheint dieser für die gezeigten Berechnungen ausreichend zu sein. Dennoch empfiehlt es sich zur Verifizierung der Auswertungsergebnisse, die vorstehenden Untersuchungen bei Vorliegen weiterer Beobachtungsjahre erneut durchzuführen. Dabei könnte auch eine Variation der für alle GAPC-Modelle zugrunde gelegten Poissonverteilung in Erwägung gezogen werden, deren Festlegung vor allem auf praktischen Gesichtspunkten basierte. Obwohl in der Arbeit gezeigt wurde, dass sich durch die Poissonverteilung in der kurzen Frist durchaus plausible Kopfschadenprojektionen erzeugen lassen, sollte in Folgearbeiten analysiert werden, ob sich die Ergebnisse beispielsweise durch den Einsatz einer Normal- oder Log-Normalverteilung noch weiter verbessern lassen. Auch die Verwendung komplett anderer Modelle soll an dieser Stelle nicht ausgeschlossen werden und könnte Raum für neue Untersuchungsansätze bieten.

Im Gegensatz zu beispielsweise Christiansen u. a. (2018) oder Piontkowski (2020), die für ihre Untersuchungen auf geglättete Kopfschadenreihen der BaFin zurückgreifen, wurden in dieser Arbeit nicht geglättete Rohdaten verwendet. Dies bietet den untersuchten Modellen die Möglichkeit, die in natürlicher Weise vorkommenden Schwankungen zu antizipieren. Sollte sich bei der Übertragung auf andere als den hier untersuchten Datenbeständen allerdings herausstellen, dass damit aufgrund zu großer Zufallsschwankungen deutliche Verwerfungen einhergehen, könnte ersatzweise auch der Einsatz geglätteter Datenreihen erwogen werden. In diesem Zusammenhang sollte zudem eine Prüfung erfolgen, ob die Verwendung des PLAT2-Modells für die zu untersuchende Datenreihe überhaupt in Frage

kommt. Dafür könnten beispielsweise die in dieser Arbeit vorgestellten Analysemethoden herangezogen werden. Interessant wäre außerdem die Nutzung eines in deutlich granularerer Form vorliegenden Datensatzes, um die für die Projektion verwendeten, tatsächlichen Kopfschäden noch exakter bestimmen und Einflüsse wie vereinnahmte Risikozuschläge oder etwaige Sondereffekte gezielter berücksichtigen zu können.

Während in dieser Arbeit die Suche nach dem am besten zur Projektion zukünftiger Kopfschäden geeigneten Modell im Vordergrund stand, könnten die Kopfschadenreihen in weiterführenden Studien auch dahingehend untersucht werden, ob zwischen den Leistungsbereichen $\{ambulant, stationär, Zahn\}$ ggf. bestimmte Abhängigkeiten (sogenannte Korrelationen) bestehen. Testweise durchgeführte Untersuchungen zeigten hier vielversprechende Ansätze. Bestätigen sich diese, müssten Kopfschadenprojektionen nicht zwangsläufig auf einen Leistungsbereich beschränkt bleiben, sondern ließen sich mitunter auch leistungsbereichsübergreifend durchführen. Dies könnte beispielsweise bei kleineren Beständen nützlich werden, um auf Basis zusammengefasster Bestandsdaten aussagekräftigere Schadenprojektionen zu erzeugen.

Zum Abschluss dieser Masterarbeit wird der Blick auf die seit Ende des Jahres 2019 bekannte Atemwegserkrankung COVID-19 gerichtet.¹⁸⁹ Jene entwickelte sich im Jahr 2020 zu einer weltweiten Pandemie und nimmt seitdem großen Einfluss auf das öffentliche Leben. Damit einher geht unter anderem eine veränderte Nachfrage nach medizinischen Produkten. Während der Bedarf an Hygieneprodukten wie Desinfektionsmitteln beispielsweise deutlich zunahm, reduzierte sich die Inanspruchnahme von Präventivmaßnahmen wie Krebsvorsorgeuntersuchungen erheblich.¹⁹⁰ Da der in dieser Arbeit untersuchte Datensatz nur Werte bis einschließlich des Jahres 2019 enthält, lässt er noch keine Aussage über die Auswirkungen von COVID-19 auf die Kopfschäden zu. Sobald die Daten des Jahres 2020 vorliegen, empfiehlt es sich die getätigten Analysen erneut vorzunehmen. Von besonderem Interesse sind dabei nicht nur die Erkenntnisse des ersten Jahres im Zusammenhang mit COVID-19. Von Interesse wird auch die weitere Entwicklung sein, wenn sich zeigt, ob die Kopfschäden nicht nur temporär, sondern auch nachhaltig beeinflusst werden. Dies hängt beispielsweise davon ab, ob Maßnahmen wie Corona-Tests und wiederkehrende Impfangebote dauerhaft nachgefragt werden oder der Bedarf mit der Zeit wieder nachlässt. Dies bietet Raum für viele neue Forschungsfragen, die mit Blick auf die Folgen der COVID-19-Pandemie in den nächsten Jahren gestellt werden können.

¹⁸⁹ Vgl. Robert Koch-Institut (2021).

¹⁹⁰ Vgl. Statistisches Bundesamt (2020a), vgl. DAK-Gesundheit (2021).

10 Anhang

Anhangsverzeichnis

A	Parametereinschränkungen.....	83
B	Hinweise zu Leistungsbereichen und dem RePortal	84
C	Entwicklung der Kopfschäden in den Jahren 2012 bis 2019	85
D	R-Implementierung der Modelle PLAT, PLAT2 und RUSAM.....	87
E	Darstellung der gefitteten Parameter	89
E.1	Gefittete Parameter des LC-Modells	89
E.2	Gefittete Parameter des RH-Modells.....	90
E.3	Gefittete Parameter des APC-Modells	91
E.4	Gefittete Parameter des CBD-Modells	92
E.5	Gefittete Parameter des M7-Modells.....	93
E.6	Gefittete Parameter des PLAT-Modells	94
E.7	Gefittete Parameter des PLAT2-Modells	95
E.8	Gefittete Parameter des RUSAM-Modells.....	96
E.9	Gefittete Parameter des LC-Modells (Leistungsbereich ambulant)	97
E.10	Gefittete Parameter des LC-Modells (Leistungsbereich stationär)	98
E.11	Gefittete Parameter des LC-Modells (Leistungsbereich Zahn).....	99
F	Darstellung der Residuen.....	100
F.1	Darstellung der Residuen für den Testdatenzeitraum BJ ₄ (Teil 1).....	100
F.2	Darstellung der Residuen für den Testdatenzeitraum BJ ₄ (Teil 2).....	101
F.3	Darstellung der Residuen des APC-Modells.....	102
G	Gegenüberstellung projizierter Kopfschäden mit PKV-Echtdaten	103
G.1	Vergleich der für das Jahr 2019 projizierten Kopfschäden gegen die tatsächlichen PKV-Daten (Leistungsbereich ambulant).....	103
G.2	Vergleich der für das Jahr 2019 projizierten Kopfschäden gegen die tatsächlichen PKV-Daten (Leistungsbereich Zahn)	104

H	Darstellung der MAE- und RMSE-Werte	105
H.1	Darstellung der MAE- und RMSE-Werte für den Altersbereich A_1	105
H.2	Darstellung der MAE- und RMSE-Werte für den Altersbereich A_2	106
H.3	Darstellung der MAE- und RMSE-Werte für den Altersbereich A_3	107

A Parametereinschränkungen

Modell	Nebenbedingungen
LC:	$\sum_x \beta_x^{(1)} = 1, \sum_t \kappa_t^{(1)} = 0$
RH:	$\sum_x \beta_x^{(1)} = 1, \sum_t \kappa_t^{(1)} = 0, \sum_x \beta_x^{(0)} = 1, \sum_{c=t_1-x_k}^{t_n-x_1} \gamma_c = 0$
APC:	$\sum_t \kappa_t^{(1)} = 0, \sum_{c=t_1-x_k}^{t_n-x_1} \gamma_c = 0, \sum_{c=t_1-x_k}^{t_n-x_1} c \cdot \gamma_c = 0$
CBD:	ohne
M7:	$\sum_{c=t_1-x_k}^{t_n-x_1} \gamma_c = 0, \sum_{c=t_1-x_k}^{t_n-x_1} c \cdot \gamma_c = 0, \sum_{c=t_1-x_k}^{t_n-x_1} c^2 \cdot \gamma_c = 0$
PLAT:	$\sum_t \kappa_t^{(1)} = 0, \sum_t \kappa_t^{(2)} = 0, \sum_t \kappa_t^{(3)} = 0$ $\sum_{c=t_1-x_k}^{t_n-x_1} \gamma_c = 0, \sum_{c=t_1-x_k}^{t_n-x_1} c \cdot \gamma_c = 0, \sum_{c=t_1-x_k}^{t_n-x_1} c^2 \cdot \gamma_c = 0$
PLAT2:	$\sum_t \kappa_t^{(1)} = 0, \sum_t \kappa_t^{(2)} = 0$ $\sum_{c=t_1-x_k}^{t_n-x_1} \gamma_c = 0, \sum_{c=t_1-x_k}^{t_n-x_1} c \cdot \gamma_c = 0, \sum_{c=t_1-x_k}^{t_n-x_1} c^2 \cdot \gamma_c = 0$
RUSAM:	$\sum_x \beta_x^{(1)} = 1$

Tab. 7: Parametereinschränkungen der untersuchten Mortalitätsmodelle (x : Alter, t : Kalenderjahr, c : Geburtsjahr).¹⁹¹

¹⁹¹ Eigene Darstellung.

B Hinweise zu Leistungsbereichen und dem RePortal

Leistungsbereich	Leistungsart	Leistungen
Ambulant	110	Ambulant Arzt (ohne Heilpraktiker)
	120	Arzneien und Verbandmittel
	130	Heilmittel
	140	Hilfsmittel
Stationär	210	allgemeine Krankenhausleistungen
Zahn	310	Behandlung
	320	Zahnersatzleistungen
	330	Kieferorthopädie

Tab. 8: Aufschlüsselung der Leistungsbereiche nach den ausgewerteten Leistungsarten bzw. Leistungen. Datenquelle: RePortal.

Jahr	Letzte Aktualisierung im RePortal
2010	Version 1
2011	Version 1
2012	Version 3 vom 09.03.2017
2013	Version 5 vom 14.07.2017
2014	Version 8 vom 14.07.2017
2015	Version 5 vom 14.07.2017
2016	Version 5 vom 07.10.2019
2017	Version 8 vom 15.10.2020
2018	Version 5 vom 15.10.2020
2019	Version 2 vom 23.10.2020

Tab. 9: Historie der RePortal-Aktualisierungen je Beobachtungsjahr (Stand: August 2021).

C Entwicklung der Kopfschäden in den Jahren 2012 bis 2019

Leistungsbereich ambulant

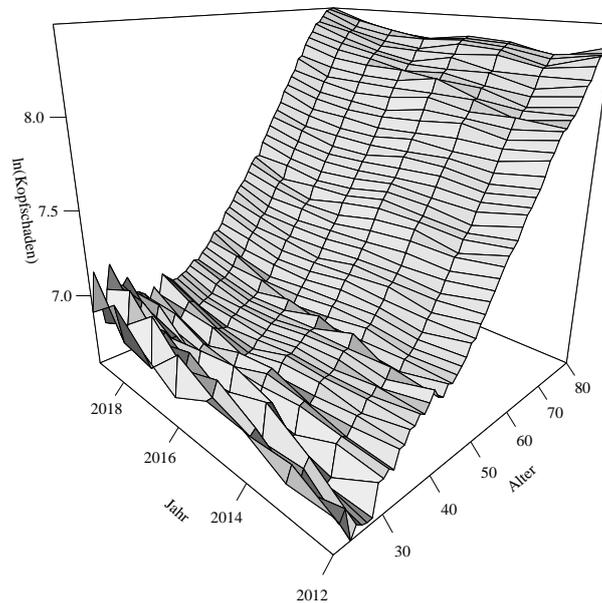


Abb. 12: Entwicklung der Kopfschäden des ambulanten Leistungsbereichs in den Jahren 2012 bis 2019: Männliche und weibliche Vollkosten-Versicherte, Verband der Privaten Krankenversicherung.¹⁹²

Leistungsbereich stationär

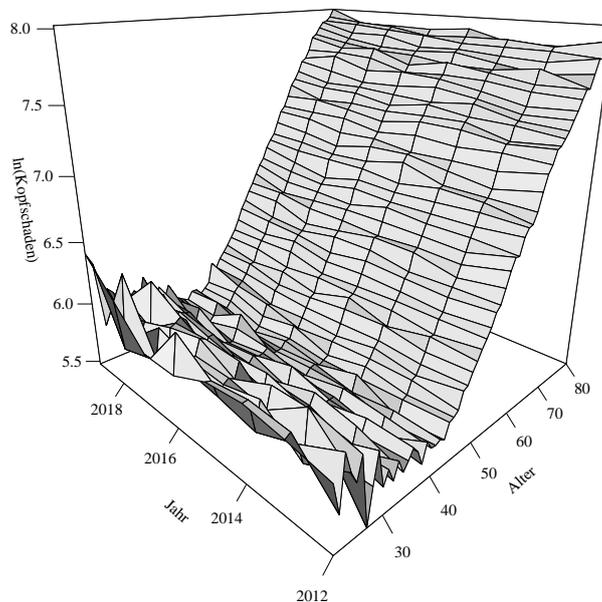


Abb. 13: Entwicklung der Kopfschäden des stationären Leistungsbereichs in den Jahren 2012 bis 2019: Männliche und weibliche Vollkosten-Versicherte, Verband der Privaten Krankenversicherung.¹⁹³

¹⁹² Eigene Darstellung. Datenquelle: RePortal.

¹⁹³ Eigene Darstellung. Datenquelle: RePortal.

Leistungsbereich Zahn

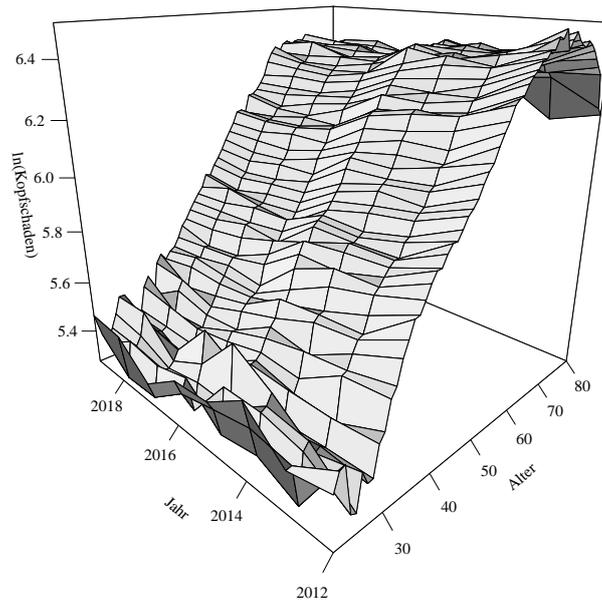


Abb. 14: Entwicklung der Kopfschäden des Leistungsbereichs Zahn in den Jahren 2012 bis 2019: Männliche und weibliche Vollkosten-Versicherte, Verband der Privaten Krankenversicherung.¹⁹⁴

¹⁹⁴ Eigene Darstellung. Datenquelle: RePortal.

D R-Implementierung der Modelle PLAT, PLAT2 und RUSAM¹⁹⁵**# Laden des StMoMo-Pakets**

```
R> library("StMoMo")
```

PLAT-Modell

```
R> f2 <- function(x, ages) mean(ages) - x
```

```
R> f3 <- function(x, ages) pmax(mean(ages) - x, 0)
```

```
R> constPlat <- function(ax, bx, kt, b0x, gc, wxt, ages){
```

```
+   nYears <- dim(wxt)[2]
```

```
+   x      <- ages
```

```
+   t      <- 1:nYears
```

```
+   c      <- (1 - tail(ages, 1)):(nYears - ages[1])
```

```
+   xbar   <- mean(x)
```

```
+   phiReg <- lm(gc ~ 1 + c + I(c ^ 2), na.action = na.omit)
```

```
+   phi    <- coef(phiReg)
```

```
+   gc     <- gc - phi[1] - phi[2] * c - phi[3] * c ^ 2
```

```
+   kt[2,] <- kt[2,] + 2 * phi[3] * t
```

```
+   kt[1,] <- kt[1,] + phi[2] * t + phi[3] * (t ^ 2 - 2 * xbar * t)
```

```
+   ax     <- ax + phi[1] - phi[2] * x + phi[3] * x ^ 2
```

```
+   ci     <- rowMeans(kt, na.rm = TRUE)
```

```
+   ax     <- ax + ci[1] + ci[2] * (xbar - x) + ci[3] * pmax(xbar - x, 0)
```

```
+   kt[1,] <- kt[1,] - ci[1]
```

```
+   kt[2,] <- kt[2,] - ci[2]
```

```
+   kt[3,] <- kt[3,] - ci[3]
```

```
+   list(ax = ax, bx = bx, kt = kt, b0x = b0x, gc = gc)
```

```
+ }
```

```
R> PLAT <- StMoMo(link = "log", staticAgeFun = TRUE,
```

```
+   periodAgeFun = c("1", f2, f3), cohortAgeFun = "1",
```

```
+   constFun = constPlat)
```

¹⁹⁵ Vgl. Villegas u. a. (2018b), S. 12 ff., vgl. Villegas (2020). Unterschiede im Programmcode zwischen PLAT- und PLAT2-Modell wurden mit roter Schriftfarbe kenntlich gemacht. Für die Programmierung des PLAT2-Modells müssen demnach die rot markierten Teile entfernt werden.

PLAT2-Modell

```

R> f2 <- function(x, ages) mean(ages) - x
R> constPlat <- function(ax, bx, kt, b0x, gc, wxt, ages){
+   nYears <- dim(wxt)[2]
+   x <- ages
+   t <- 1:nYears
+   c <- (1 - tail(ages, 1)):(nYears - ages[1])
+   xbar <- mean(x)
+   phiReg <- lm(gc ~ 1 + c + I(c ^ 2), na.action = na.omit)
+   phi <- coef(phiReg)
+   gc <- gc - phi[1] - phi[2] * c - phi[3] * c ^ 2
+   kt[2,] <- kt[2,] + 2 * phi[3] * t
+   kt[1,] <- kt[1,] + phi[2] * t + phi[3] * (t ^ 2 - 2 * xbar * t)
+   ax <- ax + phi[1] - phi[2] * x + phi[3] * x ^ 2
+   ci <- rowMeans(kt, na.rm = TRUE)
+   ax <- ax + ci[1] + ci[2] * (xbar - x)
+   kt[1,] <- kt[1,] - ci[1]
+   kt[2,] <- kt[2,] - ci[2]
+   list(ax = ax, bx = bx, kt = kt, b0x = b0x, gc = gc)
+ }
R> PLAT2 <- StMoMo(link = "log", staticAgeFun = TRUE,
+   periodAgeFun = c("1", f2), cohortAgeFun = "1",
+   constFun = constPlat)

```

RUSAM-Modell

```

R> constRUSAM <- function(ax, bx, kt, b0x, gc, wxt, ages){
+   c2 <- sum(bx[, 1], na.rm = TRUE)
+   list(ax = ax, bx = bx / c2, kt = c2 * kt)
+ }
R> RUSAM <- StMoMo(link = "log", staticAgeFun = FALSE,
+   periodAgeFun = "NP", constFun = constRUSAM)

```

E Darstellung der gefitteten Parameter

E.1 Gefittete Parameter des LC-Modells

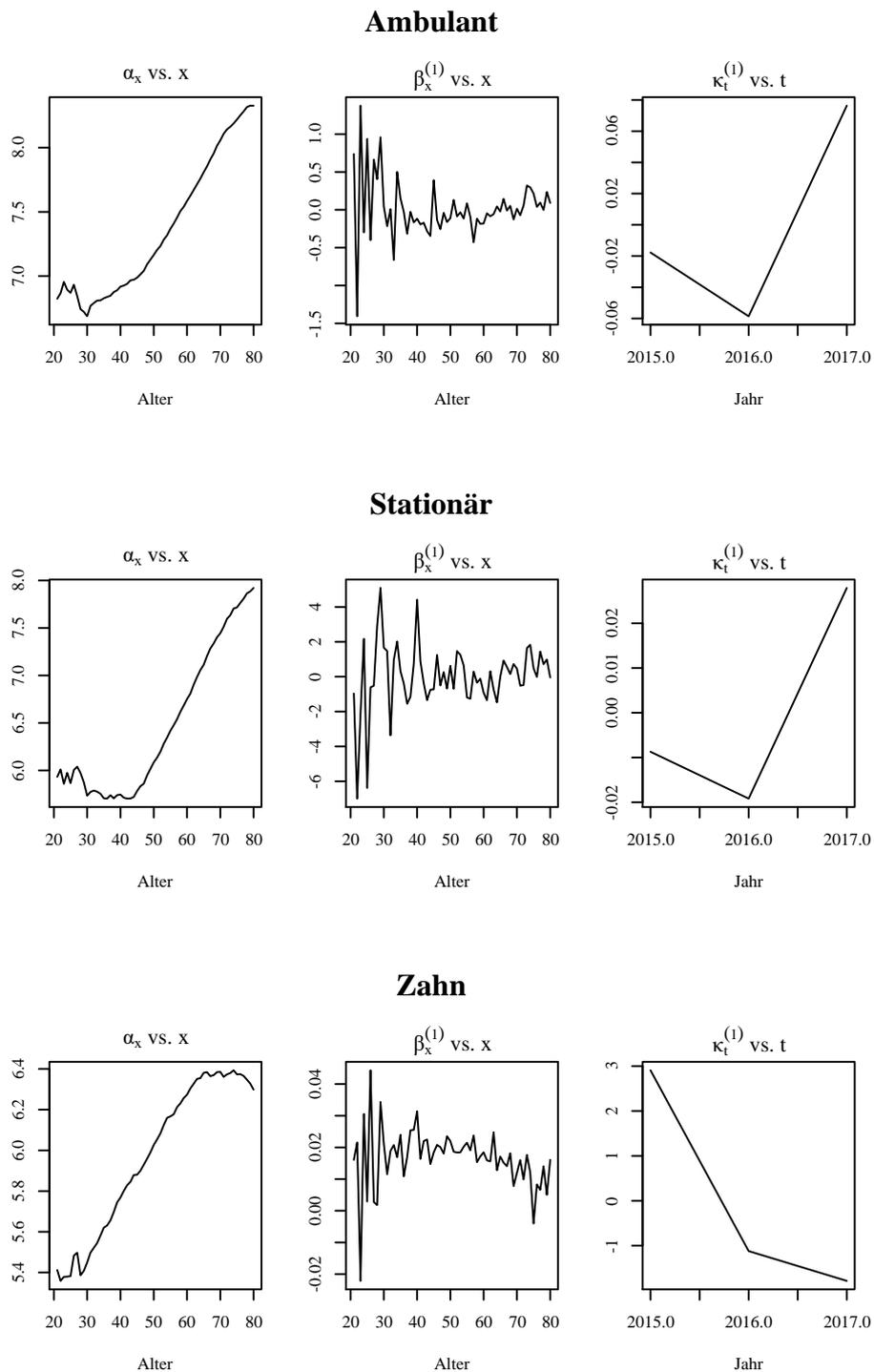
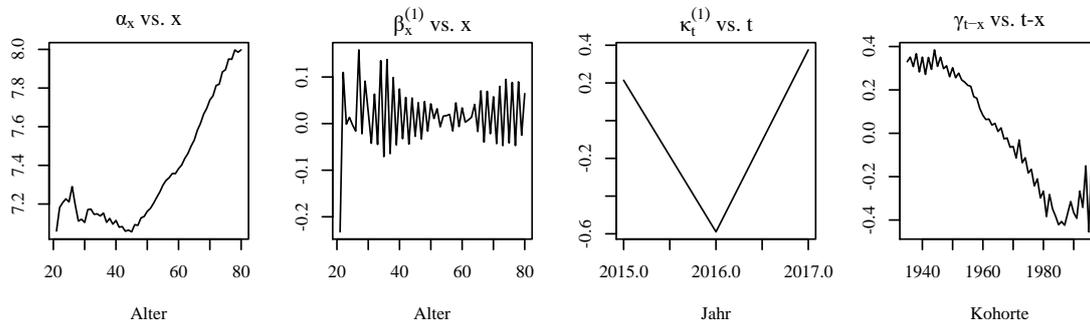


Abb. 15: Gefittete Parameter des LC-Modells auf Basis der Kopfschäden der drei Leistungsbereiche {ambulant, stationär, Zahn} für den Testdatenzeitraum $BJ_4 = \{2015, 2016, 2017\}$.¹⁹⁶

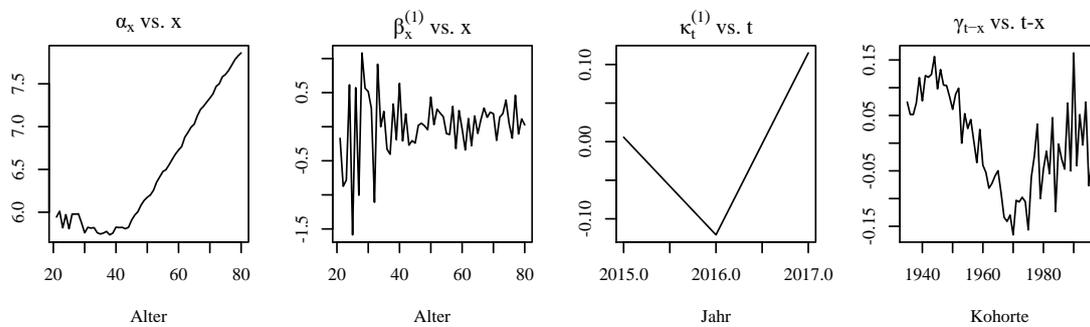
¹⁹⁶ Eigene Darstellung. Datenquelle: RePortal.

E.2 Gefittete Parameter des RH-Modells

Ambulant



Stationär



Zahn

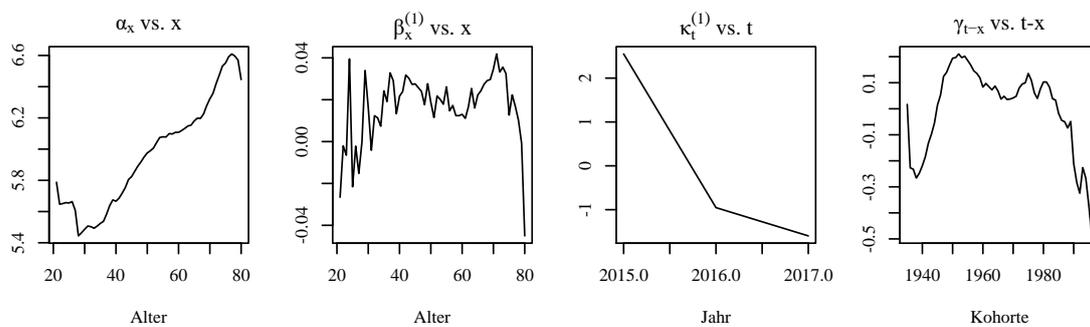


Abb. 16: Gefittete Parameter des RH-Modells auf Basis der Kopfschäden der drei Leistungsbereiche {ambulant, stationär, Zahn} für den Testdatenzeitraum $BJ_4 = \{2015, 2016, 2017\}$.¹⁹⁷

¹⁹⁷ Eigene Darstellung. Datenquelle: RePortal.

E.3 Gefittete Parameter des APC-Modells

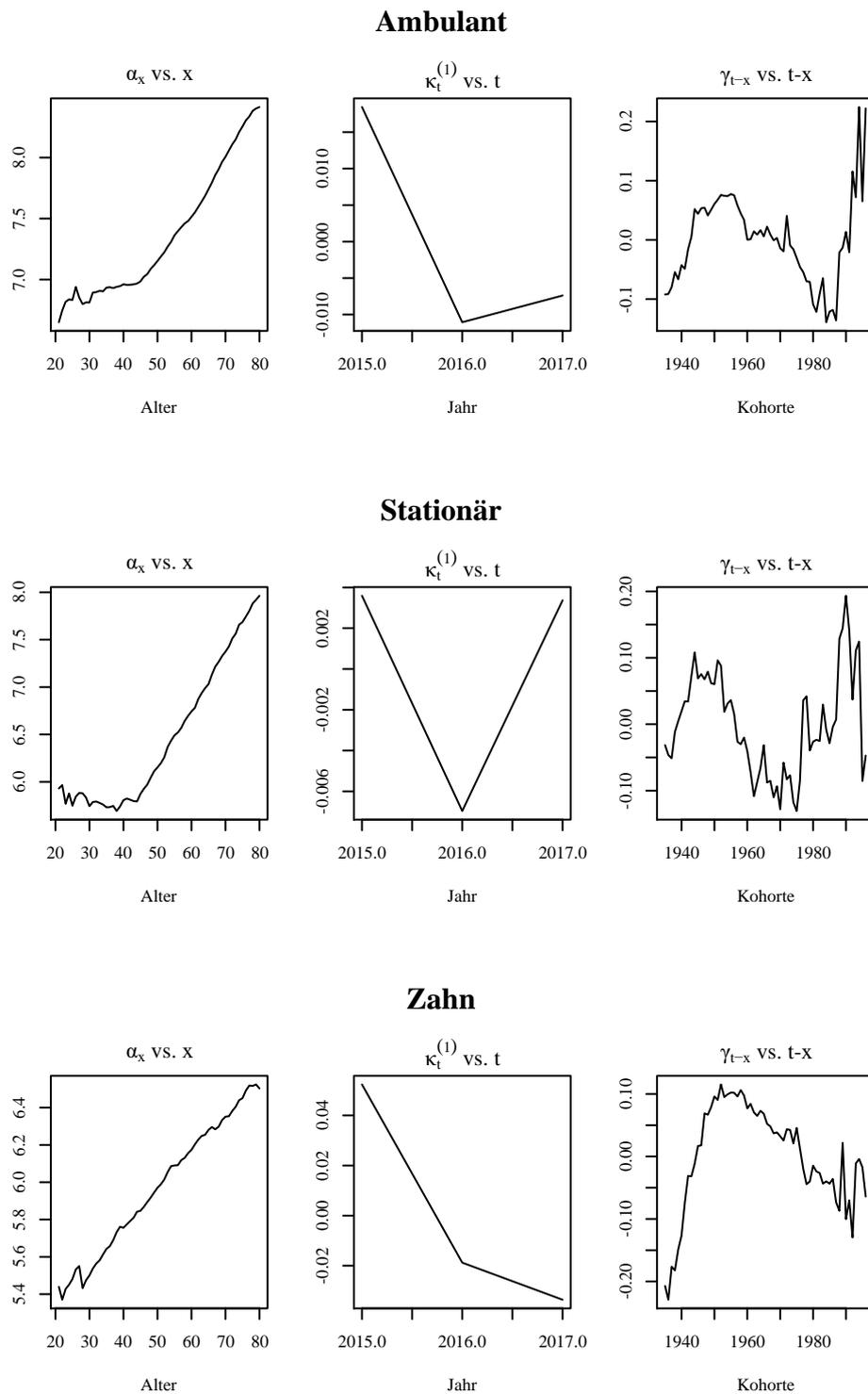
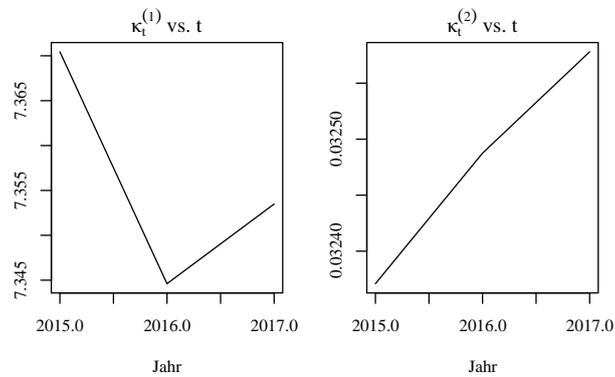


Abb. 17: Gefittete Parameter des APC-Modells auf Basis der Kopfschäden der drei Leistungsbereiche {ambulant, stationär, Zahn} für den Testdatenzeitraum $B_{J_4} = \{2015, 2016, 2017\}$.¹⁹⁸

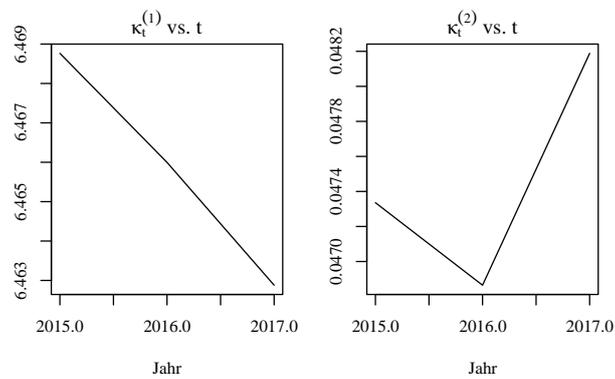
¹⁹⁸ Eigene Darstellung. Datenquelle: RePortal.

E.4 Gefittete Parameter des CBD-Modells

Ambulant



Stationär



Zahn

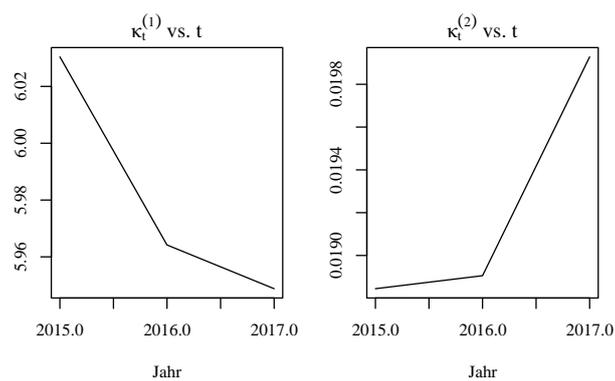
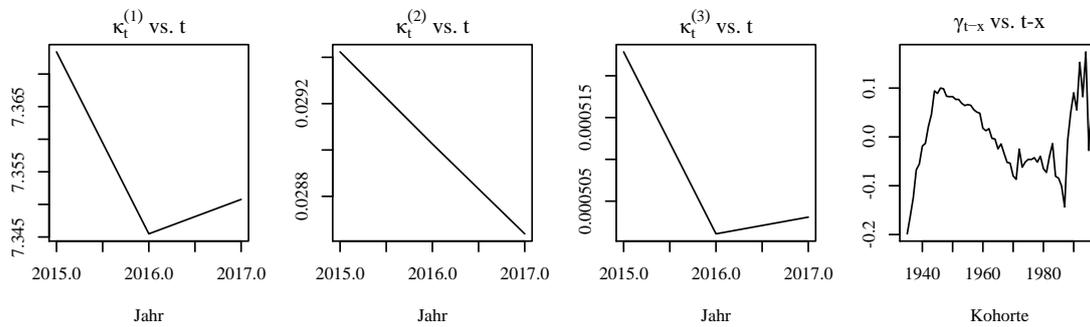


Abb. 18: Gefittete Parameter des CBD-Modells auf Basis der Kopfschäden der drei Leistungsbereiche {ambulant, stationär, Zahn} für den Testdatenzeitraum $BJ_4 = \{2015, 2016, 2017\}$.¹⁹⁹

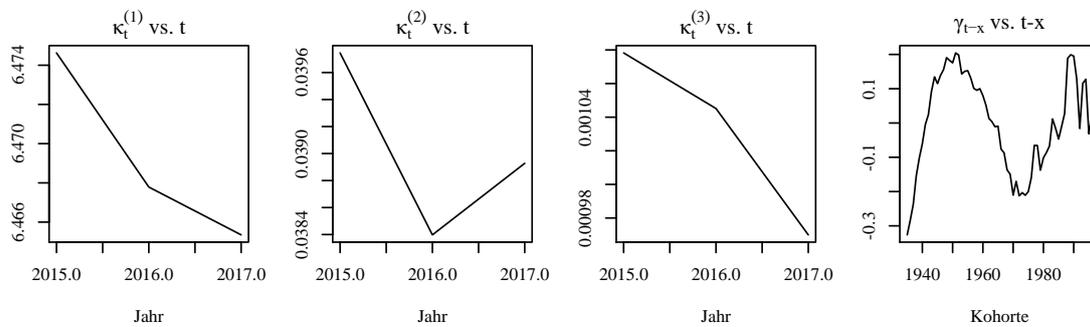
¹⁹⁹ Eigene Darstellung. Datenquelle: RePortal.

E.5 Gefittete Parameter des M7-Modells

Ambulant



Stationär



Zahn

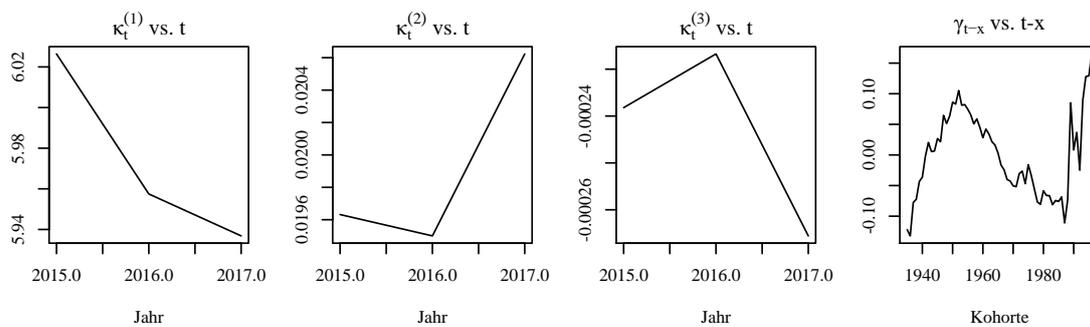


Abb. 19: Gefittete Parameter des M7-Modells auf Basis der Kopfschäden der drei Leistungsbereiche {ambulant, stationär, Zahn} für den Testdatenzeitraum $BJ_4 = \{2015, 2016, 2017\}$.²⁰⁰

²⁰⁰ Eigene Darstellung. Datenquelle: RePortal.

E.6 Gefittete Parameter des PLAT-Modells

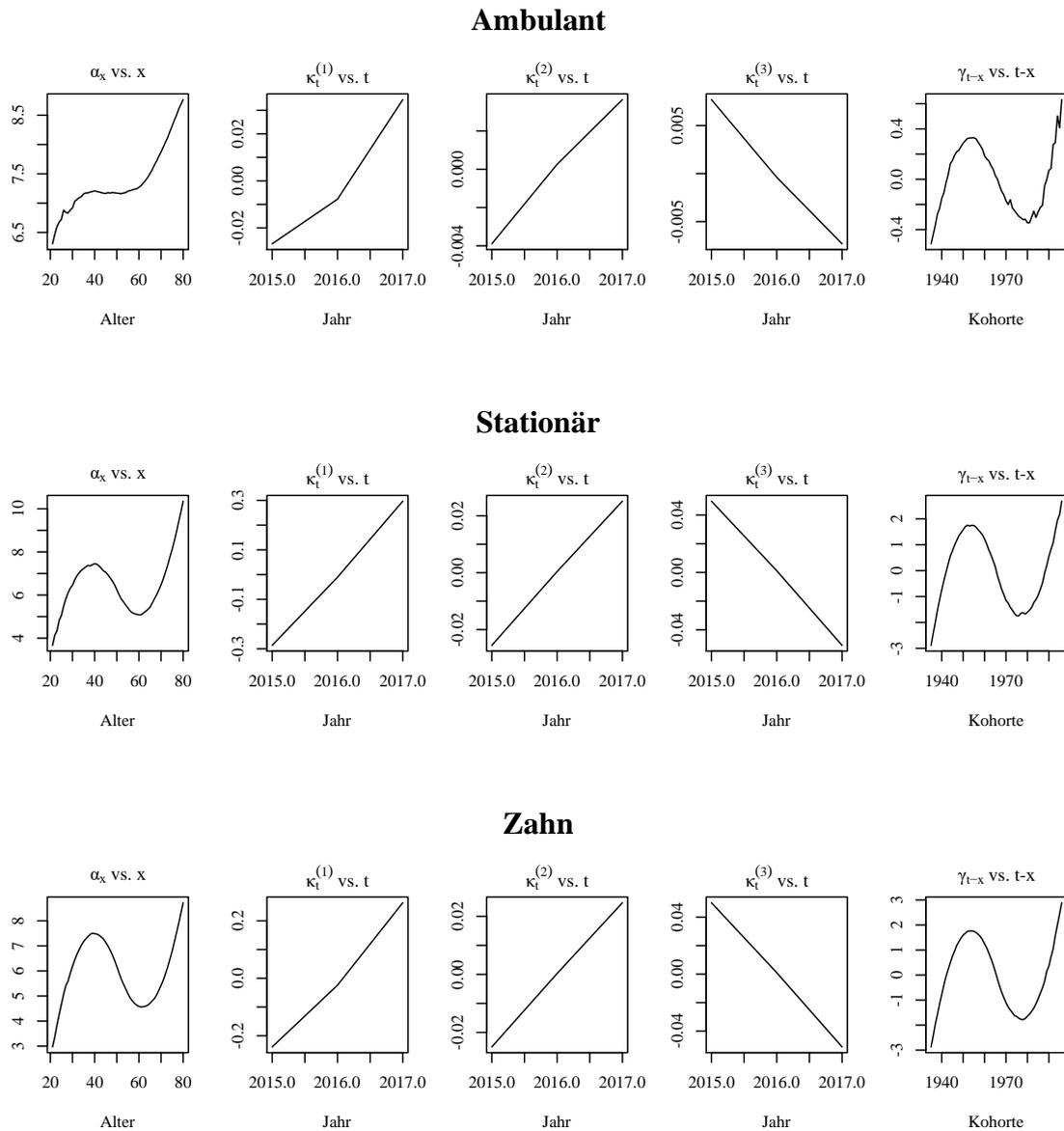
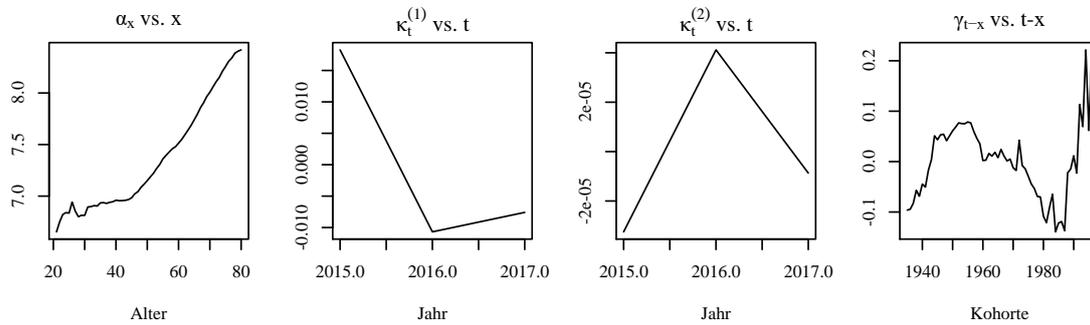


Abb. 20: Gefittete Parameter des PLAT-Modells auf Basis der Kopfschäden der drei Leistungsbereiche {ambulante, stationär, Zahn} für den Testdatenzeitraum $B|_A = \{2015, 2016, 2017\}$.²⁰¹

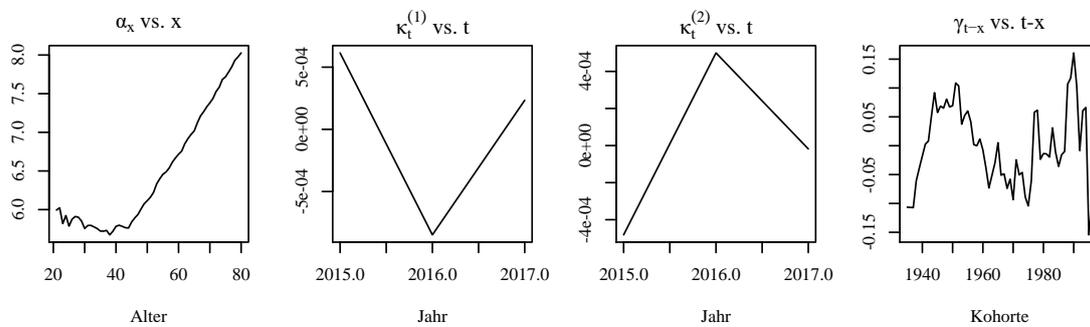
²⁰¹ Eigene Darstellung. Datenquelle: RePortal.

E.7 Gefittete Parameter des PLAT2-Modells

Ambulant



Stationär



Zahn

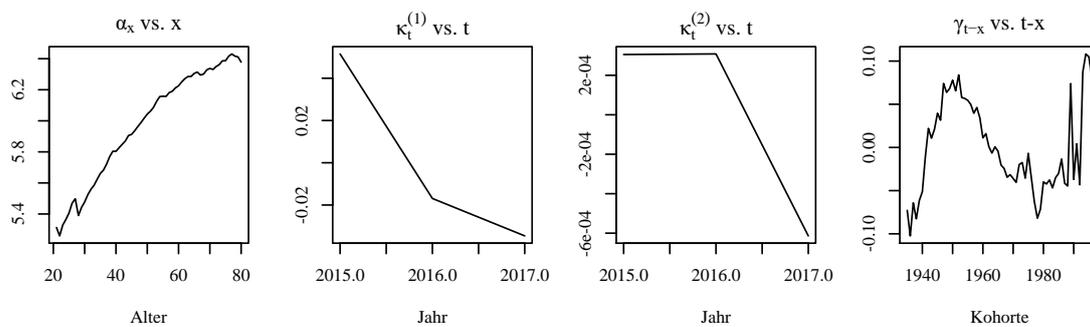
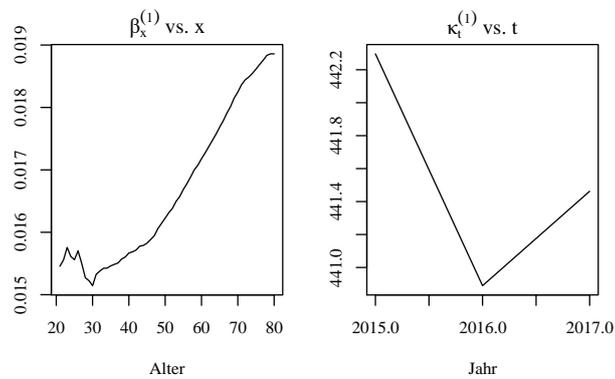


Abb. 21: Gefittete Parameter des PLAT2-Modells auf Basis der Kopfschäden der drei Leistungsbereiche {ambulant, stationär, Zahn} für den Testdatenzeitraum $BJ_4 = \{2015, 2016, 2017\}$.²⁰²

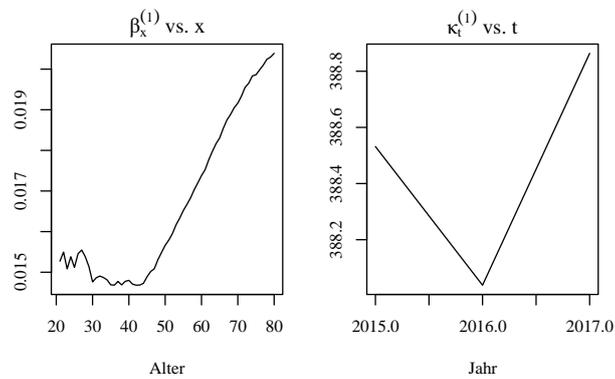
²⁰² Eigene Darstellung. Datenquelle: RePortal.

E.8 Gefittete Parameter des RUSAM-Modells

Ambulant



Stationär



Zahn

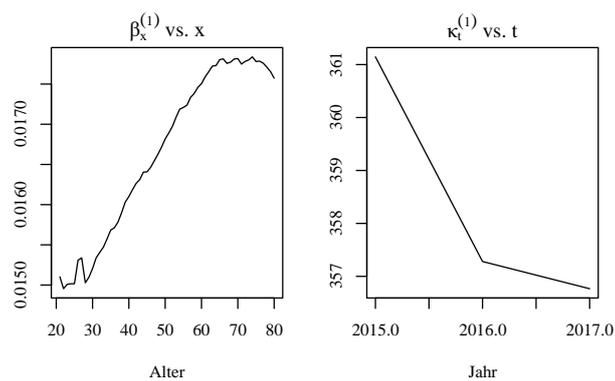


Abb. 22: Gefittete Parameter des RUSAM-Modells auf Basis der Kopfschäden der drei Leistungsbereiche {ambulant, stationär, Zahn} für den Testdatenzeitraum $BJ_4 = \{2015, 2016, 2017\}$.²⁰³

²⁰³ Eigene Darstellung. Datenquelle: RePortal.

E.9 Gefittete Parameter des LC-Modells (Leistungsbereich ambulant)

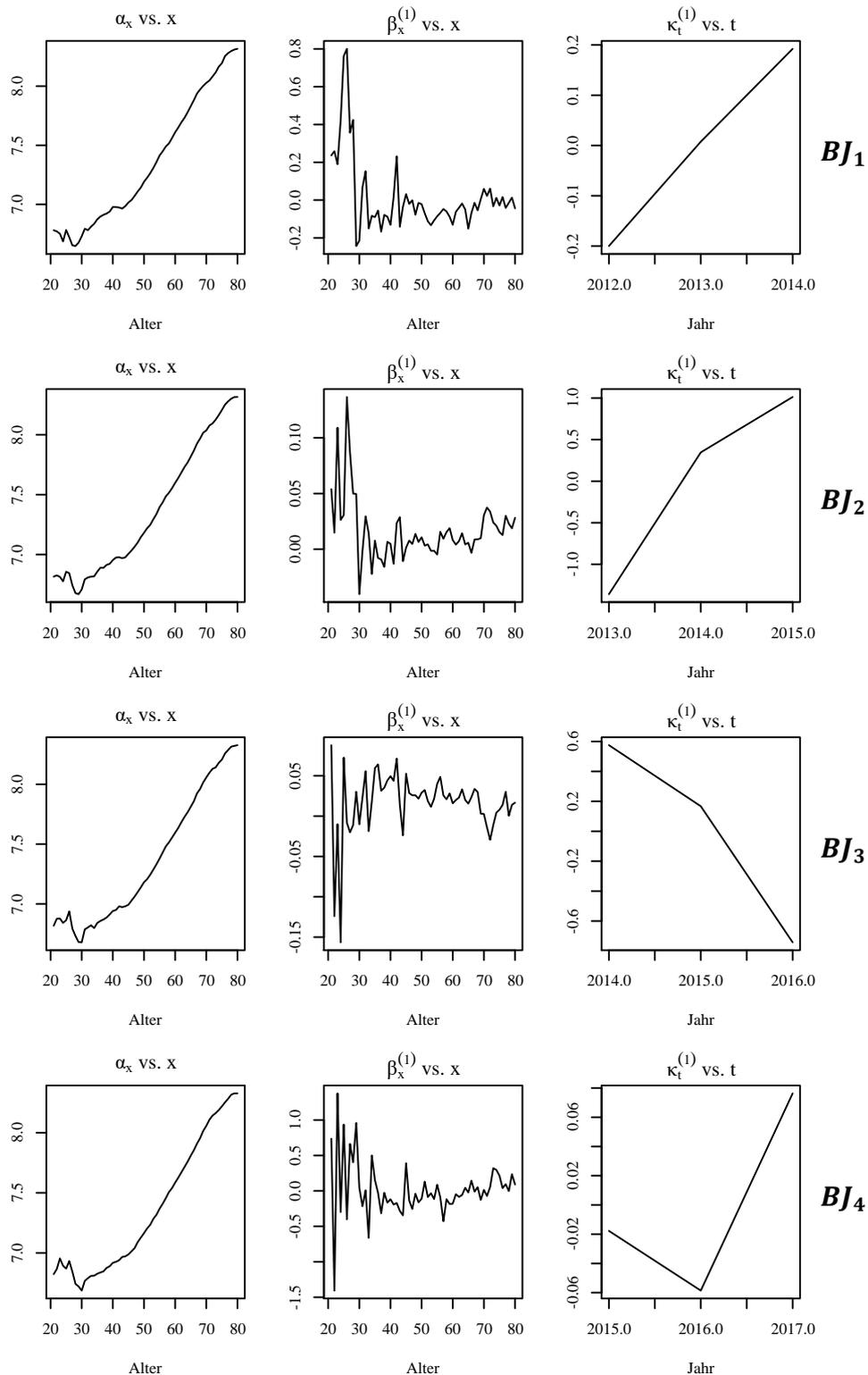


Abb. 23: Gefittete Parameter des LC-Modells auf Basis der Kopfschäden des ambulanten Leistungsbereichs für die Testdatenzeiträume $BJ_1 = \{2012, 2013, 2014\}$, $BJ_2 = \{2013, 2014, 2015\}$, $BJ_3 = \{2014, 2015, 2016\}$ und $BJ_4 = \{2015, 2016, 2017\}$.²⁰⁴

²⁰⁴ Eigene Darstellung. Datenquelle: RePortal.

E.10 Gefittete Parameter des LC-Modells (Leistungsbereich stationär)

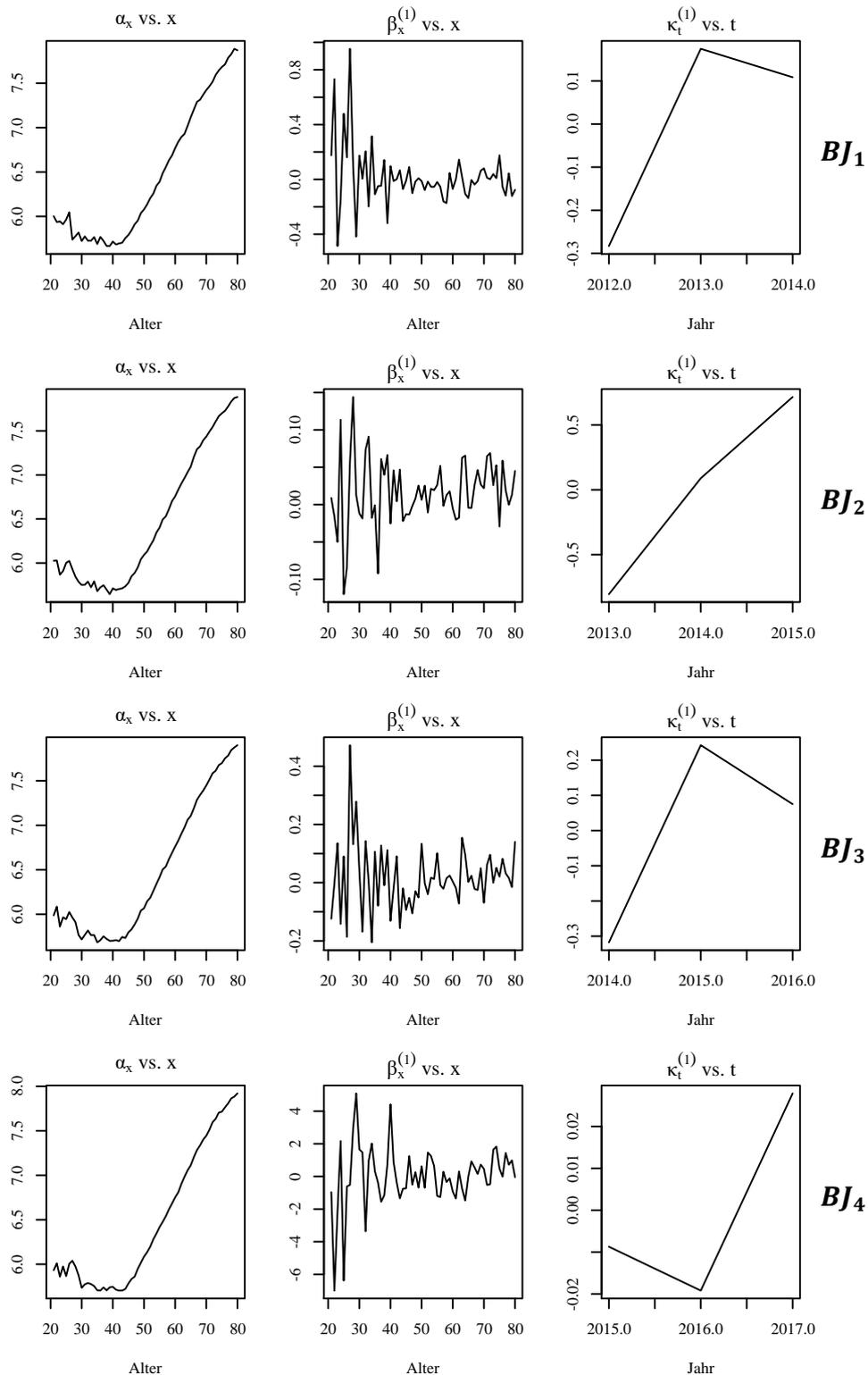


Abb. 24: Gefittete Parameter des LC-Modells auf Basis der Kopfschäden des stationären Leistungsbereichs für die Testdatenzeiträume $BJ_1 = \{2012, 2013, 2014\}$, $BJ_2 = \{2013, 2014, 2015\}$, $BJ_3 = \{2014, 2015, 2016\}$ und $BJ_4 = \{2015, 2016, 2017\}$.²⁰⁵

²⁰⁵ Eigene Darstellung. Datenquelle: RePortal.

E.11 Gefittete Parameter des LC-Modells (Leistungsbereich Zahn)

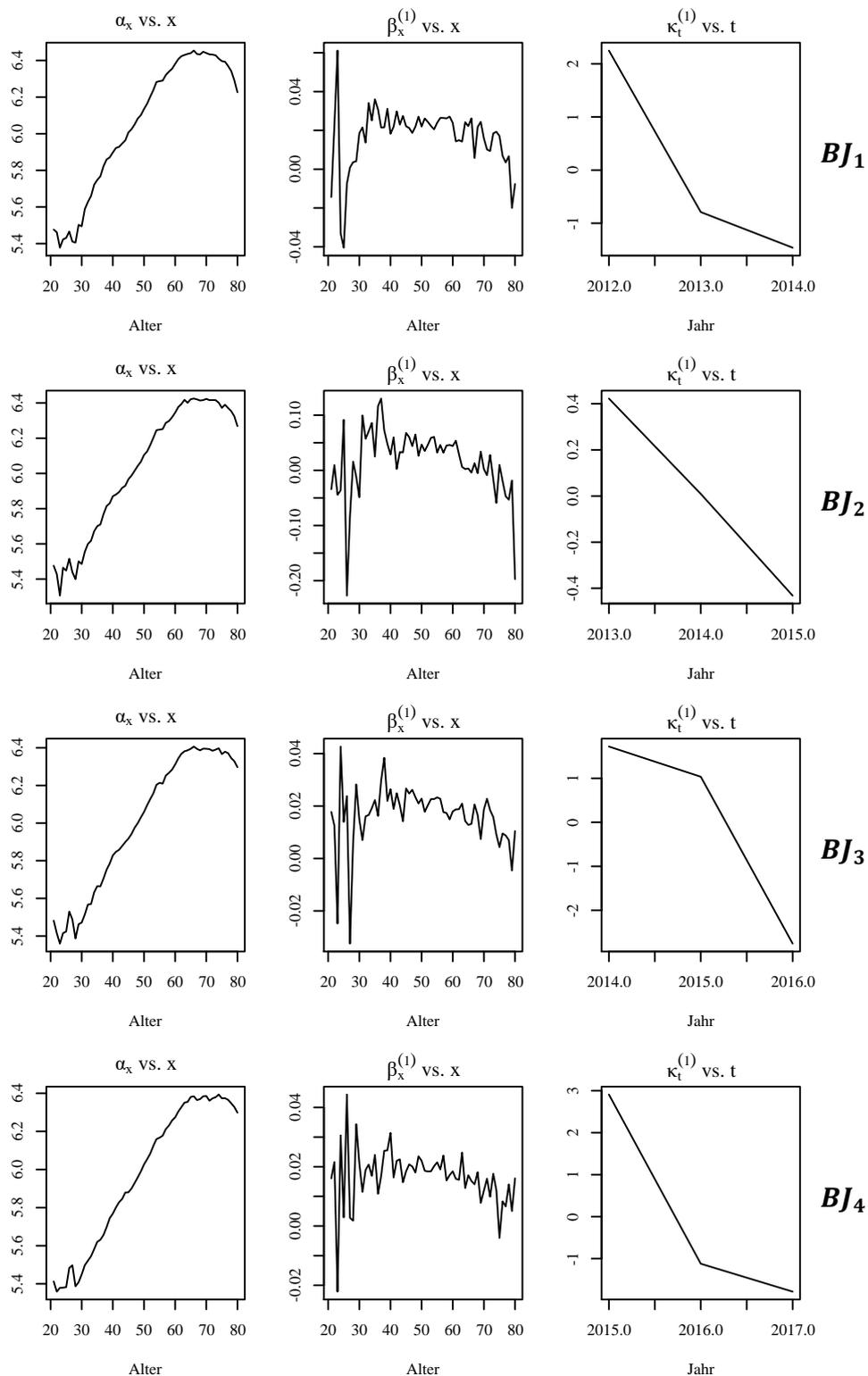


Abb. 25: Gefittete Parameter des LC-Modells auf Basis der Kopfschäden des Leistungsbereichs Zahn für die Testdatenzeiträume $BJ_1 = \{2012, 2013, 2014\}$, $BJ_2 = \{2013, 2014, 2015\}$, $BJ_3 = \{2014, 2015, 2016\}$ und $BJ_4 = \{2015, 2016, 2017\}$.²⁰⁶

²⁰⁶ Eigene Darstellung. Datenquelle: RePortal.

F Darstellung der Residuen

F.1 Darstellung der Residuen für den Testdatenzeitraum BJ₄ (Teil 1)

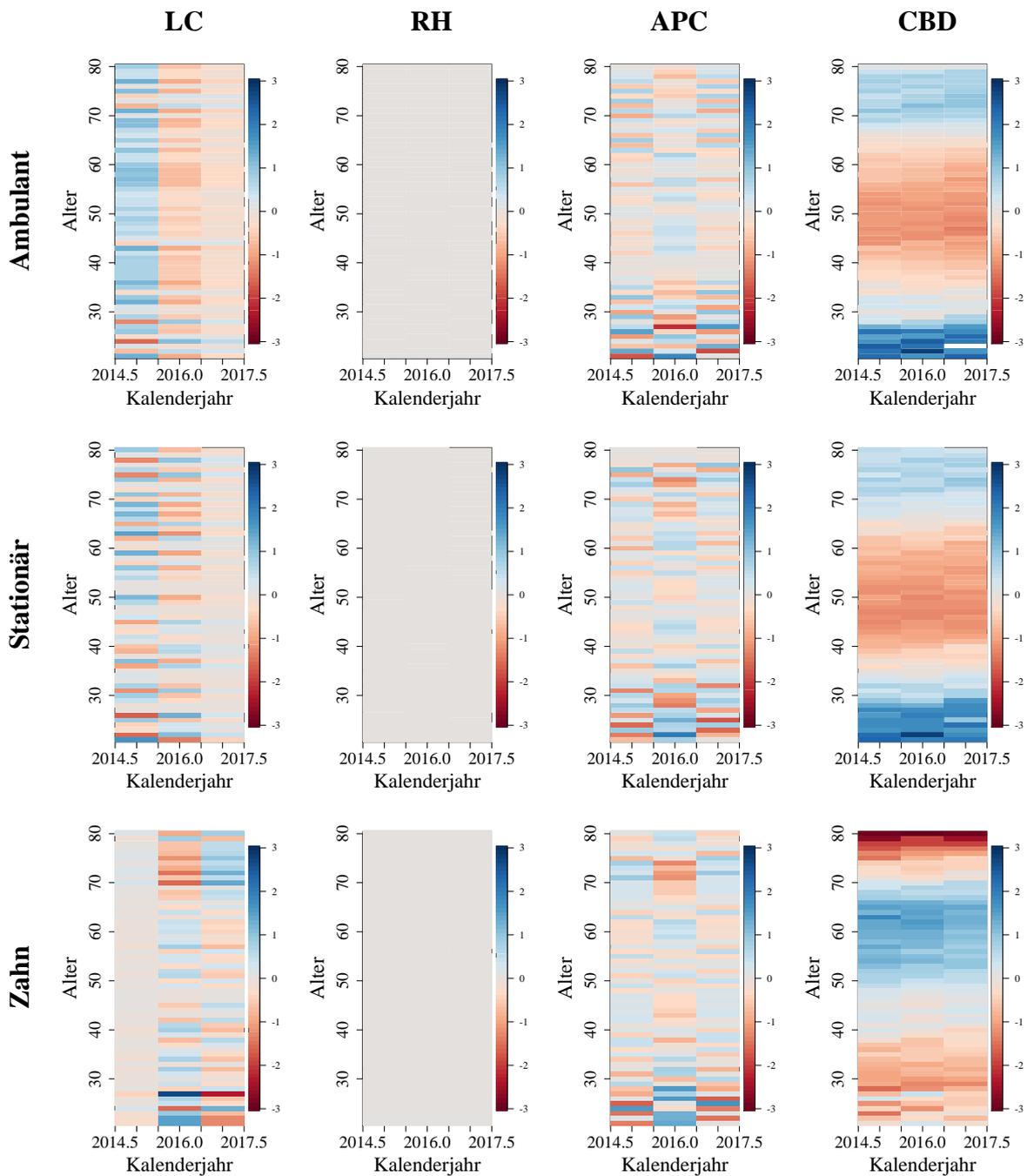


Abb. 26: Residuen des LC-, RH-, APC- sowie CBD-Modells auf Basis der Kopfschäden der drei Leistungsbereiche {ambulant, stationär, Zahn} für den Testdatenzeitraum $BJ_4 = \{2015, 2016, 2017\}$.²⁰⁷

²⁰⁷ Eigene Darstellung. Datenquelle: RePortal.

F.2 Darstellung der Residuen für den Testdatenzeitraum BJ₄ (Teil 2)

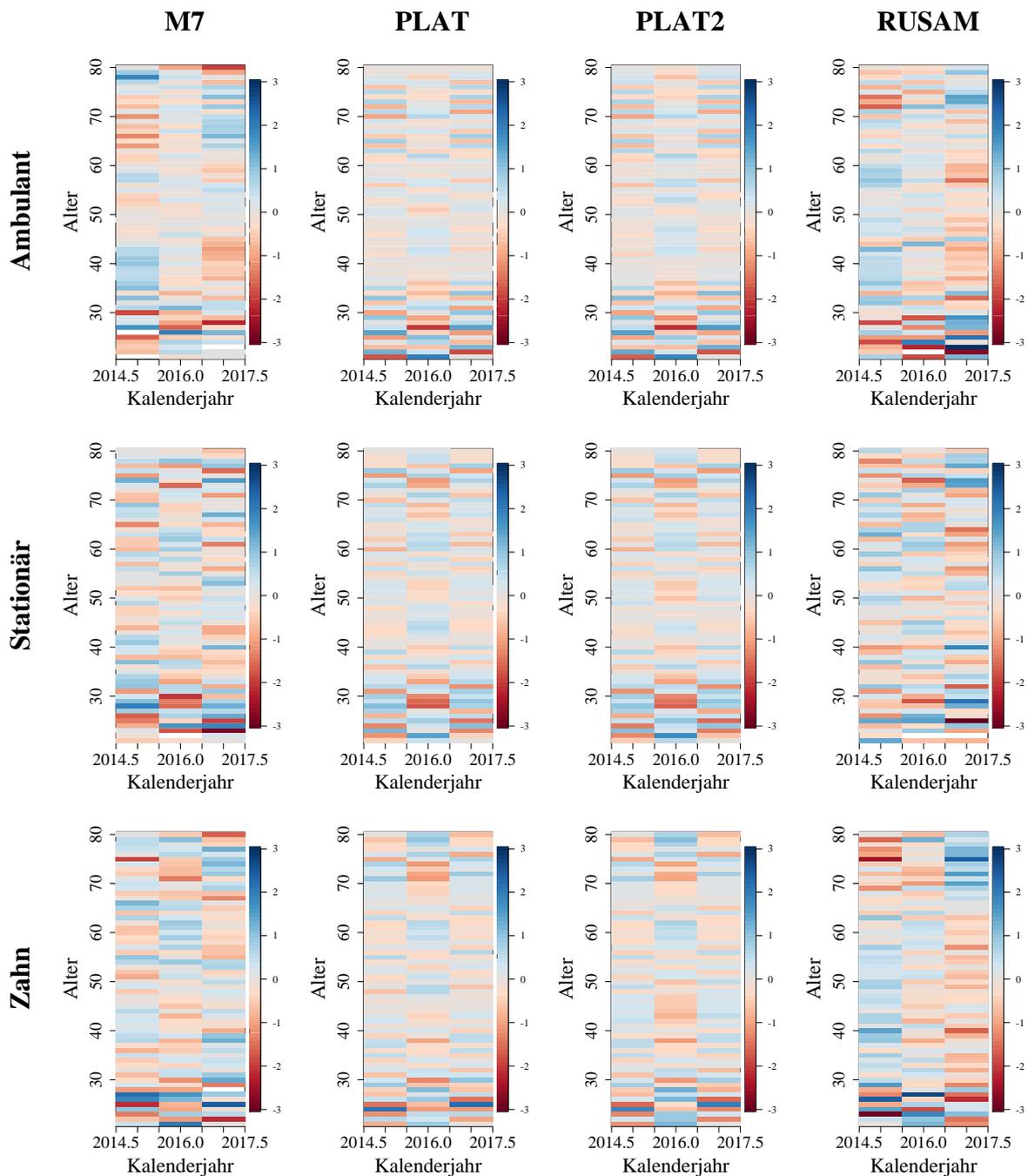


Abb. 27: Residuen des M7-, PLAT-, PLAT2- sowie RUSAM-Modells auf Basis der Kopfschäden der drei Leistungsbe-
reiche {ambulant, stationär, Zahn} für den Testdatenzeitraum $BJ_4 = \{2015, 2016, 2017\}$.²⁰⁸

²⁰⁸ Eigene Darstellung. Datenquelle: RePortal.

F.3 Darstellung der Residuen des APC-Modells

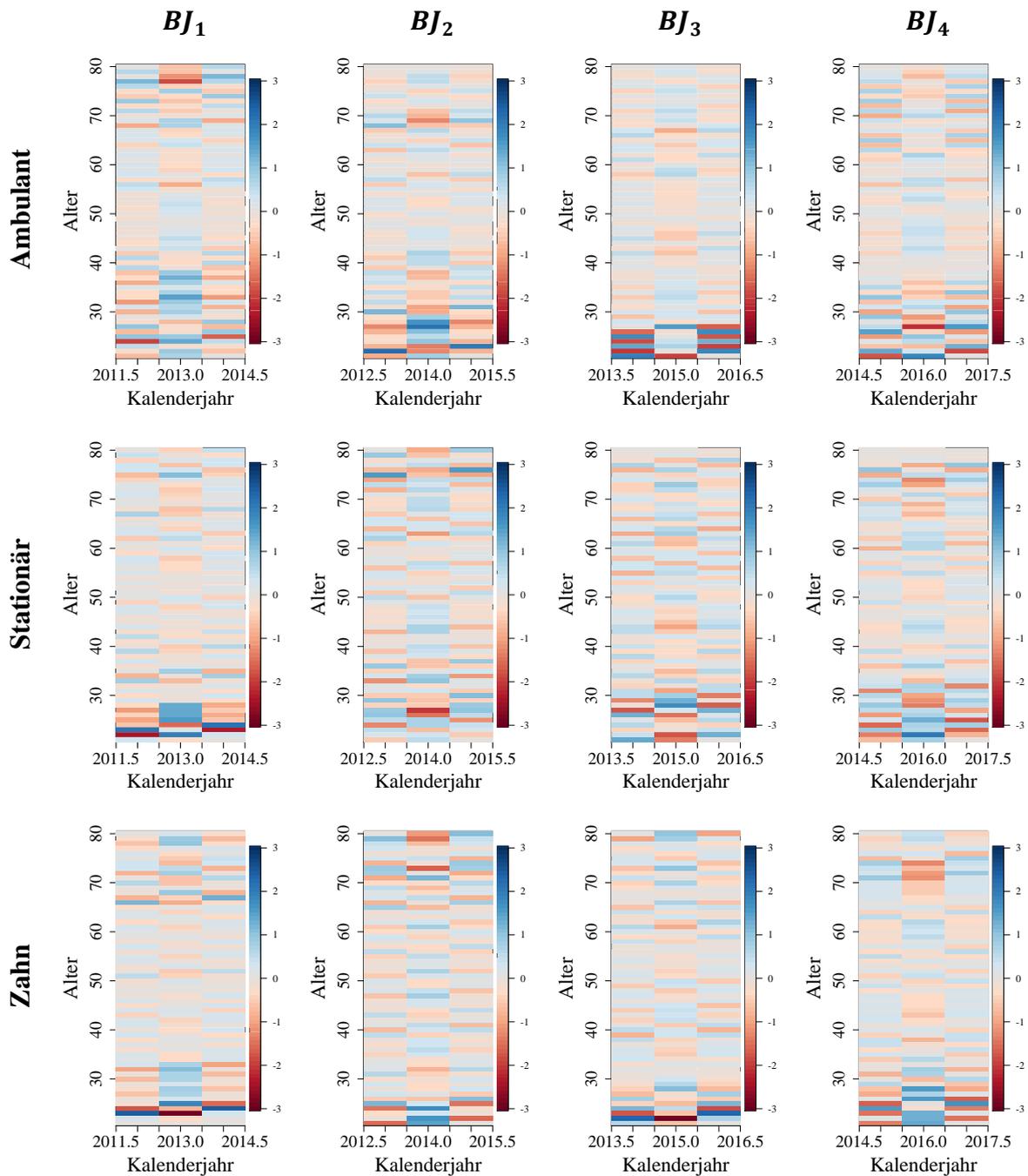


Abb. 28: Residuen des APC-Modells auf Basis der Kopfschäden der drei Leistungsbereiche {ambulant, stationär, Zahn} für die Testdatenzeiträume $BJ_1 = \{2012, 2013, 2014\}$, $BJ_2 = \{2013, 2014, 2015\}$, $BJ_3 = \{2014, 2015, 2016\}$ und $BJ_4 = \{2015, 2016, 2017\}$.²⁰⁹

²⁰⁹ Eigene Darstellung. Datenquelle: RePortal.

G Gegenüberstellung projizierter Kopfschäden mit PKV-Echtdaten

G.1 Vergleich der für das Jahr 2019 projizierten Kopfschäden gegen die tatsächlichen PKV-Daten (Leistungsbereich ambulant)

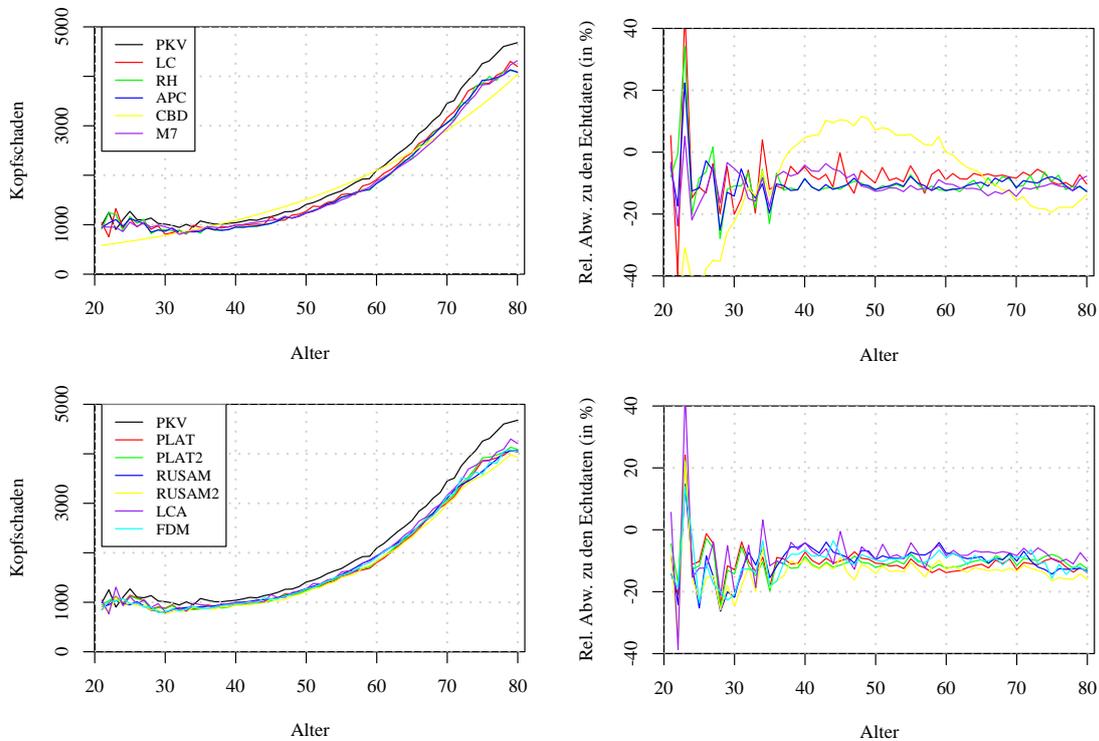


Abb. 29: Vergleich der tatsächlichen Kopfschäden des ambulanten Leistungsbereichs des PKV-Verbandes aus dem Validierungsjahr $VJ_4 = 2019$ gegen die projizierten Kopfschäden der einzelnen Modelle für das Jahr 2019 auf Basis der gefitteten Parameter für den Testdatenzeitraum $BJ_4 = \{2015, 2016, 2017\}$. Die linke Grafik zeigt die absoluten Werte. Rechts ist die relative Abweichung $(\hat{y}_{x,t} - y_{x,t})/y_{x,t}$ der einzelnen Modelle zu den Echtdaten dargestellt.²¹⁰

²¹⁰ Eigene Darstellung. Datenquelle: RePortal.

G.2 Vergleich der für das Jahr 2019 projizierten Kopfschäden gegen die tatsächlichen PKV-Daten (Leistungsbereich Zahn)

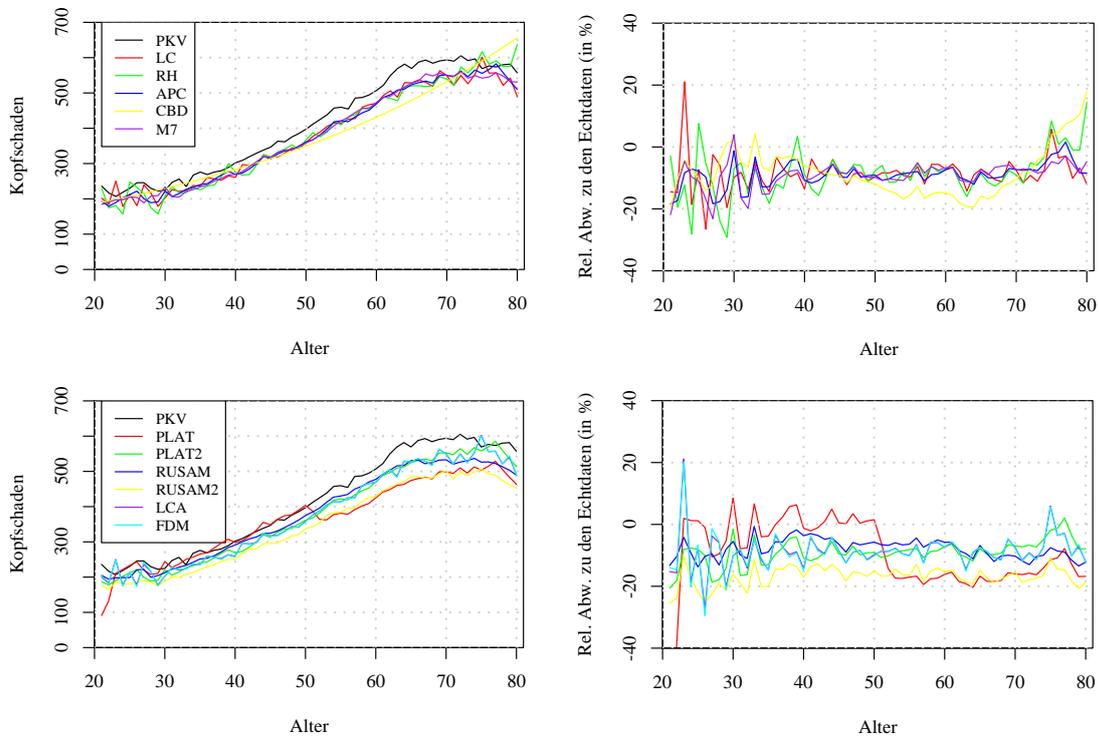


Abb. 30: Vergleich der tatsächlichen Kopfschäden des Zahn-Leistungsbereichs des PKV-Verbandes aus dem Validierungsjahr $VJ_4 = 2019$ gegen die projizierten Kopfschäden der einzelnen Modelle für das Jahr 2019 auf Basis der gefitteten Parameter für den Testdatenzeitraum $BJ_4 = \{2015, 2016, 2017\}$. Die linke Grafik zeigt die absoluten Werte. Rechts ist die relative Abweichung $(\hat{y}_{x,t} - y_{x,t})/y_{x,t}$ der einzelnen Modelle zu den Echtdaten dargestellt.²¹¹

²¹¹ Eigene Darstellung. Datenquelle: RePortal.

H Darstellung der MAE- und RMSE-Werte

H.1 Darstellung der MAE- und RMSE-Werte für den Altersbereich A_1

MAE	LC	RH	APC	CBD	M7	PLAT	PLAT2	RUSAM	RUSAM2	LCA	FDM	
Ambulant	2016	86 (5)	83 (4)	89 (8)	142 (11)	90 (9)	87 (6)	87 (6)	80 (3)	61 (1)	92 (10)	79 (2)
	2017	97 (9)	97 (9)	79 (4)	164 (11)	89 (7)	74 (2)	79 (4)	78 (3)	60 (1)	96 (8)	84 (6)
	2018	121 (8)	107 (6)	88 (3)	208 (11)	84 (1)	87 (2)	88 (3)	90 (5)	135 (10)	121 (8)	119 (7)
	2019	146 (8)	127 (3)	129 (4)	246 (11)	114 (1)	125 (2)	130 (5)	143 (6)	181 (10)	143 (6)	147 (9)
Stationär	2016	41 (7)	39 (6)	38 (4)	111 (11)	42 (8)	48 (10)	38 (4)	25 (1)	27 (2)	43 (9)	32 (3)
	2017	43 (8)	69 (10)	32 (1)	108 (11)	34 (3)	51 (9)	32 (1)	39 (5)	37 (4)	40 (6)	41 (7)
	2018	57 (6)	61 (9)	56 (4)	127 (11)	45 (1)	57 (6)	56 (4)	54 (2)	70 (10)	59 (8)	54 (2)
	2019	79 (7)	82 (10)	54 (3)	154 (11)	50 (1)	64 (5)	55 (4)	53 (2)	69 (6)	80 (8)	80 (8)
Zahn	2016	22 (7)	23 (10)	10 (1)	25 (11)	14 (4)	15 (5)	10 (1)	17 (6)	13 (3)	22 (7)	22 (7)
	2017	25 (5)	46 (11)	22 (4)	36 (9)	19 (1)	39 (10)	21 (2)	25 (5)	21 (2)	25 (5)	26 (8)
	2018	25 (7)	30 (10)	18 (3)	9 (1)	19 (5)	38 (11)	18 (3)	14 (2)	22 (6)	25 (7)	25 (7)
	2019	29 (6)	30 (8)	27 (4)	17 (1)	30 (8)	22 (3)	28 (5)	19 (2)	46 (11)	30 (8)	29 (6)
Summe	(83)	(96)	(43)	(110)	(49)	(71)	(42)	(42)	(66)	(90)	(72)	
Rang	8	10	3	11	4	6	1	1	5	9	7	

Tab. 10: MAE-Werte (mit dem entsprechenden Rang in Klammern) diverser Modelle auf Basis der Kopfschäden der drei Leistungsbereiche {ambulant, stationär, Zahn} für die Testdatenzeiträume $BJ_1 = \{2012, 2013, 2014\}$, $BJ_2 = \{2013, 2014, 2015\}$, $BJ_3 = \{2014, 2015, 2016\}$ und $BJ_4 = \{2015, 2016, 2017\}$ für den Altersbereich $A_1 = \{21, \dots, 40\}$.

RMSE	LC	RH	APC	CBD	M7	PLAT	PLAT2	RUSAM	RUSAM2	LCA	FDM	
Ambulant	2016	140 (9)	116 (5)	124 (8)	181 (11)	96 (2)	123 (6)	123 (6)	99 (3)	91 (1)	145 (10)	100 (4)
	2017	142 (10)	126 (8)	101 (3)	201 (11)	103 (5)	105 (6)	101 (3)	90 (2)	68 (1)	141 (9)	116 (7)
	2018	159 (9)	148 (6)	110 (1)	268 (11)	112 (3)	112 (3)	110 (1)	125 (5)	158 (7)	158 (7)	159 (9)
	2019	189 (9)	153 (5)	143 (3)	312 (11)	137 (1)	141 (2)	144 (4)	166 (7)	199 (10)	185 (8)	163 (6)
Stationär	2016	51 (8)	46 (6)	45 (4)	139 (11)	48 (7)	59 (10)	45 (4)	38 (2)	37 (1)	53 (9)	41 (3)
	2017	49 (7)	80 (9)	44 (4)	131 (11)	41 (1)	81 (10)	43 (2)	50 (8)	43 (2)	47 (5)	48 (6)
	2018	78 (6)	83 (9)	77 (3)	160 (11)	68 (1)	81 (7)	77 (3)	77 (3)	91 (10)	81 (7)	75 (2)
	2019	112 (7)	105 (6)	81 (3)	192 (11)	85 (5)	119 (10)	80 (2)	74 (1)	84 (4)	112 (7)	115 (9)
Zahn	2016	31 (9)	35 (11)	13 (1)	28 (7)	17 (3)	27 (6)	13 (1)	21 (5)	19 (4)	30 (8)	31 (9)
	2017	35 (7)	57 (11)	26 (4)	37 (9)	23 (1)	44 (10)	25 (3)	28 (5)	24 (2)	35 (7)	34 (6)
	2018	30 (7)	39 (10)	21 (3)	12 (1)	22 (5)	44 (11)	21 (3)	16 (2)	24 (6)	30 (7)	31 (9)
	2019	32 (5)	35 (9)	30 (3)	20 (1)	33 (6)	40 (10)	31 (4)	21 (2)	47 (11)	33 (6)	33 (6)
Summe	(93)	(95)	(40)	(106)	(40)	(91)	(36)	(45)	(59)	(90)	(76)	
Rang	9	10	2	11	2	8	1	4	5	7	6	

Tab. 11: RMSE-Werte (mit dem entsprechenden Rang in Klammern) diverser Modelle auf Basis der Kopfschäden der drei Leistungsbereiche {ambulant, stationär, Zahn} für die Testdatenzeiträume $BJ_1 = \{2012, 2013, 2014\}$, $BJ_2 = \{2013, 2014, 2015\}$, $BJ_3 = \{2014, 2015, 2016\}$ und $BJ_4 = \{2015, 2016, 2017\}$ für den Altersbereich $A_1 = \{21, \dots, 40\}$.

H.2 Darstellung der MAE- und RMSE-Werte für den Altersbereich A₂

MAE	LC	RH	APC	CBD	M7	PLAT	PLAT2	RUSAM	RUSAM2	LCA	FDM	
Ambulant	2016	46 (6)	27 (3)	27 (3)	245 (11)	41 (5)	24 (1)	24 (1)	58 (10)	48 (8)	46 (6)	55 (9)
	2017	86 (9)	66 (1)	71 (3)	323 (11)	82 (6)	74 (4)	70 (2)	122 (10)	74 (4)	85 (7)	85 (7)
	2018	78 (4)	81 (9)	80 (8)	153 (11)	64 (2)	78 (4)	79 (6)	37 (1)	111 (10)	76 (3)	79 (6)
	2019	119 (4)	163 (9)	160 (7)	92 (1)	147 (6)	164 (10)	161 (8)	113 (3)	184 (11)	112 (2)	131 (5)
Stationär	2016	19 (7)	14 (3)	13 (1)	183 (11)	15 (4)	40 (10)	13 (1)	16 (5)	36 (9)	19 (7)	18 (6)
	2017	27 (6)	49 (10)	24 (2)	195 (11)	24 (2)	39 (9)	25 (4)	28 (7)	15 (1)	25 (4)	28 (7)
	2018	24 (6)	24 (6)	23 (3)	164 (11)	23 (3)	25 (8)	23 (3)	16 (1)	49 (10)	26 (9)	22 (2)
	2019	39 (5)	35 (2)	35 (2)	142 (11)	39 (5)	63 (9)	36 (4)	22 (1)	63 (9)	40 (8)	39 (5)
Zahn	2016	9 (3)	13 (8)	8 (1)	24 (11)	9 (3)	14 (9)	8 (1)	19 (10)	10 (7)	9 (3)	9 (3)
	2017	23 (2)	30 (8)	24 (5)	14 (1)	24 (5)	31 (10)	24 (5)	40 (11)	30 (8)	23 (2)	23 (2)
	2018	25 (2)	26 (4)	27 (6)	41 (11)	26 (4)	31 (10)	27 (6)	12 (1)	29 (9)	25 (2)	28 (8)
	2019	33 (2)	35 (5)	37 (7)	51 (10)	34 (3)	40 (9)	37 (7)	24 (1)	63 (11)	34 (3)	35 (5)
Summe	(56)	(68)	(48)	(111)	(48)	(93)	(48)	(61)	(97)	(56)	(65)	
Rang	4	8	1	11	1	9	1	6	10	4	7	

Tab. 12: MAE-Werte (mit dem entsprechenden Rang in Klammern) diverser Modelle auf Basis der Kopfschäden der drei Leistungsbereiche {ambulant, stationär, Zahn} für die Testdatenzeiträume $BJ_1 = \{2012, 2013, 2014\}$, $BJ_2 = \{2013, 2014, 2015\}$, $BJ_3 = \{2014, 2015, 2016\}$ und $BJ_4 = \{2015, 2016, 2017\}$ für den Altersbereich $A_2 = \{41, \dots, 60\}$.

RMSE	LC	RH	APC	CBD	M7	PLAT	PLAT2	RUSAM	RUSAM2	LCA	FDM	
Ambulant	2016	62 (8)	32 (3)	32 (3)	248 (11)	58 (6)	28 (1)	28 (1)	63 (9)	55 (5)	64 (10)	59 (7)
	2017	104 (7)	86 (4)	82 (2)	326 (11)	91 (5)	96 (6)	81 (1)	128 (10)	83 (3)	104 (7)	104 (7)
	2018	87 (6)	88 (9)	82 (5)	157 (11)	74 (2)	80 (3)	81 (4)	42 (1)	114 (10)	87 (6)	87 (6)
	2019	129 (4)	168 (9)	166 (7)	98 (1)	159 (6)	173 (10)	166 (7)	117 (2)	190 (11)	122 (3)	137 (5)
Stationär	2016	25 (7)	19 (4)	18 (1)	185 (11)	18 (1)	45 (10)	18 (1)	19 (4)	40 (9)	26 (8)	22 (6)
	2017	38 (7)	67 (10)	32 (3)	197 (11)	28 (2)	55 (9)	32 (3)	35 (5)	20 (1)	36 (6)	38 (7)
	2018	27 (4)	28 (6)	27 (4)	167 (11)	30 (9)	29 (7)	26 (3)	19 (1)	52 (10)	29 (7)	25 (2)
	2019	46 (5)	46 (5)	43 (2)	145 (11)	45 (3)	81 (10)	45 (3)	26 (1)	68 (9)	47 (8)	46 (5)
Zahn	2016	10 (3)	16 (8)	9 (1)	30 (11)	11 (5)	17 (9)	9 (1)	20 (10)	11 (5)	10 (3)	11 (5)
	2017	25 (2)	37 (9)	25 (2)	15 (1)	26 (7)	37 (9)	25 (2)	41 (11)	31 (8)	25 (2)	25 (2)
	2018	27 (2)	30 (7)	28 (5)	46 (11)	27 (2)	38 (10)	27 (2)	14 (1)	30 (7)	28 (5)	30 (7)
	2019	35 (2)	37 (6)	38 (8)	55 (10)	35 (2)	54 (9)	37 (6)	25 (1)	64 (11)	36 (4)	36 (4)
Summe	(57)	(80)	(43)	(111)	(50)	(93)	(34)	(56)	(89)	(69)	(63)	
Rang	5	8	2	11	3	10	1	4	9	7	6	

Tab. 13: RMSE-Werte (mit dem entsprechenden Rang in Klammern) diverser Modelle auf Basis der Kopfschäden der drei Leistungsbereiche {ambulant, stationär, Zahn} für die Testdatenzeiträume $BJ_1 = \{2012, 2013, 2014\}$, $BJ_2 = \{2013, 2014, 2015\}$, $BJ_3 = \{2014, 2015, 2016\}$ und $BJ_4 = \{2015, 2016, 2017\}$ für den Altersbereich $A_2 = \{41, \dots, 60\}$.

H.3 Darstellung der MAE- und RMSE-Werte für den Altersbereich A₃

MAE	LC	RH	APC	CBD	M7	PLAT	PLAT2	RUSAM	RUSAM2	LCA	FDM	
Ambulant	2016	52 (4)	72 (6)	36 (2)	174 (11)	79 (8)	35 (1)	36 (2)	79 (8)	169 (10)	54 (5)	76 (7)
	2017	169 (9)	200 (10)	154 (6)	135 (3)	124 (2)	222 (11)	153 (4)	153 (4)	84 (1)	168 (8)	164 (7)
	2018	202 (6)	190 (1)	190 (1)	322 (10)	234 (9)	199 (4)	190 (1)	220 (8)	349 (11)	199 (4)	210 (7)
	2019	289 (2)	355 (3)	357 (5)	483 (10)	398 (8)	403 (9)	356 (4)	382 (7)	487 (11)	285 (1)	379 (6)
Stationär	2016	75 (7)	46 (4)	42 (1)	138 (11)	47 (5)	97 (10)	42 (1)	45 (3)	92 (9)	76 (8)	69 (6)
	2017	120 (9)	131 (10)	67 (3)	112 (7)	47 (1)	167 (11)	68 (4)	57 (2)	87 (5)	94 (6)	117 (8)
	2018	75 (5)	84 (7)	71 (2)	190 (10)	97 (8)	111 (9)	73 (3)	70 (1)	200 (11)	75 (5)	74 (4)
	2019	103 (5)	105 (7)	93 (2)	198 (9)	113 (8)	268 (11)	92 (1)	102 (3)	240 (10)	103 (5)	102 (3)
Zahn	2016	19 (6)	30 (10)	11 (1)	55 (11)	11 (1)	19 (6)	11 (1)	18 (4)	18 (4)	19 (6)	20 (9)
	2017	40 (7)	69 (11)	30 (4)	57 (10)	31 (5)	13 (1)	31 (5)	22 (3)	21 (2)	40 (7)	40 (7)
	2018	42 (5)	45 (8)	41 (3)	62 (10)	40 (2)	13 (1)	41 (3)	54 (9)	64 (11)	42 (5)	43 (7)
	2019	48 (5)	46 (4)	42 (2)	67 (9)	42 (2)	91 (10)	40 (1)	58 (8)	98 (11)	49 (6)	49 (6)
Summe	(70)	(81)	(32)	(111)	(59)	(84)	(30)	(60)	(96)	(66)	(77)	
Rang	6	8	2	11	3	9	1	4	10	5	7	

Tab. 14: MAE-Werte (mit dem entsprechenden Rang in Klammern) diverser Modelle auf Basis der Kopfschäden der drei Leistungsbereiche {ambulant, stationär, Zahn} für die Testdatenzeiträume $BJ_1 = \{2012, 2013, 2014\}$, $BJ_2 = \{2013, 2014, 2015\}$, $BJ_3 = \{2014, 2015, 2016\}$ und $BJ_4 = \{2015, 2016, 2017\}$ für den Altersbereich $A_3 = \{61, \dots, 80\}$.

RMSE	LC	RH	APC	CBD	M7	PLAT	PLAT2	RUSAM	RUSAM2	LCA	FDM	
Ambulant	2016	69 (5)	102 (9)	44 (1)	197 (11)	101 (8)	45 (2)	45 (2)	91 (7)	191 (10)	65 (4)	90 (6)
	2017	201 (9)	242 (11)	171 (5)	154 (2)	182 (6)	239 (10)	170 (4)	167 (3)	96 (1)	199 (8)	194 (7)
	2018	236 (6)	224 (4)	214 (2)	385 (11)	249 (8)	222 (3)	213 (1)	253 (9)	377 (10)	233 (5)	246 (7)
	2019	308 (2)	372 (4)	372 (4)	553 (11)	407 (6)	418 (9)	371 (3)	413 (8)	512 (10)	305 (1)	410 (7)
Stationär	2016	93 (7)	61 (4)	61 (4)	162 (11)	56 (1)	119 (10)	60 (3)	57 (2)	109 (9)	95 (8)	88 (6)
	2017	146 (9)	186 (11)	78 (3)	138 (7)	60 (1)	180 (10)	79 (4)	62 (2)	109 (5)	113 (6)	144 (8)
	2018	92 (5)	98 (7)	88 (1)	226 (11)	112 (8)	130 (9)	90 (3)	89 (2)	221 (10)	94 (6)	91 (4)
	2019	130 (6)	129 (5)	106 (2)	238 (9)	121 (3)	280 (11)	105 (1)	128 (4)	259 (10)	131 (8)	130 (6)
Zahn	2016	22 (4)	37 (10)	13 (2)	65 (11)	12 (1)	24 (8)	13 (2)	27 (9)	23 (6)	22 (4)	23 (6)
	2017	49 (8)	94 (11)	32 (4)	79 (10)	33 (5)	16 (1)	33 (5)	27 (3)	25 (2)	49 (8)	47 (7)
	2018	45 (4)	50 (8)	44 (3)	70 (11)	42 (2)	17 (1)	45 (4)	56 (9)	65 (10)	45 (4)	47 (7)
	2019	51 (4)	53 (7)	45 (3)	73 (9)	44 (1)	93 (10)	44 (1)	60 (8)	99 (11)	52 (5)	52 (5)
Summe	(69)	(91)	(34)	(114)	(50)	(84)	(33)	(66)	(94)	(67)	(76)	
Rang	6	9	2	11	3	8	1	4	10	5	7	

Tab. 15: RMSE-Werte (mit dem entsprechenden Rang in Klammern) diverser Modelle auf Basis der Kopfschäden der drei Leistungsbereiche {ambulant, stationär, Zahn} für die Testdatenzeiträume $BJ_1 = \{2012, 2013, 2014\}$, $BJ_2 = \{2013, 2014, 2015\}$, $BJ_3 = \{2014, 2015, 2016\}$ und $BJ_4 = \{2015, 2016, 2017\}$ für den Altersbereich $A_3 = \{61, \dots, 80\}$.

11 Literaturverzeichnis

- Ahrens, U.; Böcking, W. & Kirch, W. (2004): Der optionale Start der G-DGRs im Jahr 2003: Warum entschieden sich Krankenhäuser für die Einführung zum frühen Zeitpunkt?, in: *Journal of Public Health*, 12. Jg., Nr. 1, S. 61-71.
- Alho, J. M. (2000): "The Lee-Carter Method for Forecasting Mortality, with Various Extensions and Applications", Ronald Lee, January 2000, in: *North American Actuarial Journal*, 4. Jg., Nr. 1, S. 91-93.
- ALTE OLDENBURGER Krankenversicherung AG (o. J.): Private Krankenversicherung für Arbeitnehmer und Selbstständige, URL: <https://www.alte-oldenburger.de/produkte/private-krankenversicherung/arbeitnehmer-selbststaendige-freiberufler.html>, Stand: 12. Januar 2021.
- Becker, T. (2017): *Mathematik der privaten Krankenversicherung*. Wiesbaden: Springer.
- Böcking, W. u. a. (2005): First results of the introduction of DRGs in Germany and overview of experience from other DRG countries, in: *Journal of Public Health*, 13. Jg., Nr. 3, S. 128-137.
- Bohk, C. (2012): *Ein probabilistisches Bevölkerungsprognosemodell. Entwicklung und Anwendung für Deutschland*. Wiesbaden: Springer.
- Booth, H. u. a. (2006): Lee-Carter mortality forecasting: a multi-country comparison of variants and extensions, in: *Demographic Research*, 15. Jg., S. 289-310.
- Booth, H.; Maindonald, J. & Smith, L. (2002): Applying Lee-Carter under conditions of variable mortality decline, in: *Population Studies*, 56. Jg., Nr. 3, S. 325-336.
- Bowers, N. L. u. a. (1997): *Actuarial mathematics*, 2. Aufl. Schaumburg, Illinois: The Society of Actuaries.
- Box, G. E. P. u. a. (2015): *Time Series Analysis. Forecasting and Control*, 5. Aufl. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons.
- Box, G. E. P. & Jenkins, G. M. (1970): *Time Series Analysis. Forecasting and Control*. San Francisco: Holden-Day.
- Brouhns, N.; Denuit, M. M. & van Keilegom, I. (2005): Bootstrapping the Poisson log-bilinear model for mortality forecasting, in: *Scandinavian Actuarial Journal*, Nr. 3, S. 212-224.

- Brouhns, N.; Denuit, M. M. & Vermunt, J. K. (2002a): A Poisson log-bilinear regression approach to the construction of projected lifetables, in: *Insurance: Mathematics and Economics*, 31. Jg., Nr. 3, S. 373-393.
- Brouhns, N.; Denuit, M. M. & Vermunt, J. K. (2002b): Measuring the longevity risk in mortality projections, in: *Bulletin of the Swiss Association of Actuaries*, S. 105-130.
- Bundesanstalt für Finanzdienstleistungsaufsicht (2014): Wahrscheinlichkeitstabellen in der privaten Krankenversicherung 2012, URL: https://www.bafin.de/SharedDocs/Veroeffentlichungen/DE/Statistik/st_wahrscheinlichkeitstabellen_pkv_2012.html, Stand: 12. Januar 2021.
- Bundesanstalt für Finanzdienstleistungsaufsicht (2020): Wahrscheinlichkeitstabellen für die Krankenversicherung 2019 gemäß § 159 VAG, URL: https://www.bafin.de/SharedDocs/Veroeffentlichungen/DE/Statistik/st_wahrscheinlichkeitstabellen_pkv_2019.html, Stand: 12. Januar 2021.
- Butt, Z.; Haberman, S. & Shang, H. L. (2014): *ilc: Lee-Carter Mortality Models using Iterative Fitting Algorithms*, URL: <https://cran.r-project.org/package=ilc>, Stand: 25. Februar 2021.
- Cairns, A. J. G. (o. J.): LifeMetrics Open Source R code for Stochastic Mortality Modelling, URL: <http://www.macs.hw.ac.uk/~andrewc/lifemetrics/>, Stand: 25. Februar 2021.
- Cairns, A. J. G. u. a. (2009): A Quantitative Comparison of Stochastic Mortality Models Using Data from England and Wales and the United States, in: *North American Actuarial Journal*, 13. Jg., Nr. 1, S. 1-35.
- Cairns, A. J. G. u. a. (2011): Mortality density forecasts: An analysis of six stochastic mortality models, in: *Insurance: Mathematics and Economics*, 48. Jg., Nr. 3, S. 355-367.
- Cairns, A. J. G.; Blake, D. & Dowd, K. (2006): A Two-Factor Model for Stochastic Mortality with Parameter Uncertainty: Theory and Calibration, in: *Journal of Risk and Insurance*, 73. Jg., Nr. 4, S. 687-718.
- Christiansen, M. C. u. a. (2018): Projection models for health expenses, in: *Annals of Actuarial Science*, 12. Jg., Nr. 1, S. 185-203.

- Christiansen, M. C.; Denuit, M. M. & Lazar, D. (2012): The Solvency II Square-Root Formula for Systematic Biometric Risk, in: *Insurance: Mathematics and Economics*, 50. Jg., Nr. 2, S. 257-265.
- Clayton, D. & Schifflers, E. (1987): Models for temporal variation in cancer rates. I: Age-period and age-cohort models, in: *Statistics in Medicine*, 6. Jg., Nr. 4, S. 449-467.
- Currie, I. D. (2006): Smoothing and Forecasting Mortality Rates with P-splines, URL: <https://www.macs.hw.ac.uk/~iain/research/talks/Mortality.pdf>, Stand: 17. April 2020.
- Currie, I. D. (2016): On fitting generalized linear and non-linear models of mortality, in: *Scandinavian Actuarial Journal*, 2016. Jg., Nr. 4, S. 356-383.
- DAK-Gesundheit (2021): Krebsfrüherkennung: Rückgang in der Corona-Pandemie, URL: [https://www.dak.de/dak/bundesthemen/krebsfrueherkennung-rueckgang-in-der-corona-pandemie-2451288.html#/,](https://www.dak.de/dak/bundesthemen/krebsfrueherkennung-rueckgang-in-der-corona-pandemie-2451288.html#/) Stand: 12. August 2021.
- Debeka Krankenversicherungsverein a. G. (o. J.): Krankenversicherung für Arbeitnehmer, URL: https://www.debeka.de/produkte/versichern/krankenversicherung/nicht_pflichtversich/index.html, Stand: 12. Januar 2021.
- Delwarde, A.; Denuit, M. M. & Eilers, P. H. C. (2007): Smoothing the Lee–Carter and Poisson log-bilinear models for mortality forecasting: a penalized log-likelihood approach, in: *Statistical Modelling*, 7. Jg., Nr. 1, S. 29-48.
- DKV Deutsche Krankenversicherung AG (o. J.): Private Krankenversicherung (PKV) für Sie, URL: <https://www.dkv.com/produkte-guenstige-private-krankenversicherung-vollversicherung-106321.html>, Stand: 12. Januar 2021.
- Dowd, K.; Cairns, A. J. G. & Blake, D. (2020): CBDX: a workhorse mortality model from the Cairns–Blake–Dowd family, in: *Annals of Actuarial Science*, 14. Jg., Nr. 2, S. 445-460.
- Forfar, D. O.; McCutcheon, J. J. & Wilkie, A. D. (1988): On graduation by mathematical formula, in: *Journal of the Institute of Actuaries*, 115. Jg., Nr. 1, S. 1-149.
- Frees, E. W. (2006): Forecasting Labor Force Participation Rates, in: *Journal of Official Statistics*, Nr. 22, S. 453-485.
- Haberman, S. & Renshaw, A. E. (2009): On age-period-cohort parametric mortality rate projections, in: *Insurance: Mathematics and Economics*, 45. Jg., Nr. 2, S. 255-270.

- Haberman, S. & Renshaw, A. E. (2011): A comparative study of parametric mortality projection models, in: *Insurance: Mathematics and Economics*, 48. Jg., Nr. 1, S. 35-55.
- Hamner, B. & Frasco, M. (2018a): *Metrics: Evaluation Metrics for Machine Learning*, URL: <https://cran.r-project.org/package=Metrics>, Stand: 22. April 2021.
- Hamner, B. & Frasco, M. (2018b): Package 'Metrics', URL: <https://cran.r-project.org/web/packages/Metrics/Metrics.pdf>, Stand: 22. April 2021.
- Held, L. & Sabanés Bové, D. (2014): *Applied Statistical Inference. Likelihood and Bayes*. Heidelberg: Springer.
- Hobcraft, J.; Menken, J. & Preston, S. (1982): Age, Period, and Cohort Effects in Demography: A Review, in: *Population Index*, 48. Jg., Nr. 1, S. 4-43.
- Holt, C. C. (2004): Forecasting seasonals and trends by exponentially weighted moving averages, in: *International Journal of Forecasting*, 20. Jg., Nr. 1, S. 5-10.
- Hunt, A. & Blake, D. (2015): On the Structure and Classification of Mortality Models, URL: <https://www.pensions-institute.org/wp-content/uploads/2019/workingpapers/wp1506.pdf>, Stand: 1. Februar 2021.
- Hyndman, R. J. u. a. (2019a): demography: Forecasting Mortality, Fertility, Migration and Population Data, URL: <https://cran.r-project.org/package=demography>, Stand: 25. Februar 2021.
- Hyndman, R. J. u. a. (2019b): Package 'demography', URL: <https://cran.r-project.org/web/packages/demography/demography.pdf>, Stand: 22. April 2021.
- Hyndman, R. J. & Shahid Ullah, M. (2007): Robust forecasting of mortality and fertility rates: A functional data approach, in: *Computational Statistics & Data Analysis*, 51. Jg., Nr. 10, S. 4942-4956.
- Hyndman, R. J. & Shang, H. L. (2020): ftsa: Functional Time Series Analysis, URL: <https://cran.r-project.org/package=ftsa>, Stand: 22. April 2021.
- Jong, P. de & Tickle, L. (2006): Extending Lee–Carter Mortality Forecasting, in: *Mathematical Population Studies*, 13. Jg., Nr. 1, S. 1-18.
- Koissi, M.-C.; Shapiro, A. F. & Högnäs, G. (2006): Evaluating and extending the Lee–Carter model for mortality forecasting: Bootstrap confidence interval, in: *Insurance: Mathematics and Economics*, 38. Jg., Nr. 1, S. 1-20.

- Lee, R. D. & Carter, L. R. (1992): Modeling and Forecasting U. S. Mortality, in: Journal of the American Statistical Association, 87. Jg., Nr. 419, S. 659-671.
- Lee, R. D. & Miller, T. (2001): Evaluating the performance of the Lee-Carter method for forecasting mortality, in: Demography, 38. Jg., Nr. 4, S. 537-549.
- Levantesi, S. & Menzietti, M. (2012): Managing longevity and disability risks in life annuities with long term care, in: Insurance: Mathematics and Economics, 50. Jg., Nr. 3, S. 391-401.
- Ligges, U. (2008): Programmieren mit R, 3. Aufl. Berlin: Springer.
- Lovász, E. (2011): Modellierung stochastischer Mortalitätsraten zur Verbriefung von Langlebigkeitsrisiken, URL: <https://tud.qucosa.de/api/qucosa%3A25868/attachment/ATT-0/>, Stand: 13. April 2020.
- McCullagh, P. & Nelder, J. A. (1989): Generalized Linear Models, 2. Aufl. London: Chapman and Hall.
- Milbrodt, H. & Helbig, M. (1999): Mathematische Methoden der Personenversicherung. Berlin: Walter de Gruyter.
- Milbrodt, H. & Röhrs, V. (2016): Aktuarielle Methoden der deutschen Privaten Krankenversicherung. Karlsruhe: Versicherungswirtschaft.
- Oeppen, J. & Vaupel, J. W. (2002): Broken Limits to Life Expectancy, in: Science, 296. Jg., Nr. 5570, S. 1029-1031.
- Osmond, C. (1985): Using Age, Period and Cohort Models to Estimate Future Mortality Rates, in: International Journal of Epidemiology, 14. Jg., Nr. 1, S. 124-129.
- Piontkowski, J. (2018): HealthExpensesFDM – GitHub repository, URL: <https://github.com/JensPiontkowski/HealthExpensesFDM>, Stand: 1. Oktober 2020.
- Piontkowski, J. (2020): Forecasting health expenses using a functional data model, in: Annals of Actuarial Science, 14. Jg., Nr. 1, S. 72-82.
- Pitacco, E. u. a. (2009): Modelling Longevity Dynamics for Pensions and Annuity Business. New York: Oxford University Press.
- PKV-Verband (o. J.): So kalkuliert eine Versicherung die Beiträge, URL: <https://www.pkv.de/wissen/beitraege/beitragskalkulation/>, Stand: 30. Januar 2021.

- PKV-Verband (2020): Statistik-Handbuch, Band III – Kopfschadenstatistik (KX), URL: <https://extranet2.pkv.de/extranet>, Stand: 8. Januar 2021.
- Plat, R. (2009): On stochastic mortality modeling, in: *Insurance: Mathematics and Economics*, 45. Jg., Nr. 3, S. 393-404.
- Renshaw, A. E. & Haberman, S. (2003): Lee–Carter mortality forecasting with age-specific enhancement, in: *Insurance: Mathematics and Economics*, 33. Jg., Nr. 2, S. 255-272.
- Renshaw, A. E. & Haberman, S. (2006): A cohort-based extension to the Lee–Carter model for mortality reduction factors, in: *Insurance: Mathematics and Economics*, 38. Jg., Nr. 3, S. 556-570.
- Renshaw, A. E. & Haberman, S. (2008): On simulation-based approaches to risk measurement in mortality with specific reference to Poisson Lee–Carter modelling, in: *Insurance: Mathematics and Economics*, 42. Jg., Nr. 2, S. 797-816.
- Robert Koch-Institut (2021): COVID-19 (Coronavirus SARS-CoV-2), URL: https://www.rki.de/DE/Content/InfAZ/N/Neuartiges_Coronavirus/nCoV.html, Stand: 12. August 2021.
- Rodrigues, C. G. u. a. (2013): The Applicability of the Lee-Carter Method to Forecast Health Services Use in Brazil, in: N. Hoque; M. A. McGehee & B. S. Bradshaw (Hrsg.): *Applied Demography and Public Health*, S. 371-385, Dordrecht: Springer.
- Rusam, F. (1935): Entwicklung der Mathematik der individuellen Krankheitskostenversicherung, in: *Deutscher Aktuarverein e.V. (Hrsg.)*, S. 148-165.
- Sauer, S. (2019): *Moderne Datenanalyse mit R. Daten einlesen, aufbereiten, visualisieren, modellieren und kommunizieren*. Wiesbaden: Springer Gabler.
- Statistisches Bundesamt (2020a): Produktion in Corona-Zeiten: 80 % mehr Desinfektionsmittel von Januar bis September 2020 gegenüber Vorjahreszeitraum, URL: https://www.destatis.de/DE/Presse/Pressemitteilungen/2020/11/PD20_N075_42.html, Stand: 12. August 2021.
- Statistisches Bundesamt (2020b): Sterbetafel 2017/2019, URL: https://www.destatis.de/DE/Themen/Gesellschaft-Umwelt/Bevoelkerung/Sterbefaelle-Lebenserwartung/Publicationen/Downloads-Sterbefaelle/periodensterbetafel-erlaeuterung-5126203197004.pdf?__blob=publicationFile, Stand: 26. November 2020.

- The R Foundation (2021): What is R?, URL: <https://www.r-project.org/about.html>, Stand: 9. April 2021.
- Turner, H. & Firth, D. (2020a): Generalized nonlinear models in R: An overview of the `gnm` package, URL: <https://cran.r-project.org/web/packages/gnm/vignettes/gnmOverview.pdf>, Stand: 16. April 2021.
- Turner, H. & Firth, D. (2020b): `gnm`: Generalized Nonlinear Models, URL: <https://cran.r-project.org/package=gnm>, Stand: 6. Februar 2020.
- Turner, H. & Firth, D. (2020c): Package '`gnm`', URL: <https://cran.r-project.org/web/packages/gnm/gnm.pdf>, Stand: 17. April 2021.
- Villegas, A. M. (2020): full PLAT model with StMoMo, URL: <https://github.com/amvillegas/StMoMo/issues/27>, Stand: 25. Februar 2021.
- Villegas, A. M.; Millossovich, P. & Kaishev, V. K. (2018a): Package '`StMoMo`', URL: <https://cran.r-project.org/web/packages/StMoMo/StMoMo.pdf>, Stand: 17. April 2021.
- Villegas, A. M.; Millossovich, P. & Kaishev, V. K. (2018b): `StMoMo`: An R Package for Stochastic Mortality Modeling, in: *Journal of Statistical Software*, 84. Jg., Nr. 3.
- Villegas, A. M.; Millossovich, P. & Kaishev, V. K. (2018c): `StMoMo`: Stochastic Mortality Modelling, URL: <https://cran.r-project.org/package=StMoMo>, Stand: 25. Februar 2021.
- Vogel, J. (2015): *Prognose von Zeitreihen. Eine Einführung für Wirtschaftswissenschaftler*. Wiesbaden: Springer.
- Wagner, F. (2011): *Gabler Versicherungslexikon. Ein Leitfaden für Praktiker des Betreuungsrechts, Heilberufe und Angehörige von Betreuten*. Wiesbaden: Springer Gabler.
- Whittaker, E. T. (1923): On a New Method of Graduation, in: *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 41. Jg., S. 63-75.

12 Ehrenwörtliche Versicherung

Hiermit versichere ich, dass ich diese Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe. Außerdem versichere ich, dass ich die allgemeinen Prinzipien wissenschaftlicher Arbeit und Veröffentlichung, wie sie in den Leitlinien guter wissenschaftlicher Praxis der Carl von Ossietzky Universität Oldenburg festgelegt sind, befolgt habe.

Oldenburg, 15. November 2021

Ort, Datum, Unterschrift