

Carl von Ossietzky Universität Oldenburg

Master of Education: Elementarmathematik & Evangelische Religion

Masterarbeit

Strategisches Problemlösen

Theoretische Grundlagen und ein didaktisches Experiment im Kontext von magischen Quadraten

Vorgelegt von:

Lennard Jens Ahlers

lennard.jens.ahlers@uni-oldenburg.de

Betreuender Gutachter: Prof. Dr. Ralph Schwarzkopf

Zweiter Gutachter: Dr. Simeon Schwob

Oldenburg, den 19.03.2021

Inhalt

1. Einleitende Vorbemerkungen	1
2. Thema, Aufbau, Fragestellung und Ziele der Untersuchung.....	3
2.1 Aktueller Forschungsstand	3
2.2 Erläuterung des Erkenntnisinteresses und der Fragestellung.....	5
2.3 Fachliche Grundlagen der 3×3 -Zauberquadrate	5
2.4 Erläuterung der Lernumgebung	8
3. Theorie und Methodik der Untersuchung.....	10
3.1 Problemlösen und problemhaltige Aufgaben	10
3.1.1 Definition des Problemlösens.....	10
3.1.2 Problemlösen als Prozess	11
3.1.3 Kategorisierung von problemhaltigen Aufgaben	14
3.2 Heuristische Strategien zur Lösung von mathematischen Problemen	15
3.2.1 Definition heuristischer Strategien	15
3.2.2 Kategorisierung heuristischer Strategien	15
3.3 Argumentationsanalyse.....	20
3.3.1 Argumentationsbegriffe, Argumente und Argumentationen	20
3.3.2 Funktionale Argumentationsanalyse.....	22
3.3.3 Kategorisierung von Argumenten	25
3.4 Abschließende Bemerkungen zur Methodik.....	27
4. Analyse und Reflexion der Ergebnisse der Untersuchung	27
4.1 Interview 1: JP und J verallgemeinern die Struktur der Zauberquadrate	28
4.2 Interview 2: K und D arbeiten vorwärts und nutzen Analogien.....	44
4.3 Interview 3: L und J verallgemeinern und nutzen Spezialfälle	52
4.4 Interview 4: B und S arbeiten vorwärts und nutzen Analogien	65
4.5 Zusammenschau der gewonnenen Erkenntnisse.....	75
4.5.1 Inhaltliche Erkenntnisse der Untersuchung	75
4.5.2 Theoretische Erkenntnisse der Untersuchung	78
5. Abschließende Bemerkungen.....	81
Literaturverzeichnis.....	83
Anhang	89
Selbstständigkeitserklärung	128

„Keine Idee ist wirklich schlecht, wenn wir nicht unkritisch sind.

Wirklich schlecht ist nur überhaupt keine Idee zu haben.“

George PÓLYA (2010), Schule des Denkens, Vom Lösen mathematischer Probleme, 177

1. Einleitende Vorbemerkungen

Problemlösen und Problemlösekompetenz wird im schulischen wie auch nach-schulischen Bereich bisher wenig bewusst fokussiert. Dies steht im Kontrast zur Wichtigkeit des Problemlösens nicht nur im mathematischen, sondern auch im außer-mathematischen Kontext.¹ WINTER (1995) stellt in seinen Ausführungen zum Zusammenhang von Mathematikunterricht und Allgemeinbildung heraus, dass bereits im Mathematikunterricht beginnend Kompetenzen des Problemlösens aufgebaut werden sollten, die auch über die Mathematik hinausreichen.² Bezogen auf Schülerinnen und Schüler wurde von vielen Autorinnen und Autoren zu der Frage geforscht, wie Schülerinnen und Schüler strategisch Probleme lösen.³ Kaum beachtet wurde dabei die Frage, wie Erwachsene strategisch problemlösend handeln. Um, an diese Forschungslücke anknüpfend, zu ergründen, wie Erwachsene mathematische Probleme strategisch lösen, soll sich daher in dieser Untersuchung der Frage nach der Nutzung der Arten von Problemlösestrategien Erwachsener anhand eines mathematischen Kontextes gewidmet werden. Diesen Kontext stellen in der Untersuchung die sogenannten Zauberquadrate, welche auch als magischen Quadrate bekannt sind, dar, die auch teilweise in der Grundschule als substantielle Lernumgebung thematisiert werden. Somit könnte, aufbauend auf dieser Arbeit, ein Vergleich mit den Problemlösestrategien von Schülerinnen und Schülern erfolgen.

In der vorliegenden Arbeit soll daher, anknüpfend an den Leitsatz PÓLYAS (2010), der Forschungsfrage nachgegangen werden, welche heuristischen Strategien Erwachsene beim strategischen Problemlösen verwenden, wenn sie neue Zauberquadrate mit einer Zauberzahl ihrer Wahl erzeugen sollen und wie sie ihre genutzten heuristischen Strategien argumentativ im Sinne SCHWARZKOPFS (2000a/2003) begründen. Es geht im Sinne PÓLYAS (2010) nicht um eine Bewertung oder Hierarchisierung der genutzten Problemlösestrategien, sondern um die Erfassung der genutzten Strategien und der Art ihrer Begründung im Problemlöseprozess.

¹ HEROLD-BLASIUS / HOLZÄPFEL / ROTT (2019), Problemlösestrategien, 281ff. beschreiben aus schulischer Sicht diverse Gründe, die wiederkehrend angeführt werden und aufgrund derer Problemlösen häufig wenig im Unterricht thematisiert wird. Die Wichtigkeit des Problemlösens als prozessbezogene Kompetenz wird dagegen etwa im Kerncurriculum Mathematik Grundschule des NIEDERSÄCHSISCHEN KULTUSMINISTERIUMS (2017) oder den Empfehlungen der KULTUSMINISTERKONFERENZ (2004) dargestellt.

² Vgl. WINTER (1995), Mathematikunterricht, 39.

³ Hierbei sei etwa auf die Forschungen PÓLYAS (2010, in der Originalauflage von 1949), ROTTs (2013/14) und anderen zum Verlauf des Problemlöseprozesses sowie BRUDER / COLLETS (2011), KIPMANS (2020), LEUDERS' (2011) und anderen zur Klassifikation verschiedener Arten heuristischer Strategien des Problemlösens verwiesen.

Dabei werden im zweiten Kapitel zuerst grundlegende Parameter der Untersuchung dargestellt: Es wird der aktuelle Forschungsstand zu Zauberquadraten (allgemein wie auch speziell in Bezug auf das strategische Problemlösen) dargestellt, das Erkenntnisinteresse und die Forschungsfrage der Untersuchung erläutert, fachliche Grundlagen zu Zauberquadraten dargestellt und die erstellte Lernumgebung mit ihren Zielen und Besonderheiten vorgestellt. Im dritten Kapitel wird die Theorie der Untersuchung dargestellt. Dabei wird auf die für die Arbeit relevanten theoretischen Themenkomplexe fokussiert: Zuerst wird auf den Komplex des Problemlösens (mit der Definition des Problemlösens in der Literatur) eingegangen, den Prozess des Problemlösens nach ROTT (2013/14) sowie die aktuellen Erkenntnisse der Forschung zur Modellierung des Problemlöseprozesses nach PÓLYA (2010) und ROTT (2013/14) sowie schließlich ein kurzer Überblick zu Kategorisierungen problemhaltiger Aufgaben gegeben. Im nächsten Themenkomplex werden Grundlagen zu heuristischen Strategien beim Problemlösen aufgezeigt, dazu werden heuristische Strategien definiert und die Kategorisierungen von heuristischen Strategien nach BRUDER / COLLET (2011) und KIPMAN (2020) dargestellt. Im darauffolgenden Themenkomplex finden sich Ausführungen zur funktionalen Argumentationsanalyse, wobei zunächst auf theoretische Grundlagen, wie die Definition von Argumentationsbegriffen nach KRUMMHEUER (1991) und SCHWARZKOPF (2000a) und der Argumentation-Argument-Diskriminierung nach SCHWARZKOPF (2000a) beschrieben wird, ehe dann die funktionale Argumentationsanalyse nach TOULMIN (1975) und die Modifikation durch SCHWARZKOPF (2000a) dargestellt wird sowie die Kategorisierung von Argumenten nach SCHWARZKOPF (2003). Abgeschlossen wird das Kapitel zur Theorie mit einer Zusammenfassung der dieser Arbeit zugrundeliegenden theoretischen und methodischen Werkzeuge, die zur Analyse der gesammelten Forschungsdaten in Kapitel 4 dienen sollen. In Kapitel 4 wird dann die erarbeitete Methodik angewandt, um die Interviews einzeln systematisch auszuwerten. Dazu werden alle Interviews gegliedert und nacheinander analysiert und interpretiert. Abschließend werden die gesammelten Ergebnisse zusammengefasst dargestellt und interpretiert, sowie ihre Bedeutung im Rahmen dieser Untersuchung herausgestellt. Die Arbeit schließen reflektierende Bemerkungen zur Methodik und Durchführung der vorliegenden Untersuchung.

Das Forschungsinteresse dieser Arbeit liegt in der Herausarbeitung der beim strategischen Problemlösen in Aufgabe 3 seitens der Interviewten hervorgebrachten heuristischen Strategien und in der Art ihrer Begründung. Dazu werden mit Hilfe der Kategorisierung von heuristischen Problemlösestrategien nach BRUDER / COLLET (2011) und KIPMAN (2020) die von den Interviewten genutzten erfolgreichen, strategischen Problemlösungswege analysiert und dabei

die verwendeten heuristischen Strategien herausgearbeitet sowie gesammelt. Mittels einer Argumentationsanalyse sollen die Interviews für die Herausarbeitung und Analyse der heuristischen Strategien sequenziert und die einzelnen Sequenzen anschließend analysiert werden. Dabei soll herausgearbeitet werden, ob nach SCHWARZKOPF (2000a/2003) eine Argumentation vorliegt, wie diese Argumentation aufgebaut ist und ferner welche Art von Argumenten genutzt wird, um die Nutzbarkeit der heuristischen Strategie zu begründen.

In dieser Untersuchung wird sich aus Gründen der Operationalisierbarkeit auf $n \times n$ -Zauberquadrate dritter Ordnung ($n = 3$) und mit natürlichen Zahlen ohne Null sowie ohne Zahldopplungen fokussiert. Eine Interaktionsanalyse erfolgt nicht, da mit Erwachsenen weniger Rahmungsdifferenzen auftreten als mit Schülerinnen und Schülern. Über die Interaktionsanalyse in Kombination mit der Argumentationsanalyse kann Erkenntnis über das Vorhandensein von Rahmungsdifferenzen und damit auch über fundamentales und relatives Lernen nach MILLER (1986) gewonnen werden.⁴ Dies erfolgt in der vorliegenden Arbeit nicht, da der Fokus der Arbeit auf dem Erfassen der zum strategischen Problemlösen genutzten heuristischen Strategien liegt. Ferner wird kein spezieller Schulbezug etwa zur Lehrbarkeit heuristischer Strategien oder der konkreten Unterrichtsgestaltung hergestellt, da die Interviews aus der aktuellen Pandemie-Situation heraus mit Erwachsenen aus dem Umfeld des Autors geführt wurden.⁵

2. Thema, Aufbau, Fragestellung und Ziele der Untersuchung

Im Folgenden werden die grundlegenden Parameter der Untersuchung dargestellt und dabei unter anderem auf den aktuellen Forschungsstand zu Zauberquadraten und ihren Bezug zum Problemlösen und heuristischen Strategien, das Erkenntnisinteresse, die genaue Fragestellung, fachliche Grundlagen zur Lernumgebung sowie eine genaue Beschreibung der Lernumgebung und ihrer Aspekte Bezug genommen.

2.1 Aktueller Forschungsstand

Zauberquadrate finden sich vereinzelt in didaktischer Literatur, etwa bei HENN / FILLER (2015), PAPADOPOULOU (2016) oder SCHEMEL (2010), oder in einigen Schulbüchern, wie etwa dem

⁴ Vergleiche dazu MILLER (1986), Lernprozesse, 138ff; STEINBRING (2000), Bedeutung, 45 und SCHWARZKOPF (2003), Begründungen, 213.

⁵ Hierzu sei aber auf die Forschungsergebnisse zur Lehrbarkeit von heuristischem Denken beziehungsweise der Nutzung von heuristischen Strategien und heuristischem Vorgehen im Schulkontext etwa bei PÓLYA (1966), Lösen, 9ff.; ROTH (2002), Problemlösetechniken, 14ff; BRUDER (2002), Fragen, 4ff; COLLET (2009), Förderung, 79ff.; BRUDER (2016), Problem Solving, 2-6; HEROLD-BLASIUS / ROTT (2018), Strategien, 2ff.; TROPPER (2019), Modellieren, 87f.; SANTOS-TRIGO (2016), Technologies, 30f. zu digitaler Unterstützung beim Problemlösen(lernen) und anderen verwiesen. MALASPINA (2016), Overview, 31-34 zeigt hierzu aktuelle Ergebnisse internationaler Forschung sowie Entwicklungsperspektiven auf.

Zahlenbuch 3 (2001), obwohl sich diese für vielfältige mathematische Aktivitäten und Lernanlässe eignen.⁶ PAPADOPOULOU (2016), SCHEMEL (2010), BEHREND (2017) zeigen, dass sich Zauberquadrate als Kommunikationsanlass und zum Argumentieren, zum sprachlichen und differenzierten Lernen oder zum Entdecken mathematischer Strukturen eignen.⁷ Aber auch bis in die Sekundarstufe und ins Erwachsenenalter können Zauberquadrate als Lerngegenstand Anwendung finden.⁸

Ferner eignen sich Zauberquadrate nicht nur zum Argumentieren-Lernen oder zum Entdecken von mathematischen Strukturen (wie es PAPADOPOULOU (2016), HENN / FILLER (2015) und andere zeigen), sondern auch als Lerngegenstand bezogen auf das Problemlösen-Lernen und das Nutzen und Entdecken von heuristischen Strategien.⁹ Zauberquadrate sind ein produktiver Lerngegenstand zum Problemlösen-Lernen, der sich dabei nicht nur für Schülerinnen und Schüler eignet, sondern, anknüpfend an die Überlegungen MOTZERS (2013), die Zauberquadrate als spiralförmig weiter-entwickelbaren Lerngegenstand beschreibt, auch für Erwachsene.¹⁰ Besonders, wenn man im Sinne von BRUDER / HEINRICH / BAUER (2015) Problemlösen als Möglichkeit des allgemeinen Lernens betrachtet, erschließen sich dieses und andere inhaltliche Felder für problemlösendes Handeln und Reflektieren auch für Erwachsene außerhalb der Schule.¹¹ Ebendies gilt auch, wenn man die WINTERSchen Grunderfahrungen des Mathematikunterrichts betrachtet und ihre Implikationen in Bezug auf die Bedeutung des Problemlösens für die Allgemeinbildung erkennt. So kann in der Auseinandersetzung mit problemhaltigen Aufgaben das Lernen heuristischer Fähigkeiten ermöglicht werden, die über die Mathematik hinausweisen.¹² Hierzu wurden aber bisher bezogen auf Erwachsene in der fachdidaktischen Literatur kaum Überlegungen in diese Richtung vollzogen. Daher scheint es sinnvoll, dieser Forschungslücke nachzugehen und zu erforschen, wie Erwachsene beim Bearbeiten und / oder Erzeugen von Zauberquadraten problemlösend tätig werden.

⁶ Vgl. HENN / FILLER (2015), DIDAKTIK, 129-134; vgl. PAPADOPOULOU (2016), Zauberquadrate, 26ff; vgl. SCHEMEL (2010), Zauberquadrate, 3f; vgl. WITTMANN / MÜLLER (2001), Zahlenbuch, 14.

⁷ Vgl. PAPADOPOULOU (2016), Zauberquadrate, 26ff; vgl. SCHEMEL (2010), Zauberquadrate, 3-4; vgl. BEHREND (2017), Mathematik, 14ff.

⁸ Vgl. MOTZER (2013), Quadrate, 672-675.

⁹ Bezogen auf das Problemlösen und die Nutzung heuristischer Strategien finden sich bisher keine expliziten Arbeiten in der didaktischen Forschungsliteratur. Leichte Ansätze lassen sich bei SCHEMEL (2010), Zauberquadrate, 4, erkennen, die davon spricht, dass Kinder beim „Erfinden eigener Zauberquadrate (...) erkennen, dass sie die äußeren Zahlen nur drehen müssen, um ein verändertes Quadrat zu erhalten. Andere Kinder wagen sich vielleicht in höhere Zahlenräume und erfinden ganz neue Quadrate.“. Der Fokus ihrer Arbeit liegt dabei jedoch auf dem Wecken von Begeisterung für die Mathematik am Gegenstand der Zauberquadrate.

¹⁰ Vgl. MOTZER (2013), Quadrate, 672-675.

¹¹ Vgl. BRUDER / HEINRICH / BAUER (2015), Handbuch, 279ff.

¹² Vgl. WINTER (1996), Mathematikunterricht, 42ff.

2.2 Erläuterung des Erkenntnisinteresses und der Fragestellung

In der vorliegenden Arbeit soll mittels theoretischer Analysewerkzeuge und einem didaktischen Experiment im Kontext von magischen Quadraten beziehungsweise Zauberquadraten das strategische Problemlösen von Erwachsenen näher beleuchtet werden. Es sollen die von den Interviewten genutzten heuristischen Strategien analysiert werden, wie auch die von ihnen vorgebrachten Begründungen ihres strategischen Vorgehens beim Problemlösen. Am Gegenstand der magischen Quadrate beziehungsweise Zauberquadrate soll untersucht werden, wie Erwachsene neue Zauberquadrate mit einer Zauberzahl ihrer Wahl erzeugen, also welche Strategien sie verwenden und wie sie diese argumentativ begründen.

Wie bereits in den einleitenden Vorbemerkungen angedeutet, wurde in der fachdidaktischen Literatur bisher kaum zu strategischem Problemlösen von Erwachsenen geforscht, da der Fokus auf Schülerinnen und Schülern lag, um bei diesen mittels fachdidaktischer Methoden und Inhalte die Problemlösekompetenz anzubahnen und (weiter) zu entwickeln. Hierzu betont WINTER (1996) die Wichtigkeit der Rolle des Mathematikunterrichts, da im Mathematikunterricht Problemlösekompetenzen angebahnt und entwickelt werden sollen, die auch über die Mathematik hinausreichen.¹³ Neben dem Fokus der Erforschung von Problemlösestrategien von Schülerinnen und Schülern wurde dabei die Frage nach den Problemlösefähigkeiten von Erwachsenen (und speziell die Frage, welche Strategien diese beim Problemlösen verwenden) bisher wenig erforscht. An diese Lücke anknüpfend, ist es daher von wissenschaftlichem Interesse zu erforschen, wie Erwachsene vorgehen, wenn sie strategisch-problemlösend tätig sind. Dies soll am inhaltlichen Gegenstand der Zauberquadrate geschehen.

Es wird daher in dieser Untersuchung folgender Forschungsfrage nachgegangen:

Wie konstruieren Erwachsene neue Zauberquadrate und wie beschreiben und begründen sie argumentativ ihre beim Problemlösen entdeckten und verwendeten heuristischen Strategien?

2.3 Fachliche Grundlagen der 3×3 -Zauberquadrate

„Zauberquadrate“ oder auch „magische Quadrate“ sind streng genommen die Anordnung der Zahlen $1, 2, \dots, n$ in einem quadratischen $n \times n$ -Schema mit einer Zahl pro Zelle, bei denen die Summe, oder auch Zauberzahl genannt, jeder Diagonale, Zeile und Spalte gleich groß ist.¹⁴

¹³ Vgl. WINTER (1996), Mathematikunterricht, 39.

¹⁴ Vgl. PAPADOPOULOU (2016), Zauberquadrate, 26ff.; vgl. MOTZER (2013), Quadrate, 1ff.; SCHEMEL (2010), Zauberquadrate, 3; BEHREND (2017), Mathematik, 14ff.; vgl. PÖHLS-STÖWESAND (2019), Quadrate, 37; vgl. SCHLÖDER (2019), Quadrate, 12-16; vgl. HENN / FILLER (2015), Didaktik, 129-134. Dabei ist anzumerken, dass neben dem Begriff „Zauberquadrat“, etwa bei PAPADOPOULOU oder SCHEMEL, auch der Begriff des „magischen Quadrats“, etwa bei MOTZER, BEHREND, PÖHLS-STÖWESAND und SCHLÖDER, Anwendung findet. Beide Begriffe

Die ersten Zauberquadrate wurden schon vor einigen tausend Jahren gefunden, bekannt ist hier etwa das *Lo-Shu-Quadrat* aus dem dritten Jahrtausend vor christlicher Zeitrechnung. Auch in der Kunst finden sich Referenzen zum Zauberquadrat etwa in DÜRERS *Melencolia I* von 1514.¹⁵

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Abbildung 1: Das Lo-Shu-Quadrat

In der Grundschule finden sich zumeist 3×3 -Zauberquadrate mit positiven, natürlichen Zahlen größer Null. Die 3×3 -Zauberquadrate haben dabei den folgenden allgemeinen Aufbau:¹⁶

a-b	a+b+c	a-c
a+b-c	a	a-b+c
a+c	a-b-c	a+b

Zauberzahl: $3a$

Abbildung 2: Aufbau eines 3×3 -Zauberquadrats (Darstellung nach: MOTZER (2013), *Quadrate*, 673) mit $a, b, c \in \mathbb{N}$

Dabei soll sich in dieser Untersuchung auf die folgenden drei wesentlichen Eigenschaften von 3×3 -Zauberquadraten fokussiert werden:

Eigenschaft 1: Die Zauberzahl wird durch Addition aller drei Zahlen einer Zeile, Diagonale oder Spalte erzeugt und ist das Dreifache der Mittelzahl. Dies kann wie folgt begründet werden:

Für die beiden Diagonalen gilt:

$$(a - b) + a + (a + b) = 3a \text{ und } (a + c) + a + (a - c) = 3a.$$

fokussieren aber auf den gleichen inhaltlichen Gegenstand. Ursprünglich ist der Begriff der „magischen Quadrate“, der in der jüngeren mathematikdidaktischen Forschung jedoch oft auch mit dem deckungsgleichen Begriff der „Zauberquadrate“ genutzt wurde. In der vorliegenden Untersuchung wird der Begriff des „Zauberquadrats“ verwendet, der bei seiner Erwähnung den inhaltlich deckungsgleichen Begriff des „magischen Quadrats“ miteinschließen soll. Dieser wird gewählt, da dieser einen Begriff bestehend aus einem Wort darstellt und somit alltagsgerechter ist. Zusätzlich ist der damit verknüpfte Begriff der „Zauberzahl“ aus den gerade genannten Gründen geeigneter als der deckungsgleiche Begriff der „magischen Zahl“, welcher zwangsläufig bei der Entscheidung für den Begriff des „magischen Quadrates“ folgen würde.

¹⁵ Vgl. BEHREND (2017), *Mathematik*, 12; vgl. HENN / FILLER (2015), *Didaktik*, 129-134.

¹⁶ Vgl. MOTZER (2013), *Quadrate*, 672-675.

Für die drei Zeilen gilt:

$$(a - b) + (a + b + c) + (a - c) = 3a; (a + b - c) + a + (a - b + c) \text{ und } (a + c) + (a - b - c) + (a + b) = 3a.$$

Für die drei Spalten gilt:

$$(a - b) + (a + b - c) + (a + c); (a + b + c) + a + (a - b - c) = 3a \text{ und } (a - c) + (a - b + c) + (a + b) = 3a.$$

Ferner lässt sich feststellen, dass bei 3×3 -Zauberquadraten das mittlere Zahlenelement (in der obigen Darstellung „a“) immer das arithmetische Mittel aller Zahlen des Zahlenquadrates enthält, wodurch das mittlere Zahlenelement nicht nur vom räumlichen Begriff her den Mittelwert darstellt, sondern auch gleichzeitig vom numerischen Begriff. Dies kann wie folgt begründet werden: Das arithmetische Mittel kann mit der Formel $\bar{x} = \frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}$ bestimmt werden. Mit den Überlegungen aus Abbildung 1 ergibt sich für das arithmetische Mittel:

$$\bar{x} = \frac{(a-b)+(a+b+c)+(a-c)+(a+b-c)+(a)+(a-b+c)+(a+c)+(a-b-c)+(a+b)}{9} = \frac{9a}{9} = a.$$

Eigenschaft 2: In den beiden Diagonalen und jeweils einer der mittleren Zeilen und Spalten ist der Betrag der Differenz von der Mittelzahl a zu ihren Randzahlen immer in der jeweiligen Diagonalen, Zeile und Spalte konstant.

Für die beiden Diagonalen gilt:

$$D1: |a - (a - b)| = |-b| \text{ und } |a - (a + b)| = |+b|.$$

$$D2: |a - (a - c)| = |-c| \text{ und } |a - (a + c)| = |+c|.$$

Für die Zeile gilt:

$$|a - (a + b - c)| = |(b - c)| \text{ und } |a - (a - b + c)| = |(-b + c)|.$$

Für die Spalte gilt:

$$|a - (a + b + c)| = |b + c| \text{ und } |a - (a - b - c)| = |(-b - c)|.$$

Eigenschaft 3: Zauberquadrate sind operativ mittels Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division so veränderbar, dass wieder ein 3×3 -Zauberquadrat mit den oben dargestellten Eigenschaften entsteht.

(a-b) ■ d	(a+b+c) ■ d	(a-c) ■ d
(a+b-c) ■ d	(a) ■ d	(a-b+c) ■ d
(a+c) ■ d	(a-b-c) ■ d	(a+b) ■ d

Zauberzahl: $3a \blacksquare 3d$

Abbildung 3: Operative Veränderbarkeit von Zauberquadraten mit dem Operator \blacksquare und $d \in \mathbb{N} > 0$

Zauberquadrate können mittels dem Operator „ \blacksquare “ (für Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division) und der Variablen d , mit $d \in \mathbb{N} > 0$ so verändert werden, dass wieder ein neues Zauberquadrat entsteht.¹⁷

2.4 Erläuterung der Lernumgebung

Wie bereits dargestellt, stellen Zauberquadrate eine geeignete Lernumgebung zum Argumentieren aber auch möglicherweise zum Problemlösen dar, da etwa unvollständige Zauberquadrate vielfältige Möglichkeiten und Strategien des Vervollständigens bei den Problemlösenden initiieren können. Ziel des Interviews ist es daher, diese Hypothese beziehungsweise Fragestellung zu prüfen und sich hauptsächlich bei Aufgabe 3 der Lernumgebung die von den Interviewten genutzten heuristischen Strategien und die argumentative Begründung ihrer gewählten Strategie(n) anzuschauen. Dazu sollen die Begründungen eingefordert werden, falls diese von den Interviewten nicht selbst vorgebracht werden.

Im Folgenden soll die dreigliedrig aufgebaute Lernumgebung dargestellt werden (ein ausführlicher Interviewleitfaden mit Aufgaben und Erläuterungen befindet sich im Anhang):

Bevor das eigentliche Interview beginnt, sollen die Interviewten zunächst begrüßt und ihnen für ihren Einsatz gedankt werden, sowie Fragen zum Ablauf und Ziel des Interviews beantwortet werden, um die eventuell vorhandene Nervosität zu reduzieren.

In Aufgabe 1 wird den Interviewten zunächst das Aufgabenformat der Zauberquadrate erklärt und dabei erläutert, was das „Zauberhafte“ an den Zauberquadraten ist: Es wird dargestellt, dass 3×3 -Zauberquadrate aus einer quadratischen Anordnung von 9 Quadraten mit je einer Zahl pro Quadrat bestehen, wobei jedes Quadrat eine positive, natürliche Zahl größer Null enthält. Das „Zauberhafte“ an den Zauberquadraten ist, dass alle drei Zahlen jeder Spalte, Zeile und

¹⁷ Zu einer ähnlichen Feststellung kommen auch SCHLÖDER (2019), Quadrate, 12 sowie HENN / FILLER (2015), Didaktik, 132.

Diagonale addiert, immer eine konstante Zahl, die sogenannte Zauberzahl, ergeben. Dann bekommen die Interviewten jeweils ein eigenes Zauberquadrat und werden gebeten, nacheinander das gerade Gehörte einmal laut an ihrem Zauberquadrat zu prüfen. Dabei wird das zweite ausgeteilte Zauberquadrat eine *produktive Irritation* hervorrufen¹⁸: Das Zauberquadrat 2 ist (noch) kein Zauberquadrat, da in allen Zeilen, Spalten und Diagonalen, die die Zahl 9 des Zauberquadrates für die Erzeugung der Zauberzahl nutzen, eine andere Zauberzahl liefern als die übrigen Zeilen, Spalten und Diagonalen. Dies soll in den Interviewten die intrinsische Motivation auslösen, herauszufinden, warum dies kein funktionierendes Zauberquadrat ist und wie dieses in ein funktionierendes Zauberquadrat umgewandelt werden kann. Ihre Lösung soll begründet werden. Diese Aufgabe dient dem Aufbau von grundlegenden Kenntnissen für die weiteren Aufgaben.

In Aufgabe 2 sollen die Interviewten zwei operative Serien unvollständiger Zauberquadrate vervollständigen und dabei ihre gewählten Strategien und Vorgehensweisen erläutern und begründen. Dabei sollen sie Kenntnisse, etwa über den Zusammenhang von Mittel- und Zauberzahl, die operative Veränderbarkeit von Zauberquadraten und die Konstanz des Betrags von der Mittel- zu den Randzahlen kennenlernen und diese (auf verschiedene Weisen) begründen. Aufbauend auf dem gesammelten Wissen sollen die Interviewten begründen und beschreiben wie das vierte und fünfte Zauberquadrat der operativen Serie aussehen wird und wie dieses konstruiert werden kann. Weiter wird in Aufgabe 2 ein nicht eindeutig lösbares Zauberquadrat hereingegeben, für das die Interviewten verschiedene Lösungen finden können. Es soll thematisiert werden, warum dieses Zauberquadrat nicht eindeutig lösbar ist.

In Aufgabe 3 sollen die Interviewten ihre bisher gesammelten Erkenntnisse zu Zauberquadraten anwenden und Zauberquadrate mit einer Zauberzahl ihrer Wahl auf verschiedene Weisen erzeugen. Ihre dazu gewählten Strategien und Vorgehensweisen sollen sie verbalisieren und begründen. Sie sind dabei in ihrem Vorgehen völlig frei.

Nach Aufgabe 3 endet das Interview und es wird den Interviewten für ihren Einsatz gedankt.

¹⁸ Unter einer *produktiven Irritation* ist nach SCHWARZKOPF / NÜHRENBÖRGER (2019), Rechnen, 27 eine klärungsbedürftige Abweichung von einer eingenommenen Erwartung zu verstehen. Durch eine *produktive Irritation* werden bisherige Ansichten, Zugangsweisen, Vorstellungen und oder Erwartungen an eine Aufgabenstellung und deren -bearbeitung als nicht mehr ausreichend wahrgenommen, so dass neue Ideen zum Verständnis der strukturellen Zusammenhänge generiert oder sich mit den verschiedenen Darstellungen einer Operation oder eines Objekts näher auseinandergesetzt werden muss. Ähnlich zu SCHWARZKOPF / NÜHRENBÖRGER (2019) verstehen auch COMBE / GEBHARD (2019), Irritation, 133 eine *produktive Irritation* auch als einen reflexiven Moment, in dem Routinen aufgebrochen und der Verständnishorizont herausgefordert wird.

3. Theorie und Methodik der Untersuchung

Im Folgenden sollen die für die Auswertung und Analyse der Untersuchungsdaten wichtigen theoretischen Methoden und Hilfsmittel dargestellt, entwickelt und begründet werden.

3.1 Problemlösen und problemhaltige Aufgaben

„Der Mathematikunterricht sollte anstreben (...) in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinausgehen, (heuristische Fähigkeiten) zu erwerben.“

Heinrich Wienand WINTER (1995), Mathematikunterricht und Allgemeinbildung, 37

Anknüpfend an WINTERS Grunderfahrungen des Mathematikunterrichts wird deutlich, dass Problemlösen(-lernen) nicht nur für Schülerinnen und Schüler, sondern auch für Erwachsene relevant ist. Heuristische Problemlösefähigkeiten stellen dabei universelle Fähigkeiten dar, welche bereits in der Schule diagnostiziert, entwickelt und gefördert werden müssen, da diese durch ihren universellen Charakter auch außerhalb der Schule von Bedeutung sind.

Im Folgenden wird daher zunächst auf die begrifflichen Grundlagen des Problemlösens, das Problemlösen als Prozess sowie die Kategorisierung problemhaltiger Aufgaben eingegangen.

3.1.1 Definition des Problemlösens

In der Fachliteratur finden sich zahlreiche Definitionen des Begriffspaares *Problem* und *Problemlösen*. Allen gemein ist, dass ein *Problem* dann vorliegt, wenn zur Lösung einer Aufgabe eine Hürde zu überwinden ist, da eingeübte Routinen nicht zur Lösung führen.¹⁹ Die beim Problemlösen zu überwindenden Hürden stellen dabei gewisse (auch personenspezifische) Schwierigkeiten beziehungsweise Barrieren dar, die überwunden werden müssen, um zur Lösung der Aufgabe zu gelangen.²⁰

¹⁹ Vgl. HÄRING (2016), Problemlösen, 2; vgl. ZECH (2002), Grundkurs, 307f.; vgl. HEROLD-BLASIUS / HOLZÄPFEL / ROTT (2019), Zugänge, 196; vgl. SÖHLING (2017), Problemlösen, 9f.; vgl. LINK (2011), Problemlöseprozesse, 11; vgl. STENDER (2016), Lehrerinterventionsformen, 49. Nach GREEFRATH (2018), Anwendungen, 61f ist ein mathematisches Problem eine Aufgabe, bei der der Weg zum angestrebten Zielzustand für die Problemlösenden zunächst unklar ist. RASCH (2011), Arbeit, 8, betont mit ihrem Fokus auf Textaufgaben die Einbettung mathematischer Strukturen in Sachsituationen als Grundvoraussetzung des Problemlösens.

²⁰ Vgl. GREEFRATH (2018), Anwendungen, 61f; vgl. BRUDER / HEINRICH / BAUER (2015), Handbuch, 279f.



Abbildung 4: Modell des Problemlösens nach GREEFRATH (2018), *Anwendungen*, 62 und BRUDER / HEINRICH / BAUER (2015), *Handbuch*, 279f

3.1.2 Problemlösen als Prozess

Bereits in der frühen Forschung zum (mathematischen) Problemlösen wurde erkannt, dass dem Problemlösen maßgeblich ein prozesshafter Charakter inhärent ist. Dazu entwickelte PÓLYA (2010) eines der am häufigsten rezipierten und verwendeten Modelle zum Prozess des Problemlösens.²¹ Dieses wird im Folgenden dargestellt:

PÓLYA (2010) unterscheidet vier Phasen zum Suchen und Finden einer Problemlösung: **1. Verstehen der Aufgabe, 2. Ausdenken eines Plans, 3. Ausführen des Plans, 4. Rückschau.** Zu jeder Phase des Problemlöseprozesses gibt PÓLYA verschiedene Fragen, die sich die Problemlösenden stellen können, um dadurch im Problemlöseprozess weiterzukommen. So können sich Problemlösende in der ersten Phase etwa fragen, was gegeben und was gesucht ist, damit sie die Aufgabe (besser) verstehen können. In der zweiten Phase soll ein Plan zum Lösen der Aufgabe erdacht werden, dabei können sich Problemlösende etwa fragen, ob sie verwandte beziehungsweise ähnliche Probleme kennen, die sie oder andere schon einmal gelöst haben. In der dritten Phase, dem Ausführen des Plans, soll jeder Schritt kontrolliert und ausgeführt werden, wohingegen in der vierten Phase, der Rückschau, die Kontrolle des Ergebnisses und dessen Übertragung auf andere Aufgaben durch Fragen anzuregen ist.²²

²¹ Vgl. LILJEDAHL (2016), *Problem Solving*, 14; vgl. BRUDER / HEINRICH / BAUER (2015), *Handbuch*, 287ff. Es finden sich in der Literatur andere ähnliche oder an PÓLYA (2010) angelehnte Modelle, etwa ROTT (2013), *Problemlösen* oder ROTT (2014), *Problembearbeitungsprozesse*.

²² Vgl. PÓLYA (2010), *Schule, Klappentext*, 18-30; vgl. SÖHLING (2017), *Problemlösen*, 30f.

Erstens	<u>Verstehen der Aufgabe</u> Was ist unbekannt? Was ist gegeben? Wie lautet die Bedingung? (...)
Zweitens	<u>Ausdenken eines Planes</u> Kennst du eine verwandte Aufgabe? Hast du alle Daten benutzt, die ganze Bedingung genutzt, alle wesentliche Begriffe genutzt? Kannst du die Aufgabe anders ausdrücken? (...)
Drittens	<u>Ausführen eines Planes</u> Wenn du deinen Plan der Lösung ausführst, kontrolliere jeden Schritt. Kannst du deutlich sehen, dass der Schritt richtig ist? Kannst du beweisen, dass er richtig ist?
Viertens	<u>Rückschau</u> Kannst du das Resultat oder den Beweis kontrollieren? Kannst du das Resultat auf verschiedene Weise ableiten? Kannst du das Resultat oder die Methode für eine andere Aufgabe gebrauchen?

Abbildung 5: Modell zum Prozess des Problemlösens nach PÓLYA (2010), Schule, Klappentext, 18-30

Im Laufe der Forschung wurde das PÓLYA'sche Modell nicht nur vielfach verwendet und rezipiert, sondern auch kritisiert und modifiziert. RASCH (2001), BRUDER / HEINRICH / BAUER (2015), wie auch SÖHLING (2017) weisen etwa darauf hin, dass Verlaufsmodelle des Problemlösens, wie es PÓLYA (2010) und andere beziehungsweise darauf aufbauende Arbeiten, nahelegen, das Problemlösen als einen linearen Prozess verstehen, der eine Serie von Phasen und Abschnitten umfasst, um zu einer Lösung zu kommen. Diese Modelle betonen dabei meist nicht (explizit) das Sprunghafte, Dynamische und Zyklische, welches dem Problemlöseprozess zumeist inhärent ist.²³ Beobachtungen im Mathematikunterricht deuten darauf hin, dass es für Lernende schwierig ist, ihren Problemlöse-Prozess so zu überwachen und zu steuern, dass zentrale Fragestellungen bei den jeweiligen Phasen des Problemlösens, wie es PÓLYA (2010) beschreibt, beachtet und für lineare wie nicht-lineare Teilprozesse produktiv genutzt werden können.²⁴ ROTT (2013/14) untersucht die Problemlöse-Prozesse von Fünftklässlerinnen und Fünftklässlern in einer empirischen Studie im Spannungsfeld zwischen linearen und nicht-linearen Problemlöse-Prozessen und resümiert dabei, dass etwa zwei Drittel der betrachteten Problemlöse-Prozesse eher linear und etwa ein Drittel eher nicht-linear verlaufen. Somit lassen sich die zwei Drittel der eher linearen Problemlöse-Prozesse mit Modellen wie etwa PÓLYA (2010) und anderen erklären, die etwa ein Drittel nicht-linear verlaufenden Problemlöse-Prozesse lassen sich mit anderen Modellen besser erklären. Deshalb schlägt ROTT (2013/14)

²³ Vgl. RASCH (2001), Arbeit, 44; vgl. BRUDER / HEINRICH / BAUER (2015), Handbuch, 87; SÖHLING (2017), Problemlösen, 30ff.

²⁴ Vgl. BRUDER / HEINRICH / BAUER (2015), Handbuch, 287.

ein deskriptives Modell des Problemlösens vor, das sowohl die linearen wie auch die nicht-linearen Problemlöse-Prozesse beschreiben kann.²⁵

Das Modell nach ROTT (2013/14) soll im Folgenden kurz dargestellt werden:²⁶

ROTT unterscheidet zwischen dem Problem (*given problem*), den Problemlöseprozessen (*analysis, planning, implementation, exploration* und *verification*) sowie der Lösung (*(verified) solution*). Dabei sind die Phasen *planning* und *implementation* miteinander verbunden, die Pfeile stehen dabei für den expliziten oder impliziten Gebrauch von Selbstregulation. Der Prozess von dem Problem hin zur Lösung schließt dabei sowohl nicht-lineare wie auch lineare Prozesse mit ein. Dazu merkt ROTT an, dass am Ende des Problemlöseprozesses auch eine nicht richtige Lösung stehen kann und ein Wechsel zwischen den Phasen möglich ist.

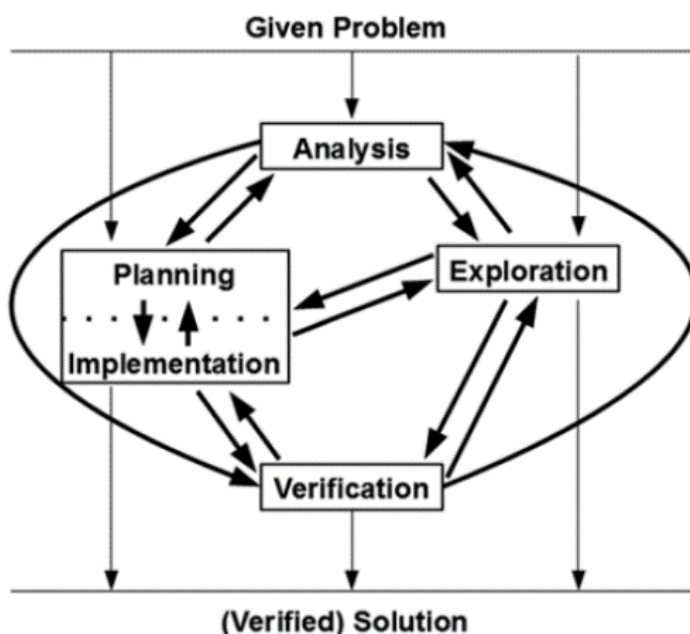


Abbildung 6: Deskriptives Phasenmodell von Problemlöseprozessen nach ROTT (2014), Problembearbeitungsprozesse, 273

Dabei sollen Problemlöseprozesse in der vorliegenden Arbeit mit PÓLYA (2010) und den Erkenntnissen und Einwänden nach SÖHLING (2017), BRUDER / HEINRICH / BAUER (2015) und ROTT (2013/2014) als Prozesse im Spannungsfeld zwischen linearen und nicht-linearen, zyklischen Prozessen verstanden werden.

²⁵ Vgl. ROTT (2014), Problembearbeitungsprozesse, 272ff; vgl. BRUDER / HEINRICH / BAUER (2015), Handbuch, 287.

²⁶ Vgl. ROTT (2014), Problembearbeitungsprozesse, 272ff.

3.1.3 Kategorisierung von problemhaltigen Aufgaben

In der Fachdidaktik existieren verschiedene Kategorisierungen von Typen problemhaltiger Aufgaben. So teilt etwa KLEINEBERG (1979), in Anlehnung an DÖRNER (1976) und LENNÉ (1969), Problemlöse-Aufgaben in drei Typen ein:²⁷

Entschlüsselungsaufgaben:

Bei Aufgaben dieses Typs sind die Mittel zur Lösung bekannt, dabei ist im Problemlöseprozess die richtige Kombination aus der Menge der bekannten Operationen zu bilden.

Geschlossene Denkaufgaben:

Die Hilfsmittel zur Erreichung der Lösung sind unbekannt. Daher muss ein brauchbares Inventar von Operationen zusammengestellt werden.

Offene Denkaufgaben:

Der Zielzustand ist bei Aufgaben dieses Typs unbekannt. Die Lösung muss in einem dialektischen Prozess zwischen vermutetem Zielzustand und Lösungsversuchen gefunden werden.

Dabei entspricht die zu analysierende Aufgabe 3 (siehe dazu Kapitel 2.4) dem Typ „offener Denkaufgaben“, da der genaue Zielzustand, also das zu konstruierende Zauberquadrat unbekannt ist und somit die Lösung, also die Konstruktion eines funktionierenden Zauberquadrats, unter Einhaltung aller strukturellen Eigenschaften dieses Zahlenquadrats, in einem dialektischen Prozess zwischen vermutetem Zielzustand und Lösungsversuchen mittels heuristischer Strategien und dem bekannten Wissen über die Eigenschaften der Zauberquadrate erfolgt. Es müssen also geeignete Wege gefunden werden, um Zauberquadrate zu konstruieren. Dabei spricht Aufgabe 3 auch einen Aspekt des Typs „Entschlüsselungsaufgabe“ an, indem die Interviewten auch die im Verlauf des Interviews selbst entdeckten Strategie-Ideen (zum Beispiel das Verdoppeln eines Zauberquadrats) erneut beim Problemlösen verwenden können.

²⁷ Vgl. BRUDER / HEINRICH / BAUER (2015), Handbuch, 282. Andere Einteilungen finden sich etwa bei KRATZ (1988), der Problemlöseaufgaben in Anlehnung an PÓLYA (1949) kategorisiert. BRUDER / HEINRICH / BAUER (2015), Handbuch, 281ff. merken hierzu an, dass auch kognitionspsychologische Einteilungen von Problemen, also individuell als schwer empfundenen Aufgaben, in der Mathematikdidaktik rezipiert werden und sich noch detailliertere Einteilungen vornehmen lassen. RASCH (2001), Arbeit, 28ff. teilt Problemlöse-Aufgaben in vier Typen, ihre Kategorisierung fokussiert jedoch nur auf problemhaltige Textaufgaben. Da die in dieser Untersuchung genutzten Problemlöse-Aufgaben keine Textaufgaben sind, kann die Kategorisierung nach RASCH (2001) hier keine Anwendung finden. Andere Klassifikationen finden sich etwa bei BRUDER / HEINRICH / BAUER (2015), Handbuch, 283f.

Dabei wären ihnen dann im Sinne der „Entschlüsselungsaufgabe“ auch (einige, aber nicht alle) Mittel zur Lösung bekannt.

3.2 Heuristische Strategien zur Lösung von mathematischen Problemen

„Heuristisches Denken ist nicht ein letztes und strenges, sondern vorläufiges und plausibles Denken, dessen Zweck es ist, die Lösung der vorliegenden Aufgabe zu entdecken.“

George PÓLYA (2010), Schule des Denkens, Vom Lösen mathematischer Probleme, 119

Nach PÓLYA (2010) liegt dem Problemlösen ein heuristisches Denken zugrunde, die Problemlösenden bedienen sich dabei sogenannter heuristischer Strategien, um ein vorliegendes Problem zu einer Lösung zu führen. Im Folgenden wird daher dargestellt, was unter heuristischen Strategien verstanden werden kann und welche Klassifikationen von Typen heuristischer Strategien zur Lösung von Problemaufgaben in der Fachdidaktik genutzt werden.

3.2.1 Definition heuristischer Strategien

Unter heuristischen Strategien werden in der fachdidaktischen Literatur Vorgehensweisen verstanden, wie in problemhaltigen Situationen vorgegangen werden kann, wenn das Problem verstanden wurde, denn diese helfen, den gesamten Problemlöse-Prozess zu organisieren und einen Lösungsplan zu entwickeln.²⁸

3.2.2 Kategorisierung heuristischer Strategien

Innerhalb der mathematikdidaktischen Forschung haben sich verschiedenste Kategorisierungen zu verschiedenen Typen heuristischer Strategien herausgebildet, wie etwa bei LEUDERS (2011), BRUDER / COLLET (2011), SCHWARZ (2018), STENDER (2019), KÄPNICK / BENÖLKEN (2020), KIPMAN (2020) und anderen.²⁹ Die Anfänge dieser Forschung liegen dabei in den 1940ern Jahren, unter anderem haben PÓLYA (1949), THIELE (1979), KIEBWETTER (1983) und andere hierzu geforscht und verschiedene Verlaufsmodelle entwickelt. Besonders die Ergebnisse von PÓLYA (2010, in der Originalauflage von 1949) sind aber in die darauffolgende Forschung wie auch in die mathematikdidaktische Fachliteratur eingegangen und wurden vielfältig genutzt.³⁰

²⁸ Vgl. GREEFRATH (2018), Anwendungen, 69; vgl. BRUDER / COLLET (2011), Problemlösen, 69; vgl. ROTT (2014), Problembearbeitungsprozesse, 73f.

²⁹ Es wird sich im Folgenden für die Kategorisierung nach BRUDER / COLLET (2011) in der Modifikation durch KIPMAN (2020) entschieden, da diese auf den Erkenntnissen von PÓLYA (2010) aufbauen und in der fachdidaktischen Literatur Anwendung finden.

³⁰ Zu einem ähnlichen Ergebnis kommt auch BRUDER / HEINRICH / BAUER (2015), Handbuch, 286f.

In dieser Untersuchung soll die Kategorisierung heuristischer Strategien nach BRUDER / COLLET (2011) und der fast deckungsgleichen Kategorisierung mit kleinen Modifikationen nach KIPMAN (2020) verwendet werden, welche ebenfalls an PÓLYA (2010) angelehnt sind.³¹

Die dieser Untersuchung zugrundeliegende Kategorisierung wird im Folgenden dargestellt:

1. Systematisches Probieren:

Der Strategie des **systematischen Probierens** liegt die Annahme zugrunde, dass Lernende ihre wertvollsten Erfahrungen durch Nachmachen und eigenständiges Ausprobieren machen. Wenn „man kein Verfahren kennt und man sich nicht anders zu helfen weiß, sind Versuch und Irrtum die typischen Vorgehensweisen“.³² Wenn Kinder, Jugendliche oder Erwachsene eine Problemaufgabe lesen oder hören, dann beginnen die meisten sehr bald mit dem **Probieren**, um auf erste Lösungen des Problems zu kommen. Dabei beginnen sie etwa, spontan Zahlen zu verknüpfen oder etwas zur Aufgabe zu zeichnen, wobei dann meist auf dieses unsystematische ein **systematisches Probieren** folgt, bei dem eine Art System entwickelt wird, das alle „möglichen Fälle“ enthält, um danach auf die richtige Lösung kommen zu können.³³ Somit stellt das **systematische Probieren** im Gegensatz zum **unsystematischen Probieren** eine sinnvolle heuristische Strategie dar, welche bei den Problemlösenden eine gewisse Reihenfolge unterschiedlicher Beziehungen und Zusammenhänge herstellt und erprobt. Hierbei werden beim Sammeln der Erfahrungen Strukturen des Problems deutlich, wobei die Lernenden in vielen Fällen deutliche Hinweise auf eine allgemeine Lösung gewinnen.³⁴ BRUDER / COLLET (2011) und KIPMAN (2020) weisen beim **systematischen Probieren** darauf hin, dass diese Strategie vor allem bei Kombinatorik-Problemen zum Einsatz kommt, bei denen es darauf ankommt, alle möglichen Fälle zu bestimmen.³⁵ Dabei bedarf **systematisches Probieren** einer Dokumentation, da dies meist auf der enaktiven oder ikonischen Erkenntnisebene passiert.³⁶

2. Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten und deren Kombination / Mischform:

Die Strategie des **Vorwärtsarbeitens** ist dadurch charakterisiert, dass Problemlösende versuchen, ausgehend vom Gegebenen, Schlussfolgerungen zu ziehen und Beziehungen

³¹ Vgl. KIPMAN (2020), Problemlösen, 29-34; vgl. BRUDER / COLLET (2011), Problemlösen, 68-87.

³² KIPMAN (2020), Problemlösen, 29.

³³ Vgl. BRUDER / COLLET (2011), Problemlösen, 70ff.; vgl. KIPMAN (2020), Problemlösen, 29.

³⁴ Vgl. KIPMAN (2020), Problemlösen, 29.

³⁵ Vgl. BRUDER / COLLET, Problemlösen, 70ff.; vgl. KIPMAN (2020), Problemlösen, 29.

³⁶ Vgl. BRUDER / COLLET (2011), Problemlösen, 72-76. Ferner unterscheiden BRUDER / COLLET (2011) das systematische Probieren in der geschlossenen Form (mit dem Ziel, ein vollständiges Feld an Möglichkeiten zu gewinnen) von dem systematischen Probieren in der dynamischen Form (mit offenem Ausgang, wenn Annahmen gemacht werden und diese gegebenenfalls variiert oder angepasst werden).

herzustellen, um das Gesuchte zu erreichen. Ziel ist es dabei durch das Arbeiten mit den gegebenen Informationen von einer bestimmten Startsituation an ein bestimmtes Ziel zu gelangen. Auf diese Weise können (Teil-)Ziele erreicht werden, mit deren Hilfe dann durch erneutes und weiteres Kombinieren mit den Ausgangsdaten oder dem Einsatz von Hilfsmitteln nach unterschiedlich vielen Zwischenschritten zum Ziel **vorwärts gearbeitet** werden kann.³⁷

Das **Rückwärtsarbeiten** verläuft dabei entgegengesetzt zum **Vorwärtsarbeiten**, weist aber eine enge Verbindung zu diesem auf. Es wird also versucht, vom Gesuchten zum Gegebenen zu gelangen, also von der Behauptung zur Voraussetzung, was eine größere Flexibilität im Denken, nämlich die Reversibilität als eine spezifische Beweglichkeitseigenschaft des Denkens, voraussetzt.³⁸ Beim **Rückwärtsarbeiten** wird vom Ergebnis der Aufgabe ausgegangen und es muss also überlegt werden, welche Verknüpfungen zu diesem Ergebnis beziehungsweise Ziel geführt haben. So werden in Teilschritten, aus denen sich auf das Ziel schließen lässt, ein oder mehrere Sachverhalte ermittelt, die dann durch mehrfaches Wiederholen des Vorganges zum Endergebnis führen sollen.³⁹

Die **Kombination / Mischform von Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten** erweist sich als besonders günstig, da so die Vorteile beider Strategien verbunden werden. Durch das **Vorwärtsarbeiten** werden Teilziele für das **Rückwärtsarbeiten** und umgekehrt erschlossen. Ferner kann die Kombination beider Strategien dazu beitragen, genauer zu bestimmen oder zu durchdringen, was gegeben ist und was man bereits über das Gesuchte weiß.⁴⁰

3. Suchen von Analogien / Analogieschlüsse nutzen:

Bei der Strategie des **Nutzens von Analogien und Analogieschlüssen** wird überprüft, ob bereits bisherige Erfahrungen im Lösen ähnlicher Problemlöseaufgaben vorliegen, die mögliche Ähnlichkeiten beziehungsweise **Analogien** zum aktuellen Problem vorweisen und sich daher die bereits bekannten Lösungsmuster für das vorliegende Problem adaptieren lassen.⁴¹

4. Zurückführen von Unbekanntem auf Bekanntes:

Beim Nutzen des **Zurückführens von Unbekanntem auf Bekanntes** wird die Problemlöseaufgabe mithilfe dieser Strategie vereinfacht und kann dann zu Aufgaben, die

³⁷ Vgl. KIPMANN (2020), Problemlösen, 29f.

³⁸ Vgl. BRUDER / COLLET (2011), Problemlösen, 79.

³⁹ Vgl. KIPMAN (2020), Problemlösen, 30.

⁴⁰ Vgl. ebd., 30.

⁴¹ Vgl. BRUDER / COLLET (2011), Problemlösen, 83; vgl. KIPMAN (2020), Problemlösen, 31.

bereits gelöst wurden, leichter zugeordnet werden. Somit kann unter **Zurückführen von Unbekanntem auf Bekanntes** also ein Erzeugen und Suchen von Situationen für Analogieschlüsse verstanden werden. Dabei können mittels dieser Strategie Probleme umstrukturiert, erweitert oder Informationen reduziert werden, damit sich ein Problem in seiner neuen Form leichter zu schon bearbeiteten Aufgaben zuordnen lässt. Ferner ist es auch hilfreich, das Problem in Teilprobleme zu zerlegen, damit dadurch das Zurückführen des Gesamtproblems auf schon bekannte oder weniger komplexe Teilprobleme das Nutzen von Analogieschlüssen ermöglicht.⁴² BRUDER / COLLET (2011) weisen darauf hin, dass diese Strategie bei fast allen probleminhärenten Fragestellungen Anwendung findet, da die Problemlösenden gerne auf bereits Verstandenes aufbauen möchten.⁴³ Ferner fungiert die Strategie des **Zurückführens von Unbekanntem auf Bekanntes** als gute Strategie zum besseren Kennenlernen des vorliegenden Problems und korrespondiert deshalb oft mit der Arbeit mit Spezialfällen.⁴⁴

So kommen BRUDER / COLLET (2011) zu folgender Klassifikation heuristischer Strategien:

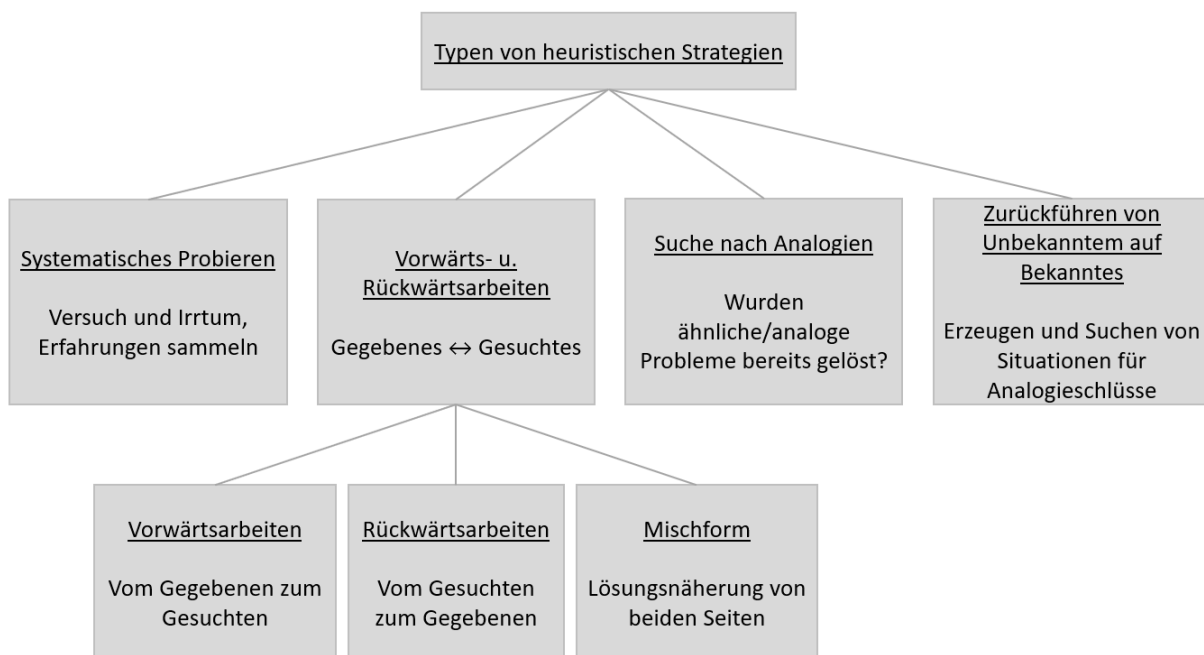


Abbildung 7: Typen von heuristischen Strategien nach BRUDER / COLLET (2011), Problemlösen, 68-87

BRUDER / COLLET (2011) weisen darauf hin, dass diese heuristischen Strategien nicht fachspezifisch ausgerichtet sind, sondern in allen Lebenslagen bei der Suche nach der Lösung helfen, sofern das Problem verstanden wurde. Dabei führt die Nutzung heuristischer Strategien

⁴² Vgl. KIPMAN (2020), Problemlösen, 31.

⁴³ Vgl. BRUDER / COLLET (2011), Problemlösen, 84-87.

⁴⁴ Vgl. ebd., 87.

nicht zwangsläufig zum Ziel, also der Lösung der Problemaufgabe, da ihnen kein algorithmischer Verfahrenscharakter inhärent ist.⁴⁵

Das Modell nach BRUDER / COLLET (2011) wurde durch KIPMAN (2020) um eine weitere fünfte heuristische Strategie, das **Umstrukturieren einer Problemsituation**, ergänzt:⁴⁶

5. Umstrukturieren des Problems:

Die Strategie des **Umstrukturierens eines Problems** ist dadurch gekennzeichnet, dass das Problem von einem anderen Blickwinkel aus betrachtet wird, um dabei die Struktur der Aufgabe zu analysieren und die Ausgangssituation mit einer anderen Sichtweise durch eine besser geeignete Anordnung in eine Lösung zu überführen. Dabei können verschiedenste heuristische Hilfsmittel (wie etwa Tabellen und anderes) und verschiedene heuristische Strategien (Analogieschlüsse und anderes) je nach Aufgabenstellung verwendet werden, um die Problemstellung zu lösen.⁴⁷

Somit kommt KIPMAN (2020) zu folgender Klassifikation heuristischer Strategien:

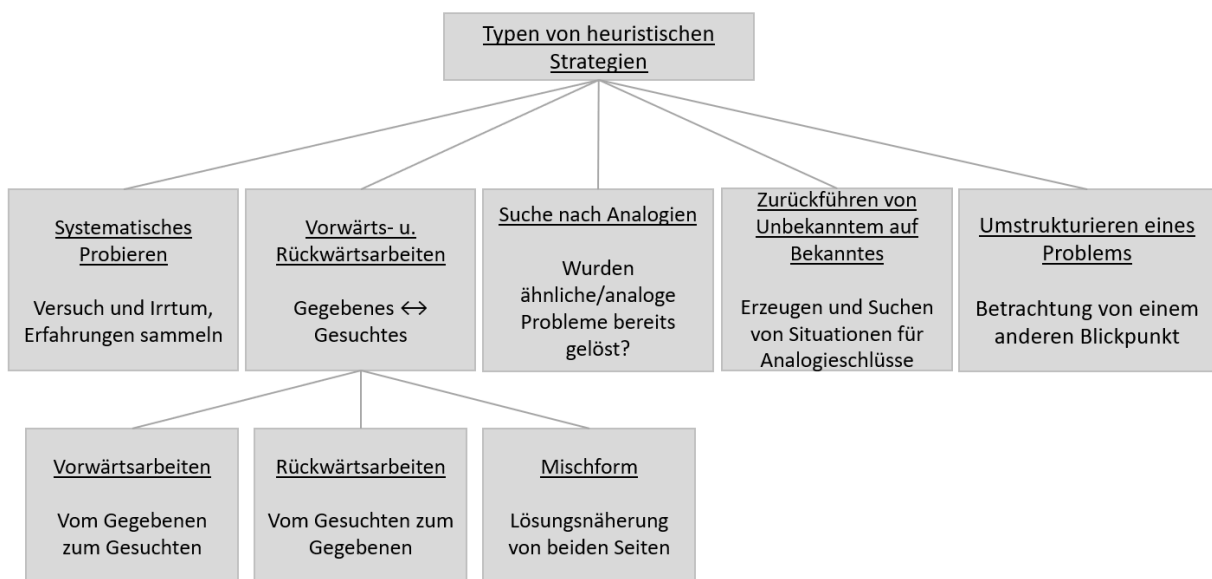


Abbildung 8: Typen von heuristischen Strategien nach KIPMAN (2020), Problemlösen, 29-34 in der Modifikation / Ergänzung der Klassifikation nach BRUDER / COLLET (2011), Problemlösen, 68-87

⁴⁵ Vgl. BRUDER / COLLET (2011), Problemlösen, 68f. Es kann jedoch festgestellt werden, dass Kategorisierungen heuristischer Strategien auf allgemeiner und auf inhaltlicher Ebene unterschieden werden können. So gibt es neben der von BRUDER / COLLET (2011) vorgebrachten allgemeinen Kategorisierung auch inhaltspezifische Kategorisierungen von heuristischen Problemlöse-Strategien.

⁴⁶ Vgl. KIPMAN (2020), Problemlösen, 31.

⁴⁷ Vgl. ebd., 31.

3.3 Argumentationsanalyse

„Eine Argumentation ist wie ein Organismus. Sie hat eine grobe, anatomische Struktur wie auch eine feinere, sozusagen physiologische Struktur. Wenn sie explizit in all ihren Details entfaltet wird, füllt sie vielleicht eine Reihe von Druckseiten oder ihr Vortrag dauert vielleicht eine Viertelstunde. Innerhalb dieser Zeit bzw. dieses Raums kann man die Hauptstufen unterscheiden, die den Fortschritt der Argumentation von der anfänglichen Formulierung eines ungelösten Problems bis zur abschließenden Angabe einer Konklusion kennzeichnen.“

Steven Edelston TOULMIN 1975, Der Gebrauch von Argumenten, 86

Im Folgenden soll das für die Auswertung der gesammelten Interview-Daten essenzielle Verfahren der funktionellen Argumentationsanalyse erläutert werden. Dabei wird sowohl auf die theoretischen Grundlagen der Argumentation, also die Auswahl des zugrundeliegenden Argumentationsbegriffs, wie auch das Verfahren der funktionellen Argumentationsanalyse und ferner die gewählte Kategorisierung von Argumenten eingegangen und diese erläutert.

3.3.1 Argumentationsbegriffe, Argumente und Argumentationen

Grundlegend für die Analyse von Argumentationen ist das Verständnis dessen, was unter einer Argumentation, einem Argument und der Argumentation-Argument-Unterscheidung zu verstehen ist. Daher wird sich im Folgenden mit diesen grundlegenden Begriffen beschäftigt.

Argumentationsbegriffe:

Innerhalb der Forschung haben sich im Laufe der Zeit differente Argumentationsbegriffe herausgebildet, die sich nach der Weite dessen unterscheiden, wann von einer Argumentation gesprochen werden kann. Sie differieren daher bezüglich ihrer Klassifizierungsbreite. Es wird im Folgenden exemplarisch auf einen eher weiter gefassten Argumentationsbegriff von KRUMMHEUER (1997) und einen eher enger gefassten Argumentationsbegriff von SCHWARZKOPF (2000a und 2003) eingegangen:⁴⁸

Grundlegend geht KRUMMHEUER (1997) für die Genese seines Argumentationsbegriffes von den Interaktionsproblemen, die zwischen den Interaktanden bei ihrem Bemühen um ein gemeinsames Handeln entstehen, aus. Hierbei stellt die Argumentation also eine bestimmte Methode zur Lösung dieser inter-personellen Aufgaben dar. Sie bedient sich diesbezüglich der verbal geäußerten Auseinandersetzung mit dem Ziel der Herstellung eines Konsenses aller

⁴⁸ Zu einem ähnlichen Ergebnis kommt auch MAYER (2019), Gleichheitsverständnis, 57f.

Beteiligten.⁴⁹ KRUMMHEUER möchte einen Argumentationsbegriff schaffen, der den schulischen Bedingungen genügt, deshalb synthetisiert KRUMMHEUER die gegenwärtigen Modelle zum Verstehen solcher Interaktionsprozesse, das HABERMAS'sche kommunikationstheoretische Modell mit dem GARFINKEL'schen ethnomethodologischen Modell. Somit beinhaltet Argumentieren, im Sinne des ethnomethodologischen Interpretationsansatzes, einen methodischen oder verfahrensmäßigen Aspekt. Durch den Vollzug der Handlung in einer kommunikativen Situation wird vom Handelnden der Anspruch geltend gemacht und mitdokumentiert, dass die Aktivitäten auf einer rationalen Basis vollzogen werden. Das Ziel der vorgebrachten Argumentation liegt, gegenteilig zum Beweis, nicht darin, die Wahrheit der Schlussfolgerung kommend von der Wahrheit der Prämissen zu beweisen, sondern die den Prämissen gegebene Zustimmung auf die Folgerung zu übertragen, wobei die für diese „Übertragung“ der Zustimmung auf die Folgerung gewählten verbalen Methoden und Verfahren zusammen die „Argumentation“ nach KRUMMHEUER darstellen.⁵⁰ KRUMMHEUER (1997) interpretiert den Argumentationsbegriff im Sinne einer ethnomethodologisch ausgerichteten Aufarbeitung des Argumentationsbegriffs.⁵¹

SCHWARZKOPF (2000a, 2003, 2019) versteht den Argumentationsbegriff im Sinne eines speziellen interaktiven Prozesses, der durch zwei Aspekte gekennzeichnet ist: 1. Die am Unterricht Beteiligten fordern dabei explizit eine Begründung für eine zu betrachtende mathematische Aussage ein und es werden 2. Begründungen dafür entwickelt.⁵² Nötig ist dabei für eine Argumentation im Sinne SCHWARZKOPFS (2000b), dass ein explizit angezeigter Begründungsbedarf von den Beteiligten zu befriedigen versucht wird.⁵³ Dabei sollen schulische Argumentationen nicht nur seitens der Lehrkraft als explizit begründungsbedürftig angezeigt und damit die Argumentation initiiert werden, sondern auch aus einem authentischen Anlass heraus initiiert werden.⁵⁴

Für die vorliegende Untersuchung eignet sich der Argumentationsbegriff nach SCHWARZKOPF (2000a/2003) sehr gut, da dieser enger gefasst ist und mehr auf schulisch-mathematische Prozesse fokussiert.

⁴⁹ Vgl. KRUMMHEUER (1997a), Begriff, 7ff.

⁵⁰ Vgl. ebd., 6-8.

⁵¹ Vgl. KRUMMHEUER / NAUJOK (1999), Grundlagen, 71.

⁵² Vgl. SCHWARZKOPF (2003), Begründungen, 212; vgl. SCHWARZKOPF (2019), Kommunikationsanlässe, 61ff.

⁵³ Vgl. SCHWARZKOPF (2000b), Argumentationsprozesse, 237.

⁵⁴ Vgl. SCHWARZKOPF (2015), Argumentationsprozesse, 43.

Argumentation und Argument:

Weiter ist zwischen den umgangssprachlich sehr dicht beieinanderliegenden Begriffen der *Argumentation* und dem *Argument* an sich zu differenzieren. SCHWARZKOPF (2000b) unterscheidet in Anlehnung an KLEIN (1980) dabei zwischen *Argument* und *Argumentation*, indem der im Unterricht stattfindende soziale Prozess, bestehend aus dem Anzeigen eines Begründungsbedarfs und dem Versuch, den angezeigten Begründungsbedarf zu befriedigen, als *Argumentation* bezeichnet wird. Die in diesem Prozess hervorgebrachten Begründungsangebote werden mathematikspezifisch als *Argumente* analysiert.⁵⁵ Somit distinguiert SCHWARZKOPF in Anlehnung an die pragmalinguistische Argumentationstheorie auf der analytischen Ebene zwischen inhaltlichen und sozialen Momenten der Argumentationsprozesse, also zwischen *Argumenten* und *Argumentationen*. *Argumentationen* beinhalten somit *soziale Merkmale* der Interaktion und *Argumente* beinhalten *inhaltliche Zusammenhänge*, die von allen an der Argumentation Beteiligten innerhalb dieser konstruiert werden.⁵⁶ TOULMIN (1975) versteht dabei unter einem *Argument* etwas, das vorgebracht wird, um die Gültigkeit einer Aussage zu validieren, die *Argumentation* weist dabei eine grobe, anatomische Struktur auf und läuft in verschiedenen Schritten ab.⁵⁷

3.3.2 Funktionale Argumentationsanalyse

Zur funktionalen Argumentationsanalyse, also zur Darstellung und anschließenden Interpretation von Argumenten und Argumentationen, haben sich in der Forschung verschiedene Ansätze herausgebildet. Eine besondere Rolle kommt dabei dem grundlegenden Modell nach TOULMIN (1975) zu, welches im Folgenden dargestellt werden soll:⁵⁸

Gemäß TOULMIN (1975) setzt sich ein Argument aus verschiedenen einzelnen Bestandteilen zusammen, welchen jeweils eigene Funktionen zukommen. Jedes Argument beginnt mit einem

⁵⁵ Vgl. SCHWARZKOPF (2003), Begründungen, 212; vgl. SCHWARZKOPF (2000b), Argumentationsprozesse, 240.

⁵⁶ Vgl. SCHWARZKOPF (2003), Begründungen, 212.

⁵⁷ Vgl. TOULMIN (1975), Gebrauch, 86.

⁵⁸ Die Analyse von Argumentationen durch Aufspaltung in ihre Bestandteile, wie sie TOULMIN (1975) beschreibt, dient dabei zahlreichen Autorinnen und Autoren der Mathematikdidaktik als Grundlage zur funktionalen Argumentationsanalyse. Verwendung findet sie etwa bei KRUMMHEUER / NAUJOK (1999), Grundlagen, 72, 85ff, SCHWARZKOPF (2000a), Argumentation, 80ff, SCHWARZKOPF (2001), Argumentationsanalysen, 257ff, SCHWARZKOPF (2003), Begründungen, 217, KRUMMHEUER (2003), Argumentationsanalyse, 248, KRUMMHEUER / FETZER (2005), Alltag, 37ff., CRAMER (2018), Ausnahmen, 30f, KUNSTELLER (2018), Ähnlichkeiten, 17ff., HARTKENS (2018), Reflexion, 67-72 und anderen. SCHWARZKOPF (2015), Argumentationsprozesse, 39 bestätigt diese Tendenz, indem er hierzu konkludiert, dass sowohl in der rekonstruktiven Mathematikdidaktik wie auch in anderen didaktischen Disziplinen das Schema zur funktionalen Aufspaltung von Argumenten nach TOULMIN große Rezeption und Verbreitung findet. Neben der Verwendung des Schemas wurde auch dessen Eignung überprüft, denn die Eignung dieses Schemas zur Analyse von Mathematikunterricht wurde in der Mathematikdidaktik bereits mehrfach empirisch belegt, etwa bei KRUMMHEUER (1997b), SCHWARZKOPF (2000a), KRUMMHEUER / BRANDT (2001) und KNIPPING (2003); zu dieser Einschätzung kommt auch MAYER (2007), Entdecken, 84.

Datum (D), welches unbezweifelte Aussagen enthält, mit deren Hilfe auf eine Behauptung, die sogenannte Konklusion (K), geschlossen werden soll (verkürzt ausgedrückt: „Konklusion, weil Datum“). Dabei begründet jedoch ein wahres Datum nicht jede Konklusion, weswegen es einer Beziehung zwischen diesen Elementen bedarf. Diese Funktion übernimmt die Schlussregel (SR). Sie bildet dabei den Übergang vom Datum zur Konklusion und legitimiert somit den Schluss.⁵⁹ Nach TOULMIN (1975) haben Schlussregeln immer einen allgemeineren Charakter als Daten und Konklusionen. Dabei muss eine Schlussregel nicht selbstverständlich sein und kann bezweifelt werden, weswegen die Schlussregel durch eine Stützung (S) abgesichert werden muss, die etwa durch die Angabe desjenigen Bereiches erfolgen kann, aus welchem die Schlussregel entstammt.⁶⁰ Bei Alltagsargumentationen ist es möglich, dass die Schlussregel die Konklusion aus dem Datum nicht notwendig, sondern nur wahrscheinlich folgen lässt. Eine solche Abweichung von der Schlussregel wird als Ausnahmebedingung (AB) bezeichnet. Der Grad an Sicherheit, der angibt, dass die Konklusion aus dem Datum gefolgert werden kann, wird als modaler Operator (O) angegeben.⁶¹

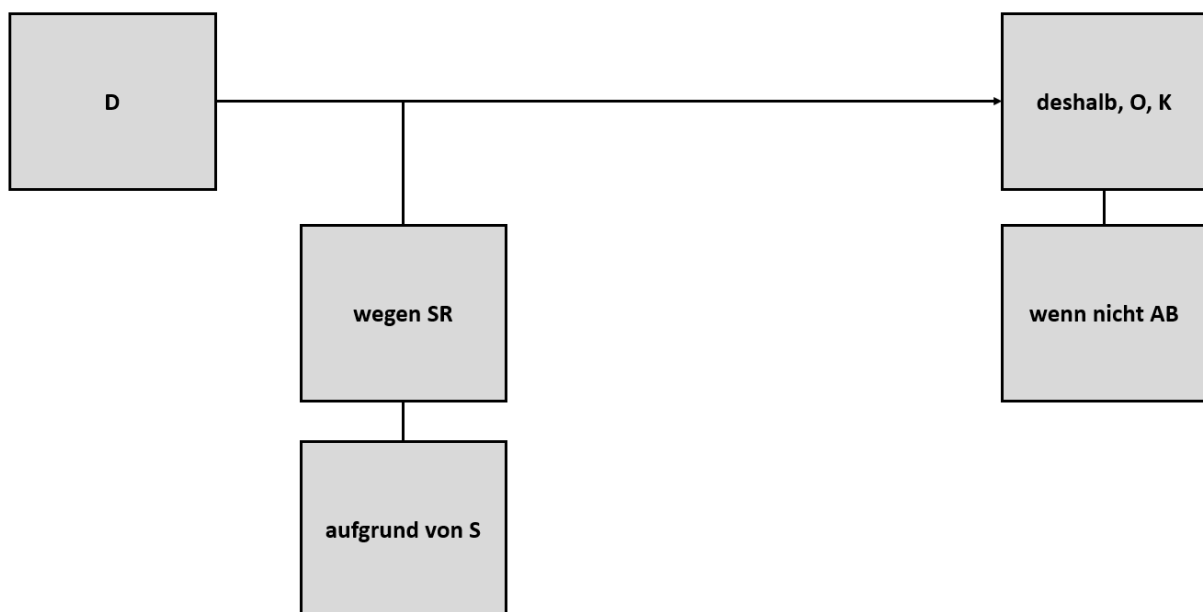


Abbildung 9: Das Modell zur Analyse von Argumentationen nach TOULMIN (1975), Gebrauch, 95

TOULMIN (1975) stellt dabei selbst fest, dass sein Modell in der vorliegenden Form „vielleicht nicht endgültig“⁶² sei und erweitert und oder verändert werden könnte.⁶³ Entsprechende Modifikationen des TOULMIN’schen Modells wurden im Laufe der Forschung zu verschiedenen

⁵⁹ Vgl. TOULMIN (1975), Gebrauch, 89ff.; vgl. MEYER (2007), Entdecken, 84ff.

⁶⁰ Vgl. TOULMIN (1975), Gebrauch, 89-98; vgl. MEYER (2007), Entdecken, 84ff.

⁶¹ Vgl. TOULMIN (1975), Gebrauch, 89-95; vgl. MEYER (2007), Entdecken, 87.

⁶² TOULMIN (1975), Gebrauch, 95.

⁶³ Vgl. ebd., 95.

Zwecken vorgenommen, etwa von CRAMER (2011), die das TOULMIN'sche Modell zur Analyse der verwendeten Arten der Schlussregeln nutzen möchte und dementsprechend modifiziert, oder SCHWARZKOPF (2000b), der das Modell zwecks Analyse schulischer Argumentations- und Lernprozesse, modifiziert und nutzt.

Das modifizierte Modell nach SCHWARZKOPF (2000b) soll dabei im Folgenden dargestellt werden. Das TOULMIN'sche Modell wurde von SCHWARZKOPF (2000b) verändert, um eine mathematische wie schulische Nutzung zur interpretativen Unterrichtsforschung im Mathematikunterricht zu ermöglichen. Dazu modifiziert SCHWARZKOPF (2000b) das TOULMIN'sche Schema, das sowohl für mathematische wie außermathematische Argumentationsanalysen verwendet werden kann, unter einem rein mathematischen Aspekt.⁶⁴ Daher wird unter anderem auf den Operator verzichtet:

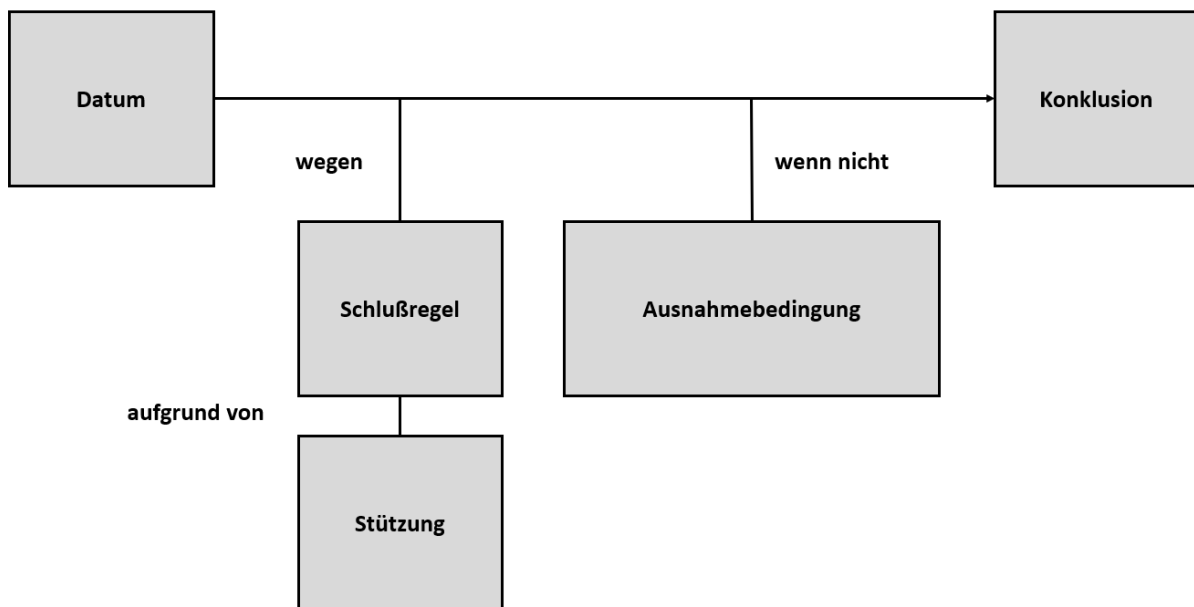


Abbildung 10: Das Modell zur Analyse von Argumenten nach SCHWARZKOPF (2003), Begründungen, 217

Das Modell von SCHWARZKOPF (2000b) soll für die Analyse der Argumente in Kapitel 4 Verwendung finden, da dieses für die (schulische) Analyse von Argumenten, wie sie in Kapitel 4 vorgenommen werden soll, konzipiert und von anderen Autorinnen und Autoren auch verwendet wird.⁶⁵

⁶⁴ Vgl. SCHWARZKOPF (2000b), Argumentationsprozesse, 100-108.

⁶⁵ Vgl. HARTKENS (2018), Reflexion, 67-72.

3.3.3 Kategorisierung von Argumenten

Im Sinne der funktionalen Argumentationsanalyse kann auch nach der Art des vorgebrachten Arguments distinktiert werden.⁶⁶ In dieser Untersuchung soll die von SCHWARZKOPF (2003) aufgrund schulischer Forschung entwickelte Klassifikation von Argumenten in die drei Typen *empirische*, *empirisch-konstruktive* und *strukturell-mathematische* Argumente Anwendung finden, welche im Folgenden dargestellt wird:⁶⁷

1. Empirische Argumente:

Argumente, die als *empirische Argumente* zu charakterisieren sind, fokussieren darauf, dass das Auftreten eines untersuchten Phänomens durch eine (mehr oder minder) systematische Prüfung aller möglichen Fälle innerhalb des konkreten Problems vorgenommen wird. Mittels einer empirischen Beobachtung wird die Erkenntnis gesichert, dass das unterstellte Phänomen tatsächlich auftritt, ohne dabei jedoch Hinweise auf eine zugrundeliegende und erklärende Struktur zu erzeugen. Dabei wird also mittels Überprüfung aller möglichen Fälle die Frage beantwortet, ob es ein Phänomen gibt.⁶⁸

2. Empirisch-konstruktive Argumente:

Argumente, die als *empirisch-konstruktiv* zu bezeichnen sind, sind dadurch gekennzeichnet, dass das untersuchte Phänomen auf andere als das vorliegende Beispiel übertragen, an diesen geprüft und dort ebenfalls beobachtet wird. Dabei wird im argumentationstheoretischen Sinne nicht die Erkenntnis begründet, dass in dem vorliegenden Problem das Phänomen auftritt. Diese Erkenntnis wird dabei gewissermaßen in der vorgebrachten Argumentation vorausgesetzt und demgemäß wie ein bekanntes und gleichsam altes (gesichertes) Wissen verwendet. Das dabei in die Argumente eingehende neue Wissen besteht dabei aus Kenntnissen über Konstruktionsbedingungen des Phänomens. Dadurch wird mittels Übertragung der Vorgehensweise auf weitere Beispiele die Frage geklärt, ob das Phänomen weiterhin erhalten bleibt.⁶⁹

3. Strukturell-mathematische Argumente:

Argumente, die als *strukturell-mathematisch* betrachtet werden, sind dabei nach SCHWARZKOPF (2003) weitaus schwieriger zu verstehen und zu charakterisieren, da sie auf den ersten Blick

⁶⁶ In dieser Untersuchung wird sich für die Klassifikation nach SCHWARZKOPF (2003) entschieden, da diese Klassifikation schulisch-praktisch fundiert ist und auch in anderen Werken (zwecks schulischer Forschung) Anwendung findet, wie etwa bei HARTKENS (2018), Reflexion, 79-83.

⁶⁷ Vgl. SCHWARZKOPF (2003), Begründungen, 231ff.

⁶⁸ Vgl. ebd., 231.

⁶⁹ Vgl. ebd., 231f.

sprachlich kaum von *empirisch* gestützten Argumenten zu distinguieren sind. Wie bei empirischen Argumenten werden konkrete benannte Zahlen und Rechnungen genutzt, denen allerdings lediglich hier die Funktion eines Beispiels inhärent ist, das als Erläuterung allgemeiner Erkenntnisse herangezogen wird. Ferner werden Auswirkungen von hypothetisch zugrundeliegenden Strukturen untersucht, um dabei die Frage zu beantworten, wie man das untersuchte Phänomen erzeugen kann.⁷⁰

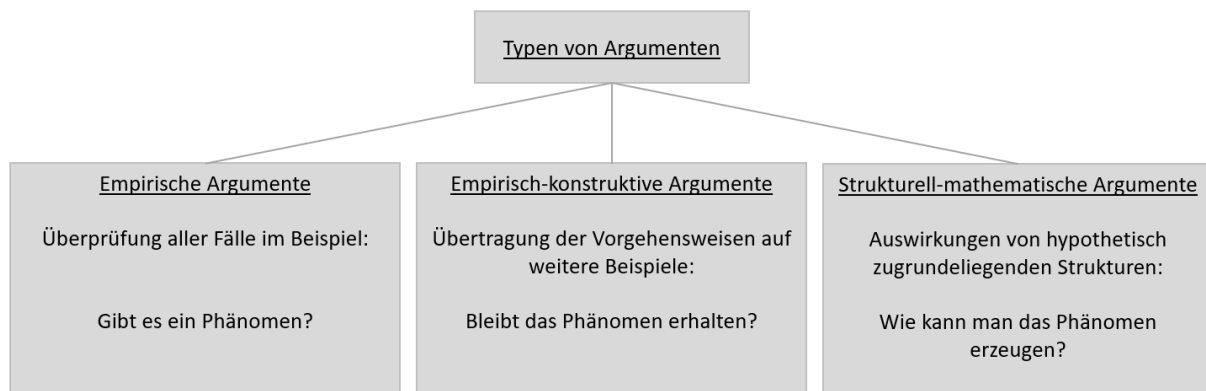


Abbildung 11: Typen von Argumenten nach Schwarzkopf (2003), *Begründungen*, 231ff.

SCHWARZKOPF (2003) spricht sich dabei in seiner Klassifikation von Argumenten explizit gegen eine Hierarchisierung der Argument-Typen aus: Dass die „(...) Kategorisierung in *empirische*, *empirisch-konstruktive* und *strukturell-mathematische* Argumente nicht als ‚Stufenfolge‘ hin zum ‚richtigen‘ mathematischen Argumentieren verstanden werden sollte. Vielmehr soll sie dazu dienen, das Spektrum an möglichen, innerhalb ihres jeweiligen Geltungsanspruchs richtigen und auch mathematischen Argumenten ein Stück weit aufzufächern.“⁷¹ Weiter sollen dabei weder *empirische* noch *empirisch-konstruktive* Argumente als „falsch“ oder „unmathematisch“ beschrieben werden, denn diese dienen vielmehr als experimentelle Situationen auf dem Weg zur Konstruktion mathematischen Wissens als wesentliche Bestandteile des Lernprozesses. Dabei bleiben diese aber, vor allem in den argumentativ gesehen entscheidenden Funktionen der Stützung eines Arguments, in dem konkreten Phänomen fokussiert und lassen damit keine über das Phänomen hinausreichende, strukturelle Änderung des (alten) Wissen erkennen, da in der Stützung auf eine rein empirische Beobachtung von Fakten hingewiesen wird.⁷²

⁷⁰ Vgl. SCHWARZKOPF (2003), *Begründungen*, 231f.

⁷¹ Ebd., 233.

⁷² Vgl. ebd., 232.

3.4 Abschließende Bemerkungen zur Methodik

Die Auswertung und Analyse der gesammelten Daten (die vollständigen Transkripte sind dem Anhang zu entnehmen) erfolgt auf Basis der in diesem Kapitel erarbeiteten theoretischen Werkzeuge und Konzepte. Dabei sollen die Transkripte in einem ersten Schritt sequenziert und damit der Verlauf der Interviews bezogen auf die zu analysierende Aufgabe 3 dargestellt werden. Dann werden die Sequenzen nacheinander einzeln analysiert und interpretiert. Dabei sollen die Sequenzen hinsichtlich der verwendeten heuristischen Strategien mit der Klassifikation nach BRUDER / COLLET (2011) und der Modifikation nach KIPMAN (2020) untersucht werden. Mittels der Argumentationsanalyse, im Sinne TOULMINS (1975) und der Modifikation nach SCHWARZKOPF (2000b), soll herausgestellt werden, 1. ob nach SCHWARZKOPF (2000a) eine Argumentation vorliegt, 2. wie die argumentative Begründung der verwendeten heuristischen Strategien nach SCHWARZKOPF (2000a) funktional aufgebaut ist und 3. welcher Typ von Argument nach SCHWARZKOPF (2003) für die Begründung der verwendeten heuristischen Strategie(n) von den Interviewten verwendet wurde(n). Danach sollen die gesammelten Forschungsergebnisse systematisiert zusammengestellt und ihre Bedeutung herausgehoben werden. Ferner soll die Eignung der verwendeten methodischen Werkzeuge reflektiert werden.

4. Analyse und Reflexion der Ergebnisse der Untersuchung

„Vom Verfahrenscharakter her haben alle diese Strategien keinerlei algorithmische Natur. Es gibt weder klar definierte Schrittfolgen noch ein garantiertes und eindeutiges Ergebnis.

Strategien können „nur“ wie ein Treppengeländer Orientierung bieten auf dem Weg zum Finden von Lösungsideen, aber das können sie wirklich gut!“

Regina BRUDER / Christina COLLET (2011), Problemlösen lehren im Mathematikunterricht, 69f

Ursprünglich sollten die Interviews in einigen vierten Klassen Vareler Grundschulen durchgeführt werden. Die Interviews wurden genehmigt, konnten jedoch aufgrund der veränderten Rahmenbedingungen im Zusammenhang mit der Corona-Pandemie nicht an den Grundschulen durchgeführt werden. Da die Untersuchung jedoch von Beginn an so konzipiert wurde, dass sie sowohl mit Viertklässlerinnen und Viertklässlern wie auch mit Erwachsenen durchgeführt werden könnte, konnten die Interviews dann entsprechend modifiziert und somit ebenfalls mit Erwachsenen durchgeführt werden. Es nahmen insgesamt 8 Personen unterschiedlichsten Alters (von 17-55 Jahren), unterschiedlichster Bildungsabschlüsse (von Realschulabschluss bis Bachelor) und unterschiedlichster Einstellungen zu Mathematik teil.

Die im Folgenden auszuwertenden Interviews wurden mit 4 Interview-Pärchen durchgeführt (siehe hierzu die Erläuterungen in Kapitel 2.4 sowie den Interview-Leitfaden mit Erläuterungen im Anhang). Dies geschah unter Einhaltung der zu diesem Zeitpunkt gültigen Hygiene-Vorschriften der Bundesregierung. Dabei wurden die Interviews 1, 2 und 3 per BigBlueButton online durchgeführt und das Interview 4 bei den Interviewten vor Ort.

Die zu analysierenden Sequenzen aus Aufgabe 3 der Interviews werden zunächst dargestellt und dann mit Hilfe der in Kapitel 3 erarbeiteten Methoden und theoretischen Hilfsmittel analysiert. Die einzelnen Sequenzen werden gemäß der Reihenfolge, wie sie in den Interviews erschienen, analysiert. Dabei befinden sich die gegliederten Transkripte der Interviews im Anhang. Analysiert werden hierbei die heuristischen Strategien, die zu einer Lösung des Problems geführt haben beziehungsweise die, die unmittelbar mit mehr Zeit zu einer Lösung geführt hätten (wie etwa I4 S3), denn nicht alle heuristischen Strategien führten in ihrer Anwendung, wie auch BRUDER / COLLET (2011) feststellen, in dieser Untersuchung zu einer Lösung, da heuristischen Strategien beziehungsweise strategischem Problemlösen keine algorithmische Natur innewohnt.

4.1 Interview 1: JP und J verallgemeinern die Struktur der Zauberquadrate

Das Interview mit JP und P kann dabei wie folgt gegliedert werden:

- Sequenz 1: JP und J arbeiten rückwärts.
- Sequenz 2: JP und J arbeiten mit Analogien zum Verdoppeln in Aufgabe 2.
- Sequenz 3: JP nutzt Probieren mittels Zufallszahlen.
- Sequenz 4: JP und J arbeiten vorwärts.
- Sequenz 5: JP und J versuchen, die Struktur der Zauberquadrate zu verallgemeinern.
- Sequenz 6: JP und J versuchen, Zauberquadrate zu spiegeln und zu drehen.

Sequenz 1: JP und J arbeiten rückwärts

- 5 JP Dann würde ich bei dem äh ersten (leeren Zauberquadrate) beispielsweise anfangen und mir äh die Zauberzahl äh (atmet tief ein) neun, klappt das´ (4sec), bestimmt
- 6 I Oder (klappt) auch mit einer größeren Zauberzahl
- 7 JP Ja, ich nehme mal ne größere Zauberzahl (grinst), ich nehm (überlegt) ähm
- 8 J Dreizehn (lacht)
- 9 JP a Nein, zwölf. Es muss ja eine durch drei teilbare Zahl sein. * Deswegen nehm ich mal die zwölf (schreibt die 12 als Zauberzahl in das erste leere Zauberquadrat). b Das Dreifache von der Mittelzahl ist die Zauberzahl, das heißt zwölf geteilt durch drei ist vier dementsprechend muss bei dem hier (zeigt weiterhin auf das erste leere Zauberquadrat) die vier die Mittelzahl sein (trägt beim ersten leeren Zauberquadrat die 4 als Mittelzahl / in das Feld 5 ein). c Ähm und dann würde ich genauso strategisch vorgehen, dass ich erstmal ums eins reduziere (trägt in Feld 1 die 3 ein), dann bin ich hier bei 3 (zeigt auf das Feld 1) und hier um eins erhöhe, sind wir bei fünf (trägt die 5 in Feld 9 ein). d Dann gehe ich weiter und reduziere hier (zeigt auf die zweite Zeile) um zwei also auf zwei (zeigt auf die Mittelzahl / Feld 5 und trägt dann die Zahl 2 in Feld 4 ein). e Ähm (atmet tief ein) und (schnalzt leicht) und dementsprechend habe ich hier drei plus zwei (zeigt auf die erste Spalte mit Feld 1 und Feld 4) sind fünf verbleiben also noch sieben bis zur zwölf (trägt die 7 in Feld 7 ein). (Zeigt auf die 7 in Feld 7) f Das entspricht vier plus drei, auf der anderen Seite (der Diagonalen) dann vier minus

- 10 J | drei, äh also eins (trägt die Zahl 1 in Feld 3 ein). Genau und ähm oben und unten muss ich in dem Fall *(wartet auf J), doch muss ich mit einer Null arbeiten in dem Fall. *Ja, stimmt.
- 11 J | *hier geht´s nich auf (zeigt auf die unterste Zeile).
- 12 I | Aber das dürfen wir ja nicht oder dürfen wir das jetzt´
- 13 JP | Könnt ihr einmal ausprobieren, ob das funktioniert.
- 14 J | Also, in dem Fall muss es, weil es sonst nicht funktioniert (trägt währenddessen in Feld 8 eine 0 ein), denn sieben plus fünf (zeigt auf Felder 7 und 9) ist zwölf schon, deswegen muss hier ne null hin (zeigt auf Feld 8).
- 15 JP | Ah, aber dann haben wir oben doch schon (zeigt auf die erste Zeile mit den Feldern 1, 2, 3 und hier speziell auf das einzige noch leere Feld 2), warte, acht wäre das (zeigt auf das noch leere Feld 2), das wäre auch zu viel.
- 16 J | (3sec), wieso´
- 17 JP | Ja acht (zeigt auf das noch leere Feld 2) plus drei plus eins (zeigt erst auf Feld 1 und dann Feld 3) sind nich zwölf. (3sec) Doch sind zwölf.
- 18 JP | Ja (beide lachen). Ich wollt grad sagen hä (lacht und trägt in Feld 2 die 8 ein). Okay, das heißt das wäre schon mal gelöst und da haben wir eben mit der Zauberzahl begonnen.

Das fertige Zauberquadrat von JP und J:

3	8	1
2	4	6
7	0	5

Zauberzahl: 12

Bei dem ersten Versuch, ein neues Zauberquadrat zu erzeugen, gehen JP und J von einer selbst gewählten Zauberzahl aus (5), dazu wählt J zunächst die Zahl 13 (8), JP weist J aber darauf hin (9a), dass die Zauberzahl durch drei teilbar sein muss und schlägt deswegen die Zahl 12 als Zauberzahl vor (9a). Dadurch, dass JP weiß, dass die Zauberzahl das Dreifache der Mittelzahl ist (9b), muss die Mittelzahl 4 sein. JP fährt fort und nutzt das Wissen zur gleichbleibenden Differenz von der Mittelzahl zu den Randzahlen: JP probiert den Abstand +/-1 (9c), dann +/-2 (9d) und nutzt dann das Wissen um die additive Erzeugung der Zauberzahl, um die fehlende Zahl in Feld 7 zu bestimmen (9e). Die noch fehlende Zahl in Feld 3 wird von JP erneut über das Wissen der gleichbleibenden Differenz von der Mittelzahl zu den Randzahlen (in diesem Fall in der Diagonalen) bestimmt (9f). Die beiden letzten Zahlen in den Feldern 2 und 8 werden über das Wissen bestimmt, dass alle Zahlen einer Diagonalen, Zeile oder Spalte addiert die Zauberzahl ergeben müssen (9f, 13, 16), wobei J ein Rechenfehler unterläuft (14), der von J dann selbst bemerkt wird (16).

Dieses Vorgehen ist nach KIPMAN (2020) und BRUDER / COLLET (2011) der heuristischen Strategie des **Rückwärtsarbeitens** zuzuordnen, da sie ausgehend vom „Gesuchten“, in dieser Aufgabe der selbst gewählten Zauberzahl (5, 7, 9a), **rückwärts** zum „Gegebenen“, in dieser

Aufgabe den Zahlen des Zauberquadrats, über die Mittelzahl **arbeiten** (9b). Um dabei von der Zauberzahl auf die Zahlen des Zauberquadrates zu kommen, müssen sie „überlegen, welche Verknüpfungen zu diesem Ergebnis beziehungsweise zum Ziel geführt haben“⁷³: Sie nutzen das Wissen um den algebraischen Zusammenhang, dass die Zauberzahl das Dreifache der Mittelzahl ist, um die Mittelzahl zu bestimmen (9b) und **arbeiten** dann weiter **rückwärts**, indem sie das Wissen um den konstanten Abstand der Mittelzahl zu den jeweiligen beiden Randzahlen nutzen, um die fehlenden Felder zu füllen (9c, 9d, 9f, 13, 16) und mittels des Wissens zur additiven Erzeugung der Zauberzahl fehlende Felder zu bestimmen (9e).

Hier zeigt sich, dass nicht nur eine heuristische Strategie zur Lösung einer problemhaltigen Aufgabe Verwendung finden kann: KIPMAN (2020) und BRUDER / COLLET (2011) deuten bereits in diese Richtung, indem sie eine **Mischform des Vorwärts- und Rückwärtsarbeitens** erwähnen.⁷⁴ Wenn man nun mit den Erkenntnissen neuerer Forschung zum Problemlösen (siehe etwa ROTT (2013/14))⁷⁵ Problemlöseprozesse sowohl im Sinne linearer wie auch nicht-linearer, zyklischer Prozesse versteht, dann wird deutlich, dass mehrere heuristische Strategien im Problemlöseprozess parallel oder einander unter- beziehungsweise übergeordnet verwendet werden können: In der vorliegenden Sequenz 1 kann auch die Strategie des **systematischen Probierens** nach BRUDER / COLLET (2011) und KIPMAN (2020) gefunden werden. Diese kommt aber nicht exakt wie in der Literatur dargestellt vor, sondern als Sub- / Teil-Strategie, denn nachdem JP und J mittels **Rückwärtsarbeitens** über die selbst gesuchte Zauberzahl eine Mittelzahl bestimmt haben, **arbeiten** sie weiter **rückwärts**, **probieren** jedoch in dem Sinne **systematisch** aus, als dass sie ihr Wissen zum Abstand der Mittelzahl zu ihren Randzahlen nutzen und über **Ausprobieren rückwärtsarbeitend** die fehlenden Zahlen des Zauberquadrats bestimmen, wobei sie jedoch nicht mehr als einen Versuch benötigen (9c-d). Anders als in der Literatur bei KIPMAN (2020) dargestellt, handelt es sich bei diesem **systemhaften Probieren** nicht um den Inhaltsbereich der Kombinatorik.⁷⁶

JP und J argumentieren beziehungsweise begründen ihre genutzte heuristische Strategie, da nach SCHWARZKOPF (2000a) 1. explizit eine Begründung für das Vorgehen eingefordert wurde (dies wurde zu Beginn des Interviews gemacht, indem die Interviewten darum gebeten wurden,

⁷³ KIPMAN (2020), Problemlösen, 30.

⁷⁴ Vgl. ebd., 30.

⁷⁵ Vgl. ROTT (2014), Problembearbeitungsprozesse, 272ff.

⁷⁶ KIPMAN (2020), Problemlösen, 29 sieht systematisches Probieren als heuristische Strategie zumeist bei Aufgaben der Kombinatorik, bei denen es darum geht, möglichst alle möglichen Kombinationen zu finden. BRUDER / COLLET (2011), Problemlösen, 70 hingegen sehen die Strategie nicht nur auf Kombinatorik beschränkt, sondern „in nahezu allen Themenbereichen“.

ihr Vorgehen zu begründen, dies ist jedoch nicht mit transkribiert worden) und 2. in der Beschreibung ihres Vorgehens eine Begründung für dieses entwickelt wird (9a-17).

Die von JP und J vorgebrachte Argumentation lässt sich dabei wie folgt nach SCHWARZKOPF (2000b) gliedern: **Datum** (Die Zauberzahl ist 12 (da 12 durch 3 teilbar ist) (9a)), **Konklusion** (Es entsteht ein neues und funktionierendes Zauberquadrat (17)), **Schlussregel** (Wenn die Zauberzahl 12 genutzt wird, dann entsteht ein neues und funktionierendes Zauberquadrat (17)), **Stützung** (1. Die Zauberzahl muss eine durch drei teilbare Zahl sein (9a). 2. Der Abstand von der Mittelzahl zu den beiden Randzahlen der Diagonalen, Zeilen und Spalten muss gleich sein (9c, 9d, 9f, 13, 16). 3. Die additive Struktur der Zauberzahl muss eingehalten werden (alle Zahlen einer Zeile, Diagonale und Spalte müssen die Zauberzahl ergeben) (9e)), **Ausnahmebedingung** (Keine explizit genannt, denkbar wäre: Es gilt nicht, wenn nicht alle Eigenschaften eines Zauberquadrats erfüllt sind).

Die Argumentation von JP und J lässt sich wie folgt schematisch darstellen:

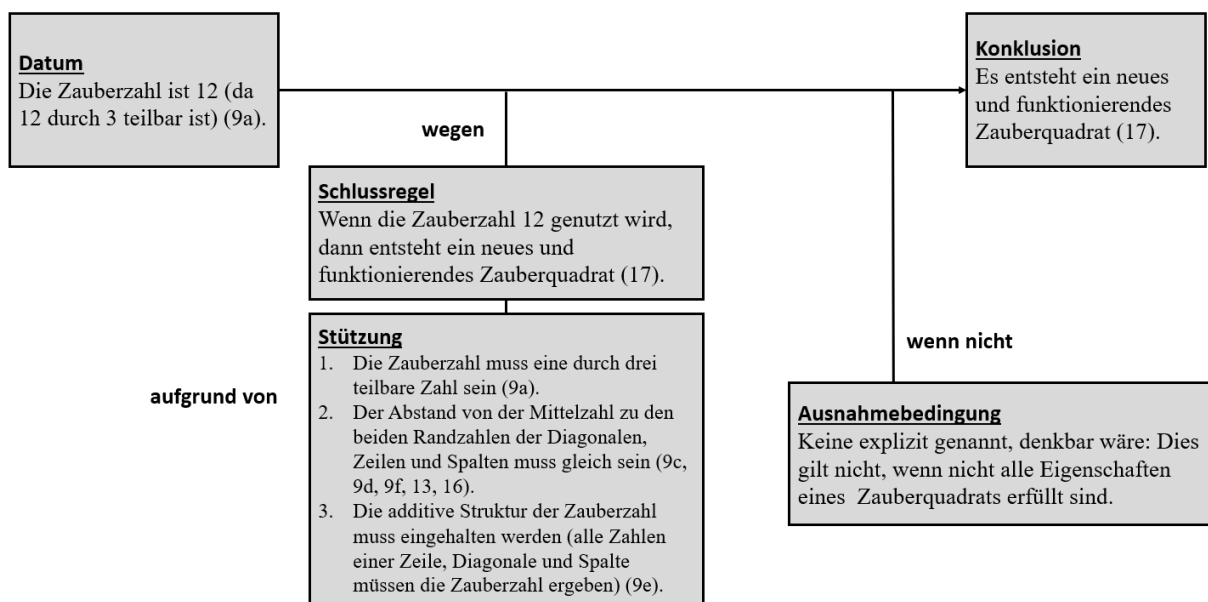


Abbildung 12: Schematische Darstellung des ersten Arguments von JP und J

Nach SCHWARZKOPF (2003) handelt es sich um ein Argument des Typs **empirisch-konstruktiver** Argumente, da das untersuchte Phänomen der Zauberquadrate auf andere Beispiele übertragen wird, an diesen geprüft und beobachtet wird. JP und J klären mittels Übertragung der Vorgehensweise auf andere Beispiele die Frage, ob das Phänomen weiterhin erhalten bleibt. Dabei geht in die Argumentation neues Wissen zu Kenntnissen der Konstruktion des Phänomens ein.

Sequenz 2: JP und J arbeiten mit Analogien zum Verdoppeln in Aufgabe 2

- 1 I Was gäbe es denn noch für Möglichkeiten, ein Zauberquadrat zu erzeugen´
- 2 JP Ja.
- 3 J Wir könntens machen wie bei Aufgabe 2.3, irgendeine Zahl oben links in die Ecke.
- 4 JP Ja, aber ich will jetzt nicht nochmal alles durchrechnen, ich würds eher machen wie bei einer anderen Aufgaben 2en, dass ich alles zum Beispiel jede Zahl um zwei erhöhe. *So würde ich jetzt vorgehen
- 5 J *Ja, okay (zustimmend).
- 6 JP Weil, dann muss man nicht so groß dran rumrechnen. *Dementsprechend
- 7 I *Ja, genau (zustimmend), ihr könnt das mal mit dem ersten Zauberquadrat, mit dem wir gerechnet haben, versuchen. Guckt doch mal, ob das geht.
- 8 JP Können wir nicht das nehmen was hier schon liegt direkt vor uns (zeigt auf das Zauberquadrat aus Sequenz 1)´
- 9 I Ja, das ist aber unschön, weil da die Null drin is.
- 10 JP Okay
- 11 J Das allererste, die Zauberzahl achtzehn. Das schreiben wir nicht nochmal auf, das haben wir ja hier *(holt den Zettel mit dem Zauberquadrat 9, 4, 5 / 2, 6, 10 / 7, 8, 9).
- 12 I *Ne, braucht ihr nicht.
- 13 J Also, verdoppeln, sechsunddreißig wäre dann unsere Zauberzahl (schreibt die 36 als Zauberzahl hin).
- 14 JP Ah, okay, du willst verdoppeln´. Okay verdoppeln.
- 15 J War das nich immer verdoppeln´
- 16 JP Ne, ich hab jetzt plus zwei gesagt. Verdoppeln ginge auch.
- 17 J Hä, aber die Zauberzahlen haben sich doch immer verdoppelt´. Ne, ja doch, aber bei Aufgabe 2.1 hat sich das verdoppelt.
- 18 JP Ja, genau (zustimmend). Da haben wir ne Verdopplung gemacht und da drunter haben wir immer plus zwei gemacht.
- 19 J Wir können auch mal Risiko machen.
- 20 JP (liebepoll zustimmend, lächelnd) Ja, okay. Dann rechne du aber (lachend).
- 21 J (lachend) Also zwei mal drei, sehr schwierig, sechs glaube ich (schreibt die Zahl 6 in Feld 9). Ähm zwei mal sechs sind zwölf (schreibt die Zahl 12 in Feld 5) und zwei mal neun sind achtzehn (schreibt die Zahl 18 in Feld 1).
- 22 JP Mhm (zustimmend). Rechts in die Mitte kommt ne zwanzig (J trägt in Feld 6 die Zahl 20 ein). Oben ne zehn (J trägt in das Feld 3 die Zahl 10 ein). Ooo, äh, oben in der Mitte eine acht (J trägt in das Feld 2 die Zahl 8 ein). Links ne vier (J trägt in das Feld 4 die Zahl 4 ein). Unten in der Mitte die sechzehn und unten links die vierzehn (J trägt in das Feld 8 die Zahl 16 und dann in das Feld 7 die Zahl 14 ein). Das können wir jetzt nochmal überprüfen. Zehn plus zwölf sind zweiundzwanzig plus vierzehn sind *äh (2sec) sind sechsunddreißig äh stimmt (lacht, nimmt seine vorher auf die Zahlen zeigenden Finger weg als wäre er fertig).
- 23 J *sechsunddreißig.
- 24 I Sehr gut. Könnt ihr noch einmal begründen, wä wieso jetzt eure Strategie funktioniert´
- 25 JP Weil wir die Mittelzahl, die ja das Der- äh also das Dreifache der Mittelzahl is ja die Zauberzahl (atmet ein) und weil wir die Zauberzahl verdoppelt haben, können wir auch die Mittelzahl verdoppeln.
- 26 I Genau (zustimmend), ihr habt jetzt quasi ein Zauberquadrat genommen das ihr kennt und habt jedes einzelne Feld *verdoppelt, um ein neues zu erzeugen. Und warum funktioniert das jetzt mit dieser Technik´. Könnt ihr das bitte noch einmal begründen´.
- 27 JP *Ja, richtig.
- 28 JP Weil sich die Differenz da im Grunde nicht ändert.
- 29 I Mh (zustimmend), ja genau.
- 30 J Wir heben alles verhältnismäßig gleich an.
- 31 JP Genau (zustimmend). Das Verhältnis bleibt gleich. Stimmt ja.
- 32 I Also die Struktur bleibt erhalten.
- 33 J Ja.
- 34 I Genau, sehr gut (lobend). *Gäbe es sonst noch eine Möglichkeit ein Zauberquadrat zu erzeugen´.
- 35 JP *Hihi (JP und J kichern fröhlich). Bitte´

Das fertige Zauberquadrat von JP und J (links) und das referenzierte Zauberquadrat (rechts):

18	8	10
4	12	20
14	16	6

Zauberzahl: 36

9	4	5
2	6	10
7	8	9

Zauberzahl: 18

Bei ihrem zweiten Versuch, ein Zauberquadrat zu erzeugen, wollen JP und J zunächst analog zu Aufgabe 2.3 (mit nur einer gegebenen Zahl starten) vorgehen (3). Da ihnen dies aber als zu viel Rechenarbeit erscheint, wollen sie analog zu einer anderen Aufgabe aus Aufgabe 2.1, bei der sie aus einer operativen Serie von Zauberquadraten weitere durch Verdoppeln aller Zahlen finden konnten, vorgehen (4-6). J schlägt dann vor, ein bekanntes Zauberquadrat zu verdoppeln (13). JP und J überlegen, ob sie verdoppeln oder um zwei erhöhen wollen, entscheiden sich dann aber für das Verdoppeln (14-20). Dann verdoppeln sie das Zauberquadrat (9, 4, 5 / 2, 6, 10 / 7, 8, 9) aus Aufgabe 2 zu einem neuen Zauberquadrat (11, 21-22). I bittet die beiden dann, ihre genutzte Strategie zu begründen (24), woraufhin JP und J ihre Strategie erneut darstellen und begründen (25-33).

Die von JP und J genutzte Strategie beschreibt J mit „wir könntens so machen wie bei Aufgabe 2.3“ (3). Sie nutzen dabei einen **Analogieschluss** beziehungsweise den Typ **Analogiebildung** als heuristische Strategie nach der Klassifikation von KIPMAN (2020) und BRUDER / COLLET (2011). Dabei erkennen sie, dass sie zu einem Problem eine ähnliche Aufgabe beziehungsweise Situation bereits kennen (3-4, 14-20) und versuchen, „beim Finden des Lösungswegs (hin zu einem neuen Zauberquadrat) auf eine bekannte Vorgehensweise zurückzugreifen“⁷⁷ (13-23).

Anzumerken ist, dass JP und J zwei Vorschläge für das Nutzen von analogen Fällen vorschlagen: 1. den **Analogieschluss** von J: „wie bei Aufgabe 2.3, irgendeine Zahl oben links in die Ecke“ (3), welcher dann verworfen wird (4), und 2. den **Analogieschluss** von JP: „ich würds eher machen wie bei einer der anderen Aufgaben 2en“ (4), der dann ausgeführt wird. Damit spricht J nicht nur die Strategie der **Analogiebildung** an, sondern auch indirekt die heuristische Strategie des **Vorwärtsarbeitens** aus Aufgabe 2.3, bei der mit nur einer gegebenen Zahl vorwärts gearbeitet werden kann (auf diese Weise haben JP und J bei der Aufgabe 2.3 das Zauberquadrat vervollständigt), um ein fertiges Zauberquadrat mit einer funktionierenden Zauberzahl zu erhalten (3-4). Obwohl hier primär ein **Analogieschluss** zu Aufgabe 2.3 gezogen

⁷⁷ KIPMAN (2020), Problemlösen, 31.

wird, wird damit auch sekundär die in dieser Aufgabe von JP und J verwendete heuristische Strategie angesprochen, da diese in Aufgabe 2.3 zu einer Lösung geführt hat und damit indirekt dem **Analogieschluss** zugrunde liegt und diesen legitimiert, da die vorher genutzte Strategie eine valide Lösung ergab. Es lassen sich also hier Überschneidungen beziehungsweise parallele Nutzungen von mehreren heuristischen Strategien auf dem Weg zur Lösung einer problemhaltigen Aufgabe beobachten (wie bereits in Sequenz 1 des Interviews 1 dargestellt).

Nach SCHWARZKOPF (2000a) wird von JP und J für die Strategie der **Analogiebildung** eine Argumentation vorgebracht, da 1. explizit eine Begründung für das Vorgehen eingefordert wurde (24) und 2. daraufhin von J und JP eine Begründung entwickelt wird (25-33).

Nach SCHWARZKOPF (2000b) lässt sich die Argumentation von JP und J folgendermaßen gliedern: **Datum** (Alle Zahlen eines Zauberquadrats werden verdoppelt (13)), **Konklusion** (Es entsteht ein neues und funktionierendes Zauberquadrat (4)), **Schlussregel** (Wenn man alle Zahlen eines Zauberquadrats verdoppelt, dann entsteht ein neues und funktionierendes Zauberquadrat (4, 13, 28, 30-31)), **Stützung** (1. Alle bekannten Eigenschaften eines Zauberquadrats bleiben erhalten (25). 2. Wenn die Mittelzahl, die ein Drittel der Zauberzahl ist, verdoppelt wird, dann muss auch die Zauberzahl verdoppelt werden (25)), **Ausnahmebedingung** (Keine explizite genannt, denkbar wäre: Es gilt nicht, wenn nicht alle Felder eines Zauberquadrates verdoppelt werden (in Anlehnung an 25, 30-31)).

Die Argumentation von JP und J lässt sich wie folgt schematisch darstellen:

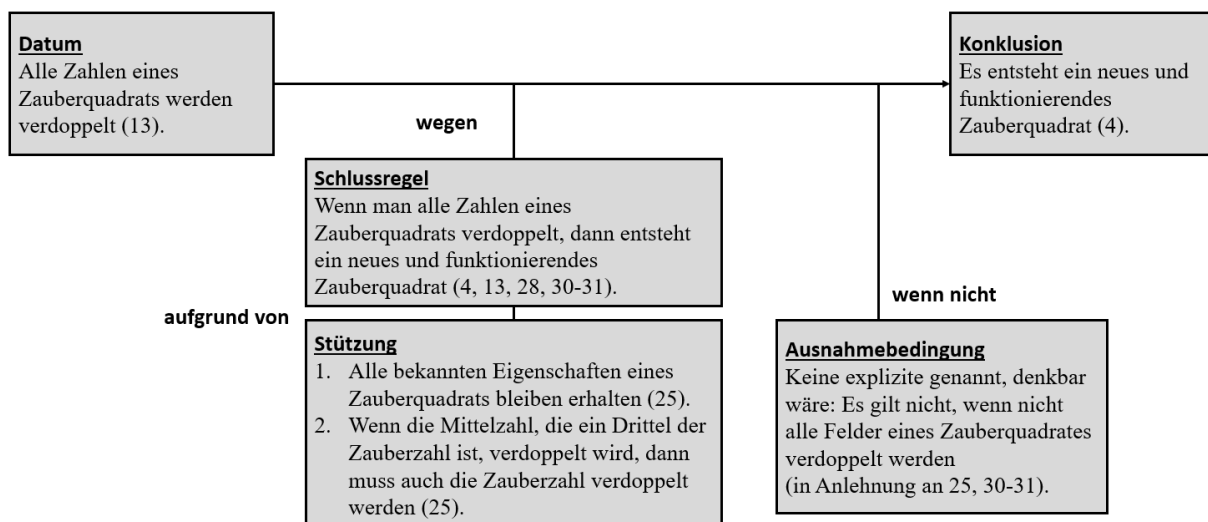


Abbildung 13: Schematische Darstellung des zweiten Arguments von JP und J

Das von JP und J genutzte Argument entspricht nach der SCHWARZKOPF'schen Klassifikation von Argumenten (2003) dem **empirisch-konstruktiven Argument**, da das in der vorhergehenden Aufgabe untersuchte Phänomen der Verdopplung von Zauberquadraten als operative Veränderung (4) auf das vorliegende Beispiel übertragen, an diesem geprüft und beobachtet wird (4-23). Somit wird vornehmlich die Frage geklärt, ob das Phänomen des funktionierenden Zauberquadrats bei Verdopplung aller Zahlen erhalten bleibt (24-33).

Sequenz 3: JP nutzt Probieren mittels Zufallszahlen

- 1 I Gäbe es denn jetzt für Leute, die nicht auf die Idee kommen, noch eine viel schwierigere okay aufwändigere Möglichkeit, die aber trotzdem zum Ziel führen würde, wenn man das oft genug macht´
- 2 JP Einfach zufällig irgend ne Zahl einsetzen.
- 3 I Mh (zustimmend). Und warum würde das irgendwann funktionieren´
- 4 JP (3sec) Ach, das ist dann ja im Grunde wie beim Sudoku. Du guckst so lange ähm bis irgendwann zufällig eine passende Zauberzahl herauskommt und streichst dann immer mal wieder die falschen Ergebnisse oder die falschen Ziffern durch.
- 5 I Also ersetzt du die Felder mit gewissen Zahlen immer zufällig.
- 6 JP Jap.
- 7 I Okay, ja das würde auch funktionieren.

JP überlegt, dass mit einer hohen Anzahl an Versuchen von zufälligen Eintragungen von Zahlen und der Prüfung, ob ein Zauberquadrat vorliegt, sich ein neues Zauberquadrat konstruieren lassen würde (2,4). I fragt, warum diese Überlegung funktionieren würde (3) und JP begründet die eigene Idee (4-7). Auf eine Ausführung der Idee beziehungsweise Strategie wird dann verzichtet (7).

Die von JP genutzte (theoretisch bleibende und nicht durchgeführte) Strategie entspricht nach BRUDER / COLLET (2011) und KIPMAN (2020) dem **(systematischen) Probieren** (2, 4). Lernende machen ihre „wertvollsten Erfahrungen durch Nachmachen und eigenständiges Ausprobieren. Wer kein Verfahren kennt und man sich nicht anders zu helfen weiß, sind Versuch und Irrtum die typischen Vorgehensweisen“.⁷⁸ Anders als bei KIPMAN (2020) und BRUDER / COLLET (2011) beschrieben, wäre das Vorgehen von JP dann zwar ein „diffuses Herumprobieren“⁷⁹, aber nicht aus fehlendem Verfahrenswissen, da JP und J diese nur als eine von vielen möglichen Strategien wahrnehmen. Der von den Autoren genutzte deskriptive Begriff des „**systematischen**“ **Probierens** wird hier nur indirekt bedient: Während BRUDER / COLLET (2011) und KIPMAN (2020) davon ausgehen, dass aus den gewonnenen Erfahrungen beim **Probieren** dann ein „in vielen Fällen“ **systematisches Probieren** resultiert,⁸⁰ nutzt JP

⁷⁸ KIPMAN (2020), Problemlösen, 31.

⁷⁹ BRUDER / COLLET (2011), Problemlösen, 70; vgl. KIPMAN (2020), Problemlösen, 29.

⁸⁰ Vgl. BRUDER / COLLET (2011), Problemlösen, 70f.; vgl. KIPMAN (2020), Problemlösen, 29.

hier bewusst nur das **Probieren**. Ferner lässt sich feststellen, dass KIPMAN (2020) (anders aber BRUDER / COLLET (2011)) diese heuristische Strategie vor allem der Inhaltsebene der Kombinatorik zuordnet, hier dies aber nicht zutrifft.⁸¹

Nach SCHWARZKOPF (2000a) wird von JP zur Begründung ihrer verwendeten Strategie eine Argumentation hervorgebracht da, 1. explizit eine Begründung für das Vorgehen von JP eingefordert wird (3) und 2. daraufhin eine Begründung von JP entwickelt wird (4-6).

Die Argumentation von JP lässt sich nach SCHWARZKOPF (2000b) folgendermaßen gliedern: **Datum** (1. Zufallszahlen können in Zauberquadrate eingesetzt werden (2, 4). 2. Es werden viele Iterationen an zufälligen Zahlen in Zauberquadrate eingesetzt (2)), **Konklusion** (Es entsteht ein neues und funktionierendes Zauberquadrat (2, 4)), **Schlussregel** (Wenn Zufallszahlen in Zauberquadrate eingesetzt werden können und viele Iterationen an Sätzen zufälliger Zahlen in Zauberquadrate eingesetzt werden, dann entstehen neue und funktionierende Zauberquadrate (2, 4)), **Stützung** (Wenn man es oft genug probiert, funktioniert es (gemäß dem Gesetz der großen Zahlen) irgendwann (4)), **Ausnahmebedingung** (Es wird keine explizite genannt, denkbar wäre: Es gilt nicht, wenn nicht die additive Eigenschaft der Zauberquadrate bezogen auf die Zauberzahl erhalten bleibt (in Anlehnung an 4)).

Die Argumentation von JP und J lässt sich wie folgt schematisch darstellen:

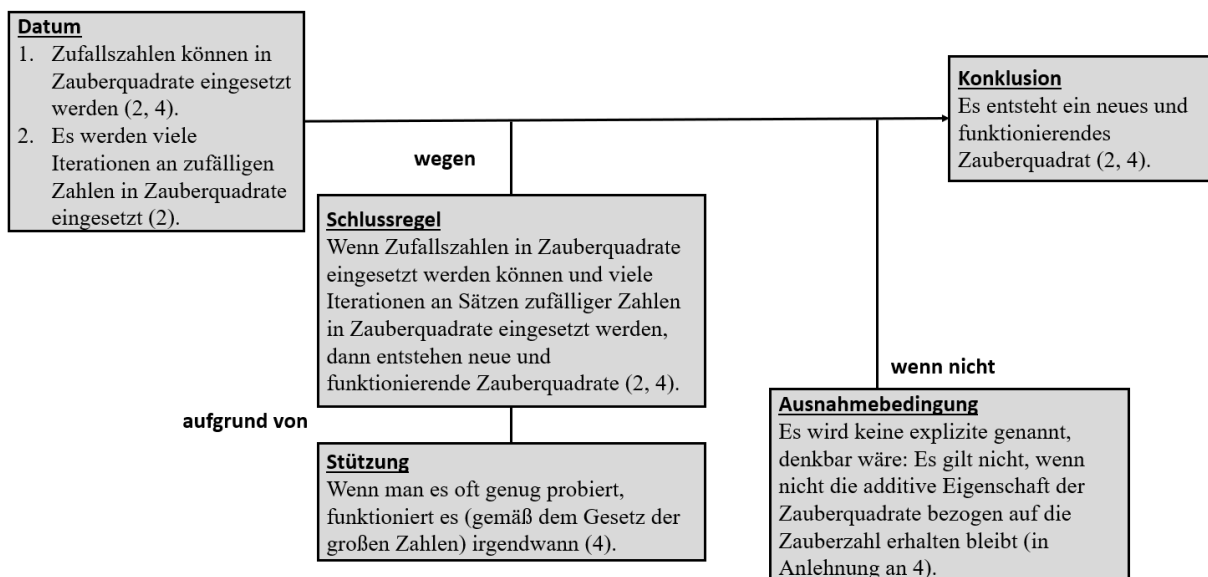


Abbildung 14: Schematische Darstellung des dritten Arguments von JP und J

Das von J vorgebrachte Argument entspricht nach SCHWARZKOPFS Klassifikation von Argumenten (2003) einem **empirischen Argument**, da (theoretisch) das Auftreten des

⁸¹ Vgl. BRUDER / COLLET (2011), Problemlösen, 70f.; vgl. KIPMAN (2020), Problemlösen, 29.

Phänomens (Erzeugung eines Zauberquadrats durch zufällige Zahlen) durch eine (nicht vollständige) systematische Prüfung aller möglichen Fälle vorgenommen wird. Im Sinne des **strukturell-mathematischen Arguments** werden Zufallszahlen mit der Funktion von einem Platzhalter für Beispiele genutzt, die als Erläuterung allgemeiner Erkenntnisse (zur Struktur der Zauberquadrate und deren Erzeugung) herangezogen werden, um dabei die Frage zu beantworten, wie man das untersuchte Phänomen erzeugen kann. Es könnte somit als **Übergangsform** zwischen beiden Argumenttypen angesehen werden. Da jedoch JP und J im Sinne des **strukturell-mathematischen Arguments** nicht die Auswirkungen von hypothetisch zugrundeliegenden Strukturen nutzen, um das Phänomen zu erzeugen, sondern sie im Sinne des **empirischen Arguments** durch Nutzung von Zufallszahlen eher prüfen, ob das Phänomen erzeugt wird beziehungsweise vorliegt (4), kann es als **empirisches Argument** betrachtet werden.

Sequenz 4: JP und J arbeiten erneut mit Analogien

- | | | |
|---|----|---|
| 1 | JP | Also eben haben wir es ja durch ähm Verdoppeln gemacht *Halbieren funktioniert dementsprechend genauso, weil da die Struktur auch bleibt. Oder um eine gewisse Summe erhöhen beziehungsweise reduzieren muss dann ja ebenfalls funktionieren, weil auch da auch ähm die Zauberzahl erhalten bleibt und auch die Struktur. |
| 2 | J | *Halbieren |
| 3 | I | Sehr gut (zustimmend) |

JP und J begründen, dass ihr Vorgehen aus Sequenz 2 auch für das Halbieren funktionieren würde (1-2). Von Seiten des Interviewers wird dann auf weitere Nachfragen verzichtet (3).

Die von JP und J genutzte heuristische Strategie entspricht wie bei Sequenz 2 dem **Analogieschluss** nach der Kategorisierung von BRUDER / COLLET (2011) und KIPMAN (2020).

Der Interviewer verzichtet aufgrund der Ähnlichkeit zu der bereits begründeten Funktionsweise der Strategie des **Analogieschlusses** in Sequenz 2 auf weitere Nachfragen, somit lässt sich nach SCHWARZKOPF (2000a) hier kein Argument darstellen. Dieses kann jedoch aufgrund der analog erfolgenden Begründung wie in Sequenz 2 als Argumentation im Sinne SCHWARZKOPFS (2000a) verstanden werden, auch wenn hier explizit auf eine Einforderung einer Begründung verzichtet wurde.

Ähnlich wie in Sequenz 2 ist das gedanklich-implizite Argument nach SCHWARZKOPF (2000b) folgendermaßen aufgebaut: **Datum** (1. Alle Felder eines Zauberquadrates werden halbiert (1). 2. Verdoppeln erzeugt ein neues und funktionierendes Zauberquadrat (1). 3. Die Zauberzahl und die Struktur des Zauberquadrats bleibt erhalten (1)), **Konklusion** (Es entsteht ein neues

und funktionierendes Zauberquadrat (1)), **Schlussregel** (Wenn alle Felder eines Zauberquadrates halbiert werden, die Verdopplung aller Felder eines Zauberquadrats ein neues und funktionierendes Zauberquadrat erzeugt und die Zauberzahl und Struktur eines Zauberquadrats erhalten bleiben, dann entsteht ein neues und funktionierendes Zauberquadrat (1)), **Stützung** (Die Struktur eines Zauberquadrats und die Eigenschaft der Zauberzahl bleibt erhalten (1)), **Ausnahmebedingung** (Keine explizite genannt, denkbar wäre: Es gilt nicht, wenn nicht alle Felder eines Zauberquadrats halbiert werden (in Anlehnung an 1)).

Die Argumentation von JP und J lässt sich wie folgt schematisch darstellen:

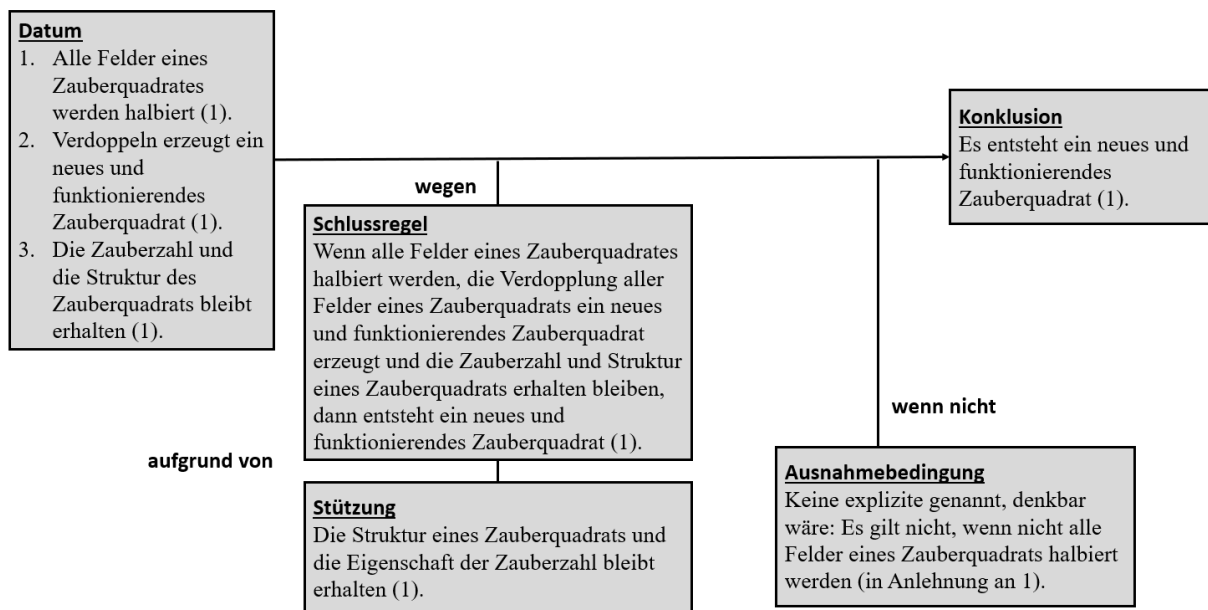


Abbildung 15: Schematische Darstellung des vierten Arguments von JP und J

Analog zu Sequenz 2 ist das Argument nach SCHWARZKOPF (2003) ein **empirisch-konstruktives** Argument, da JP prüft, ob das Phänomen der Eigenschaften eines Zauberquadrats erhalten bleibt: „muss dann ja ebenfalls funktionieren, weil auch da auch ähm die Zauberzahl erhalten bleibt und auch die Struktur“ (1).

Sequenz 5: JP und J versuchen, die Struktur der Zauberquadrate zu verallgemeinern

- 1 JP Achso, ne allgemeinere Lösung mit Variablen.
- 2 I Ah okay. Könntest du mir da vielleicht deine Idee bitte erläutern, JP’.
- 3 JP a Oh Gott, oh Gott (atmet tief ein).Wir haben ja gesagt, die Mittelzahl ist immer ein Teiler der Zauberzahl, das ich mach in die Mitte jetzt einfach mal ein x (schreibt den Buchstaben x in Feld 5), das heißt die Zauberzahl ist grundsätzlich drei x (schreibt 3x in das noch leere Feld für die Zauberzahl). Ich hoffe man kann das sehen, müsste gehen (guckt, ob die eigenen Eintragungen auf der aufzeichnenden Kamera der digitalen Konferenz zu sehen sind). b Äh dann ist oben links das Feld, wenn wir in dem Schema bleiben das wir eben erstellt haben, beispielsweise x minus eins (schreibt in das Feld 1 x-1) und unten rechts das Feld x plus (schreibt in das Feld 9 x+1). Ähm, dann sind wir hier her gegangen und haben links x minus zwei gemacht (trägt in das Feld 4 x-2 ein), rechts x plus zwei (trägt in das Feld 6 x+2 ein). c Als wir dann weitergegangen sind war dann immer das Problem, dass

(zeigt mit dem Stift kreisend um beziehungsweise auf das Feld 7) äh gegen den Uhrzeigersinn im nächsten Feld nicht x minus drei kommen konnte. (1sec) Ach das ergibt ja auch Sinn. Sondern oben rechts immer x minus drei stand (schreibt in das noch leere Feld 3 $x-3$) und unten x plus drei (schreibt $x+3$ in das noch leere Feld 7). Denn dann hab ich äh wenn ich die linke Spalte einmal anschau (zeigt auf die linke Spalte mit den Feldern 1, 4 und 7), im ersten Feld minus eins, im zweiten Feld minus zwei und im dritten Feld plus drei (zeigt auf die Felder 1, dann 4 und dann 7), das heißt letzten Endes kommt plus minus null raus. d Was ja das ist, was wir am Anfang bei dem fünfer Beispiel schon mal mit den Zahlenwerten gesagt haben. Und dann hatten wir noch äh *plus vier dann dementsprechend oben und minus vier dementsprechend unten (trägt $x+4$ in das Feld 2 ein und danach $x-4$ in das Feld 8) damit das mit den Zeilen passt (zeigt auf die Zeile 1 mit den Feldern 1, 2, 3 und dann auf Zeile 3 mit den Feldern 7, 8, 9).

- 4 J | *Vier
 5 J Gut.
 6 I Hervorragend, sehr gut.

Das nicht fertige Zauberquadrat von JP und J:

$x-1$	$x+4$	$x-3$
$x-2$	x	$x+2$
$x+3$	$x-4$	$x+1$

Zauberzahl: $3x$

JP hat die Idee, ein weiteres beziehungsweise viele weitere Zauberquadrate mittels einer allgemeinen Lösung mit Variablen zu erzeugen (1). Dann versucht JP mit J eine allgemeine Struktur des Zauberquadrats aufzustellen, indem sie die Mittelzahl mit der Variablen x definieren, dementsprechend die Zauberzahl durch ihr Wissen um den Zusammenhang der beiden als $3x$ identifizieren und anschließend versuchen, das Wissen um die gleichbleibende Differenz zwischen der Mittelzahl und ihren jeweiligen beiden Randzahlen anzuwenden (3-4). An diese Sequenz anschließend versuchen JP und J ihre allgemeine Darstellung der Struktur eines Zauberquadrats noch zu verfeinern, kommen aber zu keiner finalen Lösung und belassen es dann dabei. Der Interviewer verzichtet auf weitere Nachfragen und das Interview wird noch einmal in Richtung einer Äußerung von JP aus dem Anfang des Interviews gelenkt.

Die von JP und J genutzte heuristische Strategie mittels allgemeiner Darstellung über Variablen (beliebige und beliebig viele) neue Zauberquadrate zu erzeugen, lässt sich nicht eindeutig einer bestimmten heuristischen Strategie nach BRUDER / COLLET (2011) und KIPMAN (2020) zuordnen. Für die Strategie der **Rückführung von Unbekanntem auf Bekanntes** spricht, dass bei dem vorliegenden Problem „umstrukturiert, erweitert oder Informationen reduziert“⁸² werden, indem eine algebraisch-verallgemeinernde Sicht auf das Problem eingenommen und

⁸² KIPMAN (2020), Problemlösen, 31.

dabei gemäß der Definition der Autoren auf bereits Verstandenes aufgebaut wird (JP und J nutzen in der algebraisierenden Verallgemeinerung ihr Wissen zu den Zusammenhängen von Zauberzahl und Mittelzahl sowie Mittelzahl und ihren Randzahlen (3)). Für die heuristische Strategie des **Umstrukturierens des Problems** spricht, dass die Struktur der Aufgabe mittels Umstrukturieren und damit über die Einnahme eines anderen Blickpunktes analysiert und dann die „Ausgangssituation mit einer anderen Sichtweise durch eine bessere Anordnung in eine Lösung“⁸³ überführt wird. Besonders der hohe Grad der Verallgemeinerung durch die algebraisierende Verallgemeinerung und den Fokus von JP und J auf die Struktur der Zauberquadrate sind ausschlaggebend dafür, dass diese Strategie dem **Umstrukturieren eines Problems** zugeordnet wird.

Ferner wird auch eine Form des **Vorwärtsarbeitens** angesprochen (3), da JP ausgehend von einer selbst gewählten Mittelzahl **vorwärtsarbeitet**, indem JP (Teil-)Ziele erreicht wie etwa die Zauberzahl (3a) und andere Felder des Zauberquadrats mit dem Wissen zum konstanten Abstand von der Mittelzahl zu den beiden Randzahlen einer Diagonalen, Zeile und Spalte (3b-d).

Nach SCHWARZKOPF (2000a) liegt nur indirekt eine Argumentation vor, da zwar 1. Begründungsbedarf einer Aussage im Vorfeld des Interviews angezeigt wurde aber 2. keine explizite Begründung von JP und J entwickelt werden konnte, da sie die heuristische Strategie nicht zur vollständigen Problemlösung führten (Ansätze für die Begründung lassen sich in dem Versuch von JP und J finden, dass sie eine allgemeine Struktur aufzubauen versuchen (siehe ihr nicht fertiges Zauberquadrat, 3)).

Das vorgebrachte Argument von JP und J lässt sich dabei folgendermaßen im Sinne SCHWARZKOPFS (2000b) gliedern: **Datum** (1. Die Mittelzahl x ist ein Teiler der Zauberzahl (3a). 2. Die Mittelzahl ist ein Drittel der Zauberzahl $3x$ (3a)), **Konklusion** (Es entsteht ein neues und funktionierendes Zauberquadrat (1)), **Schlussregel** (Wenn die Mittelzahl x ein Teiler und ein Drittel der Zauberzahl $3x$ ist, dann entsteht ein neues und funktionierendes Zauberquadrat), **Stützung** (Es bleibt die Eigenschaft des konstanten Abstands von der Mittelzahl x zu ihren Randzahlen erhalten (3b)), **Ausnahmebedingung** (Es wird explizit keine genannt, denkbar wäre: Dies gilt nicht, wenn nicht alle strukturellen Eigenschaften eines Zauberquadrates bei der Nutzung von Variablen erhalten bleiben).

⁸³ KIPMAN (2020), Problemlösen, 21.

Die Argumentation von JP und J lässt sich wie folgt schematisch darstellen:

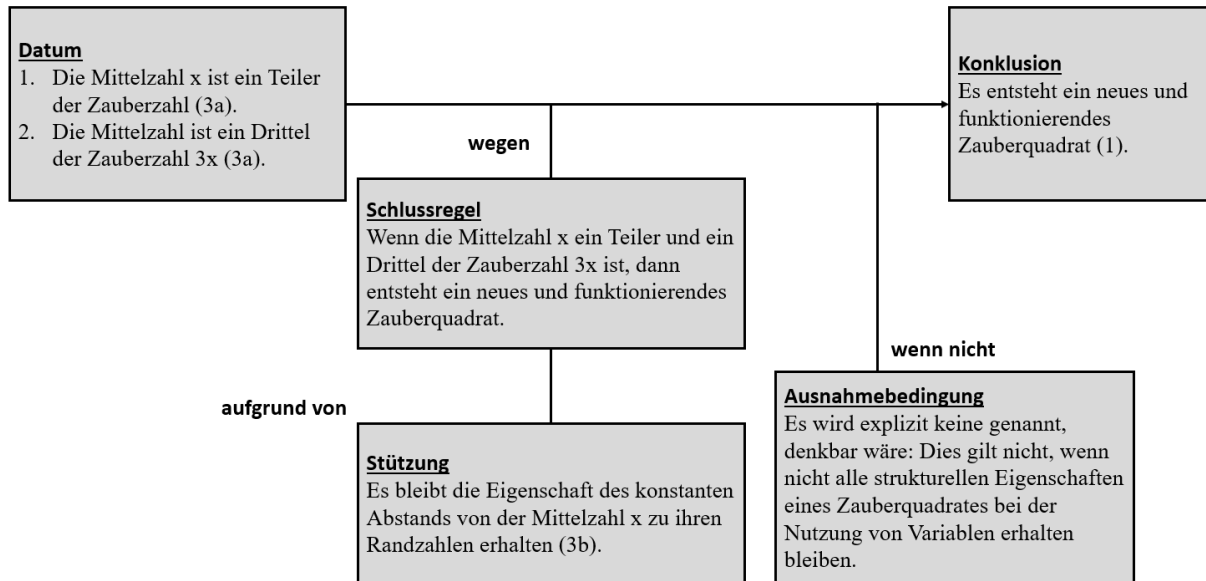


Abbildung 16: Schematische Darstellung des fünften Arguments von JP und J

Bei der von JP und J vorgebrachten Argumentation handelt es sich nach der von SCHWARZKOPF (2003) erstellten Klassifikation von Argumenten um ein **strukturell-mathematisches** Argument, da JP und J prüfen, wie das Phänomen zu erzeugen ist, indem sie die Beispielbeziehungsweise Zahlenebene verlassen und mittels Variablen versuchen, die Zauberquadrate mit all ihren Eigenschaften und Strukturen allgemein-gültig zu erzeugen (3).

Sequenz 6: JP und J versuchen, Zauberquadrate zu spiegeln und zu drehen

- 1 I Du hast am Anfang gesagt, wenn man ein Zauberquadrat hat, JP, dann ist da irgendwas mit den Seitenzahlen, dann könnte man die irgendwie tauschen'. Könnte man so eine Methode noch verwenden, um ein Zauberquadrat zu erzeugen'.
- 2 JP Ja, ich könnte die Zahlen spiegeln im Grunde.
- 3 I Warum, warum würd das funktionieren'.
- 4 JP Weil die Summe oder generell alle Summen dann immer gleich bleiben, wenn ich um die Mittelzahl herum spiegel' und gleiches muss dann auch mitm Drehen funktionieren.
- 5 I Also spiegeln und drehen würde funktionieren'. Könntest du ein Beispiel damit machen'.

JP und J testen an einem Beispiel und erkennen, dass das Drehen von Zauberquadraten nicht funktioniert, wenn man nur um eine Zahl dreht und versuchen dann das Spiegeln. Aus Gründen der besseren Referenzierbarkeit wird die Zählung der Aussagen nicht bei 1 neu gestartet, sondern fortgesetzt.

- 6 JP Drehen teste ich auch noch einmal kurz (nimmt sich das Zauberquadrat aus Aufgabe 1). Fang ich mal mit dem sechser an und spiegel die (schreibt die Mittelzahl 6 in Feld 5), das heißt oben links ist die drei und unten ist die neun (schreibt die Zahl 3 in Feld 1 und die Zahl 9 in das Feld 9). Achso, achtzehn als Zauberzahl wieder logischerweise (schreibt die Zahl 18 in das Feld der Zauberzahl). Ähm dann

hier die fünf (schreibt die Zahl 5 in das Feld 7) und hier die sieben (schreibt die Zahl 7 in das Feld 3). Zehn und zwei (schreibt die Zahl 10 in das Feld 4 und dann die Zahl 2 in das Feld 6). Acht und vier (schreibt die Zahl 8 in das Feld 2 und dann die Zahl 4 in das Feld 8).

- 7 J Ja, das passt.
 8 JP Passt es´
 9 J Ja, nach meinen Berechnungen ist das lupenrein (schmunzelt).
 10 JP Ok, ok. Das heißt spiegeln funktioniert nach unserer Methode aber so wie wir das erstellt haben äh mit dem ähm anti-, also gegen den Uhrzeigersinn ähm um eins reduzieren funktioniert das Drehen eben nicht, weil sich dann nicht um eins reduziert würde und ne andere Struktur aufgemacht werden würde.
 11 I Warum würde die Strategie, die ihr jetzt habt, ein Zauberquadrat zu spiegeln, um ein neues zu erzeugen funktioniert das´. Könnt ihr das begründen´.
 12 JP Ähm (10sec). Ah, weil da die Struktur erhalten ist, nur eben äh an einer anderen Position beginnt.

Das von JP und J erzeugte Zauberquadrat (links) und das von ihnen referenzierte (rechts):

3	8	7
10	6	2
5	4	9

Zauberzahl: 18

9	4	5
2	6	10
7	8	3

Zauberzahl: 18

I und JP referenzieren JPs Idee am Anfang des Interviews, dass man Zauberquadrate tauschen könnte (1), woraufhin JP sagt, dass man sie auch spiegeln könnte (2). I fragt nach, warum das funktionieren würde (3), was von JP mit den gleichbleibenden Summen, also der gleichbleibenden Struktur, begründet wird (4). Dann hat JP die Idee, dass nicht nur das Spiegeln, sondern auch das Drehen funktionieren müsste (5). Dann testen JP und J zunächst die Idee von JP in (5) und stellen fest, dass das Drehen nicht immer beziehungsweise nicht bei ihrem gewählten Beispiel funktioniert (dies wurde nicht transkribiert). Dann testen sie die Idee des Spiegeln (6) und stellen fest, dass sich so neue Zauberquadrate aus bekannten Zauberquadraten erzeugen lassen, denn JP resümiert „das heißt spiegeln funktioniert nach unserer Methode“ (7, 9-10). I fragt noch einmal nach einer Begründung für das Funktionieren des Spiegeln (11), die JP mit der gleichbleibenden Struktur auch beim Spiegeln eines Zauberquadrats benennt (12).

Die von JP und J verwendete heuristische Strategie nach BRUDER / COLLET (2011) und KIPMAN (2020) entspricht der der **Analogiebildung**, da JP und J beim Finden des Lösungsweges auf eine bekannte Vorgehensweise (in diesem Fall vermutlich auf das Spiegeln geometrischer Objekte) zurückgreifen. Sie prüfen also, ob sie den bekannten Lösungsweg des Spiegeln analog auf die Zauberquadrate übertragen können, um so neue Zauberquadrate zu erzeugen.

In Sequenz 6 liegt zudem eine Argumentation nach SCHWARZKOPF (2000a) vor, da 1. explizit von I in (11) eine Begründung durch Anzeigen eines Begründungsbedarfs eingefordert wird, der 2. von JP in (12) zu befriedigen versucht wird, wobei explizit eine Begründung entwickelt wird.

Das vorgebrachte Argument ist dabei nach SCHWARZKOPF (2000b) folgendermaßen zu gliedern: **Datum** (1. Die Zahlen des Zauberquadrats werden gespiegelt (6). 2. Die Mittelzahl bleibt gleich (6). 3. Die Zauberzahl bleibt gleich (6)), **Konklusion** (Es entsteht ein neues und funktionierendes Zauberquadrat (6, 7)), **Schlussregel** (Wenn die Zahlen des Zauberquadrats gespiegelt werden und dabei die Mittelzahl und Zauberzahl gleich bleiben, dann entstehen neue und funktionierende Zauberquadrate (6)), **Stützung** (Es wird explizit keine Stützung genannt), **Ausnahmebedingung** (Es wird explizit keine Ausnahmebedingung genannt, es kann aber angenommen werden, dass JP und J die Ausnahme mit-denken, dass dies nicht gilt, wenn die Operation des Spiegelns nicht auf alle Felder des Zauberquadrats angewendet wird (12)).

Die Argumentation von JP und J lässt sich wie folgt schematisch darstellen:

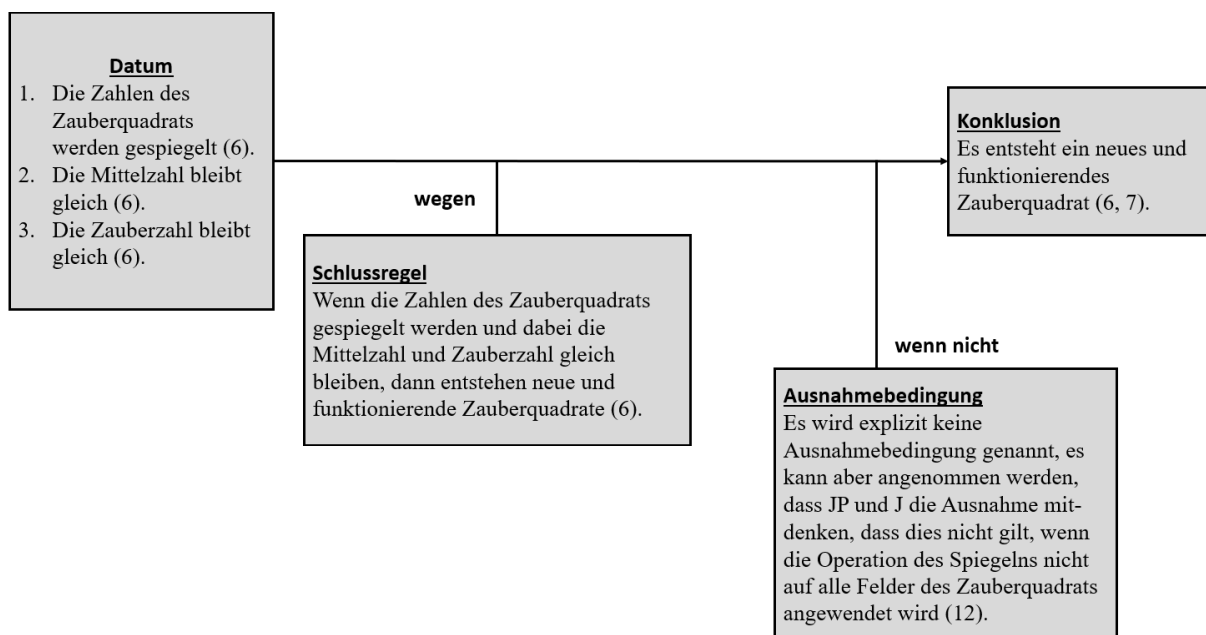


Abbildung 17: Schematische Darstellung des sechsten Arguments von JP und J

Nach SCHWARZKOPF (2003) liegt ein **empirisch-konstruktives** Argument vor, da JP und J das untersuchte Phänomen mittels Spiegelung auf ein anderes Beispiel übertragen, an diesem prüfen und feststellen, dass dieses ebenfalls vorliegt (6-12). Das neue in die Argumentation eingehende Wissen besteht dabei aus Kenntnissen über Konstruktionsbedingungen und -weisen des Phänomens der Zauberquadrate (6-12). Somit wird mittels Übertragung der

Vorgehensweise auf das neue vorliegende Beispiel die Frage geklärt, ob das Phänomen weiterhin erhalten bleibt (11-12).

JP und J nutzten somit folgende heuristische Strategien zur Erzeugung neuer Zauberquadrate:

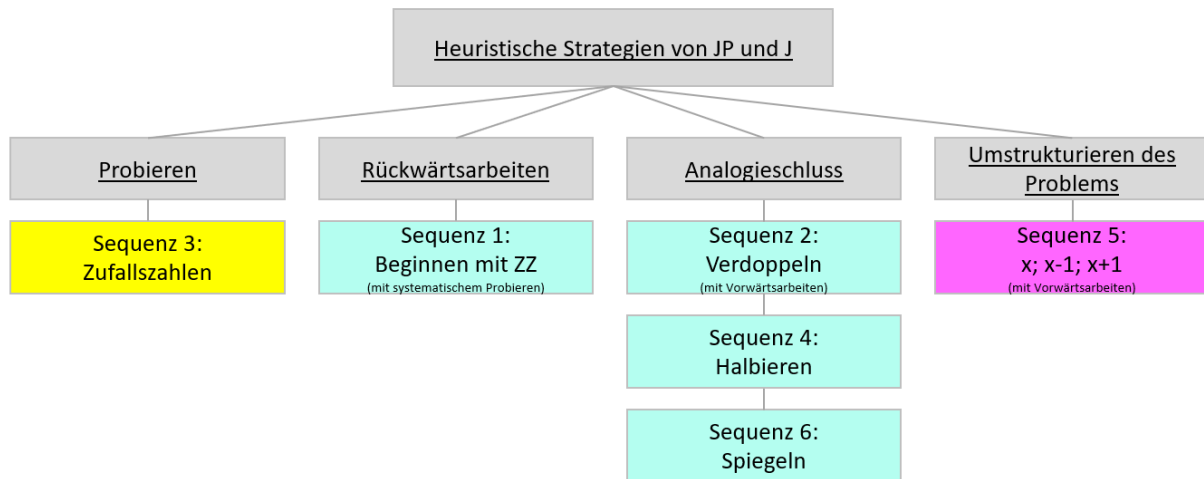


Abbildung 18: Die von JP und J genutzten heuristischen Strategien (gelb = empirische, blau = empirisch-konstruktive und rot = strukturell-mathematische Argumente)

4.2 Interview 2: K und D arbeiten vorwärts und nutzen Analogien

Das Interview mit K und D kann dabei wie folgt gegliedert werden:

- Sequenz 1: K und D arbeiten vorwärts, um neue Zauberquadrate zu erzeugen.
- Sequenz 2: K und D nutzen einen Spezialfall.
- Sequenz 3: K und D nutzen Analogien, um neue Zauberquadrate zu erzeugen.

Sequenz 1: K und D arbeiten vorwärts, um neue Zauberquadrate zu erzeugen

- 1 K Wollen wir vielleicht einfach mal die 30 probieren als Zauberzahl'. Also ich finde ja am wichtigsten, wenn man sich am Anfang eine Zauberzahl überlegt.
- 2 D Ja.
- 3 K Finde ich schon.
- 4 D Ja, schon. Naja, ich würde jetzt in der Mitte einfach irgendeine Zahl schreiben (zeigt auf das noch leere Feld 5) und dann links oben (zeigt auf das noch leere Feld 1) den gleichen Abstand wählen wie rechts unten (zeigt dann auf das noch leere Feld 9 und dann von Feld 5 auf Feld 1 und Feld 9). Also der eine wird geringer, der andere wird größer.
- 5 K Ja, machen wir das erstmal.
- 6 I Du würdest also einfach einzelne Zahlen übernehmen und würdest dann einfach systematisch oder unsystematisch ausprobieren, um ein Zauberquadrat zu bekommen'.
- 7 D a Ja, also im Prinzip dann schon gewissermaßen systematisch natürlich (lacht). b Also ich würde jetzt tatsächlich irgendeine Zahl nehmen (zeigt auf das noch leere Feld 5) und dann zusehen, dass ich den Abstand nach hier (zeigt nun von Feld 5 auf Feld 1) um keine Ahnung drei oder um zwei verringere und den durch dann hier (zeigt von Feld 1 auf Feld 5 und schließlich auf Feld 9) um zwei erhöhe. c Und dann würde ich das hier zusammenrechnen und dann habe ich ja meine Zauberzahl (zeigt auf die Diagonale der Felder 9, 5 und 1).
- 8 I Genau.
- 9 D Ja, also, wenn ich jetzt sage, ich nehme hier (zeigt auf das noch leere Feld 5) hin die *äh (2sec) sechs. Nehmen wir hier die sechs hin (schreibt die Zahl 6 in das Feld 5). Und dann nehmen wir eins oder zwei. Wollen wir eins oder zwei nehmen' (fragend zu K).
- 10 K | *sechs

- 11 K Zwei.
- 12 D Zwei. Dann bist du hier bei vier (schreibt die Zahl 4 in das Feld 1) und hier entsprechend bei acht (schreibt die Zahl 8 in das Feld 9). So dann ist die Zauberzahl ja klar.
- 13 K Die siebzehn. Aber siebzehn ist nicht durch drei teilbar.
- 14 D Ne, des ist, (2sec) die is achtzehn sach ma (liebevoll witzelnd).
- 15 K Achso, ah ja, stimmt is achtzehn (D schreibt die Zahl 18 in das Feld der Zauberzahl), danke.
- 16 I Wieso ist die Zauberzahl achtzehn´.
- 17 D Weil vier (zeigt auf das Feld 1) plus sechs (zeigt auf das Feld 5) plus acht (zeigt auf das Feld 9) *(2sec).
- 18 K *achtzehn sind. Doch stimmt schon.
- 19 I Mhm genau.
- 20 D Nach unserer Rechnung zumindest (beide lachen). So und jetzt ähm *würde man halt jetzt einfach sagen, na dann würde man halt wenn hier der Abstand zwei ist (zeigt auf die Felder 5 und 1), dann könnte hier ja der Abstand eins sein (zeigt auf das Feld 5 und das noch leere Feld 4). Also machen wir hier ne fünf hin (trägt die Zahl 5 in das Feld 4 ein) und hier ne sieben (trägt die Zahl 7 in das Feld 6 ein). Und dann ergibt sich ja hier auch, ergibt sich da auch 18´.
- 21 K *jetzt nach unserem
- 22 K Ja.
- 23 D Und da ergibt sich da auch achtzehn raus (zeigt auf die mittlere Zeile mit den Feldern 4, 5 und 6). Und dann *ähm ergibt sich das (zeigt auf die Felder 1 und 4 und dann auf das noch leere Feld 7) und das ist ja jetzt klar (zeigt auf das Feld 3) das kann man ja ausrechnen, weil vier und fünf sind neun minus achtzehn gleich neun (schreibt die Zahl 9 in das Feld 7), ne´.
- 24 K *Würde man ja nach oben (zeigt auf die Felder 4 und 5).
- 25 K Ja.
- 26 I Mh (zustimmend).
- 27 D Acht und sieben (zeigt auf die Felder 6 und 9) sind
- 28 K Fünfzehn.
- 29 D Also drei (trägt die Zahl 3 in das Feld 3 ein).
- 30 K Ja.
- 31 D Und dann hat man ja hier wieder das auch diagonal (zeigt auf die Felder 7, 5 und 3). Und dann ist ja und dann ergibt sich das, hier sind das sieben (zeigt auf die Felder 1, 2 und 3) und dann sind das halt hier elf logischerweise (trägt die Zahl 11 in das noch leere Feld 2 ein), wenn ich mich nicht verrechne. Neun und acht (zeigt zu Feld 9) sind siebzehn, also eins (trägt die Zahl 1 in das noch leere Feld 8). Und dann ist man bei *(2sec) dann hat mans ferdich.
- 32 K *Ja.
- 33 I Ja, genau (zustimmend). Würdest du deine Strategie nochmal erklären und begründen, warum die funktioniert´.
- 34 D Also die Strategie ist ja, dass ich äh in der Mitte einfach eine x-beliebige Zahl festlege (zeigt auf die Mittelzahl), in dem Fall jetzt die sechs *und dann hab ich jetzt gesagt wir ziehen oben links (zeigt auf das Feld 1) zwei Ziffern also zwei Zahlen ab, also die die wir hier abziehen (zeigt von der Mittelzahl auf das Feld 1), die packen wir hier wieder drauf (zeigt auf die Mittelzahl und dann auf das Feld 9). Also kommen wir halt zu vier und zu acht (zeigt erst auf das Feld 1 und dann das Feld 9). Und dann hab ich ja gesagt, dass der Abstand von sechs und vier zwei ist (zeigt auf die Mittelzahl und dann das Feld 1) also nehme ich jetzt hier nur zur fünf einen Abstand, der sich nur um eins unterscheidet (zeigt von der Mittelzahl auf das Feld 4) also is sechs minus eins is fünf (zeigt wieder von der Mittelzahl zu Feld 4) und sechs plus eins ist sieben (zeigt dann von der Mittelzahl zu Feld 6). Und dann hab ich hier ja in jedem, also hier oben links und unten rechts zwei Zahlen (zeigt auf die Spalte mit den Feldern 1, 4 und 7 und dann auf die Spalte mit den Feldern 3, 6 und 9), weshalb sich die Ecken oben rechts und unten links mathematisch ja ergeben (zeigt auf Feld 3 und dann Feld 7). Also aus der Zauberzahl die ich ja vorher schon hatte (zeigt auf die Zauberzahl) minus dem was halt da ist (zeigt zuerst gemeinsam auf Feld 6 und 9 sowie danach gemeinsam auf Feld 1 und 4), damit hatte ich die neun und die drei schon raus (zeigt zuerst auf Feld 7 und dann auf Feld 3). Öh ja, also dann hab ja, wenn ich von drei Zahlen immer schon zwei habe und das Ergebnis kenne, dann ist die dritte Zahl ja klar.
- 35 I *Mhm (zustimmend)

Das fertige von K und D erzeugte Zauberquadrat:

4	11	3
5	6	7
9	1	8

Zauberzahl: 18

Zunächst möchte K mit einer Zauberzahl beginnen (1). D möchte aber mit einer Mittelzahl beginnen (4) und setzt sich durch (5). D erklärt, dass D mit einer beliebigen Mittelzahl starten möchte (4, 9) und dann mittels der Erkenntnisse zum Abstand von der Mittelzahl zu den Randzahlen einer Diagonalen, Zeile und Spalte (7b, 9) und den Erkenntnissen zur Erzeugung der Zauberzahl (7c, 12-14, 17, 20, 23, 27-29) ein neues Zauberquadrat erzeugen kann. Dann setzen beide den Plan von D um (9-31). I fragt nach einer Begründung für das strategische Vorgehen von K und D (32), was D daraufhin begründet (33).

Die von K und D verwendete heuristische Strategie nach BRUDER / COLLET (2011) und KIPMAN (2020) entspricht dem **Vorwärtsarbeiten**. Dies ist damit zu begründen, dass K und D ausgehend von einer selbst gewählten Mittelzahl, demgemäß von etwas (selbst) Gegebenem zu dem Gesuchten, der Zauberzahl und dem fertigen Zauberquadrat, **vorwärts arbeiten**, um das Problem zu lösen. Sie arbeiten dabei mit bekannten Informationen, etwa zum gleichen Abstand zwischen der Mittelzahl zu den beiden jeweiligen Randzahlen in der der Diagonalen, Zeile und Spalte (7b) oder den Erkenntnissen zur Erzeugung der Zauberzahl (7c), um von der Startsituation zum Ziel zu gelangen. Sie erreichen dabei gewisse Teilziele, wie etwa einzelne neue Felder im Zauberquadrat, die sie dann für den weiteren Lösungsprozess verwenden.

Dabei liegt nach SCHWARZKOPF (2000a) eine Argumentation vor, da 1. explizit durch I ein Begründungsbedarf angezeigt wird (32), der 2. von K und D explizit zu befriedigen versucht wird, indem sie eine Begründung entwickeln (33).

Die vorgebrachte Argumentation kann nach SCHWARZKOPF (2000b) folgendermaßen gegliedert werden: **Datum** (1. Die Mittelzahl ist 6 (9). 2. Diagonal von der Mittelzahl zu den Feldern 1 und 9 ist der Abstand von der Mittelzahl 2 (11, 12). 3. Die Zauberzahl ist 18 (14, 17). 4. In der Spalte mit den Feldern 4 und 6 ist der Abstand von der Mittelzahl zu den Randzahlen 1 (20). 5. Feld 7: $4+5=9$ und $18-8=9$ (23). 6. Für Feld 3: $7+8=15$ und $18-15=3$ (27-29). 7. Feld 2: $4+3=7$ und $18-7=11$ (31). 8. Feld 8: $9+8=17$ und $18-17=1$ (31)), **Konklusion** (Es entsteht ein neues und funktionierendes Zauberquadrat (31)), **Schlussregel** (Wenn die Daten 1-8 gelten, dann

entsteht ein neues und funktionierendes Zauberquadrat), **Stützung** (1. Der konstante Abstand von der Mittelzahl zu den beiden Randzahlen innerhalb einer Diagonale, Zeile und Spalte ist gegeben (34). 2. Die additive Struktur der Zauberquadrate ist gegeben (34). 3. Die additive Erzeugung der Zauberzahl ist gegeben (12-14, 34)), **Ausnahmebedingung** (Explizit wird von D und K keine Ausnahmebedingung vorgebracht).

Die Argumentation von K und D lässt sich wie folgt schematisch darstellen:

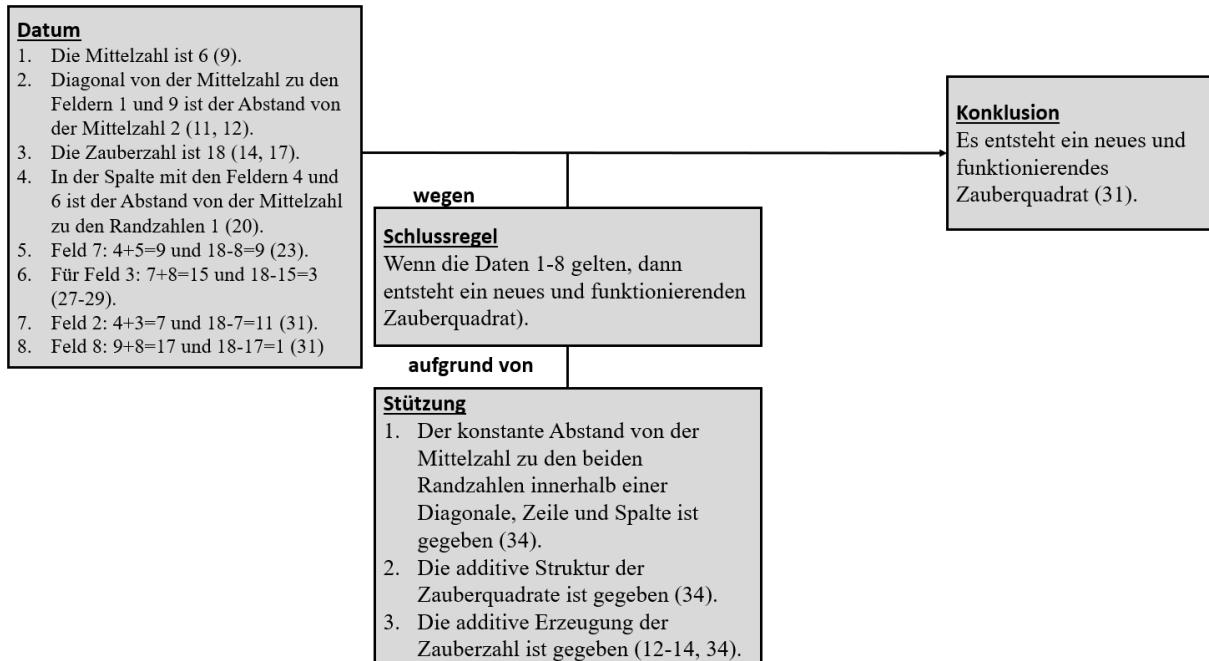


Abbildung 19: Schematische Darstellung des ersten Arguments von K und D

Das von K und D genutzt Argument entspricht dem Typ des **empirisch-konstruktiven** Arguments nach der Kategorisierung von SCHWARZKOPF (2003), da K und D prüfen, beobachten und begründen, dass ein Phänomen, in diesem Fall ein funktionierendes Zauberquadrat, vorliegt.

Sequenz 2: K und D nutzen einen Spezialfall

- 1 D Dass man immer wieder die gleiche Zahl verwendet´.
- 2 K Probier doch mal die fünf.
- 3 D Ja, wenn ich die fünf, also wenn ich jede Zahl so oft verwenden kann wie ich will, *mal angenommen dann schreib ich überall fünfen voll und dann bin ich hier der König der Mathematik und habs (lacht und schreibt überall die Zahl 5 in jedes Feld).
- 4 K | *dann könnte ich
das ganze Ding mit fünf voll machen.
- 5 K Und hab die Zauberzahl fünfzehn.

Das fertige von K und D erzeugte Zauberquadrat:

5	5	5
5	5	5
5	5	5

Zauberzahl: 15

In Sequenz 2 nutzt D die Idee, die D vor Aufgabe 3 hatte, nämlich Zahlen mehr als nur einmal zu verwenden (1, 3), um ein neues Zauberquadrat zu erzeugen, das in diesem Fall nur aus der Zahl 5 besteht (3-5).

Hierbei handelt es sich um die heuristische Strategie des **Umstrukturierens eines Problems** nach KIPMAN (2020), da D und K die der Aufgabe zugrundeliegende Struktur analysieren und dabei erkennen, dass die Struktur der Aufgabe auch bei mehrfach vorkommenden Zahlen erhalten bleibt (3-5).

Es liegt nach SCHWARZKOPF (2000a) eine Argumentation vor, da 1. vor dem Interview auch hier Begründungsbedarf im Sinne der getätigten Aussagen in Aufgabe 3 angezeigt wurde und 2. implizit Begründungen aufgrund des vorliegenden funktionierenden Beispiels entwickelt wurden (3-5).

Die Gliederung der Argumentation ließe sich nach SCHWARZKOPF (2000b) folgendermaßen vornehmen, da einige Aspekte der Argumentation implizit bleiben: **Datum** (1. Es wird immer die gleiche Zahl, die 2, verwendet (1, 3). 2. Die sich in allen Zeilen, Spalten und Diagonalen ergebende Zauberzahl ist 15 (5)), **Konklusion** (Es entsteht ein neues und funktionierendes Zauberquadrat (1)), **Schlussregel** (Wenn immer die gleiche Zahl, die 2, verwendet wird und die sich in allen Zeilen, Spalten und Diagonalen ergebende Zauberzahl 15 ist, dann entsteht ein neues und funktionierendes Zauberquadrat), **Stützung** (Alle Eigenschaften eines Zauberquadrats sind erfüllt (5)), **Ausnahmebedingung** (Es wird explizit keine genannt, denkbar wäre: Dies gilt nicht, wenn nicht die additive Eigenschaft der Zauberzahl erfüllt ist (in Anlehnung an 5)).

Die Argumentation von K und D lässt sich wie folgt schematisch darstellen:

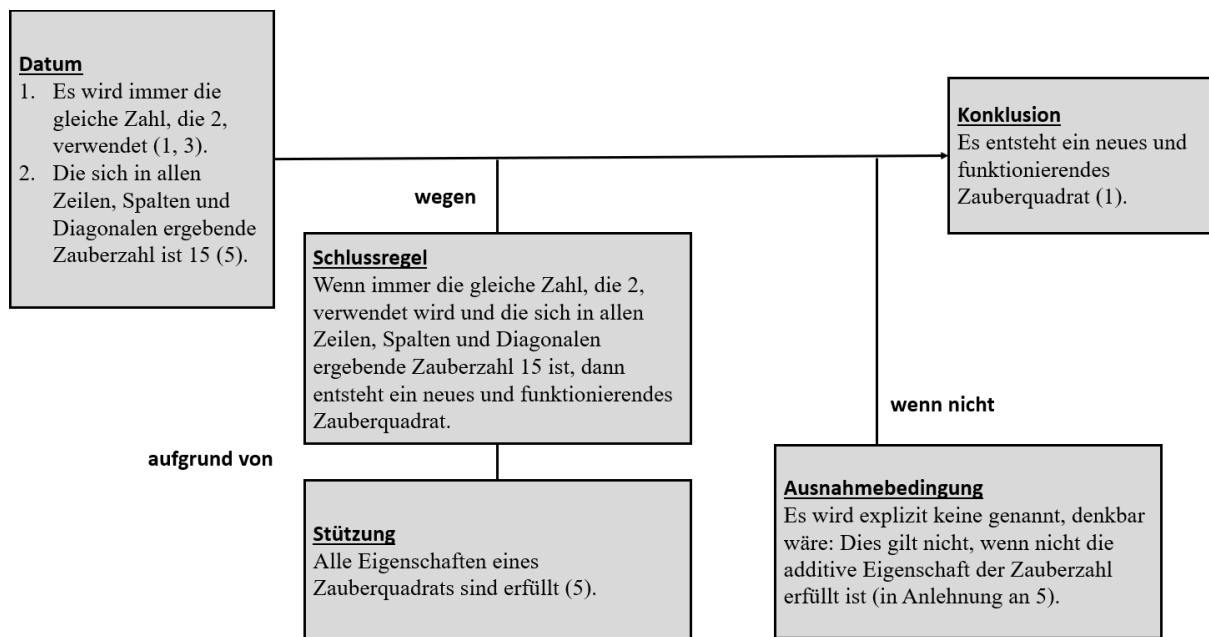


Abbildung 20: Schematische Darstellung des zweiten Arguments von K und D

Bei dem vorgebrachten Argument handelt es sich nach der Klassifikation von Argumenten nach SCHWARZKOPF (2003) um ein **empirisch-konstruktives** Argument, da K und D prüfen und beobachten, ob das Phänomen eines funktionierenden Zauberquadrates unter Verwendung nur gleicher Zahlen vorliegt (3-5).

Sequenz 3: K und D nutzen Analogien, um neue Zauberquadrate zu erzeugen

- 1 I Und wenn ihr jetzt an Aufgabe 2 denkt, da habt ihr ja immer ein Zauberquadrat benutzt, könnte man vielleicht auch in die Richtung denken´.
- 2 K Warte kurz, wir müssen uns das kurz anschauen. Was meinst du, dass man das immer erhöht (Richtung D)´.
- 3 D Wenn du jetzt von fünfzehn zu dreißig zu sechzig Zauberzahl denkst, dann könnte man das ja noch mal mit zwei multiplizieren, bin ich bei hundertzwanzig als Zauberzahl.
- 4 I Genau, probiert das doch mal, ob ihr so ein neues Zauberquadrat erzeugen könntet´.
- 5 D Wenn ich sag, ich fang mit hundertzwanzig an in der Mitte (trägt die Zahl 120 als Zauberzahl ein). Und dann äh den Abstand beispielsweise acht wähle, dann bin ich ja hier bei zweiunddreißig (trägt die Zahl 32 in das Feld 1) und dann bin ich hier bei achtundvierzig und dann bin ich ja auch bei hundertzwanzig (trägt die Zahl 48 in das Feld 9 ein).
- 6 I Genau (zustimmend).
- 7 K Dann wärst du hier unten wieder bei acht, dann musst du immer das Doppelte haben.
- 8 D Das ist immer das Doppelte, dann bist du hier bei acht (trägt die Zahl 8 in das Feld 8 ein).
- 9 K Dann ist du und links bei vierundsechzig.
- 10 D Na, warte. Wenn du hier bei acht bist (zeigt auf das Feld 8) dann bist du ja oben erstmal bei *zweiundsiebzig so dann ergibt sich ja in der Reihe was es sein muss (zeigt auf die Felder 1, 2 und 3 der ersten Zeile). Sechzehn (trägt die Zahl 16 in das Feld 3 ein). Und achtundvierzig und acht sind ja, und dann müssen das hier vierundsechzig sein (trägt die Zahl 64 in das Feld 7 ein).
- 11 K *Zweiundsiebzig
- 12 K Und oben drüber müsstens dann vierundzwanzig sein, hier (tippt mit dem Finger auf das Feld 4).
- 13 D Ja, das kommt hin (trägt die Zahl 24 in das Feld 4 ein). Und dann halt (5sec) sechsundfünfzig.
- 14 K Sechsundfünfzig. (2sec) siehst dus´. Sollen wir vorlesen´.

- 15 I Ja, ich hatte nur gerade einen Tonaussetzer. Aber ich habs, sehs jetzt ungefähr, ja. Was habt ihr also für eine Strategie verwendet´.
- 16 K Wir haben immer die Zahlen von dem, von diesem hier, so (zeigt das Zauberquadrat 16, 36, 6 / 12, 20, 28 / 32, 4, 24 aus Aufgabe 2.2 in die Konferenzkamera).
- 17 I Mh (verstehend).
- 18 K Die haben wir im Prinzip, *mh genau (zustimmend), also von dem mit der Zauberzahl sechzig, da haben wir da haben wir die im Prinzip die Zauberzahl verdoppelt und dann jegliche andere Zahl auch verdoppelt.
- 19 I *Von einem bekannten Zauberquadrat
- 20 I Sehr gut (lobend). Also kann man Zauberquadrate auch erzeugen, indem man einfach bekannte schon verwendet, ob man dann multiplikativ oder additiv die verändert, um dann eins zu erzeugen, was auch funktioniert. Genau. Und darf ich fragen, warum die Strategie jetzt auch funktioniert´.
- 21 D Ja, wenn die Zauberzahl ja verdoppelt, also sich verdoppelt (zeigt auf das Feld mit der Zauberzahl 120), dann ja äh muss ja müssen ja die anderen Zahlen sich auch verdoppeln. Also das geht ja nicht anders, weil ich ja wenn ich drei Zahlen habe (zeigt auf die Zahlen des Zauberquadrats) und die jeweils einzeln verdopple dann verdoppelt sich ja ohnehin das Ergebnis.
- 22 I Ja, genau. Das heißt also die, die Struktur bleibt die gleiche.
- 23 D *Genau.
- 24 K *Ja.

Das fertige von K und D erzeugte Zauberquadrat (links) und das referenzierte (rechts):

32	72	16
24	40	56
64	8	48

Zauberzahl: 120

16	36	8
12	20	28
32	4	24

Zauberzahl: 60

D schlägt vor, ein bekanntes Zauberquadrat zu verdoppeln (3). Daher verdoppeln D und K ein bekanntes Zauberquadrat mit allen seinen Zahlen aus Aufgabe 2, um ein neues zu erzeugen (16). Dann fragt I, warum diese Strategie funktioniert (20), woraufhin D strukturell begründet, dass wenn die Zauberzahl verdoppelt wird, auch alle anderen Zahlen des Zauberquadrats verdoppelt werden müssen, damit die Struktur gleich bleibt (21, 23-24). D begründet weiter, dass die Additionen aller drei Zahlen in den Diagonalen, Zeilen und Spalten die gleiche Zahl und damit die neue (verdoppelte) Zauberzahl ergeben muss (18, 21).

D und K verwenden die heuristische Strategie der **Analogiebildung** nach BRUDER / COLLET (2011) und KIPMAN (2020), da sie in dem vorliegenden Problem **Analogien** zu Aufgabe 2 sehen (indirekt in 2-3 angedeutet, verdeutlicht in der erneuten Beschreibung des Vorgehens in 16, 18), und dann die Zauberzahl verdoppeln wie auch die anderen Felder des alten Zauberquadrats verdoppeln, um ein neues Zauberquadrat zu erzeugen (5-14, 16-21).

Es liegt an dieser Stelle nach SCHWARZKOPF (2000a) eine Argumentation vor, da 1. explizit seitens I Begründungsbedarf angezeigt wird (15, 20) und 2. daher von D und K eine Begründung entwickelt wird (16, 18, 21, 22-24).

Die vorgebrachte Argumentation lässt sich nach der Gliederung von Argumentation nach SCHWARZKOPF (2000b) folgendermaßen gliedern: **Datum** (1. Die Zauberzahl 60 aus dem vorherigen Zauberquadrat wird verdoppelt zu 120 (3). 2. Alle Zahlen werden verdoppelt (21)), **Konklusion** (Es entsteht ein neues und funktionierendes Zauberquadrat (3)), **Schlussregel** (Wenn die Daten gelten, dann entsteht ein neues und funktionierendes Zauberquadrat), **Stützung** (1. Die Eigenschaft zur additiven Erzeugung der Zauberzahl bleibt erhalten (5). 2. Der Abstand von der Mittelzahl zu den beiden Randzahlen innerhalb einer Zeile, Diagonale oder Spalte bleibt konstant (5)), **Ausnahmebedingung** (Dies wird nicht explizit geäußert, denkbar wäre aber: Dies gilt nicht, wenn nicht alle Zahlen des vorherigen Zauberquadrats verdoppelt werden (in Anlehnung an 18)).

Die Argumentation von K und D lässt sich wie folgt schematisch darstellen:

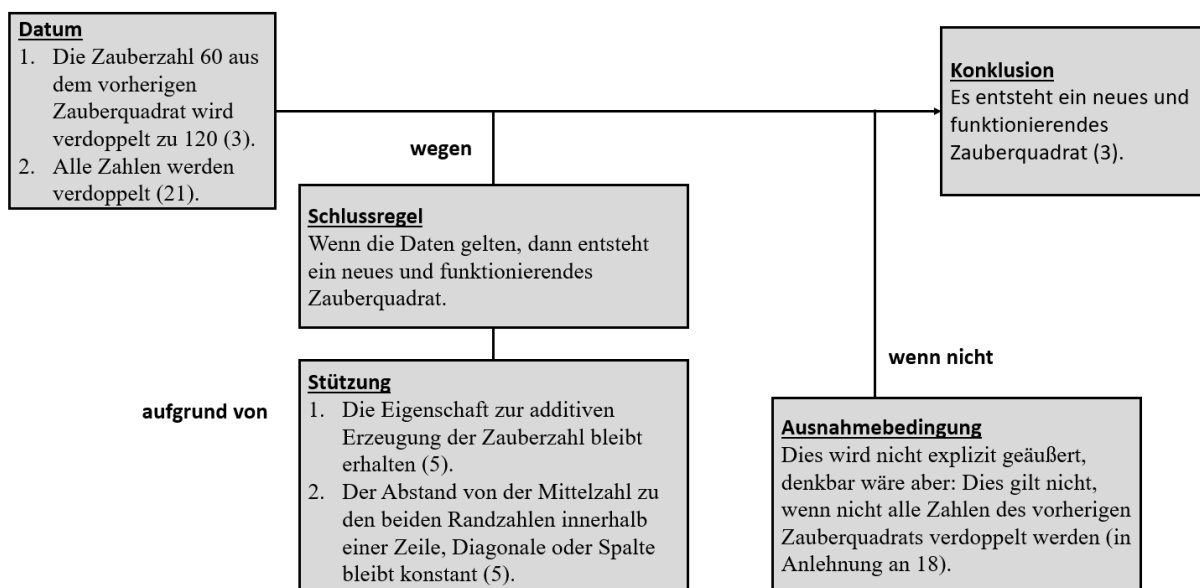


Abbildung 21: Schematische Darstellung des dritten Arguments von K und D

Bei dem vorgebrachten Argument von D und K handelt es sich um den Typ des **empirisch-konstruktiven** Arguments in der Klassifikation von Argumenten nach SCHWARZKOPF (2003), da K und D das untersuchte Phänomen der Zauberquadrate auf ein anderes Beispiel übertragen, an diesem prüfen und beobachten, dass dieses auch beim Verdoppeln aller Felder erneut auftritt.

K und D nutzten somit folgende heuristische Strategien zur Erzeugung neuer Zauberquadrate:

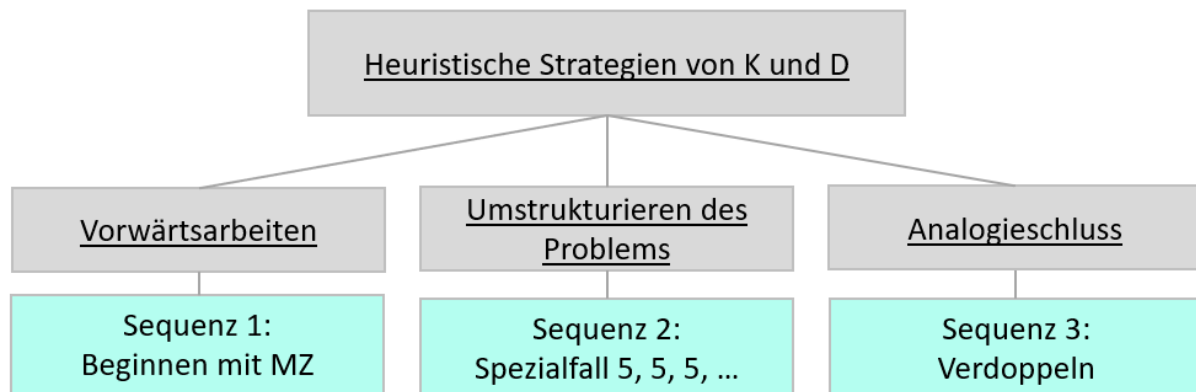


Abbildung 22: Die von K und D genutzten heuristischen Strategien (gelb = empirische, blau = empirisch-konstruktive und rot = strukturell-mathematische Argumente)

4.3 Interview 3: L und J verallgemeinern und nutzen Spezialfälle

Das Interview mit L und J kann dabei wie folgt gegliedert werden:

- Sequenz 1: L und J nutzen Analogien.
- Sequenz 2: L und J spiegeln ein Zauberquadrat.
- Sequenz 3: L und J arbeiten vorwärts.
- Sequenz 4: L und J entdecken einen Sonderfall.
- Sequenz 5: L und J verallgemeinern die Zauberquadrate und ihre Struktur.

Sequenz 1: L und J nutzen Analogien

- 10 L Ah okay. Ähm, na, dann nehmen wir einfach irgendein Zauberquadrat jetzt einfach, oder. Nehmen wir, ähm, starten wir hier mit der Zahl sechs (schreibt die Zahl 6 in Feld 5), machen fünf, sechs, und sieben (schreibt die Zahl 5 in Feld 1 und die Zahl 7 in Feld 9). Dann ähm (trägt die Zahl 3 in Feld 3 ein)
- 11 J Ist die Zauberzahl achtzehn.
- 12 L Achtzehn´ (trägt die Zahl 18 als Zauberzahl ein). Sicher´. (murmelt) Elf, ja!
- 13 I Genau.
- 14 L Dann sind sieben, acht (zeigt erst auf Feld 9 und trägt dann in Feld 6 die Zahl 8 ein). Acht, sechs, drei, vier (trägt die Zahl 4 in Feld 4 ein). (zeigt auf Feld 1 und Feld 4 und trägt dann die Zahl 9 in Feld 7) neun. (zeigt mit dem Kugelschreiber erst auf das Feld 9 und dann das Feld 7) Zwei (trägt dann die Zahl 2 in das Feld 8 ein). Mh, zehn, oder´. Ja (trägt dann die Zahl 10 in das Feld 2 ein). Dann.
- 15 I Genau, super. Wie bist du denn nun auf dieses Zauberquadrat gekommen, L´.
- 16 L Ich hab mir ehrlich gesagt das erste Quadrat aus Aufgabe 2.1 genommen und hab die Mittelzahl um einen erhöht und dann je nachdem alle anderen auch um einen erhöht und geguckt, ob das passt mit der Zauberzahl achtzehn.
- 17 I Sehr gut (zustimmend). Kannst du begründen, warum die Strategie funktioniert´.
- 18 L Ähm, das funktioniert, weil wir ähm, ouw, jeden Summanden um eins erhöhen, also erweitern den um eins (zeigt dabei mit dem Stift nacheinander auf die einzelnen Felder des Zauberquadrates), und dann ähm also ein, oh warte mal eben (lacht). Also wir erhöhen jeden Summanden um eins. Und äh weil wir das drei mal machen, weil wir jeweils drei Summanden haben, erhöht sich die Zauberzahl um drei (zeigt erst auf verschiedene Diagonalen, Zeilen und Spalten und schließlich auf die Zauberzahl 18).
- 19 I Genau, also du meinst, weil du das Zauberquadrat gleichmäßig veränderst *hast du ein Zauberquadrat, das wieder funktioniert.
- 20 L |

*Genau.

- 21 L | Ja, gleichmäßig. Dann könnten wir dieses Zauberquadrat also fürs nächste nehmen wir dieses hier einfach und gucken, *wir wir verdoppeln, zum Beispiel. Oder wir nehmen dieses hier und spiegeln das.
- 22 J | *Können wir verdoppeln

Das fertige von L und J erzeugte Zauberquadrat (links) und das referenzierte (rechts):

5	10	3
4	6	8
9	2	7

Zauberzahl: 18

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Zauberzahl: 15

I bittet L und J, Zauberquadrate mit einer Zauberzahl und Methode ihrer Wahl zu erzeugen (1). Nach einem kurzen Gespräch über gerade und ungerade Zahlen in Zauberquadrate zwischen L und J (2-9), beginnt L mit der Bearbeitung der Aufgabe und wählt eine Mittelzahl aus (10) und nutzt das Wissen um den gleichen Abstand von der Mittelzahl zu den jeweiligen Randzahlen der Diagonalen, Zeilen und Spalte, um eine Diagonale zu füllen (10). D bestimmt die Zauberzahl (11). L überprüft die von D bestimmte Zauberzahl (12) und bestimmt weitere Zahlen über das Wissen um den Abstand der Mittelzahl zu ihren Randzahlen, diesmal in einer Zeile (14). Dann bestimmt L mit dem Wissen um die bestimmte Zauberzahl und die additive Erzeugung der Zauberzahl die Zahl 9 (14). Mit ebendem Wissen bestimmt L dann die Zahl 2 (14) und die Zahl 10 sowie schließlich die Zahl 3 (14). I fragt nochmal nach, wie sie auf dieses Zauberquadrat gekommen sind (15), L beschreibt das Vorgehen (16). I fragt, ob L und J begründen können, warum ihre Strategie funktioniert (17) und L begründet die genutzte Strategie (18). I fragt nach, ob I richtig verstanden hat, dass die Strategie funktioniert, da die Zauberquadrate gleichmäßig verändert wurden (19). L bejaht dies (20).

L und J nutzen die heuristische Strategien des **Analogieschlusses** und des **Vorwärtsarbeitens** nach BRUDER / COLLET (2011) und KIPMAN (2020). L beschreibt das Vorgehen so (16), dass L das erste Zauberquadrat aus Aufgabe 2.1 verwendet und dort „die Mittelzahl um einen erhöht“ und „dann je nachdem alle anderen auch um einen erhöht und guckt, ob das passt mit der Zauberzahl achtzehn“. Insofern nutzt L einen **Analogieschluss**, als dass die bekannte Strategie des operativen Veränderns genutzt und auf das Problem der Erzeugung neuer Zauberquadrate angewandt wird. L versucht also, „beim Finden des Lösungsweges auf eine bekannte Vorgehensweise zurückzugreifen“⁸⁴. Ebenso kann aber auch die heuristische Strategie des

⁸⁴ KIPMAN (2020), Problemlösen, 31.

Vorwärtsarbeitens zumindest als Teil-Strategie gefunden werden, da L, ausgehend von der um eins erhöhten Mittelzahl, ihre Kenntnisse über Strukturen des Zauberquadrats nutzt, um die Zahlen des Zauberquadrats überprüfend unter Anwendung des **Analogieschlusses** zu bestimmen.

Es liegt nach SCHWARZKOPF (2000a) eine Argumentation vor, da 1. von I expliziter Begründungsbedarf angezeigt wird (17) und 2. L diesen zu befriedigen versucht, indem L eine Begründung entwickelt (18).

Die Argumentation lässt sich nach der Gliederung von Argumenten nach SCHWARZKOPF (2000b) folgendermaßen gliedern: **Datum** (Alle Zahlen des bekannten Zauberquadrats werden um 1 erhöht (16)), **Konklusion** (Es entsteht ein neues und funktionierendes Zauberquadrat (10, 14, 16)), **Schlussregel** (Wenn alle Zahlen des bekannten Zauberquadrats um 1 erhöht werden, dann entsteht ein neues und funktionierendes Zauberquadrat), **Stützung** (Die additive Struktur der Zauberzahl ist in allen Diagonalen, Zeilen und Spalten gegeben (16)), **Ausnahmebedingung** (Es wird explizit keine benannt, denkbar wäre: Dies gilt nicht, wenn die additive Struktur des Zauberquadrats nicht erhalten bleibt (in Anlehnung an 16)).

Die Argumentation von L und J lässt sich wie folgt darstellen:

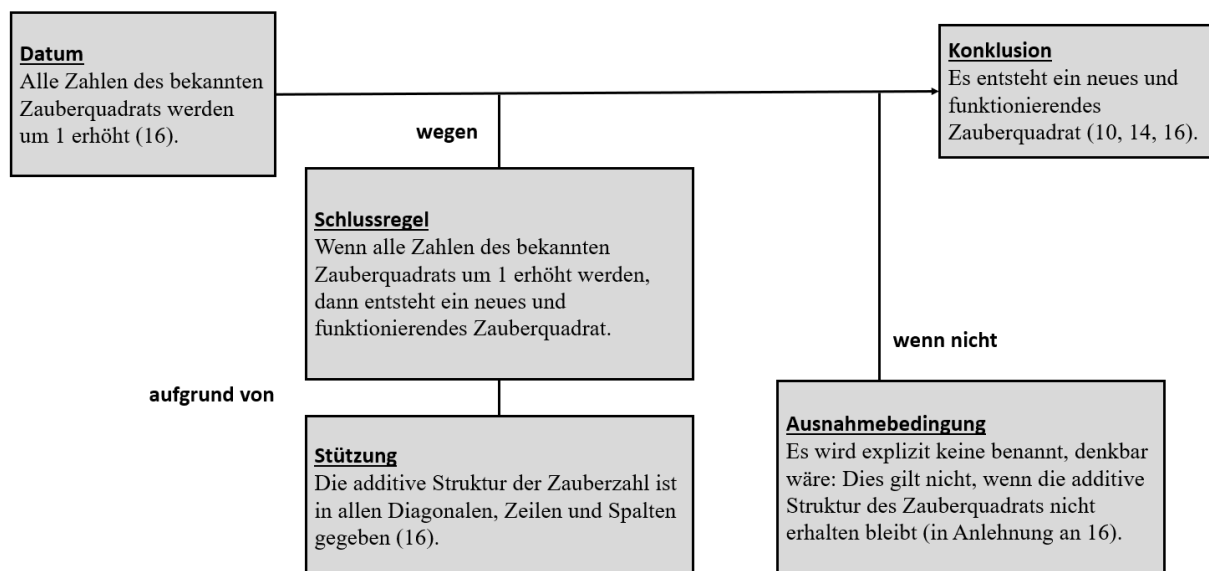


Abbildung 23: Schematische Darstellung des ersten Arguments von L und J

Es handelt sich dabei nach SCHWARZKOPF (2003) um ein **empirisch-konstruktives** Argument, da die bekannte Vorgehensweise der operativen Veränderung von Zauberquadraten auf ein neues Problem-Beispiel angewandt wird und dabei geprüft wird, ob das Phänomen erhalten bleibt (10-14, 16).

Sequenz 2: L und J spiegeln ein Zauberquadrat

- 1 L Oder wir nehmen dieses hier und spiegeln das, also die Mitte bleibt gleich ähm sechs (trägt die Zahl 6 in das Feld 5 ein), zehn und zwei (trägt die Zahl 10 in das Feld 2 ein und dann die Zahl 2 in das Feld 8), das sind achtzehn (trägt die Zahl 18 als Zauberzahl ein). Und dann ähm die fünf kommt hier rüber (zeigt auf das Feld 1 mit der Zahl 5 aus dem Zauberquadrat aus Sequenz 2 und trägt dann die Zahl 5 in das Feld 3 ein). Und die drei kommt darüber (zeigt auf das Feld 3 aus dem Zauberquadrat aus Sequenz 2 und trägt die Zahl 3 in das Feld 1 ein). Dann die acht kommt hierhin, die vier kommt hier hin (trägt die Zahl 8 in das Feld 4 und dann die Zahl 4 in das Feld 6 ein). Neun und sieben (trägt die Zahl 9 in das Feld 7 ein und die Zahl 7 in das Feld 9).
- 2 J Ne, musst du drehen.
- 3 L Äh ja, genau (schreibt die Zahl 7 in das Feld 7 und die Zahl 9 in das Feld 9, grinst). Hoppala. Dann müsste das äh ja. Das passt auch (fährt mit dem Stift die Diagonalen, Zeilen und Spalten ab).
- 4 I Super. L, kannst du begründen, warum das funktioniert´.
- 5 L Ähm, wir haben im Grunde immer noch die gleichen Rechnungen, also die Spalten bleiben gleich wegen dem ähm wie heißt das Gesetz nochmal´.
- 6 I Das Vertauschungsgesetz´.
- 7 L (lacht) Genau. Genau, wegen dem Vertauschungsgesetz ist das Ergebnis immer gleich (zeigt auf die Zauberzahl 18). Also, die ja, die stehen halt nur anders angeordnet (zeigt auf verschiedene Spalten).

Das fertige von L und J erzeugte Zauberquadrat (links) und das referenzierte (rechts):

3	10	5
8	6	4
7	2	9

Zauberzahl: 18

5	10	3
4	6	8
9	2	7

Zauberzahl: 18

L äußert die Idee, dass man Zauberquadrate auch spiegeln kann, um neue Zauberquadrate zu erzeugen (1). Dazu spiegelt L das Zauberquadrat aus S1 von der Mittelzahl als Spiegelachse aus (1), J entdeckt einen Eintragungsfehler von L (2), den L dann ebenso bemerkt und korrigiert (3). I fragt nach einer Begründung der Strategie von L und J (4), die L dann erklärt (5, 7).

L und J nutzten dabei die heuristische Strategie der **Analogiebildung** in der Kategorisierung nach BRUDER / COLLET (2011) und KIPMAN (2020), da sie prüfen, ob sie zu einem Problem schon mal eine ähnliche Aufgabe gelöst haben, daher greifen sie beim Finden des Lösungsweges zu einer strukturell ähnlichen Vorgehensweise wie beim Lösen geometrischer Spiegelungs-Probleme. Es handelt sich nicht um eine **Rückführung von Unbekanntem auf Bekanntes**, da L und J zu dem Problem zwar eine ähnliche Aufgabe gelöst haben, sie jedoch im Sinne der **Rückführung von Unbekanntem auf Bekanntes** nicht zuerst die Problemlöseaufgabe mithilfe dieser Strategie vereinfachen mussten, um diese transformierte problemhaltige Aufgabe dann zu Aufgaben, die bereits gelöst wurden, zuzuordnen (kein Erzeugen und Suchen von Situationen von Analogieschlüssen).

Dabei liegt nach SCHWARZKOPF (2000a) eine Argumentation vor, da 1. explizit von I ein Begründungsbedarf angezeigt wird (4), der dann 2. von L zu befriedigen versucht wird, indem L eine Begründung entwickelt (5, 7).

Die Argumentation von L und J lässt sich dabei nach SCHWARZKOPF (2000b) folgendermaßen gliedern: **Datum** (1. Die Mittelzahl bleibt gleich (1). 2. Die Zauberzahl bleibt gleich (1). 3. Alle anderen Zahlen werden gespiegelt (1)), **Konklusion** (Es entsteht ein neues und funktionierendes Zauberquadrat (1)), **Schlussregel** (Wenn die Mittelzahl und die Zauberzahl gleich bleiben und die anderen Zahlen gespiegelt werden, dann entsteht ein neues und funktionierendes Zauberquadrat), **Stützung** (Alle Eigenschaften des Zauberquadrats bleiben beim Spiegeln erhalten (5, 7)), **Ausnahmebedingung** (Explizit wird keine genannt, denkbar wäre: Dies funktioniert nur, wenn korrekt gespiegelt wird (in Anlehnung an 5, 7)).

Die Argumentation von L und J lässt sich wie folgt darstellen:

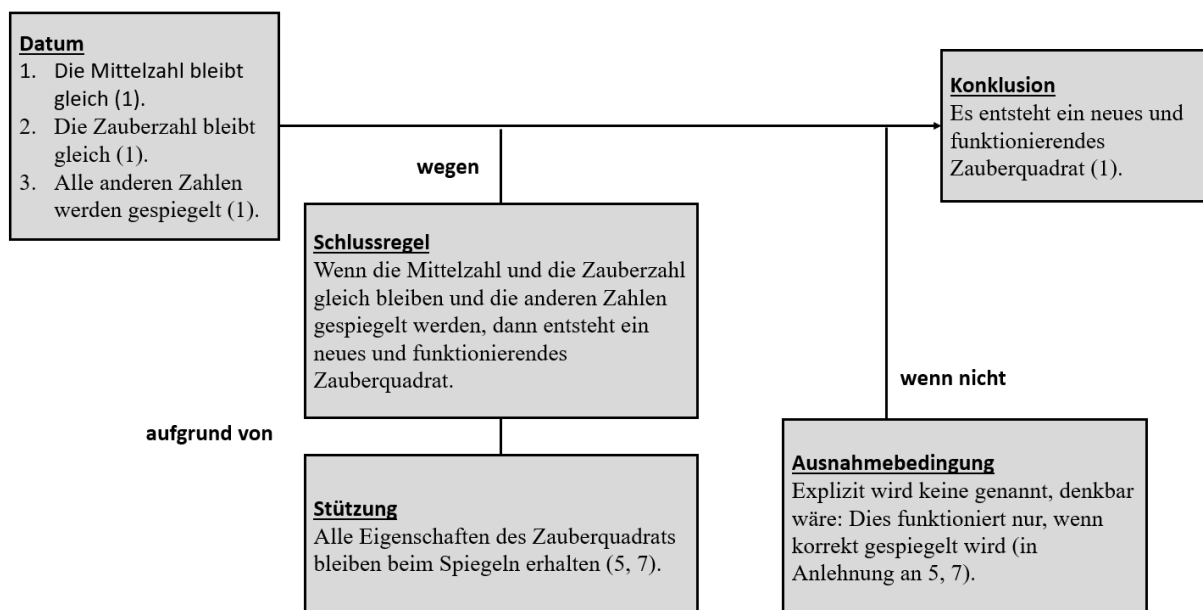


Abbildung 24: Schematische Darstellung des zweiten Arguments von L und J

Nach SCHWARZKOPF (2003) handelt es sich um ein **empirisch-konstruktives** Argument, da untersucht wird, ob mittels Spiegelung das bekannte Phänomen der strukturellen Eigenschaften eines Zauberquadrats nach dem Spiegeln eines Zauberquadrats weiterhin erhalten bleibt.

Sequenz 3: L und J arbeiten vorwärts

- 1 I Und wie würdet ihr jetzt vorgehen, wenn ihr gar kein Zauberquadrat kennen würdet'. Wie würdet ihr jetzt auf eins kommen'.
- 2 L Mh, uff. Irgendeins'.
- 3 I Ja, irgendeins.
- 4 L Oa, ich glaub ich würde ausprobieren. Oder mal gucken.

- 5 I Kannst du deine Strategie mit dem Ausprobieren weiter erklären, L´.
- 6 L Genau, man setzt hier eine Zahl ein, ich machs einfach mal ich setz hier eine vier ein (schreibt die Zahl 4 in das Feld 5). Dann hier auch uff, das muss ja hier eine größer sein hier eine kleiner sein (zeigt auf das Feld 1, dann das Feld 5 auf dem sich die Zahl 4 befindet und dann das Feld 9), wo ist ja jetzt egal. Mh, setz ich hier, weiß ich nicht ne zwei ein (schreibt die Zahl 2 in das Feld 1) uuund hier ne sechs (schreibt die Zahl 6 in das Feld 9). Und dann probier ich mal. Jetzt hab ich die Zielzahl ähm Zauberzahl *zwölf (schreibt die Zahl 12 in das Feld der Zauberzahl). So sechs dann fehlen mir noch sechs, die ich aufteilen muss. Dann nehm ich die fünf (schreibt die Zahl 5 in das Feld 3) und die eins (schreibt die Zahl 1 in das Feld 6), krieg ich auch zwölf (zeigt mit dem Kugelschreiber auf die Felder 9, 6 und 3). Dann hab ich hier fünf, sind neun (zeigt auf die Diagonale mit den Feldern 3, 5 und 7), zehn, elf, zwölf plus drei sind dreizehn (schreibt in das Feld 7 die Zahl 3). Hier sind sieben (schreibt die Zahl 7 in das Feld 4). Das passt auch (geht die Zeile mit den Feldern 4, 5 und 6 mit dem Stift entlang). Äh fünf, sechs, sieben (zeigt auf das Feld 3 und dann das Feld 1). Äh fünf, sechs, sieben plus fü- äh ne, das passt nicht (zeigt immer noch auf die Zeile mit den Feldern 1-3).
- 7 J *Zwölf
- 8 J Ne, da hast du wieder sieben, das geht nicht.
- 9 L Ne, fünf. Das heißt´.
- 10 I Die Strategie ist sehr gut, ich glaub das Problem ist, dass du die Mittelzahl zu klein ist.
- 11 L Zu klein´. Okay, dann äh ich streich das einfach mal durch, ne.
- 12 I Du kannst auch einfach das daneben nehmen (L nimmt dann das daneben abgedruckte noch leere Zauberquadrat).
- 13 L Okay. Setzen wir hier sieben, oder´. Sieben müsste ja groß genug sein (schreibt die Zahl 7 in das Feld 5). Dann hier äh wieder zwei (schreibt die Zahl 2 in das Feld 1) und vier´. Ah ne Quatsch, die muss ja größer sein, dann nehmen wir hier neun (schreibt die Zahl 9 in das Feld 9). Dann haben wir achtzehn als Zauberzahl (schreibt die Zahl 18 in das Feld der Zauberzahl).
- 14 I Guck noch mal auf den Abstand der Zahlen.
- 15 L Ach, der muss ja immer gleichmäßig sein. Ganz vergessen. Das heißt sieben, neun, es müssen fünf dazwischen sein, das heißt zwölf (streicht die Zahl 9 in Feld 9 durch und schreibt stattdessen die Zahl 12 hinein). Und dann ist die Zauberzahl einundzwanzig (streicht die Zauberzahl 18 durch und schreibt die Zahl 21 als Zauberzahl auf). Das passt doch jetzt, hier sind fünf dazwischen, da sind fünf, genau (zeigt auf die Felder 1 und 5 und dann die Felder 5 und 9).
- 16 J Genau.
- 17 L Dann ähm, zwölf einundzwanzig es fehlen neun, mh, mal eben überlegen.
- 18 I Alles gut, wir haben Zeit.
- 19 L Mh (5sec).
- 20 J Fehlen noch neun.
- 21 L (4sec) Dann setzten wir hier einfach mal, sollen wir einfach mal ne drei probieren´ (schreibt die Zahl 3 in das Feld 6). Neun, drei, jetzt fehlen hier die sechs (zeigt auf das Feld 3).
- 22 J Fehlen die sechs.
- 23 L (L schreibt die Zahl 6 in das Feld 3) Dann müsste hier eine eins hin (schreibt Zahl 1 in das Feld 7).
- 24 J Ne, wie kommst du denn´.
- 25 L Ne, Quatsch (streicht die Zahl 1 in Feld 7 durch).
- 26 J Das sind dreizehn.
- 27 L Acht, acht doch´. Passt das´.
- 28 J Ja.
- 29 L Acht ja´ (schreibt die Zahl 8 in das Feld 7). Dann äh acht zehn (zeigt auf Feld 7 und dann Feld 1), elf (schreibt die Zahl 11 in das Feld 4). Passt das denn´. Sieben (zeigt auf das Feld 5). Passt auch ne. Ja. Und hier acht (zeigt auf die Felder 3 und 1). Und dreizehn (schreibt die Zahl 13 in das Feld 2). Ah jetzt und hier die eins´ (schreibt die Zahl 1 in das Feld 8). Passt das´. (murmelnd) Zwölf, dreizehn, einundzwanzig (geht die Zeilen und Spalten ab), ja.
- 30 I Wunderbar (L schreibt die Zahl 12 in das Feld 9).
- 31 L Ja (streicht die falschen Zahlen erneut durch).
- 32 I Könntest du nochmal deine Strategie verbalisieren und dann noch mal begründen, warum des funktioniert´.
- 33 L Genau, also ähm. Wir haben einmal hier die Mittelzahl einfach sieben gesetzt (zeigt auf das Feld 5). Also wahllos.
- 34 I Ne zufällige Zahl´.
- 35 L Genau, ne zufällige Zahl. Dann haben wir ne weitere zufällige Zahl gesetzt, ähm, hier ist die zwei (zeigt mit dem Stift auf das Feld 1) und dann haben wir geguckt, wie hier der Abstand ist (zeigt auf das Feld 1 und dann das Feld 5), weil es äh die Verteilung gleich sein muss. Ähm genau, hier ist die Differenz fünf (zeigt immer noch auf die Felder 1 und 5), das heißt die Differenz zwischen sieben und

der nächsten Zahl muss auch fünf sein (zeigt zunächst auf das Feld 5 und dann das Feld 9). Und da dies hier die Zahl kleiner ist (zeigt auf das Feld 1) muss diese größer sein (zeigt auf das Feld 9). Also sieben plus fünf gleich zwölf.

- 36 I Mh (zustimmend).
 37 L Genau. Und dann haben wir ähm hier ne weitere zufällige Zahl eingesetzt (zeigt auf das Feld 6). Ähm, genau, also wir wussten, wir haben die Zauberzahl einundzwanzig ne, zwischen zwölf und einundzwanzig sind Differenz von neun, das heißt auf diesen beiden Kästchen muss die neun aufgeteilt sein (zeigt auf das Feld 3 und dann das Feld 6), sagen wir jetzt mal so. Und dann habe ich einfach drei gesetzt (zeigt auf das Feld 6) und da die sechs (zeigt auf das Feld 3), damit ich auf einundzwanzig insgesamt komme (zeigt auf die Spalte mit den Feldern 3, 6 und 9). Genau und dann einfach so weiter gerechnet, sechs (zeigt auf das Feld 3) plus sieben (zeigt auf das Feld 5) plus die fehlende acht (zeigt auf das Feld 7) sind einundzwanzig (zeigt auf die Zauberzahl 21). Dann haben wir zwei (zeigt auf das Feld 1) plus acht (zeigt auf das Feld 7) plus die elf (zeigt auf das Feld 4) dann sind einundzwanzig und so weiter bis wir dann alle Zahlen haben.
 38 I Super, das heißt ihr habt euch eine Zahl ausgesucht wahllos und habt von da aus dann einfach vorwärts gearbeitet einfach mit dem was ihr an Wissen habt´.
 39 L Genau.
 40 L Super. Könnt ihr dann noch mal auf den nächsten Zettel gehen´.

Das fertige von L und J erzeugte Zauberquadrat:

2	13	6
11	7	3
8	1	12

Zauberzahl: 21

I fragt L und J, ob sie auch ohne ein Zauberquadrat zu kennen beziehungsweise vorauszusetzen, ein neues erzeugen können (1). L äußert dann, dass L „ausprobieren“ oder „mal gucken“ würde (4), woraufhin I nachfragt, ob L dies erklären kann (5). L beginnt dann zu erklären, was L meint (6): L startet mit der Mittelzahl und nutzt dann das eigene Wissen zu Zauberquadraten, um durch schrittweises Bestimmen einzelner Zahlen zum Ziel eines fertigen Zauberquadrats mit gleicher Zauberzahl in allen Zeilen, Diagonalen und Spalten zu kommen (6). Dabei haben L und D aber Probleme (10), weswegen L und D mit einem anderen Zahlenbeispiel neu starten (10). Sie nutzen wieder eine Mittelzahl als Anfangspunkt (10) und arbeiten sich vorwärts unter Nutzung des Wissens zu Zauberquadraten (14, 16, 22). I bittet darum, dass die Strategie erneut verbalisiert und begründet werden soll (31), woraufhin L der Bitte nachkommt (32, 34, 36).

L und J verwenden die heuristische Strategie des **Vorwärtsarbeitens** in der Klassifikation nach BRUDER / COLLET (2011) und KIPMAN (2020), da L und J „einmal hier die Mittelzahl einfach sieben gesetzt haben. Also wahllos“ (34). „Und dann haben wir geguckt, wie der Abstand hier ist (...), weil es äh die Verteilung gleich sein muss“ (34). L und J starten also mit einer selbst

gesuchten Mittelzahl und **arbeiten** sich von dort unter Beobachtung der Struktur und ihres Wissens zu Zauberquadraten **vorwärts** (34, 36).

Nach SCHWARZKOPF (2000a) handelt es sich um eine Argumentation, da 1. I explizit Begründungsbedarf anzeigt (31) und 2. L eine Begründung entwickelt (32, 34, 36).

Die von L und J vorgebrachte Argumentation ist nach SCHWARZKOPF (2000b) folgendermaßen zu gliedern: **Datum** (1. Die Mittelzahl ist 7 (13). 2. In Feld 2 ist die Zahl 2 (13). 3. In Feld 9 ist die 12 (15). 4. Die Zauberzahl ist 21 (15). 5. In Feld 6 ist die 3 (21). 6. Bis zur Zauberzahl 21 fehlt in Feld 3 die 6 (23). 7. Bis zur Zauberzahl fehlt in Feld 7 die Zahl 8 (26-29). 8. Für Feld 4: $8+2=10$ und $21-10=11$ (29). 9. Für Feld 9: $2+6=8$ und $21-8=13$ (29). 10. In Feld 1 ist die Zahl 1 (29)), **Konklusion** (Es entsteht ein neues und funktionierendes Zauberquadrat (37)), **Schlussregel** (Wenn die Daten gelten, dann entsteht ein neues und funktionierendes Zauberquadrat), **Stützung** (Alle Eigenschaften werden beim Erstellen benutzt (35, 37)), **Ausnahmebedingung** (Es wird explizit keine genannt, denkbar wäre: Dies gilt nicht, wenn das neue Zauberquadrat nicht alle Eigenschaften eines Zauberquadrats aufweist).

Die Argumentation von L und J lässt sich wie folgt schematisch darstellen:

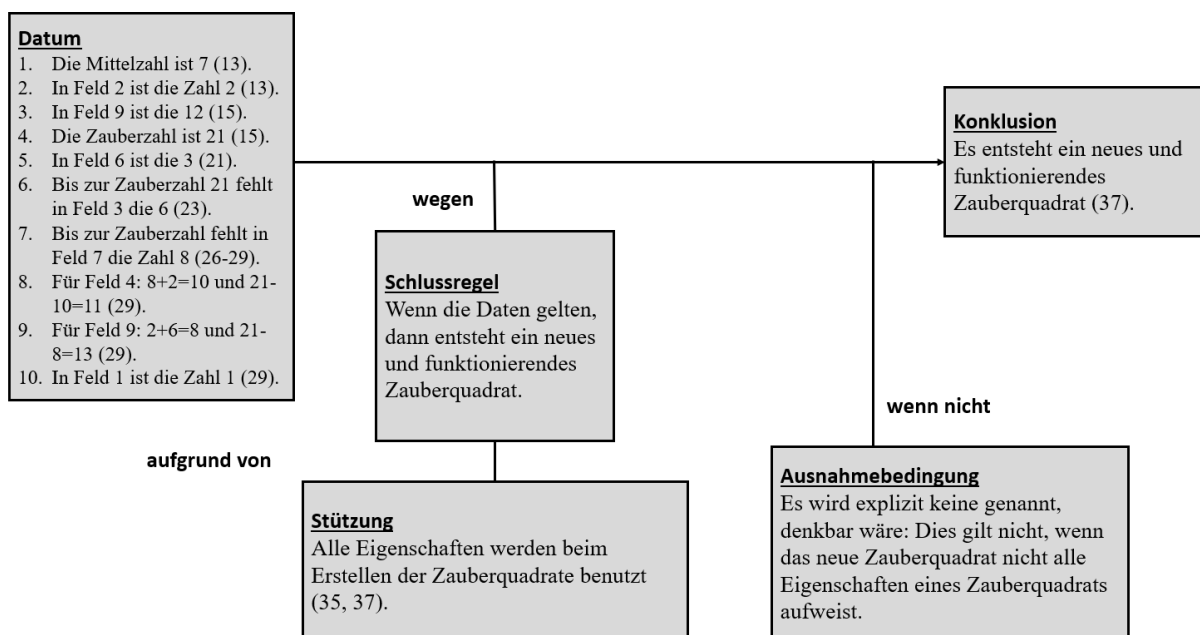


Abbildung 25: Schematische Darstellung des dritten Arguments von L und J

Das Argument von L und J ist nach SCHWARZKOPF (2003) ein **strukturell-mathematisches** Argument, da zwar wie bei **empirischen Argumenten** konkrete Rechnungen und Zahlen benannt werden, diesen aber nur die Funktion eines Beispiels inhärent ist und ihnen lediglich die Funktion eines illustrierenden Beispiels zukommt. L und J versuchen mit den hypothetisch

zugrundeliegenden Strukturen, also den bekannten Eigenschaften der Zauberquadrate, die Frage zu beantworten, wie man das unterstellte Phänomen erzeugen kann.

Sequenz 4: L und J entdecken einen Sonderfall

- 5 J Man könnte jetzt ja die Zahlen spiegeln.
- 6 L a Ne ne, nur gleiche Zahlen, also wir können ja einfach mal ausprobieren mit der zwei. Wir mach, wir machens einfach mal. Zwei. Zwei, zwei (schreibt in alle Felder die Zahl 2). b Das ist sechs (schreibt die Zahl 6 als Zauberzahl). c Zwei, ja müsste eigentlich gehen als Sonderfall, weil es ist ja diese Zauberzahl (zeigt auf die Zauberzahl) ist immer das Dreifache der Mittelzahl (zeigt auf das Feld 5). Die Verteilung ist gleich (zeigt auf die Diagonale mit den Feldern 2, 5 und 9). d Und alle Reihen ergeben die sechs (zeigt auf alle Zeilen und Spalten und fährt diese mit dem Stift nach). Also wäre das vielleicht ne ein Sonderfall.
- 7 I (lobend) Sehr gut, L.

Das fertige von L und J erzeugte Zauberquadrat:

2	2	2
2	2	2
2	2	2

Zauberzahl: 6

I erinnert an die Idee von L zu Beginn des Interviews, wo L sagte, man könne ja immer gleiche Zahlen verwenden (1), dies greift L dann wieder auf und erzeugt ein Zauberquadrat nur mit der Zahl 2 in allen Feldern außer dem Feld der Zauberzahl (6).

Die von L und J verwendete heuristische Strategie entspricht dem **Umstrukturieren eines Problems** in der Klassifikation nach KIPMAN (2020), da L und J die der Aufgabe inhärente Struktur analysieren und dabei erkennen, dass die Struktur der Aufgabe auch bei mehrfach vorkommenden Zahlen erhalten bleibt (6). Durch den anderen Blickwinkel auf die Art der zu verwendenden Zahlen und die Struktur der Aufgabe wird es den Problemlösenden ermöglicht, „die Ausgangssituation mit einer anderen Sichtweise durch eine besser geeignete Anordnung in eine Lösung zu überführen“⁸⁵.

Nach SCHWARZKOPF (2000a) handelt es sich um eine Argumentation, da 1. I vor Beginn der Aufgabe 3 Begründungsbedarf für alle Strategien angezeigt hat und 2. L eine Begründung entwickelt (6).

⁸⁵ KIPMAN (2020), Problemlösen, 31.

Nach SCHWARZKOPF (2000b) ist das von L und J vorgebrachte Argument folgendermaßen zu gliedern: **Datum** (1. Alle Zahlen bis auf die Zauberzahl sind 2 (6a). 2. Die Zauberzahl ist 6 (6b)), **Konklusion** (Es entsteht ein neues und funktionierendes Zauberquadrat (6)), **Schlussregel** (Wenn alle Zahlen bis auf die Zauberzahl, die 6 ist, 2 sind, dann entsteht ein neues und funktionierendes Zauberquadrat), **Stützung** (Die Eigenschaften der Zauberquadrate bleiben erhalten (6d)), **Ausnahmebedingung** (Es wird explizit keine vorgebracht, denkbar wäre: Dies gilt nicht, wenn die additive Struktur der Zauberquadrate nicht erfüllt ist (in Anlehnung an 6d)).

Die Argumentation von L und J lässt sich wie folgt darstellen:

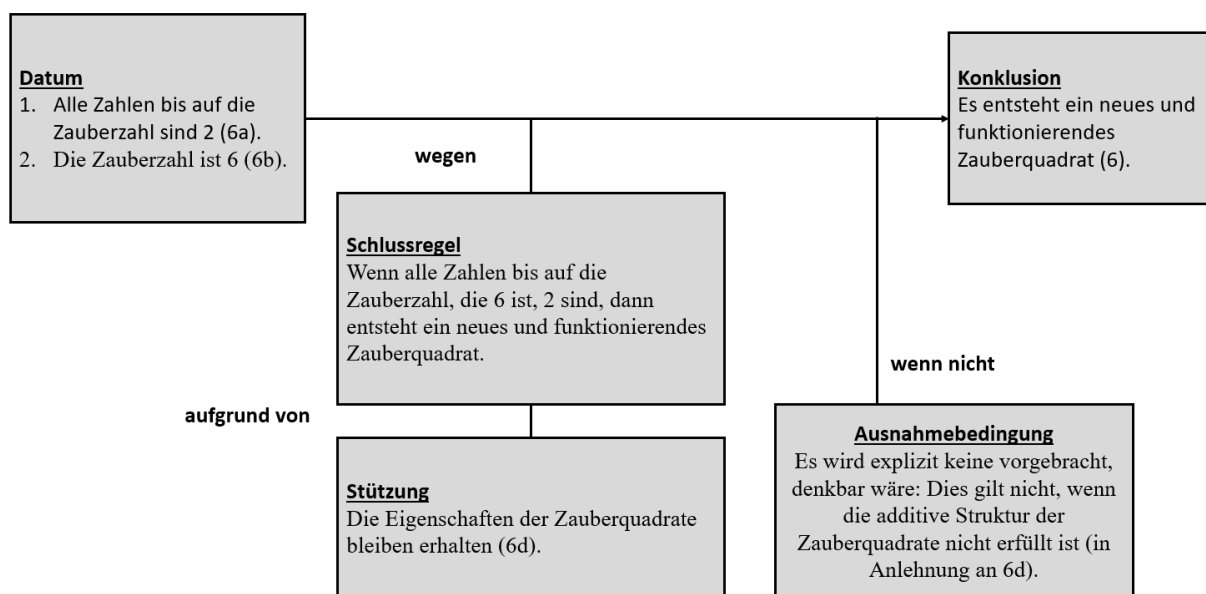


Abbildung 26: Schematische Darstellung des vierten Arguments von L und J

Das Argument ist ein **empirisch-konstruktives** Argument nach SCHWARZKOPF (2003), da geprüft wird, ob das neu erzeugte Objekt die Eigenschaften des betrachteten Phänomens der Zauberquadrate besitzt und das Phänomen bei dem neuen Beispiel erhalten bleibt.

Sequenz 5: L und J verallgemeinern die Zauberquadrate und ihre Struktur

- 1 I Gibt es noch eine Möglichkeit wie man vielleicht allgemein ein Zauberquadrat erzeugen könnte´.
- 2 L Joa, ähm, also wir haben hier ne Zahl x (schreibt die Variable x in Feld 5) und äh die Zauberzahl is immer das Dreifache der Zahl x, das heißt hier ist drei x (schreibt 3x in das Feld der Zauberzahl). Dann haben wir hier immer, sagen wir is die kleinere, das ist ja eigentlich egal, also x minus y (schreibt x-y in Feld 1). Und dann haben wir hier x plus y (schreibt x+y in Feld 9). Genau. Und ähm hier (zeigt auf Feld 3) haben wir dann ne Zahl, also die musst ja kleiner sein als x+y (zeigt auf Feld 9). Ja (2sec), mh (rückt mit dem Stuhl dichter an das Blatt), die Abstände müssen immer gleich bleiben. Also die Verteilung. Ähm setzen wir hier einfach mh, weiß nicht wie ichs schreiben soll, also hier.
- 3 I Also, du kannst auch einfach erstmal deine Idee ja versprachlichen und dann würde das schon reichen.
- 4 L Ja.
- 5 I Also erstmal erklären, was du machen willst.

- 6 L Okay. Also ich setz irgendeine Zahl ähm in die Mitte (zeigt auf Feld 5). Um dann äh eine weitere zufällige Zahl außen an irgendne Ecke (zeigt auf Feld 1). Ist auch egal, ob jetzt diese, diese, diese oder diese (zeigt nacheinander auf alle Ecken des Zauberquadrates, also die Felder 1, 3, 9 und 6). Und dann guck ich mir die Differenz an zu der Zahl (zeigt auf Feld 5) und der Zahl (zeigt auf Feld 1). Wenn ich die hier abziehe (zeigt auf Feld 1), muss ich die Differenz auf der gegenüberliegenden Seite oder auf der anderen Seite der Diagonale hinzurechnen beziehungsweise umgekehrt (zeigt von Feld 1 auf Feld 5 und dann auf Feld 9). Dann ähm habe ich hier, dies hier diese drei Zahlen (zeigt auf die Felder 3, 6 und 9 der Spalte ganz rechts) äh diese drei Kästchen ergeben zusammen drei x (zeigt auf die Zauberzahl). X plus y hab ich schon mal und x plus y (zeigt auf Feld 9) ist kleiner als drei x (zeigt auf die Zauberzahl), das heißt diese beiden Zahlen (zeigt auf die Felder 3 und 6) ergeben zusammen ähm drei x (zeigt auf die Zauberzahl) minus x plus y (zeigt dann von der Zauberzahl auf Feld 9 und macht mit dem Stift imaginär Klammern um $x+y$). Genau, die Di- also, genau, die fehlende Differenz zur Zauberzahl (zeigt auf die noch leeren Felder 3 und 6 und dann auf die Zauberzahl) dann kann ich wieder eine irgendeine x-beliebige Zahl nehmen ähm damit diese Differenz gegeben also die kleiner ist als diese Differenz und die dann mit der passenden Zahl auffüllen, sag ich jetzt mal, erweitern, addieren so. Addieren. Und dann muss ich nur noch stumpfes Ausrechnen (zeigt auf die Diagonale mit den Feldern 3, 5 und 7), sodass die Summe immer drei x ist (zeigt erneut auf die Diagonale und dann auf die Zauberzahl).
- 7 I Sehr gut. Also hast du dir jetzt quasi ne allgemeine Strategie überlegt, wie man quasi x-beliebige Zauberquadrate erzeugen könnte´.
- 8 L Genau. Ja.
- 9 I Und warum würde das funktionieren´.
- 10 L | Mh, weil wir einmal die ähm Verteilung gleich haben, also *genau die Verteilung is gleich. Und ähm, mh wie soll ich das sagen´. Die ähm, genau und weil ja immer is die Zauberzahl, also es wird immer, also die Zauberzahl hast du schon (zeigt auf die Zauberzahl) und du erweiterst dann ja immer nur bis zur Zauberzahl (zeigt auf das Feld 7, dann das Feld 5 und dann das Feld 3). Ähm
- 11 I | *Mh (zustimmend).
- 12 I Also würde quasi die Struktur erhalten bleiben´.
- 13 L Genau! Ja, genau. Die Struktur bleibt gleich und das wird dann nur ergänzt (zeigt auf die noch leeren Felder) sag ich mal.

Das nicht fertige von L und J erzeugte Zauberquadrat:

x-y		
	x	
		x+y

Zauberzahl: $3x$

I fragt, ob L und J noch eine weitere Möglichkeit kennen, um Zauberquadrate zu erzeugen (1). L versucht, Zauberquadrate allgemein mittels Variablen darzustellen und dabei alle ihre Eigenschaften mit abzubilden, um somit beliebige Zauberquadrate erzeugen zu können (2). Dabei hat L aber Probleme (2), weswegen I L bittet, die Strategie erstmal zu versprachlichen (3, 5). Daraufhin versucht L die gefundene Darstellung zu erklären (6). I bittet L, die genutzte Strategie und ihre Anwendbarkeit zu begründen (10). L begründet das Funktionieren der Strategie damit, dass die Verteilung und die Struktur erhalten bleiben (10, 13).

L nutzt die heuristische Strategie des **Umstrukturierens eines Problems** nach KIPMAN (2020), da L das Problem von einem anderen Blickpunkt betrachtet: L verlässt die Zahlebene und nutzt

mit algebraischer Perspektive Variablen, um die Struktur der Zauberquadrate verallgemeinernd abzubilden (10, 13). Jedoch kann L aufgrund der Komplexität die heuristische Strategie nicht zur vollständigen Problemlösung nutzen (6), weiß aber, wie sie (mit mehr Zeit) zum Abschluss zu führen wäre: „die Struktur bleibt gleich und das wird dann nur ergänzt (zeigt auf die noch leeren Felder) sag ich mal“ (13). Hierbei spricht L indirekt auch den Charakter der heuristischen Strategie des **Vorwärtsarbeitens** an, die als Sub- beziehungsweise Teil-Strategie Verwendung findet, da L und J, ausgehend von einer selbst gewählten Mittelzahl (2), also von dem Gegebenen, hin zum Gesuchten, einem fertigen allgemeingültigen Zauberquadrat, **vorwärts arbeiten**, um das Problem in eine (allgemeine) Lösung zu überführen. Dabei nutzen sie die ihnen bekannten Informationen zum strukturellen Aufbau der Zauberquadrate (2, 6), um über Teilziele (wie etwa gefüllte Felder (6)) zum Ziel der Problemlösung zu kommen.

Es liegt nach SCHWARZKOPF (2000a) ein Argument vor, da 1. I explizit Begründungsbedarf anzeigt (9) und 2. L eine Begründung entwickelt (10, 12).

Das von L und J vorgebrachte Argument lässt sich dabei nach SCHWARZKOPF (2000b) folgendermaßen gliedern: **Datum** (1. Die Mittelzahl ist x (2). 2. Die Zauberzahl ist $3x$ (2). 3. Der Abstand von der Mittelzahl zu den Randzahlen (Betrag) ist gleich (2)), **Konklusion** (Es entsteht ein neues und funktionierendes Zauberquadrat (2, 7, 8)), **Schlussregel** (Wenn die Mittelzahl x ist, die Zauberzahl $3x$ und der Abstand von der Mittelzahl zu den Randzahlen gleich ist, dann entsteht ein neues und funktionierendes Zauberquadrat (2-8)), **Stützung** (Die Struktur des Zauberquadrats bleibt erhalten (10, 13)), **Ausnahmebedingung** (Explizit wird keine vorgebracht, denkbar wäre: Es funktioniert nicht, wenn die Struktur des Zauberquadrats nicht erhalten bleibt (in Anlehnung an 10, 13)).

Die Argumentation von L und J lässt sich wie folgt schematisch darstellen:

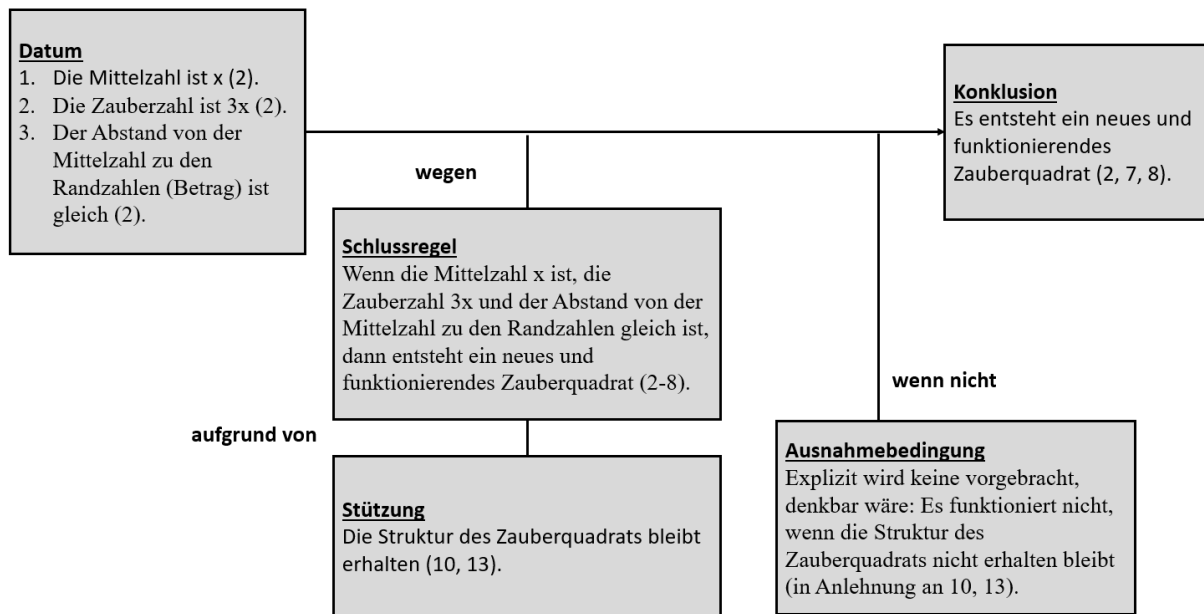


Abbildung 27: Schematische Darstellung des fünften Arguments von L und J

Es handelt sich nach SCHWARZKOPF (2003) um ein **strukturell-mathematisches Argument**, da explizit versucht wird, nachzuvollziehen, wie das Phänomen strukturell erzeugt wird. Die Funktion der Variablen soll beispielhaft für Zahlen dienen, um daran das Phänomen zu beschreiben, zu erklären und zu erzeugen.

L und J nutzten somit folgende heuristische Strategien zur Erzeugung neuer Zauberquadrate:

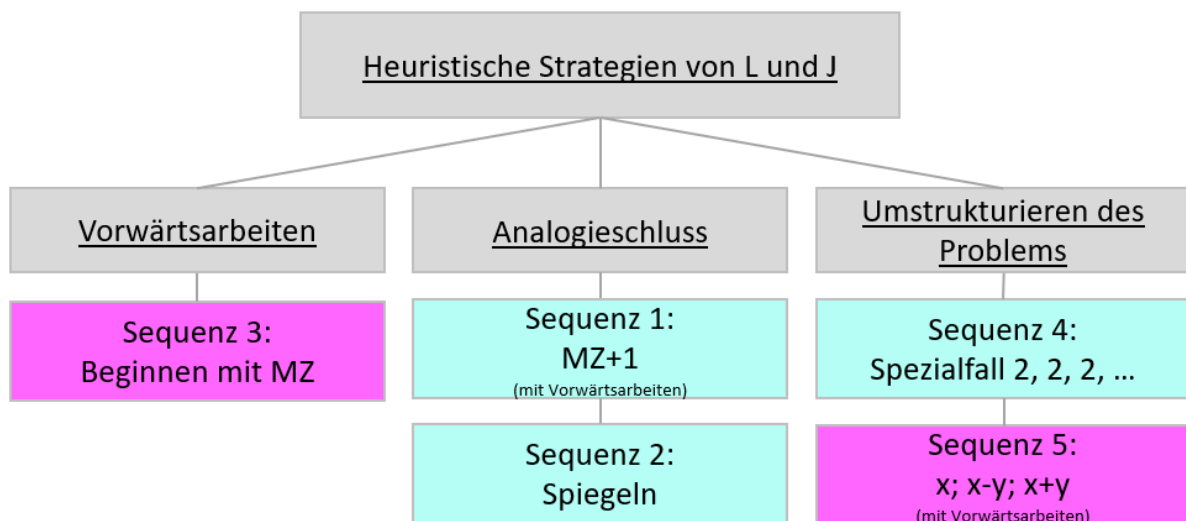


Abbildung 28: Die von L und J genutzten heuristischen Strategien (gelb = empirische, blau = empirisch-konstruktive und rot = strukturell-mathematische Argumente)

4.4 Interview 4: B und S arbeiten vorwärts und nutzen Analogien

Das Interview mit B und S kann dabei wie folgt gegliedert werden:

- Sequenz 1: B und S äußern Strategie-Ideen und arbeiten vorwärts.
- Sequenz 2: B und S spiegeln bekannte Zauberquadrate.
- Sequenz 3: B und S nutzen einen Sonderfall mit Abstandsverteilungen.

Sequenz 1: B und S äußern Strategie-Ideen und arbeiten vorwärts

- 1 I Und dann würde ich euch einfach mal bitten, ob ihr ein Zauberquadrat mit einer Zauberzahl eurer Wahl erzeugen und mir die Strategie beschreiben könnt´.
- 2 S Das Spiegeln hatten wir.
- 3 B Genau, das Spiegeln hatten wir. Ich würde sagen, da wir ja wissen das mit dem Verdreifachen, können wir uns schon mal eine Mittelzahl, damit wir was stehen haben (zeigt auf Feld 5), herleiten.
- 4 S Ja.
- 5 B Wollen wir einfach die dreißig nehmen, haben wir ganz, ne schöne Zahl (schreibt die Zahl 30 in das Feld der Zauberzahl). Ja, durch drei sind zehn (schreibt die Zahl 10 in Feld 5). Dann wissen wir das mit den Abständen.
- 6 S Ja.
- 7 B Dass wenn es nach links hin plus zwei sind, muss es nach rechts hin minus zwei sein.
- 8 S Ja.

B und S versuchen nun, ein Zauberquadrat zu erzeugen, indem sie ihr Wissen zum Abstand von der Mittelzahl zu den jeweiligen Randzahlen einsetzen. Sie finden aber kein Zauberquadrat mit der gewählten Zauberzahl, dann wird vorgeschlagen, eine andere Zauberzahl zu wählen und neu zu beginnen:

- 9 B Dann fangen wir mal neu an, das is ja.
- 10 S Nehmen wir zwölf (B schreibt die Zahl 12 in das Feld 5). So dann haben wir jetzt gesagt Zauberzahl mal drei, gehen wir jetzt von aus ist sechsunddreißig.
- 11 I Richtig.
- 12 B Sechsunddreißig (schreibt die Zahl 36 in das Feld der Zauberzahl).
- 13 S Wollen wir jetzt mal mit minus vier anfangen´.
- 14 B Können wa machen (trägt die Zahlen 8 in das Feld 4 und 16 in Feld 6 ein). So. Richtig ne´.
- 15 S Soso, acht (murmelt). Passt doch nicht. Sechsunddreißig, tschuldigung. Alles klar. Nein, alles gut.
- 16 B Sechsunddreißig. (4sec) So. Machen wir mal so (zeigt auf die Spalte mit den Feldern 2, 5 und 8), machen wir mal erst so (zeigt erst auf Feld 9, dann Feld 5 und dann Feld 1), *dann können wir schon eine Zahl herleiten (zeigt auf die Felder 1, dann 4 und dann 7)
- 17 S | *Ja.
- 18 S Was hatten wir gesagt minus vier, ne´. Minus vier (murmelt). Mach mal minus vier (zeigt auf die Felder 1, dann 5 und dann 9). Ach das geht ja nicht. Das.
- 19 B Hatten wir ja gerade. Machen wir minus zwei.
- 20 S Ja.
- 21 B Haben wir hier zehn (trägt die Zahl 10 in Feld 1), ja und hier vierzehn (schreibt die Zahl 14 in Feld 9). *mh. Dann haben wir hier acht plus zehn sind (zeigt auf Feld 1 und dann Feld 4) achtzehn.
- 22 S | *Sind´. Sechsunddreißig, passt.
- 23 S Achtzehn, da muss Zahl achtzehn rein (zeigt auf Feld 7 und B trägt in dieses Feld die Zahl 18 ein).
- 24 B Und dann haben wir hier, wissen wir ja jetzt, plus (zeigt auf das noch leere Feld 8).
- 25 S Sechs. Da muss ne sechs.
- 26 B Sechs. Da auch ne sechs rein (trägt die Zahl 6 in das Feld 3 ein), dann gucken wir mal hier (zeigt auf die Zeile mit dem Feld 9).
- 27 S (murmelt) Sechsunddreißig. Passt.
- 28 B Das passt.
- 29 S So jetzt muss noch, da noch ne zwanzig (B schreibt die Zahl 20 in das Feld 2).

- 30 B Zwanzig.
 31 S (murmelnd) Zweiunddreißig, ne vier. Äh vier'. Doch, ne vier.
 32 B Äh.
 33 S Brauchst jetzt nur ne
 34 B Äh, ja, nein, ich überleg schon gerade weiter (trägt die Zahl 4 in das Feld 8 ein). Guck mal, weil wir in regelmäßigen Abständen immer plus minus also, wir haben plus minus zwei, plus minus vier, plus minus sechs, plus minus acht haben wir (geht dabei die Zeilen, Diagonalen und Spalten durch), plus minus zehn haben wir nicht. Ist schon vorbei.
 35 I Genau, weil du ja nur so viele Möglichkeiten hast, das aufzuteilen.
 36 B Ja, genau.

Das fertige von B und S erzeugte Zauberquadrat:

10	20	6
8	12	16
18	4	14

Zauberzahl: 36

B und S äußern zunächst Strategie-Ideen: S schlägt vor zu spiegeln (2), während S das Verdreifachen (in Bezug auf den Zusammenhang von der Mittelzahl zur Zauberzahl) nennt (3) und sich mit der eigenen Idee durchsetzt. B und S fangen mit einer Mittelzahl an (4) und versuchen, ein Zauberquadrat zu erzeugen. Dabei kommen sie zu keinem Ergebnis und fangen mit einer anderen Mittelzahl neu an (9). B und S starten dann neu mit einer Mittelzahl und berechnen über ihr Wissen zum Zusammenhang von Mittel- und Zauberzahl die Zauberzahl. Diese muss wie in (3) beschrieben das Dreifache der Mittelzahl sein (10). Dann nutzen sie ihr Wissen zum Abstand der Mittelzahl zu ihren Randzahlen und verteilen die Abstände und prüfen, ob die Struktur der Zauberquadrate eingehalten bleibt (Abstand „minus vier“ (13), S überprüft, ob die Zauberzahl weiterhin stimmt (15), Abstand „minus zwei“ (19), dessen Umsetzung in Zahlen (21) und S prüft, ob die Zauberzahl weiterhin gilt (22)). Über ihr Wissen zur additiven Struktur der Zauberzahl berechnen sie die fehlende dritte Zahl der Spalte ganz links (23) und dann über das Wissen zum Abstand der Mittelzahl zu ihren Randzahlen die fehlende Diagonale (24-25). B überprüft, ob die Zusammenhänge der Zauberzahl weiterhin gelten (27). Dann berechnen sie die fehlenden Felder ebenfalls über ihr Wissen zur additiven Struktur der Zauberzahl (31-34).

Nach BRUDER / COLLET (2011) und KIPMAN (2020) handelt es sich hierbei um die Strategien **Vorwärtsarbeiten** (3) und **Analogiebildung** (2). B schlägt das Spiegeln von Zauberquadraten vor, was der Strategie der **Analogiebildung** entspricht (diese Strategie wird aber erst in der folgenden Sequenz 2 umgesetzt). B setzt sich mit der eigenen Idee des **Vorwärtsarbeitens**

durch (3-4). B und S **arbeiten vorwärts**, da sie ausgehend von einer gewählten Mittelzahl (10), die Zauberzahl (10, 12) bestimmen und dann über ihr Wissen zum Abstand der Mittelzahl zu den Randzahlen mittels Probieren (13, 19) versuchen, weitere Zahlen zu bestimmen. Dann nutzen sie ihr Wissen zur additiven Struktur der Zauberzahl, um die weiteren fehlenden Zahlen zu bestimmen (16). Somit versuchen B und S gemäß dem **Vorwärtsarbeiten** „ausgehend von dem Gegebenen (der selbst ausgesuchten Mittelzahl), Schlussfolgerungen zu ziehen und Beziehungen herzustellen, um das Gesuchte zu erreichen“⁸⁶. Dem **Vorwärtsarbeiten** von B und S ist dabei auch der Charakter des **systematischen Probierens** inhärent, da B und S ihr Wissen zu den Abständen von der Mittelzahl zu ihren Randzahlen nutzen und die Abstände **probierend** „verteilen“, um auf ein funktionierendes Zauberquadrat mit den korrekten strukturellen Eigenschaften zu kommen (13-22).

Es handelt sich nach SCHWARZKOPF (2000a) (indirekt) um eine Argumentation, da 1. I nicht direkt Begründungsbedarf angezeigt hat, sondern macht dies nur generell vor Beginn von Aufgabe 3 und 2. B und S im Verlauf des Gesprächs eine Begründung entwickeln.

Die von B und S vorgebrachte Argumentation lässt sich dabei nach SCHWARZKOPF (2000b) folgendermaßen gliedern: **Datum** (1. Die Mittelzahl ist 12 (10). 2. Die Mittelzahl mit 3 multipliziert ergibt die Zauberzahl 36 (10). 3. Der Abstand von der Mittelzahl zu Feld 4 und 6 ist 4, Feld 4 ist 8 und Feld 6 ist 16 (13-14). 4. Der Abstand von der Mittelzahl zu Feld 1 und 9 ist 2, Feld 1 ist 10 und Feld 9 ist 14 (19-21). 5. In Feld 7 muss die Zahl 18 (23). 6. In Feld 3 muss die Zahl 6 (26). 7. In Feld 2 muss die Zahl 20 (29). 8. In Feld 8 muss die Zahl 4 (34)), **Konklusion** (Es entsteht ein neues und funktionierendes Zauberquadrat (3)), **Schlussregel** (Wenn die Daten gelten, dann entsteht ein neues und funktionierendes Zauberquadrat (34)), **Stützung** (1. Der Abstand von der Mittelzahl zu den jeweiligen Randzahlen ist eingehalten (34). 2. Die additive Struktur der Zauberzahl ist eingehalten (34)), **Ausnahmebedingung** (Es wird explizit keine vorgebracht).

⁸⁶ KIPMAN (2020), Problemlösen, 29.

Die Argumentation von B und S lässt sich wie folgt schematisch darstellen:

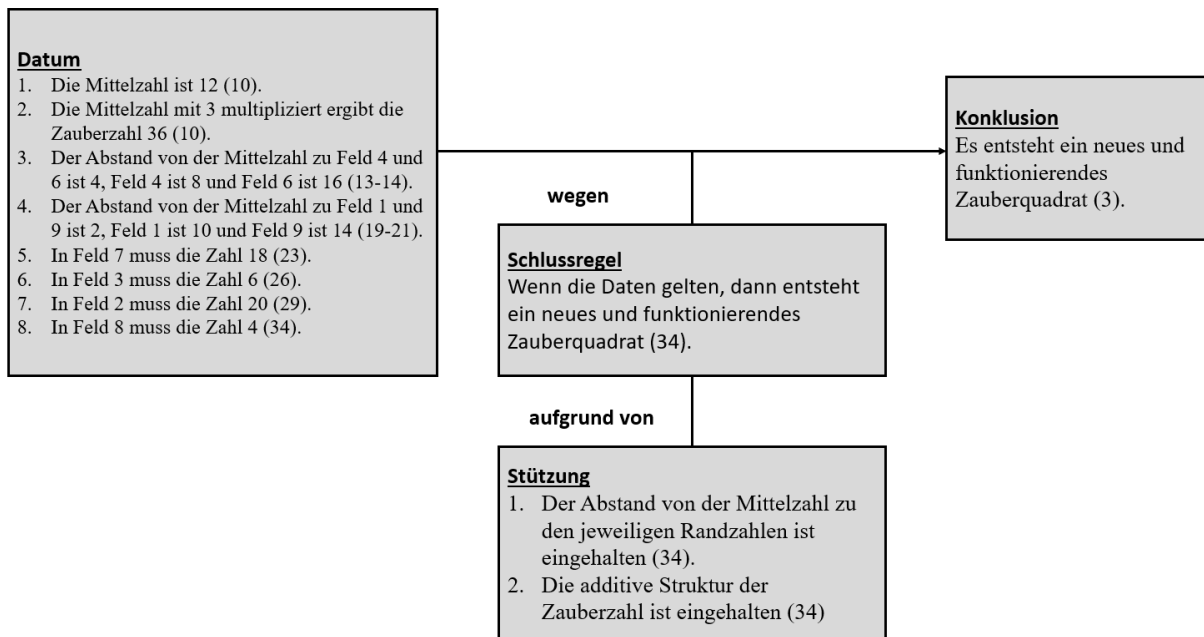


Abbildung 29: Schematische Darstellung des ersten Arguments von B und S

Das Argument ist ein **empirisch-konstruktives** Argument, da B und S versuchen, das untersuchte Phänomen auf andere als das vorliegende Beispiel zu übertragen, dieses an dem neuen Beispiel prüfen und dort ebenfalls beobachten. Das in die Argumente eingehende neue Wissen besteht dabei aus Kenntnissen über Konstruktionsbedingungen des Phänomens. Es wird also durch Übertragung der Vorgehensweise(n) zur Konstruktion eines Zauberquadrats auf weitere Beispiele die Frage geklärt, ob das Phänomen weiterhin erhalten bleibt (B und S konstruieren das neue Zauberquadrat während S dies verbal kontrolliert: 13-22).

Sequenz 2: B und S spiegeln bekannte Zauberquadrate

- 1 S Was wir sachten, diese Spiegelung.
- 2 I Könnt ihr das vielleicht mal versuchen´.
- 3 S Ja (nimmt das Blatt zu sich). Ich habs wirklich jetzt nicht auf dem Schirm. Aber wenn ich spiegel, das heißt doch die Zahl die Zahl muss hier rein, sechszehn kommt wieder in die Mitte und sechs da drübbä (zeigt auf Feld 9 des ersten Zauberquadrats und dann das Feld 3 des zweiten Zauberquadrats, zeigt dann auf Feld 6 des ersten Zauberquadrats und dann das Feld 6 des zweiten Zauberquadrats, zeigt dann auf Feld 3 des ersten Zauberquadrats und dann das Feld 9 des zweiten Zauberquadrats).
- 4 I Man könnte die auch so über Eck tauschen, hat B ja am Anfang gesagt.
- 5 S So (zeigt auf das Feld 1 und 9 und bewegt die Finger zwischen beiden hin und her).
- 6 I Ja (S schreibt die Zahl 6 in Feld 7 und die Zahl 18 in Feld 3).
- 7 S Das heißt zwölf bleibt in der Mitte´.
- 8 I Ja (S schreibt die Zahl 12 in Feld 5).
- 9 S Achtzehn. Vier (schreibt die Zahl 4 in das Feld 2). Zwanzig (schreibt die Zahl 20 in das Feld 8). (murmeln) ne. (5sec) Oh, sch***, jetzt hab ich mich verrannt. Zehn (schreibt die Zahl 19 in Feld 9). Vierzehn (schreibt die Zahl 14 in Feld 1). Bin ich noch auf dem richtigen Weg (zu B)´. Fehlt hier nur noch *sechzehn, ja (schreibt die Zahl 16 in Feld 4).
- 10 B *Sechzehn. Ja.
- 11 S Sechzehn und acht so (schreibt die Zahl 8 in das Feld 6).
- 12 I Richtig.

- 13 B Dann sind das auch immer sechsunddreißig (S schreibt die Zahl 36 als Zauberzahl auf).
 14 I Und warum würde das jetzt funktionieren die Strategie´.
 15 B Da äh, da tatsächlich ja alle Reihen gleich ne. Ja, weil das gespiegelt ist. Also ich glaub.
 16 I Wenn du das spiegelst, was bleibt denn dann währenddessen immer erhalten´.
 17 S Die Mittelzahl und die Abstände zueinander. Dieses gleiche plus minus vier. *In diesem Fall
 18 I | *Und dadurch bleibt das
 | erhalten, die Struktur. Und dadurch funktioniert das immer wieder.

Das fertige von B und S erzeugte Zauberquadrat (links) und das referenzierte (rechts):

14	4	18
16	12	8
6	20	10

Zauberzahl: 36

10	20	6
8	12	16
18	4	14

Zauberzahl: 36

S versucht, die von B geäußerte, Strategie-Idee des Spiegelns anzuwenden (1). Nach anfänglichen Schwierigkeiten und Nachfragen (2-4), kann S die Strategie umsetzen (5-13). I fragt dann nach einer Begründung für das Funktionieren der Strategie (14), die B und S (15, 17) mit den Eigenschaften des Zauberquadrats, also der Konstruktion der Zauberzahl (15), dem Spiegelungsverfahren (15) und dem Wissen zum Abstand der Mittelzahl zu den Randzahlen (17) benennen.

B und S verwenden die Strategie der **Analogiebildung** nach BRUDER / COLLET (2011) und KIPMAN (2020), da B und S prüfen, ob sie eine bekannte Vorgehensweise zum Lösen des vorliegenden Problems nutzen können. B hatte bereits bei Aufgabe 1 die Idee geäußert, dass man Zauberquadrate spiegeln könnte. Dies wird dann von B und S aufgegriffen und sie wenden die ihnen bekannte Vorgehensweise des Spiegelns an (1, 5f.).

Es liegt nach SCHWARZKOPF (2000a) eine Argumentation vor, da 1. I expliziten Begründungsbedarf anzeigt (14) und dieser 2. von B und S durch Entwicklung einer Begründung zu befriedigen versucht wird (15, 17).

Das von B und S vorgebrachte Argument lässt sich nach SCHWARZKOPF (2000b) folgendermaßen gliedern: **Datum** (1. Die Mittelzahl ist die 12 (7). 2. Die Randzahlen werden gespiegelt / getauscht (5). 3. Die Zauberzahl ist 36 (13)), **Konklusion** (Es entsteht ein neues und funktionierendes Zauberquadrat (1)), **Schlussregel** (Wenn die Mittelzahl die 12 bleibt, die Zauberzahl 36 ist und die Randzahlen gespiegelt / getauscht werden, dann entsteht ein neues und funktionierendes Zauberquadrat (1, 5, 9, 13)), **Stützung** (1. Der Abstand der Mittelzahl zu den beiden Randzahlen einer Diagonale, Zeile und Spalte bleibt erhalten (15, 17). 2. Die

additive Struktur der Zauberzahl bleibt erhalten (13)), **Ausnahmebedingung** (Es wird explizit keine vorgebracht).

Die Argumentation von B und S lässt sich wie folgt schematisch darstellen:

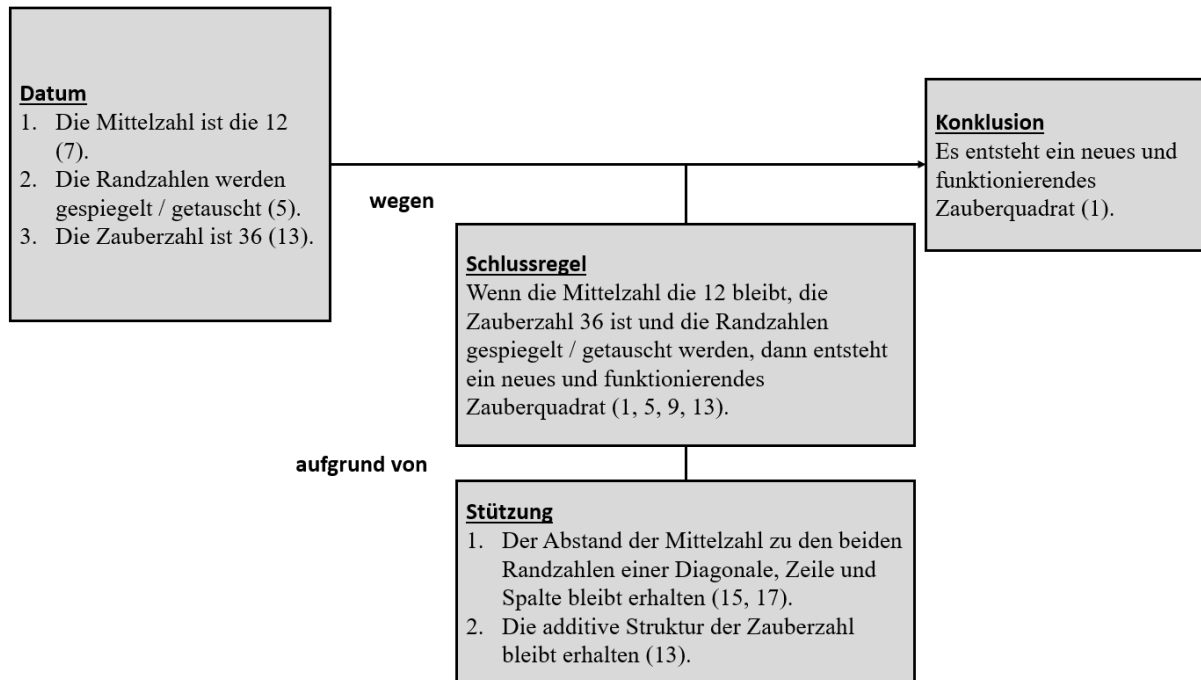


Abbildung 30: Schematische Darstellung des zweiten Arguments von B und S

Es handelt sich nach SCHWARZKOPF (2003) um ein **empirisch-konstruktives** Argument, da B und S das Phänomen der Zauberquadrate durch Spiegelung auf ein anderes Beispiel übertragen, um dabei die Frage zu klären, ob das Phänomen beobachtet werden kann und damit weiterhin erhalten bleibt. Das in die Argumentation eingehende neue Wissen besteht dabei aus Kenntnissen zur Konstruktion des Phänomens. Es wird dabei im argumentationstheoretischen Sinne nicht die Erkenntnis begründet, dass in dem vorliegenden Problem das Phänomen auftritt, denn diese Erkenntnis wird dabei gewissermaßen vorausgesetzt und wie ein bekanntes Wissen verwendet.

Sequenz 3: B und S nutzen einen Sonderfall mit Abstandsverteilungen

- 1 I Da hatte B gesagt, wenn man immer die gleiche Zahl verwenden würde, würde das funktionieren, um ein neues Zauberquadrat zu erzeugen´.
- 2 B Ja.
- 3 S Achso, du meinst fünf fünf , fünf fünf, fünf fünf, fünf fünf, fünf fünf (zeigt mit dem Finger auf die Felder des noch leeren Zauberquadrats).
- 4 B Ah (zeigt sich den Zettel heraus), da würde ich jetzt die Kästchen für verwenden.
- 5 I Wie meinst du´.
- 6 B Ne, ich kann das auch in einem, tschuldigung. Ich fang einfach mal an. Zwölf hatten wir jetzt wollen wir mal vierzehn nehmen´.
- 7 I Könnt ihr machen.
- 8 B Wir sollen ja ein neues erzeugen.

- 9 I Ja, genau.
- 10 B Ich schreib mal hier groß die vierzehn rein (schreibt die Zahl 14 in Feld 5). Dann mach ich mal überall kleine vierzehnen rein (schreibt in alle übrigen Felder kleine 14en hinein). So, weil ich brauch den Platz gleich noch zum Schreiben. Deswegen mach ich die nur ganz klein. Vierzehn (tippt dynamisch mit dem Stift auf die groß geschriebene Zahl 14 in Feld 5) mal drei beziehungsweise vierzehn plus vierzehn plus vierzehn ergibt (lacht).
- 11 S Zweiundvierzig.
- 12 B Zweiundvierzig (schreibt die Zahl 42 als Zauberzahl auf). Dann wir einfach mal an. Plus zwei.
- 13 I Könnten wa machen.
- 14 B Könnten wa machen. Sechzehn (schreibt in das Feld 2 über die kleine eingetragene Zahl 14 die Zahl 16) und hier zwölf (schreibt in das Feld 8 über die kleine eingetragene Zahl 14 die Zahl 12).
- 15 I (murmelnd) Das ist auch richtig schlau.
- 16 B Und dann äh mit vier, wollen wir das mal mit vier machen'. *Wir könnten auch.
- 17 I *Könnt ihr auch machen.
- 18 B Dann haben wir zehn (schreibt die Zahl 10 in das Feld 4 über die kleine 14), noch ist es egal wohin ich das schreibe dieses auch mit plus links rechts das.
- 19 I Mh (zustimmend).
- 20 B Das brauch ich ja jetzt nicht beachten, weil diese Zahlen noch nicht zusammen gehören. Hier wird das interessant in den Ecken. Was sachten wir jetzt', plus vier (schreibt die Zahl 18 in Feld 6 über die kleine 14). Dann machen wir das ganze nochmal mit sechs, dann haben wir immer gleiche Abstände, immer plus zwei. Ähm, würde ich jetzt hier mal, ich schreib mal hin schwach zwanzig (schreibt die Zahl 20 in das Feld 1 über die kleine 14) und hier acht (schreibt die Zahl 8 in das Feld 9 über die kleine 14). Dann hätte ich hier (murmelnd) zwanzig (zeigt auf Feld 8 und 9), dann bräuchte ich noch zwölf hin (schreibt in Feld 7 die Zahl 12 über die kleine 14).
- 21 S Die haben wir da ja schon (zeigt auf die Zahl 12 in Feld 8).
- 22 B Aber wenn ich ne andere Zahl nehmen würde, wir probierens mal mit einer anderen, vielleicht ist das ja nur doofer Zufall (dass sich die Zahl doppelt und es nicht funktioniert).

B und S probieren weiter (unter Einhaltung des gleichen Abstands von der Mittelzahl zu den Randzahlen) durch Einsetzen und Probieren ein Zauberquadrat zu erzeugen. Nach einigen Versuchen belassen sie es dann aufgrund der späten Uhrzeit bei einem Lösungsversuch und I fragt nach einer Begründung ihrer genutzten Strategie:

- 23 I Das ist wieder so ein Knobelding. Kannst du versuchen zu erklären, was du tun willst'.
- 24 B Ja, wir müssen nur die vierzehnen abändern, wir gehen ganz grundlegend davon aus, es sind in jeden Feld ne vierzehn is. Nur weil wir hier beliebig sagen wir mal einfach die vierzehn (zeigt auf Feld 3) da zwei abziehen, dann müssen wir hier gegenüberliegend immer (zeigt auf Feld 7) gegenüberliegend zwei draufzählen.

Das nicht fertige von B und S erzeugte Zauberquadrat (links) und das Zauberquadrat am Ende des Interviews (rechts):

14	14	14
14	14	14
14	14	14

Zauberquadrat:

9 14	16 14	3. 14
8 14	14	20 14
25 14	12 14	13 14

Zauberzahl: 42

I erinnert an die Idee von B „immer die gleiche Zahl (zu) verwenden“ (1), woraufhin S vorschlägt, ein Zauberquadrat nur mit der Zahl 5 zu füllen (2). B greift die Idee auf (4) und schreibt in alle Felder des Zauberquadrats die Zahl 14 (10) und S bestimmt die Zauberzahl (12). Sie versuchen dann das Wissen zum konstanten Abstand der Mittelzahl zu den beiden Randzahlen in den Diagonalen, Zeilen und Spalten zu verwenden, indem sie verschiedene Abstände wählen (etwa ± 2 in (14)) und so durch Probieren und Prüfen mittels Nutzung verschiedener Abstände ein funktionierendes Zauberquadrat zu erzeugen (14-22). B und S können das Zauberquadrat nicht abschließend lösen, weswegen sie (auch aufgrund der späten Uhrzeit) auf weiteres Probieren verzichten. Deswegen bittet I nur noch um eine Erklärung des Vorgehens (23), die B in (24) liefert.

B und S nutzen nach BRUDER / COLLET (2011) und KIPMAN (2020) die heuristische Strategie des **Rückführens von Unbekanntem auf Bekanntes**, da sie mithilfe dieser Strategie die vorliegende Problemaufgabe vereinfachen und dann die neue Form des Problems auf ihnen bekannte Lösungsmöglichkeiten zurückführen (in 10 vereinfacht B das Problem, indem B mit dem strukturellen Wissen zum Aufbau der Zauberquadrate (in jeder Zeile, Spalte und Diagonale muss 42 stehen, was sich als das Dreifache von 14 darstellen lässt) in jedes Feld die Zahl 14 schreibt und dann das Wissen zum Abstand der Mittelzahl zu ihren Randzahlen nutzt und diese Abstände – unter Beachtung aller strukturellen Eigenschaften des Zauberquadrats wie der konstanten Summe beziehungsweise Zauberzahl (18, 20 „noch ist es egal wohin ich das schreibe dieses auch mit plus links rechts das (...). Das brauch ich ja jetzt nicht beachten, weil diese Zahlen noch nicht zusammen gehören. Hier wird das interessant in den Ecken“) – „verteilen“ möchte (12, 14, 16, 18). Alternativ zu dieser Strategie wäre zu überlegen, ob diese dem **Umstrukturieren eines Problems** entspräche, da B und S die Struktur der Aufgabe analysieren und mittels einer anderen Sichtweise durch eine besser geeignete Anordnung zu einer Lösung führen. Jedoch liegt der Fokus von B und S darauf, durch das Nutzen der Zahl 14 die bekannten Strategien wie das „Verteilen“ der Abstände von der Mittelzahl zu den Randzahlen zu nutzen, daher entspricht die von ihnen zum strategischen Problemlösen genutzte Strategie eher dem **Rückführen von Unbekanntem auf Bekanntes**. Ferner wird neben der **Rückführung von Unbekanntem auf Bekanntes** auch das **systematische Probieren** als Teil-Strategie genutzt, da B und S die „Abstände“ **systematisch probierend** verteilen, indem sie die Abstände von der Mittelzahl zu ihren Randzahlen so verteilen, dass letztlich auch alle anderen Eigenschaften im neuen Zauberquadrat erhalten bleiben (18, 20, 24).

Es liegt nach SCHWARZKOPF (2000a) eine Argumentation vor, da 1. I explizit Begründungsbedarf anzeigt (23) und 2. dieser durch Entwicklung einer Begründung von B zu befriedigen versucht wird (24).

Das von B und S vorgebrachte Argument lässt sich nach SCHWARZKOPF (2000b) folgendermaßen gliedern: **Datum** (1. In jedem Feld steht theoretisch die 14 (10, 24). 2. Die Zauberzahl ist 42 (12). 3. Die Felder mit der 14 werden bezogen auf den Abstand abgeändert (12, 16, 24)), **Konklusion** (Es entsteht ein neues und funktionierendes Zauberquadrat (24)), **Schlussregel** (Wenn in jedem Feld theoretisch die 14 steht, die Zauberzahl 42 ist und die Felder mit der 14 bezogen auf den Abstand abgeändert werden, dann entsteht ein neues und funktionierendes Zauberquadrat (24)), **Stützung** (Die additive Struktur der Zauberquadrate bleibt erhalten (20, 24)), **Ausnahmebedingung** (Explizit wird keine genannt, denkbar wäre: Dies gilt nicht, wenn nicht alle Eigenschaften eines Zauberquadrats erfüllt wären (B deutet dies in 20 an: „das brauch ich noch nicht beachten, weil diese Zahlen noch nicht zusammen gehören)).

Die Argumentation von B und S lässt sich wie folgt schematisch darstellen:

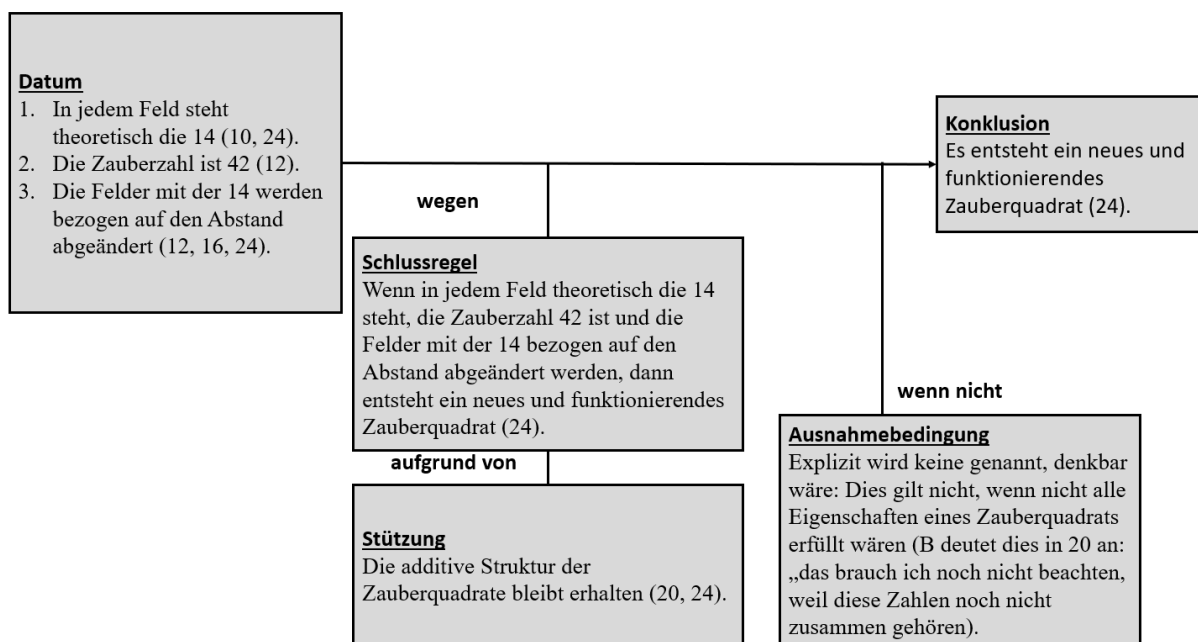


Abbildung 31: Schematische Darstellung des dritten Arguments von B und S

Es handelt sich bei dem von B und S vorgebrachten Argument nach SCHWARZKOPF (2003) um ein **strukturell-mathematisches** Argument, da Auswirkungen von hypothetisch zugrundeliegenden Strukturen untersucht werden, um dabei die Frage zu klären, wie das untersuchte Phänomen erzeugt werden kann. Den konkret benannten Zahlen und Rechnungen kommt hierbei nur die Funktion eines Beispiels zu.

B und S nutzten somit folgende heuristische Strategien zur Erzeugung neuer Zauberquadrate:

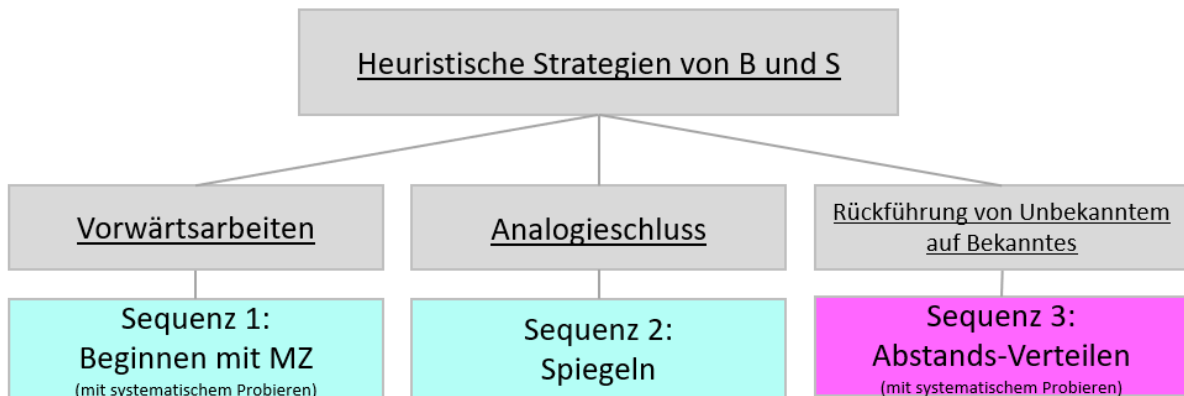


Abbildung 32: Die von B und S genutzten heuristischen Strategien (gelb = empirische, blau = empirisch-konstruktive und rot = strukturell-mathematische Argumente)

4.5 Zusammenschau der gewonnenen Erkenntnisse

Im Folgenden sollen nun die gewonnenen Ergebnisse der Untersuchung zusammengetragen und abschließend ausgewertet werden sowie Konsequenzen der Untersuchung für die weitere Arbeit an dieser problemhaltigen, substanziellen Lernumgebung aufgezeigt werden.

4.5.1 Inhaltliche Erkenntnisse der Untersuchung

Es ließen sich in der vorliegenden Untersuchung folgende heuristische Strategien zur Konstruktion von Zauberquadraten mit beliebiger Zauberzahl mit den folgenden Argumenttypen in der Begründung der Strategien finden:

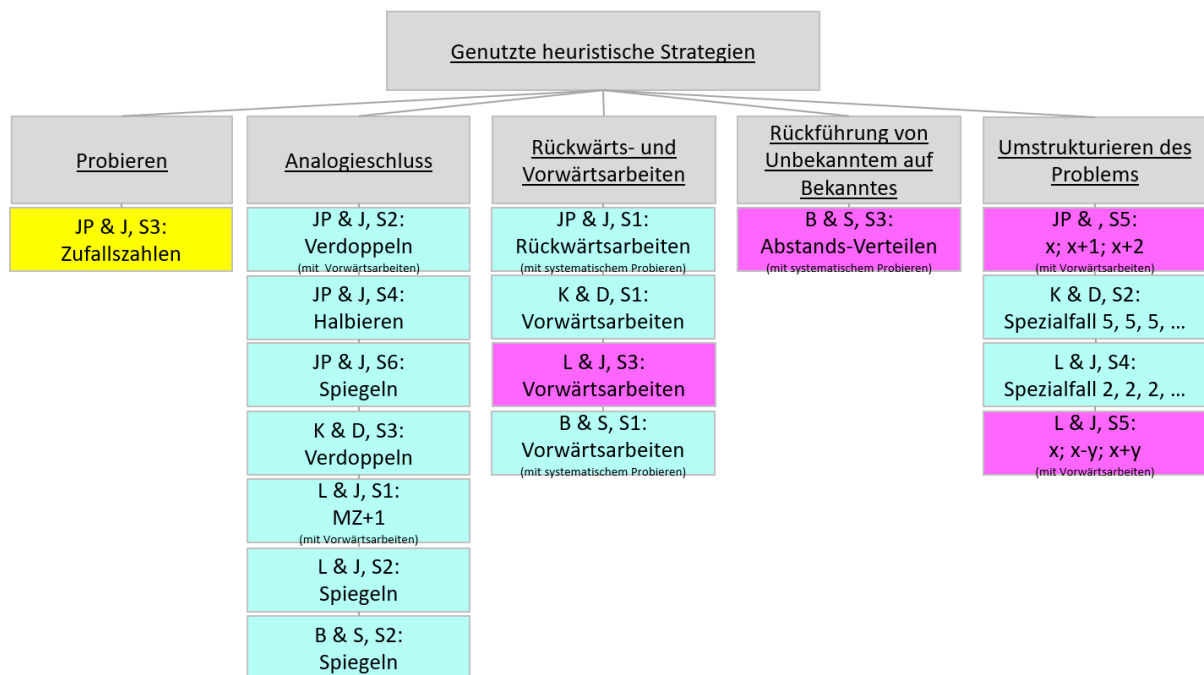


Abbildung 33: Die genutzten heuristischen Strategien (gelb = empirische, blau = empirisch-konstruktive und rot = strukturell-mathematische Argumente)

Am häufigsten wurde die Strategie der **Analogiebildung** genutzt, dies könnte daran liegen, dass die Interviewten die im Interview entdeckten Möglichkeiten der operativen Veränderung von Zauberquadraten zum Erzeugen neuer Zauberquadrate und damit zum Finden einer Lösung für das vorliegende Problem in Aufgabe 3 nutzen (I1 S2, I1 S4, I2 S3). Ferner kann dies auch damit begründet werden, dass die Interviewten aus ihrem Erfahrungswissen der Schulzeit analoge Strategien wie etwa das Spiegeln (I1 S6, I3 S2, I4 S2) nutzen. Die heuristischen Strategien des **(systematischen) Probierens** (I1 S3) und der **Rückführung von Unbekanntem auf Bekanntes** (I4 S3) wurden jeweils nur einmal verwendet. Das seltene Auftreten des **(systematischen) Probierens** könnte damit zu begründen sein, dass die Interviewten darauf verzichten wollten, eine probierend-explorative Strategie zu verwenden, deren Anwendung viele Versuche benötigen würde beziehungsweise könnte, um das Problem zu lösen. JP und J,

die diese Strategie in I1 S3 verwenden, deuten in diese Richtung, da JP in der vorherigen Sequenz in I1 S2 die Idee von J „wir könntens machen wie in Aufgabe 2.3, irgende Zahl oben links in die Ecke“ (3) ablehnt, da „ja, aber ich will jetzt nicht nochmal alles durchrechnen, ich würds eher machen wie bei einer anderen Aufgabe 2, dass ich alles zum Beispiel jede Zahl um zwei erhöhe“ (4). JP zieht es vor, anders zu arbeiten als mit einer Zahl vorwärtsarbeitend zu einer Lösung zu kommen, da dies Zeit und Rechenaufwand durch viele Rechenschritte benötigen würde. Ein **systematisches Probieren** würde noch mehr Aufwand im Sinne JPs benötigen als das hier thematisierte **Vorwärtsarbeiten** und wird deshalb vermutlich von ihnen wie anderen Interviewten nicht als geeignete heuristische Strategie angesehen und konsekutiv nicht gewählt. Es wäre interessant zu erforschen, ob Schülerinnen und Schüler ähnliche heuristische Strategien verwenden oder häufiger (**systematisch**) **probieren** wie die hier interviewten Erwachsenen. Die seltene Verwendung der heuristischen Strategie der **Rückführung von Unbekanntem auf Bekanntes** erscheint kontraintuitiv, da Problemlösende „immer auf bereits Verstandenes aufbauen möchte(n)“⁸⁷. Dabei setzt diese Strategie, zunächst auf eine Vereinfachung der Problemaufgabe, sodass mittels Umstrukturierung, Erweiterung oder Reduktion von Informationen die Problemaufgabe in ihrer neuen Form leichter zu bearbeiten ist.⁸⁸ Dies liegt vermutlich bei der vorliegenden Aufgabe nicht nahe, da die Aufgabe an sich schon in Bezug auf gegebene Informationen stark reduziert ist, weswegen sie nur in einer Sequenz (I4 S3) genutzt wurde, indem die Informationen über eine strukturelle Erkenntnis zur Zauberzahl zur Vereinfachung genutzt wurden.

Es zeigte sich, dass bis auf Interview 3, die Strategie des **Vorwärts-** beziehungsweise **Rückwärtsarbeitens** zuerst verwendet wurde und erst anschließend an diese Strategie andere strategische Vorgehensweisen zur Lösung des Problems exploriert wurden. Dies könnte damit zu erklären sein, dass die Interviewten im Verlauf des Interviews, also dem ersten Kennenlernen des Aufgabenformats, zunächst unvollständige Zauberquadrate gelöst haben, was die heuristischen Strategien des **Vorwärts-** beziehungsweise **Rückwärtsarbeitens** an sich innehatte und dies dann bei Aufgabe 3 folglich nahelegte. So konnten die Interviewten den Prozess des **Vorwärts-** beziehungsweise **Rückwärtsarbeitens**, nach Festlegung einer selbst gewählten Mittel- oder Zauberzahl, angelehnt an (beziehungsweise nahegelegt durch) die gesammelten Erfahrungen fortführen.

⁸⁷ KIPMAN (2020), Problemlösen, 31.

⁸⁸ Vgl. ebd., 31.

Ferner war zu beobachten, dass heuristische Strategien, wie sie BRUDER / COLLET (2011) und KIPMAN (2020) unterscheiden, nicht linear verwendet, sondern häufig parallel beziehungsweise eine Strategie als Teil-Strategie einer anderen verwendet wurde (I1 S2, I3 S1, I4 S2). In diesen Sequenzen wurde innerhalb der Strategie der **Analogiebildung** ebenfalls die Strategie des **Vorwärtsarbeitens** beobachtet. Ebendies gilt auch für die Strategie des **Vorwärts-** beziehungsweise **Rückwärtsarbeitens**, da hier Ansätze des **systematischen Probierens** gefunden werden konnten. Dies könnte mit dem Charakter der Aufgabe zu begründen sein, da selbst mit strukturellem Wissen ein gewisses Probieren nur bei Kenntnis der algebraischen Struktur (vergleiche Kapitel 2.3) zu vermeiden wäre. Bezogen auf die Verwendung heuristischer Strategien müsste also betont werden, dass Strategien auch kombiniert genutzt werden können, um zu einer Lösung eines vorliegenden Problems zu gelangen. Dies lässt sich mit den Erkenntnissen von ROTT (2013/14) zusammenführen: ROTT betont, aufbauend auf den Analysen einer Serie von Problemlöse-Aufgaben, dass Problemlöseprozesse nicht nur linear, sondern auch nicht-linear, zyklisch ablaufen können.⁸⁹ In diesem Sinne können dann mehrere heuristische Strategien parallel verwendet werden (BRUDER / COLLET (2011) und KIPMAN (2020) nennen hier die **Kombination von Vorwärts-** beziehungsweise **Rückwärtsarbeiten**, führen dies aber für eine Kombination der anderen heuristischen Strategien nicht als Möglichkeit auf) oder in Kombination (es konnte in dieser Untersuchung gezeigt werden, dass etwa das **Vorwärts-** beziehungsweise **Rückwärtsarbeiten** oft auch den Charakter des **systematischen Probierens** innehatte, etwa in I4 S1).

Die genutzten Strategien wurden vornehmlich nach SCHWARZKOPF (2003) mit **empirisch-konstruktiven Argumenten** begründet. Kaum kam dabei das **empirische Argument** vor (I1 S3), was daran liegen könnte, dass die Interviewten versuchten, ohne viele Rechenschritte zu einer Lösung zu kommen und daher die heuristische Strategie der **Analogiebildung** verwendeten, die dann zumeist **empirisch-konstruktiv** begründet wurde. Diese Art des Arguments liegt vermutlich bei **Analogiebildungen** nahe, da sich die Interviewten dann in der argumentativen Begründung der Nutzbarkeit ihrer gewählten heuristischen Strategie nicht im Sinne des **empirischen Arguments** auf die rechnerische Prüfung, ob ein Zauberquadrat vorliegt, stützten, sondern im Sinne des **empirisch-konstruktiven Arguments** prüften, ob das Phänomen bei **Analogiebildungen** wie etwa dem Spiegeln (I1 S6, I3 S2, I4 S2) oder Halbieren, Verdoppeln oder Addieren (I1 S2, I2 S3, I3 S2) weiterhin erhalten bleibt. Dies ist eventuell deswegen naheliegend, da die Interviewten im Verlauf des Interviews Wissen zur operativen

⁸⁹ Vgl. ROTT (2014), Problembearbeitungsprozesse, 272ff.

Veränderung von Zauberquadraten gesammelt haben und dieses dann bei ihrem strategischen Problemlöseprozess anwendeten. Auch das **strukturell-mathematische Argument** wurde genutzt (I3 S3, I3 S5, I4 S3), da die Interviewten zu ergründen versuchten, wie das Phänomen der Zauberquadrate strukturell (etwa mittels Variablen in I1 S5 oder I3 S5) erzeugt werden kann.

4.5.2 Theoretische Erkenntnisse der Untersuchung

Um in der vorliegenden Untersuchung die von den Interviewten genutzten heuristischen Strategien zu erfassen, wurden die Modelle von BRUDER / COLLET (2011) und KIPMAN (2020) verwendet. Hierbei zeigte sich, dass sich diese Klassifikationen heuristischer Strategien gut eignen, um die vorliegenden Interviewsequenzen zu analysieren. Es konnten in der Modifikation KIPMANS (2020) der Klassifikation nach BRUDER / COLLET (2011) alle der 5 Typen heuristischer Strategien gefunden werden. Dabei zeigte sich jedoch, dass die von KIPMAN (2020) vorgenommene Veränderung des inhaltlichen Herkunftsbereichs der Aufgaben bei denen das **systematische Probieren** angewandt werden kann als weniger geeignet: Während BRUDER / COLLET (2011) Möglichkeiten für das **systematische Probieren** „in nahezu allen Themenbereichen“⁹⁰ sehen, verortet KIPMAN (2020) diese Strategie „vor allem bei Kombinationsaufgaben (zum Einsatz), bei denen es darauf ankommt, dass man eine günstige Reihenfolge festlegt und somit garantiert, dass man alle möglichen Fälle erhält“.⁹¹ Diese Verortung der Strategie ist erscheint nicht geeignet, da die heuristische Strategie des **systematischen Probierens** in der vorliegenden Untersuchung gefunden wurde, die mit dem Inhaltsbereich der Zauberquadrate jedoch nicht das Themengebiet der Kombinationsaufgaben explorierte. Dennoch wurden von den Interviewten Möglichkeiten im Sinne des **systematischen Probierens** gewählt, um etwa mittels ihres Wissens zu dem Abstand von der Mittelzahl zu ihren Randzahlen durch eine günstige Verteilung der Abstände Zauberquadrate zu erzeugen.

Ferner zeigte die vorliegende Untersuchung, dass sich Kombinationen verschiedener heuristischer Strategien finden: BRUDER / COLLET (2011) und KIPMAN (2020) denken in diese Richtung, indem sie eine **Mischform** des **Vorwärts-** und **Rückwärtsarbeitens** beschreiben. Aber es finden sich neben dieser in der Literatur beschriebenen auch andere Mischformen, wie etwa aus dem **Rückwärtsarbeiten** mit dem untergeordnet auftauchenden **systematischen Probieren** in I1 S1, dem **Analogieschluss** mit untergeordnetem **Vorwärtsarbeiten** in I1 S2, I2

⁹⁰ BRUDER / COLLET (2011), Problemlösen, 70.

⁹¹ KIPMAN (2020), Problemlösen, 29.

S3 und I3 S1, dem **Vorwärtsarbeiten** mit untergeordnetem **systematischem Probieren** in I4 S1, dem **Umstrukturieren eines Problems** mit untergeordnetem **systematischem Probieren** in I4 S3 und anderen. Dies betont den Aspekt des nicht-Linearen und Zyklischen des Problemlöseprozesses. Diese Erkenntnisse lassen sich mit den Ergebnissen ROTTs (2013/14) verbinden, da hier ebenfalls der Fokus auf Problemlöseprozessen mit linearen und nicht-linearen, zyklischen Elementen liegt. Somit wären die Modelle KIPMANS (2020) und BRUDER / COLLETS (2011) dahingehend zu modifizieren, dass der Aspekt des Nicht-Linearen und damit die Nutzung von mehreren parallel oder hierarchisch genutzten heuristischen Strategien betont wird.

Weiter konnte in der Untersuchung beobachtet werden, dass die Strategie des **systematischen Probierens** nach BRUDER / COLLET (2011) und KIPMAN (2020) häufig Verwendung fand (zum Beispiel in I1 S1, I1 S3, I4 S1, I4 S3 und anderen), diese Strategie aber nicht genau wie in der Literatur dargestellt genutzt wurde: In I1 S3 nutzt JP das **Ausprobieren** mit Zufallszahlen bewusst als Strategie zum Erzeugen eines Zauberquadrates und damit zur strategischen Problemlösung. BRUDER / COLLET (2011) beschreiben dies als „diffuses Herumprobieren“, das im nächsten Schritt in ein **systematisches Probieren** zur Lösung des Problems übergeht, wobei sie das reine Problemlösen noch nicht zu den heuristischen Strategien zählen (wohl aber das **systematische Probieren**).⁹² JP benutzt jedoch das **Probieren**, anders als in der Literatur dargestellt, bewusst als Strategie auf der nicht-systematischen Ebene, denn JP beschreibt und begründet, dass auch Zufallszahlen mit einer gewissen Anzahl an Versuchen ein funktionierendes Zauberquadrat liefern können und löst damit strategisch das vorliegende Problem. Somit kann auch das rein explorativ-ungerichtete Probieren, hier dargestellt durch Zufallszahlen, zu einer validen Problemlösung führen und stellt damit eine Problemlösestrategie dar. Somit zeigt diese Untersuchung, dass die Klassifikation nach BRUDER / COLLET (2011) und KIPMAN (2020) dahingehend modifiziert werden könnte, dass die heuristische Strategie des Probierens in ein **explorativ-ungerichtetes** (wie hier durch JP dargestellt, also ein ausprobierendes, entdeckendes Probieren, das noch kein System verfolgt aber welches auch Lösungsideen oder -hinweise liefern kann) und ein **systematisches Probieren** (wie bei BRUDER / COLLET (2011) und KIPMAN (2020) beschrieben) unterteilt werden kann. Eine mögliche dritte Art des Probierens könnte mit dem **hypothesen-testenden Probieren** (anknüpfend an die Forschungen von SÖHLING (2017), Problemlösen, 21ff, 40ff, in

⁹² Vgl. BRUDER / COLLET (2011), Problemlösen, 69f. Hier beschreiben die Autoren das Probieren als „Primitivtechnologie“ des Problemlösens, das erst aufgewertet zum systematischen Probieren zu den Problemlösestrategien zählt.

denen der Charakter des Testens von Hypothesen beim Problemlösen betont wird und verschiedene Arten des **Probierens** definiert werden) angenommen werden.⁹³

Somit kann folgende Kategorisierung heuristischer Strategien zur Beschreibung strategischer Problemlöseprozesse angenommen werden:

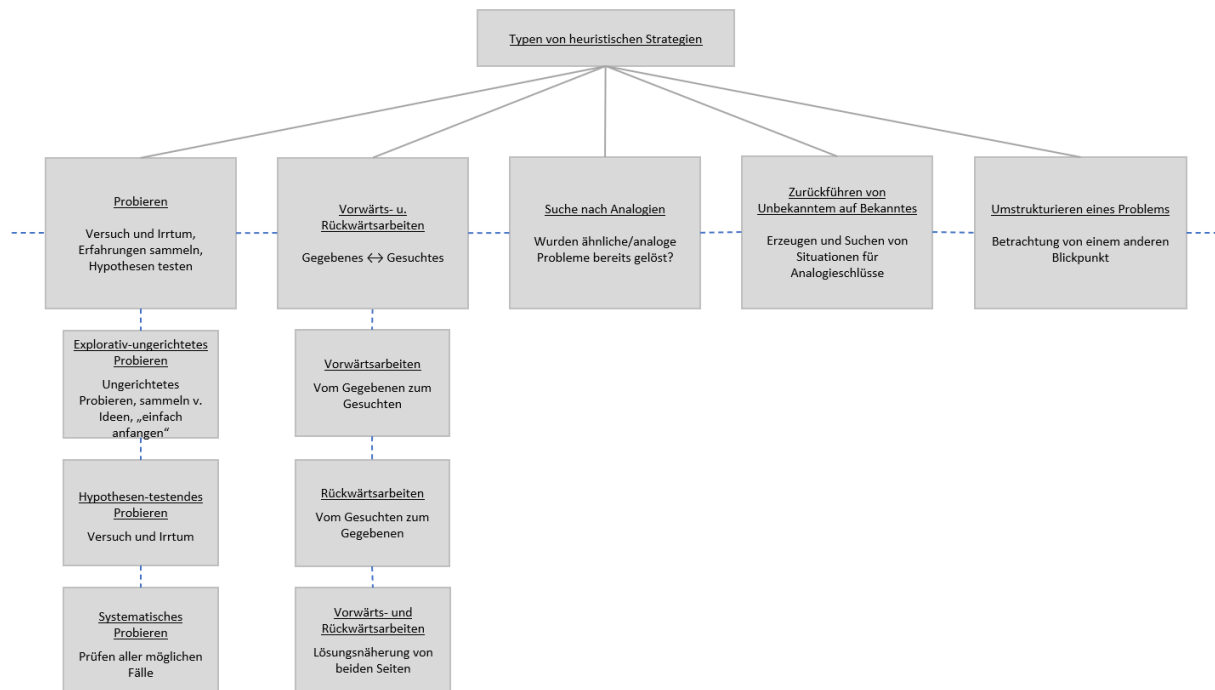


Abbildung 34: Eigene Klassifikation heuristischer Strategien

Die blauen Markierungen dienen dazu, wie in Kapitel 4.5.2 angemerkt, den Übergang zwischen einzelnen Strategien oder die kombinierte Nutzung mehrerer heuristischer Strategien zur

⁹³ SÖHLING (2017), Problemlösen, 41-44 unterscheidet vier Arten des Probierens: 1. Unsystematisches Probieren, also willkürliches, wildes oder zufälliges Probieren, bei dem aus der Menge mit Werten oder Operationen zufällig Werte oder Operationen ausgewählt und daraufhin überprüft werden, ob diese als (Teil-) Lösung infrage kommen oder zu einer Lösung führen. 2. Systematisches Probieren, bei dem die Menge der Werte beziehungsweise Operationen systematisch untersucht wird und im Sinne einer Fallunterscheidung systematisch jeder Wert beziehungsweise jede Operation geprüft wird, bis die gewünschte Lösung gefunden wird. 3. Eingrenzendes Probieren, bei dem – anders als beim systematischen Probieren – nicht alle Elemente der Werte- / Operationsmenge geprüft werden, sondern nur bestimmte Werte beziehungsweise Operationen geprüft werden (die Prüfungsmenge wird dabei etwa aufgrund von Vorüberlegungen bezogen auf die Problemstellung oder selbst generierte Zwischenresultate eingegrenzt). 4. Zielgerichtetes Probieren (auch Probieren in Richtung der Lösung) bei dem als Spezialfall des eingrenzenden Probierens auch hier beeinflussende Vorüberlegungen oder die bisher erzielten Zwischenresultate die Auswahl neuer Werte beziehungsweise Operationen beeinflussen. Jedoch werden die erzielten Zwischenresultate stets mit der intendierten Lösung abgeglichen und neue Werte beziehungsweise Operationen so ausgewählt, dass diese näher an der gewünschten Lösung liegen. Die Kategorisierung SÖHLINGS lässt sich mit der in Kapitel 4.5.2 vorgebrachten eigenen Klassifikation der Arten des Probierens verbinden, da SÖHLINGS unsystematisches Probieren mit dem hier vorgebrachten explorativ-ungerichteten Probieren kompatibel ist (in beiden werden durch entdeckendes Handeln und ohne systematische (Vor-)Annahmen Erfahrungen und Erfahrungswerte generiert), SÖHLINGS systematisches Probieren dem hier dargestellten systematischen Probieren entspricht (in beiden wird systematisch geprüft bis eine Lösung des Problems gefunden wird) und SÖHLINGS eingrenzendes und zielgerichtetes Probieren dem hypothesen-testenden Probieren (in beiden werden Annahmen beziehungsweise Erkenntnisse generiert, die näher an die Problemlösung führen) entspricht.

Lösung eines Problems zu betonen. Die verschiedenen Ausprägungen der heuristischen Strategie des **Probierens (explorativ-ungerichtetes Probieren, hypothesen-testendes Probieren und systematisches Probieren)** sind dabei nicht hierarchisch, sondern als gleichwertige Strategien, zu verstehen, da sie alle dabei helfen können, Erkenntnisse und Einsichten im Prozess des strategischen Problemlösens zu generieren (diese gesammelten Erkenntnisse und Erfahrungen können weiter dazu führen, dass Problemlösende andere Formen heuristischer Strategien verwenden, um das Problem zu lösen).⁹⁴ Gleiches gilt ebenso für die verschiedenen Ausprägungen der heuristischen Strategien des **Vorwärts- und Rückwärtsarbeitens (Vorwärtsarbeiten, Rückwärtsarbeiten und deren Mischform)**.

5. Abschließende Bemerkungen

Die Lernumgebung der Zauberquadrate eignete sich retrospektiv sehr gut, um Erwachsene mathematisch argumentativ und kommunizierend tätig werden zu lassen, indem sie ihre Lösungen des Problemlöseprozesses wie auch bezogen auf die Zusammenhänge von Mittelzahl und Zauberzahl oder den Aufbau der Zauberquadrate verbalisieren, beschreiben und auf verschiedene Weisen begründen konnten.⁹⁵ Ferner eignete sie sich, um Erwachsene verschiedene heuristische Strategien zum Erzeugen neuer Zauberquadrate explorieren und begründen zu lassen, was sich durch die Vielzahl unterschiedlicher Strategien und unterschiedlicher Arten von Argumenten aufzeigen lässt.

Die Durchführung und Aufnahme der Interviews mittels Videokonferenz eignete sich trotz gelegentlicher Tonaussetzer sehr gut, da die Interviewten zusätzlich vor Ort ihr Interview selbst aufzeichneten und sich so trotz kurzer Tonaussetzer in der Videokonferenz keine negativen Konsequenzen für die Durchführung dieser ergab. Auch die rein digitale (aus Gründen der Hygiene und Sicherheit gebotene) Durchführung der Interviews mit den interviewten Erwachsenen hatte vermutlich wenig bis keinen Einfluss auf die Ergebnisse der Untersuchung im Vergleich zu in persona durchgeführten Interviews.

Die gewählten Forschungs- und Auswertungsmethoden eigneten sich insgesamt gut zur Analyse der gesammelten Interview-Daten. Die Argumentationsanalyse nach SCHWARZKOPF (2000a/2000b/2003) eignete sich gut als Methodik, da die Argumente hiermit adäquat dargestellt und analysiert werden konnten. Die Kategorisierungen heuristischer Strategien nach BRUDER / COLLET (2011) und KIPMAN (2020) waren ebenfalls (bis auf die Anmerkungen in

⁹⁴ HEINRICH (2001), Wechseln, 21ff. kommt zu einem ähnlichen Ergebnis, indem der Wechsel von (nicht erfolgreichen) Lösungsanläufen als bedeutungsvoller Vorgang beim Problemlösen beschrieben wird.

⁹⁵ Zu einem ähnlichen Ergebnis kommt auch PAPADOPOULOU (2016), Zauberquadrate, 26-30, wo dies für die dritte und vierte Klassenstufe beschrieben wird.

Kapitel 4.5) hilfreiche theoretische Werkzeuge, da alle vorgebrachten heuristischen Strategien erfasst und beschrieben werden konnten.

Es wäre in weiteren Arbeiten interessant zu prüfen, ob und inwiefern sich die Art der von Erwachsenen genutzten heuristischen Strategien und Begründungen der genutzten Strategien von denen von Schülerinnen und Schülern genutzten heuristischen Strategien und deren Begründungen unterscheiden. Wie bereits angedeutet, könnten Schülerinnen und Schüler andere Strategietypen verwenden als Erwachsene, etwa häufigeres (**systematisches**) **Probieren** oder ihre Strategien mit anderen Arten von Argumenten begründen. Ebenso wäre es interessant zu prüfen, inwieweit sich die hier getroffene Modifikation der Kategorisierungen heuristischer Strategien nach BRUDER / COLLET (2011), KIPMAN (2020) und SÖHLING (2017) in anderen Inhaltsbereichen eignet.

Literaturverzeichnis

BEHRENDTS, Erhard, Mathematik und Zaubern. Ein Einstieg für Mathematiker, Springer Verlag, Wiesbaden 2017

BRUDER, Regina, Lernen, geeignete Fragen zu stellen. Heuristik im Mathematikunterricht, in: Mathematik lehren, Friedrich Verlag, Heft 115, Hannover 2002, 4-8

BRUDER, Regina / COLLET, Christina, Problemlösen lernen im Mathematikunterricht, Cornelsen Scriptor Verlag, Berlin 2011

BRUDER, Regina / HEINRICH, Frank / BAUER, Christina (geb. COLLET), Problemlösen lernen, in: Bruder, Regina / HEFENDEHL-HEBEKER, Lisa / SCHMIDT-THIEME, Barbara / WEIGAND, Hans-Georg (Hrsg.), Handbuch der Mathematikdidaktik, Springer Spektrum Verlag, Berlin 2015, 279-329

BRUDER, Regina, Survey on the State-of-the-Art, in: LILJEDAHL, Peter / SANTOS-TRIGO, Manuel / MALASPINA, Uldarico / BRUDER, Regina, Problem Solving in Mathematics Education, Springer Open Verlag, o. O. 2016, 2-6

CRAMER, Julia, „Ausnahmen bestätigen die Regel!“. Die Rolle von Alltagsargumentationen bei der Bearbeitung mathematischer Aufgaben, in: Beiträge zum Mathematikunterricht 2011. 45. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 21. Bis 25. Februar 2011 in Freiburg, WTM-Verlag, Freiburg 2011, 187-190

COLLET, Christina, Problemlösekompetenzen in Verbindung mit Selbstregulation fördern. Wirkungsanalysen von Lehrerfortbildungen, Waxmann Verlag, Münster 2009,

COMBE, Arno / GEBHARD, Ulrich, Irritation, Erfahrung und Verstehen, in: STING, Wolfgang (Hrsg.) et al., Irritation als Chance, Bildung fachdidaktisch denken, Springer VS Verlag, Wiesbaden 2019, 133-158

GREEFRATH, Gilbert, Anwendungen und Modellierungen im Mathematikunterricht. Didaktische Perspektiven zum Sachrechnen in der Sekundarstufe, Springer Spektrum Verlag, Berlin 2018

HARTKENS, Judit, Mathematische Reflexion in argumentativ geprägten Unterrichtsgesprächen. Eine empirisch-interpretative Untersuchung im 3. und 4. Grundschuljahr, Springer Spektrum Verlag, Wiesbaden 2018

HÄRING, Gudrun, Was ist Problemlösen. Eine faszinierende Seite der Mathematik, in: Grundschule Mathematik 50, Friedrich Verlag, Hannover 2016, 2-3

HEINRICH, Frank, Wechseln von Lösungsanläufen als eine bedeutungsvolle heuristische Vorgehensweise beim Lösen mathematischer Probleme, in: Der Mathematikunterricht 6, Friedrich Verlag, Hannover 2001, 19-33

HENN, Hans-Wolfgang / FILLER, Andreas, Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra. Algebraisch verstehen – Geometrisch veranschaulichen und anwenden, Springer Verlag, Berlin 2015

HEROLD-BLASIUS, Raja / HOLZÄPFEL, Lars / ROTT, Benjamin, Problemlösestrategien lehren lernen. Wo die Praxis Probleme beim Problemlösen sieht, in: BÜCHTER, Andreas / GLADE, Matthias / HEROLD-BLASIUS, Raja / KLINGER, Marcel / SCHACHT, Florian / SCHERER, Petra (Hrsg.), Vielfältige Zugänge zum Mathematikunterricht. Konzepte und Beispiele aus Forschung und Praxis, Springer Spektrum Verlag, Wiesbaden 2019, 295-310

KÄPNICK, Friedhelm / BENÖLKEN, Ralf, Mathematiklernen in der Grundschule, Springer Spektrum Verlag, Heidelberg ²2020

KIPMAN, Ulrike, Problemlösen. Begriff, Strategien, Einflussgrößen, Unterricht, (häusliche) Förderung, Springer Gabler Verlag, Wiesbaden ²2020

KNIPPING, Christine, Beweisprozesse in der Unterrichtspraxis. Vergleichende Analysen von Mathematikunterricht in Deutschland und Frankreich, Franzbecker Verlag, Hildesheim 2003

KRUMMHEUER, Götz, Zum Begriff der „Argumentation“ im Rahmen einer Interaktionstheorie des Lernens und Lehrens von Mathematik, in: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 97/1, Berlin 1997, 1-11

(abgekürzt als KRUMMHEUER 1997a)

KRUMMHEUER, Götz, Narrativität und Lernen. Mikrosoziologische Studien zur sozialen Konstitution schulischen Lernens, Deutscher Studien Verlag, Weinheim 1997

(abgekürzt als KRUMMHEUER 1997b)

KRUMMHEUER, Götz / NAUJOK, Natalie, Grundlagen und Beispiele interpretativer Unterrichtsforschung, Leske und Budrich Verlag, Opladen 1999

KRUMMHEUER, Götz / BRANDT, Birgit, Paraphrase und Traduktion. Partizipationstheoretische Elemente einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens in der Grundschule, Beltz Verlag, Weinheim 2001

KRUMMHEUER, Götz, Argumentationsanalyse in der mathematikdidaktischen Unterrichtsforschung, in: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik Vol. 35 (6), Berlin 2003, 247-256

KRUMMHEUER, Götz / FETZER, Marei, Der Alltag im Mathematikunterricht. Beobachten, Verstehen, Gestalten, Spektrum Verlag, München 2005

KULTUSMINISTERKONFERENZ, Beschlüsse der Kultusministerkonferenz. Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. Beschluss vom 15.10.2004, Luchterhand Verlag, o.O. 2004

KUNSTELLER, Jessica, Ähnlichkeiten und ihre Bedeutung beim Entdecken und Begründen. Sprachphilosophische und mikrosoziologische Analysen von Mathematikunterricht, Springer Verlag, Wiesbaden 2018

LEUDERS, Timo, Problemlösen, in: LEUDERS, Timo (Hrsg.), Mathematik-Didaktik. Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II, Cornelsen Scriptor Verlag, Berlin ⁶2011, 119-147

LILJEDAHN, Peter, Creative Problem Solving, in: LILJEDAHN, Peter / SANTOS-TRIGO, Manuel / MALASPINA, Uldarico / BRUDER, Regina, Problem Solving in Mathematics Education, Springer Open Verlag, Cham 2016, 6-19

LINK, Frauke, Problemlöseprozesse selbstständigkeitsorientiert begleiten. Kontexte und Bedeutungen strategischer Lehrerinterventionen in der Sekundarstufe I, Vieweg und Teubner Verlag, Wiesbaden 2011

MALASPINA, Uldarico, An Overview for Further Progress, in: LILJEDAHN, Peter / SANTOS-TRIGO, Manuel / MALASPINA, Uldarico / BRUDER, Regina, Problem Solving in Mathematics Education, Springer Open Verlag, Cham 2016, 31-35

MAYER, Carolin, Zum algebraischen Gleichheitsverständnis von Grundschulkindern. Konstruktive und rekonstruktive Erforschung von Lernchancen, Springer Verlag, Wiesbaden 2019

- MEYER, Michael, Entdecken und Begründen im Mathematikunterricht. Von der Abduktion zum Argument, Franzbecker Verlag, Hildesheim 2007
- MILLER, Max, Kollektive Lernprozesse. Studien zur Grundlegung einer soziologischen Lerntheorie, Suhrkamp Verlag, Frankfurt am Main 1986
- MOTZER, Renate, Magische Quadrate von der 1. Klasse bis zur linearen Algebra, in: GREEFRATH, Gilbert (Hrsg.), Beiträge zum Mathematikunterricht, WTM-Verlag, Münster 2013, 672-675
- NIEDERSÄCHSISCHES KULTUSMINISTERIUM, Kerncurriculum für die Grundschule. Schuljahrgänge 1-4. Mathematik, Hannover 2017
- PAPADOPOULOU, Pelagia, Zauberquadrate. Entdeckungen beschreiben und Kommunizieren üben, in: Mathematik differenziert, Westermann Verlag, Heft 2, Braunschweig 2016, 26-30
- PÓLYA, George, Vom Lösen mathematischer Aufgaben. Einsicht und Entdeckung, Lernen und Lehren, Band I, Birkhäuser Verlag, Basel 1966
- PÓLYA, George, Schule des Denkens, Vom Lösen mathematischer Probleme, Narr Francke Attempo Verlag, Tübingen 2010
- PÖHLS-STÖWESAND, Arne, Magische Quadrate, in: Grundschule Mathematik, Friedrich Verlag, Heft 60, Hannover 2019, 37
- RASCH, Renate, Zur Arbeit mit problemhaltigen Textaufgaben in der Grundschule. Eine Studie zu Herangehensweisen von Grundschulkindern an anspruchsvolle Textaufgaben und Schlussfolgerungen für eine Unterrichtsgestaltung, die entsprechende Lösungsfähigkeiten fördert, Franzbecker Verlag, Hildesheim 2001
- ROTH, Nicole, Vorwärts-, rückwärts- oder neu strukturieren? Problemlösetechniken in Klasse 8, in: Mathematik lehren, Friedrich Verlag, Heft 115, Hannover 2002, 14-17
- ROTT, Benjamin, Mathematisches Problemlösen. Ergebnisse einer empirischen Studie, WTM-Verlag, Münster 2013
- ROTT, Benjamin, Mathematische Problembearbeitungsprozesse von Fünftklässlern. Entwicklung eines deskriptives Phasenmodells, in: Journal für Mathematik-Didaktik 35, Springer Verlag, Berlin 2014, 251-282

SANTOS-TRIGO, Manuel, Digital Technologies and Mathematical Problem Solving, in: LILJEDAHN, Peter / SANTOS-TRIGO, Manuel / MALASPINA, Uldarico / BRUDER, Regina, Problem Solving in Mathematics Education, Springer Open Verlag, Cham 2016, 19-31

SCHEMEL, Vanessa, Zauberquadrate entdecken, PIK AS 2010, online verfügbar unter www.pikas.uni-dortmund.de [letzter Zugriff am 28.02.2021]

SCHLÖDER, Mike, Magische Quadrate. Zahlenmuster erkennen, beschreiben und nutzen, in: Grundschule Mathematik, Friedrich Verlag, Heft 60, Hannover 2019, 12-15

SCHWARZ, Wolfgang, Problemlösen in der Mathematik. Ein heuristischer Werkzeugkasten, Springer Spektrum Verlag, Berlin 2018

SCHWARZKOPF, Ralph, Argumentation als interaktiver Prozeß, in: NEUBRAND, Michael (Hrsg.), Beiträge zum Mathematikunterricht. Vorträge auf der 34. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 28. Februar bis 3. März 2000 in Potsdam, Franzbecker Verlag, Hildesheim 2000, 587-590
(abgekürzt als SCHWARZKOPF 2000a)

SCHWARZKOPF, Ralph, Argumentationsprozesse im Mathematikunterricht. Theoretische Grundlagen und Fallstudien, Franzbecker Verlag, Hildesheim 2000

(abgekürzt als SCHWARZKOPF 2000b)

SCHWARZKOPF, Ralph, Argumentationsanalysen im Unterricht der frühen Jahrgangsstufen. Eigenständiges Schließen mit Ausnahmen, in: Journal für Mathematik-Didaktik 22 (3-4), Springer Verlag, Berlin 2001, 253-276

SCHWARZKOPF, Ralph, Begründungen und neues Wissen. Die Spanne zwischen empirischen und strukturellen Argumenten in mathematischen Lernprozessen der Grundschule, in: Journal für Mathematik-Didaktik 24 (3-4), Springer Verlag, Berlin 2003, 211-235

SCHWARZKOPF, Ralph, Argumentationsprozesse im Mathematikunterricht der Grundschule. Ein Einblick, in: WEISS, Günther (Hrsg.) et al., Fachlich argumentieren lernen. Didaktische Forschungen zur Argumentation in den Unterrichtsfächern, Münster 2015, 31-45

SCHWARZKOPF, Ralph, Produktive Kommunikationsanlässe im Mathematikunterricht der Grundschule. Zur lerntheoretischen Funktion des Argumentierens, in: STEINWEG, Anna Susanne (Hrsg.), Darstellen und Kommunizieren. Tagungsband des AK Grundschule in der GDM 2019, University of Bamberg Press, Bamberg 2019, 55-68

SCHWARZKOPF, Ralph / NÜHRENBÖRGER, Marcus, Argumentierendes Rechnen. Algebraische Lernchancen im Arithmetikunterricht der Grundschule, in: BRANDT, Birgit / TIEDEMANN, Kerstin (Hrsg.), Mathematiklernen aus interpretativer Perspektive I. Aktuelle Themen, Arbeiten und Fragen, Waxmann Verlag, Münster 2019, 15-35

STEINBRING, Heinz, Mathematische Bedeutung als eine soziale Konstruktion. Grundzüge der epistemologisch orientierten mathematischen Interaktionsforschung, in: Journal für Mathematik-Didaktik 21, Springer Verlag, Berlin 2000, 28-49

STENDER, Peter, Wirkungsvolle Lehrerinterventionsformen bei komplexen Modellierungsaufgaben, Springer Spektrum Verlag, Wiesbaden 2019

STENDER, Peter, Heuristische Strategien. Ein zentrales Instrument beim Betreuen von Schülerinnen und Schülern, die komplexe Modellierungsaufgaben bearbeiten, in: GRAFENHOFER, Irene / MAAß, Jürgen (Hrsg.), Neue Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht 6, Springer Spektrum Verlag, Wiesbaden 2019, 137-150

SÖHLING, Anna-Christin, Problemlösen und Mathematiklernen. Zum Nutzen des Probierens und des Irrtums, Springer Spektrum Verlag, Wiesbaden 2017

TOULMIN, Steven Edelston, Der Gebrauch von Argumenten, Scriptor Verlag, Kronberg 1975

TROPPER, Natalie, Strategisches Modellieren durch heuristische Lösungsbeispiele. Untersuchungen von Lösungsprozeduren und Strategiewissen zum mathematischen Modellierungsprozess, Springer Spektrum Verlag, Wiesbaden 2019

WINTER, Heinrich Wienand, Mathematikunterricht und Allgemeinbildung, in: Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, Nr. 61 1995, 37-46

WITTMAN, Erich Christian / MÜLLER, Gerhard Norbert, Das Zahlenbuch. Mathematik im 3. Schuljahr, Ernst Klett Verlag, Leipzig 2001

ZECH, Friedrich, Grundkurs Mathematikdidaktik. Theoretische und praktische Anleitungen für das Lehren und Lernen von Mathematik, Beltz Verlag, Weinheim ¹⁰2002

Anhang

- **Interviewleitfaden**

Lernumgebung zum Thema:

Argumentative und strategische Bearbeitungen an 3 × 3-Zauberquadraten

Beispiel:

6	11	4
5	7	9
10	3	8

Zauberzahl: 21

Aufgabe 1: Einführung in das Aufgabenformat: Zauberquadrate kennenlernen

Ziel: Die Interviewten sollen zunächst das Aufgabenformat Zauberquadrate kennenlernen und anschließend die Beziehungen der Zahlen eines Zauberquadrates beobachten, verbalisieren, erkunden und überprüfen.

Interview-Rahmung 1: Begrüßung der Interviewten
„Ich freue mich, dass ihr euch bereiterklärt habt, an dem Interview teilzunehmen.“ „Wenn euch mal bei einer Aufgabe (nicht sofort) etwas einfällt, ist das nicht schlimm.“ „Ihr könnt, wenn ihr Fragen habt, diese jederzeit gerne stellen und ich werde versuchen, euch zu helfen.“
Interview-Rahmung 2: Information der Interviewten über das Interview
Es werden Fragen der Interviewten beantwortet und allgemeine Informationen zum Ablauf des Interviews gegeben werden: Wie lange dauert das Interview? Wie funktioniert das mit dem Filmen? Wozu wird gefilmt? (...) Die Interviewten werden gebeten, im Verlauf des Interviews „laut zu denken“, damit die Auswertung nachher besser erfolgen kann. Auch Ideen, die vielleicht nicht funktionieren, sollen geäußert werden.

Aufgabe 1.1:

Einführung der Zauberquadrate und Beschäftigung mit ihrer Struktur

Der Interviewer erklärt das Thema des Interviews, Zauberquadrate, anhand eines Beispiels, das mitgebracht wurde. Dabei wird die Aufgabenvorschrift der Zauberquadrate erklärt und warum ein Zauberquadrat besonders ist. Dabei werden die relevanten Begriffe Zauberzahl, Mittelzahl, Randzahl und andere erklärt.

Aufgabe 1.2:

Produktive Irritation und Reparatur des Zauberquadrats

Material M1

Dann bekommen die beiden Interviewten jeweils ein eigenes Zauberquadrat vorgelegt und die Aufgabe einmal laut alle Diagonalen, Zeilen und Spalten nachzurechnen und die dadurch bestimmte Zauberzahl in das leere Feld „Zauberzahl“ einzutragen (siehe Materialanhang M1). Dabei werden die Interviewten zu der Erkenntnis gelangen, dass eines der Zauberquadrate (Zauberquadrat 1) ein Zauberquadrat ist, da es die gerade gehörten Bedingungen erfüllt und die Zauberzahl 18 ergibt, welche eingetragen wird. Das andere Zauberquadrat (Zauberquadrat 2) erfüllt diese Bedingungen nur teilweise: einige Diagonalen, Zeilen und Spalten ergeben die Zauberzahl 18, andere die Zauberzahl 20. Somit ist Zauberquadrat 2 (in dem jetzigen Zustand) kein Zauberquadrat. Durch diese produktive Irritation wird sich ein Gespräch anbahnen („Du hast da aber falsch gerechnet, wir haben doch das gleiche Zauberquadrat“, „Das kann ja nicht stimmen, da muss in allen Diagonalen, Zeilen und Spalten die gleiche Zauberzahl rauskommen“, ...). Die Interviewten werden die gerade gehörte Erklärung erneut an dem Zauberquadrat 2 überprüfen (wollen, intrinsische Motivation) und feststellen, dass Zauberquadrat 2 kein Zauberquadrat ist. Dies kann auf verschiedene Weise geschehen: a) durch Vergleich beider Zahlenquadrate miteinander („Die Zauberquadrate sind beide gleich bis auf die Zahl ganz unten links.“) oder b) durch Identifikation aller Diagonalen, Zeilen und Spalten in denen eine andere Zauberzahl als 18 herauskommt („In allen Diagonalen, Zeilen und Spalten, die die untere linke 9 enthalten kommt eine andere Zauberzahl, nämlich die 20 raus statt der 18.“). Durch diese produktive Irritation werden sie versuchen, das Zauberquadrat zu „reparieren“ (oder dies nach der Bitte durch den Interviewer machen). Dies kann durch den Vergleich der beiden Zauberquadrate erfolgen oder mathematisch begründet erfolgen. Die Begründung der Interviewten soll (falls nicht von ihnen selbst vorgebracht) erfragt werden.

Dann erfolgt der Übergang zu Aufgabe 2.

Aufgabe 2: Eine Serie von unvollständigen Zauberquadern vervollständigen

Ziel: Die Interviewten bearbeiten zwei operative Serien von unvollständigen Zauberquadern, sie sammeln, verbalisieren und begründen dabei strukturelle Zusammenhänge zwischen den einzelnen Zauberquadern einer Serie und gewinnen, beschreiben und begründen dabei strukturelle Erkenntnisse zum Aufbau der Zauberquadrate.

Aufgabe 2.1:

Bearbeitung einer Serie unvollständiger Zauberquadrate (1/2)

M2

Die Interviewten lösen eine operative Serie von Zauberquadern, die aus unterschiedlichen Typen unvollständiger Zauberquadrate besteht (M2). Dabei wird an das erworbene arithmetische und strukturelle Wissen der Interviewten angeknüpft und dieses erweitert, indem sie die Serie von Zauberquadern lösen. Dabei können die Zauberquadrate auf unterschiedliche Weisen gelöst werden, wie etwa systematisches Probieren, vorwärts- oder rückwärtsarbeiten oder das Erkennen dem der operativen Serie zugrundeliegenden arithmetischen beziehungsweise strukturellen Prinzips (Multiplikation aller Felder des Zauberquadrats mit dem Faktor 2). Das Vorgehen der Interviewten soll von diesen verbalisiert und begründet werden.

Weiter sollen die Interviewten dann – entweder durch eigene Beobachtung oder durch Entdeckung nach dem Hinweis „vergleicht einmal alle Zauberquadrate in der Reihe miteinander, was fällt euch auf?“ – mit den gewonnenen Erkenntnissen das imaginierte vierte und fünfte Zauberquadrat der operativen Serie beschreiben und die Zauberzahl nennen, ohne die Zauberquadrate notieren zu müssen und ihren Gedankenprozess verbalisieren und begründen. Es wird dabei Eigenschaft 3 erklärt und begründet.

Es soll dann – falls nicht von den Interviewten selbst vorgebracht – auf die Eigenschaft 1 (die Zauberzahl ist das Dreifache der Mittelzahl) fokussiert werden: Diese soll entdeckt, beschrieben und (auf eine oder mehrere Weisen) begründet werden. Dazu können die Interviewten gebeten werden, innerhalb jedes Zauberquadrates die Mittel- mit der Zauberzahl zu vergleichen.

An dieser Stelle kann dann – falls von den Interviewten nicht selbst vorgebracht – die Serie der Zauberquadrate betrachtet werden und der Beobachtungsauftrag („Vergleicht bitte

einmal innerhalb eines Zauberquadrates den „Abstand“ beziehungsweise Betrag von der Mittelzahl zu den beiden jeweiligen Randzahlen (also immer innerhalb einer Diagonalen / Zeile oder Spalte, die an diese Mittelzahl grenzen.“). Dabei soll verbalisiert und auf verschiedene Weisen (etwa arithmetisch, mit Beispielen, strukturell (Idee: Plättchen verteilen) oder algebraisch) begründet werden, warum strukturell jedes Zauberquadrat beziehungsweise die Mittelzahl jedes Zauberquadrates zu den beiden Randzahlen in jeder Diagonalen, Zeile und Spalte (die jeweils die Mittelzahl enthalten) der Betrag der Differenz von der Mittelzahl zu den beiden Randzahlen gleich ist (Teil von Eigenschaft 1). Dies bietet sich an dieser Stelle an, da die Interviewten den Zusammenhang entdeckt haben, dass die Zauberzahl das Dreifache der Mittelzahl ist.

Aufgabe 2.2:

Bearbeitung einer Serie unvollständiger Zauberquadrate (2/2)

M3

Analog zu Aufgabe 2.1 wird eine weitere operative Serie von Zauberquadraten von den Interviewten bearbeitet, wobei sie ihre Lösungen verbalisieren und begründen sollen (M3). Hierbei können ihnen die in Aufgabe 2.1 gesammelten Erkenntnisse behilflich sein.

Weiter sollen sie ohne zu Zeichnen die Zauberzahl des imaginierten vierten und fünften Zauberquadrates nennen und dabei ihr Ergebnis verbalisieren und begründen.

Aufgabe 2.3:

Besprechung zu nicht-eindeutig lösbaren Zauberquadraten

M4

Dann wird den Interviewten ein nicht eindeutig lösbares Zauberquadrat gegeben und die Interviewten werden gebeten, dieses zu lösen (M4). Sollten sie eine Lösung finden, werden sie gefragt, ob das die einzige mögliche Lösung für ein solches Zauberquadrat sei. Dabei soll ein Gespräch darüber entstehen, wann ein Zauberquadrat nicht-eindeutig lösbar ist und wann es mehrere Lösungen gibt. Eventuell werden die Interviewten versuchen, mehrere Lösungen zu finden. Hier ist dann ein fließender Übergang zu Aufgabe 3 möglich.

Aufgabe 3: Strategien beim Erzeugen von Zauberquadraten verbalisieren und begründen

Ziel: Die Interviewten erstellen Zauberquadrate mit einer beliebigen Zauberzahl wobei sie dabei ihr Vorgehen beziehungsweise ihre genutzten Strategien verbalisieren und begründen.

<p>Aufgabe 3: Verbalisieren und Begründen heuristischer Strategien zur Erzeugung von Zauberquadraten M5</p>
<p>Die Interviewten sollen verschiedene eigene Zauberquadrate (M5) mit einer Zauberzahl ihrer Wahl erzeugen, dabei sollen sie ihr Vorgehen erklären und begründen, warum dieses Vorgehen funktioniert. Wenn ihr Vorgehen zu keinem Ergebnis führt, kann besprochen werden, woran dies liegt (funktioniert die gewählte Strategie nicht oder ist es nur aufgrund des gewählten Zahlenbeispiels schwierig und die gewählte Strategie würde bei einem anderen – und vielleicht leichter lösbaren – Zahlenbeispiel funktionieren).</p> <p>Dabei sollen die Interviewten möglichst viel Freiraum haben und unterschiedliche Strategien nutzen können, um eigene Zauberquadrate erzeugen zu können. Falls die Interviewten Probleme haben, kann zunächst ein Gespräch über den Aufbau der Zauberquadrate initiiert werden, damit die Interviewten eventuell Ideen bekommen, wie sie an die Aufgabe herangehen können. Sollten die Interviewten bereits im Interview an anderen Stellen passende Ideen zum Erzeugen von Zauberquadraten geäußert haben, kann auch auf diese rekurriert werden.</p>
<p>Interview-Rahmung 3: Abschluss des Interviews</p>
<p>Den Interviewten wird für ihre Teilnahme an dem Interview gedankt. Das Interview endet.</p>

Anmerkungen:

Die Zauberquadrate werden den Interviewten laminiert ausgegeben und mittels wasserlöslichem Folienstift beschrieben, damit diese wiederverwendet werden können und die Interviewten diese leicht selbst reinigen können, wenn sie Geschriebenes entfernen wollen. Ferner wird sich wegen der kurzen Interview-Situation und dem Kennenlernen des Aufgabenformats auf 3 × 3-Zauberquadrate fokussiert.

Für die Durchführung der Interviews werden etwa 20-30 Minuten geplant, diese können aber aufgrund der hauptsächlich digitalen Durchführung auch etwas länger dauern. Falls die Interviewten mehr Zeit benötigen, kann diese gewährt werden.

- **Material zum Interview**

M1: Material aus Aufgabe 1.2

9	4	5
2	6	10
7	8	3

Zauberzahl: _____

9	4	5
2	6	10
9	8	3

Zauberzahl: _____

M2: Material aus Aufgabe 2.1

3	5	7

Zauberzahl: _____

8		
	10	
		12

Zauberzahl: _____

32	4	24

Zauberzahl: 60

M3: Material aus Aufgabe 2.2

	5	
		6

Zauberzahl: _____

6		
		8

Zauberzahl: _____

	9	

Zauberzahl: _____

M4: Material aus Aufgabe 2.3

20		

Zauberzahl: _____

M5: Material aus Aufgabe 3

Zauberzahl: _____

- **Transkript: Interview 1: JP und J**

Anmerkung

In Aufgabe 3 liegen den Interviewten Zettel mit leeren Zauberquadrate und demgemäß auch fehlenden Zauberzahlen vor. Die Äußerungen der Interviewten (Namen anonymisiert abgekürzt) im Gespräch mit dem Interviewer (abgekürzt I) werden dabei nicht abgekürzt, um Tippfehler bei Abkürzungen und ähnliches zu vermeiden. Um das Erstellen, das Lesen und die Analyse der folgenden Transkripte so eindeutig und kurz wie möglich zu gestalten, werden die Felder nicht umständlich beschrieben, sondern stattdessen durchgängig wie folgt bezeichnet:

Feld 1	Feld 2	Feld 3
Feld 4	Feld 5 Mittelzahl	Feld 6
Feld 7	Feld 8	Feld 9

Zauberzahl: _____

Einordnung der Transkripte:

In den folgenden Sequenzen versuchen JP und J auf verschiedene Weisen Zauberquadrate mit einer Zauberzahl ihrer Wahl zu erzeugen. Ihnen ist dabei das Aufgabenformat vorher nicht begegnet. Die Interviewszene umfasst damit Aufgabe 3, wie sie im Interview-Leitfaden dargestellt ist. Die einzelnen Sequenzen werden entsprechend ihrer Reihenfolge des Auftretens im Interview dargestellt.

Sequenz 1: JP und J arbeiten rückwärts

Sequenz 1 wie auch Aufgabe 3 des Leitfadens beginnt mit der Frage von I wie JP und J ein beliebiges Zauberquadrat mit einer Zauberzahl ihrer Wahl selbstständig neu erzeugen können.

- 1 JP Also man kann im Grunde an verschiedenen Stellen anfangen, soll das jetzt immer dasselbe (Zauberquadrat) sein oder´
- 2 I Ne, das kann verschieden sein.
- 3 JP Ah also auch verschiedene Zauberzahlen´
- 4 I (zustimmend) Mhm und auch verschiedene Zauberquadrate.

- 5 JP Dann würde ich bei dem äh ersten (leeren Zauberquadrate) beispielsweise anfangen und mir äh die Zauberzahl äh (atmet tief ein) neun, klappt das´ (4sec), bestimmt
- 6 I Oder (klappt) auch mit einer größeren Zauberzahl
- 7 JP Ja, ich nehme mal ne größere Zauberzahl (grinst), ich nehm (überlegt) ähm
- 8 J Dreizehn (lacht)
- 9 JP a Nein, zwölf. Es muss ja eine durch drei teilbare Zahl sein. * Deswegen nehm ich mal die zwölf (schreibt die 12 als Zauberzahl in das erste leere Zauberquadrat). b Das Dreifache von der Mittelzahl ist die Zauberzahl, das heißt zwölf geteilt durch drei ist vier dementsprechend muss bei dem hier (zeigt weiterhin auf das erste leere Zauberquadrat) die vier die Mittelzahl sein (trägt beim ersten leeren Zauberquadrat die 4 als Mittelzahl / in Feld 5 ein). c Ähm und dann würde ich genauso strategisch vorgehen, dass ich erstmal ums eins reduziere (trägt in Feld 1 die 3 ein), dann bin ich hier bei 3 (zeigt auf das Feld 1) und hier um eins erhöhe, sind wir bei fünf (trägt die 5 in Feld 9 ein). d Dann gehe ich weiter und reduziere hier (zeigt auf die zweite Zeile) um zwei also auf zwei (zeigt auf die Mittelzahl / Feld 5 und trägt dann die Zahl 2 in Feld 4 ein) und dann auf der anderen Seite (der Zeile) erhöht auf sechs (trägt die Zahl 6 in Feld 6 ein). e Ähm (atmet tief ein) und (schnalzt leicht) und dementsprechend habe ich hier drei plus zwei (zeigt auf die erste Spalte mit Feld 1 und Feld 4) sind fünf verbleiben also noch sieben bis zur zwölf (trägt die 7 in Feld 7 ein). (Zeigt auf die 7 in Feld 7) f Das entspricht vier plus drei, auf der anderen Seite (der Diagonalen) dann vier minus drei, äh also eins (trägt die Zahl 1 in Feld 3 ein). Genau und ähm oben und unten muss ich in dem Fall * (wartet auf J), **doch** muss ich mit einer Null arbeiten in dem Fall.
- 10 J *Ja, stimmt.
*hier geht's nich auf (zeigt auf die unterste Zeile).
- 11 J Aber das dürfen wir ja nicht oder dürfen wir das jetzt´
- 12 I Könnt ihr einmal ausprobieren, ob das funktioniert.
- 13 JP Also, in dem Fall muss es, weil es sonst nicht funktioniert (trägt währenddessen in Feld 8 eine 0 ein), denn sieben plus fünf (zeigt auf Felder 7 und 9) ist zwölf schon, deswegen muss hier ne null hin (zeigt auf Feld 8).
- 14 J Ah, aber dann haben wir oben doch schon (zeigt auf die erste Zeile mit den Feldern 1, 2, 3 und hier speziell auf das einzige noch leere Feld 2), warte, acht wäre das (zeigt auf das noch leere Feld 2), das wäre auch zu viel.
- 15 JP (3sec), wieso´

- 16 J Ja acht (zeigt auf das noch leere Feld 2) plus drei plus eins (zeigt erst auf Feld 1 und dann Feld 3) sind nicht zwölf. (3sec) Doch sind zwölf.
- 17 JP Ja (beide lachen). Ich wollte gerade sagen hä (lacht und trägt in Feld 2 die 8 ein). Okay, das heißt das wäre schon mal gelöst und da haben wir eben mit der Zauberzahl begonnen.
- 18 I Okay, mhm (zustimmend). Also habt ihr jetzt ein Zauberquadrat gefunden, ohne von einem bisherigen Zauberquadrat auszugehen. Was gäbe es denn noch für Möglichkeiten ein Zauberquadrat zu erzeugen?

Das erste fertige Zauberquadrat von JP und J:

3	8	1
2	4	6
7	0	5

Zauberzahl: 12

Sequenz 2: JP und J arbeiten mit Analogien zum Verdoppeln in Aufgabe 2

Sequenz 2 schließt unmittelbar an Sequenz 1 an.

- 1 I Was gäbe es denn noch für Möglichkeiten, ein Zauberquadrat zu erzeugen?
- 2 JP Ja.
- 3 J Wir könnten machen wie bei Aufgabe 2.3, irgendeine Zahl oben links in die Ecke
- 4 JP Ja, aber ich will jetzt nicht nochmal alles durchrechnen, ich würde eher machen wie bei einer der anderen Aufgaben 2en, dass ich alles zum Beispiel jede Zahl um zwei erhöhe. *So würde ich jetzt vorgehen
- 5 J *Ja, okay (zustimmend).
- 6 JP Weil, dann muss man nicht so groß dran rumrechnen. *Dementsprechend
- 7 I *Ja, genau (zustimmend),
ihr könnt das mal mit dem ersten Zauberquadrat, mit dem wir gearbeitet haben, versuchen. Guckt doch mal da, ob das geht.
- 8 JP Können wir nicht das nehmen was hier schon liegt direkt vor uns (zeigt auf das Zauberquadrat aus Sequenz 1)?

- 9 I Ja, das ist aber unschön, weil da die Null drin is.
- 10 JP Okay
- 11 J Das allererste, die Zauberzahl achtzehn. Das schreiben wir nicht nochmal auf, das haben wir ja hier *(holt den Zettel mit dem Zauberquadrat 9, 4, 5 / 2, 6, 10 / 7, 8, 9).
- 12 I *Ne, braucht ihr nicht.
- 13 J Also, verdoppeln, sechsunddreißig wäre dann unsere Zauberzahl (schreibt die 36 als Zauberzahl hin).
- 14 JP Ah, okay, du willst verdoppeln`. Okay verdoppeln.
- 15 J War das nich immer verdoppeln´
- 16 JP Ne, ich hab jetzt plus zwei gesagt. Verdoppeln ginge auch.
- 17 J Hä, aber die Zauberzahlen haben sich doch immer verdoppelt´. Ne, ja doch, aber bei Aufgabe 2.1 hat sich das verdoppelt.
- 18 JP Ja, genau (zustimmend). Da haben wir ne Verdopplung gemacht und da drunter haben wir immer plus zwei gemacht.
- 19 J Wir können ja auch mal Risiko machen.
- 20 JP (liebevoll zustimmend, lächelnd) Ja, okay. Dann rechne du aber (lachend).
- 21 J (lachend) Also zwei mal drei, sehr schwierig, sechs glaube ich (schreibt die Zahl 6 in Feld 9). Ähm zwei mal sechs sind zwölf (schreibt die Zahl 12 in Feld 5) und zwei mal neun sind achtzehn (schreibt die Zahl 18 in Feld 1).
- 22 JP Mhm (zustimmend). Rechts in die Mitte kommt ne zwanzig (J trägt in Feld 6 die Zahl 20 ein). Oben ne zehn (J trägt in das Feld 3 die Zahl 10 ein). Ooo, äh, oben in der Mitte eine acht (J trägt in das Feld 2 die Zahl 8 ein). Links ne vier (J trägt in das Feld 4 die Zahl 4 ein). Unten in der Mitte die sechzehn und unten links die vierzehn (J trägt in das Feld 8 die Zahl 16 und dann in das Feld 7 die Zahl 14 ein). Das können wir jetzt nochmal überprüfen. Zehn plus zwölf sind zweiundzwanzig plus vierzehn sind *äh (2sec) sind sechsunddreißig äh stimmt (lacht, nimmt seine vorher auf die Zahlen zeigenden Finger weg als wäre er fertig).
- 23 J *sechsunddreißig
- 24 I Sehr gut. Könnt ihr noch einmal begründen, wä wieso jetzt eure Strategie funktioniert´
- 25 JP Weil wir die Mittelzahl, die ja das Der- äh also das Dreifache der Mittelzahl is ja die Zauberzahl (atmet ein) und weil wir die Zauberzahl verdoppelt haben, können wir auch die Mittelzahl verdoppeln.

- 26 I Genau (zustimmend), ihr habt jetzt quasi ein Zauberquadrat genommen das ihr kennt und habt jedes einzelne Feld *verdoppelt, um ein neues zu erzeugen. Und warum funktioniert das jetzt mit dieser Technik´. Könnt ihr das bitte noch einmal begründen´.
- 27 JP *Ja, richtig.
- 28 JP Weil sich die Differenz da im Grunde nicht ändert.
- 29 I Mh (zustimmend), ja genau.
- 30 J Wir heben alles verhältnismäßig gleich an.
- 31 JP Genau (zustimmend). Das Verhältnis bleibt gleich. Stimmt ja.
- 32 I Also die Struktur bleibt erhalten.
- 33 J Ja.
- 34 I Genau, sehr gut (lobend). *Gäbe es sonst noch eine Möglichkeit ein Zauberquadrat zu erzeugen´
- 35 JP *Hihi (JP und J kichern fröhlich). Bitte´
- 36 I Ihr habt jetzt bei dem ersten, das ihr erzeugt habt, habt ihr systematisch ausprobiert würde ich sagen. Ihr habt euch Erkenntnisse genommen, die ihr hattet und habt dann darauf für die anderen Felder clever ausprobiert und immer die Zahlen verteilt.

Das zweite fertige Zauberquadrat von JP und J:

18	8	10
4	12	20
14	16	6

Zauberzahl: 36

Sequenz 3: JP nutzt Probieren mittels Zufallszahlen

Sequenz 3 schließt unmittelbar an Sequenz 2 an. Die Möglichkeit Zauberquadrate mittels zufälliger Zahlen zu erzeugen wird nur theoretisch diskutiert und kein neues Zauberquadrat damit erzeugt.

- 1 I Gäbe es denn jetzt für Leute, die nicht auf die Idee kommen, noch eine viel schwierigere okay aufwändigere Möglichkeit, die aber trotzdem zum Ziel führen würde, wenn man das oft genug macht´
- 2 JP Einfach zufällig irgend ne Zahl einsetzen.
- 3 I Mh (zustimmend). Und warum würde das irgendwann funktionieren´
- 4 JP (3sec) Ach, das ist dann ja im Grunde wie beim Sudoku. Du guckst so lange ähm bis irgendwann zufällig eine passende Zauberzahl herauskommt und streichst dann immer mal wieder die falschen Ergebnisse oder die falschen Ziffern durch.
- 5 I Also ersetzt du die Felder mit gewissen Zahlen immer zufällig.
- 6 JP Jap.
- 7 I Okay, ja das würde auch funktionieren.

Sequenz 4: JP und J arbeiten erneut mit Analogien

Sequenz 4 schließt unmittelbar an Sequenz 3 an. Die Möglichkeit, weitere Analogien zu nutzen, wird nur theoretisch diskutiert und kein neues Zauberquadrat damit erzeugt.

- 1 JP Also eben haben wir es ja durch ähm Verdoppeln gemacht *Halbieren funktioniert dementsprechend genauso, weil da die Struktur auch bleibt. Oder um eine gewisse Summe erhöhen beziehungsweise reduzieren muss dann ja ebenfalls funktionieren, weil auch da auch ähm die Zauberzahl erhalten bleibt und auch die Struktur.
- 2 J *Halbieren
- 3 I Sehr gut (zustimmend).

Sequenz 5: JP und J versuchen, die Struktur der Zauberquadrate zu verallgemeinern

Sequenz 5 schließt nicht unmittelbar an Sequenz 4 an. In der Zwischenzeit überlegen JP und J, was es noch für andere Möglichkeiten geben könnte und verwerfen einige Ideen.

- 1 JP Achso, ne allgemeine Lösung mit Variablen.
- 2 I Ah, okay. Könntest du mir da vielleicht deine Idee bitte erläutern, JP´.
- 3 JP a Oh Gott, oh Gott (atmet tief ein). Wir haben ja gesagt, die Mittelzahl ist immer ein Teiler der Zauberzahl, das ich mach in die Mitte jetzt einfach mal ein x (schreibt den Buchstaben X in Feld 5), das heißt die Zauberzahl ist grundsätzlich drei x (schreibt 3x in das noch leere Feld für die Zauberzahl). Ich hoffe man kann das sehen, müsste

gehen (guckt, ob die eigenen Eintragungen auf der aufzeichnenden Kamera der digitalen Konferenz zu sehen sind). b Äh dann ist oben links das Feld, wenn wir in dem Schema bleiben das wir eben erstellt haben, beispielsweise x minus eins (schreibt in das Feld 1 $x-1$) und unten rechts das Feld x plus eins (schreibt in das Feld 9 $x+1$). Ähm, dann sind wir hier her gegangen und haben links x minus zwei gemacht (trägt in das Feld 4 $x-2$ ein), rechts x plus zwei (trägt in das Feld 6 $x+2$ ein). c Als wir dann weitergegangen sind war dann immer das Problem, dass (zeigt mit dem Stift kreisend um beziehungsweise auf das Feld 7) äh gegen den Uhrzeigersinn im nächsten Feld nicht x minus drei kommen konnte. (1sec) Ach das ergibt ja auch Sinn. Sondern oben rechts immer x minus drei stand (schreibt in das noch leere Feld 3 $x-3$) und unten x plus drei (schreibt $x+3$ in das noch leere Feld 7). Denn dann hab ich äh wenn ich die linke Spalte einmal anschau (zeigt auf die linke Spalte mit den Feldern 1, 4 und 7), im ersten Feld minus eins, im zweiten Feld minus zwei und im dritten Feld plus drei (zeigt auf die Felder 1, dann 4 und dann 7), das heißt letzten Endes kommt plus minus null raus. d Was ja das ist, was wir am Anfang bei dem fünfer Beispiel schon mal mit den Zahlenwerten gesagt haben. Und dann hatten wir noch äh *plus vier dann dementsprechend oben und minus vier dementsprechend unten (trägt $x+4$ in das Feld 2 ein und danach $x-4$ in das Feld 8) damit das mit den Zeilen passt (zeigt auf die Zeile 1 mit den Feldern 1, 2, 3 und dann auf Zeile 3 mit den Feldern 7, 8 und 9).

4 J

*Vier

5 J Gut.

6 I Hervorragend, sehr gut.

Das nicht fertige von JP und J erzeugte dritte Zauberquadrat:

$x-1$	$x+4$	$x-3$
$x-2$	x	$x+2$
$x+3$	$x-4$	$x+1$

Zauberzahl: $3x$

Direkt anschließend an diese Szene versuchen JP und J ihre allgemeine Struktur des Zauberquadrats noch zu verfeinern, kommen aber zu keiner finalen Lösung und belassen es dann dabei. Der Interviewer verzichtet auf weitere Nachfragen und das Interview wird noch einmal in Richtung einer Äußerung von JP aus dem Anfang des Interviews gelenkt.

Sequenz 6: JP und J versuchen, Zauberquadrate zu spiegeln und zu drehen

Sequenz 6 schließt unmittelbar an Sequenz 5 an.

- 1 I Du hast am Anfang gesagt, wenn man ein Zauberquadrat hat, JP, dann ist da irgendwas mit den Seitenzahlen, dann könnte man die irgendwie tauschen´. Könnte man so eine Methode noch verwenden, um ein Zauberquadrat zu erzeugen´.
- 2 JP Ja, ich könnte die Zahlen spiegeln im Grunde.
- 3 I Warum, warum würd das funktionieren´.
- 4 JP Weil die Summe oder generell alle Summen dann immer gleich bleiben, wenn ich um die Mittelzahl herum spiegel´ und gleiches muss dann auch mitm Drehen funktionieren.
- 5 I Also spiegeln und drehen würde funktionieren´. Könntest du ein Beispiel damit machen´.

JP und J testen an einem Beispiel und erkennen, dass das Drehen von Zauberquadraten nicht funktioniert, wenn man nur um eine Zahl dreht. Aus Gründen der besseren Referenzierbarkeit wird die Zählung der Aussagen nicht bei 1 neu gestartet, sondern fortgesetzt.

- 6 JP Drehen teste ich auch noch einmal kurz (nimmt sich das Zauberquadrat aus Aufgabe 1). Fang ich mal mit dem sechser an und spiegel die (schreibt die Mittelzahl 6 in Feld 5), das heißt oben links ist die drei und unten ist die neun (schreibt die Zahl 3 in Feld 1 und die Zahl 9 in das Feld 9). Achso, achtzehn als Zauberzahl wieder logischerweise (schreibt die Zahl 18 in das Feld der Zauberzahl). Ähm dann hier die fünf (schreibt die Zahl 5 in das Feld 7) und hier die sieben (schreibt die Zahl 7 in das Feld 3). Zehn und zwei (schreibt die Zahl 10 in das Feld 4 und dann die Zahl 2 in das Feld 6). Acht und vier (schreibt die Zahl 8 in das Feld 2 und dann die Zahl 4 in das Feld 8).
- 7 J Ja, das passt.
- 8 JP Passt es´
- 9 J Ja, nach meinen Berechnungen ist das lupenrein (schmunzelt).

- 10 JP Ok, ok. Das heißt spiegeln funktioniert nach unserer Methode aber so wie wir das erstellt haben äh mit dem ähm anti-, also gegen den Uhrzeigersinn ähm um eins reduzieren funktioniert das Drehen eben nicht, weil sich dann nicht um eins reduziert würde und ne andere Struktur aufgemacht werden würde.
- 11 I Warum würde die Strategie, die ihr jetzt habt, ein Zauberquadrat zu spiegeln, um ein neues zu erzeugen funktioniert das´. Könnt ihr das begründen´.
- 12 JP Ähm (10sec). Ah, weil da die Struktur erhalten ist, nur eben äh an einer anderen Position beginnt.

Das fertige von JP und J erzeugte vierte Zauberquadrat:

3	8	7
10	6	2
5	4	9

Zauberzahl: 18

Transkript: Interview 2: K und D

Einordnung der Transkripte:

In den folgenden Sequenzen versuchen K und D, die vor dem Interview noch nicht mit Zauberquadraten gearbeitet haben, neue Zauberquadrate mittels verschiedener Strategien zu erstellen. Die Sequenzen stammen alle aus Aufgabe 3 des Interview-Leitfadens und werden gemäß ihrer Reihenfolge des Auftauchens dargestellt.

Sequenz 1: K und D arbeiten vorwärts, um neue Zauberquadrate zu erzeugen

Aufgabe 3 des Interview-Leitfadens und damit Sequenz 1 beginnt mit der Frage des I, ob K und D gemeinsam ein beliebiges Zauberquadrat mit einer Zauberzahl ihrer Wahl erzeugen können.

- 1 K Wollen wir vielleicht einfach mal die dreißig probieren als Zauberzahl'. Also ich finde ja am wichtigsten, wenn man sich am Anfang eine Zauberzahl überlegt.
- 2 D Ja.
- 3 K Finde ich schon.
- 4 D Ja, schon. Naja, ich würde jetzt in der Mitte einfach irgendeine Zahl schreiben (zeigt auf das noch leere Feld 5) und dann links oben (zeigt auf das noch leere Feld 1) den gleichen Abstand wählen wie rechts unten (zeigt dann auf das noch leere Feld 9 und dann von Feld 5 auf Feld 1 und Feld 9). Also der eine wird geringer, der andere wird größer.
- 5 K Ja, machen wir das erstmal.
- 6 I Du würdest also einfach einzelne Zahlen übernehmen und würdest dann einfach systematisch oder unsystematisch ausprobieren, um ein Zauberquadrat zu bekommen'.
- 7 D a Ja, also im Prinzip dann schon gewissermaßen systematisch natürlich (lacht). b Also ich würde jetzt tatsächlich irgendeine Zahl nehmen (zeigt auf das noch leere Feld 5) und dann zusehen, dass ich den Abstand nach hier (zeigt nun von Feld 5 auf Feld 1) um keine Ahnung drei oder um zwei verringere und den durch dann hier (zeigt von Feld 1 auf Feld 5 und schließlich auf Feld 9) um zwei erhöhe. c Und dann würde ich das hier zusammenrechnen und dann habe ich ja meine Zauberzahl (zeigt auf die Diagonale der Felder 9, 5 und 1).
- 8 I Genau.
- 9 D | Ja, also, wenn ich jetzt sage, ich nehme hier (zeigt auf das noch leere Feld 5) hin die
| *äh (2sec) sechs. Nehmen wir hier die sechs hin (schreibt die Zahl 6 in das Feld 5).

- Und dann nehmen wir eins oder zwei. Wollen wir eins oder zwei nehmen´(fragend zu K).
- 10 K *sechs
- 11 K Zwei.
- 12 D Zwei. Dann bist du hier bei vier (schreibt die Zahl 4 in das Feld 1) und hier entsprechend bei acht (schreibt die Zahl 8 in das Feld 9). So dann ist die Zauberzahl ja klar.
- 13 K Die siebzehn. Aber siebzehn ist nicht durch drei teilbar.
- 14 D Ne, des is, (2sec) die is achtzehn sach ma (liebevoll witzelnd).
- 15 K Achso, ah ja, stimmt die is achtzehn (D schreibt die Zahl 18 in das Feld der Zauberzahl), danke.
- 16 I Wieso ist die Zauberzahl achtzehn´.
- 17 D Weil vier (zeigt auf das Feld 1) plus sechs (zeigt auf das Feld 5) plus acht (zeigt auf das Feld 9) *(2sec).
- 18 K *achtzehn sind. Doch stimmt schon.
- 19 I Mhm genau.
- 20 D Nach unserer Rechnung zumindestens (beide lachen). So und jetzt ähm *würde man halt jetzt einfach sagen, na dann würde man halt wenn hier der Abstand zwei ist (zeigt auf die Felder 5 und 1), dann könnte hier ja der Abstand eins sein (zeigt auf das Feld 5 und das noch leere Feld 4). Also machen wir hier ne fünf hin (trägt die Zahl 5 in das Feld 4 ein) und hier ne sieben (trägt die Zahl 7 in das Feld 6 ein). Und dann ergibt sich ja hier auch, ergibt sich da auch 18´.
- 21 K *jetzt nach unserem
- 22 K Ja.
- 23 D Und da ergibt sich da auch achtzehn raus (zeigt auf die mittlere Zeile mit den Feldern 4, 5 und 6). Und dann *ähm ergibt sich das (zeigt auf die Felder 1 und 4 und dann auf das noch leere Feld 7) und das ist ja jetzt klar (zeigt auf das Feld 3) das kann man ja ausrechnen, weil vier und fünf sind neun minus achtzehn gleich neun (schreibt die Zahl 9 in das Feld 7), ne´.
- 24 K *Würde man ja nach oben (zeigt auf die Felder 4 und 5).
- 25 K Ja.
- 26 I Mh (zustimmend).
- 27 D Acht und sieben (zeigt auf die Felder 6 und 9) sind

- 28 K Fünfzehn.
- 29 D Also drei (trägt die Zahl 3 in das Feld 3 ein).
- 30 K Ja.
- 31 D Und dann hat man ja hier wieder das auch diagonal (zeigt auf die Felder 7, 5 und 3). Und dann ist ja und dann ergibt sich das, hier sind das sieben (zeigt auf die Felder 1, 2 und 3) und dann sind das halt hier elf logischerweise (trägt die Zahl 11 in das noch leere Feld 2 ein), wenn ich mich nicht verrechne. Neun und acht (zeigt zu Feld 9) sind siebzehn, also eins (trägt die Zahl 1 in das noch leere Feld 8). Und dann ist man bei *(2sec) dann hat mans ferdich.
- 32 K *Ja.
- 33 I Ja, genau (zustimmend). Würdest du deine Strategie nochmal erklären und begründen, warum die funktioniert´
- 34 D Also die Strategie ist ja, dass ich äh in der Mitte einfach eine x-beliebige Zahl festlege (zeigt auf die Mittelzahl), in dem Fall jetzt die sechs *und dann hab ich jetzt gesagt wir ziehen oben links (zeigt auf das Feld 1) zwei Ziffern also zwei Zahlen ab, also die die wir hier abziehen (zeigt von der Mittelzahl auf das Feld 1), die packen wir hier wieder drauf (zeigt auf die Mittelzahl und dann auf das Feld 9). Also kommen wir halt zu vier und zu acht (zeigt erst auf das Feld 1 und dann das Feld 9). Und dann hab ich ja gesagt, dass der Abstand von sechs zu vier zwei ist (zeigt auf die Mittelzahl und dann das Feld 1) also nehme ich jetzt hier nur zur fünf einen Abstand, der sich nur um eins unterscheidet (zeigt von der Mittelzahl auf das Feld 4) also is sechs minus eins is fünf (zeigt wieder von der Mittelzahl zu Feld 4) und sechs plus eins ist sieben (zeigt dann von der Mittelzahl zu Feld 6). Und dann hab ich hier ja in jedem, also hier oben links und unten rechts zwei Zahlen (zeigt auf die Spalte mit den Feldern 1, 4 und 7 und dann auf die Spalte mit den Feldern 3, 6 und 9), weshalb sich die Ecken oben rechts und unten links mathematisch ja ergeben (zeigt auf Feld 3 und dann Feld 7). Also aus der Zauberzahl, die ich ja vorher schon hatte (zeigt auf die Zauberzahl) minus dem was halt da ist (zeigt zuerst gemeinsam auf Feld 6 und 9 sowie danach gemeinsam auf Feld 1 und 4), damit hatte ich die neun und die drei schon raus (zeigt zuerst auf Feld 7 und dann auf Feld 3). Öh ja, also dann hab ja, wenn ich von drei Zahlen immer schon zwei habe und das Ergebnis kenne, dann ist die dritte Zahl ja klar.
- 35 I *Mhm (zustimmend)
- 36 I Ja, sehr gut (zustimmend).

Das erste fertige Zauberquadrat von K und D:

4	11	3
5	6	7
9	1	8

Zauberzahl: 18

Sequenz 2: K und D nutzen einen Spezialfall

Sequenz 2 schließt nahezu unmittelbar an Sequenz 2 an. K und D überlegen, welche weiteren Möglichkeiten es geben kann, neue Zauberquadrate zu erzeugen. Dabei weist I sie auf die Frage von K zu Beginn des Interviews hin, ob man nicht auch Zahlen mehrfach verwenden könnte, da es dann leichter wäre.

- 1 D Dass man immer wieder die gleiche Zahl verwendet´.
- 2 K Probier doch mal die fünf.
- 3 D | Ja, wenn ich die fünf, also wenn ich jede Zahl so oft verwenden kann wie ich will,
| *mal angenommen dann schreib ich überall fünfen voll und dann bin ich hier der
| König der Mathematik und habs (lacht und schreibt überall die Zahl 5 in jedes Feld).
- 4 K | *dann könnte ich das ganze Ding mit fünf voll machen.
- 5 K Und hab die Zauberzahl fünfzehn.

Das fertige zweite Zauberquadrat von K und D:

5	5	5
5	5	5
5	5	5

Zauberzahl: 15

Sequenz 3: K und D nutzen Analogien, um neue Zauberquadrate zu erzeugen

Sequenz 3 schließt unmittelbar an Sequenz 2 an.

- 1 I Und wenn ihr jetzt an Aufgabe 2 denkt, da habt ihr ja immer ein Zauberquadrat benutzt, könnte man vielleicht auch in die Richtung denken´.
- 2 K Warte kurz, wir müssen uns das kurz anschauen. Was meinst du, dass man das immer erhöht (Richtung D?)´.
- 3 D Wenn du jetzt von fünfzehn zu dreißig zu sechzig Zauberzahl denkst, dann könnte man das ja noch mal mit zwei multiplizieren, bin ich bei hundertzwanzig als Zauberzahl.
- 4 I Genau, probiert das doch mal, ob ihr so ein neues Zauberquadrat erzeugen könntet´.
- 5 D Wenn ich sag, ich fang mit hundertzwanzig an in der Mitte (trägt die Zahl 120 als Zauberzahl ein). Und dann äh den Abstand beispielsweise äh acht wähle, dann bin ich ja hier bei zweiunddreißig (trägt die Zahl 32 in das Feld 1) und dann bin ich hier bei achtundvierzig und dann bin ich ja auch bei hundertzwanzig (trägt die Zahl 48 in das Feld 9 ein).
- 6 I Genau (zustimmend).
- 7 K Dann wärst du hier unten wieder bei acht, dann musst du immer das Doppelte haben.
- 8 D Das ist immer das Doppelte, dann bist du hier bei acht (trägt die Zahl 8 in das Feld 8 ein).
- 9 K Dann ist du und links bei vierundsechzig.
- 10 D Na, warte. Wenn du hier bei acht bist (zeigt auf das Feld 8) dann bist du ja oben erstmal bei *zweiundsiebzig so dann ergibt sich ja in der Reihe was es sein muss (zeigt auf die Felder 1, 2 und 3 der ersten Zeile). Sechzehn (trägt die Zahl 16 in das Feld 3 ein). Und achtundvierzig und acht sind ja, und dann müssen das hier vierundsechzig sein (trägt die Zahl 64 in das Feld 7 ein).
- 11 K *Zweiundsiebzig
- 12 K Und oben drüber müssen dann vierundzwanzig sein, hier (tippt mit dem Finger auf das Feld 4).
- 13 D Ja, das kommt hin (trägt die Zahl 24 in das Feld 4 ein). Und dann halt (5sec) sechsundfünfzig.
- 14 K Sechsundfünfzig. (2sec) siehst dus´. Sollen wir vorlesen´.
- 15 I Ja, ich hatte nur gerade einen Tonaussetzer. Aber ich habs, sehs jetzt ungefähr, ja. Was habt ihr also für eine Strategie verwendet´.

- 16 K Wir haben immer die Zahlen von dem, von diesem hier, so (zeigt das Zauberquadrat 16, 36, 8 / 12, 20, 28 / 32, 4, 24 aus Aufgabe 2.2 in die Konferenzkamera).
- 17 I Mh (verstehend).
- 18 K Die haben wir im Prinzip, *mh genau (zustimmend), also von dem mit der Zauberzahl sechzig, da haben wir da haben wir die im Prinzip die Zauberzahl verdoppelt und dann jegliche andere Zahl auch verdoppelt.
- 19 I *Von einem bekannten Zauberquadrat
- 20 I Sehr gut (lobend). Also kann man Zauberquadrate auch erzeugen, indem man einfach bekannte schon verwendet, ob man dann multiplikativ oder additiv die verändert, um dann eben eins zu erzeugen, was auch funktioniert. Genau. Und darf ich fragen, warum die Strategie jetzt auch funktioniert´.
- 21 D Ja, wenn die Zauberzahl ja verdoppelt, also sich verdoppelt (zeigt auf das Feld mit der Zauberzahl 120), dann ja äh muss ja müssen ja die anderen Zahlen sich auch verdoppeln. Also das geht ja nicht anders, weil ich ja wenn ich drei Zahlen habe (zeigt auf die Zahlen des Zauberquadrats) und die jeweils einzeln verdopple dann verdoppelt sich ja ohnehin das Ergebnis.
- 22 I Ja, genau. Das heißt also die, die Struktur bleibt die gleiche.
- 23 D *Genau.
- 24 K *Ja.
- 25 I Und dadurch passt das am Ende. Super, danke.

Das fertige dritte Zauberquadrat von K und D:

32	72	16
24	40	56
64	8	48

Zauberzahl: 120

- **Transkript: Interview 3: L und J**

Einordnung der Transkripte:

L und J begegnen in dem Interview zum ersten Mal Zauberquadraten. Sie sollen in Aufgabe 3, aus der die folgenden einzelnen Sequenzen stammen, auf verschiedene Weisen Zauberquadrate mit einer Zauberzahl ihrer Wahl erzeugen. Die dargestellten folgenden Sequenzen sind entsprechend ihrem zeitlichen Auftreten im Interview gegliedert.

Sequenz 1: L und J nutzen Analogien

- 1 I Genau, ich würde euch dann bitten bei Aufgabe drei einfach ein Zauberquadrat mit einer Zielzahl äh euer Wahl zu erzeugen. Und da seid ihr dann frei verschiedenste Möglichkeiten zu benutzen, was euch so einfällt.
- 2 L Mh (verstehend). Okay. Ähm, was machen wir´. (3sec) Mh.
- 3 J Mich würd mal interessieren, ob das egal ist, ob die mittlere Zahl ungerade oder gerade ist.
- 4 L Das ist egal.
- 5 J Weil bis jetzt habe ich immer ungerade Zahlen gesehen, außer die werden verdoppelt.
- 6 L Aber das sind ja trotzdem Zauberquadrate. Ah, warte, es müssen außen immer gerade Zahlen sein glaube ich. Kann das wohl´. Also hier (zeigt auf das von ihnen in Aufgabe 2.3 bestimmte Zauberquadrat). Also hier in den Ecken´.
- 7 I Ne, muss nicht immer.
- 8 L Ne, muss nicht immer´. Achso, dann ist das nur Zufall´.
- 9 I Ja, genau. Man könnte ja zum Beispiel die Eckzahlen auch um drei erhöhen oder so, dann könnte man ja auch ungerade Zahlen haben.
- 10 L Ah, okay. Ähm, na, dann nehmen wir einfach irgendein Zauberquadrat jetzt einfach, oder. Nehmen wir, ähm, starten wir hier mit der Zahl sechs (schreibt die Zahl 6 in Feld 5), machen fünf, sechs und sieben (schreibt die Zahl 5 in Feld 1 und die Zahl 7 in Feld 9). Dann ähm (trägt die Zahl 3 in Feld 3 ein).
- 11 J Ist die Zauberzahl achtzehn.
- 12 L Achtzehn´ (trägt die Zahl 18 als Zauberzahl ein). Sicher´. (murmelnd) Elf, ja!
- 13 I Genau.
- 14 L Dann sind sieben, acht (zeigt erst auf Feld 9 und trägt dann in Feld 6 die Zahl 8 ein). Acht, sechs, drei, vier (trägt die Zahl 4 in Feld 4 ein). (zeigt auf Feld 1 und Feld 4

und trägt dann die Zahl 9 in Feld 7) neun. (zeigt mit dem Kugelschreiber erst auf das Feld 9 und dann das Feld 7) Zwei (trägt dann die Zahl 2 in das Feld 8 ein). Mh, zehn, oder´. Ja (trägt dann die Zahl 10 in das Feld 2 ein). Dann (trägt die Zahl 3 in Feld 3 ein).

- 15 I Genau, super. Wie bist du denn nun auf dieses Zauberquadrat gekommen, L´.
- 16 L Ich hab mir ehrlich gesagt das erste Quadrat aus Aufgabe 2.1 genommen und hab die Mittelzahl um einen erhöht und dann je nachdem alle anderen auch um einen erhöht und geguckt, ob das passt mit der Zauberzahl achtzehn.
- 17 I Sehr gut (zustimmend). Kannst du begründen, warum die Strategie funktioniert´.
- 18 L Ähm, das funktioniert, weil wir ähm, ouw, jeden Summanden um eins erhöhen, also erweitern den um eins (zeigt dabei mit dem Stift nacheinander auf die einzelnen Felder des Zauberquadrates), und dann ähm also ein, oh warte mal eben (lacht). Also wir erhöhen jeden Summanden um eins. Und äh weil wir das drei mal machen, weil wir jeweils drei Summanden haben, erhöht sich die Zauberzahl um drei (zeigt erst auf verschiedene Diagonalen, Zeilen und Spalten und schließlich auf die Zauberzahl 18).
- 19 I | Genau, also du meinst, weil du das Zauberquadrat gleichmäßig veränderst *hast du ein Zauberquadrat, das wieder funktioniert.
- 20 L | *Genau.
- 21 L | Ja, gleichmäßig. Dann könnten wir dieses Zauberquadrat also fürs nächste nehmen wir dieses hier einfach und gucken, *wir wir verdoppeln, zum Beispiel. Oder wir nehmen dieses hier und spiegeln das.
- 22 J | *Können wir verdoppeln.

Das fertige erste Zauberquadrat von L und J:

5	10	3
4	6	8
9	2	7

Zauberzahl: 18

Sequenz 2: L und J spiegeln ein Zauberquadrat

Sequenz 2 schließt unmittelbar an Sequenz 1 an.

- 1 L Oder wir nehmen dieses hier und spiegeln das, also die Mitte bleibt gleich ähm sechs (trägt die Zahl 6 in das Feld 5 ein), zehn und zwei (trägt die Zahl 10 in das Feld 2 ein und dann die Zahl 2 in das Feld 8), das sind achtzehn (trägt die Zahl 18 als Zauberzahl ein). Und dann ähm die fünf kommt hier rüber (zeigt auf das Feld 1 mit der Zahl 5 aus dem Zauberquadrat aus Sequenz 2 und trägt dann die Zahl 5 in das Feld 3 ein). Und die drei kommt darüber (zeigt auf das Feld 3 aus dem Zauberquadrat aus Sequenz 2 und trägt die Zahl 3 in das Feld 1 ein). Dann die acht kommt hierhin, die vier kommt hier hin (trägt die Zahl 8 in das Feld 4 und dann die Zahl 4 in das Feld 6 ein). Neun und sieben (trägt die Zahl 9 in das Feld 7 ein und die Zahl 7 in das Feld 9).
- 2 J Ne, musst du drehen.
- 3 L Äh ja, genau (schreibt die Zahl 7 in das Feld 7 und die Zahl 9 in das Feld 9, grinst). Hoppala. Dann müsste das äh ja. Das passt auch (fährt mit dem Stift die Diagonalen, Zeilen und Spalten ab).
- 4 I Super. L, kannst du begründen, warum das funktioniert´.
- 5 L Ähm, wir haben im Grunde immer noch die gleichen Rechnungen, also die Spalten bleiben gleich wegen dem ähm wie heißt das Gesetz nochmal´.
- 6 I Das Vertauschungsgesetz´.
- 7 L (lacht) Genau. Genau, wegen dem Vertauschungsgesetz ist das Ergebnis immer gleich (zeigt auf die Zauberzahl 18). Also, die ja, die stehen halt nur anders angeordnet (zeigt auf verschiedene Spalten).

Das fertige zweite Zauberquadrat von L und J:

3	10	5
8	6	4
7	2	9

Zauberzahl: 18

Sequenz 3: L und J arbeiten vorwärts

Sequenz 3 schließt unmittelbar an Sequenz 2 an.

- 1 I Und wie würdet ihr jetzt vorgehen, wenn ihr gar kein Zauberquadrat kennen würdet´.
Wie würdet ihr da jetzt auf eins kommen´.
- 2 L Mh, uff. Irgendeins´.
- 3 I Ja, irgendeins.
- 4 L Oa, ich glaub ich würd ausprobieren. Oder mal gucken.
- 5 I Kannst du deine Strategie mit dem Ausprobieren weiter erklären, L´.
- 6 L Genau, man setzt hier eine Zahl ein, ich machs einfach mal ich setz hier eine vier ein (schreibt die Zahl 4 in das Feld 5). Dann hier auch uff, das muss ja hier eine größer sein hier eine kleiner sein (zeigt zuerst auf das Feld 1, dann das Feld 5 auf dem sich die Zahl 4 befindet und dann das Feld 9), wo ist ja jetzt egal. Mh, setz ich hier, weiß ich nicht ne zwei ein (schreibt die Zahl 2 in das Feld 1) uuund hier ne sechs (schreibt die Zahl 6 in das Feld 9). Und dann probier ich mal. Jetzt hab ich die Zielzahl ähm Zauberzahl *zwölf (schreibt die Zahl 12 in das Feld der Zauberzahl). So sechs dann fehlen mir noch sechs, die ich aufteilen muss. Dann nehm ich die fünf (schreibt die Zahl 5 in das Feld 3) und die eins (schreibt die Zahl 1 in das Feld 6), krieg ich auch zwölf (zeigt mit dem Kugelschreiber auf die Felder 9, 6 und 3). Dann hab ich hier fünf, sind neun (zeigt auf die Diagonale mit den Feldern 3, 5 und 7), zehn, elf, zwölf plus drei sind dreizehn (schreibt in das Feld 7 die Zahl 3). Hier sind sieben (schreibt die Zahl 7 in das Feld 4). Das passt auch (geht die Zeile mit den Feldern 4, 5 und 6 mit dem Stift entlang). Äh fünf, sechs, sieben (zeigt auf das Feld 3 und dann das Feld 1). Äh Fünf sechs, sieben plus fü- äh ne, das passt nicht (zeigt immer noch auf die Zeile mit den Feldern 1-3).
- 7 J *Zwölf.
- 8 J Ne, da hast du wieder sieben, das geht nicht.
- 9 L Ne, fünf. Das heißt´.
- 10 I Die Strategie ist sehr gut, ich glaub das Problem ist, dass du die Mittelzahl zu klein ist.
- 11 L Zu klein´. Okay, dann äh ich streich das einfach mal durch, ne.
- 12 I Du kannst auch einfach das daneben nehmen (L nimmt dann das daneben abgedruckte noch leere Zauberquadrat).

- 13 L Okay. Setzen wir hier sieben, oder´. Sieben müsste ja groß genug sein (schreibt die Zahl 7 in das Feld 5). Dann hier äh wieder zwei (schreibt die Zahl 2 in das Feld 1) und vier´. Ah ne Quatsch, die muss ja größer sein, dann nehmen wir hier neun (schreibt die Zahl 9 in das Feld 9). Dann haben wir achtzehn als Zauberzahl (schreibt die Zahl 18 in das Feld der Zauberzahl).
- 14 I Guck noch mal auf den Abstand der Zahlen.
- 15 L Ach, der muss ja immer gleichmäßig sein. Ganz vergessen. Das heißt sieben, neun, es müssen fünf dazwischen sein, das heißt zwölf (streicht die Zahl 9 in Feld 9 durch und schreibt stattdessen die Zahl 12 hinein). Und dann ist die Zauberzahl einundzwanzig (streicht die Zauberzahl 18 durch und schreibt die Zahl 21 als Zauberzahl auf). Das passt doch jetzt, hier sind fünf dazwischen, da sind fünf, genau (zeigt auf die Felder 1 und 5 und dann die Felder 5 und 9).
- 16 J Genau.
- 17 L Dann ähm, zwölf einundzwanzig es fehlen neun, mh, mal eben überlegen.
- 18 I Alles gut, wir haben Zeit.
- 19 L Mh (5sec).
- 20 J Fehlen noch neun.
- 21 L (4sec) Dann setzten wir hier einfach mal, sollen wir einfach mal ne drei probieren´ (schreibt die Zahl 3 in das Feld 6). Neun, drei, jetzt fehlen hier die sechs (zeigt auf das Feld 3).
- 22 J Fehlen die sechs.
- 23 L (L schreibt die Zahl 6 in das Feld 3) Dann müsste hier eine eins hin (schreibt die Zahl 1 in das Feld 7).
- 24 J Ne, wie kommst du denn´.
- 25 L Ne, ach Quatsch (streicht die Zahl 1 in Feld 7 durch).
- 26 J Das sind dreizehn.
- 27 L Acht, acht doch´. Passt das´.
- 28 J Ja.
- 29 L Acht ja´ (schreibt die Zahl 8 in das Feld 7). Dann äh acht zehn (zeigt auf Feld 7 und dann Feld 1), elf (schreibt die Zahl 11 in das Feld 4). Passt das denn´. Sieben (zeigt auf das Feld 5). Passt auch ne. Ja. Und hier acht (zeigt auf die Felder 3 und 1). Und dreizehn (schreibt die Zahl 13 in das Feld 2). Ah jetzt und hier die eins´ (schreibt die Zahl 1 in das Feld 8). Passt das´. (murmelnd) Zwölf, dreizehn, einundzwanzig (geht die Zeilen und Spalten ab), ja.

- 30 I Wunderbar (L schreibt die Zahl 12 in das Feld 9).
- 31 L Ja (streicht die falschen Zahlen erneut durch).
- 32 I Könntest du nochmal deine Strategie verbalisieren und dann noch mal begründen, warum das funktioniert´.
- 33 L Genau, also ähm. Wir haben einmal hier die Mittelzahl einfach sieben gesetzt (zeigt auf das Feld 5). Also wahllos.
- 34 I Ne zufällige Zahl´.
- 35 L Genau, ne zufällige Zahl. Dann haben wir ne weitere zufällige Zahl gesetzt, ähm, hier ist die zwei (zeigt mit dem Stift auf das Feld 1) und dann haben wir geguckt, wie hier der Abstand ist (zeigt auf das Feld 1 und dann das Feld 5), weil es äh die Verteilung gleich sein muss. Ähm genau, hier ist die Differenz fünf (zeigt immer noch auf die Felder 1 und 5), das heißt die Differenz zwischen sieben und der nächsten Zahl muss auch fünf sein (zeigt zunächst auf das Feld 5 und dann das Feld 9). Und da dies hier die Zahl kleiner ist (zeigt auf das Feld 1) muss diese größer sein (zeigt auf das Feld 9). Also sieben plus fünf gleich zwölf.
- 36 I Mh (zustimmend).
- 37 L Genau. Und dann haben wir ähm hier ne weitere zufällige Zahl eingesetzt (zeigt auf das Feld 6). Ähm, genau, also wir wussten, wir haben die Zauberzahl einundzwanzig ne, zwischen zwölf und einundzwanzig sind Differenz von neun, das heißt auf diesen beiden Kästchen muss die neun aufgeteilt sein (zeigt auf das Feld 3 und dann das Feld 6), sagen wir jetzt mal so. Und dann habe ich einfach die drei gesetzt (zeigt auf das Feld 6) und da die sechs (zeigt auf das Feld 3), damit ich auf einundzwanzig insgesamt komme (zeigt auf die Spalte mit den Feldern 3, 6 und 9). Genau und dann einfach so weiter gerechnet, sechs (zeigt auf das Feld 3) plus sieben (zeigt auf das Feld 5) plus die fehlende acht (zeigt auf das Feld 7) sind einundzwanzig (zeigt auf die Zauberzahl 21). Dann haben wir zwei (zeigt auf das Feld 1) plus acht (zeigt auf das Feld 7) plus die elf (zeigt auf das Feld 4) dann sind einundzwanzig und so weiter bis wir dann alle Zahlen haben.
- 38 I Super, das heißt ihr habt euch eine Zahl ausgesucht wahllos und habt von da aus dann einfach vorwärts gearbeitet einfach mit dem was ihr an Wissen habt´.
- 39 L Genau.
- 40 I Super. Könnt ihr dann noch mal auf den nächsten Zettel gehen´.

Das nicht fertige dritte Zauberquadrat von L und J:

2		5
7	4	1
3		6

Zauberzahl: 12

Das fertige vierte Zauberquadrat von L und J:

2	13	6
11	7	3
8	1	12

Zauberzahl: 21

Sequenz 4: L und J entdecken einen Sonderfall

Die Sequenz 4 schließt unmittelbar an Sequenz 3 an.

- 1 I Genau, da habe ich auch noch einmal ein zwei Quadrate aufgemalt. Und ähm L hatte am Anfang schon mal sowas gesagt man könnte sich ja ganz einfachen Trick zunutze machen und gesagt, wenn man vielleicht gleiche Zahlen verwenden könnte.
- 2 L Ja.
- 3 I Könnte man das als Strategie verwenden?
- 4 L Mh.
- 5 J Man könnte jetzt ja die Zahlen spiegeln.
- 6 L a Ne ne, nur gleiche Zahlen, also wir können ja einfach mal ausprobieren mit der zwei. Wir mach, wir machens einfach mal. Zwei. Zwei, zwei (schreibt in alle Felder die Zahl 2). b Das ist sechs (schreibt die Zahl 6 als Zauberzahl). c Zwei, ja müsste eigentlich gehen als Sonderfall, weil es ist ja diese Zauberzahl (zeigt auf die Zauberzahl) ist immer das Dreifache der Mittelzahl (zeigt auf das Feld 5). Die Verteilung ist gleich (zeigt auf die Diagonale mit den Feldern 2, 5 und 9). d Und alle

Reihen ergeben die sechs (zeigt auf alle Zeilen und Spalten und fährt diese mit dem Stift nach). Also wäre das vielleicht ne ein Sonderfall.

7 I (lobend) Sehr gut, L.

Das fertige fünfte Zauberquadrat von L und J:

2	2	2
2	2	2
2	2	2

Zauberzahl: 6

Sequenz 5: L und J verallgemeinern die Zauberquadrate und ihre Struktur

Sequenz 5 schließt unmittelbar an Sequenz 4 an.

- 1 I Gibt es noch eine Möglichkeit wie man vielleicht allgemein ein Zauberquadrat erzeugen könnte´.
- 2 L Joa, ähm, also wir haben hier ne Zahl x (schreibt die Variable x in Feld 5) und äh die Zauberzahl is immer das Dreifache der Zahl x , das heißt her ist drei x (schreibt $3x$ in das Feld der Zauberzahl). Dann haben wir hier immer, sagen wir is die kleinere, das ist ja eigentlich egal, also x minus y (schreibt $x-y$ in Feld 1). Und dann haben wir hier x plus y (schreibt $x+y$ in Feld 9). Genau. Und ähm hier (zeigt auf Feld 3) haben wir dann ne Zahl, also die musst ja kleiner sein als $x+y$ (zeigt auf Feld 9). Ja (2sec), mh (rückt mit dem Stuhl dichter an das Blatt), die Abstände müssen immer gleich bleiben. Also die Verteilung. Ähm setzen wir hier einfach mh, weiß nicht wie ichs schreiben soll, also hier.
- 3 I Also, du kannst auch einfach erstmal deine Idee ja versprachlichen und dann würde das schon reichen.
- 4 L Ja.
- 5 I Also erstmal erklären, was du machen willst.
- 6 L Okay. Also ich setz irgendeine Zahl ähm in die Mitte (zeigt auf Feld 5). Um dann äh eine weitere zufällige Zahl außen an irgendne Ecke (zeigt auf Feld 1). Ist auch egal, ob jetzt diese, diese, diese oder diese (zeigt nacheinander auf alle Ecken des

Zauberquadrates, also die Felder 1, 3, 9 und 6). Und dann guck ich mir die Differenz an zu der Zahl (zeigt auf Feld 5) und der Zahl (zeigt auf Feld 1). Wenn ich die hier abziehe (zeigt auf Feld 1), muss ich die Differenz auf der gegenüberliegenden Seite oder auf der anderen Seite der Diagonale hinzurechnen beziehungsweise umgekehrt (zeigt von Feld 1 auf Feld 5 und dann auf Feld 9). Dann ähm habe ich hier, dies hier diese drei Zahlen (zeigt auf die Felder 3, 6 und 9 der Spalte ganz rechts) äh diese drei Kästchen ergeben zusammen drei x (zeigt auf die Zauberzahl). x plus y hab ich schon mal und x plus y (zeigt auf Feld 9) ist kleiner als drei x (zeigt auf die Zauberzahl), das heißt diese beiden Zahlen (zeigt auf die Felder 3 und 6) ergeben zusammen ähm drei x (zeigt auf die Zauberzahl) minus x plus y (zeigt dann von der Zauberzahl auf Feld 9 und macht mit dem Stift imaginär Klammern um $x+y$). Genau, die Di- also, genau, die fehlende Differenz zur Zauberzahl (zeigt auf die noch leeren Felder 3 und 6 und dann auf die Zauberzahl) da kann ich wieder eine irgendeine x -beliebige Zahl nehmen ähm damit diese Differenz gegeben also die kleiner ist als diese Differenz und die dann mit der passenden Zahl auffüllen, sag ich jetzt mal, erweitern, addieren so. Addieren. Und dann muss ich nur noch stumpfes Ausrechnen (zeigt auf die Diagonale mit den Feldern 3, 5 und 7), sodass die Summe immer drei x ist (zeigt erneut auf die Diagonale und dann auf die Zauberzahl).

7 I Sehr gut. Also hast du dir jetzt quasi ne allgemeine Strategie überlegt, wie man quasi x -beliebige Zauberquadrate erzeugen könnte´.

8 L Genau. Ja.

9 I Und warum würde das funktionieren´.

10 L | Mh, weil wir einmal die ähm Verteilung gleich haben, also *genau die Verteilung is gleich. Und ähm, mh wie soll ich das sagen´. Die ähm, genau und weil ja immer is die Zauberzahl, also es wird immer, also die Zauberzahl hast du schon (zeigt auf die Zauberzahl) und du erweiterst dann ja immer nur bis zur Zauberzahl (zeigt auf das Feld 7, dann das Feld 5 und dann das Feld 3). Ähm

11 I | *Mh (zustimmend).

12 I Also würde quasi die Struktur erhalten bleiben´.

13 L Genau! Ja, genau. Die Struktur bleibt gleich und das wird dann nur ergänzt (zeigt auf die noch leeren Felder) sag ich mal.

14 I Mh (zustimmend). Sehr gut, danke, das hab ich echt klasse gemacht. Dann danke ich euch. Vor allem auch für die mega späte Uhrzeit.

Das nicht fertige sechste Zauberquadrat von L und J:

$x-y$		
	x	
		$x+y$

Zauberzahl: $3x$

- **Transkript: Interview 4: B und S**

Einordnung der Transkripte:

B und S begegnen im Interview zum ersten Mal Zauberquadraten und werden in Aufgabe 3 des Leitfadens zum Interview gebeten, Zauberquadrate mit einer Zauberzahl ihrer Wahl auf verschiedene Weisen zu erzeugen und dabei ihre bisher gesammelten Erkenntnisse über die Zauberquadrate und ihre Struktur zu nutzen. Die folgenden Sequenzen sind gemäß ihrem zeitlichen Auftreten im Interview dargestellt.

Sequenz 1: B und S äußern Strategie-Ideen und arbeiten vorwärts

- 1 I Und dann würde ich euch einfach mal bitten, ob ihr ein Zauberquadrat mit einer Zauberzahl eurer Wahl erzeugen und mir die Strategie beschreiben könnt´.
- 2 S Das Spiegeln hatten wir.
- 3 B Genau, das Spiegeln hatten wir. Ich würde sagen, da wir ja wissen das mit dem Verdreifachen, können wir uns schon mal die Mittelzahl, damit wir was stehen haben (zeigt auf Feld 5), herleiten.
- 4 S Ja.
- 5 B Wollen wir mal einfach die dreißig nehmen, haben wir ganz, ne schöne Zahl (schreibt die Zahl 30 in das Feld der Zauberzahl). Ja, durch drei sind zehn (schreibt die Zahl 10 in Feld 5). Dann wissen wir ja das mit den Abständen.
- 6 S Ja.
- 7 B Dass wenn es nach links hin plus zwei sind, muss es nach rechts hin minus zwei sein.
- 8 S Ja.

Anmerkung:

B und S versuchen nun, ein Zauberquadrat zu erzeugen, indem sie ihr Wissen zum Abstand von der Mittelzahl zu den jeweiligen Randzahlen einsetzen. Sie finden aber kein Zauberquadrat mit der gewählten Zauberzahl, dann wird vorgeschlagen, eine andere Zauberzahl zu wählen und neu zu beginnen.

- 9 B Dann fangen wir mal neu an, das is ja.
- 10 S Nehmen wir zwölf (B schreibt die Zahl 12 in das Feld 5). So dann haben wir jetzt gesagt Zauberzahl mal drei, gehen wir jetzt von aus ist dann sechsunddreißig.
- 11 I Richtig.

- 12 B Sechsdreißig (schreibt die Zahl 36 in das Feld der Zauberzahl).
- 13 S Wollen wir jetzt mal mit minus vier anfangen´.
- 14 B Können wa machen (trägt die Zahlen 8 in Feld 4 und 16 in Feld 6) ein. So. Richtig ne´.
- 15 S Soso, acht (murmelnd). Passt doch nicht. Sechsdreißig, tschuldigung. Alles klar. Nein, alles gut.
- 16 B Sechsdreißig. (4sec) So. Machen wir mal so (zeigt auf die Spalte mit den Feldern 2, 5 und 8), machen wir mal erst so (zeigt erst auf Feld 9, dann Feld 5 und dann Feld 1), dann können wir schon *dann können wir schon eine Zahl herleiten (zeigt auf die Felder 1, dann 4 und dann 7).
- 17 S *Ja.
- 18 S Was hatten wir gesagt minus vier, ne´. Minus vier (murmelnd). Mach mal minus vier (zeigt auf die Felder 1, dann 5 und dann 9). Ach das geht ja nicht. Das.
- 19 B Hatten wir ja gerade. Machen wir minus zwei.
- 20 S Ja.
- 21 B Haben wir hier zehn (trägt die Zahl 10 in Feld 1), ja und hier vierzehn (schreibt die Zahl 14 in Feld 9). *mh. Dann haben wir hier acht plus zehn sind (zeigt auf Feld 1 und dann Feld 4) achtzehn.
- 22 S *Sind´. Sechsdreißig, passt.
- 23 S Achtzehn, da muss Zahl achtzehn rein (zeigt auf Feld 7 und B trägt in dieses Feld die Zahl 18 ein).
- 24 B Und dann haben wir hier, wissen wir ja jetzt, plus (zeigt auf das noch leere Feld 8).
- 25 S Sechs. Da muss ne sechs.
- 26 B Sechs. Da auch ne sechs rein (trägt die Zahl 6 in das Feld 3 ein), dann gucken wir mal hier (zeigt auf die Zeile mit dem Feld 9).
- 27 S (murmelnd) Sechsdreißig. Passt.
- 28 B Das passt.
- 29 S So jetzt muss noch, da muss noch ne zwanzig (B schreibt die Zahl 20 in das Feld 2).
- 30 B Zwanzig.
- 31 S (murmelnd) Zweidreißig, ne vier. Äh vier´. Doch, ne vier.
- 31 B Äh.
- 32 S Brauchst jetzt nur ne
- 33 B Äh, ja, nein, ich überleg schon grade weiter (trägt die Zahl 4 in das Feld 8 ein). Guck mal, weil wir in regelmäßigen Abständen immer plus minus also, wir haben plus

minus zwei, plus minus vier, plus minus sechs, plus minus acht haben wir (geht dabei die Zeilen, Diagonalen und Spalten durch), plus minus zehn haben wir nicht. Ist schon vorbei.

- 34 I Genau, weil du ja nur so viele Möglichkeiten hast, das aufzuteilen.
- 35 B Ja, genau.
- 36 I Wunderbar. Also ihr seht eure Strategie hat funktioniert, es war ein blöd äh ungünstig gewähltes Beispiel.
- 37 B Ja.
- 38 I Super. Habt ihr noch, ihr habt ja am Anfang schon so ein paar Ideen gehabt, wie man Zauberquadrate erzeugen kann´. Habt ihr da noch Ideen´.

Das fertige erste Zauberquadrat von B und S:

10	20	6
8	12	16
18	4	14

Zauberzahl: 36

Sequenz 2: B und S Spiegeln bekannte Zauberquadrate

Sequenz 2 schließt unmittelbar an Sequenz 1 an.

- 1 S Was wir sachten, diese Spiegelung.
- 2 I Könnt ihr das vielleicht mal versuchen´.
- 3 S Ja (nimmt das Blatt zu sich). Ich hab's wirklich jetzt nicht auf dem Schirm. Aber wenn ich spiegel, das heißt doch die Zahl die Zahl muss hier rein, sechzehn kommt wieder in die Mitte und sechs da drüßba (zeigt auf Feld 9 des ersten Zauberquadrats und dann das Feld 3 des zweiten Zauberquadrats, zeigt dann auf Feld 6 des ersten Zauberquadrats und dann das Feld 6 des zweiten Zauberquadrats, zeigt dann auf Feld 3 des ersten Zauberquadrats und dann das Feld 9 des zweiten Zauberquadrats).
- 4 I Man könnte die auch so über Eck tauschen, hat B ja am Anfang gesagt.
- 5 S So (zeigt auf das Feld 1 und 9 und bewegt die Finger zwischen beiden hin und her).
- 6 I Ja (S schreibt die Zahl 6 in Feld 7 und die Zahl 18 in Feld 3).

- 7 S Das heißt zwölf bleibt immer in der Mitte´.
- 8 I Ja (S schreibt die Zahl 12 in Feld 5).
- 9 S Achtzehn. Vier (schreibt die Zahl 4 in das Feld 2). Zwanzig (schreibt die Zahl 20 in das Feld 8). (murmelnd) ne. (5sec) Oh, sch***, jetzt hab ich mich aber verrannt. Zehn (schreibt die Zahl 10 in Feld 9). Vierzehn (schreibt die Zahl 14 in Feld 1). Bin ich noch auf dem richtigen Weg (zu B)´. Fehlt hier nur noch *sechzehn, ja (schreibt die Zahl 16 in Feld 4).
- 10 B *Sechzehn. Ja.
- 11 S Sechzehn und acht so (schreibt die Zahl 8 in das Feld 6).
- 12 I Richtig.
- 13 B Dann sind das auch immer sechsunddreißig (S schreibt die Zahl 36 als Zauberzahl auf).
- 14 I Und warum würde das jetzt funktionieren die Strategie´.
- 15 B Da äh, da tatsächlich ja alle Reihen gleich ne. Ja, weil das gespiegelt ist. Also ich glaub.
- 16 I Wenn du das spiegelst, was bleibt denn dann währenddessen immer erhalten´.
- 17 S Die Mittelzahl und die Abstände zueinander. Dieses gleiche plus minus vier.
*In diesem Fall
- 18 I *Und dadurch bleibt das erhalten, die Struktur. Und dadurch funktioniert das immer wieder.

Das fertige zweite Zauberquadrat von B und S:

14	4	18
16	12	8
6	20	10

Zauberzahl: 36

Sequenz 3: Von einem Sonderfall mit Abstandsverteilungen zu neuen Zauberquadraten

Sequenz 3 schließt unmittelbar an Sequenz 2 an.

- 1 I Da hatte B gesagt, wenn man immer die gleiche Zahl verwenden würde, würde das funktionieren, um ein neues Zauberquadrat zu erzeugen´.
- 2 B Ja.
- 3 S Achso, du meinst fünf fünf, fünf fünf, fünf fünf, fünf fünf, fünf fünf (zeigt mit dem Finger auf die Felder des noch leeren Zauberquadrats).
- 4 B Ah (zieht sich den Zettel heraus), da würde ich jetzt die Kästchen für verwenden.
- 5 I Wie meinst du´.
- 6 B Ne, ich kann das auch in einem, tschuldigung. Ich fang einfach mal an. Zwölf hatten wir jetzt wollen wir mal die vierzehn nehmen´.
- 7 I Könnt ihr machen.
- 8 B Wir sollen ja ein neues erzeugen.
- 9 I Ja, genau.
- 10 B Ich schreib mal hier groß die vierzehn rein (schreibt die Zahl 14 in Feld 5). Dann mach ich mal überall kleine vierzehnen rein (schreibt in alle übrigen Felder kleine 14en hinein). So, weil ich brauch den Platz gleich noch zum Schreiben. Deswegen mach ich die nur ganz klein. Vierzehn (tippt dynamisch mit dem Stift auf die groß geschriebene Zahl 14 in Feld 5) mal drei beziehungsweise vierzehn plus vierzehn plus vierzehn ergibt (lacht).
- 11 S Zweiundvierzig.
- 12 B Zweiundvierzig (schreibt die Zahl 42 als Zauberzahl auf). Dann fangen wir einfach mal an. Plus zwei.
- 13 I Könnten wa machen.
- 14 B Könnten wa machen. Sechzehn (schreibt in das Feld 2 über die kleine eingetragene Zahl 14 die Zahl 16) und hier zwölf (schreibt in das Feld 8 über die kleine eingetragene Zahl 14 die Zahl 12).
- 15 I (murmelnd) Das ist auch richtig schlau.
- 16 B Und dann äh mit vier ,wollen wir das mal mit vier machen´. *Wir könnten auch.
- 17 I *Könnt ihr auch machen.
- 18 B Dann haben wir zehn (schreibt die Zahl 10 in das Feld 4 über die kleine 14), noch ist es ja egal wohin ich das schreibe dieses auch mit plus links rechts das.

- 19 I Mh (zustimmend).
- 20 B Das brauch ich ja jetzt noch nicht beachten, weil diese Zahlen noch nicht zusammen gehören. Hier wird das interessant in den Ecken. Was sachten wir jetzt', plus vier (schreibt die Zahl 18 in Feld 6 über die kleine 14). Dann machen wir das ganze nochmal mit sechs, dann haben wir immer gleiche Abstände, immer plus zwei. Ähm, würde ich jetzt hier mal, ich schreib mal hin schwach zwanzig (schreibt die Zahl 20 in das Feld 1 über die kleine 14) und hier acht (schreibt die Zahl 8 in das Feld 9 über die kleine 14). Dann hätte ich hier (murmelnd) zwanzig (zeigt auf Feld 8 und 9), dann bräuchte ich noch zwölf hier hin (schreibt in Feld 7 die Zahl 12 über die kleine 14).
- 21 S Die haben wir da ja schon (zeigt auf die Zahl 12 in Feld 8).
- 22 B Aber wenn ich ne andere Zahl nehmen würde, wir probierens mal mit einer anderen, vielleicht ist das ja nur doofer Zufall (dass sich die Zahl doppelt und es nicht funktioniert).

B und S probieren weiter unter Einhaltung des gleichen Abstands von der Mittelzahl zu den Randzahlen durch Einsetzen und Probieren ein Zauberquadrat zu erzeugen.

- 23 I Das ist wieder so ein Knobelding. Kannst du versuchen zu erklären, was du tun willst'.
- 24 B Ja, wir müssen nur die vierzehnen abändern, wir gehen ganz grundlegend davon aus, es sind in jeden Feld ne vierzehn is. Nur weil wir hier beliebig sagen wir mal einfach die vierzehn (zeigt auf Feld 3) da zwei abziehen, dann müssen wir hier gegenüberliegend immer (zeigt auf Feld 7) gegenüberliegend zwei draufzählen.

Das dritte Zauberquadrat von B und S, links in (10) und rechts am Ende des Interviews:

14	14	14
14	14	14
14	14	14

Zauberzahl: 42

9 14	16 14	3 14
8 14	14	20 14
25 14	12 14	19 14

Zauberzahl: 42

- **Legende und Leitfaden zur Erstellung der Transkripte**

Für die Transkription wurde der folgende Leitfaden mit den darin aufgeführten Regeln genutzt:

Transkriptionsregeln

1 Linguistische Zeichen

1.1 Identifizierung des Sprechers

I Interviewerin

Die Namen der SchülerInnen werden mit dem ersten (und ggf. zur Abgrenzung des anderen Namens zweiten) Buchstaben ihres Namens gekennzeichnet.

1.2 Charakterisierung der Äußerungsfolge

a) Einen Strich vor mehreren Äußerungen: untereinander Geschriebenes wurde jeweils gleichzeitig gesagt, zum Zeitpunkt des Sternchens in der ersten Äußerung setzt die ebenfalls mit dem Sternchen gekennzeichnete zweite Äußerung ein, z.B.

M	die *haben wir aber nicht gemacht
F	*haben wir nicht

oder

M	ich würde den *hier nehmen weil hier ist ne vier drauf, aber der geht auch und der da ist auch nicht schlecht
F	*nein

b) Eine Zeile beginnt genau unterhalb des letzten Lautes aus der vorigen Äußerung: auffällig schneller Anschluss, z.B.

M	das ist doch null
F	null

2 Paralinguistische Zeichen

,	kurzes Absetzen innerhalb einer Äußerung, max. eine Sekunde
..	kurze Pause von zwei Sekunden
(3sec)	kurze Pause in angegebener Länge
genau.	Senken der Stimme am Ende einer Äußerung
und du-	Stimme in der Schwebe am Ende einer Äußerung
was'	Heben der Stimme, Angabe jeweils hinter dem entsprechenden Wort
sicher, sicher	auffällige Betonung
dreißig	gedehnte Aussprache
zehn	auffällig schnelle Aussprache

3 Weitere Charakterisierungen

(lauter), (leiser), u.ä.	Die Stimme des Sprechenden ändert sich entsprechend und bleibt so bis zum nächsten „+“
(.), (..), (...), (?4sec)	undeutliche Äußerung von 1, 2, 3 oder mehr Sekunden
(mal?)	unverstandene, aber vom Beobachter vermutete Äußerung
(schreiben), u.ä.	Charakterisierung der Handlungen der entsprechenden Person
(Gemurmel), u.ä.	Charakterisierung von atmosphärischen Anteilen

Selbstständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich an Eides statt, dass ich diese Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe. Außerdem versichere ich, dass ich die allgemeinen Prinzipien wissenschaftlicher Arbeit und Veröffentlichung, wie sie in den Leitlinien guter wissenschaftlicher Praxis der Carl von Ossietzky Universität Oldenburg festgelegt sind, befolgt habe.

Oldenburg, den 19.03.2021