

Nichtlineare Stabilitätsanalyse der
3D-Couette-Strömung unter Berücksichtigung der
Energietransfererhaltung

Vom Fachbereich Physik
der Carl von Ossietzky Universität Oldenburg
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)
angenommene Dissertation.

Andreas Spille
geboren am 20. Februar 1970
in Oldenburg (Oldb.)

Erstreferent : Prof. Dr. Alexander Rauh
Korreferent : Prof. Dr. Joachim Peinke
Tag der Disputation : 21. April 1999

Kapitel 1

Einleitung

In dieser Arbeit wird die inkompressible ebene Couette-Strömung (ECS) in drei Dimensionen im unteren Reynoldszahlbereich bis ca. $R = 350$ auf nichtlineare Instabilität untersucht. Im Mittelpunkt stehen die Untersuchung der Energiebilanz infolge äußerer positiver oder negativer Energiezufuhr an den Wänden, durch Dissipation und durch Energietransfer (Energieumverteilung) zwischen einzelnen Strömungsanteilen. Es wird gezeigt, daß über die Energietransferterme die relevante Dimension des zu den Navier-Stokes-Gleichungen im wesentlichen äquivalenten dynamischen Systems abgeschätzt werden kann. Des weiteren wird ein Verfahren vorgeschlagen und angewendet, das durch Renormierung der Kopplungskoeffizienten die Energietransfererhaltung eines abgeschnittenen, endlichen Galerkinsystems gewährleistet.

Ausgangspunkt vieler numerischer Untersuchungen sind hochdimensionale direkte numerische Simulationen, neben reinen Differenzenverfahren auch Kollokationsmethoden und Fourierzerlegungen[18, 23, 30, 41, 43], oder niedrigdimensionale Modelle[1, 19, 47, 48], die von Hand so konstruiert werden, daß transientes Wachstum und energieerhaltende nichtlineare Terme eingeschlossen sind. Diese Arbeit soll eine Verbindung zwischen beiden Ansätzen schaffen: Es wird eine Methode vorgestellt, wie aus den Navier-Stokes-Gleichungen und der Kontinuitätsgleichung mit einem Fourieransatz parallel zu den mit konstanter Geschwindigkeit bewegten Platten und der Entwicklung nach Eigenfunktionen des um die Grundströmung linearisierten Problems ein dynamisches System resultiert, das in den linearen Termen diagonalisiert ist. Für dieses System wird eine Methode zur Renormierung der Kopplungskoeffizienten des nichtlinearen Terms vorgeschlagen, die es erlaubt, endliche Systeme fast beliebiger Dimension mit Energietransfererhaltung und den Wänden und der internen Dissipation als einzige Energiequellen und -senken zu konstruieren. Damit wird gewährleistet, daß die Geschwindigkeiten der Strömung beschränkt bleiben, wie von den Navier-Stokes-Gleichungen gefordert wird [16, 40]. Die Energietransfererhaltung wird oft durch Integration im hier irrelevanten dissipations- und antriebslosen Grenzfall getestet und entspricht dann der Energieerhaltung der Euler-Gleichungen[43]. Im fourierentwickelten 2D-Rayleigh-Bénard-Problem erwies sich die Energietransfererhaltung als wichtig, um beschränkte Lösungen zu erhalten[45].

Die ECS ist linear stabil[42], d.h. der Übergang zur Turbulenz erfolgt subkritisch. Wie mit Hilfe der Navier-Stokes-Gleichungen gezeigt werden kann, ist die Strömung unterhalb der Reynoldszahl 20.7 global stabil, d.h. die Energie jeder Störung fällt monoton ab[29]. Die aktuellen theoretischen Untersuchungen zum Übergang von der laminaren zur turbulenten Strömung können grob in folgende Bereiche eingeteilt werden:

(i) Durch parametrisierte Übergänge werden stationäre Zustände anderer Strömungstypen zur ECS überführt: Nagata (1990) [31] betrachtete die Taylor-Couette-Strömung im Grenzfall verschwindender Corioliseffekte und fand stehende dreidimensionale Lösungen mit endlicher Amplitude für $R \geq 125$; Clever und Busse (1992) [8] (ausgehend von der Rayleigh-Bénard-Konvektion bei Reynoldszahlen von 590 bis 1000), Nagata (1996) [32] (durch Abschalten eines Magnetfeldes bei der Reynoldszahl 525) und Cherhabili und Ehrenstein (1995, 1997) [6, 7] (durch den Übergang von der Poiseuille-Strömung in zwei Dimensionen bei den Reynoldszahlen 1500 und 1000) fanden ebenfalls stationäre Zustände, deren Stabilitätsanalysen sich aber entweder als nicht möglich erwiesen oder Instabilität ergaben.

(ii) Nichtnormalität: In einer Reihe von Veröffentlichungen, z.B. [5, 10, 14, 19, 22, 27, 47], wurden lineare Verstärkungsfaktoren und optimale Anfangsstörungen berechnet und verschiedenste niedrigdimensionale (zwei- bis fünfdimensionaler Zustandsraum) Modelle aufgestellt, die, zumeist mathematisch motiviert, transientes Wachstum durch Nichtnormalität und energieerhaltende nichtlineare Terme enthielten. Einen Überblick über diese Modelle gaben Baggett und Trefethen (1997) [1].

(iii) Direkte numerische Simulationen, teilweise in Verbindung mit den Ergebnissen für transientes Wachstum: Lundbladh und Johansson (1991) [30] nutzten als Anfangsstörung einer Simulation mit über zwei Millionen Moden vier Wirbelpaare und fanden die kritische Reynoldszahl $R_c = 375$, ab der langlebige Zustände möglich sind. Hamilton et al. (1995) [23] verringerten in einem Modell mit über 8000 Moden Reynoldszahl und Zellengröße eines turbulenten Zustandes und fanden bei der Reynoldszahl 400 als obere Grenzen für die Basiswellenzahlen $\alpha = 5/4$ und $\beta = 20/11$. Reddy et al. (1998) [41] stützten das Bild bei einer Simulation mit über 80.000 Moden: Bei $R = 500$ sollte $0.3 < \alpha < \beta < 2$ sein. Der Reynoldszahlbereich bis etwa $R = 500$ wurde durch Eckhardt, Schmiegel et al.(1997) [18, 43] mit 962 Freiheitsgraden und einem lokalisierten Wirbelring als Anfangszustand betrachtet. Sie fanden bis $R = 300$ abfallende Zustände mit transientem Anstieg und ab $R = 350$ Zustände mit langer Lebensdauer, die sehr sensitiv vom Anfangszustand abhängt. Sie sprachen von Fraktalität der Lebensdauer und vermuteten einen Abstoßungsmechanismus statt eines Szenarios mit Attraktoren. Bergström (1999) [3] erstellte ein 12-dimensionales Modell der ebenen Poiseuille-Strömung und zeigte daran wesentliche Mechanismen bei $R = 5000$. Seine Methoden sind teilweise ähnlich zu den in dieser Arbeit benutzten, allerdings geht er nicht auf die Energietransfererhaltung ein, was sich hier als sehr wichtig herausstellt.

Experimentell wurde die ECS in einer Reihe neuerer Arbeiten untersucht: Tillmark und Alfredsson (1992) [46] benutzten eine umlaufende Plastikfolie mit Ab-

stand 10mm, die Länge der Teststrecke betrug etwa 1m. Zur Störung benutzten sie einen Wasserstrahl oder aufsteigende Luftblasen und fanden die kritische Reynoldszahl $R_c = 360 \pm 10$. Daviaud et al. (1992) [13] benutzten einen in der Amplitude variablen Wasserstrahl und fanden $R_c = 370 \pm 10$. Dauchot und Daviaud (1995) untersuchten neben Raum-Zeit-Entwicklungen der Turbulenz den Übergang vom laminaren zum turbulenten Bereich und fanden mit sehr schnellen Wasserstrahlen $R_c = 325 \pm 5$ [11], mit einem quer zur Strömung gespannten Draht $R_c = 340$ unabhängig vom Drahtdurchmesser[12]. Denselben Aufbau nutzten sie zusammen mit Bottin (1998) [4], um Modellvorstellungen für den Übergang zur Turbulenz zu überprüfen. Es hat sich folgendes Bild etabliert [4, 23, 41, 47, 48, 49]: Ausgehend von Paaren von entgegengesetzt rotierenden Wirbeln ("streamwise vortices"), deren Achsen in Strömungsrichtung liegen, bilden sich zwischen diesen Wirbeln lange, in Strömungsrichtung weitgehend konstante Strukturen ("streaks"), die instabil werden und verwirbeln. Während dieser Prozeß etwa ab der Reynoldszahl $R = 190$ experimentell gefunden wurde[4], bilden sich (nach Abklingen der kleinskaligen Bewegungen durch Dämpfung) neue gegenläufige Wirbelpaare und damit ein selbsterhaltender Prozeß erst ab etwa $R = 325$.

Diese Arbeit ist folgendermaßen aufgebaut: In Kapitel 2 werden die Grundgleichungen formuliert und durch zwei unabhängige skalare Felder dargestellt (Geschwindigkeit(v)-Wirbelstärke(η)-Entwicklung). Die linearisierten Formen dieser Gleichungen werden gelöst. In Kapitel 3 wird das volle nichtlineare Problem durch ein Galerkinsystems beschrieben und speziell für niedrigdimensionale Systeme ein Optimierungsverfahren zur Bestimmung der Koeffizienten vorgestellt. In Kapitel 4 wird die Energieerhaltung der nichtlinearen Terme der Navier-Stokes-Gleichungen auf das Galerkinsystem übertragen: Es ergeben sich Anforderungen an die Kopplungskoeffizienten des nichtlinearen Teils des Galerkinsystems, die in einem endlichen Galerkinsystem erst nach einer Renormierung der Koeffizienten erfüllt werden. Das Renormierungsverfahren wird in Kapitel 5 vorgestellt und die Relevanz der Energietransfererhaltung untermauert, indem Trajektorien für das renormierte und das nichtrenormierte Galerkinsystem verglichen werden. In Kapitel 6 werden Trajektorien im renormierten System untersucht. Die kritische Reynoldszahl wird bestimmt, und die sensitive Abhängigkeit von den Anfangs- und Integrationsbedingungen wird untersucht. Kapitel 7 faßt die Methoden und Ergebnisse zusammen.

In Anhang A werden die Eigenwerte und -funktionen des linearisierten Problems vorgestellt. Die Computerimplementierung obiger Untersuchungen wird in Anhang B beschrieben. Auf ein Vollständigkeitsproblem bei der Entwicklung nach den Eigenfunktionen der Orr-Sommerfeld-Gleichung wird in Anhang C eingegangen.

Kapitel 2

Grundgleichungen und Linearisierung

2.1 Die Couette-Strömung

Die Grundgleichungen für die dreidimensionale inkompressible Couette-Strömung werden in folgender Form verwendet[2, 24]:

$$(\partial_t + U\partial_x)\Delta v - \frac{1}{R}\Delta^2 v = \left[\text{rot rot} \left((\vec{u}\vec{\nabla})\vec{u} \right) \right]_y =: N^v, \quad (2.1)$$

$$(\partial_t + U\partial_x)\eta + U'\partial_z v - \frac{1}{R}\Delta\eta = \left[\text{rot} \left(-(\vec{u}\vec{\nabla})\vec{u} \right) \right]_y =: N^\eta, \quad (2.2)$$

$$(\partial_t + U\partial_x)u + U'v - \frac{1}{R}\Delta u = -\partial_x p - (\vec{u}\vec{\nabla})u, \quad (2.3)$$

$$(\partial_t + U\partial_x)v - \frac{1}{R}\Delta v = -\partial_y p - (\vec{u}\vec{\nabla})v, \quad (2.4)$$

$$(\partial_t + U\partial_x)w - \frac{1}{R}\Delta w = -\partial_z p - (\vec{u}\vec{\nabla})w \quad (2.5)$$

mit

$$\text{div } \vec{u} = 0, \quad (2.6)$$

$$\eta = (\text{rot } \vec{u})_y, \quad (2.7)$$

$$\vec{v} = U\hat{x} + \vec{u}, \quad (2.8)$$

$$v = \partial_y v = u = w = \eta = 0 \text{ bei } y = \pm 1. \quad (2.9)$$

Hierbei sind $U(y)\hat{x}$ die Grundströmung in x -Richtung, \vec{v} das Strömungsfeld, $R = hU_m/\nu$ die auf dem halben Plattenabstand und der halben Geschwindigkeitsdifferenz der Platten basierende Reynoldszahl (siehe Abbildung 2.1), u, v, w die x, y, z -Komponente der Abweichung \vec{u} des Geschwindigkeitsfeldes von der Grundströmung und η die y -Komponente der Rotation von \vec{u} ("vertical vorticity"). Gleichung (2.2) ergibt sich mit der Definition (2.7) durch einmalige Anwendung von rot auf die Navier-Stokes-Gleichungen, (2.1) durch zweimalige Anwendung von rot , die Gleichungen

(2.3) bis (2.5) folgen direkt aus den Navier-Stokes-Gleichungen. Die Flüssigkeit soll an den mit konstanter Geschwindigkeit bewegten Platten haften.

In dimensionslosen Einheiten ist $U = y$, $U' = 1$ und $U'' = 0$. Die dimensionsbehaftete Zeit ergibt sich durch Multiplikation mit h/U_m . Dieser Faktor ist die Zeit, die ein Teilchen mit der Geschwindigkeit U_m , d.h. mit der halben Geschwindigkeitsdifferenz der bewegten Platten bzw. im symmetrischen Fall mit der Geschwindigkeit einer Platte, benötigt, um die Distanz h , d.h. den halben Plattenabstand, zurückzulegen. Die dimensionslose Zeit gibt für die Couette-Strömung an, um wieviele halbe Plattenabstände sich jede Platte in ihre Richtung weiterbewegt hat.

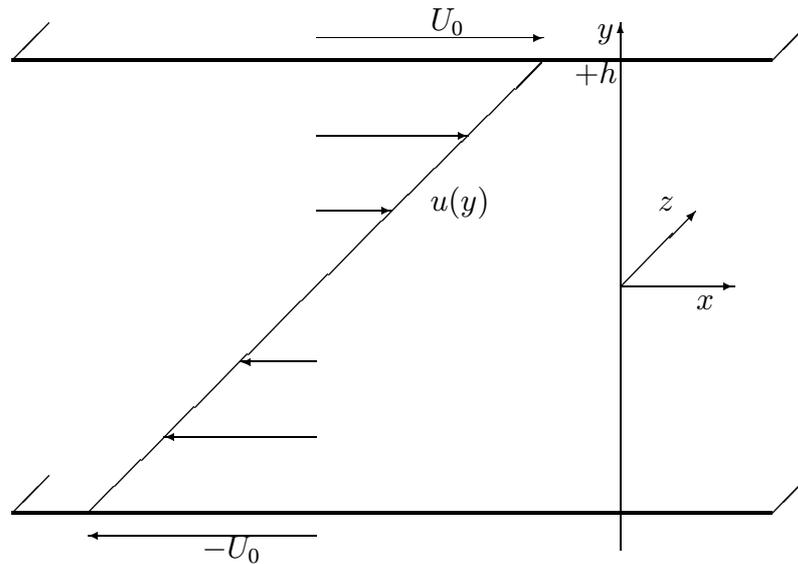


Abbildung 2.1: Geometrie der dimensionsbehafteten Couette-Strömung.

2.2 Der Lösungsansatz

Unter der Annahme periodischer Randbedingungen in x - und z -Richtung mit Periodenlänge $2\pi/\alpha$ bzw. $2\pi/\beta$ werden die Fourieransätze

$$\vec{u}(x, y, z, t) = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} e^{i\alpha m x + i\beta n z} \begin{pmatrix} u_{m,n}(y, t) \\ v_{m,n}(y, t) \\ w_{m,n}(y, t) \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

$$p(x, y, z, t) = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} e^{i\alpha m x + i\beta n z} p_{m,n}(y, t) \quad (2.11)$$

mit den Basiswellenzahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gewählt [2, 24]. Mit (2.7) und (2.10) läßt sich η darstellen als

$$\eta(x, y, z, t) = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} e^{i\alpha m x + i\beta n z} \eta_{m,n}(y, t) \quad (2.12)$$

mit

$$\eta_{m,n}(y, t) = i\beta n u_{m,n} - i\alpha m w_{m,n}, \quad (2.13)$$

was $\eta_{0,0} \equiv 0$ impliziert. Aus der Kontinuitätsgleichung (2.6) und den Randbedingungen (2.9) folgt $v_{0,0} = 0$. Damit die physikalischen Felder reell sind, muß gelten:

$$u_{m,n}(y, t) = u_{-m,-n}^*(y, t), \quad (2.14)$$

analog für $v_{m,n}(y, t)$, $w_{m,n}(y, t)$, $p_{m,n}(y, t)$ und $\eta_{m,n}(y, t)$.

Aufgrund der Kontinuitätsgleichung (2.6) und der Gleichung (2.13) können für $(m, n) \neq (0, 0)$ die Geschwindigkeitskomponenten

$$u_{m,n} = \frac{i}{k_{m,n}^2} (\alpha m \partial_y v_{m,n} - \beta n \eta_{m,n}), \quad (2.15)$$

$$w_{m,n} = \frac{i}{k_{m,n}^2} (\beta n \partial_y v_{m,n} + \alpha m \eta_{m,n}) \quad (2.16)$$

mit

$$k_{m,n}^2 = \alpha^2 m^2 + \beta^2 n^2 \quad (2.17)$$

aus $v_{m,n}$ und $\eta_{m,n}$ bestimmt werden. Die Randbedingungen (2.9) lauten für die Fourierkomponenten mit $m, n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} u_{m,n}(y = \pm 1, t) &= w_{m,n}(y = \pm 1, t) = \eta_{m,n}(y = \pm 1, t) = 0, \\ v_{m,n}(y = \pm 1, t) &= \partial_y v_{m,n}(y = \pm 1, t) = 0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Jede beliebige Wahl von $v_{m,n}$ und $\eta_{m,n}$, die diese Randbedingungen erfüllt, führt somit zu einem Strömungsfeld \vec{u} , das divergenzfrei ist und die Randbedingungen (2.9) erfüllt.

Mit dem Ansatz (2.10) folgt aus dem linearen Teil von (2.1) als (m, n) -Fourierkomponente die Orr-Sommerfeld-Gleichung

$$L_{OS} v_{m,n} = R \partial_t (\partial_y^2 - k_{m,n}^2) v_{m,n} \quad (2.19)$$

mit dem Orr-Sommerfeld-Operator:

$$L_{OS} = (\partial_y^2 - k_{m,n}^2)^2 - i\alpha m R y (\partial_y^2 - k_{m,n}^2). \quad (2.20)$$

Analog folgt für die (m, n) -Fourierkomponente aus dem linearen Teil von (2.2) die Squire- oder Vertical-vorticity-Gleichung

$$L_{SQ}\eta_{m,n} = R\partial_t\eta_{m,n} + i\beta n Rv_{m,n} \quad (2.21)$$

mit dem Squire-Operator:

$$L_{SQ} = \partial_y^2 - k_{m,n}^2 - i\alpha m R y. \quad (2.22)$$

Für $m = n = 0$, d.h. für die von x und z unabhängigen Anteile, gilt (s.o.) $v_{0,0} = \eta_{0,0} = 0$, und aus den linearen Teilen von (2.3) und (2.5) ergeben sich die Gleichungen

$$\partial_y^2 u_{0,0} = \partial_t R u_{0,0}, \quad (2.23)$$

$$\partial_y^2 w_{0,0} = \partial_t R w_{0,0}. \quad (2.24)$$

2.3 Orr-Sommerfeld- und Squire-Gleichung

Die Fourierkomponente $v_{m,n}(y, t)$ aus (2.10) kann als Linearkombination des vollständigen Eigenfunktionsystems [15, 26] $\{v_j(y)\}$ der Gleichung

$$L_{OS}v_j = R\lambda_j(\partial_y^2 - k_{m,n}^2)v_j \quad (2.25)$$

mit den Eigenwerten λ_j geschrieben werden, die den Randbedingungen

$$v_j(y = \pm 1) = \partial_y v_j(y = \pm 1) = 0 \quad (2.26)$$

genügen. Dabei zählt $j = (m, n, \nu)$ mit $\nu = 1, 2, \dots$ die Eigenzustände zur Fouriermode (m, n) , nach der Größe des Realteils der Eigenwerte vom Größten ausgehend sortiert, ab. Da im Falle der ebenen Couette-Strömung alle Eigenwerte λ_j negative Realteile haben [42], ist die Strömung für alle Reynoldszahlen linear stabil. In Anhang A sind exemplarisch numerisch ermittelte Eigenwerte und Eigenfunktionen der homogenen Orr-Sommerfeld-Gleichung angegeben; das Eigensystem (2.25) wurde, wie in Anhang B beschrieben, durch Entwicklung nach Tschebyscheff- oder Legendrepoly-nomen gelöst.

Zur Berechnung der Kopplungskoeffizienten des Galerkinsystems durch Projektion wird eine Orthogonalitätsrelation [17] genutzt: Für Funktionen $f, g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ wird das "Skalarprodukt"

$$\langle f|g \rangle = \int_{-1}^1 f(y) \cdot g(y) dy \quad (2.27)$$

eingeführt, das zwar nur für reelle f, g ein Skalarprodukt ist, hier aber auch für komplexe Funktionen genutzt wird. Hiermit läßt sich zum Operator L_{OS} unter Ausnutzung der Randbedingungen der adjungierte Operator

$$L_{OS}^+ = (\partial_y^2 - k_{m,n}^2)^2 - i\alpha m R(\partial_y^2 - k_{m,n}^2)y \quad (2.28)$$

definieren. Für die Eigenwerte λ_k^+ (mit $k \cong (m, n, \nu')$) und die Eigenfunktionen v_k^+ des adjungierten Problems

$$L_{OS}^+ v_k^+ = \lambda_k^+ R(\partial_y^2 - k_{m,n}^2) v_k^+ \quad (2.29)$$

mit den Randbedingungen

$$v_k^+(y = \pm 1) = \partial_y v_k^+(y = \pm 1) = 0 \quad (2.30)$$

folgt ein zur Orr-Sommerfeld-Gleichung identisches Eigenwertspektrum mit $\lambda_k^+ = \lambda_k$ und, nach entsprechender Normierung, bei nichtentartetem Spektrum die Biorthonormalbeziehung

$$\langle v_k^+ | (\partial_y^2 - k_{m,n}^2) v_j \rangle = \delta(j, k). \quad (2.31)$$

Die Lösung $\eta_{m,n}(y, t)$ der Squire-Gleichung (2.21), als Differentialgleichung in y aufgefaßt, besteht aus der Überlagerung einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung und der Superposition der allgemeinen homogenen Lösung. Die homogenen Funktionen sind die Eigenfunktionen $\tilde{\eta}_j$ (mit $j \cong (m, n, \nu)$) des Eigensystems

$$L_{SQ} \tilde{\eta}_j = R \mu_j \tilde{\eta}_j \quad (2.32)$$

mit den Eigenwerten μ_j und den Randbedingungen

$$\tilde{\eta}_j(y = \pm 1) = 0. \quad (2.33)$$

In Anhang A sind exemplarisch numerisch bestimmte Eigenwerte der homogenen Squire-Gleichung angegeben. Eine Lösung der inhomogenen Gleichung zum Term $v_{m,n}(y, t)$ aus (2.19) läßt sich durch Superposition aus den Lösungsfunktionen η_j des inhomogenen Gleichungssystems

$$(L_{SQ} - R \lambda_j) \eta_j = i \beta n R v_j \quad (2.34)$$

mit den Randbedingungen

$$\eta_j(y = \pm 1) = 0 \quad (2.35)$$

bilden, wobei v_j und λ_j die Eigenfunktionen bzw. Eigenwerte aus (2.25) sind. Die Realteile der μ_j sind bei beliebigen Grundströmungen $U(y)$ negativ[25], für die Imaginärteile gilt im Falle der Couette-Strömung:

$$-|m\alpha| < \text{Im } \mu_j < |m\alpha|. \quad (2.36)$$

Der Squire-Operator ist bezüglich $\langle | \rangle$ selbstadjungiert, so daß für nichtentartete Spektren $\{\mu_j\}$ nach Festlegung der Phase durch $\langle \tilde{\eta}_j | \tilde{\eta}_j \rangle \in \mathbb{R}$ und des Betrages (in Anlehnung an Kapitel 4) durch

$$\frac{1}{k_{m,n}^2} \int_{-1}^1 |\tilde{\eta}_j|^2 dy = 1 \quad (2.37)$$

die Beziehung

$$\langle \tilde{\eta}_j | \tilde{\eta}_k \rangle = \frac{1}{c_j} \delta(j, k) \quad (2.38)$$

mit $c_j \in \mathbb{R}$ folgt. Für v_j und η_j wird, ebenfalls in Anlehnung an Kapitel 4, gefordert:

$$\int_{-1}^1 |v_j|^2 + \frac{1}{k_{m,n}^2} |\partial_y v_j|^2 + \frac{1}{k_{m,n}^2} |\eta_j|^2 dy = 1. \quad (2.39)$$

Zur Berechnung der Kopplungskoeffizienten des Galerkinsystems wird später verwendet, daß die Lösungsfunktionen \tilde{v}_j der inhomogenen adjungierten Orr-Sommerfeld-Gleichung

$$\{L_{OS}^+ - \mu_j R(\partial_y^2 - k_{m,n}^2)\} \tilde{v}_j = i\beta n R \tilde{\eta}_j \quad (2.40)$$

mit den Randbedingungen

$$\tilde{v}_j(y = \pm 1) = \partial_y \tilde{v}_j(y = \pm 1) = 0 \quad (2.41)$$

und den Eigenwerten μ_j und Eigenfunktionen $\tilde{\eta}_j$ aus (2.32) wegen

$$\begin{aligned} & \mu_k R \int_{-1}^1 \{ [(\partial_y^2 - k_{m,n}^2) \tilde{v}_k] v_j + \tilde{\eta}_k \eta_j \} dy \\ &= \lambda_j R \int_{-1}^1 \{ \tilde{v}_k [(\partial_y^2 - k_{m,n}^2) v_j] + \tilde{\eta}_k \eta_j \} dy \end{aligned} \quad (2.42)$$

die Beziehung:

$$\langle \tilde{v}_k | (\partial_y^2 - k_{m,n}^2) v_j \rangle + \langle \tilde{\eta}_k | \eta_j \rangle \stackrel{\text{i.a.}}{=} 0 \quad (2.43)$$

erfüllen (bis auf spezielle Parameterkombinationen $\alpha m R$ und $k_{m,n}^2$, bei denen die Spektren $\{\lambda_j\}$ und $\{\mu_k\}$ nicht disjunkt sind).

2.4 Gleichungen für $(m, n) = (0, 0)$

Für $m = n = 0$ wird die allgemeine Lösung von (2.23) und (2.24) durch Superposition der Eigenfunktionen u_{j_0} und $\tilde{w}_{j_0} := u_{j_0}$ des Eigenproblems (mit $j_0 \cong (0, 0, \nu)$)

$$\partial_y^2 u_{j_0} = \lambda_{j_0} R u_{j_0} \quad (2.44)$$

mit den Randbedingungen

$$u_{j_0}(y = \pm 1) = 0 \quad (2.45)$$

gebildet. Es ergeben sich für $\nu \in \mathbb{N}$ die Eigenwerte

$$\lambda_{(0,0,\nu)} = -\frac{\nu^2 \pi^2}{4R} \quad (2.46)$$

und die Eigenfunktionen:

$$u_{(0,0,\nu)} = \tilde{w}_{(0,0,\nu)} = \begin{cases} \sin(\frac{\nu\pi}{2}y) & \text{für } \nu \text{ gerade,} \\ \cos(\frac{\nu\pi}{2}y) & \text{für } \nu \text{ ungerade.} \end{cases} \quad (2.47)$$

Aufgrund der Selbstadjungiertheit des Operators ∂_y^2 bilden auch die reellen Funktionen u_{j_0} und \tilde{w}_{j_0} ein Orthogonalsystem (mit $k_0 \cong (0, 0, \nu')$):

$$\langle u_{j_0} | u_{k_0} \rangle = \langle \tilde{w}_{j_0} | \tilde{w}_{k_0} \rangle = \delta(j_0, k_0). \quad (2.48)$$

2.5 Transformation $(m, n) \rightarrow (\pm m, \pm n)$

Das Transformationsverhalten der Eigenwerte λ_j und μ_j , der Eigenfunktionen v_j , v_j^+ und $\tilde{\eta}_j$ und der Lösungsfunktionen η_j , \tilde{v}_j , \tilde{u}_j , \tilde{w}_j , u_j und w_j zu $(m, n) \neq (0, 0)$ beim Übergang $m \rightarrow -m$, $n \rightarrow -n$ (bzw. $\alpha \rightarrow -\alpha$, $\beta \rightarrow -\beta$) ist in Tabelle 2.1 zusammengestellt. Die Funktionen u_j und w_j sind nach Gleichung (2.15) bzw. (2.16) aus (v_j, η_j) zu bestimmen, die Funktionen \tilde{u}_j und \tilde{w}_j analog aus $(0, \tilde{\eta}_j)$. Mit Tabelle 2.1 läßt sich leicht herleiten:

$$\begin{aligned} \lambda_j, v_j, v_j^+, \mu_j, \tilde{\eta}_j, u_j & \text{ reell für } j \cong (0, n, \nu), \\ \eta_j, \tilde{v}_j, \tilde{u}_j, w_j & \text{ imaginär für } j \cong (0, n, \nu), \\ \eta_k, \tilde{v}_k, \tilde{u}_k, w_k, \tilde{w}_j & = 0 \text{ für } j \cong (0, n, \nu), k \cong (m, 0, \nu). \end{aligned} \quad (2.49)$$

(m, n)	$\rightarrow (-m, n)$	$\rightarrow (m, -n)$	$\rightarrow (-m, -n)$
LOS	L^*OS	LOS	L^*OS
λ_j	λ_j^*	λ_j	λ_j^*
v_j	v_j^*	v_j	v_j^*
v_j^+	v_j^{+*}	v_j^+	v_j^{+*}
η_j	$-\eta_j^*$	$-\eta_j$	η_j^*
LSQ	L^*SQ	LSQ	L^*SQ
μ_j	μ_j^*	μ_j	μ_j^*
$\tilde{\eta}_j$	$\tilde{\eta}_j^*$	$\tilde{\eta}_j$	$\tilde{\eta}_j^*$
\tilde{v}_j	$-\tilde{v}_j^*$	$-\tilde{v}_j$	\tilde{v}_j^*
u_j	u_j^*	u_j	u_j^*
\tilde{u}_j	$-\tilde{u}_j^*$	$-\tilde{u}_j$	\tilde{u}_j^*
w_j	$-w_j^*$	$-w_j$	w_j^*
\tilde{w}_j	\tilde{w}_j^*	\tilde{w}_j	\tilde{w}_j^*

Tabelle 2.1: Transformationsverhalten der Eigenwerte λ_j und μ_j , der Eigenfunktionen v_j, v_j^+ und $\tilde{\eta}_j$ und der Lösungsfunktionen $\eta_j, \tilde{v}_j, \tilde{u}_j, \tilde{w}_j, u_j$ und w_j zu $(m, n) \neq (0, 0)$, $j \cong (m, n, \nu)$ beim Übergang $m \rightarrow -m, n \rightarrow -n$.

Kapitel 3

Galerkindarstellung

In diesem Kapitel wird das Geschwindigkeitsfeld $\vec{u}(x, y, z, t)$ nach den Eigenfunktionen und Lösungsfunktionen der linearisierten Navier-Stokes-Gleichungen aus dem vorhergehenden Kapitel entwickelt. Es ergibt sich ein unendlichdimensionales, den Navier-Stokes-Gleichungen äquivalentes dynamisches System für die zeitabhängigen Amplituden $x_j(t) \in \mathbb{C}$ und $y_j(t) \in \mathbb{C}$, das in den linearen Termen diagonalisiert ist. Die nichtlinearen Terme der Navier-Stokes-Gleichungen führen zur quadratischen Kopplung der Koeffizienten:

$$\dot{x}_j = \lambda_j x_j + \sum_{k,l} \{N_{jkl}^{xxx} x_k x_l + N_{jkl}^{xxy} x_k y_l + N_{jkl}^{xyy} y_k y_l\}, \quad (3.1)$$

$$\dot{y}_j = \mu_j y_j + \sum_{k,l} \{N_{jkl}^{yxx} x_k x_l + N_{jkl}^{yxy} x_k y_l + N_{jkl}^{yyy} y_k y_l\}. \quad (3.2)$$

Für die Berechnung der Kopplungskoeffizienten $N_{jkl}^{***} \in \mathbb{C}$ mit $*=x$ oder y werden zwei Arten vorgeschlagen, zum einen der "übliche" Ansatz über eine Projektion mit Hilfe der Biorthogonalsysteme aus Kapitel 2, zum anderen ein bei kleinen Galerkinsystemen, d.h. bei Beschränkung auf eine endliche, kleine Zahl von Amplituden x_j und y_j , geeigneteres Verfahren durch eine Optimierung auf die jeweilige Systemgröße. In beiden Fällen ergeben sich Auswahlregeln für die Kopplungskoeffizienten, die beschreiben, welche Amplituden $x_j(t)$ und $y_j(t)$ miteinander koppeln.

Zur Notation: Wenn nicht anders angegeben, bedeutet:

$$j \cong (m, n, \nu), \quad k \cong (m', n', \nu'), \quad l \cong (m - m', n - n', \nu) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{N},$$

$$j_0 \cong (0, 0, \nu), \quad \nu \in \mathbb{N}, \quad (3.3)$$

$$j' \cong (m, n, \nu) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \setminus \{(0, 0)\} \times \mathbb{N},$$

$$\sum_{m,n} \cong \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}, \quad \sum_{\nu, \nu'} \cong \sum_{\nu, \nu' \in \mathbb{N}}, \quad \sum_{k,l} \cong \sum_{m', n'} \sum_{\nu, \nu'}.$$

3.1 Entwicklung nach den Eigenfunktionen

Die Ansätze (2.10) werden folgendermaßen erweitert:

$$\vec{u}(x, y, z, t) = \sum_{m,n} e^{i\alpha m x + i\beta n z} \sum_{\nu} \left\{ x_j(t) \begin{pmatrix} u_j(y) \\ v_j(y) \\ w_j(y) \end{pmatrix} + y_j(t) \begin{pmatrix} \tilde{u}_j(y) \\ 0 \\ \tilde{w}_j(y) \end{pmatrix} \right\}, \quad (3.4)$$

wobei die Amplituden $x_j(t) \in \mathbb{C}$ die Dynamik des skalaren Feldes v und die Amplituden $y_j(t) \in \mathbb{C}$ die Dynamik des skalaren Feldes η wiedergeben. Die in Kapitel 2 unbestimmt gebliebenen Funktionen v_{j_0} , \tilde{u}_{j_0} und w_{j_0} werden auf Null gesetzt, wobei j und j_0 jeweils wie zu Beginn des Abschnitts definiert für ein Tripel der drei "Quantenzahlen" m, n, ν stehen. v_j sind die Eigenfunktionen aus der Orr-Sommerfeld-Gleichung (2.25), $\tilde{\eta}_j$ die Eigenfunktionen aus der homogenen Squire-Gleichung (2.32) und η_j die Lösungsfunktionen der inhomogenen Squire-Gleichung (2.34) zu v_j . Aus diesen werden für $(m, n) \neq (0, 0)$ nach (2.15) bzw. (2.16) die Funktionen u_j , w_j , \tilde{u}_j und \tilde{w}_j bestimmt, für $m = n = 0$ sind u_{j_0} und \tilde{w}_{j_0} die Eigenfunktionen von (2.44).

Wird der Ansatz (3.4) für $v(x, y, z, t)$ in (2.1) eingesetzt, so folgt wegen (2.25) für jedes $(m, n) \neq (0, 0)$:

$$\sum_{\nu} \{(\lambda_{j'} x_{j'} - \dot{x}_{j'}) (\partial_y^2 - k_{m,n}^2) v_{j'}\} = -N_{m,n}^v \quad (3.5)$$

mit der (m, n) -Fourierkomponente $N_{m,n}^v$ des nichtlinearen Terms N^v . Analog folgt wegen (2.32) und (2.34) für (2.2):

$$\sum_{\nu} \{(\lambda_{j'} x_{j'} - \dot{x}_{j'}) \eta_{j'} + (\mu_{j'} y_{j'} - \dot{y}_{j'}) \tilde{\eta}_{j'}\} = -N_{m,n}^{\eta} \quad (3.6)$$

mit der (m, n) -Fourierkomponente $N_{m,n}^{\eta}$ des nichtlinearen Terms N^{η} . Aus (2.3) und (2.5) ergibt sich im Falle $m = n = 0$:

$$\sum_{\nu} (\lambda_{j_0} x_{j_0} - \dot{x}_{j_0}) u_{j_0} = S_{0,0}^x, \quad (3.7)$$

$$\sum_{\nu} (\lambda_{j_0} y_{j_0} - \dot{y}_{j_0}) \tilde{w}_{j_0} = S_{0,0}^z, \quad (3.8)$$

wobei die Voraussetzung eingegangen ist, daß kein äußerer Druckgradient anliegt. Mit $i = x, y, z$ und wegen (2.6) gilt:

$$S^i := (\vec{u} \vec{\nabla}) u_i = \partial_k (u_i u_k). \quad (3.9)$$

Die Fouriermoden der nichtlinearen Terme sind quadratisch in den Amplituden $x_j(t)$ und $y_j(t)$ und setzen sich in (3.7) und (3.8) zusammen aus:

$$S_{0,0}^x = \left[(\vec{u} \vec{\nabla}) u \right]_{0,0} = \sum_{k,l} \{x_l x_k \cdot \partial_y (v_l u_k) + x_l y_k \cdot \partial_y (v_l \tilde{u}_k)\}, \quad (3.10)$$

$$S_{0,0}^z = \left[(\vec{u} \vec{\nabla}) w \right]_{0,0} = \sum_{k,l} \{ x_l x_k \cdot \partial_y (v_l w_k) + x_l y_k \cdot \partial_y (v_l \tilde{w}_k) \}, \quad (3.11)$$

wobei $k \cong (m', n', \nu')$, $l \cong (-m', -n', \nu'')$ und $\sum_{k,l} \cong \sum_{m', n', \nu', \nu''}$. Für die (m, n) -Fourierkomponenten der nichtlinearen Terme in (3.5) und (3.6) gilt mit $k \cong (m', n', \nu')$, $l \cong (m - m', n - n', \nu'')$ und $\sum_{k,l} \cong \sum_{m', n', \nu', \nu''}$:

$$\begin{aligned} N_{m,n}^\eta &:= (\partial_x S^z - \partial_z S^x)_{m,n} = i\alpha m S_{m,n}^z - i\beta n S_{m,n}^x \quad (3.12) \\ &= \sum_{k,l} \{ x_l x_k \cdot [\alpha\beta mn (u_l u_k - w_l w_k) + i\partial_y (v_l (\alpha m w_k - \beta n u_k)) \\ &\quad - (\alpha^2 m^2 - \beta^2 n^2) (u_l w_k)] \\ &\quad + x_l y_k \cdot [2\alpha\beta mn (u_l \tilde{u}_k - w_l \tilde{w}_k) + i\partial_y (v_l (\alpha m \tilde{w}_k - \beta n \tilde{u}_k)) \\ &\quad - (\alpha^2 m^2 - \beta^2 n^2) (u_l \tilde{w}_k + w_l \tilde{u}_k)] \\ &\quad + y_l y_k \cdot [\alpha\beta mn (\tilde{u}_l \tilde{u}_k - \tilde{w}_l \tilde{w}_k) - (\alpha^2 m^2 - \beta^2 n^2) (\tilde{u}_l \tilde{w}_k)] \} \end{aligned}$$

und:

$$\begin{aligned} N_{m,n}^v &:= (\partial_x \partial_y S^x - (\partial_x^2 + \partial_z^2) S^y + \partial_y \partial_z S^z)_{m,n} \quad (3.13) \\ &= i\alpha m \partial_y S_{m,n}^x + k_{m,n}^2 S_{m,n}^y + i\beta n \partial_y S_{m,n}^z \\ &= \sum_{k,l} \{ x_l x_k \cdot [i\alpha m (k_{m,n}^2 + \partial_y^2) (v_l u_k) - 2\alpha\beta mn \partial_y (u_l w_k) + k_{m,n}^2 \partial_y (v_l v_k) \\ &\quad + i\beta n (k_{m,n}^2 + \partial_y^2) (v_l w_k) - \alpha^2 m^2 \partial_y (u_l u_k) - \beta^2 n^2 \partial_y (w_l w_k)] \\ &\quad + x_l y_k \cdot [i\alpha m (k_{m,n}^2 + \partial_y^2) (v_l \tilde{u}_k) - 2\alpha\beta mn \partial_y (u_l \tilde{w}_k + w_l \tilde{u}_k) \\ &\quad + i\beta n (k_{m,n}^2 + \partial_y^2) (v_l \tilde{w}_k) - 2\alpha^2 m^2 \partial_y (u_l \tilde{u}_k) - 2\beta^2 n^2 \partial_y (w_l \tilde{w}_k)] \\ &\quad + y_l y_k \cdot [-2\alpha\beta mn \partial_y (\tilde{u}_l \tilde{w}_k) - \alpha^2 m^2 \partial_y (\tilde{u}_l \tilde{u}_k) - \beta^2 n^2 \partial_y (\tilde{w}_l \tilde{w}_k)] \}. \end{aligned}$$

Die Randwerte der nichtlinearen Terme lassen sich aus den Randwerten der eingehenden Funktionen herleiten zu:

$$S_{m,n}^i = \partial_y S_{m,n}^i = N_{m,n}^v = N_{m,n}^\eta = \partial_y N_{m,n}^\eta = 0 \text{ bei } y = \pm 1. \quad (3.14)$$

3.2 Kopplungskoeffizienten mit Projektionsverfahren

Unter Zuhilfenahme der Orthogonalsysteme aus Kapitel 2 ergibt sich folgendes Galerkinsystem[24]:

$$\begin{aligned}\dot{x}_{j_0} &= \lambda_{j_0} x_{j_0} - \langle u_{j_0} | S_{0,0}^x \rangle \\ &= \lambda_{j_0} x_{j_0} + \sum_{k,l} \{ N_{j_0kl}^{xxx} x_k x_l + N_{j_0kl}^{xxy} x_k y_l \},\end{aligned}\quad (3.15)$$

$$\begin{aligned}\dot{y}_{j_0} &= \mu_{j_0} y_{j_0} - \langle \tilde{w}_{j_0} | S_{0,0}^z \rangle \\ &= \mu_{j_0} y_{j_0} + \sum_{k,l} \{ N_{j_0kl}^{yxx} x_k x_l + N_{j_0kl}^{yyx} x_k y_l \},\end{aligned}\quad (3.16)$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_{j'} &= \lambda_{j'} x_{j'} + \langle v_{j'}^+ | N_{m,n}^v \rangle \\ &= \lambda_{j'} x_{j'} + \sum_{k,l} \{ N_{j'kl}^{xxx} x_k x_l + N_{j'kl}^{xxy} x_k y_l + N_{j'kl}^{xyy} y_k y_l \},\end{aligned}\quad (3.17)$$

$$\begin{aligned}\dot{y}_{j'} &= \mu_{j'} y_{j'} + c_{j'} \langle \tilde{\eta}_{j'} | N_{m,n}^\eta \rangle + c_{j'} \langle \tilde{v}_{j'} | N_{m,n}^v \rangle \\ &= \mu_{j'} y_{j'} + \sum_{k,l} \{ N_{j'kl}^{yxx} x_k x_l + N_{j'kl}^{yyx} x_k y_l + N_{j'kl}^{yyy} y_k y_l \}.\end{aligned}\quad (3.18)$$

Die Zahlen $c_{j'} \in \mathbb{R}$ ergeben sich aus (2.38). Werden für alle j_0, k, l die oben nicht auftretenden Koeffizienten $N_{j_0kl}^{xyy} = N_{j_0kl}^{yyy} = 0$ definiert, so folgen (3.1) und (3.2). Die Koeffizienten können aus den Gleichungen (3.10) bis (3.12) hergeleitet werden; es ergibt sich der Zusammenhang gemäß Tabelle 3.1, die folgendermaßen zu lesen ist: Für (3.1) sind z.B. die Kopplungskoeffizienten für $\dot{x}_{j'}$ zum Produkt $x_k x_l$ bzw. $x_k y_l$ bzw. $y_k y_l$ gegeben durch:

$$\begin{aligned}N_{j'kl}^{xxx} &= -k_{m,n}^2 \langle \partial_y v_{j'}^+ | v_k v_l \rangle + \alpha^2 m^2 \langle \partial_y v_{j'}^+ | u_k u_l \rangle + 2\alpha\beta mn \langle \partial_y v_{j'}^+ | u_k w_l \rangle \\ &\quad + \beta^2 n^2 \langle \partial_y v_{j'}^+ | w_k w_l \rangle + i\alpha m k_{m,n}^2 \langle v_{j'}^+ | v_k u_l \rangle + i\beta n k_{m,n}^2 \langle v_{j'}^+ | v_k w_l \rangle \\ &\quad + i\alpha m \langle \partial_y^2 v_{j'}^+ | v_k u_l \rangle + i\beta n \langle \partial_y^2 v_{j'}^+ | v_k w_l \rangle,\end{aligned}\quad (3.19)$$

$$\begin{aligned}N_{j'kl}^{xxy} &= 2\alpha^2 m^2 \langle \partial_y v_{j'}^+ | u_k \tilde{u}_l \rangle + 2\alpha\beta mn \langle \partial_y v_{j'}^+ | u_k \tilde{w}_l \rangle + 2\alpha\beta mn \langle \partial_y v_{j'}^+ | w_k \tilde{u}_l \rangle \\ &\quad + 2\beta^2 n^2 \langle \partial_y v_{j'}^+ | w_k \tilde{w}_l \rangle + i\alpha m k_{m,n}^2 \langle v_{j'}^+ | v_k \tilde{u}_l \rangle + i\beta n k_{m,n}^2 \langle v_{j'}^+ | v_k \tilde{w}_l \rangle \\ &\quad + i\alpha m \langle \partial_y^2 v_{j'}^+ | v_k \tilde{u}_l \rangle + i\beta n \langle \partial_y^2 v_{j'}^+ | v_k \tilde{w}_l \rangle,\end{aligned}\quad (3.20)$$

$$N_{j'kl}^{xyy} = \alpha^2 m^2 \langle \partial_y v_{j'}^+ | \tilde{u}_k \tilde{u}_l \rangle + 2\alpha\beta mn \langle \partial_y v_{j'}^+ | \tilde{u}_k \tilde{w}_l \rangle + \beta^2 n^2 \langle \partial_y v_{j'}^+ | \tilde{w}_k \tilde{w}_l \rangle. \quad (3.21)$$

Die anderen $N_{j'kl}^{***}$ sind analog aus Tabelle 3.1 abzulesen. Aus den gemäß der Tabelle bestimmten Kopplungskoeffizienten lassen sich die in Tabelle 3.2 aufgestellten Transformationsregeln beim Übergang $(m, n) \rightarrow (\pm m, \pm n)$ herleiten.

für \dot{x}_{j_0}	$\langle \partial_y u_{j_0} $	$\langle \partial_y \tilde{w}_{j_0} $	$\langle v_{j'}^+ $	$\langle \partial_y v_{j'}^+ $	$\langle \partial_y^2 v_{j'}^+ $	$c_{j'} \langle \tilde{v}_{j'} $	$c_{j'} \langle \partial_y \tilde{v}_{j'} $	$c_{j'} \langle \tilde{\eta}_{j'} $	$c_{j'} \langle \partial_y \tilde{\eta}_{j'} $	
$x_k x_l$			$-k^2$	α^2	$2\alpha\beta$	β^2	$\alpha\beta$	$\beta^2 - \alpha^2$	$-\alpha\beta$	$ v_k v_l\rangle$ $ u_k u_l\rangle$ $ u_k w_l\rangle$ $ w_k w_l\rangle$
$x_k y_l$			$2\alpha^2$	$2\alpha\beta$	$2\alpha\beta$	$2\beta^2$	$2\alpha\beta$	$\beta^2 - \alpha^2$	$-2\alpha\beta$	$ u_k \tilde{u}_l\rangle$ $ u_k \tilde{w}_l\rangle$ $ w_k \tilde{u}_l\rangle$ $ w_k \tilde{w}_l\rangle$
$y_k y_l$			α^2	$2\alpha\beta$	β^2		$\alpha\beta$	$\beta^2 - \alpha^2$	$-\alpha\beta$	$ \tilde{u}_k \tilde{u}_l\rangle$ $ \tilde{u}_k \tilde{w}_l\rangle$ $ \tilde{w}_k \tilde{w}_l\rangle$
$x_k x_l$	1		$i\alpha k^2$		$i\alpha$			$i\beta$		$ v_k u_l\rangle$
$x_k x_l$		1	$i\beta k^2$		$i\beta$			$-i\alpha$		$ v_k w_l\rangle$
$x_k y_l$	1		$i\alpha k^2$		$i\alpha$			$i\beta$		$ v_k \tilde{u}_l\rangle$
$x_k y_l$		1	$i\beta k^2$		$i\beta$			$-i\alpha$		$ v_k \tilde{w}_l\rangle$

Tabelle 3.1: Integrale zur Berechnung der Kopplungskoeffizienten mit dem Projektionsverfahren; zur Vereinfachung wurden $\alpha m \rightarrow \alpha$, $\beta n \rightarrow \beta$ und $k_{m,n}^2 \rightarrow k^2$ gesetzt.

$j \cong (m, n, \nu)$	$(m, -n, \nu)$	$(-m, n, \nu)$	$(-m, -n, \nu)$
$k \cong (m', n', \nu')$	$(m', -n', \nu')$	$(-m', n', \nu')$	$(-m', -n', \nu')$
$l \cong (m - m', n - n', \nu'')$	$(m - m', n' - n, \nu'')$	$(m' - m, n - n', \nu'')$	$(m' - m, n' - n, \nu'')$
N_{jkl}^{xxx}	N_{jkl}^{xxx}	$(N_{jkl}^{xxx})^*$	$(N_{jkl}^{xxx})^*$
N_{jkl}^{xxy}	$-N_{jkl}^{xxy}$	$-(N_{jkl}^{xxy})^*$	$(N_{jkl}^{xxy})^*$
N_{jkl}^{xyy}	N_{jkl}^{xyy}	$(N_{jkl}^{xyy})^*$	$(N_{jkl}^{xyy})^*$
N_{jkl}^{yxx}	$-N_{jkl}^{yxx}$	$-(N_{jkl}^{yxx})^*$	$(N_{jkl}^{yxx})^*$
N_{jkl}^{yyx}	N_{jkl}^{yyx}	$(N_{jkl}^{yyx})^*$	$(N_{jkl}^{yyx})^*$
N_{jkl}^{yyy}	$-N_{jkl}^{yyy}$	$-(N_{jkl}^{yyy})^*$	$(N_{jkl}^{yyy})^*$

Tabelle 3.2: Transformationsverhalten der gemäß Tabelle 3.1 bestimmten Kopplungskoeffizienten des Galerkinsystems beim Übergang $(m, n) \rightarrow (\pm m, \pm n)$.

3.3 Kopplungskoeffizienten durch Optimierung

Bei der Berechnung der Kopplungskoeffizienten nach Abschnitt 3.2 wird vorausgesetzt, daß die nichtlinearen Terme nach genügend vielen (im Prinzip unendlich vielen) Eigenfunktionen entwickelt werden. Bei relativ kleinen Galerkinsystemen ist das Ergebnis eher unbefriedigend, wie z.B. der rechten Spalte von Abbildung 3.1 auf Seite 24 entnommen werden kann. Ich bestimme deshalb, wenn nicht anders angegeben, die Kopplungskoeffizienten eines endlichen Galerkinsystems mit der Entwicklung

$$\vec{u}(x, y, z, t) \approx \sum_{m=-m_{\max}}^{m_{\max}} \sum_{n=-n_{\max}(|m|)}^{n_{\max}(|m|)} e^{i\alpha m x + i\beta n z} \sum_{\nu=1}^{\nu_{\max}(|m|, |n|)} \left\{ x_j \begin{pmatrix} u_j \\ v_j \\ w \end{pmatrix} + y_j \begin{pmatrix} \tilde{u}_j \\ 0 \\ \tilde{w}_j \end{pmatrix} \right\} \quad (3.22)$$

nicht durch Projektion mit Hilfe der Orthogonalsysteme, sondern durch Minimierung der L_2 -Norm der Abweichung von der anzunähernden Funktion:

Sei mit $N_{m,n}^v(y; x_k x_l)$ der y -abhängige Koeffizient von $x_k x_l$ in (3.13) bezeichnet:

$$\begin{aligned} N_{m,n}^v(y; x_k x_l) &= i\alpha m (k_{m,n}^2 + \partial_y^2) (v_l u_k) - 2\alpha\beta m n \partial_y (u_l w_k) + k_{m,n}^2 \partial_y (v_l v_k) \\ &+ i\beta n (k_{m,n}^2 + \partial_y^2) (v_l w_k) - \alpha^2 m^2 \partial_y (u_l u_k) - \beta^2 n^2 \partial_y (w_l w_k). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Dieser Term soll in den Funktionen $\{(\partial_y^2 - k_{m,n}^2)v_{(m,n,1)}, \dots, (\partial_y^2 - k_{m,n}^2)v_{(m,n,\nu_{\max})}\}$ mit den Koeffizienten $N_{(m,n,1)kl}^{xxx}, \dots, N_{(m,n,\nu_{\max})kl}^{xxx} \in \mathbb{C}$ dargestellt werden:

$$N_{m,n}^v(y; x_k x_l) \stackrel{L_2}{=} \sum_{\nu=1}^{\nu_{\max}} N_{(m,n,\nu)kl}^{xxx} (\partial_y^2 - k_{m,n}^2) v_{(m,n,\nu)}, \quad (3.24)$$

wobei die Gleichheit im Sinne der Minimierung der L_2 -Norm der Abweichung gemeint ist:

$$\min_{(N_{(m,n,\nu)kl}^{xxx})_{\nu=1, \dots, \nu_{\max}}} \left(\int_{-1}^1 \left| N_{m,n}^v(y; x_k x_l) - \sum_{\nu=1}^{\nu_{\max}} N_{(m,n,\nu)kl}^{xxx} (\partial_y^2 - k_{m,n}^2) v_{(m,n,\nu)} \right|^2 dy \right)^{1/2}. \quad (3.25)$$

Dies führt zum ν_{\max} -dimensionalen Gleichungssystem ($\bar{\nu} = 1, \dots, \nu_{\max}$)

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 (\partial_y^2 - k_{m,n}^2) v_{(m,n,\bar{\nu})}^* N_{m,n}^v(y; x_k x_l) dy \\ &= \sum_{\nu=1}^{\nu_{\max}} N_{(m,n,\nu)kl}^{xxx} \int_{-1}^1 (\partial_y^2 - k_{m,n}^2) v_{(m,n,\bar{\nu})}^* (\partial_y^2 - k_{m,n}^2) v_{(m,n,\nu)} dy \end{aligned} \quad (3.26)$$

zur Bestimmung der Kopplungskoeffizienten $N_{(m,n,\nu)kl}^{xxx}$. Auf analoge Weise können die Koeffizienten $N_{(m,n,\nu)kl}^{xxy}$ und $N_{(m,n,\nu)kl}^{xyy}$ zu den Paaren $x_k y_l$ bzw. $y_k y_l$ aus (3.13) für

$\nu = 1, \dots, \nu_{\max}$ bestimmt werden. Mit diesen ergeben sich im Sinne der Optimierung der L_2 -Norm Differentialgleichungen der Form (3.1), wie es sein muß.

Die Ergebnisse dieser Optimierung für $N_{2,2}^\nu(y; x_{(1,1,1)}x_{(1,1,1)})$ sind für die Entwicklung nach 10 und 20 Funktionen in Tabelle 3.3 dargestellt; in Tabelle 3.4 sind die Koeffizienten bei Entwicklung nach 30 Funktionen den entsprechenden Koeffizienten des Projektionsverfahrens gegenübergestellt. Es fällt auf, daß die durch die Optimierung der L_2 -Norm bestimmten Kopplungskoeffizienten nur z.T. gegen die durch Projektion bestimmten Kopplungskoeffizienten zu konvergieren scheinen (siehe z.B. $\nu = 7$). In Abbildung 3.1 sind die Näherungen graphisch dargestellt: Es sind jeweils Real- und Imaginärteil der Näherung mit 6, 10 und 20 Funktionen, in der linken Spalte bei Optimierung der L_2 -Norm der Abweichung und in der rechten Spalte bei Projektion, in schwarz und, schwächer gezeichnet, Real- und Imaginärteil der anzunähernden Funktion aufgetragen. Beim Projektionsverfahren zeigen sich große Abweichungen von der anzunähernden Funktion bei 6 und 10 und auch noch bei 20 Funktionen, während sich die Näherung bei der Optimierungsstrategie auch schon bei 10 Funktionen im weiten Verlauf nicht wahrnehmbar von der anzunähernden Funktion unterscheidet.

In Abbildung 3.1 fällt die deutlich sichtbare Abweichung aller Näherungen durch Optimierung im Bereich $0.7 \leq y \leq 1$ auf. Dies liegt daran, daß zwar die Funktionen $\{v_{(m,n,\nu)}\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ eine vollständige Basis für zweimal differenzierbare Funktionen $f(y)$ mit $f(\pm 1) = \partial_y f(\pm 1) = 0$ sind [15, 26], jedoch nicht die Funktionen $\{(\partial_y^2 - k_{m,n}^2)v_{(m,n,\nu)}\}_{\nu \in \mathbb{N}}$: Der Kern des Operators $(\partial_y^2 - k_{m,n}^2)$ kann in diesen Funktionen nicht dargestellt werden, d.h. die Funktionen $\{\cosh(k_{m,n}y), \sinh(k_{m,n}y)\}$ oder $\{\exp(k_{m,n}y), \exp(-k_{m,n}y)\}$ fehlen im Bild der Näherung. Auch bei Verwendung des Projektionsverfahrens können diese Funktionen nicht dargestellt werden, und es kommt zum Gibbschen Phänomen, d.h. die Näherung schwingt um die anzunähernde Funktion (siehe Anhang C). In dieser Arbeit gehe ich davon aus, daß der Einfluß dieser Abweichung klein gegenüber den Einflüssen des Abschneidens bei einer endlichen Zahl von Amplituden ist.

Analog zu den Kopplungskoeffizienten des nichtlinearen Terms $N_{m,n}^\nu$ können auch die Kopplungskoeffizienten des nichtlinearen Terms $N_{m,n}^\eta$ durch Optimierung der L_2 -Norm der Abweichung von der anzunähernden Funktion bestimmt werden. Zwar bilden die Funktionen $\tilde{\eta}_{(m,n,\nu)}$ bezüglich des reellen "Skalarproduktes" $\langle | \rangle$ ein Orthogonalsystem (siehe (2.38)), jedoch i.a. nicht bezüglich des komplexen Skalarprodukts, das bei der Optimierung der L_2 -Norm auftritt. Aus (3.6) wird nach Einsetzen von (3.1) mit $j' = (m, n, \nu)$, $(m, n) \neq (0, 0)$:

$$\sum_{\nu} \left\{ - \sum_{k,l} \{ N_{j'kl}^{xxx} x_k x_l + N_{j'kl}^{xxy} x_k y_l + N_{j'kl}^{xyy} y_k y_l \} \eta_{j'} + (\mu_{j'} y_{j'} - \dot{y}_{j'}) \tilde{\eta}_{j'} \right\} = -N_{m,n}^\eta. \quad (3.27)$$

Analog zu oben sei $N_{m,n}^\eta(y; x_k x_l)$ der Koeffizient von $x_k x_l$ in (3.12). Dann ist zur

	L_2 -Opt: $\nu_{\max} = 10$	L_2 -Opt: $\nu_{\max} = 20$
ν	$N_{(2,2,\nu)(1,1,1)(1,1,1)}^{xxx}$	$N_{(2,2,\nu)(1,1,1)(1,1,1)}^{xxx}$
1	-0.00321-0.02167 <i>i</i>	-0.00280-0.02147 <i>i</i>
2	0.00092+0.00079 <i>i</i>	0.00078+0.00056 <i>i</i>
3	0.03604+0.16403 <i>i</i>	0.03019+0.1665 <i>i</i>
4	-0.00446-0.00655 <i>i</i>	-0.00360-0.00144 <i>i</i>
5	0.12621-0.03982 <i>i</i>	0.21132-0.03272 <i>i</i>
6	0.06202+0.03831 <i>i</i>	0.00766-0.01631 <i>i</i>
7	7.0349-9.4857 <i>i</i>	1.38447+4.5625 <i>i</i>
8	-0.02615+0.07027 <i>i</i>	-0.00961+0.0119 <i>i</i>
9	0.00312+0.02696 <i>i</i>	0.00548+0.00228 <i>i</i>
10	-0.00248-0.00401 <i>i</i>	-0.00049+0.00294 <i>i</i>
11		0.00148-0.00004 <i>i</i>
12		0.00010+0.00090 <i>i</i>
13		0.00053-0.000131 <i>i</i>
14		0.00010+0.00036 <i>i</i>
15		0.00024-0.000092 <i>i</i>
16		0.000065+0.00017 <i>i</i>
17		0.00010-0.000083 <i>i</i>
18		0.000098+0.00014 <i>i</i>
19		0.00016+0.000009 <i>i</i>
20		-0.00006+0.000038 <i>i</i>

Tabelle 3.3: Koeffizienten $N_{(2,2,\nu)(1,1,1)(1,1,1)}^{xxx}$ des nichtlinearen Terms $N_{2,2}^y(y; x_{(1,1,1)}x_{(1,1,1)})$: Ergebnisse der L_2 -Optimierung für $\nu_{\max} = 10$ (links) und $\nu_{\max} = 20$ (rechts) bei $R = 100$, $\alpha = 1.1$, $\beta = 2.4$. Die zugehörigen Graphen sind in Abbildung 3.1 in der linken Spalte dargestellt, die Koeffizienten zu $\nu_{\max} = 30$ und bei der Berechnung durch Projektion in Tabelle 3.4.

ν	L_2 -Opt: $\nu_{\max} = 30$ $N_{(2,2,\nu)(1,1,1)(1,1,1)}^{xxx}$	Projektionsverfahren $N_{(2,2,\nu)(1,1,1)(1,1,1)}^{xxx}$
1	-0.00279-0.02145i	-0.00287-0.0411i
2	0.000780+0.000562i	0.000778+0.00033i
3	0.03019+0.1665i	0.0442+0.1969i
4	-0.00360-0.00144i	-0.00386-0.00119i
5	0.21134-0.0327i	0.174-0.1100i
6	0.00766-0.0163i	0.00300-0.00768i
7	1.3844+4.565i	4.979+0.194i
8	-0.00961+0.0119i	0.00686+0.0287i
9	0.005483+0.00229i	0.0145-0.00737i
10	-0.000494+0.00294i	0.00529+0.00840i
11	0.00148-0.000037i	0.00500-0.00402i
12	0.000100+0.00090i	0.00288+0.00340i
13	0.000528-0.000130i	0.00237-0.0023i
14	0.000101+0.00036i	0.00176+0.0018i
15	0.000237-0.000093i	0.00139-0.0015i
16	0.000070+0.00018i	0.00120+0.0011i
17	0.000124-0.000062i	0.00093-0.0011i
18	0.000047+0.000098i	0.00089+0.00080i
19	0.000072-0.000042i	0.00068-0.00080i
20	0.000033+0.000059i	0.00069+0.00060i
21	0.000045-0.000029i	0.00053-0.00063i
22	0.000023+0.000038i	0.00055+0.00048i
23	0.000030-0.000021i	0.00042-0.00052i
24	0.000017+0.000026i	0.00046+0.00039i
25	0.000021-0.000015i	0.00035-0.00044i
26	0.000013+0.000019i	0.00039+0.00033i
27	0.000015-0.000012i	0.00030-0.00038i
28	0.000013+0.000015i	0.00034+0.00028i
29	0.000020-0.0000078i	0.00026-0.00033i
30	-0.000006+0.000012i	0.00030+0.00025i

Tabelle 3.4: Koeffizienten $N_{(2,2,\nu)(1,1,1)(1,1,1)}^{xxx}$ des nichtlinearen Terms $N_{2,2}^v(y; x_{(1,1,1)}x_{(1,1,1)})$: Ergebnisse der L_2 -Optimierung für $\nu_{\max} = 30$ (links) und der Projektion mit Hilfe der Orthogonalsysteme (rechts) bei $R = 100$, $\alpha = 1.1$, $\beta = 2.4$. Die zugehörigen Graphen zum Projektionsverfahren sind in Abbildung 3.1 in der rechten Spalte dargestellt.

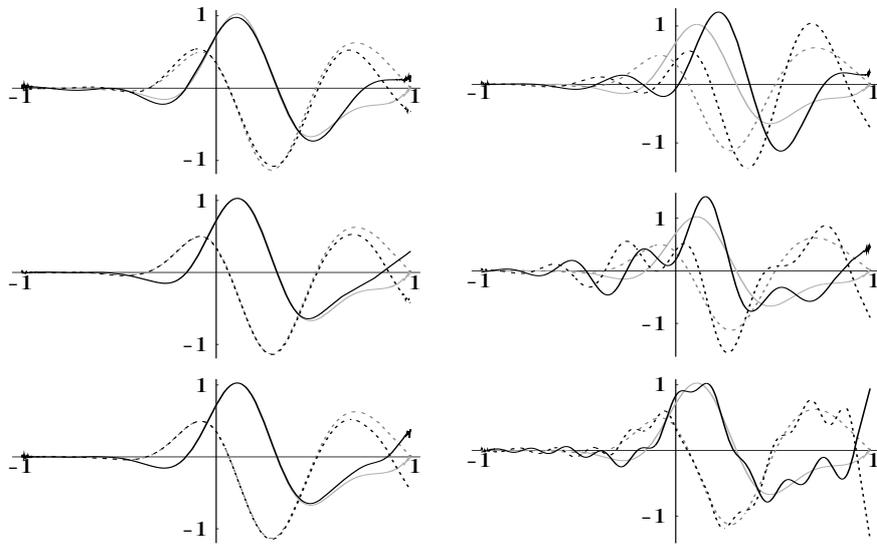


Abbildung 3.1: Darstellung des nichtlinearen Terms $N_{2,2}^v(y; x_{(1,1,1)}x_{(1,1,1)})$ bei Berechnung mit L_2 -Norm-Optimierung (links) bzw. mit dem Projektionsverfahren (rechts) mit 6, 10 oder 20 (von oben nach unten) Funktionen $(\partial_y^2 - k_{2,2}^2)v_{(2,2,\nu)}$ zu $R = 100$, $\alpha = 1.1$, $\beta = 2.4$. Der Realteil ist jeweils durchgezogen dargestellt, der Imaginärteil gestrichelt; schwächer dargestellt ist die anzunähernde Funktion. Die Koeffizienten der Entwicklungen können den Tabellen 3.3 und 3.4 entnommen werden.

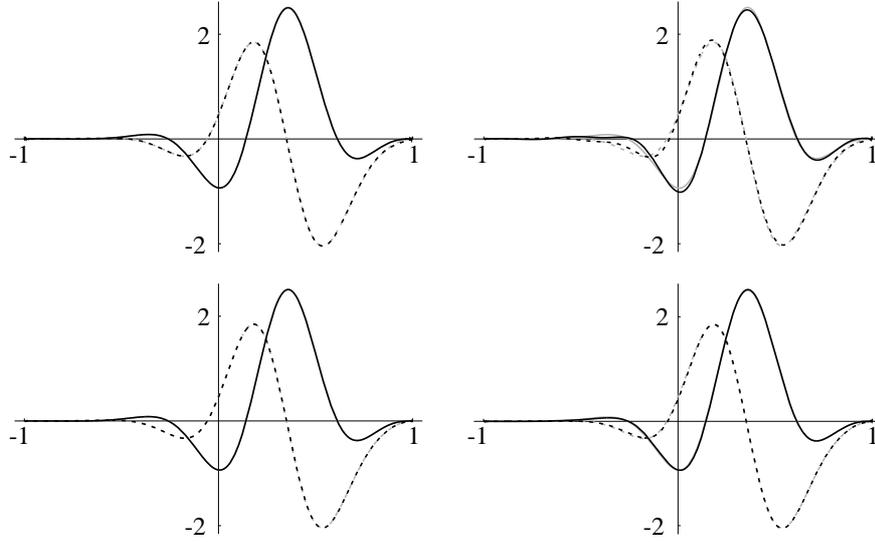


Abbildung 3.2: Darstellung des nichtlinearen Terms $N_{2,2}^\eta$ zu $x_{(1,1,1)}^2$ bei Berechnung mit L_2 -Norm-Optimierung (links) bzw. mit dem Projektionsverfahren (rechts) mit 10 (oben) oder 20 (unten) Funktionen $\tilde{\eta}_{(2,2,\nu)}$ zu $R = 100$, $\alpha = 1.1$, $\beta = 2.4$. Der Realteil ist jeweils durchgezogen dargestellt, der Imaginärteil gestrichelt, schwächer dargestellt ist die anzunähernde Funktion, die meist überdeckt ist, wie es sein sollte.

Erfüllung von (3.27) die L_2 -Norm

$$\left(\int_{-1}^1 \left| \left(N_{m,n}^\eta(y; x_k x_l) - \sum_{\nu=1}^{\nu_{\max}} N_{j'kl}^{xxx} \eta_{j'} \right) - \sum_{\nu=1}^{\nu_{\max}} N_{j'kl}^{yxx} \tilde{\eta}_{j'} \right|^2 dy \right)^{1/2} \quad (3.28)$$

der Abweichung bezüglich der unbekanntenen Koeffizienten $\{N_{(m,n,1)kl}^{yxx}, \dots, N_{(m,n,\nu_{\max})kl}^{yxx}\}$ zu minimieren. Hieraus resultiert ebenso ein inhomogenes lineares Gleichungssystem, dessen Lösung die im Sinne der Minimierung der L_2 -Norm optimalen Kopplungskoeffizienten sind. Nach analogem Vorgehen für $N_{m,n}^\eta(y; x_k y_l)$ und $N_{m,n}^\eta(y; y_k y_l)$ folgt (3.2). In Abbildung 3.2 sind die Ergebnisse einer Optimierung auf 10 bzw. 20 Funktionen den entsprechenden Ergebnissen des Projektionsverfahrens gegenübergestellt. Nur rechts oben sind mit dem Auge geringe Abweichungen festzustellen; die Abweichungen sind sehr viel geringer, da die $\{\tilde{\eta}_{(2,2,\nu)}\}$ ein vollständiges Basissystem bilden.

Da die Eigenfunktionen zu $m = n = 0$ ein Orthogonalsystem bilden, sind die Projektionen durch die orthogonalen Funktionen in (3.15) und (3.16) zu den Lösungen durch Minimierung der L_2 -Norm der Abweichung identisch. Es ergibt sich ein dynamisches System der Form (3.1) und (3.2).

Die Transformationsregeln beim Übergang $(m, n) \rightarrow (\pm m, \pm n)$ gemäß Tabelle 3.2 gelten auch für die durch Optimierung der L_2 -Norm bestimmten Kopplungskoeffizien-

enten, wie aus den Transformationseigenschaften der einzelnen Terme des Gleichungssystems (3.26) bzw. des analogen, aus (3.28) folgenden Gleichungssystems hergeleitet werden kann.

3.4 Auswahlregeln für die Kopplungskoeffizienten

(i) Aufgrund der Kommutativität der Multiplikation bleibt das Galerkinsystem (3.1) und (3.2) mit der Definition

$$\tilde{N}_{jkl}^{***} := \begin{cases} N_{jkk}^{***} & \text{für } k = l \text{ und } *** = xxx, xyy, yxx, yyy \\ N_{jkl}^{***} + N_{jlk}^{***} & \text{für } k < l \text{ und } *** = xxx, xyy, yxx, yyy \\ 0 & \text{für } k > l \text{ und } *** = xxx, xyy, yxx, yyy \\ N_{jkl}^{***} & \text{für } *** = xxy, yxy \\ 0 & \text{für } *** = xyx, yyx \end{cases} \quad (3.29)$$

nach der Ersetzung von N_{jkl}^{***} durch \tilde{N}_{jkl}^{***} unverändert. Hierbei bedeuten für $k \cong (m', n', \nu')$ und $l \cong (m'', n'', \nu'')$ $k = l$, daß $m' = m''$, $n' = n''$ und $\nu' = \nu''$, und $k < l$, daß $m' < m''$ oder $m' = m''$ und $n' < n''$ oder $m' = m''$, $n' = n''$ und $\nu' < \nu''$; für $k > l$ analog.

(ii) Als Folge des Fourieransatzes sind nur Kopplungskoeffizienten N_{jkl}^{***} und damit \tilde{N}_{jkl}^{***} von Null verschieden, für die gilt:

$$m = m' + m'' \text{ und } n = n' + n''. \quad (3.30)$$

(iii) Im Falle $m = m' = m'' = 0$ und $n = n' = n'' = 0$ folgt wegen (3.10) und (3.11) aus $v_{(0,0,\nu)} \equiv 0$ für $*** = xxx, xxy, xyy, yxx, yxy, yyy$ und alle ν, ν', ν'' :

$$N_{(0,0,\nu)(0,0,\nu')(0,0,\nu'')}^{***} = \tilde{N}_{(0,0,\nu)(0,0,\nu')(0,0,\nu'')}^{***} = 0. \quad (3.31)$$

Kapitel 4

Energiebilanzen

In diesem Kapitel werden die Auswirkungen der Beschränkung auf eine endliche Amplitudenzahl auf den Austausch von Energie zwischen Wand und Strömung ("Wandterm"), von der Strömung in die Umgebung (Dissipation) und auf den nichtlinearen Energietransfer durch den Advektionsterm der Navier-Stokes-Gleichungen untersucht. Als Folge des Abschneidens treten künstliche Energiequellen und -senken auf. Dies führt zu sehr starken Energieanstiegen, die sogar zu numerischen Überläufen, d.h. zum Abbruch der Integration, führen können, was anhand von Beispielintegrationen erläutert wird.

4.1 Energiebilanz der Navier-Stokes-Gleichungen

Aus den dimensionslosen Navier-Stokes-Gleichungen läßt sich unter Berücksichtigung der Kontinuitätsgleichung (2.6) und der Randbedingung

$$\vec{v}|_{\text{Rand}} = \vec{U}|_{\text{Rand}} \quad (4.1)$$

die zeitliche Ableitung der Gesamtenergiedichte

$$E = \frac{1}{2\Omega} \int_{\Omega} |\vec{v}|^2 d\Omega \quad (4.2)$$

bestimmen. Durch das Auflösen der dimensionslosen Navier-Stokes-Gleichungen nach $\partial\vec{v}/\partial t$, Einsetzen in die Zeitableitung von (4.2) und Anwendung des Gaußschen Satzes folgt nach elementaren Umformungen:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{1}{\Omega} \int_{\partial\Omega} \left[-\vec{v} \left(\frac{v^2}{2} + p \right) + \frac{1}{2R} \vec{\nabla} v^2 \right] \cdot d\vec{F} \\ &\quad - \frac{1}{\Omega R} \int_{\Omega} (\partial_j v_i)(\partial_j v_i) d\Omega. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Die Störung \vec{u} der Strömungsgeschwindigkeit $\vec{v} = y\hat{x} + \vec{u}$ wird periodisch in x - und z -Richtung angenommen, die Periodenlängen sind $2\pi/\alpha$ bzw. $2\pi/\beta$; in y -Richtung ist

das Integrationsvolumen durch die Platten bei $y = \pm 1$ begrenzt, d.h. $\Omega = 8\pi^2/(\alpha\beta)$. Der Druck p ist ebenfalls periodisch in x und z , d.h. es liegt kein äußerer Druckgradient an.

Nach der Ersetzung (2.8) folgt für das Oberflächenintegral $(dE/dt)_{\text{Wand}}$ aus (4.3) unter Ausnutzung der Randbedingungen und der Periodizität:

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{\text{Wand}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{\Omega R} \int_{\Omega_{x,z}} \left[\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=1} + \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=-1} \right] dF. \quad (4.4)$$

$\Omega_{x,z} = 4\pi^2/(\alpha\beta)$ steht für die Integrationsfläche in x - und z -Richtung. Wenn die Störung \vec{u} durch einen Fourieransatz in x - und z -Richtung und Eigenfunktionsentwicklung in y -Richtung beschrieben wird, bleibt bei der Integration über die Platten nur die Fouriermode $\vec{u}_{0,0}$ übrig, so daß sich der Wandterm schreiben läßt als:

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{\text{Wand}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{2R} \sum_{\nu} x_{(0,0,\nu)} \left(\frac{\partial u_{(0,0,\nu)}}{\partial y} \Big|_{y=1} + \frac{\partial u_{(0,0,\nu)}}{\partial y} \Big|_{y=-1} \right). \quad (4.5)$$

Hierbei beschreibt der erste Term die Energiezufuhr durch die Wand, um die Grundströmung aufrechtzuerhalten, der zweite Term einen Mehr- oder Minderaufwand, der durch den Einfluß der Störung entsteht. Die Vorzeichen sind plausibel, denn wenn $\partial u_{(0,0,\nu)}/\partial y$ am Rand positiv ist, dann hängt die Strömung nahe der Wand der Sollgeschwindigkeit (der Grundströmung) hinterher, und die Wand führt Energie zu, im anderen Falle wird die Wand gezogen, d.h. Energie an diese abgegeben.

Das Volumenintegral in (4.3) ist immer negativ und beschreibt die Dissipation $(dE/dt)_{\text{Diss}}$ in der Strömung. Mit der Ersetzung (2.8) folgt für diesen Term aufgrund der Randbedingungen:

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{\text{Diss}} = -\frac{1}{R} - \frac{1}{\Omega R} \int_{\Omega} (\partial_j u_i)(\partial_j u_i) d\Omega. \quad (4.6)$$

Der erste Term $-1/R$ beschreibt die Dissipation der Grundströmung, das Volumenintegral die zusätzliche (negativ definite) Dissipation der Störung.

In der Gesamtenergieänderung fallen die Terme der Grundenergie heraus, und es ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{1}{2R} \sum_{\nu} x_{(0,0,\nu)} \left(\frac{\partial u_{(0,0,\nu)}}{\partial y} \Big|_{y=1} + \frac{\partial u_{(0,0,\nu)}}{\partial y} \Big|_{y=-1} \right) \\ &\quad - \frac{1}{\Omega R} \int_{\Omega} (\partial_j u_i)(\partial_j u_i) d\Omega. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Werden die Funktionen $u_{(0,0,\nu)}$ aus (2.47) eingesetzt, so hebt sich die Summe über die Ableitungen bei $y = \pm 1$ für ungerade ν auf, während sie für gerade ν ($u_{(0,0,\nu)}$ punktsymmetrisch) den Wert $[\nu\pi(-1)^{\nu/2}]$ annimmt:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\pi}{2R} \sum_{\nu \text{ gerade}} \nu x_{(0,0,\nu)} (-1)^{\nu/2} - \frac{1}{\Omega R} \int_{\Omega} (\partial_j u_i)(\partial_j u_i) d\Omega. \quad (4.8)$$

4.2 Energiedichte in Galerkindarstellung

In diesem Abschnitt wird ein Ausdruck für die Energiedichte der Strömung in den Amplituden $x_j(t)$ und $y_j(t)$ bestimmt. Die kinetische Energie $E(t)$ pro Volumenzelle eines Strömungsfeldes $\vec{v}(x, y, z, t)$ ist gegeben durch (4.2), in dieser Geometrie:

$$E = \frac{\alpha\beta}{16\pi^2} \int_0^{2\pi/\alpha} dx \int_{-1}^1 dy \int_0^{2\pi/\beta} dz (u^2 + v^2 + w^2). \quad (4.9)$$

Da keine äußeren Kräfte betrachtet werden, ist die Volumenarbeit null. Die Wärmeenergie wird nicht berücksichtigt, d.h. die Dissipation vernichtet Energie. Mit den Ansätzen (2.10) folgt die Energiedichte

$$E = E^0 + E^{0S} + E^S \quad (4.10)$$

mit

$$E^0 = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 dy U^2(y), \quad (4.11)$$

$$E^{0S} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dy U(y) u_{0,0}(y, t), \quad (4.12)$$

$$E^S = \frac{1}{4} \sum_{m,n} \int_{-1}^1 dy (u_{m,n} u_{m,n}^* + v_{m,n} v_{m,n}^* + w_{m,n} w_{m,n}^*). \quad (4.13)$$

Hierbei sind die Energie der Grundströmung ("Grundenergie") E^0 und die Energie der Störung ("Störungsenergie") E^S positiv definite Größen, während die Austausch- oder Wechselwirkungsenergie E^{0S} positiv oder negativ sein kann. Man beachte, daß die Grundströmung nur an die $u_{0,0}$ -Moden, also die parallel zu den Platten konstanten Moden koppelt. Mit den Ersetzungen (2.15) und (2.16) für $(m, n) \neq (0, 0)$, dem Ansatz (3.4), der Orthonormaleigenschaft (2.48) und den Definitionen

$$e_1(j, j') := e_1(m, n, \nu, \nu') := \int_{-1}^1 dy \left(v_j v_{j'}^* + \frac{1}{k_{m,n}^2} (\partial_y v_j) (\partial_y v_{j'}^*) + \frac{1}{k_{m,n}^2} \eta_j \eta_{j'}^* \right), \quad (4.14)$$

$$e_2(j, j') := e_2(m, n, \nu, \nu') := \frac{1}{k_{m,n}^2} \int_{-1}^1 dy (\eta_j \tilde{\eta}_{j'}^*), \quad (4.15)$$

$$e_3(j, j') := e_3(m, n, \nu, \nu') := \frac{1}{k_{m,n}^2} \int_{-1}^1 dy (\tilde{\eta}_j \tilde{\eta}_{j'}^*) \quad (4.16)$$

mit $j_0 \cong (0, 0, \nu)$, $j \cong (m, n, \nu)$ und $j' \cong (m, n, \nu')$ ergibt sich die Störungsenergie-dichte:

$$E^S = \frac{1}{4} \sum_{\nu} [x_{j_0}^2 + y_{j_0}^2] + \frac{1}{4} \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \sum_{\nu, \nu'} \quad (4.17)$$

$$[x_j x_{j'}^* e_1(j, j') + y_j y_{j'}^* e_3(j, j') + (x_j y_{j'}^* e_2(j, j') + k.k.)].$$

Für die Metrikkoeffizienten e_1, e_2 und e_3 gelten aufgrund der Transformationseigenschaften der Geschwindigkeitsfelder gemäß Tabelle 2.1 beim Übergang $(m, n) \rightarrow (\pm m, \pm n)$ die Transformationsregeln aus Tabelle 4.1, und aufgrund ihrer Definition bzw. aufgrund der Normierungen (2.37) und (2.39) folgt:

$$e_1(m, n, \nu, \nu') = e_1^*(m, n, \nu', \nu), \quad (4.18)$$

$$e_3(m, n, \nu, \nu') = e_3^*(m, n, \nu', \nu), \quad (4.19)$$

$$e_1(m, n, \nu, \nu) = 1, \quad (4.20)$$

$$e_3(m, n, \nu, \nu) = 1. \quad (4.21)$$

(m, n)	$(-m, n)$	$(m, -n)$	$(-m, -n)$
$e_1(m, n, \nu, \nu')$	e_1^*	e_1	e_1^*
$e_2(m, n, \nu, \nu')$	$-e_2^*$	$-e_2$	e_2^*
$e_3(m, n, \nu, \nu')$	e_3^*	e_3	e_3^*

Tabelle 4.1: Transformationsverhalten der Metrikkoeffizienten beim Übergang $(m, n) \rightarrow (\pm m, \pm n)$.

4.3 Untersuchung des Energietransfers

An (4.8) wird offensichtlich, daß die nichtlinearen Terme der Navier-Stokes-Gleichungen in der zeitlichen Ableitung der Energie nicht vorkommen, d.h. die nichtlinearen Terme vernichten oder erzeugen keine Energie, sondern mischen nur die Strömungsanteile. In diesem Abschnitt wird untersucht, inwieweit ein endliches Galerkinsystem diese "Energietransfererhaltung der nichtlinearen Terme" erfüllt.

4.3.1 Energietransfer in Galerkindarstellung

Die nichtlinearen Terme der Navier-Stokes-Gleichungen treten bei der Zeitableitung der Gesamtenergie (4.10) nur im Störungsanteil E^S auf, der sich durch (4.17) ergibt. Für die Zeitableitung der Störungsenergie folgt:

$$\begin{aligned} \frac{dE^S}{dt} = & \frac{1}{2} \sum_{\nu} (\dot{x}_{j_0} x_{j_0} + \dot{y}_{j_0} y_{j_0}) + \frac{1}{2} \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \sum_{\nu, \nu'} \\ & [x_j \dot{x}_{j'}^* e_1(j, j') + y_j \dot{y}_{j'}^* e_3(j, j') + (x_j \dot{y}_{j'}^* e_2(j, j') + y_j \dot{x}_{j'}^* e_2^*(j', j))] . \end{aligned} \quad (4.22)$$

Dieser Ausdruck kann mit (3.1) und (3.2) als Summe eines Termes $(dE^S/dt)_2$ quadratischer Ordnung, der aus dem linearen Teil des Galerkinsystems entstanden ist, und eines Terms dritter Ordnung $(dE^S/dt)_3$, der aus dem nichtlinearen Teil entstanden

ist, geschrieben werden:

$$\frac{dE^S}{dt} = \left(\frac{dE^S}{dt} \right)_2 + \left(\frac{dE^S}{dt} \right)_3, \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{dE^S}{dt} \right)_2 &= \frac{1}{2} \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \sum_{\nu, \nu'} \lambda_{j'}^* x_j x_{j'}^* e_1(j, j') + \mu_{j'}^* y_j y_{j'}^* e_3(j, j') \\ &\quad + (\lambda_j + \mu_{j'}^*) x_j y_{j'}^* e_2(j, j') \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{\nu} (\lambda_{j_0} x_{j_0}^2 + \mu_{j_0} y_{j_0}^2). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Der Term $(dE^S/dt)_3$, eine Summe von gewichteten Produkten dreier Funktionen aus $\{x_j, y_j\}$, muß unabhängig von den Werten von x_j und y_j verschwinden, d.h. der Koeffizient zu jeder möglichen Dreier-Kombination der x_j und y_j muß null sein.

Produkte der Form xxx : Werden nur solche Terme von $(dE^S/dt)_3$ betrachtet, die Produkte von Funktionen $\{x_j\}$ enthalten, so ergibt sich mit $i \cong (m, n, \bar{\nu})$, $j \cong (m', n', \nu')$, $k \cong (m', n', \nu')$, $l \cong (m - m', n - n', \nu'')$, $i_0 \cong (0, 0, \bar{\nu})$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dE^S}{dt} \right)_3 (xxx) &= \frac{1}{2} \sum_{\bar{\nu}} x_{i_0} \sum_{k,l} N_{i_0 kl}^{xxx} x_k x_l + \frac{1}{2} \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \sum_{\nu, \bar{\nu}} \sum_{k,l} \\ &\quad [x_i (N_{jkl}^{xxx})^* x_k^* x_l^* e_1(i, j) + x_i (N_{jkl}^{yxx})^* x_k^* x_l^* e_2(i, j)] \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \sum_{\nu, \bar{\nu}} \sum_{k,l} x_i^* x_k x_l [N_{jkl}^{xxx} e_1^*(i, j) + N_{jkl}^{yxx} e_2^*(i, j)] \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{\bar{\nu}} \sum_{k,l} N_{i_0 kl}^{xxx} x_{i_0} x_k x_l. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Durch die Ersetzung $m = -\bar{m}$, $n = -\bar{n}$ folgt $i \cong (-\bar{m}, -\bar{n}, \bar{\nu})$, $j \cong (-\bar{m}, -\bar{n}, \nu)$, $k \cong (m', n', \nu')$, $l \cong (-\bar{m} - m', -\bar{n} - n', \nu'')$, und mit $\bar{i} \cong (\bar{m}, \bar{n}, \bar{\nu})$ gilt:

$$\left(\frac{dE^S}{dt} \right)_3 (xxx) = \frac{1}{2} \sum_{\bar{m}, \bar{n}} \sum_{\bar{\nu}} \sum_{k,l} x_{\bar{i}} x_k x_l f_{xxx}(\bar{i}, k, l) \quad (4.27)$$

mit

$$f_{xxx}(\bar{i}, k, l) = \begin{cases} \sum_{\nu} [N_{jkl}^{xxx} e_1^*(i, j) + N_{jkl}^{yxx} e_2^*(i, j)] & \text{für } \bar{i} \neq (0, 0, \bar{\nu}), \\ N_{\bar{i}kl}^{xxx} & \text{für } \bar{i} = (0, 0, \bar{\nu}). \end{cases} \quad (4.28)$$

Seien also gegeben: $(\bar{m}, \bar{n}, \bar{\nu})$, (m', n', ν') und ν'' . Dann gibt es folgende Fälle zu dem Produkt $x_{(\bar{m}, \bar{n}, \bar{\nu})} x_{(m', n', \nu')} x_{(-\bar{m} - m', -\bar{n} - n', \nu'')}$:

1. $\bar{i}_1 = (\bar{m}, \bar{n}, \bar{\nu})$, $k_1 = (m', n', \nu')$, $l_1 = (-\bar{m} - m', -\bar{n} - n', \nu'')$;

2. $\bar{v}_2 = (m', n', \nu')$, $k_2 = (\bar{m}, \bar{n}, \bar{\nu})$, $l_2 = (-\bar{m} - m', -\bar{n} - n', \nu'')$, falls $\bar{v}_1 \neq \bar{v}_2$;
3. $\bar{v}_3 = (-\bar{m} - m', -\bar{n} - n', \nu'')$, $k_3 = (\bar{m}, \bar{n}, \bar{\nu})$, $l_3 = (m', n', \nu')$, falls $\bar{v}_1 \neq \bar{v}_3 \neq \bar{v}_2$.

Die Vertauschung von k_p und l_p , $p = 1, 2, 3$ kann wegen (3.29) durch einen Fall ersetzt werden. Folglich muß gelten, um die Energietransfererhaltung der nichtlinearen Terme zu $x_{(\bar{m}, \bar{n}, \bar{\nu})} x_{(m', n', \nu')} x_{(-\bar{m}-m', -\bar{n}-n', \nu'')}$ zu gewährleisten:

$$f_{xxx}(\bar{v}_1, k_1, l_1) + f_{xxx}(\bar{v}_2, k_2, l_2) + f_{xxx}(\bar{v}_3, k_3, l_3) = 0, \quad (4.29)$$

falls $\bar{v}_1 \neq \bar{v}_3 \neq \bar{v}_2 \neq \bar{v}_1$, sonst entsprechend ein oder zwei Terme weniger. Es ist hinreichend zu fordern:

$$f_{xxx}(\bar{v}, k, l) = 0, \quad (4.30)$$

also insbesondere $N_{(0,0,\bar{\nu})kl}^{xxx} = 0$ für alle $\bar{\nu}, k, l$; dann sind aber die Amplituden zu $m = n = 0$ voll entkoppelt und fallen exponentiell in der Zeit ab.

Produkte der Form yyy : Werden analog zu oben nur solche Terme von $(dE^S/dt)_3$ betrachtet, die Produkte von Funktionen $\{y_j\}$ enthalten, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dE^S}{dt}\right)_3 (yyy) &= \frac{1}{2} \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \sum_{\nu, \bar{\nu}} \sum_{k,l} \\ &\quad [y_i (N_{jkl}^{xyy})^* y_k^* y_l^* e_2^*(j, i) + y_i (N_{jkl}^{yyy})^* y_k^* y_l^* e_3^*(i, j)] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \sum_{\nu, \bar{\nu}} \sum_{k,l} y_i^* y_k y_l (N_{jkl}^{xyy} e_2(j, i) + N_{jkl}^{yyy} e_3^*(i, j)) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{(\bar{m}, \bar{n}) \neq (0,0)} \sum_{\bar{\nu}, k, l} y_{\bar{i}} y_k y_l \sum_{\nu} (N_{jkl}^{xyy} e_2(j, i) + N_{jkl}^{yyy} e_3^*(i, j)) \\ &=: \frac{1}{2} \sum_{(\bar{m}, \bar{n}) \neq (0,0), \bar{\nu}} \sum_{k,l} y_{\bar{i}} y_k y_l f_{yyy}(\bar{v}, k, l). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Da $N_{(0,0,\bar{\nu})kl}^{yyy} = 0$ ist, fällt der zusätzliche Term für die 00-Moden weg.

Produkte der Form xyy : Für diesen gemischten Term ergibt sich, wenn jeweils für beide Kombinationsmöglichkeiten xyy und xyy analog zu oben vorgegangen wird:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dE^S}{dt}\right)_3 (xyy) &= \frac{1}{2} \sum_{(\bar{m}, \bar{n}) \neq (0,0)} \sum_{\nu, \bar{\nu}} \sum_{k,l} [x_{\bar{i}} y_k y_l (N_{jkl}^{xyy} e_1^*(i, j) + N_{jkl}^{yyy} e_2^*(i, j)) \\ &\quad + y_{\bar{i}} x_k y_l (N_{jkl}^{xxy} e_2(j, i) + N_{jkl}^{yxy} e_3^*(i, j))] \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{\bar{\nu}} \sum_{k,l} N_{i_0kl}^{yxy} y_{i_0} x_k y_l \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$=: \sum_{\bar{i}, k, l} x_{\bar{i}} y_k y_l f_{xyy}(\bar{v}, k, l). \quad (4.33)$$

Da $N_{(0,0,\bar{\nu})kl}^{xyy} = 0$ ist, fällt der zusätzliche Term für die 00-Moden weg.

Produkte der Form yxx : Analog hierzu ergibt sich:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dE^S}{dt}\right)_3(yxx) &= \frac{1}{2} \sum_{(\bar{m}, \bar{n}) \neq (0,0)} \sum_{\nu, \bar{\nu}} \sum_{k,l} [x_{\bar{i}} x_k y_l (N_{jkl}^{xxy} e_1^*(i, j) + N_{jkl}^{yxy} e_2^*(i, j)) \\ &\quad + y_{\bar{i}} x_k x_l (N_{jkl}^{xxx} e_2(j, i) + N_{jkl}^{yxx} e_3^*(i, j))] \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\bar{\nu}} \sum_{k,l} (N_{i_0kl}^{xxy} x_{i_0} x_k y_l + N_{i_0kl}^{yxx} y_{i_0} x_k x_l) \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$=: \sum_{\bar{i}, k, l} x_{\bar{i}} y_k y_l f_{yxx}(\bar{i}, k, l). \quad (4.35)$$

Ausgehend von den Tabellen 3.2 und 4.1 kann das Transformationsverhalten der Terme f_{xxx} , f_{yyy} , f_{xyy} und f_{yxx} bei $(m, n) \rightarrow (\pm m, \pm n)$ bestimmt werden. Die Ergebnisse sind in Tabelle 4.2 angegeben.

$\bar{i} \cong (\bar{m}, \bar{n}, \bar{\nu})$	$(-\bar{m}, \bar{n}, \bar{\nu})$	$(\bar{m}, -\bar{n}, \bar{\nu})$	$(-\bar{m}, -\bar{n}, \bar{\nu})$
$k \cong (m', n', \nu')$	$(-m', n', \nu')$	$(m', -n', \nu')$	$(-m', -n', \nu')$
$l \cong (-\bar{m} - m', -\bar{n} - n', \nu'')$	$(\bar{m} + m', -\bar{n} - n', \nu'')$	$(-\bar{m} - m', \bar{n} + n', \nu'')$	$(\bar{m} + m', \bar{n} + n', \nu'')$
$f_{xxx}(\bar{i}, k, l)$	f_{xxx}^*	f_{xxx}	f_{xxx}^*
$f_{yyy}(\bar{i}, k, l)$	$-f_{yyy}^*$	$-f_{yyy}$	f_{yyy}^*
$f_{xyy}(\bar{i}, k, l)$	f_{xyy}^*	f_{xyy}	f_{xyy}^*
$f_{yxx}(\bar{i}, k, l)$	$-f_{yxx}^*$	$-f_{yxx}$	f_{yxx}^*

Tabelle 4.2: Transformationsverhalten der Terme f_{xxx} , f_{yyy} , f_{xyy} und f_{yxx} , die den Energietransfer der nichtlinearen Terme bestimmen, beim Übergang $(m, n) \rightarrow (\pm m, \pm n)$.

4.3.2 Energietransfererhaltung im abgeschnittenen Galerkin-system

In diesem Abschnitt werden die Beiträge der nichtlinearen Terme eines endlichen Galerkin-systems zum Energietransfer exemplarisch dargestellt, und die Energietransfererhaltung für große Systeme wird untersucht.

Für die Parameter $R = 100$, $\alpha = 1.1$, $\beta = 2.4$ ist in den Tabellen 4.3 bis 4.5 jeweils für ein Galerkin-system, dessen Koeffizienten mit dem Projektionsverfahren bestimmt wurden, und für Galerkin-systeme, deren Koeffizienten aus der Minimierung der L_2 -Norm für 14, 10 und 6 Funktionen bestimmt wurden, die Summe der Terme f_{xxx} zu der Amplitudenkombination $x_{(-2,-2,1)} x_{(1,1,1)} x_{(1,1,1)}$ (Tabelle 4.3) bzw. f_{xyy} zu $x_{(-2,-2,1)} y_{(1,1,1)} y_{(1,1,1)}$ (Tabelle 4.4) bzw. f_{yxx} zu $y_{(-2,-2,1)} x_{(1,1,1)} x_{(1,1,1)}$ (Tabelle

4.5) gegenübergestellt. Dabei ist zu erwarten, daß L_2 -optimierte Systeme eine niedrigere Gesamtsumme als gleich große projizierte Systeme haben, was für xyy und yxx mit Gesamtsummen fast gleich null der Fall ist. Für die Amplitudenkombination xxx ergibt das Projektionsverfahren bessere Ergebnisse, was daran liegt, daß die nichtlinearen Terme nach einem nicht vollständigen Funktionensystem entwickelt wurden (siehe Abschnitt 3.3 und Anhang C). Die Minimierungsstrategie führt zu einer konstanten Abweichung proportional zu den Kernfunktionen (und damit zu einer konstanten Abweichung von der Energietransfererhaltung), bei Benutzung der Orthogonalsysteme kommt es zu Oszillationen um den anzunähernden nichtlinearen Term (Gibbsches Phänomen), die im Mittel zu einer besseren Erhaltung des Energietransfers zu führen scheinen.

In den Tabellen 4.6 bis 4.10 wird der Energietransfer der Galerkinsysteme mit jeweils sechs oder zehn Orr-Sommerfeld- und Squireamplituden zu den Fouriermoden $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ und $(1,1)$ bei $\alpha = 0.5$, $\beta = 1.5$ und verschiedenen Reynoldszahlen untersucht. In Tabelle 4.6 sind für ein Galerkinsystem zur Reynoldszahl $R = 300$ mit jeweils sechs Amplituden, dessen Koeffizienten durch Optimierung bestimmt wurden, Anzahl und Durchschnitt der Beträge der einzelnen Energietransferterme und der Gesamtterme gegeben. So setzt sich z.B. der gesamte Energietransferterm für $x_{(0,0,1)}x_{(1,0,1)}x_{(-1,0,1)}$ in (4.26) (ohne den gemeinsamen Faktor $1/2$) zusammen aus:

$$\begin{aligned} & \sum_{\hat{\nu}} \left[N_{(-1,0,\hat{\nu})(0,0,1)(-1,0,1)}^{xxx} e_1^*(1, 0, \hat{\nu}, 1) + N_{(-1,0,\hat{\nu})(0,0,1)(-1,0,1)}^{yxx} e_2^*(1, 0, \hat{\nu}, 1) \right] \\ & + \sum_{\hat{\nu}} \left[N_{(1,0,\hat{\nu})(0,0,1)(1,0,1)}^{xxx} e_1^*(-1, 0, \hat{\nu}, 1) + N_{(1,0,\hat{\nu})(0,0,1)(1,0,1)}^{yxx} e_2^*(-1, 0, \hat{\nu}, 1) \right] \\ & + N_{(0,0,1)(1,0,1)(-1,0,1)}^{xxx}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

In der zweiten und dritten Spalte von Tabelle 4.6 sind Anzahl und Durchschnitt der Beträge der Gesamtsumme (4.36) und aller analog gebildeten angegeben, wobei obige Summe unter der größten Orr-Sommerfeld- bzw. Squire-Quantenzahl $\nu_{\max} = \max\{1, 1, 1\} = 1$ im Term $x_{(0,0,1)}x_{(1,0,1)}x_{(-1,0,1)}$ eingeordnet ist. In der vierten und fünften Spalte wird die Anzahl bzw. der Durchschnitt der Beträge der einzelnen, in (4.36) und den analog gebildeten Gleichungen vorkommenden Terme $N_{(-1,0,\hat{\nu})(0,0,1)(-1,0,1)}^{xxx} e_1^*(1, 0, \hat{\nu}, 1)$ usw. angegeben, wobei dieser Term bei der im jeweiligen Einzelterm größten Orr-Sommerfeld- bzw. Squire-Quantenzahl $\nu_{\max} = \max\{\hat{\nu}, 1, 1, 1\} = \hat{\nu}$ der Terme $(-1, 0, \hat{\nu})$, $(0, 0, 1)$, $(-1, 0, 1)$ und $(1, 0, 1)$ eingeordnet ist.

Die Anzahl der Einzel- und Gesamtterme nimmt mit ν_{\max} zu, weil zu einem höheren ν_{\max} Anteile aller niedrigeren Orr-Sommerfeld- und Squire-Quantenzahlen vorkommen dürfen. Die Verletzungen im Energietransfer erscheinen recht klein, die Gesamtverletzung als Summe aller mit der jeweiligen Anzahl von Amplitudenprodukten multiplizierten Zeilen ist aber nicht vernachlässigbar. In Tabelle 4.7 ist derselbe Sachverhalt für ein System mit jeweils zehn Amplituden aufgetragen. Die Werte in der dritten Spalte unterscheiden sich auch für $\nu_{\max} \leq 6$ von denen der Tabelle 4.6, weil die Koeffizienten des jeweiligen Galerkinsystems auf die Systemgrößen optimiert sind.

Das Maximum bei den durchschnittlichen Einzeltransfertermen liegt bei $\nu_{\max} = 7$, die durchschnittliche Verletzung des Energietransfers ist für dieses System kleiner, weil die Summierung über mehr Terme läuft.

In Tabelle 4.8 ist die durchschnittliche Energietransferverletzung für verschiedene Reynoldszahlen aufgetragen: Bei höheren Reynoldszahlen verschlechtert sich die Energietransfererhaltung. Dies hängt damit zusammen, daß für größere Reynoldszahlen auch die Größe der einzelnen Energietransferterme ansteigt, wie Tabelle 4.9 zu entnehmen ist. Es ist auch zu erkennen, daß bei größeren Reynoldszahlen mehr Amplituden in das endliche Galerkinsystem eingeschlossen werden müssen, um keine relevanten Energietransferterme zu verlieren. Das weiter unten zumeist behandelte System von jeweils sechs Orr-Sommerfeld- und Squire-Amplituden je Fouriermode $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ und $(1, 1)$, also mit Gesamtdimension 108, ist demnach nur bis zu Reynoldszahlen $R \approx 300$ geeignet, spätestens bei $R = 500$ fehlen in diesem System relevante Energietransferterme.

Wird das Galerkinsystem nicht durch die Optimierung der Koeffizienten auf die Systemgröße nach Abschnitt 3.3 bestimmt, sondern durch Projektion mit Hilfe der Orthogonalbeziehungen, so ergibt sich ein deutlich schlechteres Bild: Wie in Tabelle 4.10 angegeben, steigt die Energietransferverletzung für große ν_{\max} und große Reynoldszahlen stark an und ist insbesondere für $R = 1000$ immens groß, während die einzelnen Transferterme nur wenig von denen des durch L_2 -Norm-Optimierung bestimmten Systems abweichen. Dieses Ergebnis bestätigt, daß es insbesondere bei kleinen Systemen wichtig ist, die Koeffizienten durch L_2 -Norm-Optimierung zu bestimmen; sogar bei großen Systemen treten aber auch dann noch nicht unerhebliche Verletzungen der Energietransfererhaltung auf.

ν	Projektion	L_2 , 14 Funktionen	L_2 , 10 Funktionen	L_2 , 6 Funktionen
1	-0.36240-0.67412i	-0.45696-0.77297i	-0.45595-0.77536i	-0.43267-0.50536i
2	-0.31908-0.65531i	-0.41620-0.75447i	-0.41524-0.75736i	-0.36090-0.48850i
3	-0.08522+2.88423i	-0.06306+2.94918i	-0.06108+2.94764i	1.45159+1.04517i
4	-0.28950+2.53839i	-0.27674+2.61695i	-0.27502+2.61549i	1.51786+1.12639i
5	6.37393+1.37810i	6.33187+1.36978i	6.36102+1.39049i	1.35441-2.60410i
6	-0.11380-1.15303i	-0.11086-1.15983i	-0.08993-1.15814i	-0.00135-0.00024i
7	-0.27251-0.73867i	0.52313-0.24946i	-1.89213-0.66256i	
8	0.00339+0.01619i	0.00263+0.01456i	-0.00873+0.00102i	
9	-0.00053-0.00069i	-0.00114-0.00162i	0.00064-0.00238i	
10	-0.00020+0.00029i	-0.00133-0.00039i	-0.00098-0.00029i	
11	0.00004+0.00057i	-0.00104-0.00039i		
12	0.00004+0.00062i	-0.00100-0.00027i		
13	0.00004+0.00062i	-0.00101-0.00028i		
14	0.00004+0.00062i	-0.00101-0.00028i		

Tabelle 4.3: Vergleich der Beiträge der nichtlinearen Terme zum Energietransfer bei der Bestimmung der N_{jkl}^{***} durch Projektion mit Hilfe der Orthogonalsysteme (links) oder durch Minimierung der L_2 -Norm für 14, 10 und 6 Funktionen (von links nach rechts) bei $R = 100$, $\alpha = 1.1$, $\beta = 2.4$: Summe der Terme f_{xxx} zu $x_{(-2,-2,1)}x_{(1,1,1)}x_{(1,1,1)}$ bis ν .

ν	Projektion	L_2 , 14 Funktionen	L_2 , 10 Funktionen	L_2 , 6 Funktionen
1	-0.08438-0.76254i	-0.08437-0.76256i	-0.08422-0.76259i	-0.10389-0.61453i
2	-0.08390-0.76265i	-0.08388-0.76266i	-0.08374-0.76270i	-0.10189-0.61776i
3	-1.24990+1.41921i	-1.24990+1.41917i	-1.25104+1.41922i	-0.24472+1.17319i
4	-1.34538+1.38029i	-1.34538+1.38025i	-1.34645+1.38063i	-0.37033+1.33457i
5	1.36302+2.04042i	1.36301+2.04037i	1.35646+2.04573i	1.01498-0.26188i
6	0.40945-0.23841i	0.40942-0.23843i	0.41907-0.23900i	0.00000+0.00000i
7	-0.03113-0.07136i	-0.03115-0.07136i	-0.03723-0.07725i	
8	-0.00897+0.00155i	-0.00898+0.00155i	-0.00955+0.00516i	
9	-0.00003+0.00057i	-0.00004+0.00057i	0.00041+0.00036i	
10	0.00007-0.00007i	0.00007-0.00007i	0.00000+0.00000i	
11	0.00002-0.00004i	0.00002-0.00005i		
12	0.00002-0.00002i	0.00000-0.00002i		
13	0.00001-0.00001i	-0.00000-0.00001i		
14	0.00001-0.00000i	0.00000+0.00000i		

Tabelle 4.4: Vergleich der Beiträge der nichtlinearen Terme zum Energietransfer bei der Bestimmung der N_{jkl}^{***} durch Projektion mit Hilfe der Orthogonalsysteme (links) oder durch Minimierung der L_2 -Norm für 14, 10 und 6 Funktionen (von links nach rechts) bei $R = 100$, $\alpha = 1.1$, $\beta = 2.4$: Summe der Terme f_{xyy} zu $x_{(-2,-2,1)}y_{(1,1,1)}y_{(1,1,1)}$ bis ν .

ν	Projektion	L_2 , 14 Funktionen	L_2 , 10 Funktionen	L_2 , 6 Funktionen
1	0.15073-0.00670 <i>i</i>	0.14827-0.00291 <i>i</i>	0.14798-0.00301 <i>i</i>	0.14762+0.01884 <i>i</i>
2	0.15078-0.00669 <i>i</i>	0.14831-0.00291 <i>i</i>	0.14803-0.00300 <i>i</i>	0.14657+0.01694 <i>i</i>
3	-0.13845-0.16382 <i>i</i>	-0.14074-0.16788 <i>i</i>	-0.13890-0.17005 <i>i</i>	0.01098-0.25241 <i>i</i>
4	-0.14163-0.17466 <i>i</i>	-0.14394-0.17872 <i>i</i>	-0.14227-0.18134 <i>i</i>	0.05327-0.21728 <i>i</i>
5	-0.13053+0.12415 <i>i</i>	-0.12913+0.11992 <i>i</i>	-0.11145+0.12086 <i>i</i>	-0.34872-0.09756 <i>i</i>
6	0.03358+0.00377 <i>i</i>	0.03512-0.00093 <i>i</i>	0.03978+0.01146 <i>i</i>	-0.00007-0.00002 <i>i</i>
7	-0.05432-0.40189 <i>i</i>	0.33844-0.16390 <i>i</i>	-0.84193-0.36270 <i>i</i>	
8	-0.00438-0.00049 <i>i</i>	-0.00434-0.00114 <i>i</i>	-0.01535-0.00669 <i>i</i>	
9	-0.00111+0.00044 <i>i</i>	-0.00091+0.00002 <i>i</i>	0.00037-0.00036 <i>i</i>	
10	-0.00013+0.00030 <i>i</i>	-0.00013+0.00009 <i>i</i>	-0.00000-0.00000 <i>i</i>	
11	0.00001+0.00030 <i>i</i>	-0.00004-0.00003 <i>i</i>		
12	0.00002+0.00032 <i>i</i>	0.00001+0.00000 <i>i</i>		
13	0.00003+0.00032 <i>i</i>	0.00000+0.00000 <i>i</i>		
14	0.00003+0.00032 <i>i</i>	0.00000+0.00000 <i>i</i>		

Tabelle 4.5: Vergleich der Beiträge der nichtlinearen Terme zum Energietransfer bei der Bestimmung der N_{jkl}^{***} durch Projektion mit Hilfe der Orthogonalsysteme (links) oder durch Minimierung der L_2 -Norm für 14, 10 und 6 Funktionen (von links nach rechts) bei $R = 100$, $\alpha = 1.1$, $\beta = 2.4$: Summe der Terme f_{yxx} zu $y_{(-2,-2,1)}x_{(1,1,1)}x_{(1,1,1)}$ bis ν .

ν_{\max}	$n(\nu_{\max}) =$ Anzahl (i, k, l)	$\frac{\sum_{i,k,l} \sum_j e_*(i, j) N_{jkl}^{***} }{/n(\nu_{\max})}$	$\check{n}(\nu_{\max}) =$ Anzahl (i, j, k, l)	$\frac{\sum_{i,j,k,l} e_*(i, j) N_{jkl}^{***} }{/\check{n}(\nu_{\max})}$
1	20	0.002291	78	1.849664
2	121	0.004945	824	0.439668
3	319	0.004141	3452	1.326198
4	608	0.005626	8748	1.478440
5	996	0.006002	18448	2.702794
6	1477	0.006904	32635	3.812807

Tabelle 4.6: Untersuchung des Energietransfers in einem Galerkinsystem, dessen Kopplungskoeffizienten durch Optimierung der L_2 -Norm bestimmt wurden, mit je sechs Orr-Sommerfeld- und Squireamplituden zu jeder Fouriermode $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ und $(1,1)$ bei $R = 300$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 1.5$: Die zweite Spalte enthält die Anzahl von unabhängigen Tripeln $z_i z_k z_l$, $z = x$ oder y , die dritte Spalte den Durchschnitt der Beträge der aufsummierten Energietransferterme. Bei Energietransfererhaltung wären diese Terme null. Die Zuordnung zu ν_{\max} erfolgt durch $\nu_{\max} = \max\{\bar{\nu}, \nu', \nu''\}$, die Summe über $\hat{\nu}$ ist ausgeführt (s.u.). Die vierte Spalte enthält die Anzahl an Einzeltermen der Form $e_*(i, j) N_{jkl}^{***}$, die in den Gleichungen (4.26), (4.31), (4.32) und (4.34) vor den Dreierprodukten $z_i z_k z_l$ ($z = x$ oder y) stehen; die letzte Spalte gibt den Durchschnitt der Beträge dieser Terme an; ein Term wurde ν_{\max} zugeordnet, wenn $\nu_{\max} = \max\{\bar{\nu}, \hat{\nu}, \nu', \nu''\}$ mit $i \cong (-m, -n, \bar{\nu})$, $j \cong (m, n, \hat{\nu})$, $k \cong (m', n', \nu')$ und $l \cong (m - m', n - n', \nu'')$, also wenn die eingehenden Indizes maximal die Orr-Sommerfeld- oder Squire-Quantenzahl ν_{\max} haben.

ν_{\max}	$n(\nu_{\max}) =$ Anzahl (i, k, l)	$\frac{\sum_{i,k,l} \sum_j e_*(i, j) N_{jkl}^{***} }{/n(\nu_{\max})}$	$\check{n}(\nu_{\max}) =$ Anzahl (i, j, k, l)	$\frac{\sum_{i,j,k,l} e_*(i, j) N_{jkl}^{***} }{/\check{n}(\nu_{\max})}$
1	20	0.001953	78	1.885363
2	121	0.003408	824	0.443241
3	319	0.002378	3452	1.088925
4	608	0.003596	8748	1.546843
5	996	0.004527	18448	3.179386
6	1477	0.003874	32635	5.387250
7	2055	0.003210	53939	5.760809
8	2726	0.002984	81359	5.258259
9	3500	0.002748	118781	4.412712
10	4353	0.003587	163783	3.676966

Tabelle 4.7: Wie Tabelle 4.6, jedoch für je zehn Orr-Sommerfeld- und Squireamplituden zu jeder Fouriermode $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ und $(1,1)$.

ν_{\max}	$R = 10$	$R = 100$	$R = 300$	$R = 500$	$R = 1000$
1	0.001598	0.001269	0.001953	0.001775	0.005475
2	0.009020	0.003779	0.003408	0.003518	0.012811
3	0.003588	0.003546	0.002378	0.003057	0.018253
4	0.005027	0.002863	0.003596	0.003395	0.025461
5	0.002648	0.001870	0.004527	0.003946	0.066523
6	0.003487	0.003086	0.003874	0.004108	0.102195
7	0.001947	0.002158	0.003210	0.004080	0.103901
8	0.002529	0.002735	0.002984	0.004890	0.138890
9	0.001541	0.002078	0.002748	0.004116	0.161946
10	0.002033	0.002874	0.003587	0.004595	0.160936

Tabelle 4.8: Durchschnitt der Beträge $|\sum e_*(i, j)N_{jkl}^{***}|$ der Gesamtterme für die verschiedenen Reynoldszahlen $R = 10, 100, 300, 500$ und 1000 und $\alpha = 0.5, \beta = 1.5$ bei einem durch Optimierung der L_2 -Norm bestimmten Galerkinsystem mit je zehn Orr-Sommerfeld- und Squire-Amplituden; die Einträge entsprechen denen der dritten Spalte von Tabelle 4.7. Die resultierende Energietransferverletzung sollte verschwinden, steigt jedoch mit der Reynoldszahl an, was im wesentlichen am ebenfalls starken Anstieg der Einzelterme liegt (siehe Tabelle 4.9).

ν_{\max}	$R = 10$	$R = 100$	$R = 300$	$R = 500$	$R = 1000$
1	0.221751	1.190379	1.885363	2.932058	5.700269
2	0.113250	2.007767	0.443241	0.558532	1.372088
3	0.064267	3.350928	1.088925	0.542539	5.680292
4	0.039840	3.797709	1.546843	0.461031	8.792570
5	0.026046	3.344848	3.179386	6.585773	45.708705
6	0.018207	2.637075	5.387250	16.619797	74.011387
7	0.013615	1.908229	5.760809	30.209528	235.774237
8	0.010469	1.406456	5.258259	44.221905	362.010539
9	0.008499	1.046513	4.412712	37.873848	729.756585
10	0.006955	0.811260	3.676966	33.794417	1544.506899

Tabelle 4.9: Durchschnitt der Beträge der Einzelterme $|e_*(i, j)N_{jkl}^{***}|$ für die verschiedenen Reynoldszahlen $R = 10, 100, 300, 500$ und 1000 und $\alpha = 0.5, \beta = 1.5$ bei einem durch Optimierung der L_2 -Norm bestimmten Galerkinsystem mit je zehn Orr-Sommerfeld- und Squire-Amplituden; die Einträge entsprechen denen der letzten Spalte von Tabelle 4.7. Der Durchschnitt steigt mit der Reynoldszahl, ebenso das ν_{\max} , bei dem der Durchschnitt zu fester Reynoldszahl am größten ist. Bei $R = 300$ liegt es bei $\nu_{\max} = 7$, bei $R = 1000$ bei $\nu_{\max} \geq 10$.

ν_{\max}	$R = 10$	$R = 100$	$R = 300$	$R = 500$	$R = 1000$
1	0.000008	0.000137	0.000339	0.002157	50.3281
2	0.000006	0.000339	0.000238	0.002822	140.443
3	0.000006	0.000432	0.000361	0.005631	1228.02
4	0.000007	0.000658	0.000612	0.008812	5114.36
5	0.000008	0.000647	0.000946	0.031172	14387.4
6	0.000016	0.000623	0.001768	0.082781	35109.8
7	0.000022	0.000472	0.004508	0.350475	103898.
8	0.000070	0.000805	0.018671	0.793345	219263.
9	0.000168	0.003263	0.044033	1.517387	354445.
10	0.001543	0.011802	0.115490	2.788289	591899.

Tabelle 4.10: Durchschnitt der Beträge $|\sum e_*(i, j) N_{jkt}^{***}|$ der Gesamtterme für die verschiedenen Reynoldszahlen $R = 10, 100, 300, 500$ und 1000 und $\alpha = 0.5, \beta = 1.5$ bei Berechnung des Galerkinsystems durch Projektion mit Hilfe der Orthogonalbeziehungen für je zehn Orr-Sommerfeld- und Squire-Amplituden. Die resultierende Energietransferverletzung sollte verschwinden; im Vergleich zu Tabelle 4.8 ergeben sich bei großen Reynoldszahlen deutlich größere Terme (mehrere Größenordnungen), d.h. die Energietransfererhaltung ist beim Projektionsverfahren stärker verletzt.

4.4 Wand- und Dissipationsterme

In diesem Abschnitt wird beschrieben, welche Anforderungen außer der Energietransfererhaltung der nichtlinearen Terme an die Kopplungskoeffizienten des Galerkinsystems gestellt werden müssen, damit der Einfluß des Wandterms und der Energieabfluß durch Dissipation die einzigen Energiequellen und -senken des Modells sind (wie durch die Navier-Stokes-Gleichungen vorgegeben):

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dE^0}{dt} + \frac{dE^{0S}}{dt} + \frac{dE^S}{dt} = \left(\frac{dE}{dt} \right)_{\text{Wand}} + \left(\frac{dE}{dt} \right)_{\text{Diss}}. \quad (4.37)$$

Für die Couette-Strömung wird die Gleichheit für das unendlichdimensionale Galerkinsystem gezeigt, anschließend werden die Auswirkungen des Abschneidens bei endlicher Amplitudenzahl behandelt.

4.4.1 Wand- und Dissipationsterme in Galerkindarstellung

Für die Zeitableitungen der Einzelterme aus (4.10) gilt mit (4.24):

$$\frac{dE^0}{dt} = 0, \quad (4.38)$$

$$\frac{dE^{0S}}{dt} = \frac{1}{2} \sum_{\nu} \dot{x}_{(0,0,\nu)} \int_{-1}^1 dy U(y) u_{(0,0,\nu)}(y), \quad (4.39)$$

$$\begin{aligned} \frac{dE^S}{dt} = & \frac{1}{2} \sum_{\nu} [\lambda_{(0,0,\nu)} x_{(0,0,\nu)}^2 + \mu_{(0,0,\nu)} y_{(0,0,\nu)}^2] + \frac{1}{4} \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \sum_{\nu, \nu'} \quad (4.40) \\ & [(\lambda_{(m,n,\nu)} + \lambda_{(-m,-n,\nu')}) e_1(m, n, \nu, \nu') x_{(m,n,\nu)} x_{(-m,-n,\nu')} \\ & + (\mu_{(m,n,\nu)} + \mu_{(-m,-n,\nu')}) e_3(m, n, \nu, \nu') y_{(m,n,\nu)} y_{(-m,-n,\nu')} \\ & + ((\lambda_{(m,n,\nu)} + \mu_{(-m,-n,\nu')}) e_2(m, n, \nu, \nu') x_{(m,n,\nu)} y_{(-m,-n,\nu')} + k.k.)]. \end{aligned}$$

Hierbei ist berücksichtigt, daß die Terme 3.Ordnung in dE^S/dt gemäß Abschnitt 4.3 verschwinden. Wenn die Relation für $\dot{x}_{(0,0,\nu)}$ des Galerkinsystems (3.1) in (4.39) eingesetzt wird (die Koeffizienten $N_{(0,0,\nu)(m,n,\nu')(-m,-n,\nu'')}^{xyy}$ sind null), so ergeben sich eine Summe erster und zwei Summen zweiter Ordnung in den Amplituden x_j, y_j :

$$\begin{aligned} \frac{dE^{0S}}{dt} = & \frac{1}{2} \sum_{\nu} \lambda_{(0,0,\nu)} x_{(0,0,\nu)} f(\nu) + \frac{1}{2} \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \sum_{\nu', \nu''} \quad (4.41) \\ & \left\{ \left[\sum_{\nu} N_{(0,0,\nu)(m,n,\nu')(-m,-n,\nu'')}^{xxx} f(\nu) \right] x_{(m,n,\nu')} x_{(-m,-n,\nu'')} \right. \\ & \left. + \left[\sum_{\nu} N_{(0,0,\nu)(m,n,\nu')(-m,-n,\nu'')}^{xyy} f(\nu) \right] x_{(m,n,\nu')} y_{(-m,-n,\nu'')} \right\}. \end{aligned}$$

Hierbei steht die Funktion $f(\nu)$, $\nu \in \mathbb{N}$ für das Integral

$$f(\nu) = \int_{-1}^1 U(y) u_{(0,0,\nu)}(y) dy, \quad (4.42)$$

mit $U = y$ ergeben sich die Werte

$$f(\nu) = \begin{cases} 0 & \text{für } \nu \text{ ungerade,} \\ -\frac{4(-1)^{\nu/2}}{\pi\nu} & \text{für } \nu \text{ gerade.} \end{cases} \quad (4.43)$$

Andererseits wurden in Abschnitt 4.1 Gleichungen für den Wandeinfluß und die Dissipation der Strömung aus den Navier-Stokes-Gleichungen hergeleitet. Die beiden Arten der Beschreibung von dE/dt in (4.37) müssen gleich sein. Im Dissipations-term aus (4.8) koppeln nach der Fourierentwicklung (2.10) und Integration über das Periodizitätsvolumen in x - und z -Richtung nur Moden zu (m, n) und $(-m, -n)$:

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{\text{Diss}} = -\frac{1}{2R} \sum_{m,n} \int_{-1}^1 [k_{m,n}^2 (|u_{m,n}|^2 + |v_{m,n}|^2 + |w_{m,n}|^2) + |\partial_y u_{m,n}|^2 + |\partial_y v_{m,n}|^2 + |\partial_y w_{m,n}|^2] dy. \quad (4.44)$$

Werden für $(m, n) \neq (0, 0)$ die Beziehungen (2.15) und (2.16) und die Entwicklungen der Fouriermoden nach den Eigenfunktionen berücksichtigt, dann können analog zu den Metrikkoeffizienten (4.14) bis (4.16) für $(m, n) \neq (0, 0)$ die Dissipationskoeffizienten ($j \cong (m, n, \nu)$, $j' \cong (m, n, \nu')$):

$$e_4(j, j') := \int_{-1}^1 dy \left((\partial_y v_j)(\partial_y v_{j'}^*) + \frac{1}{k_{m,n}^2} (\partial_y^2 v_j)(\partial_y^2 v_{j'}^*) + \frac{1}{k_{m,n}^2} (\partial_y \eta_j)(\partial_y \eta_{j'}^*) \right), \quad (4.45)$$

$$e_5(j, j') := \frac{1}{k_{m,n}^2} \int_{-1}^1 dy (\partial_y \eta_j)(\partial_y \tilde{\eta}_{j'}^*), \quad (4.46)$$

$$e_6(j, j') := \frac{1}{k_{m,n}^2} \int_{-1}^1 dy (\partial_y \tilde{\eta}_j)(\partial_y \tilde{\eta}_{j'}^*) \quad (4.47)$$

definiert werden. Die Eigenfunktionen u_{j_0} und \tilde{w}_{j_0} sind nach (2.47) Cosinus- und Sinusfunktionen, so daß folgt:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dE}{dt}\right)_{\text{Diss}} &= -\frac{1}{2R} \sum_{\nu} \frac{\nu^2 \pi^2}{4} (x_{(0,0,\nu)}^2 + y_{(0,0,\nu)}^2) \\ &\quad - \frac{1}{2R} \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \sum_{\nu, \nu'} \{ [k_{m,n}^2 e_1(j, j') + e_4(j, j')] x_j x_{j'} \\ &\quad + [k_{m,n}^2 e_3(j, j') + e_6(j, j')] y_j y_{j'} \\ &\quad + ([k_{m,n}^2 e_2(j, j') + e_5(j, j')] x_j y_{j'} + k.k.) \}. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Die Äquivalenz (4.37) muß für jede Wahl der unabhängigen Amplituden x_j, y_j gelten, also für jede Ordnung dieser Amplituden und jede Kombination einzeln.

Ein Vergleich der Terme 1.Ordnung aus (4.41) und (4.8) erfordert die Gleichheit

$$\frac{1}{2} \sum_{\nu} \lambda_{(0,0,\nu)} x_{(0,0,\nu)} f(\nu) = \frac{\pi}{2R} \sum_{\nu \text{ gerade}} \nu x_{(0,0,\nu)} (-1)^{\nu/2}. \quad (4.49)$$

Mit den Eigenwerten (2.46) und den Werten (4.43) ergibt sich dies sofort, so daß dE^{0S}/dt aus dem gesamten Wandterm und zusätzlich einem dissipativen Anteil besteht.

Die Gleichheit der Terme zweiter Ordnung zu $m = n = 0$ aus (4.40) und (4.48) erfordert

$$\frac{1}{2} \sum_{\nu} [\lambda_{(0,0,\nu)} x_{(0,0,\nu)}^2 + \mu_{(0,0,\nu)} y_{(0,0,\nu)}^2] = -\frac{1}{2R} \sum_{\nu} \frac{\nu^2 \pi^2}{4} (x_{(0,0,\nu)}^2 + y_{(0,0,\nu)}^2), \quad (4.50)$$

was durch Einsetzen der Eigenwerte (2.46) sofort folgt.

Eine Betrachtung der Terme 2.Ordnung zu Produkten $y_k y_l$ mit $k \cong (m, n, \nu)$, $l \cong (-m, -n, \nu')$ und $(m, n) \neq (0, 0)$, die in (4.41) nicht auftreten, erfordert bei Betrachtung jeder unabhängigen Kombination $y_k y_l$ in (4.40) und (4.48):

$$e_6(m, n, \nu, \nu') = - \left[k_{m,n}^2 + \frac{R}{2} (\mu_k + \mu_l) \right] e_3(m, n, \nu, \nu'). \quad (4.51)$$

Diese Gleichheit läßt sich aus der homogenen Squire-Gleichung (2.32) herleiten, indem diese mit $\tilde{\eta}_{(-m, -n, \nu')}$ multipliziert, über $y \in [-1, 1]$ integriert und dazu die Squire-Gleichung für $\tilde{\eta}_{(-m, -n, \nu')}$, analog mit $\tilde{\eta}_{(m, n, \nu)}$ multipliziert und integriert, addiert wird.

Vergleich der Terme 2.Ordnung zu $x_k y_l$: Im Unterschied zu der Betrachtung der Terme zu $y_k y_l$ kommen aus (4.41) Terme, die explizit Kopplungskoeffizienten beinhalten, hinzu. Der Vergleich von (4.40), (4.41) und (4.48) ergibt:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \sum_{\nu, \nu'} ((\lambda_k + \mu_l) e_2(m, n, \nu, \nu') x_k y_l + k.k.) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \sum_{\nu, \nu'} \left[\sum_{\bar{\nu}} N_{(0,0,\bar{\nu})kl}^{xxy} f(\bar{\nu}) \right] x_k y_l \\ & = -\frac{1}{2R} \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \sum_{\nu, \nu'} ([k_{m,n}^2 e_2(m, n, \nu, \nu') + e_5(m, n, \nu, \nu')] x_k y_l + k.k.). \end{aligned} \quad (4.52)$$

Zum direkten Vergleich werden die konjugiert-komplexen Terme durch die konjugiert-komplexen Terme zu $(-m, -n)$ ersetzt, d.h. die Summe über die (m, n) umgeordnet. Da alle beteiligten Terme beim Übergang $(m, n) \rightarrow (-m, -n)$ in ihr Konjugiert-

Komplexes übergehen, bleibt zu zeigen:

$$\begin{aligned} e_5(m, n, \nu, \nu') + \left[k_{m,n}^2 + \frac{R}{2} (\lambda_k + \mu_l) \right] e_2(m, n, \nu, \nu') \\ = -\frac{R}{2} \sum_{\bar{\nu}} N_{(0,0,\bar{\nu})kl}^{xxy} f(\bar{\nu}). \end{aligned} \quad (4.53)$$

Hierzu wird die homogene Squire-Gleichung von $\tilde{\eta}_{(-m,-n,\nu')}$ mit $\eta_{(m,n,\nu)}$ multipliziert, über $y \in [-1, 1]$ integriert und dazu die inhomogene Squire-Gleichung für $\eta_{(m,n,\nu)}$, analog mit $\tilde{\eta}_{(-m,-n,\nu')}$ multipliziert und integriert, addiert. Nach Division durch $-2k_{m,n}^2$, bei Beachtung von (4.15) und (4.46) und nach einem Vergleich mit (4.53) bleibt zu zeigen:

$$-\frac{R}{2} \sum_{\bar{\nu}} N_{(0,0,\bar{\nu})kl}^{xxy} f(\bar{\nu}) = -\frac{i\beta n R}{2k_{m,n}^2} \int_{-1}^1 v_k \tilde{\eta}_l dy. \quad (4.54)$$

Die Kopplungskoeffizienten $N_{(0,0,\bar{\nu})kl}^{xxy}$ sind nach Tabelle 3.1 gegeben durch:

$$\begin{aligned} N_{(0,0,\bar{\nu})kl}^{xxy} &= \int_{-1}^1 (\partial_y u_{(0,0,\bar{\nu})}) v_k \tilde{u}_l dy \\ &= \frac{i\beta n}{k_{m,n}^2} \int_{-1}^1 (\partial_y u_{(0,0,\bar{\nu})}) v_k \tilde{\eta}_l dy. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Die Funktionen $u_{(0,0,\bar{\nu})}$ sind nach (2.47) Cosinus- und Sinusfunktionen, so daß mit der Abkürzung $g(y) = v_k \tilde{\eta}_l$, den Werten (4.43) und $\hat{\nu} = \nu/2$ folgt:

$$\sum_{\bar{\nu}} N_{(0,0,\bar{\nu})kl}^{xxy} f(\bar{\nu}) = -2 \frac{i\beta n}{k_{m,n}^2} \sum_{\hat{\nu}} (-1)^{\hat{\nu}} \int_{-1}^1 \cos(\hat{\nu}\pi y) g(y) dy. \quad (4.56)$$

Wird andererseits die Funktion $g(y)$ periodisch angenommen, was wegen

$$g(\pm 1) = \partial_y g(\pm 1) = 0 \quad (4.57)$$

zu einer stetig differenzierbaren Funktion führt, und in eine Fourierreihe über $[-1, 1]$ entwickelt:

$$g(y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\hat{\nu}=1}^{\infty} a_{\hat{\nu}} \cos(\hat{\nu}\pi y) + \sum_{\hat{\nu}=1}^{\infty} b_{\hat{\nu}} \sin(\hat{\nu}\pi y), \quad (4.58)$$

so gilt für den Funktionswert bei $y = \pm 1$:

$$g(y = \pm 1) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\hat{\nu}=1}^{\infty} [(-1)^{\hat{\nu}} a_{\hat{\nu}}] = 0, \quad (4.59)$$

wobei für $\hat{\nu} = 0, 1, \dots$:

$$a_{\hat{\nu}} = \int_{-1}^1 \cos(\hat{\nu}\pi y) g(y) dy. \quad (4.60)$$

Aus (4.56) folgt hiermit

$$\sum_{\bar{\nu}} N_{(0,0,\bar{\nu})kl}^{xxy} f(\bar{\nu}) = -2 \frac{i\beta n - \int_{-1}^1 g(y) dy}{k_{m,n}^2} \quad (4.61)$$

und damit die Gleichheit in (4.54).

Vergleich der Terme 2.Ordnung zu $x_k x_l$: Analog zu der Betrachtung der Terme zu $x_k y_l$ treten hier aus (4.41) Terme auf, die explizit Kopplungskoeffizienten beinhalten. Für die einzelnen Amplitudenkombinationen ist zu beachten, daß $x_{(m,n,\nu)} x_{(-m,-n,\nu')} = x_{(-m,-n,\nu')} x_{(m,n,\nu)}$ und $e_{1/4}(m, n, \nu, \nu') = e_{1/4}(-m, -n, \nu', \nu)$. Damit ergibt der Vergleich von (4.40), (4.41) und (4.48):

$$\begin{aligned} e_4(m, n, \nu, \nu') + \left[k_{m,n}^2 + \frac{R}{2} (\lambda_k + \lambda_l) \right] e_1(m, n, \nu, \nu') \\ = -\frac{R}{2} \sum_{\bar{\nu}} N_{(0,0,\bar{\nu})kl}^{xxx} f(\bar{\nu}). \end{aligned} \quad (4.62)$$

Hierbei geht ein, daß bei der Berechnung von $N_{(0,0,\bar{\nu})kl}^{xxx}$ die Vertauschbarkeit von (m, n, ν) und $(-m, -n, \nu')$ berücksichtigt wurde (siehe (3.29)), so daß nur einer der Kopplungskoeffizienten $N_{(0,0,\bar{\nu})(m,n,\nu)(-m,-n,\nu')}^{xxx}$ und $N_{(0,0,\bar{\nu})(-m,-n,\nu')(m,n,\nu)}^{xxx}$ von null verschieden ist; der Übersichtlichkeit wegen wurde der erste ausgewählt.

Zum Nachweis der Gleichheit wird die Orr-Sommerfeld-Gleichung zu $v_{(m,n,\nu)}$ mit $v_{(-m,-n,\nu')}$ multipliziert, über $y \in [-1, 1]$ integriert und zu der analog mit $v_{(m,n,\nu)}$ multiplizierten und integrierten Orr-Sommerfeld-Gleichung zu $v_{(-m,-n,\nu')}$ addiert und partiell integriert. Analog wird die inhomogene Squire-Gleichung zu $\eta_{(m,n,\nu)}$ mit $\eta_{(-m,-n,\nu')}$ multipliziert, über $y \in [-1, 1]$ integriert und zu der mit $\eta_{(m,n,\nu)}$ multiplizierten und integrierten inhomogenen Squire-Gleichung zu $\eta_{(-m,-n,\nu')}$ addiert und partiell integriert. Die Subtraktion dieser Gleichungen bei Beachtung der Definitionen (4.14) und (4.45) ergibt nach Division durch $2k_{m,n}^2$:

$$\begin{aligned} e_4(m, n, \nu, \nu') + \left[k_{m,n}^2 + \frac{R}{2} (\lambda_k + \lambda_l) \right] e_1(m, n, \nu, \nu') \\ = \frac{i\alpha m R}{k_{m,n}^2} \int_{-1}^1 v_k \partial_y v_l dy - \frac{i\beta n R}{2k_{m,n}^2} \int_{-1}^1 [v_k \eta_l - v_l \eta_k] dy. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Der Vergleich mit (4.62), partielle Integration und (2.15) ergeben, daß die Gleichheit

$$\sum_{\bar{\nu}} N_{(0,0,\bar{\nu})kl}^{xxx} f(\bar{\nu}) = \int_{-1}^1 [v_k u_l + v_l u_k] dy \quad (4.64)$$

$\hat{\nu}$	$\sum_{\bar{\nu}=1}^{\hat{\nu}} N_{(0,0,\bar{\nu})kl}^{xxy} f(\bar{\nu})$	$\sum_{\bar{\nu}=1}^{\hat{\nu}} N_{(0,0,\bar{\nu})kl}^{xxx} f(\bar{\nu})$
2	$-0.0687639 i$	0.127354
4	$-0.0596042 i$	0.118043
6	$-0.0584496 i$	0.114410
8	$-0.0581259 i$	0.113492
10	$-0.0579999 i$	0.113151
12	$-0.0579408 i$	0.112995
14	$-0.0579094 i$	0.112913
16	$-0.0578911 i$	0.112866
	$e_5 + \left(k^2 + \frac{R}{2}(\lambda_k + \mu_l)\right) e_2$	$e_4 + \left(k^2 + \frac{R}{2}(\lambda_k + \lambda_l)\right) e_1$
	$-0.0578515 i$	0.112766

Tabelle 4.11: Überprüfung der Konvergenz von Wand- und Dissipationsterm gegen die Gesamtenergieänderung am Beispiel $R = 100$, $\alpha = \beta = 1$, für $k \cong (0, 1, 1)$ und $l \cong (0, -1, 1)$ in einem durch Projektion bestimmten Galerkinsystem. Weil die Gewichtungsfunktion $f(\nu)$ für ungerade ν null ist, sind nur die geraden Teilsummen angegeben. Deutlich ist die Konvergenz gegen die nach (4.53) und (4.62) geforderten Terme zu sehen.

zu zeigen ist. Nach Tabelle 3.1 gilt:

$$N_{(0,0,\bar{\nu})kl}^{xxx} = \int_{-1}^1 (\partial_y u_{(0,0,\bar{\nu})}) [v_k u_l + v_l u_k] dy. \quad (4.65)$$

Analog zum Vorgehen für die Terme zu $x_k y_l$ kann über die Fourierreihe von $[v_k u_l + v_l u_k]$ die Gleichheit in (4.64) gezeigt werden.

4.4.2 Betrachtung im abgeschnittenen Galerkinsystem

Die gewünschte Gleichheit der Darstellungen in (4.37) in einem endlichen Galerkinsystem gilt für die erste Ordnung immer und für die zweite Ordnung für Terme zu $m = n = 0$ und für Terme zu $y_k y_l$. Die Summen über die gewichteten Kopplungskoeffizienten in (4.53) und (4.62) erfüllen allerdings nur dann die gewünschten Beziehungen, d.h. die Energieänderung des endlichen Systems ergibt sich nur dann durch die Summe des Wand- und des Dissipationsterms, wenn über unendlich viele Moden $(0, 0, \bar{\nu})$ summiert wird, wie insbesondere an der Fourierreihe (4.58) im obigen Beweis zu sehen ist. Ansonsten sind die Dissipationsterme in (4.52) und der analogen Gleichung für xx nicht vollständig dargestellt. Im endlichen Galerkinsystem ist die Anzahl der Amplituden begrenzt; Tabelle 4.11 enthält die Teilsummen der gewichteten Koeffizienten $N_{(0,0,\bar{\nu})kl}^{xxy}$ bzw. $N_{(0,0,\bar{\nu})kl}^{xxx}$ für $k \cong (0, 1, 1)$, $l \cong (0, -1, 1)$, $\bar{\nu} = 1, \dots, \hat{\nu}$ für die Werte $\hat{\nu} = 2, 4, 6, \dots, 16$. Deutlich ist zu erkennen, daß diese Teilsummen nicht die in (4.53) und (4.62) geforderte Beziehung erfüllen, die Abweichung mit zunehmender Modenzahl $\hat{\nu}$ jedoch immer geringer wird.

4.5 Transientes Wachstum im endlichen Galerkin-system

Transientes Wachstum basiert auf der Nichtnormalität des Operators der linearen Näherung. Eine Kontrollgröße, hier die Energie der Störung, wächst für bestimmte Anfangswerte vorübergehend an, obwohl die Amplituden der Entwicklungsfunktionen exponentiell abfallen, also obwohl das System linear stabil ist. Diesem vorübergehenden Energieanstieg, dessen Faktor von den Basiswellenzahlen α und β und von der Reynoldszahl R abhängt, jedoch von der Amplitude des Zustandes unabhängig ist, wurde in den vergangenen Jahren in Hinsicht auf den Einsatz und die Aufrechterhaltung von turbulenten Strukturen in linear stabilen Strömungstypen und -regionen viel Aufmerksamkeit gewidmet [5, 10, 14, 19, 47].

Zur Bestimmung der maximalen Störungsenergiesteigung in einem System mit $\hat{\nu}$ Orr-Sommerfeld- und $\hat{\nu}$ Squire-Moden je Fouriermode $(m\alpha, n\beta)$ wird die Energie der Störung (4.17) betrachtet. Sei

$$\vec{z}_{m,n} = (x_{(m,n,1)}, \dots, x_{(m,n,\hat{\nu})}, y_{(m,n,1)}, \dots, y_{(m,n,\hat{\nu})}) \quad (4.66)$$

ein Vektor mit den Amplituden des endlichen Systems; dann läßt sich die Störungsenergie bestimmen durch

$$E^S = \sum_{m,n} \vec{z}_{m,n}^* E_{m,n} \vec{z}_{m,n} \quad (4.67)$$

mit den $2\hat{\nu} \times 2\hat{\nu}$ -Matrizen $E_{m,n}$; $E_{0,0}$ hat die Diagonalform

$$E_{0,0} = \text{diag}(1, \dots, 1), \quad (4.68)$$

$E_{m,n}$ für $(m,n) \neq (0,0)$ die Blockform:

$$E_{m,n} = \begin{pmatrix} E_{m,n}^{(1)} & \left(E_{m,n}^{(2)}\right)^* \\ E_{m,n}^{(2)} & E_{m,n}^{(3)} \end{pmatrix}, \quad (4.69)$$

wobei aufgrund von (4.17) gilt:

$$\left(E_{m,n}^{(1)}\right)_{\nu,\nu'} = \frac{1}{4} e_1(m, n, \nu', \nu), \quad (4.70)$$

$$\left(E_{m,n}^{(3)}\right)_{\nu,\nu'} = \frac{1}{4} e_3(m, n, \nu', \nu), \quad (4.71)$$

$$\left(E_{m,n}^{(2)}\right)_{\nu,\nu'} = \frac{1}{4} e_2(m, n, \nu', \nu). \quad (4.72)$$

Die zeitliche Ableitung entspricht unter Berücksichtigung der Energietransfererhaltung der Gleichung (4.40):

$$\frac{dE^S}{dt} = \sum_{m,n} \vec{z}_{m,n}^* \left(\Lambda_{m,n}^* E_{m,n} + E_{m,n} \Lambda_{m,n} \right) \vec{z}_{m,n} \quad (4.73)$$

mit der $2\hat{\nu} \times 2\hat{\nu}$ -Matrix $\Lambda_{m,n}$:

$$\Lambda_{m,n} = \text{diag}(\lambda_{(m,n,1)}, \dots, \lambda_{(m,n,\hat{\nu})}, \mu_{(m,n,1)}, \dots, \mu_{(m,n,\hat{\nu})}). \quad (4.74)$$

Aufgrund der Struktur der Metrikkoeffizienten sind die $E_{m,n}$ hermitesch, d.h. $E_{m,n} = E_{m,n}^+$. Zur Bestimmung des möglichen transienten Wachstums ist für jede Fouriermode das Maximierungsproblem

$$\max_{(\vec{z}_{m,n}^*, E_{m,n} \vec{z}_{m,n} = 1)} \vec{z}_{m,n}^* (\Lambda_{m,n}^* E_{m,n} + E_{m,n} \Lambda_{m,n}) \vec{z}_{m,n} \quad (4.75)$$

zu lösen, d. h. der maximale Energieanstieg für Zustände mit der Störungsenergie 1 wird gesucht. Dieser entspricht dem größten Eigenwert $\max_{\nu} \xi_{(m,n,\nu)}$ des Eigensystems

$$(\Lambda_{m,n}^* E_{m,n} + E_{m,n} \Lambda_{m,n}) f_{(m,n,\nu)} = \xi_{(m,n,\nu)} E_{m,n} f_{(m,n,\nu)} \quad (4.76)$$

[27]. Da die Matrix $(\Lambda_{m,n}^* E_{m,n} + E_{m,n} \Lambda_{m,n})$ hermitesch ist, gilt $\xi_{(m,n,\nu)} \in \mathbb{R}$. Für die Eigenfunktionen $f_{(m,n,\nu)}$, zusammengefaßt zu $F_{m,n} = (f_{(m,n,1)}, \dots, f_{(m,n,2\hat{\nu})})$, folgt nach der Normierung die Beziehung

$$F_{m,n}^+ E_{m,n} F_{m,n} = I \quad (4.77)$$

mit der Einheitsmatrix I . Die Matrix $F_{m,n}^+ E_{m,n}$ dient somit als Projektor vom Raum der Amplituden $\{z_{(m,n,\nu)}\}$ in den Raum der Amplituden der Funktionen $\{f_{(m,n,\nu)}\}$.

Im endlichen Galerkinsystem wird das transiente Wachstum durch die Eigenwerte des Systems (4.76) bestimmt, die zugehörigen Eigenfunktionen geben die Richtungen des linearen Wachstums bzw. Abfalls vor. In Tabelle 4.12 sind jeweils die 6 größten Eigenwerte der endlichen Systeme zu den Dimensionen $2\hat{\nu} = 12, 20$ und 32 , d.h. jeweils 6, 10 bzw. 16 Orr-Sommerfeld- und Squire-Moden wurden benutzt, den 6 größten Eigenwerten des vollen Systems bei den Parameterwerten $R = 350$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 1.5$ und $(m, n) = (1, 0), (0, 1), (1, 1)$ gegenübergestellt. Die Berechnung für das volle System wird hier nicht näher vorgestellt; sie erfolgt durch die Berechnung der Eigenwerte $\xi_{(m,n,\nu)}^{\#}$ des zu (4.76) äquivalenten Systems, wenn nicht nach den Eigenfunktionen des linearisierten Problems entwickelt wird:

$$\begin{pmatrix} L_{OS} + L_{OS}^{\#} & L_{inh} \\ L_{inh} & L_{SQ} + L_{SQ}^{\#} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{(m,n,\nu)}^{\#} \\ \eta_{(m,n,\nu)}^{\#} \end{pmatrix} = \xi_{(m,n,\nu)}^{\#} R \begin{pmatrix} \partial_y^2 - k_{m,n}^2 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{(m,n,\nu)}^{\#} \\ \eta_{(m,n,\nu)}^{\#} \end{pmatrix} \quad (4.78)$$

mit

$$L_{OS}^{\#} = (\partial_y^2 - k_{m,n}^2)^2 + i\alpha m R (\partial_y^2 - k_{m,n}^2) y, \quad (4.79)$$

$$L_{SQ}^{\#} = \partial_y^2 - k_{m,n}^2 + i\alpha m R y, \quad (4.80)$$

$$L_{inh} = -i\beta n R, \quad (4.81)$$

$$v^{\#}(\pm 1) = \partial_y v^{\#}(\pm 1) = \eta^{\#}(\pm 1) = 0. \quad (4.82)$$

(m, n, ν)	Cut-Off, $2\hat{\nu} = 12$	Cut-Off, $2\hat{\nu} = 20$	Cut-Off $2\hat{\nu} = 32$	volles System
(0, 1, 1)	0.6185	0.6248	0.6260	0.6264
(0, 1, 2)	0.3083	0.3113	0.3118	0.3121
(0, 1, 3)	0.1019	0.1093	0.1101	0.1103
(0, 1, 4)	-0.0658	-0.0615	-0.0610	-0.0608
(0, 1, 5)	-0.2610	-0.2288	-0.2277	-0.2274
(0, 1, 6)	-0.4090	-0.3942	-0.3934	-0.3932
(1, 0, 1)	0.1962	0.1967	0.1969	0.1971
(1, 0, 2)	-0.0201	-0.0155	-0.0155	-0.0155
(1, 0, 3)	-0.0714	-0.0578	-0.0578	-0.0578
(1, 0, 4)	-0.1762	-0.1146	-0.1142	-0.1141
(1, 0, 5)	-0.1888	-0.1283	-0.1283	-0.1283
(1, 0, 6)	-0.3418	-0.2270	-0.2270	-0.2270
(1, 1, 1)	0.6290	0.6392	0.6396	0.6399
(1, 1, 2)	0.2970	0.3170	0.3177	0.3180
(1, 1, 3)	0.0301	0.1113	0.1120	0.1122
(1, 1, 4)	-0.1794	-0.0591	-0.0585	-0.0583
(1, 1, 5)	-0.3870	-0.2246	-0.2238	-0.2236
(1, 1, 6)	-0.4846	-0.3824	-0.3816	-0.3813

Tabelle 4.12: Vergleich der Eigenwerte der Energiesteigungen der vollen Gleichungen (4.78) mit denen von endlichen Systemen (4.76) der Dimensionen $2\hat{\nu} = 12, 20$ und 32 bei $R = 350, \alpha = 0.5, \beta = 1.5$: Deutlich ist die erwartete Annäherung von unten an die Eigenwerte des vollen Systems zu erkennen. Auch das System der Dimension 12 , also mit 6 Orr-Sommerfeld- und 6 Squire-Amplituden, hat im wesentlichen die Steigungen des vollen Systems, insbesondere bereits die gleiche Anzahl von Richtungen mit Energieanstieg.

Die Ergebnisse für das volle System (4.78), das durch Entwicklung nach Tschebyscheff- oder Legendrepolyomen gelöst wird, stimmen mit publizierten Ergebnissen überein [5]. Wie zu erwarten, sind die Eigenwerte der endlichen Systeme kleiner als die entsprechenden Eigenwerte des vollen Systems, nähern sich diesen aber mit zunehmender Modenzahl an. Deutlich ist zu erkennen, daß auch bei nur je sechs Orr-Sommerfeld- und Squireamplituden (nach den Eigenwerten des linearen Systems ausgewählt) die volle Zahl an transient wachsenden Moden im System vorkommt. Dies wird auch in den Tabellen 5.1 und 5.2 ab Seite 53 deutlich, in denen neben anderen Systemgrößen auch die Anzahl der transient steigenden Moden zu vorgegebener Gesamtamplitudenzahl angegeben ist: Ab einer bestimmten Gesamtamplitudenzahl sind alle transient steigenden Moden im System enthalten. Dies liefert neben den Hauptenergieterminalen einen weiteren Anhaltspunkt, wieviele Amplituden je Fouriermode im endlichen Galerkinsystem mindestens enthalten sein sollten.

Kapitel 5

Erzwungene Energietransfererhaltung

Wie in Abschnitt 4.3 gezeigt, verletzt ein endliches System die Forderung nach Energietransfererhaltung der nichtlinearen Terme. Außerdem wird, wie in Abschnitt 4.4 gezeigt, die Energieänderung nicht mehr nur vom Wand- und Dissipationsterm bewirkt; über die Energiequellen und -senken aus den Termen dritter Ordnung hinaus können also noch Quellen und Senken aus Termen zweiter Ordnung auftreten.

Es erweist sich insbesondere bei kleinen Systemen als wichtig, diese "künstlichen" Energiequellen und -senken zu verhindern. Hierzu werden die Kopplungskoeffizienten N_{jkl}^{***} des Galerkinsystems renormiert, d.h. ihre Werte werden so verändert, daß auch in einem endlichen System beide Energietransferforderungen erfüllt sind. Dieses Vorgehen erscheint gerechtfertigt, denn durch Beschränkung auf eine endliche Amplitudenzahl ist die Originaldynamik der Navier-Stokes-Gleichungen im Galerkinsystem ohnehin nur noch eingeschränkt vorhanden, sind die physikalisch sinnvollen Energietransferanforderungen ohnehin nicht erfüllt und ist nicht mal die Anforderung, daß die Strömungsgeschwindigkeiten beschränkt bleiben sollten [16, 40], erfüllt.

Im nachhinein wird die Renormierung dadurch bestätigt, daß verhältnismäßig kleine Änderungen in den Kopplungskoeffizienten (und damit in der Dynamik) ausreichen, um die Energietransferforderungen zu erfüllen, die Lösungen auch bei sehr hohen Anfangsenergien beschränkt bleiben und mit den renormierten Systemen erzielte qualitative und quantitative Ergebnisse mit anderen numerischen und experimentellen Ergebnissen kompatibel sind.

5.1 Methode der Renormierung

In diesem Abschnitt wird die Renormierungsmethode vorgestellt, wobei neben der allgemeinen Beschreibung als Beispiel das System vorgestellt wird, bei dem nur die Moden $x_{(0,0,2)}$, $x_{(1,1,1)}$ und $x_{(-1,-1,1)}$ auftreten:

Im ersten Schritt werden alle in dem endlichen System vorkommenden Produkte

aus drei Amplituden $z_{(m,n,\nu)}z_{(m',n',\nu')}z_{(-m-m',-n-n',\nu')}$ mit $z = x$ oder $z = y$ bestimmt, und für jede Kombination wird die Energietransfererhaltungsverletzung nach (4.26), (4.31), (4.32) oder (4.34) berechnet. Aufgrund der Transformationseigenschaften der Kopplungskoeffizienten N_{jkl}^{***} (Tabelle 3.2), der Energiekoeffizienten e_i (Tabelle 4.1) und damit der die Energietransfererhaltung bestimmenden Terme f_{***} (Tabelle 4.2) sind hier nur diejenigen Amplitudenkombinationen zu betrachten, die bei $(m, n) \rightarrow (\pm m, \pm n)$ nicht in eine bereits betrachtete Kombination übergehen (wie üblich steht $***$ für xxx, yyy, xyy, yxx). Die Anzahl der Gleichungen ist hoch und nimmt kubisch mit der Anzahl der Orr-Sommerfeld- und Squire-Amplituden je Fouriermode zu. Für das Produkt $x_{(0,0,2)}x_{(1,1,1)}x_{(-1,-1,1)}$ ergibt sich nach (4.26) die Gleichung (ohne Faktor $1/2$):

$$\begin{aligned} N_{(0,0,2)(1,1,1)(-1,-1,1)}^{xxx} + N_{(1,1,1)(0,0,2)(1,1,1)}^{xxx} e_1^*(-1, -1, 1, 1) \\ + N_{(-1,-1,1)(0,0,2)(-1,-1,1)}^{xxx} e_1^*(1, 1, 1, 1) = g_1 \end{aligned} \quad (5.1)$$

mit der Energietransfererhaltungsverletzung g_1 , die daraus resultiert, daß der zweite Term nicht als Summe über alle $N_{(1,1,\nu)(0,0,2)(1,1,1)}^{xxx} e_1^*(-1, -1, 1, \nu)$ und über alle $N_{(1,1,\nu)(0,0,2)(1,1,1)}^{yxx} e_2^*(-1, -1, 1, \nu)$ läuft (und auch der dritte Term nicht).

Ebenso werden alle in diesem endlichen Galerkinsystem möglichen Kombinationen zweier Amplituden der Form $x_{(m,n,\nu)}y_{(-m,-n,\nu')}$ und $x_{(m,n,\nu)}x_{(-m,-n,\nu')}$ bestimmt, und die Verletzung des Wand-/Dissipationsterms nach (4.53) bzw. (4.62) wird berechnet. Ihre Anzahl ist wesentlich kleiner als die der Terme dritter Ordnung und steigt nur quadratisch mit der Anzahl der Orr-Sommerfeld- und Squire-Amplituden je Fouriermode. Für das Paar $x_{(1,1,1)}x_{(-1,-1,1)}$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} e_4(1, 1, 1, 1) + \left[k_{1,1}^2 + \frac{R}{2}(\lambda_{(1,1,1)} + \lambda_{(-1,-1,1)}) \right] e_1(1, 1, 1, 1) \\ + \frac{R}{2} N_{(0,0,2)(1,1,1)(-1,-1,1)}^{xxx} f(2) = g_2 \end{aligned} \quad (5.2)$$

mit der Erhaltungsverletzung g_2 , die daraus resultiert, daß der letzte Term nicht als Summe über alle $N_{(0,0,\nu)(1,1,1)(-1,-1,1)}^{xxx} f(\nu)$ läuft.

Dann werden alle in diesen Gleichungen vorkommenden Kopplungskoeffizienten $N_{jkl}^{***} \neq 0$ bestimmt und als variabel markiert. Es ist zu betonen, daß nur solche Kopplungskoeffizienten im nächsten Schritt verändert werden dürfen, die im Originalsystem von null verschieden waren. Dies bedeutet, daß keine neuen Kopplungen eingeführt werden, so daß die Auswahlregeln aus Abschnitt 3.4 auch vom renormierten System erfüllt werden. Für obiges System ergibt sich unter Beachtung der Transformationsregeln aus Tabelle 3.2 die Menge $\{N_{(0,0,2)(1,1,1)(-1,-1,1)}^{xxx}, N_{(1,1,\nu)(0,0,2)(1,1,1)}^{xxx}\}$.

Nach dem Übergang

$$N_{jkl}^{***} \rightarrow \hat{N}_{jkl}^{***} = N_{jkl}^{***} + \Delta N_{jkl}^{***} \quad (5.3)$$

von den Original-Kopplungskoeffizienten N_{jkl}^{***} zu den renormierten Koeffizienten \hat{N}_{jkl}^{***} dürfen die oben bestimmten Abweichungen nicht mehr auftreten, sie müssen also von

den Differenztermen ΔN_{jkl}^{***} kompensiert werden. Für die Energietransfererhaltung ist dies immer möglich, weil z.B. die Wahl

$$\Delta N_{jkl}^{***} = -N_{jkl}^{***} \implies \hat{N}_{jkl}^{***} = 0 \quad (5.4)$$

die Energietransfererhaltung auf triviale Weise erfüllt. Die zweite Erhaltung, die den Wand- und Dissipationsterm betrifft, ist weniger leicht zu erfüllen, da hierfür Kopplungskoeffizienten $N_{(0,0,\nu)kl}^{***} \neq 0$ vorhanden sein müssen. Da es sich bei den Erhaltungsgleichungen um lineare Gleichungen in den Kopplungskoeffizienten handelt, ergibt sich in den unbekanntem ΔN_{jkl}^{***} ein inhomogenes lineares Gleichungssystem. Für das Beispielsystem folgt unter Beachtung von $N_{(1,1,1)(0,0,2)(1,1,1)}^{xxx} e_1^*(-1, -1, 1, 1) = \left(N_{(-1,-1,1)(0,0,2)(-1,-1,1)}^{xxx} e_1^*(1, 1, 1, 1) \right)^*$ ein inhomogenes lineares Gleichungssystem für die zwei Unbekannten $\Delta N_{(0,0,2)(1,1,1)(-1,-1,1)}^{xxx}$ und $\Delta N_{(1,1,1)(0,0,2)(1,1,1)}^{xxx}$:

$$\begin{aligned} \Delta N_{(0,0,2)(1,1,1)(-1,-1,1)}^{xxx} + \Delta N_{(1,1,1)(0,0,2)(1,1,1)}^{xxx} e_1^*(-1, -1, 1, 1) \\ + \left(\Delta N_{(1,1,1)(0,0,2)(1,1,1)}^{xxx} e_1^*(-1, -1, 1, 1) \right)^* = -g_1, \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\frac{R}{2} \Delta N_{(0,0,2)(1,1,1)(-1,-1,1)}^{xxx} f(2) = -g_2. \quad (5.6)$$

In diesem Falle sind beide Gleichungen reell, aber nur $\Delta N_{(0,0,2)(1,1,1)(-1,-1,1)}^{xxx}$ muß aufgrund der Transformationseigenschaften der Kopplungskoeffizienten eine reelle Größe sein. Es zeigt sich, daß bei endlichen Systemen die Anzahl der Kopplungskoeffizienten die Anzahl der zu erfüllenden Gleichungen bei weitem übersteigt (siehe Tabelle 5.1 und 5.2), so daß die Abweichungen ΔN_{jkl}^{***} nicht eindeutig bestimmt sind. Lediglich für Kopplungskoeffizienten $N_{(0,0,\nu)kl}^{xxx}$ mit $* = x, y$, $k \cong (0, n, \nu')$ und $l \cong (0, -n, \nu'')$ kommt es durch diese Anforderungen teilweise zu überbestimmten Gleichungssystemen, weil viele der Kopplungskoeffizienten im Originalsystem null sind; die Lösungen erfüllen (im Least-Squares-Sinne) die Gleichungen aber in guter Näherung.

Die Unterbestimmtheit wird als Ausgangspunkt einer Optimierung genutzt: Unter der Nebenbedingung, daß die unbekanntem ΔN_{jkl}^{***} die Energietransferverletzung kompensieren sollen, wird der Ausdruck

$$\sum_{j,k,l} \left| \frac{\Delta N_{jkl}^{***}}{N_{jkl}^{***}} \right|^2 \quad (5.7)$$

minimiert. Diese Gewichtung hat den Vorteil, daß die Minimierung von der (willkürlichen) Normierung der Eigenfunktionen und daher von der Skalierung der Kopplungskoeffizienten unabhängig ist, da nur relative Größen eingehen. Näheres zur Implementierung findet man in Anhang B.4.

In den Tabellen 5.1 und 5.2 sind die Systemgrößen für verschieden große Galerkin-systeme angegeben. Die Anzahl der unabhängigen Kopplungskoeffizienten (entspricht

der Anzahl der Unbekannten) geht in Tabelle 5.1 etwa mit $40\nu_{\max}^3$, die Anzahl der Gleichungen aus der Erhaltung des Energietransfers (3.Ordnung) etwa mit $16\nu_{\max}^3$, die Anzahl der Gleichungen aus der Wand- und Dissipationsanforderung etwa mit $3\nu_{\max}^2$. Die resultierenden Gleichungssysteme sind sehr dünn besetzt (maximal ca. $4\nu_{\max}$ Einträge je Zeile) und zerfallen in Blöcke, deren Anzahl zwar zunimmt, aber deren maximale Größe auch beträchtlich steigt.

ν_{\max}	1	2	3	4	5	6	7	8
Dimension des Systems	18	36	54	72	90	108	126	144
Richtungen mit transientem Wachstum	1	2	4	5	6	7	7	7
Anzahl der Kopplungskoeffizienten	42	326	1097	2603	5075	8777	13926	20794
Anzahl der Gleichungen 3.Ordnung	20	141	460	1068	2064	3541	5600	8328
Anzahl der Gleichungen Wand/Diss	0	14	30	50	77	108	146	188
Anzahl der besetzten Spalten	5	9	13	17	21	25	29	33
Anzahl der Blöcke	6	14	19	25	33	40	56	61
maximale Blockgröße	7×17	32×55	78×226	164×457	355×1015	510×1461	889×2576	1204×3472

Tabelle 5.1: Systemgrößen für verschiedene Modenzahlen des endlichen Galerkinsystems am Beispiel des durch L_2 -Norm-Optimierung bestimmten Systems zu $R = 350$, $\alpha = \beta = 1$, mit den Moden $(0, 0, \nu)$, $(1, 0, \nu)$, $(0, 1, \nu)$, $(1, 1, \nu)$ für $\nu = 1, \dots, \nu_{\max}$. Es sind (v.o.n.u.) die Dimension des Systems, die Anzahl der Richtungen mit transientem Wachstum, die Anzahl der für die Energietransfererhaltung zu erfüllenden Gleichungen, die Anzahl der Gleichungen zum Erfüllen der Wand-/Dissipationsrelation, die maximale Zahl von besetzten Spalten, die Anzahl der unabhängigen Blöcke und die maximale Blockgröße im sich ergebenden Gleichungssystem angegeben.

5.2 Energiebilanz des Wand-/Dissipationsterms

In Abbildung 5.1 ist der Verlauf der Energieänderung über der Zeit für einen Anfangszustand in zwei verschiedenen renormierten Galerkinsystemen aufgetragen; die Integra-

ν_{\max}	2	3	4	5	6
Dimension des Systems	52	78	104	130	156
Richtungen mit transientem Wachstum	4	7	9	10	12
Anzahl der Kopplungskoeffizienten	645	2185	5112	9956	17200
Anzahl der Gleichungen 3.Ordnung	293	940	2172	4181	7164
Anzahl der Gleichungen Wand/Diss	21	45	74	114	159
Anzahl der besetzten Spalten	10	16	20	26	30
Anzahl der Blöcke	25	38	49	65	84
maximale Blockgröße	36×96	156×436	272×784	450×1200	900×2628

Tabelle 5.2: Wie Tabelle 5.1, jedoch für Systeme mit jeweils ν_{\max} Moden zu (0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1) und (2,0).

tion des dynamischen Systems erfolgte mit der Bulirsh-Stoer-Extrapolationsmethode (siehe auch Abschnitt 6.3). Im oberen Bild ist das Galerkinsystem so renormiert, daß die Energietransfererhaltung gewährleistet ist. Durchgezogen ist der Differenzenquotient $[E(t + \Delta t) - E(t)]/\Delta t$ für $\Delta t = 0.1$ als Näherung von dE/dt dargestellt, gestrichelt die Summe aus Wand- und Dissipationsterm: $(dE/dt)_{\text{Wand}} + (dE/dt)_{\text{Diss}}$. Deutlich ist eine Abweichung zu erkennen, wobei der Wand-/Dissipationsterm um die Energieänderung schwankt. Im unteren Bild ist derselbe Sachverhalt in einem Galerkinsystem dargestellt, in dem auch die in Abschnitt 4.4 geforderte Gleichheit der Energiebilanz mit der Summe aus Wand- und Dissipationsterm erfüllt ist. Zwischen den beiden Kurven besteht kaum noch ein Unterschied; der geringe Unterschied resultiert aus der teilweisen Überbestimmtheit des für die Renormierung zu lösenden Gleichungssystems und aus numerischen Fehlern, wie z.B. der Annäherung von dE/dt durch einen Differenzenquotienten.

5.3 Tabelle eines renormierten Galerkinsystems

In Tabelle 5.3 sind beispielhaft für ein 36-dimensionales Galerkinsystem, dessen Amplituden in Tabelle 5.4 aufgeführt sind, die 34 betragsmäßig größten Kopplungskoeffizienten des nichtrenormierten und des renormierten Galerkinsystems $R = 300$, $\alpha = \beta = 1$ gegenübergestellt. Insgesamt hat das nichtrenormierte Galerkinsystem 326 Kopplungskoeffizienten. Die relativen Abweichungen liegen bei maximal 32%, meist sind sie deutlich geringer, d.h. die Energieerhaltung der nichtlinearen Terme im endlichen Galerkinsystem kann über verhältnismäßig kleine Änderungen der Kopplungs-

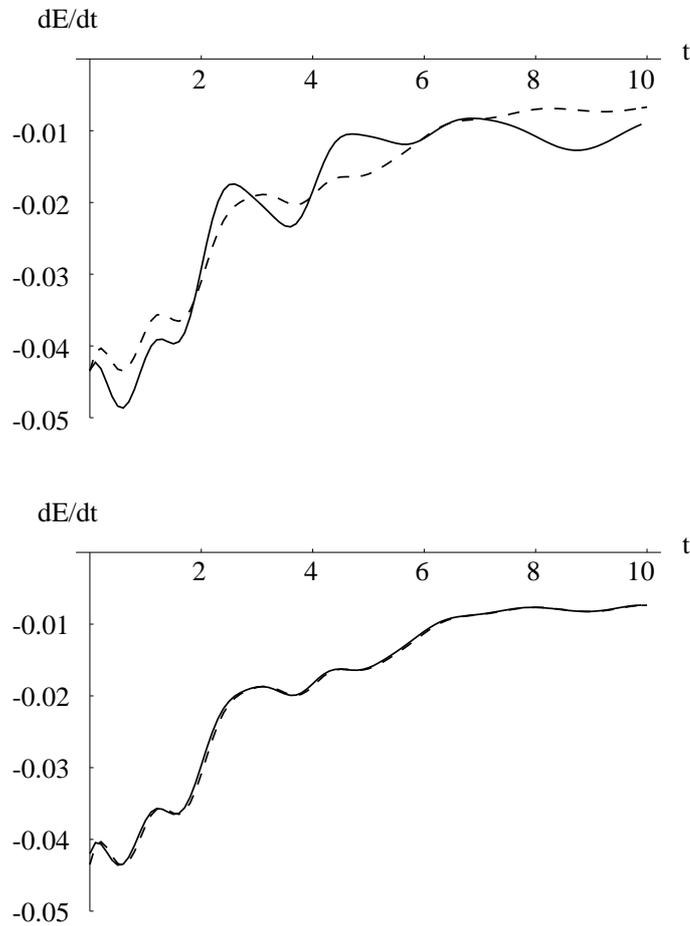


Abbildung 5.1: Vergleich der Energieänderung des Anfangszustandes mit der Anfangsenergie $E^S(0) = 0.2$ aus je vier Amplituden zu den Fouriermoden $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ und $(1,1)$, bei dem alle Amplituden mit gleicher Gewichtung eingehen, zu $R = 350$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 1.5$ in zwei verschiedenen renormierten Galerkinsystemen: Oben wurde nur $(dE^S/dt)_3 = 0$ verlangt, unten zusätzlich, daß Wand- und Dissipationsterm die korrekte Energiebilanz erfüllen. Aufgetragen ist jeweils der Differenzenquotient $\Delta E / \Delta t$ (durchgezogen, $\Delta t = 0.1$) und die Summe aus Wand- und Dissipationsterm (gestrichelt).

koeffizienten erreicht werden. Die Kopplungskoeffizienten wurden durch Optimierung der L_2 -Norm bestimmt, bei Projektion mit Hilfe der Orthogonalsysteme wären die Abweichungen höher. Die Kopplungskoeffizienten wurden so renormiert, daß beide Energietransfererhaltungsanforderungen erfüllt sind.

5.4 Numerische Integration des Galerkinsystems

In diesem Abschnitt werden Ergebnisse der direkten Integration von Anfangszuständen gezeigt. Alle Integrationen wurden mit der Bulirsh-Stoer-Extrapolationsmethode [28, Routine DIVPBS] durchgeführt.

In den Abbildungen 5.2 und 5.3 ist der Energieverlauf in einem Galerkinsystem mit je vier Orr-Sommerfeld- und Squire-Amplituden zu den Fouriermoden $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ und $(1,1)$ bei $R = 400$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 1.5$ dargestellt. Im Anfangszustand sind alle Amplituden gleichgewichtet, er hat die Störungsenergie $E^S(0) = 0.2$, d.h. die Störungsenergie ist etwas größer als die Energie $E^0 = 0.1\bar{6}$ der Grundströmung, die Gesamtenergie $E^G(0) \approx 0.384$ mehr als doppelt so groß. Der Startwert wurde im renormierten System (mit Erfüllung beider Energieerhaltungen) und im nichtrenormierten System integriert, und zusätzlich zum Startwert wurde die Integration im nichtrenormierten System an verschiedenen Zwischenpunkten der Integration im renormierten System begonnen. Abbildung 5.2 zeigt einen Ausschnitt bis zur Zeit $t = 15$, Abbildung 5.3 den Verlauf bis zur Zeit $t = 100$. Es ist deutlich zu erkennen, daß bei großen Anfangsenergien die Integration des Originalsystems zu einem Weglaufen der Energie führt, während die Energie im renormierten System auch für große Startenergien beschränkt bleibt. Hierbei ist zu beachten, daß Abbildung 5.2 den Energiebereich bis $3E^0$ bzw. $4E^0$ zeigt, d.h. die Störung keineswegs klein ist. Die dimensionslose Zeit gibt an, um wieviele halbe Plattenabstände sich jede Platte in ihre Richtung weiterbewegt hat. In Abbildung 5.4 sind für die Energieverläufe aus Abbildung 5.3 die Verläufe der Energieänderung dargestellt: Im renormierten System ist $(dE^S/dt)_3 = 0$, während im nichtrenormierten System die Energietransferverletzung der dominierende Term ist und den negativen, durch die Dissipation bestimmten Term $(dE^S/dt)_2$ mehr als kompensiert.

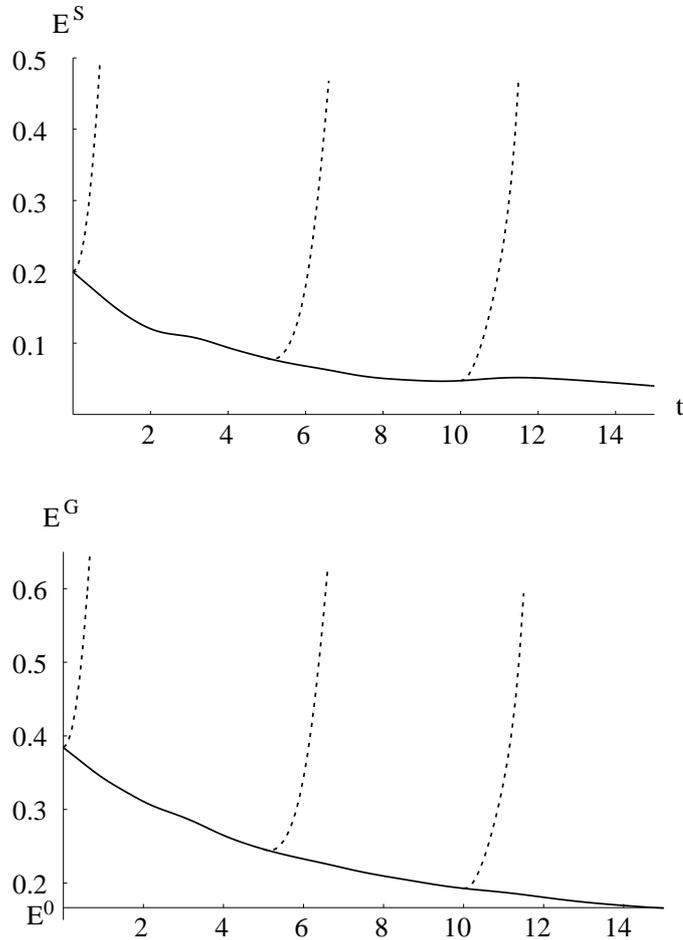


Abbildung 5.2: Für die Parameterwahl $R = 400$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 1.5$ ist der Energieverlauf in einem Galerkinsystem mit je vier Orr-Sommerfeld- und Squire-Amplituden zu den Fouriermoden $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ und $(1, 1)$ dargestellt. Im Anfangszustand sind alle Moden gleichgewichtet, er hat die Störungsenergie $E^S(0) = 0.2$. Die Integration im renormierten System (mit Erfüllung beider Energietransfererhaltungen) ist durchgezogen dargestellt, die Integration im nichtrenormierten System gestrichelt; oben ist die Störungsenergie, unten die Gesamtenergie aufgetragen. Zusätzlich zum Startwert wurde die Integration im nichtrenormierten System an den Zwischenpunkten bei $t = 5$ und $t = 10$ der Integration im renormierten System begonnen. Der weitere Zeitverlauf ist in Abbildung 5.3 dargestellt.

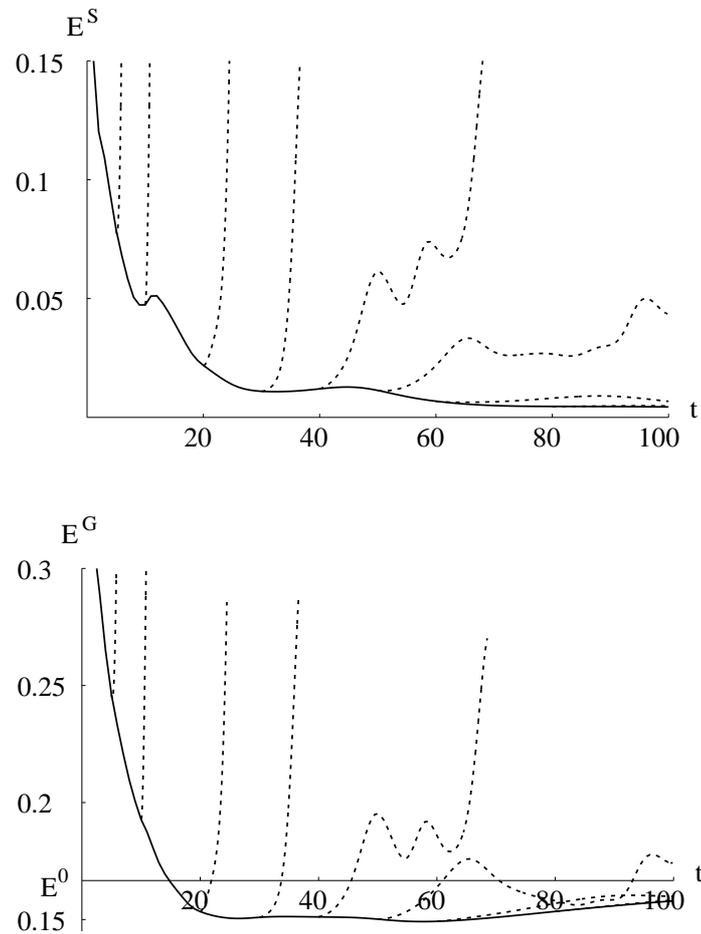


Abbildung 5.3: Wie Abbildung 5.2, jedoch bis $t = 100$ fortgeführt. Die Integration im nichtrenormierten System wurde an den Zwischenpunkten bei $t = 5, 10, 20, 30, 40, 50, 60$ und 80 der Integration im renormierten System begonnen. Die Integration im renormierten System (mit Erfüllung beider Energietransfererhaltungen) ist durchgezogen dargestellt, die Integration im nichtrenormierten System gestrichelt; oben ist die Störungsenergie, unten die Gesamtenergie aufgetragen.

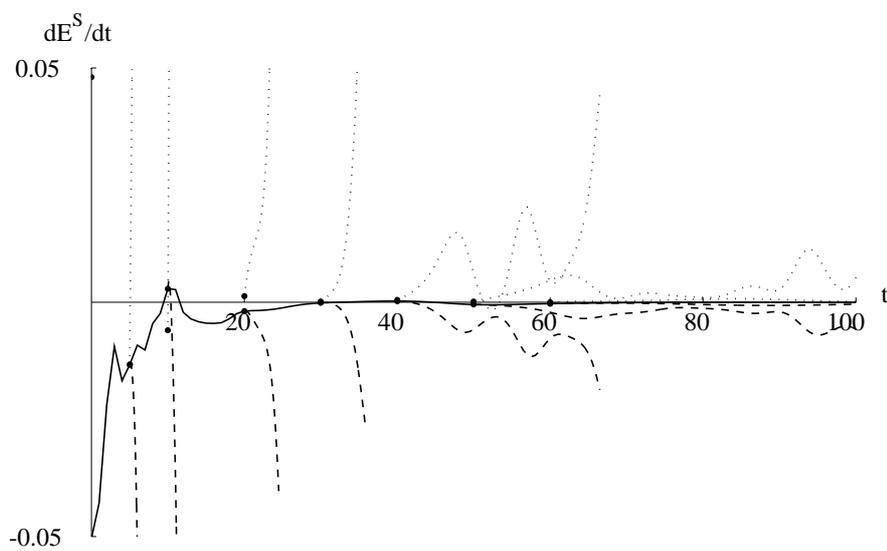


Abbildung 5.4: Wie Abbildung 5.3, doch statt der Energie ist die Energieänderung aufgetragen: Durchgezogen dE^S/dt der Integration im renormierten System, gestrichelt $(dE^S/dt)_2$ und gepunktet $(dE^S/dt)_3$ der Integrationen im nichtrenormierten System, die an den Zwischenpunkten bei $t = 5, 10, 20, 30, 40, 50$ und 60 der Integration im renormierten System begonnen wurden.

j	k	l	nichtrenormierte N_{jkl}^{***}	renormierte N_{jkl}^{***}	rel.Abw.
15	23	27	28.8458+ -0.0563 <i>i</i>	28.8329+ 0.0000 <i>i</i>	0.0020
33	23	27	0.2195+ -28.6167 <i>i</i>	0.3158+ -28.7186 <i>i</i>	0.0049
15	24	28	-28.8458+ -0.0563 <i>i</i>	-28.8329+ 0.0000 <i>i</i>	0.0020
33	24	28	0.2195+ 28.6167 <i>i</i>	0.3158+ 28.7186 <i>i</i>	0.0049
3	8	30	-20.5157+ -11.5210 <i>i</i>	-21.5842+ -10.2815 <i>i</i>	0.0684
21	8	30	9.3511+ -22.4505 <i>i</i>	10.4725+ -21.3929 <i>i</i>	0.0647
3	7	29	20.5157+ -11.5210 <i>i</i>	21.5842+ -10.2815 <i>i</i>	0.0684
21	7	29	9.3511+ 22.4505 <i>i</i>	10.4725+ 21.3929 <i>i</i>	0.0647
16	23	27	-10.5624+ 0.2528 <i>i</i>	-10.0473+ 0.0000 <i>i</i>	0.0571
16	24	28	-10.5624+ -0.2528 <i>i</i>	-10.0473+ 0.0000 <i>i</i>	0.0571
34	23	27	0.7705+ -9.3295 <i>i</i>	0.5240+ -9.8954 <i>i</i>	0.0623
34	24	28	-0.7705+ -9.3295 <i>i</i>	-0.5240+ -9.8954 <i>i</i>	0.0623
8	22	24	-6.4325+ 4.7357 <i>i</i>	-5.6085+ 6.4210 <i>i</i>	0.2200
7	4	23	-4.6269+ 6.3242 <i>i</i>	-5.7818+ 5.7816 <i>i</i>	0.1560
8	4	24	-4.6269+ -6.3242 <i>i</i>	-5.7818+ -5.7816 <i>i</i>	0.1560
7	22	23	6.4325+ 4.7357 <i>i</i>	5.6085+ 6.4210 <i>i</i>	0.2200
33	6	10	-3.1729+ -6.3719 <i>i</i>	-2.1643+ -6.2937 <i>i</i>	0.1520
33	5	9	-3.1729+ 6.3719 <i>i</i>	-2.1643+ 6.2937 <i>i</i>	0.1520
15	5	9	-5.9777+ -0.9219 <i>i</i>	-6.0476+ -1.8107 <i>i</i>	0.1412
7	3	23	3.9654+ -4.3494 <i>i</i>	4.2131+ -4.3119 <i>i</i>	0.0416
22	7	29	0.8087+ 6.3112 <i>i</i>	2.5093+ 5.4505 <i>i</i>	0.3177
22	8	30	-0.8087+ 6.3112 <i>i</i>	-2.5093+ 5.4505 <i>i</i>	0.3177
4	8	30	-4.8148+ -3.9805 <i>i</i>	-5.6851+ -2.2144 <i>i</i>	0.3227
15	6	10	5.9777+ -0.9219 <i>i</i>	6.0476+ -1.8107 <i>i</i>	0.1412
4	7	29	-4.8148+ 3.9805 <i>i</i>	-5.6851+ 2.2144 <i>i</i>	0.3227
8	3	24	-3.9654+ -4.3494 <i>i</i>	-4.2131+ -4.3119 <i>i</i>	0.0416
16	6	10	2.0040+ -4.1727 <i>i</i>	2.1971+ -4.5250 <i>i</i>	0.0799
16	5	9	2.0040+ 4.1727 <i>i</i>	2.1971+ 4.5250 <i>i</i>	0.0799
8	21	24	4.3385+ -4.0616 <i>i</i>	3.9708+ -4.1793 <i>i</i>	0.0670
26	22	24	5.8268+ -1.8830 <i>i</i>	5.3690+ -2.0710 <i>i</i>	0.0860
26	4	24	2.1156+ 5.7445 <i>i</i>	1.7117+ 5.3494 <i>i</i>	0.1006
34	6	10	5.7386+ 2.5813 <i>i</i>	5.1193+ 2.3159 <i>i</i>	0.1199
7	21	23	4.3385+ 4.0616 <i>i</i>	3.9708+ 4.1793 <i>i</i>	0.0670
25	4	23	2.1156+ -5.7445 <i>i</i>	1.7117+ -5.3494 <i>i</i>	0.1006

Tabelle 5.3: Gegenüberstellung der Kopplungskoeffizienten des nichtrenormierten und des renormierten Galerkinsystems zu $R = 300$, $\alpha = \beta = 1$. Nur die 34 betragsmäßig größten Koeffizienten von allen 326 von null verschiedenen sind aufgeführt. Die Bedeutung der Indizes in den Spalten j , k und l kann Tabelle 5.4 entnommen werden. Die letzte Spalte gibt die relative Abweichung des renormierten vom nichtrenormierten Koeffizienten an.

Orr-Sommerfeld-Amplituden		Squire-Amplituden	
$x_{(0,0,1)}$ (1)		$y_{(0,0,1)}$ (19)	
$x_{(0,0,2)}$ (2)		$y_{(0,0,2)}$ (20)	
$x_{(0,1,1)}$ (3)	$x_{(0,-1,1)}$ (15)	$y_{(0,1,1)}$ (21)	$y_{(0,-1,1)}$ (33)
$x_{(0,1,2)}$ (4)	$x_{(0,-1,2)}$ (16)	$y_{(0,1,2)}$ (22)	$y_{(0,-1,2)}$ (34)
$x_{(1,0,1)}$ (5)	$x_{(-1,0,1)}$ (11)	$y_{(1,0,1)}$ (23)	$y_{(-1,0,1)}$ (29)
$x_{(1,0,2)}$ (6)	$x_{(-1,0,2)}$ (12)	$y_{(1,0,2)}$ (24)	$y_{(-1,0,2)}$ (30)
$x_{(1,1,1)}$ (7)	$x_{(-1,-1,1)}$ (9)	$y_{(1,1,1)}$ (25)	$y_{(-1,-1,1)}$ (27)
$x_{(1,1,2)}$ (8)	$x_{(-1,-1,2)}$ (10)	$y_{(1,1,2)}$ (26)	$y_{(-1,-1,2)}$ (28)
$x_{(1,-1,1)}$ (17)	$x_{(-1,1,1)}$ (13)	$y_{(1,-1,1)}$ (35)	$y_{(-1,1,1)}$ (31)
$x_{(1,-1,2)}$ (18)	$x_{(-1,1,2)}$ (14)	$y_{(1,-1,2)}$ (36)	$y_{(-1,1,2)}$ (32)

Tabelle 5.4: Amplituden des endlichen Galerkinsystems der Dimension 36. Die Amplituden in der zweiten bzw. vierten Spalte haben den konjugiert-komplexen Wert der Amplituden in der ersten bzw. dritten Spalte, die Amplituden zu $m = n = 0$ sind reell. Die Zahl in der Klammer gibt den Index an, der in Tabelle 5.3 in den Spalten j , k und l steht.

Kapitel 6

Ergebnisse

In diesem Kapitel werden Ergebnisse vorgestellt, die mit den auf oben beschriebene Weise renormierten Galerkinsystemen erhalten wurden. Im ersten Teil werden ausgewählte Trajektorien exemplarisch dargestellt und ihre Eigenschaften genauer untersucht. Hierbei spielt die Wahl des Anfangszustandes eine wichtige Rolle. Im zweiten Teil wird die Reynoldszahl variiert, um Aussagen über eine kritische Reynoldszahl R_c zu erhalten, ab der die Lebensdauer von Störungen groß wird. Für ein 108-dimensionales System liegt R_c im Bereich 330...345. Im dritten Teil wird gezeigt, daß Energieverlauf und Lebensdauer sensitiv von den Anfangszuständen und von anderen Parametern abhängen. Die angegebenen Zeiten sind dimensionslos. Für einen typischen Versuchsaufbau [46] mit einem Plattenabstand von $2h = 1\text{cm}$ und der Viskosität von Wasser ergibt sich die dimensionsbehaftete Zeit durch $t_{\text{dim}} = (25\text{s}/R) \cdot t$, der maximalen Zeit von 2000 entsprechen bei $R = 350$ also etwa 2.5min. Die dimensionsbehaftete Plattengeschwindigkeit bestimmt sich durch $U_{\text{dim}} = 2 \cdot 10^{-4} R \text{ m/s}$, im obigen Fall also 7cm/s. Allgemeiner gibt die dimensionslose Zeit an, um wieviele halbe Plattenabstände sich jede Platte weiterbewegt hat, bei $t = 2000$ also jede Platte um 10m.

Die verwendeten numerischen Methoden und Verfahren wurden auf verschiedenste Weise geprüft: Die Eigenwerte und Kopplungskoeffizienten N_{jkl}^{***} der Galerkinsysteme wurden zum Vergleich mit Tschebyscheff- und mit Legendrepolyomen und bei verschiedenen Anzahlen dieser Polynome berechnet, ein weiterer Test erfolgte durch direkte Integration mit MATHEMATICA. Die Koeffizienten des renormierten Systems wurden übereinstimmend mit einer IMSL-Routine, einer Routine von NETLIB.ORG und einer eigenen Routine berechnet. Die Erfüllung der Energietransferbedingungen im nichtrenormierten System im Grenzfall unendlicher Amplitudenzahl wurde in Abschnitt 4.3 bestätigt und im renormierten System für verschiedene Anfangszustände explizit überprüft. Die Integrationsroutinen wurden durch direkten Vergleich und anhand einiger Spezialfälle getestet. Näheres zur Überprüfung ist in Anhang B.1 aufgeführt.

6.1 Untersuchung ausgewählter Trajektorien

Schon ein relativ kleines System mit jeweils sechs Orr-Sommerfeld-Amplituden $x_{(m,n,\nu)}$ und sechs Squire-Amplituden $y_{(m,n,\nu)}$ zu jeder Fouriermode $(m, n) = (0, 0), (0, 1), (1, 0)$ und $(1, 1)$ hat 108 komplexe Amplituden. Unter Beachtung der Bedingungen $x_{(m,n,\nu)} = x_{(-m,-n,\nu)}^*$ und $y_{(m,n,\nu)} = y_{(-m,-n,\nu)}^*$ bleiben 108 reelle Freiheitsgrade für die Wahl eines Anfangszustandes. Zunächst werden vier Ansätze erörtert, einen Anfangszustand der Störungsenergie $E^S(0) = E_0^S$ zu erhalten:

Gleiche Gewichtung aller Amplituden: Alle Amplituden werden zum Zeitpunkt $t = 0$ auf die gleiche reelle Konstante c gesetzt, so daß die anfängliche Störungsenergie E_0^S ist. Diese Wahl hat den Vorteil, daß jede Amplitude anfänglich gleich stark vertreten ist. Es wäre natürlich möglich, für jede Amplitude Variationen im Vorzeichen der Konstante zu erlauben, doch führt dieser Ansatz im wesentlichen auf die Zufallsverteilung (s.u.).

Addition der transient steigenden Amplituden: In Abschnitt 4.5 wurde gezeigt, daß durch Lösen des Eigensystems (4.76) diejenigen Eigenvektoren $f_{(m,n,\nu)}$ gefunden werden können, die im endlichen Galerkinsystem (amplitudenunabhängig) zu transientem Störungsenergieanstieg führen. Auch im nichtlinearen Galerkinsystem wächst die Störungsenergie, weil die Kopplungskoeffizienten in die zeitliche Ableitung (4.40) der Störungsenergie nicht eingehen. Da sie allerdings bei der Berechnung der Zeitableitung (4.41) der Austauschenergie auftreten, steigt die Gesamtenergie nicht zwingend an. Als linearer Effekt tritt transientes Wachstum für jede Fouriermode einzeln auf, so daß für den Anfangszustand die linear steigenden Vektoren der einzelnen Moden, die zuvor auf die Störungsenergie 1 normiert wurden, addiert werden. Die Amplituden zu $m = n = 0$ sind anfänglich null, weil bei dieser Fouriermode kein transientes Wachstum auftritt. Anschließend wird der Anfangszustand so skaliert, daß die Anfangsstörungsenergie des Gesamtzustandes E_0^S ist.

Fixpunkte des Galerkinsystems: Für die hochdimensionalen Galerkinsysteme lassen sich Fixpunkte oder Fast-Fixpunkte finden. Diese sind i.a. instabil, doch haben sie teilweise beträchtliche Lebensdauern. Zur Untersuchung der Umgebung des Fixpunktes werden sie linear auf die gewünschte Anfangsenergie E_0^S skaliert.

Zufallsverteilung: Eine statistische Aussage über die Eigenschaften des Galerkinsystems ist über die zufällige Wahl von Anfangszuständen möglich. Hierbei wird jeder Amplitude eine zufällige Anfangsgröße zugeordnet und danach der Gesamtzustand auf die Anfangsenergie E_0^S skaliert.

Im weiteren werden typische Trajektorien vorgestellt und diskutiert. Hierzu wird das o.g. 108-dimensionale renormierte Galerkinsystem bei den Parameterwerten $R = 350$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 1.5$ von definierten Anfangszuständen numerisch integriert. Die Wahl von α und β orientiert sich am transienten Wachstum der $(0, 1)$ - und der $(1, 1)$ -Fouriermode und an numerischen Ergebnissen anderer Autoren [5, 8, 23, 31, 41], die Wahl der Reynoldszahl wird im Abschnitt 6.2 begründet. Die Systemgröße ergibt sich aus den Anforderungen, daß möglichst wenige Fouriermoden ausreichen sollten (siehe Abschnitt 3.4 für die zugrundeliegenden Auswahlregeln für die Kopplungen zwischen

den Moden) und daß bei dieser Reynoldszahl zum einen alle transient steigenden Moden (siehe Tabelle 5.1) und zum anderen die Hauptenergietransferterme (siehe Abschnitt 4.3.2) im endlichen Galerkinsystem enthalten sein sollten.

6.1.1 Integration mit Anfangszustand gleicher Gewichtung aller Amplituden

In den Abbildungen 6.1 und 6.2 ist der Verlauf der Störungsenergie und der Gesamtenergie für gleichgewichtete Anfangszustände mit den Anfangsenergien $E^S(0) = 0.01$; 0.02 ; $\dots 0.16$ und 0.045 aufgetragen, wobei die erste Abbildung die Integration bis $t = 100$ zeigt, die letzte bis $t = 500$. Dieser Zustand hat in diesem System eine Gesamtenergie, die größer als die Energie der Grundströmung ist, aber gleichzeitig mit der Störungsenergie rasch abfällt, und zwar unter das Niveau der Grundenergie. Die einzelnen Energieverläufe ähneln sich nur bis etwa $t = 30$, danach ist das Verhalten sehr verschieden: Während für einen Großteil der Anfangszustände die Störungsenergie fast monoton verschwindet bzw. die Gesamtenergie fast monoton auf die Grundenergie ansteigt, zeigen insbesondere drei Anfangszustände ein stark schwankendes Verhalten und sind auch noch zur Zeit $t = 500$ nicht abgefallen. Ihre Energieverläufe ähneln sich insofern grob, daß die Störungsenergie zwischen 0.03 und 0.13 schwankt, also von der Größenordnung 20% bis 80% der Grundenergie, und daß die Gesamtenergie bis auf etwa 50% der Grundenergie absinkt.

In Abbildung 6.3 ist der Verlauf der Störungsenergie und der Gesamtenergie für den Langlebigsten der obigen 17 Anfangszustände, dem mit $E^S(0) = 0.045$, dargestellt. Die Störungsenergie liegt meist bei 0.03 mit mehreren Ausbrüchen auf das Niveau der Grundenergie, die Gesamtenergie liegt knapp unterhalb der Grundenergie, sinkt aber in Peaks bis auf 50% der Grundenergie ab. Die Störungsenergie E^S läßt sich nach (4.13) als Summe der Energie der einzelnen Fouriermoden schreiben:

$$E^S = \sum_{m,n \geq 0} E_{m,n}^S. \quad (6.1)$$

Hierbei wurden die Anteile zu (m, n) , $(m, -n)$, $(-m, n)$ und $(-m, -n)$ zusammengefaßt. Für die Integration des hier behandelten Zustands ergibt sich die in Abbildung 6.4 gezeigte Aufteilung der Störungsenergie auf die einzelnen Fouriermoden. Der größere Teil der Energie steckt in den Fouriermoden $(0, 0)$ und $(0, 1)$; die Fouriermode $(0, 0)$ hat eine Mindestenergie von etwa 0.01 , die Fouriermode $(0, 1)$ von etwa 0.02 , in den Fouriermoden $(1, 0)$ und $(1, 1)$ tritt die Energie eher peakförmig auf. Das bedeutet, daß die Störung eine deutliche z -Abhängigkeit zeigt, ihre x -Abhängigkeit aber immer nur kurz auftritt. Die Peaks der Störungsenergie spiegeln sich in Peaks in allen Fouriermoden wider; es ist also nicht so, daß nur bestimmte Fouriermoden zu dem starken Störungsenergieanstieg führen. Die Energie der $(0, 0)$ - und $(0, 1)$ -Moden steigt und fällt jeweils etwas früher als die der anderen Moden, was in Übereinstimmung mit anderen Untersuchungen steht[23].

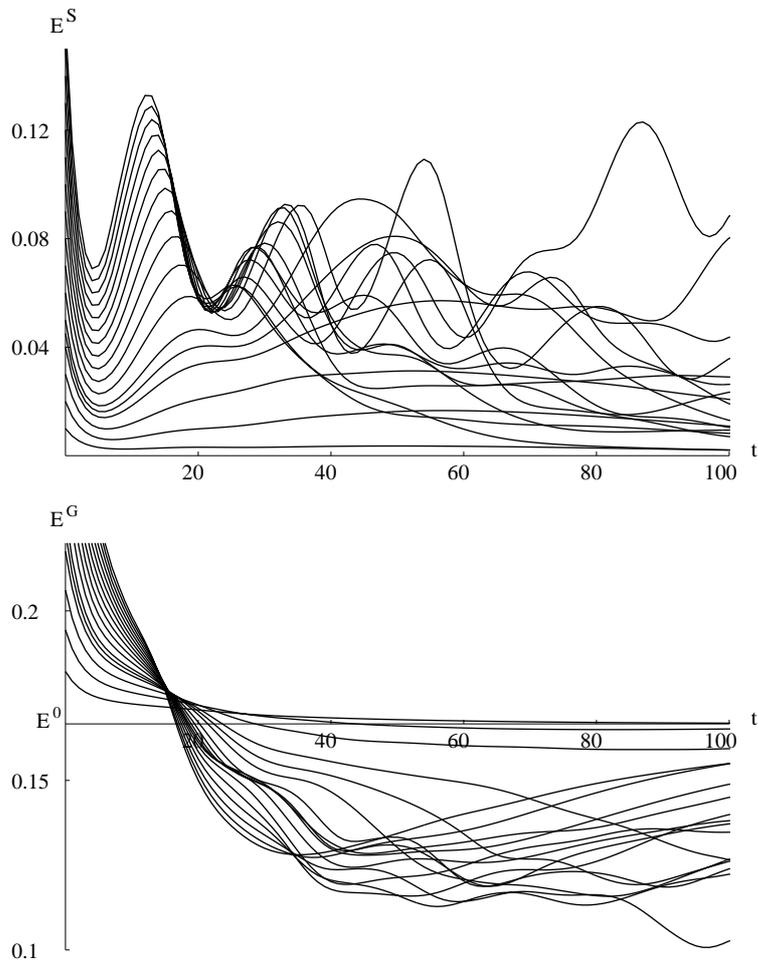


Abbildung 6.1: Verlauf der Störungsenergie (oben) und der Gesamtenergie (unten) für Anfangszustände mit gleichgewichteten Amplituden und einer Anfangsstörungsenergie von $E^S(0) = 0.01, 0.02, \dots, 0.16$ und 0.045 bei $R = 350$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 1.5$. E^0 bezeichnet die Energie der Grundströmung. Nach einem i.a. starken Abfall der Störungs- und Gesamtenergie, letztere weit unter die Grundenergie, setzt dann teilweise beträchtliches Wachstum ein; der weitere Verlauf kann Abbildung 6.2 entnommen werden.

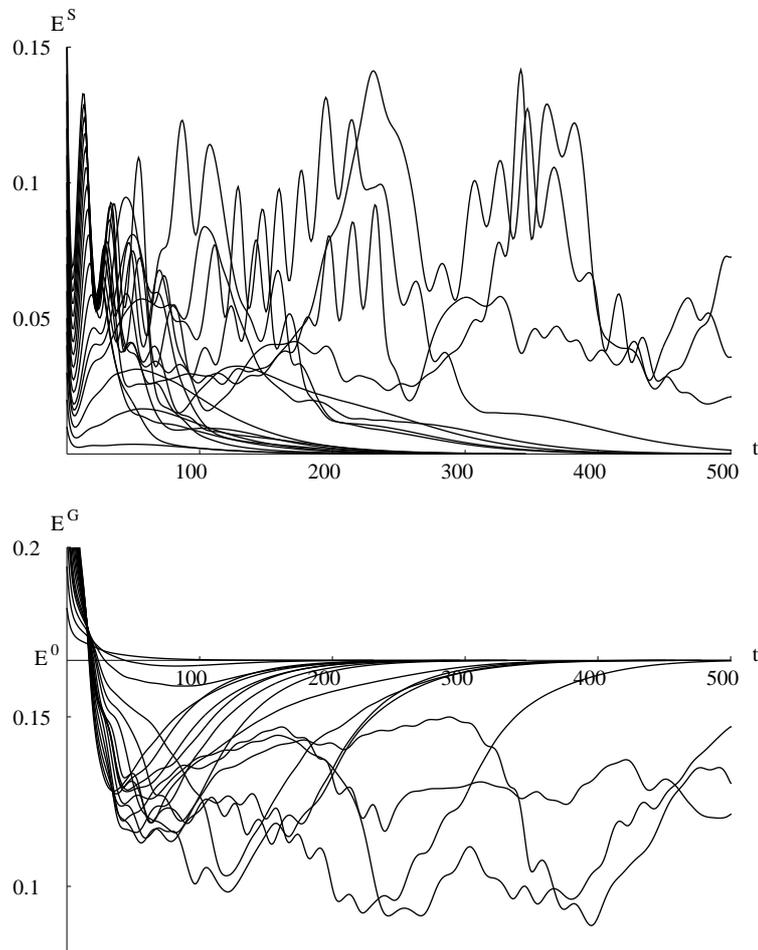


Abbildung 6.2: Verlauf der Störungsenergie (oben) und der Gesamtenergie (unten) für die Anfangszustände mit gleichgewichteten Amplituden und einer Anfangsstörungsenergie von $E^S(0) = 0.01, 0.02, \dots, 0.16$ und 0.045 bei $R = 350$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 1.5$. Der Großteil der Anfangszustände fällt innerhalb dieser Zeit stark ab, die Störungen verschwinden also, d.h. die Gesamtenergie geht (von unten) gegen die Grundenergie. Nur drei der 17 Anfangszustände sind bei $t = 500$ noch nicht abgefallen, werden aber bis $t = 2000$ auch abfallen; einer dieser drei wird ab Abbildung 6.3 näher untersucht.

Ebenfalls für diesen Anfangszustand ist in Abbildung 6.5 der Verlauf von Dissipation und Wandterm dargestellt. Deutlich ist zu erkennen, daß sich Wand- und Dissipationsterm zu jedem Zeitpunkt fast kompensieren, die Gesamtenergieänderung ist meistens eine Größenordnung kleiner als die Summanden. Dissipation und Wandterm liegen in der Größenordnung der Dissipation bzw. des Wandterms der Grundströmung. Die Größenordnung der Dissipation ist mit Abschätzungen verträglich [16, 33, 34], denn die Gesamtdissipation liegt im Schnitt bei etwa 0.005, die niedrigste Abschätzung der maximalen mittleren Dissipation liegt für $R = 350$ im Bereich 0.0058[34].

Die Gesamtenergie eines langlebigen Zustandes liegt zumeist unterhalb der Grundenergie, denn damit die Dissipation kompensiert wird, muß der Wandterm überwiegend positiv sein, d.h. die Wände müssen im Schnitt Energie an die Strömung abgeben. Der Wandterm der Couette-Strömung hat die Form (siehe (4.8)):

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{\text{Wand}} = \frac{\pi}{2R} \sum_{\nu \text{ gerade}} \nu x_{(0,0,\nu)} (-1)^{\nu/2}. \quad (6.2)$$

Andererseits läßt sich die Gesamtenergie als Summe der beiden positiven Teilenergien Grund- und Störungsenergie und des nicht notwendig positiven Austauschterms schreiben, der für die Couette-Strömung die Form

$$E^{0S} = -\frac{2}{\pi} \sum_{\nu \text{ gerade}} x_{(0,0,\nu)} \frac{(-1)^{\nu/2}}{\nu} \quad (6.3)$$

hat. Bei einem langlebigen Zustand, der also kontinuierlich Energie aus der Wand bezieht, um die Dissipation auszugleichen, haben die Amplituden $x_{(0,0,\nu)}$ für gerade ν das Vorzeichen $(-1)^{\nu/2}$, so daß die Summe in (6.2) über positive Terme geht und damit positiv ist (die Strömung erhält Energie), die aus denselben Summanden (bis auf die Gewichtung) bestehende Austauschenergie E^{0S} ist dann negativ; dies führt nicht notwendig dazu, daß die Gesamtenergie

$$E^G = E^0 + E^{0S} + E^S \quad (6.4)$$

kleiner als die Grundenergie ist, doch bestätigen alle hier erfolgten numerischen Rechnungen diese Vermutung.

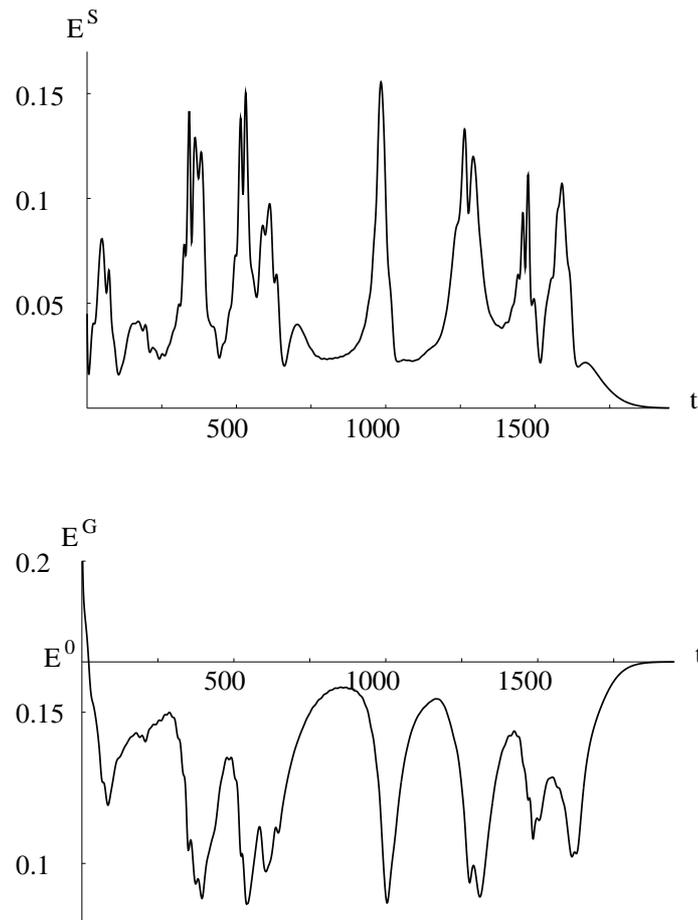


Abbildung 6.3: Verlauf der Störungsenergie (oben) und der Gesamtenergie (unten) für den gleichgewichteten Anfangszustand mit $E^S(0) = 0.045$ bei $R = 350$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 1.5$. Dieser Zustand ist der Langlebigste von den oberen 17 Anfangszuständen.

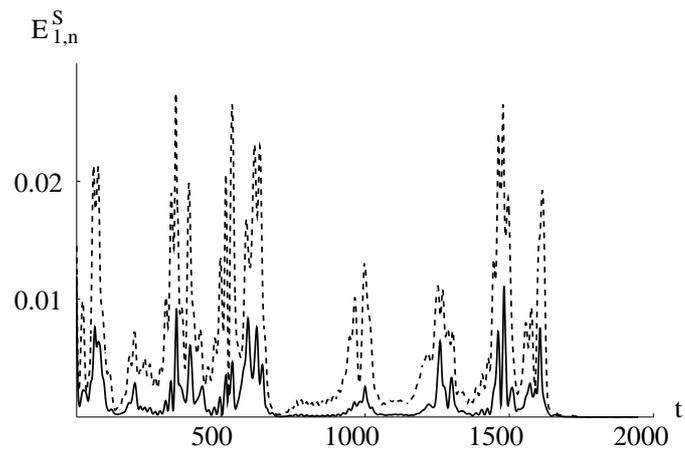
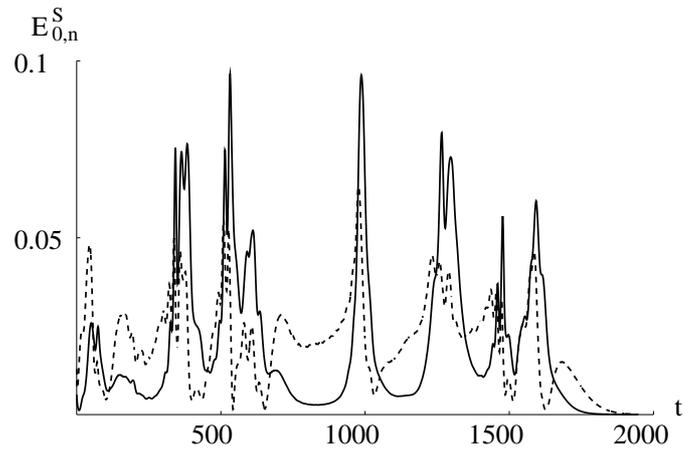


Abbildung 6.4: Darstellung des Verlaufs der Fourieranteile der Störungsenergie zum gleichgewichteten Anfangszustand mit $E^S(0) = 0.045$ bei $R = 350$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 1.5$. Im oberen Teil sind $E_{0,0}^S$ (durchgezogen) und $E_{0,1}^S$ (gestrichelt), im unteren Teil $E_{1,0}^S$ (durchgezogen) und $E_{1,1}^S$ (gestrichelt) über der Zeit aufgetragen. Man beachte die verschiedene Skalierung der Energieachsen.

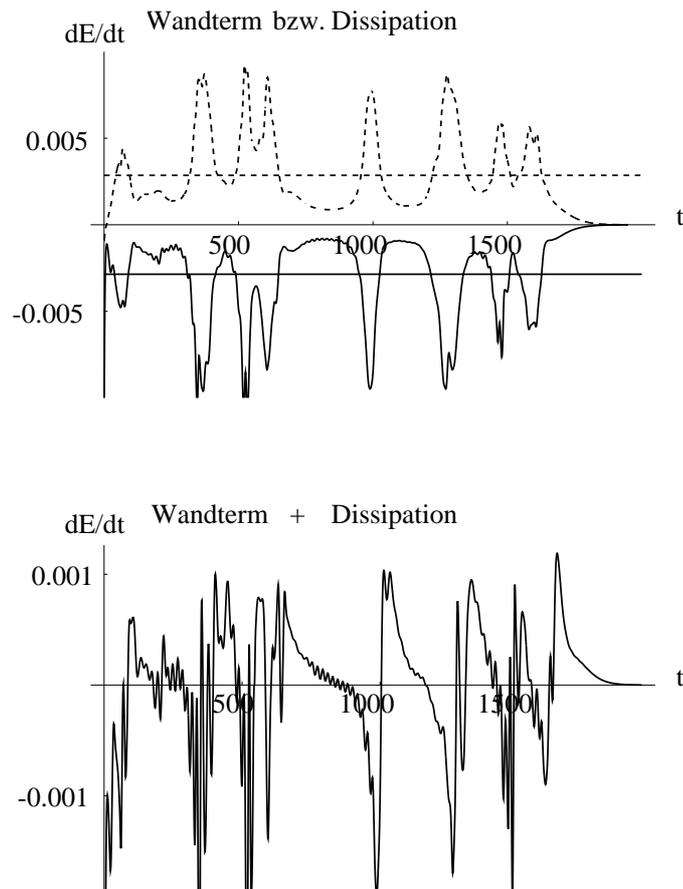


Abbildung 6.5: Verlauf des Wandterms (oben, gestrichelt), des Dissipationsterms (oben, durchgezogen) und der Summe aus beiden (unten) für den gleichgewichteten Anfangszustand mit $E^S(0) = 0.045$ bei $R = 350, \alpha = 0.5, \beta = 1.5$. Wandterm $1/R$ und Dissipationsterm $-1/R$ der Grundströmung sind als Linien eingezeichnet.

6.1.2 Integration mit transient wachsendem Anfangszustand

In diesem Abschnitt wird die Integration des Anfangszustandes vorgestellt, der die Summe aller jeweils auf die Energie 1 skalierten transient wachsenden Eigenfunktionen des Eigensystems (4.76) ist. Für o.g. System sind die größten Anstiege bei $R = 350$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 1.5$ in Tabelle 4.12 gegeben. Unter Beachtung der Unabhängigkeit der Moden $(1, 1)$ und $(-1, 1)$ ergeben sich zehn Richtungen mit transientem Wachstum. Der Anfangszustand, der durch Summation dieser zehn Richtungen, die einzeln auf die Störungsenergie 1 skaliert sind, entsteht, hat die Störungsenergie 10 und steigt mit der Summe 3.137 der positiven Eigenwerte. Nach Skalierung auf die gewünschte Anfangsstörungsenergie $E^S(0)$ ergibt sich die Steigung $0.3137E^S(0)$. In Abbildung 6.6 ist der Verlauf der Störungsenergie und Gesamtenergie für verschieden skalierte Anfangszustände bis zur Zeit $t = 30$ aufgetragen. Die Zeitdauer des Wachstums nimmt mit wachsender Anfangsstörungsenergie ab, die Steigung nimmt wegen der Proportionalität zu $E^S(0)$ zu. Die Gesamtenergie hat den Anfangswert $E^G = E^0 + E^S$, fällt jedoch trotz des vorübergehenden Anstiegs der Störungsenergie sofort ab, da der Wandterm wegen des Fehlens der Moden zu $m = n = 0$ bei $t = 0$ null ist, so daß die Gesamtenergieänderung nur von der Dissipation bestimmt wird. In Abbildung 6.7 sind die Verläufe von Störungs- und Gesamtenergie dieser Anfangszustände bis zur Zeit $t = 250$ aufgetragen. Im Vergleich zu den Energieverläufen des vorherigen Abschnitts, in dem die Anfangszustände durch gleiche Gewichtung aller Amplituden gebildet wurden, zeigt sich hier eine i.a. kürzere Lebensdauer und ein einheitlicherer Verlauf: Nach dem anfänglichen Anstieg der Störungsenergie kommt es zum monotonen Abfall, dem bei größerer Anfangsenergie ein Zwischenwachstum vorausgeht. Die einfache Addition der transient steigenden Zustände reicht also bei der Reynoldszahl $R = 350$ nicht aus, um langlebige Zustände zu finden.

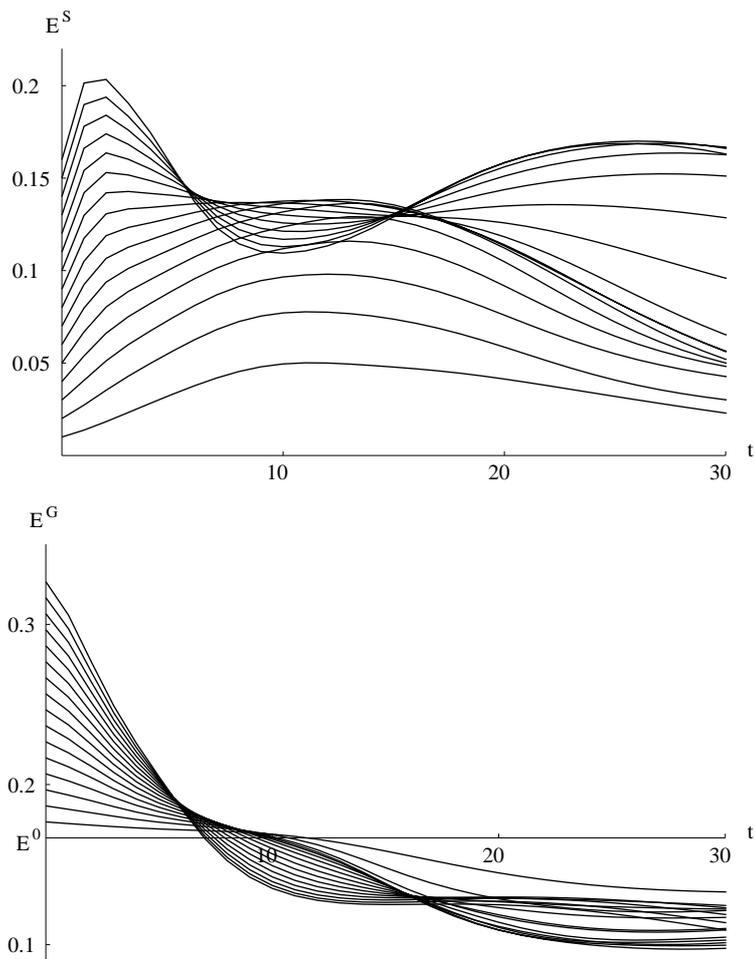


Abbildung 6.6: Verlauf der Störungsenergie (oben) und Gesamtenergie (unten) für die transient wachsenden Anfangszustände zu $E^S(0) = 0.01, 0.02, \dots, 0.16$ bei $R = 350$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 1.5$. Deutlich ist der anfängliche Anstieg mit der Steigung $0.3137E^S(0)$ zu erkennen. Obwohl die Störungsenergie ansteigt, fällt die Gesamtenergie sofort unter die Grundenergie.

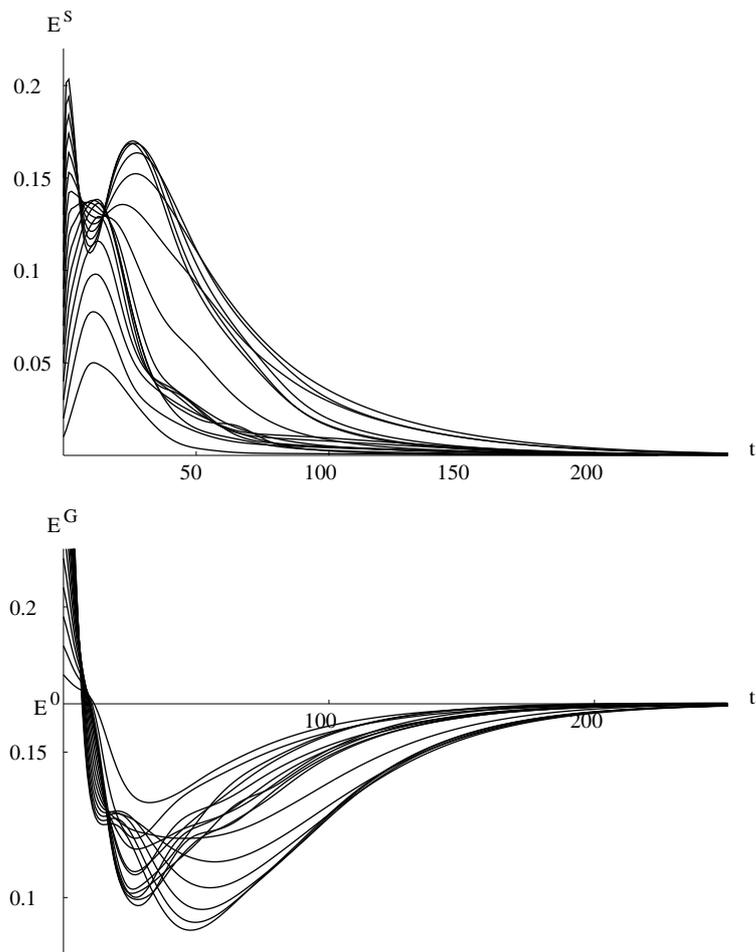


Abbildung 6.7: Verlauf der Störungsenergie (oben) und Gesamtenergie (unten) für die transient wachsenden Anfangszustände zu $E^S(0) = 0.01, 0.02, \dots, 0.16$ bei $R = 350$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 1.5$. Die Lebensdauer dieser Anfangszustände ist trotz des anfänglichen Wachstums kleiner als die Lebensdauer der gleichgewichteten Anfangszustände vergleichbarer Anfangsstörungsenergie.

6.1.3 Integration in der Nähe von Quasifixpunkten

Für das 108-dimensionale Galerkinsystem lassen sich mit Standardverfahren, in diesem Falle mit einer Least-Squares-Routine [28, Routine DUNLSF], die von zufälligen Anfangspunkten ausgeht, mindestens die zwei Quasifixpunkte F_1 und F_2 in Tabelle 6.1 finden, wobei wegen der Translationsinvarianz entlang der Platten Gesamtschwindigkeiten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ zugelassen wurden:

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{v}(x - c_1 t, y, z - c_2 t, t) = 0. \quad (6.5)$$

	E^S	E^G	c_1	c_2	Residuum
F_1	0.01363	0.1494	± 0.3783	0	$0.39 \cdot 10^{-4}$
F_2	0.02125	0.1603	± 0.1237	0	$0.49 \cdot 10^{-16}$

Tabelle 6.1: Störungsenergie E^S , Gesamtenergie E^G , Translationsgeschwindigkeiten c_1 und c_2 und Residuum $\sqrt{\sum_{j \in (m,n,\nu)} (|\dot{x}_j|^2 + |\dot{y}_j|^2)}/108$ der zwei Quasifixpunkte des 108-dimensionalen renormierten Galerkinsystems bei $R = 350$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 1.5$. Der Quasifixpunkt F_1 hat ein sehr großes Residuum, F_2 ist im Rahmen der numerischen Genauigkeit ein Fixpunkt.

Zur Untersuchung der Umgebung werden die Quasifixpunkte linear skaliert. In Abbildung 6.8 ist der Verlauf der Störungsenergie für Anfangszustände, die durch Skalierung des Quasifixpunktes F_1 auf die Anfangsstörungsenergien $E^S(0) = 0.01; 0.01363; 0.015; 0.02; 0.03$ gebildet wurden, dargestellt. Für Anfangsenergien unter der oder um die Energie des Quasifixpunktes fällt die Störungsenergie monoton ab, für höhere Energien kommt es zu einem zwischenzeitlichen Anstieg auf etwa 50% der Grundenergie.

In Abbildung 6.9 ist der Verlauf der Störungsenergie für die Umgebung des Quasifixpunktes F_2 dargestellt: Die Anfangsstörungsenergien sind $E^S(0) = 0.02; 0.02125; 0.022; 0.025; 0.03; 0.04$. Der Quasifixpunkt F_2 erweist sich, wie aufgrund seines niedrigeren Residuums zu erwarten ist, als stabiler als F_1 , seine Energie bleibt bis $t = 350$ annähernd konstant. Anfangszustände mit höherer Energie wachsen etwa auf die Energie der Grundströmung an, dann verschwindet die Störung aber fast monoton.

Auch hier sind die Lebensdauern eher kürzer als bei den gleichgewichteten Anfangszuständen, eine höhere Anfangsenergie führt zu einem früheren Wachstum, aber auch zu einem früheren Abfall. Dies bedeutet, daß Quasifixpunkte des endlichen Galerkinsystems für die Dynamik des Systems eine eher untergeordnete Rolle zu spielen scheinen; insbesondere wirken sie nicht attraktiv, sondern, wie Abbildung 6.9 andeutet und unlängst vermutet wurde[43], eher repulsiv.

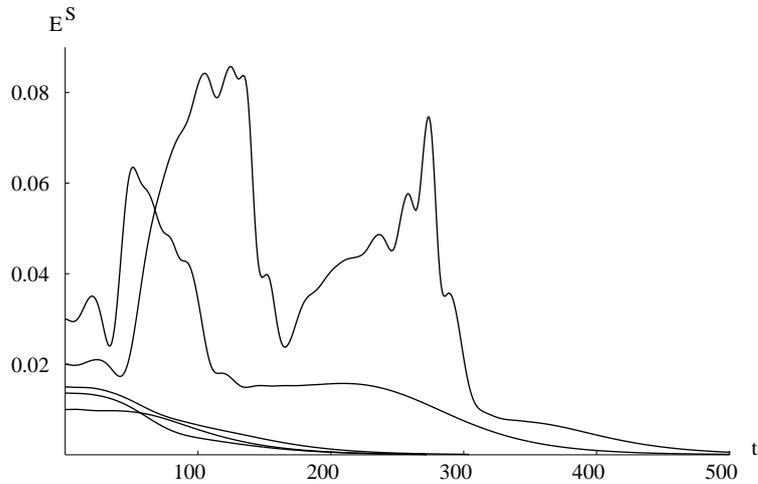


Abbildung 6.8: Verlauf der Störungsenergie für Anfangszustände in der Nähe des Quasifixpunktes F_1 des Galerkinsystems mit den Anfangsenergien $E^S(0) = 0.01$; 0.01363 ; 0.015 ; 0.02 ; 0.03 bei $R = 350$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 1.5$. Anfangszustände mit höherer Energie zeigen einen stärkeren Anstieg, fallen aber früher ab.

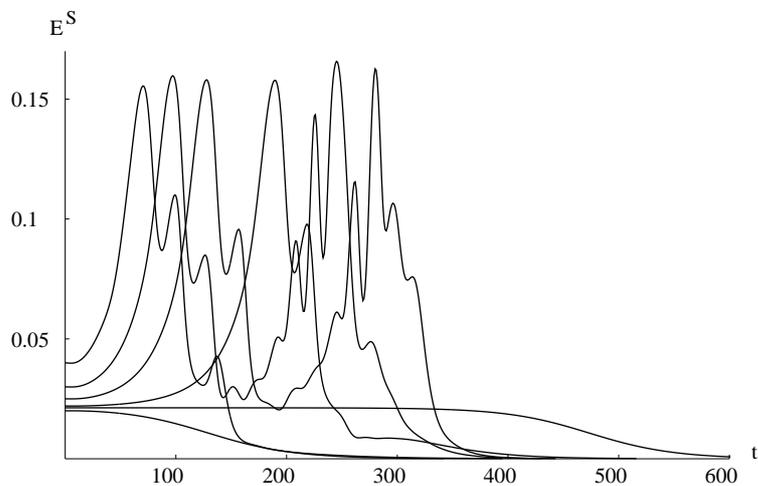


Abbildung 6.9: Verlauf der Störungsenergie für Anfangszustände in der Nähe des Quasifixpunktes F_2 des Galerkinsystems mit den Anfangsenergien $E^S(0) = 0.02$; 0.02125 ; 0.022 ; 0.025 ; 0.03 ; 0.04 bei $R = 350$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 1.5$. Für den Quasifixpunkt ergibt sich ein über lange Zeit konstanter Zustand, der Quasifixpunkt ist erwartungsgemäß im Vergleich zu F_1 verhältnismäßig stabil.

6.1.4 Integration mit zufälligen Anfangszuständen

Aufgrund der hohen Dimension des zugrundeliegenden Raumes – für das oben behandelte Galerkinsystem ist der Anfangszustand aus \mathbb{R}^{108} – sind statistische Aussagen nur bei großen Stichproben möglich. In der Abbildung 6.10 sind die untere Einhüllende, die obere Einhüllende und der mittlere Verlauf der Störungsenergien von 1000 zufälligen Anfangszuständen dargestellt. Hierzu wurde jeder Amplitude eine zufällige Anfangsgröße zugeordnet und danach der Gesamtzustand auf die Anfangsenergie $E^S(0) = 0.16 \approx E^G$ skaliert. Wie auch aufgrund der Ergebnisse der vorherigen Abschnitte zu erwarten ist, fallen die meisten Anfangszustände zunächst stark ab, bevor sie nach einem vorübergehenden Anstieg endgültig abfallen. Die mittlere Lebensdauer liegt um die Zeit 1000, die maximale etwas über 2000. Der Verlauf der oberen Einhüllenden stellt eine Abfolge von Peaks verschiedener Einzelverläufe dar und liegt erwartungsgemäß in der Größenordnung der Grundströmung. Auffallend ist, daß keiner der zufälligen Zustände zu Beginn ansteigt, d.h. insbesondere ist keiner der Anfangszustände aus Abschnitt 6.1.2 darunter.

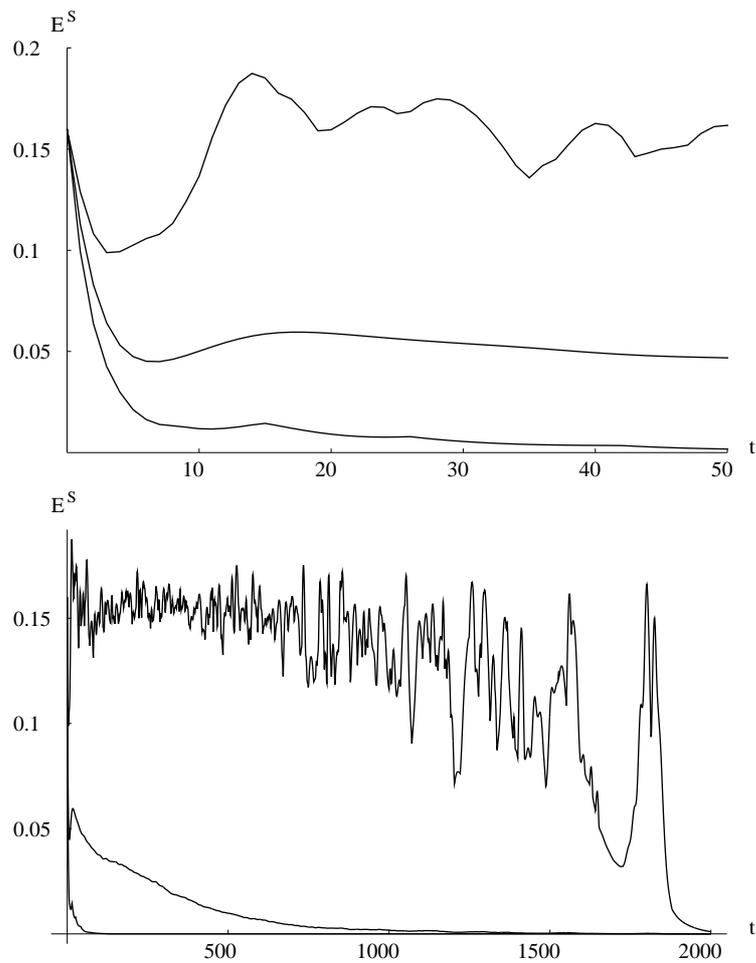


Abbildung 6.10: Verlauf der oberen Einhüllenden, der unteren Einhüllenden und der mittlere Verlauf der Störungsenergie von 1000 zufälligen Anfangszuständen mit $E^S(0) = 0.16$ bei $R = 350$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 1.5$. Oben ist ein Ausschnitt der unteren Abbildung dargestellt.

6.2 Bestimmung der kritischen Reynoldszahl

In diesem Abschnitt werden Galerkinsysteme mit jeweils sechs Orr-Sommerfeld-Amplituden $x_j(t)$ und sechs Squire-Amplituden $y_j(t)$ zu den Fouriermoden $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ und $(1, 1)$, also mit der Dimension 108, bei $\alpha = 0.5$, $\beta = 1.5$ und verschiedenen Reynoldszahlen untersucht. Das Ziel ist, eine kritische Reynoldszahl R_c zu finden, ab der Störungen nicht notwendig verschwinden, sondern zumindest über einen langen Zeitraum überleben. Experimentell wurde dieser Wert von verschiedenen Arbeitsgruppen, je nach Versuchsaufbau, im Bereich $R_c = 320 \dots 370$ bestimmt.[11, 12, 13, 46]

Die Abbildungen 6.11 und 6.12 zeigen die obere Einhüllende, die untere Einhüllende und den mittleren Verlauf der Störungsenergie bzw. der Gesamtenergie der Integration von jeweils 1000 zufälligen Anfangszuständen der Anfangsstörungsenergie $E^S(0) = 0.16$ bei verschiedenen Reynoldszahlen $R = 50 \dots 300$, wobei die Amplituden x_j und y_j zu jeder Reynoldszahl dieselben 1000 Besetzungen haben; die Anfangszustände sind trotzdem nicht identisch, weil sich die Entwicklungsfunktionen, zu denen die Amplituden die Koeffizienten sind, mit R ändern. Deutlich ist die starke Zunahme der Lebensdauer mit der Reynoldszahl zu erkennen, wobei für $R = 300$ auch peakartige Strukturen in der oberen Einhüllenden sichtbar sind. Insgesamt fällt die Störungsenergie aber bei allen vier Reynoldszahlen annähernd monoton ab, so daß die kritische Reynoldszahl für dieses System noch über $R = 300$ zu liegen scheint.

In der Abbildung 6.13 sind jeweils für die Reynoldszahlen $R = 300, 310, 320, 325, 335$ und 345 die Störungsenergieverläufe von 16 gleichgewichteten Anfangszuständen der Anfangsenergien $E^S(0) = 0.02, 0.04, \dots, 0.2, 0.4, 0.8, 1.5, 3, 5, 10$ (also bis zum 60fachen der Grundenergie) dargestellt. Während die Lebensdauern für $R = 300$ noch im Bereich bis $t = 300$ liegen, steigen sie bei wachsendem R rapide an auf etwa $t = 1000$ bei $R = 345$. Auch die Qualität der einzelnen Störungsenergieverläufe ändert sich: Während im unteren Reynoldszahlbereich nach kurzzeitigem Anstieg ein fast monotoner Abfall eintritt, verlaufen die Störungsenergien bei höheren Reynoldszahlen über lange Zeiträume auf etwa gleichem Niveau mit peakartigen Ausbrüchen bis zur Größenordnung der Grundenergie (siehe auch Abschnitt 6.1).

Dieser Eindruck bestätigt sich, wenn die Integration von 1000 zufälligen Anfangszuständen der Anfangsstörungsenergie $E^S(0) = 0.16$ aus Abbildung 6.11 auf Reynoldszahlen von $R = 300$ bis 350 ausgeweitet wird; die Ergebnisse sind in Abbildung 6.14 dargestellt.

Es ist nicht zu erwarten, daß der Übergang bei einer scharfen Grenze bezüglich der Reynoldszahl stattfindet; vielmehr ist davon auszugehen, daß, wie in den Abbildungen dargestellt, in einem gewissen Reynoldszahlbereich, der hier im Bereich $R = 335$ bis 345 liegt, eine qualitative Änderung im Energieverlauf und damit einhergehend eine quantitative Änderung in der Lebensdauer auftritt.

Für Integrationen von Systemen über der Reynoldszahl $R = 350$ scheint es notwendig, mehr als sechs Orr-Sommerfeld- und Squire-Amplituden je Fouriermode in das System einzuschließen, weil sich die Energietransferterme mit steigender

Reynoldszahl verlagern (siehe Abschnitt 4.3, besonders Tabelle 4.9). Wird das obige System bei höheren Reynoldszahlen integriert, so ergeben sich aus diesem Grunde z.T. deutlich niedrigere Lebensdauern.

Abbildung 6.15 zeigt den Verlauf der oberen Einhüllenden, der unteren Einhüllenden und den mittleren Verlauf der Störungsenergie für 1000 zufällige Anfangsbedingungen bei der festen Reynoldszahl $R = 350$ für verschiedene Kombinationen der Basiswellenzahlen α und β . Während der Übergang zu niedrigeren Basiswellenzahlen α zu deutlich kürzeren Lebensdauern führt, ergeben sich für größere α stationäre Zustände mit einer Störungsenergie von etwa 25% der Energie der Grundströmung; ihre Gesamtenergie liegt bei etwa 80% der Grundströmungsenergie. Der oben diskutierte peakartige Verlauf der Störung tritt im betrachteten Basiswellenzahlenbereich bei $R = 350$ nur für die oben untersuchte Kombination $(\alpha, \beta) = (0.5, 1.5)$ und z.T. auch bei $(0.5, 1)$ auf, allerdings steht hier noch eine genaue Untersuchung aus; so muß insbesondere untersucht werden, ob das betrachtete 108-dimensionale System bei den Parameterkombinationen ausreicht, um transientes Wachstum und Hauptenergietransfermoden einzuschließen.

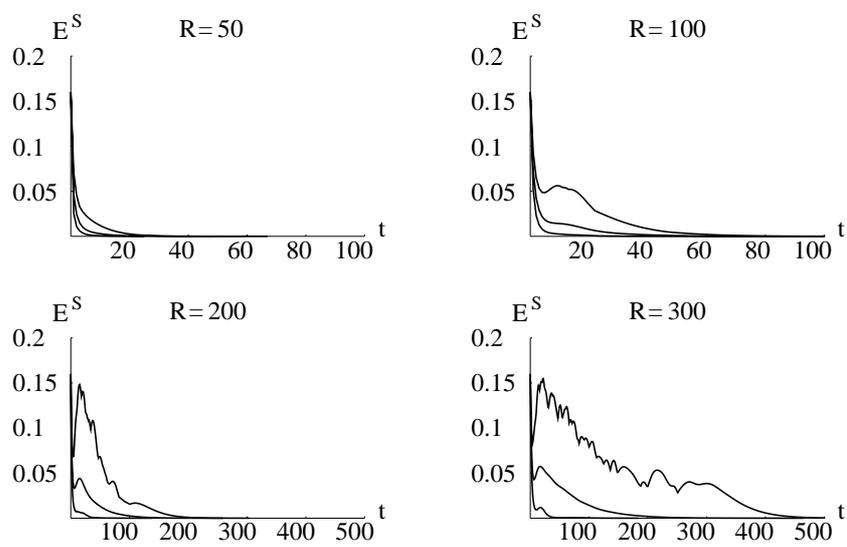


Abbildung 6.11: Obere Einhüllende, untere Einhüllende und mittlerer Verlauf der Störungsenergie bei der Integration von 1000 zufälligen Anfangszuständen der Anfangsstörungsenergie $E^S(0) = 0.16$ bei den Reynoldszahlen $R = 50, 100, 200$ und 300 bei $\alpha = 0.5, \beta = 1.5$. Man beachte die andere Skalierung der Zeitachse für $R = 200$ und 300 .

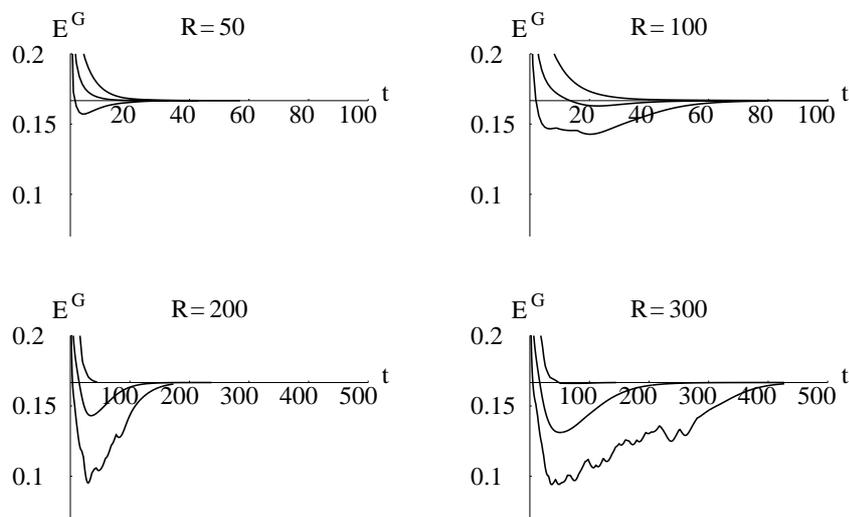


Abbildung 6.12: Obere Einhüllende, untere Einhüllende und mittlerer Verlauf der Gesamtenergie bei der Integration von 1000 zufälligen Anfangszuständen der Anfangsstörungsenergie $E^S(0) = 0.16$ bei den Reynoldszahlen $R = 50, 100, 200$ und 300 bei $\alpha = 0.5, \beta = 1.5$. Man beachte die andere Skalierung der Zeitachse für $R = 200$ und 300 ; die Zeitachse liegt bei $E^G = E^0$.

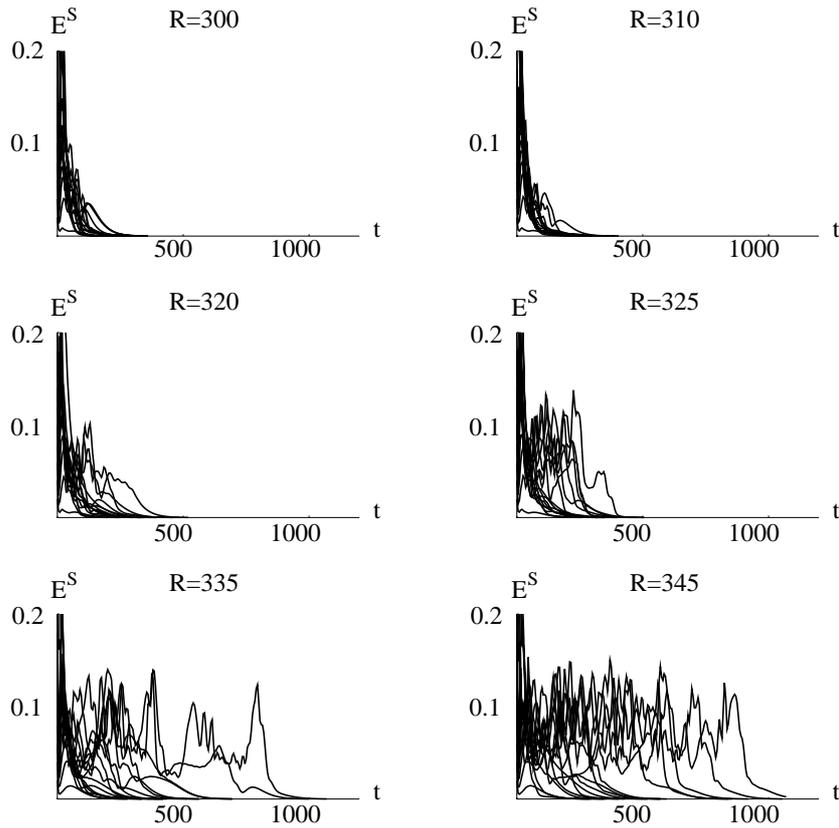


Abbildung 6.13: Verlauf der Störungsenergie des auf 16 verschiedene Anfangsenergien skalierten Zustands, bei dem alle Amplituden gleich gewichtet sind, für verschiedene Reynoldszahlen $R = 300 \dots 345$ bei $\alpha = 0.5$, $\beta = 1.5$. Dargestellt sind die Trajektorien von $E^S(0) = 0.02, 0.04, \dots, 0.2, 0.4, 0.8, 1.5, 3, 5, 10$. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wurde nur der Energiebereich bis $E^S = 0.2$ dargestellt, die Zustände mit höherer Anfangsenergie fallen monoton und schnell in diesen Bereich ab.

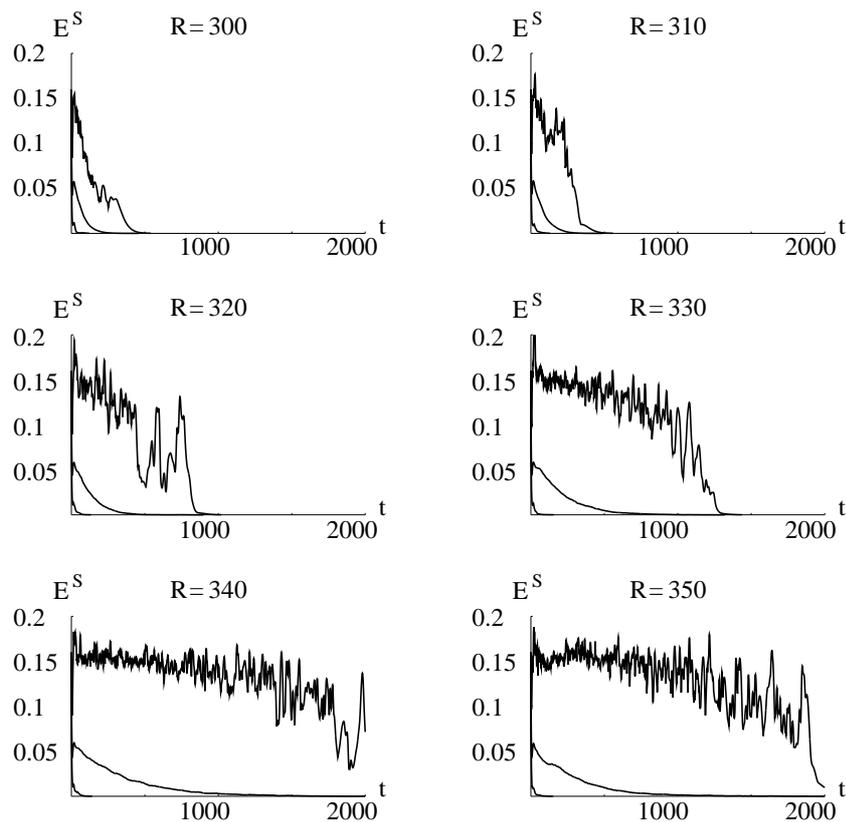


Abbildung 6.14: Verlauf der Störungsenergie von 1000 zufälligen Anfangszuständen der Anfangsstörungsenergie $E^S(0) = 0.16$ für die Reynoldszahlen $R = 300 \dots 350$ bei $\alpha = 0.5$, $\beta = 1.5$. Dargestellt ist jeweils die obere Einhüllende, die untere Einhüllende und (dazwischen) der mittlere Verlauf der verschiedenen Einzelintegrationen. Auch in diesen Systemen findet ein qualitativer Wechsel in den Verläufen ab etwa $R = 330$ statt.

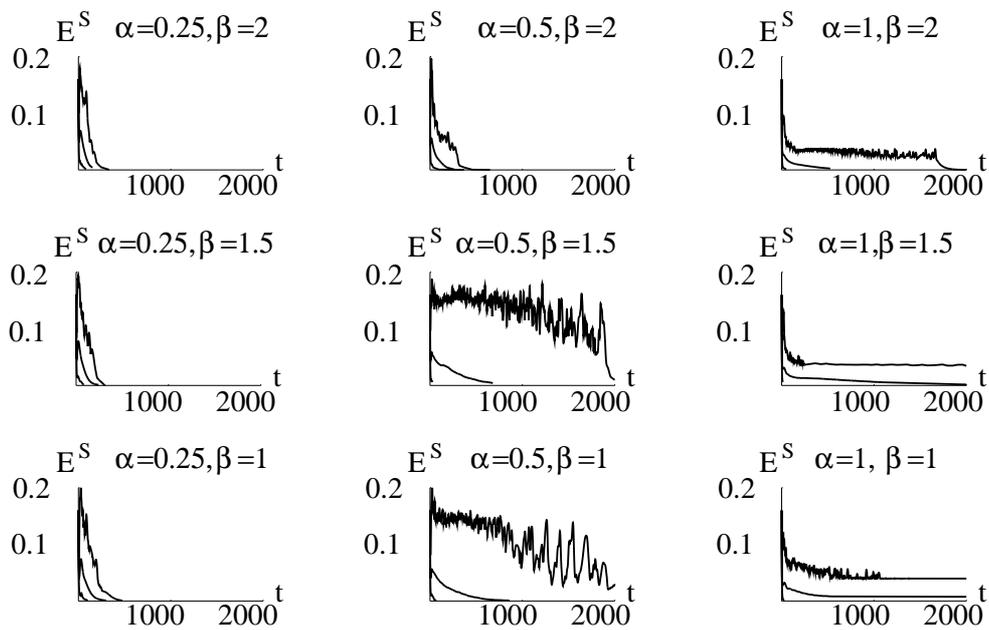


Abbildung 6.15: Verlauf der Störungsenergie von 1000 zufälligen Anfangszuständen der Anfangsstörungsenergie $E^S(0) = 0.16$ bei der Reynoldszahl $R = 350$ für verschiedene Basiswellenzahlen α und β . Dargestellt ist jeweils die obere Einhüllende, die untere Einhüllende und (dazwischen) der mittlere Verlauf der verschiedenen Einzelintegrationen.

$E^S(0)$	t_L	$E^S(0)$	t_L	$E^S(0)$	t_L	$E^S(0)$	t_L
0.00	0	0.050	1055	0.0560	475	0.05690	1135
0.01	275	0.051	480	0.0561	685	0.05691	1245
0.02	440	0.052	635	0.0562	490	0.05692	1210
0.03	425	0.053	690	0.0563	580	0.05693	1760
0.04	600	0.054	485	0.0564	755	0.05694	1280
0.05	1055	0.055	490	0.0565	1330	0.05695	930
0.06	465	0.056	475	0.0566	650	0.05696	1200
0.07	305	0.057	1040	0.0567	835	0.05697	610
0.08	310	0.058	480	0.0568	1085	0.05698	875
0.09	790	0.059	1115	0.0569	1135	0.05699	1220
0.10	1030	0.060	465	0.0570	1040	0.05700	1040

Tabelle 6.2: Lebensdauer t_L der Anfangszustände aus Abbildung 6.16 in Abhängigkeit von der Anfangsenergie des Zustandes. Von einer Einzeltabelle zur nächsten ist das Intervall, aus dem die Anfangsenergien stammen, um eine Größenordnung kleiner. Die Lebensdauern schwanken allerdings fast unabhängig von der Intervallgröße etwa zwischen 400 und 1300.

6.3 Untersuchung der Sensitivität vom Anfangszustand

In diesem Abschnitt wird das oben beschriebene renormierte Galerkinsystem mit 108 Freiheitsgraden bei der Reynoldszahl $R = 350$ auf seine Abhängigkeit von den Anfangszuständen untersucht. Untersuchungen deuten auf einen sehr sensitiven Zusammenhang hin.[18, 43] Dieser zeigt sich auch bei dem anschließenden Vergleich der verwendeten Integrationsverfahren bei verschiedenen Genauigkeitsanforderungen.

In Abbildung 6.16 sind die Verläufe der Störungsenergie für einen zufälligen Zustand bei $R = 350$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 1.5$ aufgetragen, der auf jeweils zehn Anfangsenergien aus kleiner werdenden Intervallen skaliert und bis zu seiner Lebensdauer integriert wurde, wobei nur der Zeitraum bis $t = 300$ dargestellt ist. Die Werte der Anfangsenergien sind zusammen mit den Lebensdauern in Tabelle 6.2 angegeben. Hierbei ist die Lebensdauer t_L als Zeitpunkt definiert, an dem die Störungsenergie unter 0.0001 fällt, was weniger als einem Promille der Grundenergie entspricht. In keiner meiner numerischen Rechnungen hat ein solcher Zustand wieder an Energie gewonnen. In der Abbildung ist deutlich zu erkennen, wie erwartungsgemäß ein kleinerer Unterschied in der Anfangsenergie zu einem über längere Zeit ähnlichen Verlauf führt, doch besteht bei diesen Skalierungen spätestens bei $t = 300$ kaum noch ein Zusammenhang zwischen den Verläufen. Dies führt zu sehr verschiedenen Lebensdauern, deren Streuung zwischen etwa $t = 400$ und $t = 1300$ auch bei kleinen Intervallen nicht abnimmt.

In der Abbildung 6.17 und dazugehörend in Tabelle 6.3 ist der gleiche Sachverhalt für die Integration des gleichgewichteten Anfangszustandes bei $R = 350$ dargestellt.

$E^S(0)$	t_L	$E^S(0)$	t_L	$E^S(0)$	t_L	$E^S(0)$	t_L
0.00	0	0.050	340	0.0560	515	0.05690	720
0.01	235	0.051	355	0.0561	480	0.05691	600
0.02	300	0.052	340	0.0562	520	0.05692	745
0.03	375	0.053	675	0.0563	455	0.05693	515
0.04	1320	0.054	1420	0.0564	500	0.05694	940
0.05	340	0.055	920	0.0565	950	0.05695	1160
0.06	1000	0.056	515	0.0566	705	0.05696	1110
0.07	775	0.057	1055	0.0567	480	0.05697	1115
0.08	825	0.058	565	0.0568	615	0.05698	900
0.09	1070	0.059	410	0.0569	720	0.05699	875
0.10	350	0.060	1000	0.0570	1055	0.05700	1055

Tabelle 6.3: Lebensdauer t_L der Anfangszustände aus Abbildung 6.17 in Abhängigkeit von der Anfangsenergie des Zustandes. Von einer Einzeltabelle zur nächsten ist das Intervall, aus dem die Anfangsenergien stammen, um eine Größenordnung kleiner. Die Lebensdauern schwanken auch hier fast unabhängig von der Intervallgröße etwa zwischen 200 und 1300.

Es ergibt sich wie oben, daß der Verlauf ab $t = 300$ und damit auch die Lebensdauer sehr sensitiv vom Anfangszustand abhängen. Für diesen Anfangszustand treten deutliche Abweichungen in den Energieverläufen schon früher ein.

Das gleiche Bild ergibt sich, wenn zwar der Anfangszustand gleichbleibt, die Genauigkeitsanforderung an die numerische Integrationsroutine aber verändert wird. In Abbildung 6.18 sind die Störungsenergieverläufe und dazugehörend in Tabelle 6.4 die Genauigkeitsanforderungen und die Lebensdauern für die Integration eines Anfangszustandes bei $R = 350$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 1.5$ mit zwei verschiedenen IMSL-Routinen aufgetragen. Mit der Bulirsh-Stoer-Extrapolationsmethode wurde bei Toleranzwerten $10^{-4} \dots 10^{-9}$, beim Runge-Kutta-Verner-Verfahren 5. und 6. Ordnung bei den Toleranzen $10^{-3} \dots 10^{-6}$ integriert. Laut Spezifikation [28] wird versucht, den lokalen Fehler so klein zu halten, daß global der relative Fehler unter der angegebenen Toleranz liegt. Erwartungsgemäß verlaufen die Störungsenergien über weite Bereiche (bis etwa $t = 200$) fast gleich, dann ergeben sich kleine Abweichungen. Verfolgt man allerdings die Energieverläufe weiter, so ergibt sich wiederum eine sehr sensitive Abhängigkeit von der Toleranz, insbesondere sind die Lebensdauern wieder sehr gestreut. Der Energieverlauf eines Anfangszustandes kann also nicht korrekt bestimmt werden, denn durch numerische Fehler ergeben sich immer kleine Abweichungen vom eigentlichen Energieverlauf.

Die sensitive Abhängigkeit vom Anfangszustand oder von Integrationsparametern kann als Indikator für den Einsatz von Turbulenz benutzt werden: Für kleine Reynoldszahlen $R < 300$ oder Anfangszustände mit sehr kleinen Anfangsenergien fällt die Störungsenergie nach eventuellem vorübergehendem Anstieg fast monoton ab, ohne die oben dargestellte sensitive Abhängigkeit zu zeigen. Aber auch die in Ab-

Bulirsh-Stoer		Runge-Kutta-Verner	
		Toleranz	Lebensdauer
Toleranz	Lebensdauer	10^{-4}	825
10^{-3}	655	10^{-5}	775
10^{-4}	1875	10^{-6}	1750
10^{-5}	870	10^{-7}	1330
10^{-6}	1165	10^{-8}	1010
		10^{-9}	1055

Tabelle 6.4: Lebensdauer einer Störung in Abhängigkeit vom Integrationsverfahren und von der eingestellten Genauigkeit; die zugehörigen Energieverläufe sind in Abbildung 6.18 dargestellt.

schnitt 6.1.2 untersuchten transient steigenden Anfangszustände zeigen keine sensitive Abhängigkeit von ihrer Anfangsenergie, sondern fallen mit ähnlichem Energieverlauf ab.

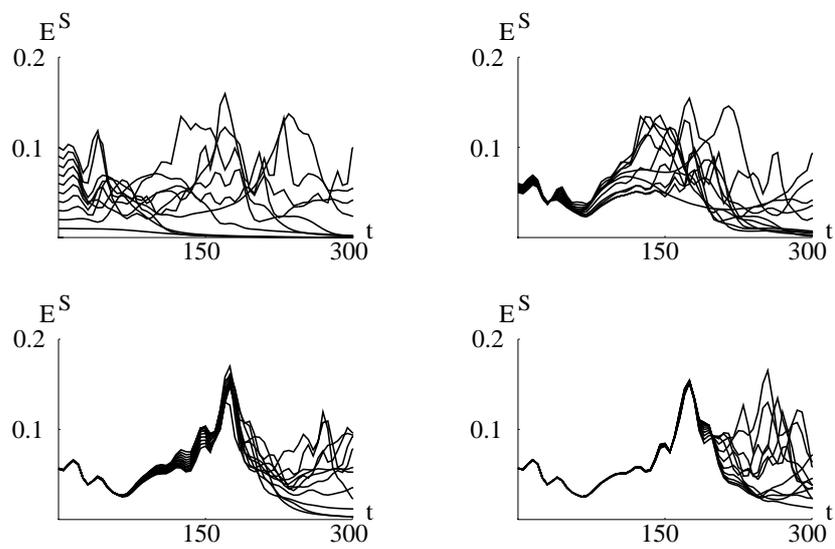


Abbildung 6.16: Verlauf der Störungsenergie eines auf verschiedene Anfangsenergien skalierten zufälligen Anfangszustandes bei $R = 350$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 1.5$, wobei die Variation der Anfangsenergie von links oben über rechts oben, links unten nach rechts unten jeweils eine Größenordnung kleiner wird. Die Anfangsenergien und Lebensdauern können Tabelle 6.2 entnommen werden.

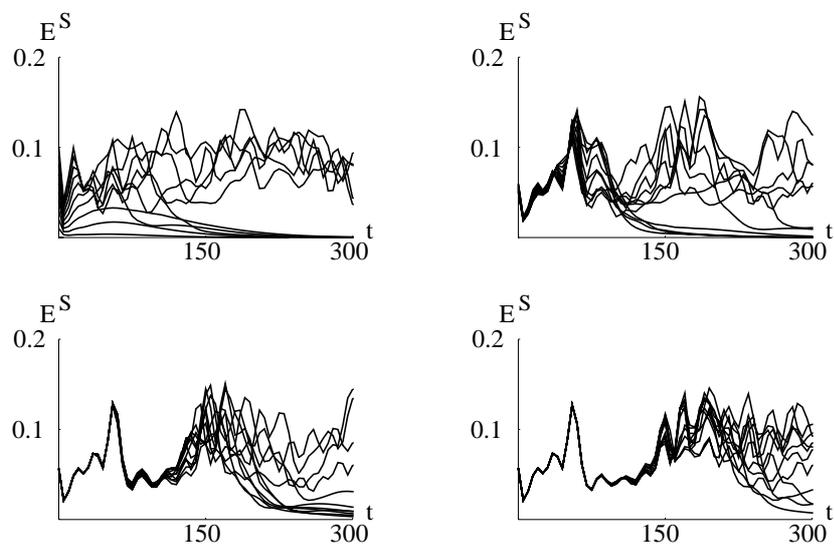


Abbildung 6.17: Verlauf der Störungsenergie des auf verschiedene Anfangsenergien skalierten gleichgewichteten Anfangszustandes bei $R = 350$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 1.5$, wobei die Variation der Anfangsenergie von links oben über rechts oben, links unten nach rechts unten jeweils eine Größenordnung kleiner wird. Die Anfangsenergien und Lebensdauern können Tabelle 6.3 entnommen werden.

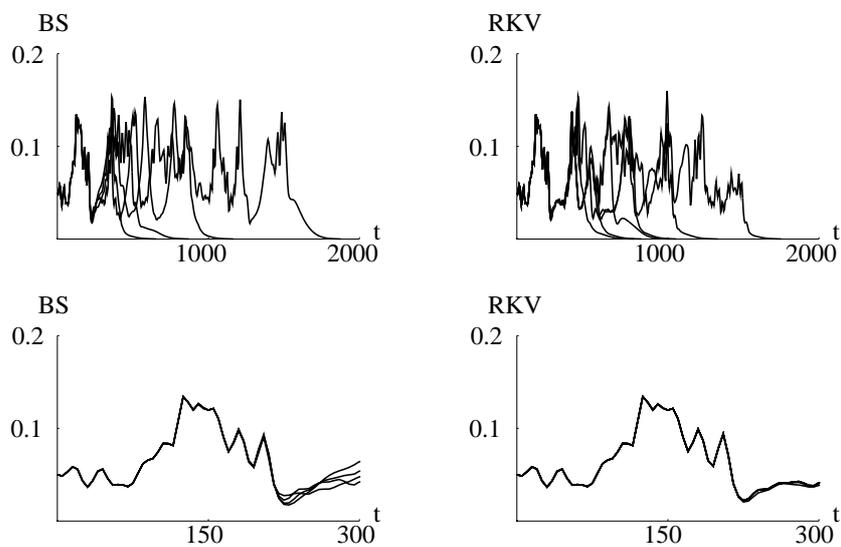


Abbildung 6.18: Vergleich des Bulirsch-Stoer-Extrapolationsverfahrens (links) und des Runge-Kutta-Verner-Verfahrens (rechts) durch Integration eines Anfangszustandes bei verschiedenen Genauigkeitsanforderungen bei $R = 350$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 1.5$. Oben jeweils bis $t = 2000$, unten ein Ausschnitt bis $t = 300$. Der langfristige Verlauf ist sehr sensitiv von der eingestellten Toleranz abhängig. Die Toleranzwerte und Lebensdauern sind in Tabelle 6.4 angegeben.

Kapitel 7

Zusammenfassung und Diskussion

In dieser Arbeit wurde die inkompressible ebene Couette-Strömung in drei Dimensionen auf nichtlineare Instabilität im Reynoldszahlbereich bis etwa $R = 350$ untersucht. Im Mittelpunkt standen dabei die Möglichkeit, mit Hilfe des Energietransfers und des transienten Wachstums die erforderliche Dimension des endlichen Systems abzuschätzen, und die Renormierung der Koeffizienten des endlichen dynamischen Systems mit dem Ziel, die grundlegenden Energiebilanzen der Navier-Stokes-Gleichungen auch für das endliche System zu gewährleisten.

Zur Aufstellung des dynamischen Systems wurde zunächst das übliche Vorgehen gewählt[2, 24]: Die Navier-Stokes-Gleichungen für das Geschwindigkeitsfeld $\vec{v} = \vec{U} + \vec{u}$ mit der Grundströmung \vec{U} wurden unter Berücksichtigung der Inkompressibilität in den skalaren Feldern $v(x, y, z, t) = (\vec{u})_y$ und $\eta(x, y, z, t) = (\text{rot } \vec{u})_y$ geschrieben. Nach Entwicklung dieser skalaren Felder parallel zu den Platten in Fouriermoden und senkrecht dazu in den Eigenfunktionen der um die Grundströmung linearisierten Gleichungen ergab sich ein Galerkinsystem für die Amplituden $x_{(m,n,\nu)}(t)$ und $y_{(m,n,\nu)}(t)$, wobei (m, n) die Fouriermode und ν die zugehörige Eigenfunktion der Orr-Sommerfeld- bzw. Squire-Gleichung bezeichnen. Dieses Galerkinsystem ist in den linearen Termen diagonalisiert, wobei die negativen Koeffizienten zu einem exponentiellen Abfall führen (lineare Stabilität); die nichtlinearen Terme, die nur in quadratischer Ordnung vorkommen, koppeln die einzelnen Amplituden untereinander.

Die zur numerischen Untersuchung notwendige Beschränkung auf eine endliche Zahl von Fouriermoden und Eigenfunktionen führt zu veränderten Eigenschaften und damit zu einer anderen Dynamik des Galerkinsystems im Vergleich zu den Navier-Stokes-Gleichungen. Zentrales Thema dieser Arbeit war, durch die Renormierung der Kopplungskoeffizienten der quadratischen Terme grundlegende Energiebilanzen der Navier-Stokes-Gleichungen auch im endlichen Galerkinsystem zu erfüllen: Der nichtlineare Term der Navier-Stokes-Gleichungen erzeugt oder vernichtet keine Energie, er "dreht" energieneutral das Geschwindigkeitsfeld, transferiert also Energie von einer Richtung in eine andere. Des weiteren gibt es nur zwei Mechanismen zur Änderung der Gesamtenergie: Infolge der Viskosität wird Strömungsenergie vernichtet (bzw. in Wärme umgesetzt), und die sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegenden Wände

können Energie an die Strömung abgeben oder von dieser aufnehmen.

Wie gezeigt wurde, werden beide Eigenschaften von endlichen Galerkinsystemen nicht erfüllt: Die quadratischen Terme erzeugen oder vernichten teilweise beträchtliche Energien, so daß es zu großen Energieverstärkungen kommen kann, die sogar zum Weglaufen, d.h. zum Abbruch der numerischen Integration führen können, weil die Geschwindigkeitsamplituden zu groß werden. Und außer dem Wand- und dem Dissipationsterm treten, auch wenn die nichtlinearen Terme die Energie nur drehen würden, weitere Energiequellen und -senken auf, weil der Dissipationsterm nicht vollständig dargestellt ist. Die Größenordnungen dieser Energieerhaltungsverletzungen wurden diskutiert: Auch für Systeme hoher Dimension ergeben sich große Energietransferverletzungen, was insbesondere auf die hohe Zahl der Terme zurückzuführen ist.

Weiterhin wurde gezeigt, daß mit Hilfe der Berechnung der Energietransferterme die Anzahl der Amplituden, die zur Einbeziehung des Großteils des Energietransfers in das endliche Galerkinsystem notwendig sind, abgeschätzt werden kann. Eine weitere Hilfe zur Bestimmung der notwendigen Dimension liefert die Anzahl der transient steigenden Moden, die im endlichen System enthalten sind. Wie gezeigt wurde, konvergiert deren Zahl schnell, was bedeutet, daß die Entwicklung nach den (nicht orthogonalen) Eigenfunktionen zur Beschreibung des transienten Wachstums geeignet ist.

Die erzwungene Energietransfererhaltung für das endliche Galerkinsystem wurde auf die Lösung eines großen, unterbestimmten Gleichungssystems zurückgeführt. Die Freiheitsgrade durch die Unterbestimmtheit wurden zur Minimierung der Änderung der Kopplungskoeffizienten genutzt, wobei durch die Renormierung keine neuen Kopplungen eingeführt wurden. Es ergaben sich relative Abweichungen von durchschnittlich 10% und bis etwa 30%. Um Reynoldszahlen $R > 350$ untersuchen zu können, reicht das betrachtete 108-dimensionale System nicht aus. Allerdings ist das Renormieren der Koeffizienten schon bei den jetzt betrachteten Systemgrößen zeit- und speicherintensiv, für deutlich größere Galerkinsysteme müßten die Verfahren verbessert oder leistungsstärkere Computer benutzt werden.

Anhand beispielhafter Integrationen wurde gezeigt, daß verhältnismäßig kleine Systeme (z.B. 108 Freiheitsgrade) ohne Renormierung unphysikalisches Verhalten zeigen, während sie nach der Renormierung der Koeffizienten auch bei Anfangszuständen mit dem 60-fachen der Grundenergie zu Strömungen mit beschränkter Geschwindigkeit führen. Energieverläufe, Verlauf von Dissipation und Wandterm und die Energieverteilung auf die Fouriermoden wurden anhand eines langlebigen Zustandes eingehend diskutiert.

Die renormierten Systeme wurden verwendet, um verschiedene Anfangszustände auf ihren Energieverlauf und ihre Lebensdauer zu untersuchen. Für das 108-dimensionale System wurde, übereinstimmend mit experimentellen und numerischen Befunden [11, 12, 13, 30, 46], eine kritische Reynoldszahl im Bereich $R = 330 \dots 345$ gefunden, ab der die Energieverläufe qualitative Änderungen zeigen; für dieses System lagen die Lebensdauern in dimensionslosen Koordinaten im Bereich bis $t = 2000$.

Dies entspricht bei einem typischen Versuchsaufbau [46] mit dem Plattenabstand $2h = 10\text{mm}$ und der kinematischen Viskosität von Wasser einer Zeit von etwa 2.5min und einer Plattengeschwindigkeit von 7cm/s ; jede Platte hat sich dann 10m in ihre jeweilige Richtung weiterbewegt. Interessanterweise hat die direkte Integration von Anfangszuständen, die aufgrund ihres unlängst diskutierten transienten Wachstums ausgewählt wurden [5, 10, 14, 19, 47], nicht zu langen Lebensdauern geführt. Ihre Rolle scheint überschätzt worden zu sein, allerdings sollte dieser Sachverhalt noch näher untersucht werden. In [1] wird vorgeschlagen, zusätzlich zu den transient wachsenden Amplituden alle übrigen anfänglich mit etwa 10% der Größenordnung der transient wachsenden Amplituden zufällig zu besetzen.

Des Weiteren wurde die Abhängigkeit der Lebensdauer einer Störung von den Anfangsbedingungen und Integrationsparametern untersucht. Der Verlauf der Energie und insbesondere die Lebensdauer hängen im turbulenten Bereich $R > 340$ erwartungsgemäß sehr sensitiv von den Anfangsbedingungen und der Genauigkeit der numerischen Integration ab, d.h. kleine Abweichungen führen über einen langen Zeitraum zu deutlich verschiedenen Verläufen. Hiermit wurden Ergebnisse von Eckhardt et al. (1997,1998) [18, 43] aus einem System mit 962 Freiheitsgraden in einem 108-dimensionalen System bestätigt.

Das betrachtete relativ niedrigdimensionale System stimmt im Bereich bis $R = 350$ sehr gut mit bisherigen Untersuchungen überein und ist damit als Grundlage für detailliertere Untersuchungen des Mechanismus, der zur Destabilisierung einer Störung führt, geeignet. Es erscheint möglich, aufgrund von Symmetrieeigenschaften die Amplitudenzahl weiter zu reduzieren, ohne das dynamische Verhalten stark zu beeinflussen, so daß an einem relativ überschaubaren System die Rolle einzelner Amplituden, die Rolle des transienten Wachstums und die Rolle der nichtlinearen Terme eingehender untersucht werden kann. Ebenfalls wäre denkbar, durch eine (Intervall-) Normalform-Transformation [37, 38, 39, 44, 50] zu dominanten, niedrigdimensionalen Untersystemen zu gelangen, die einer analytischen Behandlung zugänglich sind.

Schließlich ist anzumerken, daß der Parameterraum durch die vorliegenden Untersuchungen bei weitem nicht ausgeschöpft ist: Die Basiswellenzahlen α und β wurden nur wenig verändert, höhere Fouriermoden als zu $|m|, |n| = 1$ noch nicht berücksichtigt.

Danksagung

Vielen Personen bin ich zu Dank verpflichtet. Prof. Alexander Rauh hat mich kontinuierlich unterstützt und vielfältig angeregt. Ihm verdanke ich insbesondere die Anregung, die Energiebilanzen zu betonen sowie die Energietransfererhaltung durch Renormierung zu erzwingen. Dr. habil. Ludger Hannibal hat zum Problem der Vollständigkeit der Orr-Sommerfeld-Funktionen beigetragen. Heiko Bühring hat in zahlreichen Diskussionen weitergeholfen und mußte als mein Zimmerkollege alle Höhen und Tiefen miterleben. Prof. Birger Kollmeier danke ich für das Stipendium im Graduiertenkolleg "Psychoakustik". Weiterhin bedanke ich mich bei Prof. Peinke für seine Korreferenz.

Neben den Kollegen habe ich natürlich auch denen zu danken, die meine schlechten Launen ertragen mußten, wenn es nicht so gut lief, und die in letzter Zeit allzuoft auf die Zeit nach der Abgabe dieser Arbeit getröstet wurden, allen voran meiner Lebensgefährtin und meinen Eltern.

Anhang A

Spektren und Eigenfunktionen des linearen Problems

In diesem Abschnitt werden beispielhaft Spektren der Orr-Sommerfeld- und der Squire-Gleichung und eine Eigenfunktion der Orr-Sommerfeld-Gleichung dargestellt. Sie wurden mit Hilfe der Verfahren aus Anhang B numerisch bestimmt.

In den Abbildungen A.1 und A.2 sind in der komplexen Ebene alle Eigenwerte zu $R = 100, \alpha = \beta = 1$ aufgetragen, bei denen der Orr-Sommerfeld- oder der Squire-Eigenwert einen Realteil größer als -0.5 haben. Die zugehörigen Werte können den Tabellen A.1 und A.2 entnommen werden. Deutlich ist zu erkennen, daß die Realteile der Eigenwerte mit wachsenden Basiswellenzahlen $m\alpha$ und $n\beta$ größer werden. Die Eigenwerte zu negativen $m\alpha$ oder $n\beta$ können nach Tabelle 2.1 aus denen der Tabellen A.1 und A.2 bestimmt werden.

In den Abbildungen A.3 und A.4 ist die Änderung einiger ausgewählter Eigenwerte von $R = 100$ auf $R = 300, \alpha = \beta = 1$ dargestellt; die zugehörigen Werte sind in Tabelle A.3 aufgelistet. Erwartungsgemäß nehmen die (negativen) Realteile zu, das System wird instabiler.

Das Aussehen der Geschwindigkeitsfunktionen wird am Beispiel einer Eigenfunktion der Orr-Sommerfeld-Gleichung zu $R = 100, \alpha = \beta = 1$ gezeigt. In Abbildung A.5 sind Betrag, Phase, Realteil und Imaginärteil der Eigenfunktion $v_{(1,1,1)}$ zum Eigenwert $\lambda_{(1,1,1)}$ dargestellt.

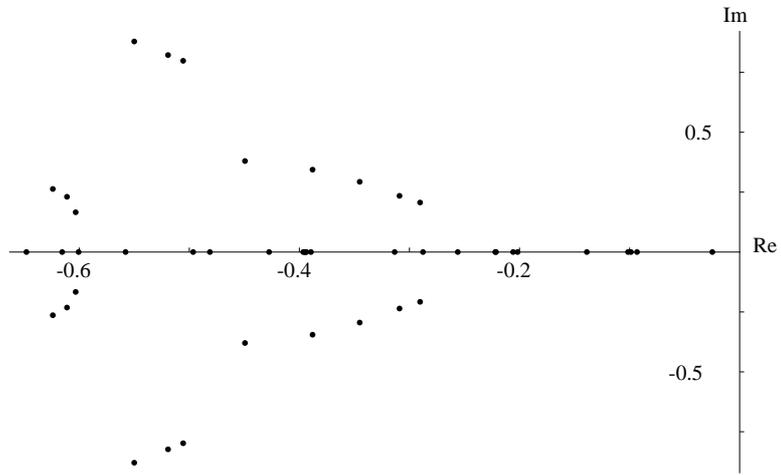


Abbildung A.1: Teilspektrum der Orr-Sommerfeld-Gleichung zu $R = 100$, $\alpha = \beta = 1$. Die genauen Werte können den Tabellen A.1 und A.2 entnommen werden.

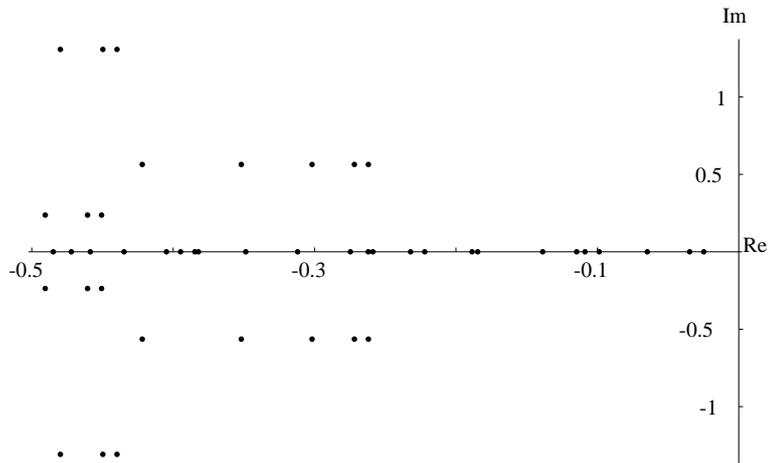


Abbildung A.2: Teilspektrum der Squire-Gleichung zu $R = 100$, $\alpha = \beta = 1$. Die genauen Werte können den Tabellen A.1 und A.2 entnommen werden.

m	n	ν	OS-Eigenwerte $\lambda_{(m,n,\nu)}$	SQ-Eigenwerte $\mu_{(m,n,\nu)}$
0	0	1	-.024674 +.000000 <i>i</i>	-.024674 +.000000 <i>i</i>
0	1	1	-.093137 +.000000 <i>i</i>	-.034674 +.000000 <i>i</i>
0	2	1	-.101551 +.000000 <i>i</i>	-.064674 +.000000 <i>i</i>
0	0	2	-.098696 +.000000 <i>i</i>	-.098696 +.000000 <i>i</i>
0	1	2	-.205706 +.000000 <i>i</i>	-.108696 +.000000 <i>i</i>
0	3	1	-.138733 +.000000 <i>i</i>	-.114674 +.000000 <i>i</i>
0	2	2	-.221400 +.000000 <i>i</i>	-.138696 +.000000 <i>i</i>
0	4	1	-.201753 +.000000 <i>i</i>	-.184674 +.000000 <i>i</i>
0	3	2	-.256094 +.000000 <i>i</i>	-.188696 +.000000 <i>i</i>
0	0	3	-.222066 +.000000 <i>i</i>	-.222066 +.000000 <i>i</i>
0	1	3	-.389478 +.000000 <i>i</i>	-.232066 +.000000 <i>i</i>
0	4	2	-.313355 +.000000 <i>i</i>	-.258696 +.000000 <i>i</i>
1	0	1	-.290410 -.207398 <i>i</i>	-.261865 -.563757 <i>i</i>
1	0	2	-.290410 +.207398 <i>i</i>	-.261865 +.563757 <i>i</i>
0	2	3	-.396510 +.000000 <i>i</i>	-.262066 +.000000 <i>i</i>
1	1	1	-.309040 +.234972 <i>i</i>	-.271865 -.563757 <i>i</i>
1	1	2	-.309040 -.234972 <i>i</i>	-.271865 +.563757 <i>i</i>
0	5	1	-.287680 +.000000 <i>i</i>	-.274674 +.000000 <i>i</i>
1	2	1	-.345174 -.293906 <i>i</i>	-.301865 -.563757 <i>i</i>
1	2	2	-.345174 +.293906 <i>i</i>	-.301865 +.563757 <i>i</i>
0	3	3	-.427381 +.000000 <i>i</i>	-.312066 +.000000 <i>i</i>
0	5	2	-.393654 +.000000 <i>i</i>	-.348696 +.000000 <i>i</i>
1	3	1	-.388009 -.344234 <i>i</i>	-.351865 +.563757 <i>i</i>
1	3	2	-.388009 +.344234 <i>i</i>	-.351865 -.563757 <i>i</i>
0	4	3	-.481380 +.000000 <i>i</i>	-.382066 +.000000 <i>i</i>
0	6	1	-.395098 +.000000 <i>i</i>	-.384674 +.000000 <i>i</i>
0	0	4	-.394784 +.000000 <i>i</i>	-.394784 +.000000 <i>i</i>
0	1	4	-.600554 +.000000 <i>i</i>	-.404784 +.000000 <i>i</i>

Tabelle A.1: Erster Teil des Spektrums der Orr-Sommerfeld- und der Squire-Gleichung zu $R = 100$, $\alpha = \beta = 1$, nach Größe der Realteile sortiert. Zweiter Teil siehe Tabelle A.2.

m	n	ν	OS-Eigenwerte $\lambda_{(m,n,\nu)}$	SQ-Eigenwerte $\mu_{(m,n,\nu)}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
1	4	1	$-.449513 - .379440i$	$-.421865 + .563757i$
1	4	2	$-.449513 + .379440i$	$-.421865 - .563757i$
0	2	4	$-.615635 + .000000i$	$-.434784 + .000000i$
2	0	1	$-.505651 - .798159i$	$-.439811 - 1.307507i$
2	0	2	$-.505651 + .798159i$	$-.439811 1.307507i$
2	1	1	$-.519316 - .822836i$	$-.449811 - 1.307507i$
2	1	2	$-.519316 + .822836i$	$-.449811 1.307507i$
1	0	3	$-.623972 - .263396i$	$-.450562 - .237141i$
1	0	4	$-.623972 + .263396i$	$-.450562 + .237141i$
0	6	2	$-.496410 + .000000i$	$-.458696 + .000000i$
1	1	3	$-.611287 + .230993i$	$-.460562 + .237141i$
1	1	4	$-.611287 - .230993i$	$-.460562 - .237141i$
0	5	3	$-.558015 + .000000i$	$-.472066 + .000000i$
2	2	1	$-.550043 - .878955i$	$-.479811 1.307507i$
2	2	2	$-.550043 + .878955i$	$-.479811 - 1.307507i$
0	3	4	$-.648068 + .000000i$	$-.484784 + .000000i$
1	2	3	$-.603382 - .166140i$	$-.490562 + .237141i$
1	2	4	$-.603383 + .166140i$	$-.490562 - .237141i$

Tabelle A.2: Zweiter Teil des Spektrums der Orr-Sommerfeld- und der Squire-Gleichung zu $R = 100$, $\alpha = \beta = 1$, nach Größe der Realteile sortiert. Erster Teil siehe Tabelle A.1. Alle Moden, bei denen der Realteil des Orr-Sommerfeld- oder des Squire-Eigenwerts größer als -0.5 ist, sind aufgeführt.

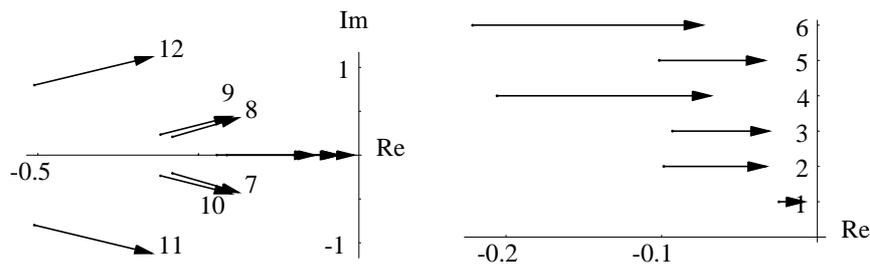


Abbildung A.3: Veränderung ausgewählter Eigenwerte der Orr-Sommerfeld-Gleichung beim Übergang von $R = 100$ (Anfangspunkt der Pfeile) zu $R = 300$ (Pfeilspitze) bei $\alpha = \beta = 1$. Dargestellt sind die Eigenwerte aus Tabelle A.3, dort kann auch die Zuordnung der Numerierung zu (m, n, ν) entnommen werden.

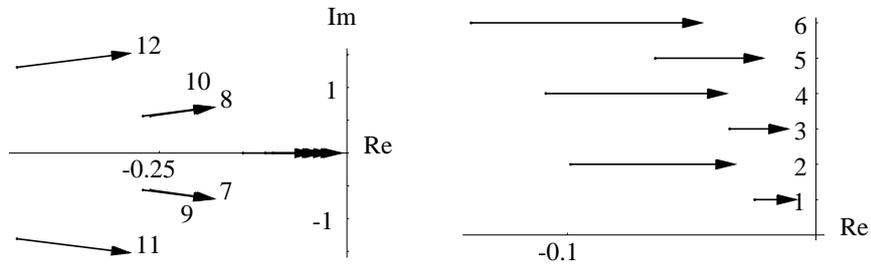


Abbildung A.4: Veränderung ausgewählter Eigenwerte der Squire-Gleichung beim Übergang von $R = 100$ (Anfangspunkt der Pfeile) zu $R = 300$ (Pfeilspitze) bei $\alpha = \beta = 1$. Dargestellt sind die Eigenwerte aus Tabelle A.3, dort kann auch die Zuordnung der Numerierung zu (m, n, ν) entnommen werden.

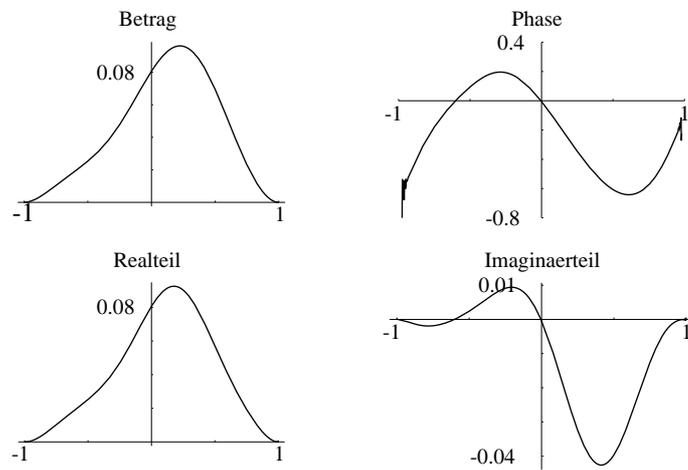


Abbildung A.5: Betrag, Phase, Realteil und Imaginärteil der Eigenfunktion $v_{(1,1,1)}$ bei $R = 100$, $\alpha = \beta = 1$.

				Orr-Sommerfeld-Eigenwerte $\lambda_{(m,n,\nu)}$	
i	m	n	ν	$R = 100$	$R = 300$
1	0	0	1	$-.02467401 + .0000000i$	$-.008224670 + .0000000i$
2	0	0	2	$-.09869604 + .0000000i$	$-.03289868 + .0000000i$
3	0	1	1	$-.09313745 + .0000000i$	$-.03104582 + .0000000i$
4	0	1	2	$-.2057057 + .0000000i$	$-.06856858 + .0000000i$
5	0	2	1	$-.1015508 + .0000000i$	$-.03385028 + .0000000i$
6	0	2	2	$-.2214003 + .0000000i$	$-.07380009 + .0000000i$
7	1	0	1	$-.2904098 - .2073980i$	$-.1875817 - .4251187i$
8	1	0	2	$-.2904098 + .2073980i$	$-.1875817 + .4251187i$
9	1	1	1	$-.3090400 + .2349721i$	$-.1984916 + .4395978i$
10	1	1	2	$-.3090401 - .2349720i$	$-.1984916 - .4395978i$
11	2	0	1	$-.5056511 - .7981585i$	$-.3226003 - .1120030i$
12	2	0	2	$-.5056511 + .7981586i$	$-.3226003 + .1120030i$
				Squire-Eigenwerte $\mu_{(m,n,\nu)}$	
i	m	n	ν	$R = 100$	$R = 300$
1	0	0	1	$-.02467401 + .0000000i$	$-.008224670 + .0000000i$
2	0	0	2	$-.09869604 + .0000000i$	$-.03289868 + .0000000i$
3	0	1	1	$-.03467401 + .0000000i$	$-.01155800 + .0000000i$
4	0	1	2	$-.1086960 + .0000000i$	$-.03623201 + .0000000i$
5	0	2	1	$-.06467401 + .0000000i$	$-.02155800 + .0000000i$
6	0	2	2	$-.1386960 + .0000000i$	$-.04623201 + .0000000i$
7	1	0	1	$-.2618649 - .5637571i$	$-.1779668 - .6975260i$
8	1	0	2	$-.2618649 + .5637571i$	$-.1779668 + .6975260i$
9	1	1	1	$-.2718649 - .5637571i$	$-.1813001 - .6975260i$
10	1	1	2	$-.2718649 + .5637571i$	$-.1813001 + .6975260i$
11	2	0	1	$-.4398107 - 1.307507i$	$-.2905466 - 1.519853i$
12	2	0	2	$-.4398107 + 1.307507i$	$-.2905466 + 1.519853i$

Tabelle A.3: Veränderung ausgewählter Eigenwerte der Orr-Sommerfeld- (oben) und der Squire-Gleichung (unten) beim Übergang von $R = 100$ (links) zu $R = 300$ (rechts) bei $\alpha = \beta = 1$ (siehe auch Abbildungen A.3 und A.4).

Anhang B

Computerrechnungen

Dieser Abschnitt beschreibt die Implementierung der Lösung der vorgestellten Eigen- und Gleichungssysteme, Integrationen und Optimierungen im Computer. In den meisten Fällen wurde hierfür FORTRAN 90¹ unter Benutzung der IMSL-Routinen² benutzt, viele Gegenproben und die Erstellung der Abbildungen fanden mit Hilfe von MATHEMATICA³ statt.

B.1 Überprüfungsverfahren

Zur Überprüfung der Programme und der zugrundeliegenden Gleichungen wurden eine Vielzahl numerischer Checks durchgeführt. So wurden die Eigen- und Gleichungssysteme aus Kapitel 2.2 durchweg mit MATHEMATICA geprüft, indem die Koeffizienten dort eingelesen wurden, die Aufsummation der hiermit gewichteten Legendre- oder Tschebyscheffpolynome durchgeführt wurde und darauf Differentialoperatoren angewendet wurden, z.B. wenn a die Liste der Koeffizienten enthält:

```
f[y_] := Sum[a[[n+1]] LegendreP[n,y], {n,0,70}];  
k2=alpha^2+beta^2;  
os[y_] = D[f[y], {y,4}] - 2 k2 D[f[y], {y,2}] + k2^2 f[y] - ...
```

Hiermit ist ein grafischer und numerischer Vergleich der Eigenwerte, Eigenfunktionen und Lösungsfunktionen möglich, der gänzlich anders aufgebaut ist als die Berechnung der Koeffizienten selber. Des weiteren erlauben einige Spezialfälle (insbesondere $m\alpha = 0$) die analytische Berechnung dieser Funktionen und Werte und damit einen

¹Zumeist der xlf-Compiler auf IBM-AIX-Systemen, aber auch fc auf Convex-SPPUX und Digital Fortran auf verschiedenen PCs unter Windows 95/NT.

²”Fortran Subroutines for Mathematical Applications” der Firma IMSL, Version 3.0; zu Version 1.0 siehe [28].

³Version 3.0 unter Windows 95/NT, AIX und Linux.

direkten Vergleich. Insbesondere zum transienten Wachstum sind viele Ergebnisse veröffentlicht, so daß hier ein Quervergleich mit anderen Autoren möglich war.

Ebenso konnten die Integrale zur Bestimmung der Kopplungskoeffizienten aus Kapitel 3 mit MATHEMATICA überprüft werden, wobei wiederum direkt die Funktionen in y integriert wurden und nicht, wie im FORTRAN-Programm, eher abstrakt über die Koeffizienten mit Hilfe von Matrizen. Die Berechnung der Störungsenergie und der Gesamtenergie wurde zur Probe anhand von Spezialfällen analytisch durchgeführt, des weiteren lieferte der Vergleich des Differenzenquotienten von E^S bzw. E^G völlige Übereinstimmung mit den unabhängig berechneten Termen $(dE^S/dt)_2 + (dE^S/dt)_3$.

Eine Art Meta-Test stellt die Berechnung der Energietransfererhaltung dar: Es ist sehr unwahrscheinlich, daß bei fehlerhafter Berechnung der Kopplungskoeffizienten oder Metrikkoeffizienten die Energietransfererhaltung im Grenzfall großer Systeme erfüllt ist. In die Berechnung der Übereinstimmung von der Summe aus Wand- und Dissipationsterm und der Energieänderung gehen die Eigenwerte, Metrikkoeffizienten, Koeffizienten der Dissipationsberechnung und bestimmte Kopplungskoeffizienten ein. Auch hier ist nicht zu erwarten, daß diese Übereinstimmung bei fehlerhafter Berechnung der Werte für große Systeme erfüllt ist.

Die Ergebnisse der Renormierung des Galerkinsystems sind wiederum durch den Vergleich des Differenzenquotienten von E^S bzw. E^G mit den unabhängig berechneten Termen $(dE^S/dt)_2$ bzw. $(dE/dt)_{\text{Wand}} + (dE/dt)_{\text{Diss}}$ (siehe Abbildung 5.1 (unten) auf Seite 55) überprüfbar. Die Genauigkeit der Integrationsverfahren (zwei IMSL-Routinen: Runge-Kutta-Verner 5. und 6.Ordnung und Bulirsh-Stoer-Extrapolationsmethode) wurde durch Vergleich untereinander und bei verschiedenen Genauigkeiten getestet (siehe auch Abschnitt 6.3), des weiteren für wenige Spezialfälle durch Vergleich mit analytischen Integrationen.

B.2 Die linearisierten Navier-Stokes-Gleichungen

In diesem Abschnitt wird kurz die Implementierung der numerischen Lösung der Eigen- und Gleichungssysteme beschrieben, also von Orr-Sommerfeld- und Squire-Gleichung und den zugehörigen Orthogonalsystemen. Die Tschebyscheffpolynome sind als Basis für Entwicklungen zur Lösung der Orr-Sommerfeld-Gleichung inzwischen weit verbreitet [9, 21, 30, 35, 36], zum Vergleich wurden alle Berechnungen auch mit Legendrepolyomen durchgeführt.

B.2.1 Lösung der Eigenprobleme mit der Tau-Methode

Die in diesem Abschnitt eingeführte Schreibweise gilt sowohl für die Funktionen $v_j(y)$, $\tilde{v}_j(y)$, $v_j^+(y)$, $\tilde{\eta}_j(y)$ und $\eta_j(y)$ im Falle $(m, n) \neq (0, 0)$ als auch für $u_{j_0}(y)$ und $w_{j_0}(y)$ bei $m = n = 0$. Deswegen wird, wenn nicht explizit die Funktion angegeben ist, der Platzhalter $f(y)$, $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, benutzt. Die hier für Tschebyscheffpolynome $T_n(y)$ vorgestellte Methode wurde analog für Legendrepolyome $L_n(y)$ durchgeführt.

Die unbekanntenen Funktionen werden im Raum der Tschebyscheffpolynome mit einem Cut-Off N ($0 < N \in \mathbb{N}$) entwickelt:

$$f(y) = \sum_{n=0}^N a_n T_n(y) \quad (\text{B.1})$$

mit Koeffizienten $a_n \in \mathbb{C}$, $n = 0, 1, \dots, N$; für die l -te Ableitung ($l = 1, 2, 3, 4$) wird analog

$$\frac{\partial^l f}{\partial y^l} = \sum_{n=0}^N a_n^{(l)} T_n \quad (\text{B.2})$$

gesetzt. Dann besteht zwischen den Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix}, \quad a^{(l)} = \begin{pmatrix} a_0^{(l)} \\ \vdots \\ a_N^{(l)} \end{pmatrix} \quad (\text{B.3})$$

der Zusammenhang

$$a^{(l)} = \mathbf{D}^l a \quad (\text{B.4})$$

mit Potenzen der $(N + 1) \times (N + 1)$ -Matrix \mathbf{D} . [21] Auch die Koeffizienten $a^y = (a_0^y, \dots, a_N^y)$ des Produktes⁴

$$y f(y) = y \sum_{n=0}^N a_n T_n = \sum_{n=0}^N a_n^y T_n \quad (\text{B.5})$$

lassen sich mit einer Matrix \mathbf{Y} als Linearkombination der Koeffizienten a schreiben:

$$a^y = \mathbf{Y} a. \quad (\text{B.6})$$

Mit Hilfe dieser Matrizen lassen sich die Eigenprobleme aus Abschnitt 2.3 als verallgemeinerte Matrix-Eigenprobleme schreiben, z.B. ergibt die Orr-Sommerfeld-Gleichung (2.25) für die Funktion $v_j(y)$ mit den Koeffizienten $v = (v_0, \dots, v_N)$:

$$\begin{aligned} & \sum_{p=0}^N \left[\left\{ (\mathbf{D}^2 - k_{m,n}^2 \mathbf{I})^2 - i\alpha m R \mathbf{U} (\mathbf{D}^2 - k_{m,n}^2 \mathbf{I}) \right\} v \right]_p T_p \\ &= \sum_{p=0}^N [\lambda R (\mathbf{D}^2 - k_{m,n}^2 \mathbf{I}) v]_p T_p, \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

⁴Die Gleichheit gilt nur im Sinne des Cut-Offs, also der Darstellung in den ersten $(N + 1)$ -Polynomen.

wobei die Grundströmung in Matrixschreibweise für die Couette-Strömung $\mathbf{U} = \mathbf{Y}$, $\mathbf{U}' = \mathbf{I}$ ist. Da die Tschebyscheffpolynome ein Basissystem bilden, muß Gleichung (B.7) koeffizientenweise erfüllt sein:

$$\left\{ (\mathbf{D}^2 - k_{m,n}^2 \mathbf{I})^2 - i\alpha m R \mathbf{U} (\mathbf{D}^2 - k_{m,n}^2 \mathbf{I}) \right\} v = \lambda R (\mathbf{D}^2 - k_{m,n}^2 \mathbf{I}) v. \quad (\text{B.8})$$

Analog lassen sich die adjungierte Orr-Sommerfeld-Gleichung und die homogene Squire-Gleichung als Matrixeigenprobleme darstellen.

Damit die Lösungen der Matrixprobleme den Randbedingungen (2.9) genügen, müssen diese in die Matrixprobleme eingebracht werden. Die Randbedingungen der Orr-Sommerfeld-Gleichung $v_j(\pm 1) = \partial_y v_j(\pm 1) = 0$ führen zu vier Gleichungen für die Koeffizienten $v = (v_0, \dots, v_N)$ und sind wiederum als Matrixmultiplikation mit einer $4 \times (N + 1)$ -Matrix \mathbf{M} darstellbar:

$$\mathbf{M}v = (0, 0, 0, 0) \quad (\text{B.9})$$

Würden diese Gleichungen obigen Eigenproblemen zugestellt, wären diese überbestimmt und hätten nur die triviale Lösung $v_j = 0$, λ_j beliebig.

Bei der von Orszag für Tschebyscheffpolynome vorgeschlagenen Tau-Methode [35] werden die letzten vier Gleichungen von (B.8), also die Koeffizienten zu T_{N-3} bis T_N in (B.7), nur noch zur Berechnung eines Fehlers des Cut-Offs benutzt und im Matrixproblem durch die Gleichungen (B.9) ersetzt. Bei der Squire-Gleichung ergeben sich für die Koeffizienten $\tilde{\eta} = (\tilde{\eta}_0, \dots, \tilde{\eta}_N)$ von $\tilde{\eta}(y)$ analog zwei Gleichungen aus den Randbedingungen $\tilde{\eta}(\pm 1) = 0$, so daß bei der Anwendung der Tau-Methode die letzten zwei Gleichungen (also die Koeffizienten zu T_{N-1} und T_N) durch die entsprechenden Zeilen von \mathbf{M} ersetzt werden.

Die entstehenden $(N + 1)$ -dimensionalen Eigenwertgleichungen sind wegen der Struktur der Randbedingungen (B.9) auf der rechten Seite singular. Aus diesem Grunde werden im Programm die Gleichungen (B.9) genutzt, um die Koeffizienten (v_{N-3}, \dots, v_N) durch die Koeffizienten (v_0, \dots, v_{N-4}) bzw. für $\tilde{\eta}(y)$ die Koeffizienten $(\tilde{\eta}_{N-1}, \tilde{\eta}_N)$ durch $(\tilde{\eta}_0, \dots, \tilde{\eta}_{N-2})$ auszudrücken:

$$\begin{pmatrix} v_0 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix} = \mathbf{M}^v \begin{pmatrix} v_0 \\ \vdots \\ v_{N-4} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \tilde{\eta}_0 \\ \vdots \\ \tilde{\eta}_N \end{pmatrix} = \mathbf{M}^\eta \begin{pmatrix} \tilde{\eta}_0 \\ \vdots \\ \tilde{\eta}_{N-2} \end{pmatrix} \quad (\text{B.10})$$

mit der $(N + 1) \times (N - 3)$ -Matrix \mathbf{M}^v und der $(N + 1) \times (N - 1)$ -Matrix \mathbf{M}^η . Es sind dann folgende Eigenprobleme zu lösen:

$$\begin{aligned} & \left[\left\{ (\mathbf{D}^2 - k_{m,n}^2 \mathbf{I})^2 - i\alpha m R \mathbf{U} (\mathbf{D}^2 - k_{m,n}^2 \mathbf{I}) \right\} \mathbf{M}^v \right] v^R \\ & = \lambda \left[R (\mathbf{D}^2 - k_{m,n}^2 \mathbf{I}) \mathbf{M}^v \right] v^R \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

und

$$\left[\left\{ \mathbf{D}^2 - k_{m,n}^2 \mathbf{I} - i\alpha m R \mathbf{U} \right\} \mathbf{M}^\eta \right] \tilde{\eta}^R = [\mu R \mathbf{M}^\eta] \tilde{\eta}^R \quad (\text{B.12})$$

mit den dimensionsreduzierten Vektoren $v^R = (v_0, \dots, v_{N-4})$ und $\tilde{\eta}^R = (\tilde{\eta}_0, \dots, \tilde{\eta}_{N-2})$. Die Ausdrücke in den äußeren eckigen Klammern sind $(N-3) \times (N-3)$ - bzw. $(N-1) \times (N-1)$ -Matrizen, es sind also komplexe Eigenwertgleichungen der Dimension $N-3$ bzw. $N-1$ zu lösen, was z.B. bei Nutzung der IMSL-Routinen [28] durch den LZ-Algorithmus erfolgt. Die eliminierten Koeffizienten werden dann durch die Matrixmultiplikation (B.10) berechnet, so daß die Funktionen $v_j(y)$ und $\tilde{\eta}_j(y)$ und die adjungierten Funktionen $v_j^+(y)$ bestimmt sind.

Die Lösung der Eigenprobleme zu $\alpha = \beta = 0$ erfolgt analog zur Lösung der homogenen Squire-Gleichung.

B.2.2 Lösung der inhomogenen Gleichungen

Die inhomogene Gleichung (2.34) hat in obiger Matrixschreibweise die Form

$$[\mathbf{D}^2 - k_{m,n}^2 \mathbf{I} - i\alpha m R \mathbf{U} - R \lambda \mathbf{I}] \eta = i\beta n R v \quad (\text{B.13})$$

mit einem Eigenvektor v und Eigenwert λ von oben und dem unbekanntem Koeffizientenvektor $\eta = (\eta_0, \dots, \eta_N)$. Nach (B.10) wird η durch $\mathbf{M}^n \eta^R$ ersetzt, die sich ergebende $(N-1) \times (N-1)$ -Matrix der linken Seite invertiert und auf die oberen $N-1$ Komponenten des Vektors der rechten Seite angewendet. η ergibt sich dann durch:

$$\eta = \mathbf{M}^n \eta^R = i\beta n R \mathbf{M}^n [(\mathbf{D}^2 - k_{m,n}^2 \mathbf{I} - i\alpha m R \mathbf{U} - R \lambda_j \mathbf{I}) \mathbf{M}^n]^{-1} \begin{pmatrix} v_0 \\ \vdots \\ v_{N-1} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.14})$$

Analog kann die inhomogene Gleichung (2.40) nach dem unbekanntem Vektor $\tilde{v} = (\tilde{v}_0, \dots, \tilde{v}_N)$ zu $\tilde{v}_j(y)$ aufgelöst werden. Die Invertierung der Matrizen erfolgte mit Hilfe einer IMSL-Routine.

Mit (2.15) und (2.16) können aus den Koeffizienten v und η bzw. $\tilde{\eta}$ die Koeffizienten $u, w, \tilde{u}, \tilde{w} \in \mathbb{C}^{N+1}$ der Geschwindigkeitskomponenten $u_j(y)$ und $w_j(y)$ bzw. $\tilde{u}_j(y)$ und $\tilde{w}_j(y)$ bestimmt werden.

B.2.3 Überprüfung der Orthogonalität

Das Skalarprodukt (2.27) läßt sich als Bilinearform schreiben: Seien $f = (f_0, \dots, f_N)$ und $g = (g_0, \dots, g_N)$ die Vektordarstellungen der Funktionen $f(y)$ und $g(y)$. Dann gilt:

$$\int_{-1}^1 f(y)g(y) dy = f \mathbf{S}^{(2)} g \quad (\text{B.15})$$

mit einer $(N+1) \times (N+1)$ -Matrix $\mathbf{S}^{(2)}$.

Das Orthogonalsystem für $\tilde{\eta}_j$ in (2.38) wird für $R = 600$, $\alpha = 1.5$, $\beta = 3$ und beim Cut-Off $N = 70$ mit einer relativen Genauigkeit von 10^{-10} bei Entwicklung nach Tschebyscheff- und 10^{-11} bei Entwicklung nach Legendrepolyomen erfüllt, d.h.

$$\frac{|\langle \tilde{\eta}_j | \tilde{\eta}_k \rangle|}{|\langle \tilde{\eta}_j | \tilde{\eta}_j \rangle|} \leq 10^{-11} \text{ für } j \neq k. \quad (\text{B.16})$$

Das Biorthogonalsystem in (2.31) wird mit der relativen Genauigkeit 10^{-6} für Tschebyscheff- und 10^{-7} für Legendrepolynome erfüllt. Die schlechtere Genauigkeit liegt in der zweiten Ableitung begründet, wodurch die Polynome höherer Ordnung stärker gewichtet werden und damit die endliche Zahl von Polynomen mehr Einfluß hat. Das dritte "Orthogonalsystem" (2.43) ergibt bei obiger Normierung maximale Beträge im Bereich 10^{-6} , wobei die einzelnen, sich größtenteils auslöschenden Terme eine Größenordnung von etwa 10^{-2} haben. Das Orthonormalsystem (2.48) der Moden zu $\alpha = \beta = 0$ wird mit der relativen Genauigkeit 10^{-10} für Tschebyscheff- und 10^{-11} für Legendrepolynome erfüllt.

B.2.4 Numerischer Test durch Vergleich der Tschebyscheff- und Legendreentwicklung

Die Güte der Eigenwerte wird in den Tabellen B.1 bis B.3 durch Vergleich der Spektren von Original- und adjungierter Gleichung (nur für die Orr-Sommerfeld-Gleichung), durch die Berechnung bei verschiedenem Cut-Off N und durch die Berechnung mit Hilfe von Tschebyscheff- oder Legendrepolyomen aufgezeigt. Wenn der Cut-Off über $N = 70$ erhöht wird, sinkt die Genauigkeit der Eigenwerte und -funktionen wieder. Dies liegt darin begründet, daß in (B.7) zur Matrix der vierten Ableitung \mathbf{D}^4 die Identitätsmatrix addiert wird. In Abbildung B.1 ist das maximale Element der Matrix \mathbf{D}^4 für die Entwicklung nach Tschebyscheff- und Legendrepolyomen über dem Cut-Off N aufgetragen. Es zeigt sich, daß bei $N = 70$ die Einträge für die Entwicklung nach Tschebyscheffpolynomen eine Größenordnung von bis zu 10^{13} haben und damit bei der doppelten Genauigkeit von FORTRAN (etwa 10^{16}) die Addition der Identitätsmatrix nur wenig über der Genauigkeitsgrenze Auswirkungen hat. Die Abbildung zeigt auch, daß die Entwicklung nach Legendrepolyomen zumindest in diesem Verhalten etwas gutmütiger ist, die Maximalwerte sind dort etwa um den Faktor 4 kleiner.

Wie Abbildung B.2 am Beispiel der Geschwindigkeit $v_{(1,1,1)}(y)$ zu $R = 100$, $\alpha = \beta = 1$ und bei Entwicklung nach $N + 1 = 71$ Polynomen (siehe Abbildung A.5) zu entnehmen ist, zeigen die Koeffizienten der Tschebyscheffpolynome und der Legendrepolynome ein annähernd gleiches Abfallverhalten und haben jeweils in etwa die gleiche Größenordnung

Polynomart		$N = 70$	$N = 50$
Legendre	$\lambda_{(0,0,1)}$	-0.00411233516714137014	-0.00411233516710944689
Tschebyscheff	$\lambda_{(0,0,1)}$	-0.00411233516721499440	-0.00411233516709342932
Legendre	$\lambda_{(0,0,2)}$	-0.0164493406686019861	-0.0164493406684866998
Tschebyscheff	$\lambda_{(0,0,2)}$	-0.0164493406684245690	-0.0164493406685348488
Legendre	$\lambda_{(0,0,3)}$	-0.0370110165040756570	-0.0370110165040894654
Tschebyscheff	$\lambda_{(0,0,3)}$	-0.0370110165040941075	-0.0370110165040932818
Legendre	$\lambda_{(0,0,4)}$	-0.0657973626739099399	-0.0657973626739287165
Tschebyscheff	$\lambda_{(0,0,4)}$	-0.0657973626740151196	-0.0657973626737829026
Legendre	$\lambda_{(0,0,5)}$	-0.102808379178011264	-0.102808379178026474
Tschebyscheff	$\lambda_{(0,0,5)}$	-0.102808379177925027	-0.102808379178104439

Tabelle B.1: Güte der Eigenwerte zu $\alpha = \beta = 0$ bei $R = 600$: Untersuchung durch Vergleich bei $N + 1 = 51$ bzw. 71 Legendre- oder Tschebyscheffpolynomen.

Polynomart		$N = 50$
Legendre	$\lambda_{(1,0,1)}$	-0.144227343154525-0.536360765277125 <i>i</i>
Legendre	$\lambda_{(1,0,1)}^+$	-0.144227342286678-0.536360761996262 <i>i</i>
Tschebyscheff	$\lambda_{(1,0,1)}$	-0.144227354059822-0.536360762853810 <i>i</i>
Tschebyscheff	$\lambda_{(1,0,1)}^+$	-0.144227354009570-0.536360750338937 <i>i</i>
Legendre	$\lambda_{(1,0,2)}$	-0.144227343160152+0.536360765267431 <i>i</i>
Legendre	$\lambda_{(1,0,2)}^+$	-0.144227342012366+0.536360761590659 <i>i</i>
Tschebyscheff	$\lambda_{(1,0,2)}$	-0.144227353084942+0.536360763730757 <i>i</i>
Tschebyscheff	$\lambda_{(1,0,2)}^+$	-0.144227354009728+0.536360750338633 <i>i</i>
Legendre	$\lambda_{(1,0,3)}$	-0.317621337875728-0.275251722883510 <i>i</i>
Legendre	$\lambda_{(1,0,3)}^+$	-0.317621331915624-0.275251772079998 <i>i</i>
Tschebyscheff	$\lambda_{(1,0,3)}$	-0.317621355056529-0.275251763569937 <i>i</i>
Tschebyscheff	$\lambda_{(1,0,3)}^+$	-0.317621382585481-0.275251776617025 <i>i</i>
Legendre	$\lambda_{(1,0,4)}$	-0.317621335375503+0.275251723600483 <i>i</i>
Legendre	$\lambda_{(1,0,4)}^+$	-0.317621331936980+0.275251772075851 <i>i</i>
Tschebyscheff	$\lambda_{(1,0,4)}$	-0.317621353966700+0.275251760711985 <i>i</i>
Tschebyscheff,	$\lambda_{(1,0,4)}^+$	-0.317621382532915+0.275251776436142 <i>i</i>

Tabelle B.2: Güte der Eigenwerte der Orr-Sommerfeld-Gleichung: Untersuchung bei $N + 1 = 51$ Legendre- oder Tschebyscheffpolynomen und durch Vergleich mit den Eigenwerten der adjungierten Orr-Sommerfeld-Gleichung bei $R = 600$, $\alpha = 1$.

Polynomart		$N = 70$
Legendre	$\lambda_{(1,0,1)}$	$-0.144227342975293-0.536360797087257i$
Legendre	$\lambda_{(1,0,1)}^+$	$-0.144227291290846-0.536360700293468i$
Tschebyscheff	$\lambda_{(1,0,1)}$	$-0.144227228167495-0.536360844465788i$
Tschebyscheff	$\lambda_{(1,0,1)}^+$	$-0.144227426533339-0.536361020080964i$
Legendre	$\lambda_{(1,0,2)}$	$-0.144227343787610+0.536360751527144i$
Legendre	$\lambda_{(1,0,2)}^+$	$-0.144227291290749+0.536360700293076i$
Tschebyscheff	$\lambda_{(1,0,2)}$	$-0.144227227635723+0.536360832671319i$
Tschebyscheff	$\lambda_{(1,0,2)}^+$	$-0.144227426426601+0.536361020302600i$
Legendre	$\lambda_{(1,0,3)}$	$-0.317621334632886-0.275251735283219i$
Legendre	$\lambda_{(1,0,3)}^+$	$-0.317621506960259-0.275251298390784i$
Tschebyscheff	$\lambda_{(1,0,3)}$	$-0.317622970545009-0.275251169276070i$
Tschebyscheff	$\lambda_{(1,0,3)}^+$	$-0.317622758309211-0.275250170711103i$
Legendre	$\lambda_{(1,0,4)}$	$-0.317621334196676+0.275251736263681i$
Legendre	$\lambda_{(1,0,4)}^+$	$-0.317621499893452+0.275251305426029i$
Tschebyscheff	$\lambda_{(1,0,4)}$	$-0.317622941039210+0.275251191128256i$
Tschebyscheff	$\lambda_{(1,0,4)}^+$	$-0.317622761161116+0.275250146679273i$

Tabelle B.3: Güte der Eigenwerte der Orr-Sommerfeld-Gleichung: Untersuchung bei $N + 1 = 71$ Legendre- oder Tschebyscheffpolynomen und durch Vergleich mit den Eigenwerten der adjungierten Orr-Sommerfeld-Gleichung bei $R = 600$, $\alpha = 1$.

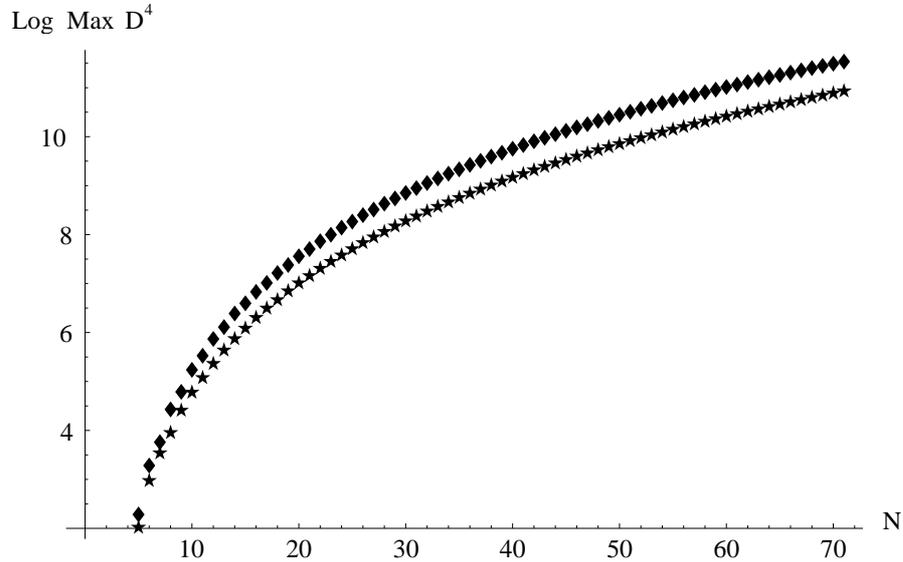


Abbildung B.1: Maximales Element der Matrix \mathbf{D}^4 in Abhängigkeit vom Cut-Off N für Tschebyscheff- (\blacklozenge) und Legendre- (\star) Entwicklung.

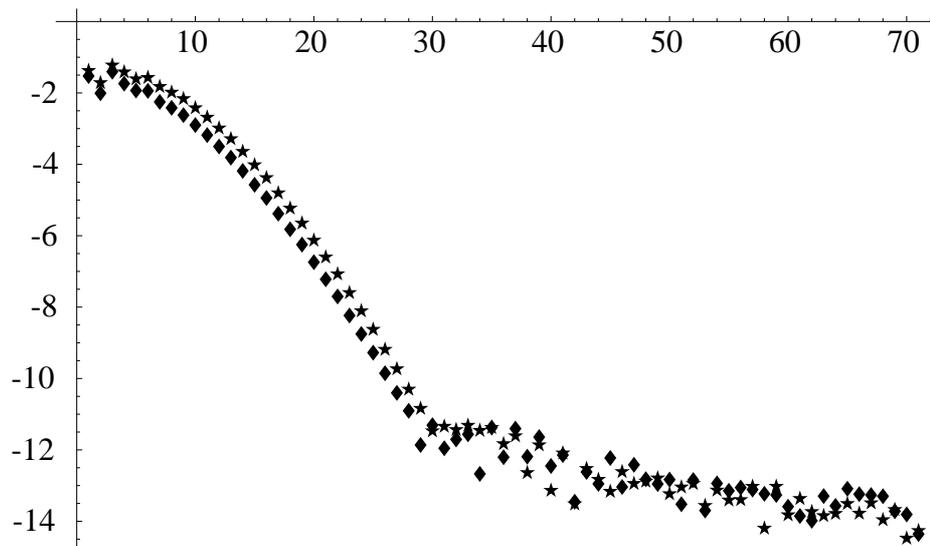


Abbildung B.2: Logarithmische Darstellung der Beträge der Koeffizienten der ersten Orr-Sommerfeld-Eigenfunktion zu $R = 100$, $\alpha = \beta = 1$ bei der Entwicklung nach Tschebyscheff- (◆) oder Legendre- (★) Polynomen über der Ordnung des Polynoms (0 bis 70). Der starke Abfall von der Größenordnung 10^{-1} auf die Größenordnung 10^{-12} bei den ersten 30 Koeffizienten ist deutlich zu erkennen. Die weiteren Koeffizienten liegen im Bereich der Rechengenauigkeit von 10^{-14} . Auffallend ist der annähernd gleiche Verlauf für beide Entwicklungen.

$N_{(0,0,1)(0,1,1)(0,-1,1)}^{xxx}$		
N	Tschebyscheff	Legendre
50	.00571341	.00571339
60	.00571342	.00571337
70	.00571360	.00571337
80	.00571202	.00571311
$N_{(1,0,1)(0,0,1)(1,0,1)}^{xxx}$		
N	Tschebyscheff	Legendre
50	$-.117581+.584364 i$	$-.117581+.584364 i$
60	$-.117581+.584364 i$	$-.117581+.584364 i$
70	$-.117582+.584365 i$	$-.117581+.584364 i$
80	$-.117581+.584364 i$	$-.117581+.584364 i$
$N_{(2,0,2)(1,-1,2)(1,1,2)}^{yxx}$		
N	Tschebyscheff	Legendre
50	$.182754+.246994 i$	$.182754+.246994 i$
60	$.182754+.246994 i$	$.182754+.246994 i$
70	$.182755+.247002 i$	$.182754+.246994 i$
80	$.182758+.246994 i$	$.182755+.246995 i$

Tabelle B.4: Konvergenzverhalten der Kopplungskoeffizienten bei Veränderung der Anzahl $N + 1$ der zur Entwicklung benutzten Tschebyscheff- bzw. Legendrepolynome bei $R = 1000$, $\alpha = \beta = 1$.

B.3 Das Galerkinsystem

Gemäß Tabelle 3.1 können die Kopplungskoeffizienten mit Hilfe der Ableitungsmatrix \mathbf{D} und eines Tensors $\mathbf{S}^{(3)}$, der das Integral über drei nach Tschebyscheff- oder Legendrepolynomen entwickelten Funktionen beschreibt, aus den Koeffizienten von $v_j, v_j^+, \tilde{v}_j, \eta_j, \tilde{\eta}_j$ und u_{j_0}, w_{j_0} und aus den Koeffizienten der nach (2.15) bzw. (2.16) berechneten Funktionen $u_j, \tilde{u}_j, w_j, \tilde{w}_j$ bestimmt werden, z.B:

$$\begin{aligned}
N_{j'kl}^{xxx} = & \sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^N \sum_{p=0}^N S_{m,n,p}^{(3)} \left\{ \left[\sum_{q=0}^N D_{m,q}(v_{j'}^+)_q \right] \right. \\
& \left[-k^2(v_k)_n(v_l)_p + \beta^2(w_k)_n(w_l)_p + \alpha^2(u_k)_n(u_l)_p + 2\alpha\beta(u_k)_n(w_l)_p \right] \\
& \left. + i \left[k^2(v_{j'}^+)_m + \sum_{q=0}^N \sum_{r=0}^N D_{m,q}D_{q,r}(v_{j'}^+)_r \right] [\alpha(v_k)_n(u_l)_p + \beta(v_k)_n(w_l)_p] \right\}. \tag{B.17}
\end{aligned}$$

Zur Bestimmung der numerischen Güte der Kopplungskoeffizienten werden in Tabelle B.4 exemplarisch einige N_{jkl} bei verschiedenen Cut-Offs N und für die Entwicklung nach Tschebyscheff- oder Legendrepolynomen gegenübergestellt.

Bei der Berechnung der Kopplungskoeffizienten durch Optimierung der L_2 -Norm der Abweichung gemäß Abschnitt 3.3 werden zunächst mit Hilfe der Matrix $\mathbf{S}^{(2)}$

und des Tensors $\mathbf{S}^{(3)}$ die Koeffizienten des Gleichungssystems (3.26) bestimmt; die entstandene Matrix wird mit der IMSL-Routine DLINCG invertiert und auf die inhomogenen Terme angewendet.

B.4 Energiebilanz und Energietransfererhaltung

Die Berechnung der Metrikkoeffizienten e_1, e_2 und e_3 nach (4.14) bis (4.16) erfolgt analog der Berechnung der Integrale in (B.15) mit Hilfe der Matrix $\mathbf{S}^{(2)}$. Aus diesen kann dann für einen Zustand $\{x_1(t), \dots, y_1(t), \dots\}$ die Energie $E^S(t)$ gemäß (4.17) berechnet werden. Die Berechnung der Dissipationskoeffizienten e_4, e_5 und e_6 erfolgt nach (4.45) bis (4.47) analog zur Berechnung der Metrikkoeffizienten. Aus diesen und den Metrikkoeffizienten kann dann gemäß (4.48) die Dissipation bestimmt werden. Die Berechnung der Wandterme der Couette-Strömung erfolgt nach der linken Seite von (4.8) durch Addition der gewichteten Amplituden $x_{(0,0,\nu)}$. Für einen bestimmten Zustand $\{x_1(t), \dots, y_1(t), \dots\}$ kann analog auch die Verletzung der Energieerhaltung der nichtlinearen Terme bestimmt werden. Hierzu wird der Term $(dE^S/dt)_3$, also die Summe der Terme für xxx, yyy, yxx und xyy nach den Gleichungen in Abschnitt 4.3 berechnet.

Zur Bestimmung der renormierten Kopplungskoeffizienten werden zunächst alle in dem endlichen System vorkommenden Amplitudenprodukte $z_i z_j z_k$ oder $z_i z_j$ mit $z = x$ oder $z = y$ bestimmt, wobei aufgrund der Transformationseigenschaften nur diejenigen zu betrachten sind, die bei $(\alpha, \beta) \rightarrow (\pm\alpha, \pm\beta)$ nicht ineinander übergehen. Im zweiten Schritt werden alle in diesen Gleichungen vorkommenden Kopplungskoeffizienten N_{jkl}^{***} bestimmt und im Vektor \vec{N} zusammengefaßt, gleichzeitig wird für jede Gleichung die Energieerhaltungsverletzung bzw. die Verletzung der Energiebilanz von Wand- und Dissipationsterm berechnet und im Vektor \vec{E} zusammengefaßt. Die jeweiligen Gewichtungen, mit denen ein Kopplungskoeffizient in die Berechnung eingeht, werden in der Matrix \mathbf{M} abgelegt, so daß gilt:

$$\mathbf{M}\vec{N} = \vec{E}. \quad (\text{B.18})$$

Hierbei ist die Dimension von \vec{N} deutlich größer als die von \vec{E} . Gesucht wird ein Vektor $\vec{\Delta}$ der gleichen Dimension wie \vec{N} , so daß gilt:

$$\mathbf{M}(\vec{N} + \vec{\Delta}) = \vec{0} \iff \mathbf{M}\vec{\Delta} = -\vec{E}. \quad (\text{B.19})$$

Weil das System unterbestimmt ist, kann als zusätzliche Forderungen an $\vec{\Delta}$ gestellt werden, daß

$$\sum_i \left| \frac{\Delta_i}{N_i} \right|^2 \quad (\text{B.20})$$

klein ist. Dies entspricht einem Problem der quadratischen Programmierung: Minimiere den Ausdruck

$$\vec{g} \cdot \vec{x} + \vec{x}^+ \mathbf{H} \vec{x} \quad (\text{B.21})$$

mit einem Vektor \vec{g} , einer selbstadjungierten, positiv definiten Matrix \mathbf{H} und dem unbekanntem Vektor \vec{x} unter der linearen Nebenbedingung (linear constraint)

$$\mathbf{A} \vec{x} = \vec{b} \quad (\text{B.22})$$

mit einer Matrix \mathbf{A} und einem Vektor \vec{b} . Für obigen Fall ist $\vec{g} = \vec{0}$, $\mathbf{A} = \mathbf{M}$ und $\vec{b} = -\vec{E}$. \mathbf{H} ist eine Diagonalmatrix mit den Einträgen $1/|N_i|^2$ auf der Diagonalen, also offensichtlich selbstadjungiert und positiv definit. Zur Lösung gibt es effektive Algorithmen, so z.B. eine IMSL-Routine, die auf einer Methode von Goldfarb und Idnani [20] aufbaut.

Nachteil obigen Verfahrens ist der hohe Speicherbedarf, wenn die Anzahl M der Unbekannten x_i und die Anzahl N der zu erfüllenden Gleichungen mit der Größe des endlichen Galerkinsystems ansteigen (siehe Tabelle 5.1 und 5.2). So sind eine $M \times M$ -Matrix \mathbf{H} und einige Skalierungsvektoren der Dimensionen M und N zu speichern, abgesehen von den Arbeitsfeldern der Prozedur. Hierdurch stoßen selbst moderne Workstations bei o.g. Systemgrößen an ihre Grenzen, wie eine einfache Abschätzung verdeutlicht: Eine 4000×4000 -Matrix \mathbf{H} benötigt bei doppelt genauer komplexer Rechnung unter Fortran 256 MByte an Speicherplatz.

Mehrere Auswege sind möglich: Zum einen zerfällt obiges Matrixproblem in mehrere Blöcke, was durch die Auswahlkriterien der Kopplungskoeffizienten N_{jkl} (siehe Abschnitt 3.4) und durch Symmetrien von Funktionen insbesondere zu $m = n = 0$ hervorgerufen wird. Diese Blöcke sind beträchtlich kleiner, ihre Größe wächst mit steigender Modenzahl aber ebenfalls so schnell an, daß bei nur wenig größeren Systemen das analoge Speicherproblem auftritt. Die Skalierung gemäß (B.20) kann durch die Ersetzung $\Delta_i/N_i \rightarrow x_i$ und $A_{i,j}N_j \rightarrow A_{i,j}$ in die Matrix $\mathbf{A} = \mathbf{M}$ genommen werden, so daß die Aufgabe lautet:

$$\text{Löse } \mathbf{A} \vec{x} = \vec{b} \quad \text{und minimiere } \sum_{k=1}^M x_k^2. \quad (\text{B.23})$$

Als praktikable Möglichkeit hat sich die Lösung von

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \lambda \mathbf{I} \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} \vec{b} \\ \vec{0} \end{pmatrix} \quad (\text{B.24})$$

im Least-Squares-Sinne herausgestellt. Hierbei ist \mathbf{I} die $M \times M$ -Einheitsmatrix und $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Parameter, der die Minimierung der Norm von \vec{x} steuert: Für $\lambda = 0$ findet keine Minimierung der Norm statt, es wird lediglich das (unterbestimmte) Gleichungssystem $\mathbf{A} \vec{x} = \vec{b}$ möglichst gut (im Least-Squares-Sinne) gelöst. Bei eingeschaltetem λ wird auch die Norm minimiert, je größer der Betrag von λ , desto mehr

Gewicht wird auf die Normminimierung gelegt, desto eher wird bei der Lösung des Gleichungssystems jedoch ein kleiner Fehler toleriert. Bei diesem Verfahren können Routinen gewählt werden, die die "dünne" Besetzung der Matrix \mathbf{A} (sparse matrix) ausnutzen (z.B. LSQR von NETLIB.ORG).

Die Aufgabenstellung läßt sich auch exakt lösen: Man überführe (B.23) durch Pivotsuche, Zeilen- und Spaltenvertauschungen und die elementaren Gleichungssystemoperationen in die Form

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A}' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}' = \begin{pmatrix} \vec{b}' \\ \vec{0} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.25})$$

wobei \mathbf{I} die $N' \times N'$ -Einheitsmatrix, \mathbf{A}' eine $N' \times (M - N')$ -Matrix und \vec{x}' eine Permutation von \vec{x} (gemäß den Spaltenvertauschungen von \mathbf{A}) sind. Die $N - N'$ Nullzeilen ergeben sich, wenn das System $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ linear abhängige Zeilen enthält. Die Nullzeilen und die Striche an den neuen Feldern lasse ich ab jetzt weg. Hiermit können die ersten N Komponenten von \vec{x} als Funktionen der übrigen Komponenten aufgefaßt werden ($i = 1, \dots, N$):

$$x_i = f_i(x_{N+1}, \dots, x_M) = b_i - \sum_{j=N+1}^M A_{ij}x_j, \quad (\text{B.26})$$

für die Jacobimatrix ergibt sich ($k = 1, \dots, M$):

$$\frac{\partial x_k}{\partial x_j} = \begin{cases} -A_{kj} & \text{für } k \leq N \\ \delta_{k,j} & \text{für } k > N \end{cases}, \quad j = N + 1, \dots, M. \quad (\text{B.27})$$

Die Lösung von (B.23) entspricht nun der Lösung von

$$\min_{x_{N+1}, \dots, x_M \in \mathbb{C}} \left(\sum_{i=1}^N f_i^2(x_{N+1}, \dots, x_M) + \sum_{i=N+1}^M x_i^2 \right). \quad (\text{B.28})$$

Durch Ableiten nach den unabhängigen Variablen $x_j, j = N + 1, \dots, M$, und Einsetzen von (B.27) ergibt sich das Gleichungssystem ($j = N + 1, \dots, M$)

$$\sum_{k=N+1}^M \left(\sum_{i=1}^N A_{ij}A_{ik} + \delta_{j,k} \right) x_k = \sum_{i=1}^N A_{ij}b_i. \quad (\text{B.29})$$

Der geklammerte Term der linken Seite entspricht einer $(M - N)^2$ -Matrix, die invertiert und auf die rechte Seite angewendet werden könnte, um die $x_k, k = N + 1, \dots, M$ zu erhalten. Da die Dimension $(M - N)$ oft groß ist und die inverse Matrix nicht mehr (wie die Originalmatrix) dünn besetzt sein muß, ist der numerische Aufwand wieder beträchtlich. Zum Lösen großer Gleichungssysteme gibt es spezielle iterative Verfahren, die gegen die gewünschte Lösung konvergieren: Wird obige Gleichung nach x_j

aufgelöst, so ergibt sich mit ($j = N + 1, \dots, M$):

$$a_j = 1 + \sum_{i=1}^N A_{ij}^2, \quad (\text{B.30})$$

$$c_j = \frac{1}{a_j} \sum_{i=1}^N A_{ij} b_i, \quad (\text{B.31})$$

$$d_{jk} = \begin{cases} -\frac{1}{a_j} \sum_{i=1}^N A_{ij} A_{ik} & \text{für } j \neq k, \\ 0 & \text{für } j = k \end{cases} \quad (\text{B.32})$$

die Bestimmungsgleichung:

$$x_j = c_j - \sum_{k=N+1}^M d_{jk} x_k. \quad (\text{B.33})$$

Beginnend mit $x_{N+1} = \dots = x_M = 0$ werden nacheinander nach dieser Gleichung $x_{N+1}, x_{N+2}, \dots, x_M$ berechnet, wobei in die Berechnung von x_j die soeben berechneten Werte von x_{N+1}, \dots, x_{j-1} eingehen. In der nächsten Iteration wird mit diesen Werten von (x_{N+1}, \dots, x_M) von neuem begonnen, bis sich die berechneten Werte von Iteration zu Iteration genügend wenig geändert haben. Nach (B.26) lassen sich die zugehörigen (x_1, \dots, x_N) bestimmen, die nach Rückpermutation den Originalvektor \vec{x} aus (B.22) ergeben. Mit meiner Implementierung haben sich die Werte der Verfahren (B.21) und (B.24) ergeben, wegen der Optimierung der benutzten Routinen ist das "selbstgestrickte" Verfahren deutlich langsamer und etwas ungenauer im Erfüllen des Gleichungssystems, was m.E. durch die hohe Anzahl an Matrixoperationen, die für die Form (B.25) durchgeführt werden müssen, begründet liegt.

Anhang C

Vollständigkeitsproblem der Orr-Sommerfeld-Funktionen

In diesem Abschnitt soll die Bemerkung aus Abschnitt 3.3 eingehender untersucht werden, daß die Funktionen $\{v_{(m,n,\nu)}\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ zwar eine vollständige Basis für zweimal differenzierbare Funktionen $f(y)$ mit $f(\pm 1) = \partial_y f(\pm 1) = 0$ sind [15, 26], jedoch nicht mehr die Funktionen $\{(\partial_y^2 - k_{m,n}^2)v_{(m,n,\nu)}\}_{\nu \in \mathbb{N}}$, nach denen die nichtlinearen Terme $N_{m,n}^v$ entwickelt werden.

Der Kern des Operators $(\partial_y^2 - k_{m,n}^2)$ kann in diesen Funktionen nicht dargestellt werden, d.h. die Funktionen $\{\cosh(ky), \sinh(ky)\}$ oder $\{\exp(ky), \exp(-ky)\}$ fehlen im Bild der Näherung. Dies führt z.B. zu der in der linken Spalte der Abbildung 3.1 auf Seite 24 deutlich sichtbaren Abweichung der Näherungen durch L_2 -Norm-Optimierung im Bereich $0.7 \leq y \leq 1$. Wie in Abbildung C.1 dargestellt, werden die nichtlinearen Terme deutlich besser angenähert, wenn die fehlenden Kernfunktionen hinzugenommen werden. Auch bei Näherung durch das Projektionsverfahren können diese Funktionen nicht dargestellt werden, und es kommt zum Gibbschen Phänomen, d.h. die Näherung schwingt um die anzunähernde Funktion (siehe rechte Spalte der Abbildung 3.1).

Deutlicher kann dies durch Entwicklung der Funktion $\exp(ky)$ dargestellt werden:

$$\exp(k_{m,n}y) = \sum_{\nu=1}^{\nu_{\max}} a_{\nu} (\partial_y^2 - k_{m,n}^2) v_{(m,n,\nu)}. \quad (\text{C.1})$$

Das Verfahren der Minimierung der L_2 -Norm führt zu der Lösung $a_1 = \dots = a_{\nu_{\max}} = 0$. Mit dem Projektionsverfahren mit Hilfe des Biorthogonalsystems $\{v_{(m,n,\nu)}^{\dagger}\}$ ergeben sich jedoch im allgemeinen von null verschiedene Koeffizienten:

$$a_{\nu} = \int_{-1}^1 v_j^{\dagger} \exp(k_{m,n}y) dy. \quad (\text{C.2})$$

Für $R = 100$, $\alpha = 1.1$, $\beta = 2.4$ ist in Abbildung C.2 die Näherung in 10 und 20 Funktionen dargestellt. Deutlich ist das Gibbsche Phänomen zu erkennen, d.h.

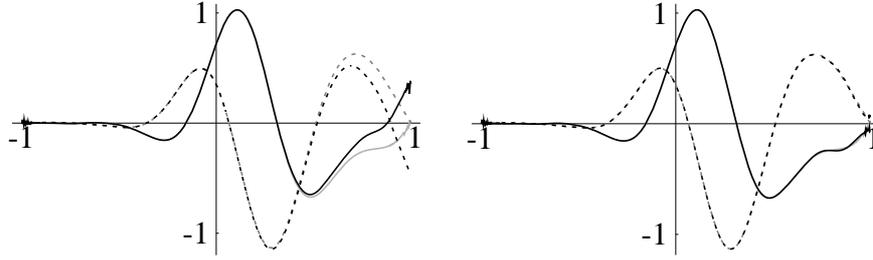


Abbildung C.1: Vergleich der Darstellung des nichtlinearen Terms aus Abbildung 3.1 bei Entwicklung durch Minimierung der L_2 -Norm der Abweichung unter Benutzung von 20 Funktionen (links) und 18 Funktionen plus den zwei Kernfunktionen (rechts); der Realteil ist durchgezogen, der Imaginärteil gestrichelt gezeichnet; schwächer ist die darzustellende Funktion gezeichnet. Die Abweichung im linken Graphen wird rechts durch die Kernfunktionen völlig kompensiert.

die Näherung oszilliert mit immer größerer Frequenz und hoher Amplitude um die anzunähernde Funktion.

Dies hat für die Bestimmung der Kopplungskoeffizienten N_{jkl}^{x**} aus dem nichtlinearen Term $N_{m,n}^v$ zur Folge, daß nur der Anteil orthogonal zum Kern von $(\partial_y^2 - k_{m,n}^2)$ korrekt dargestellt werden kann. Die nichtlinearen Terme sind aber nicht von vornherein orthogonal zum Kern, und auch der Orr-Sommerfeld-Operator nicht, da im Orr-Sommerfeld-Operator der Operator $(\partial_y^2 - k_{m,n}^2)$ mit der Grundströmung U multipliziert wird. Folglich verliert man beim Einfügen der Entwicklung

$$v_{m,n}(y, t) = \sum_{\nu=1}^N x_{(m,n,\nu)}(t) v_{(m,n,\nu)}(y)$$

in die Orr-Sommerfeld-Gleichung (2.19) diejenigen Anteile des nichtlinearen Terms $N_{m,n}^v$, die proportional zu den Kernfunktionen sind.

Die analytisch sinnvolle Entwicklung nach dem vollständigen Basissystem $\{v_j\}$ ist aufgrund der Nichtvertauschbarkeit der Differentiation und des Grenzübergangs für ein endliches System weniger geeignet: Die Funktionen $\{v_{(m,n,\nu)}\}$, ab jetzt kurz mit $\{v_\nu\}$ bezeichnet, sind zwar Basis für Funktionen $w \in C^\infty([-1, 1])$ mit $w(\pm 1) = \partial_y w(\pm 1) = 0$, d.h.

$$w \stackrel{L_2}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\nu=1}^N x_\nu v_\nu =: \lim_{N \rightarrow \infty} w_N \quad (\text{C.3})$$

bzw.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 |w - w_N|^2 dy \rightarrow 0 \quad (\text{C.4})$$

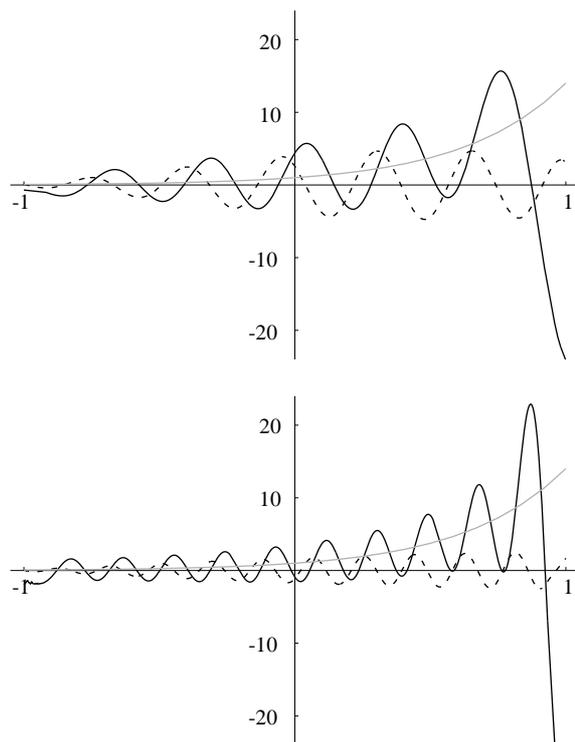


Abbildung C.2: Darstellung der Kernfunktion $\exp(k_{1,1}y)$ des Operators $(\partial_y^2 - k_{1,1}^2)$ in 10 (oben) bzw. 20 (unten) Funktionen $(\partial_y^2 - k_{1,1}^2)v_{(1,1,\nu)}$, wobei die Koeffizienten durch Projektion mit dem Biorthogonalsystem bestimmt wurden. Der Realteil ist durchgezogen, der Imaginärteil (der Näherung) ist gestrichelt gezeichnet, schwächer hinterlegt ist die Funktion $\exp(k_{1,1}y)$.

mit den Partialsummen $w_N = \sum_{\nu=1}^N x_\nu v_\nu$, doch der Grenzübergang $N \rightarrow \infty$ vertauscht nicht mit dem Orr-Sommerfeld-Operator; ansonsten würde für eine beliebige Funktion w wie oben gelten:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 e^{\pm ky} L_{OS} w \, dy &= \int_{-1}^1 e^{\pm ky} L_{OS} \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\nu=1}^N x_\nu v_\nu \right) dy \\
&= \int_{-1}^1 e^{\pm ky} \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\nu=1}^N x_\nu L_{OS} v_\nu \right) dy \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\nu=1}^N x_\nu \int_{-1}^1 e^{\pm ky} (\lambda_\nu R (\partial_y^2 - k^2) v_\nu) \, dy \\
&= R \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\nu=1}^N \lambda_\nu x_\nu \int_{-1}^1 [(\partial_y^2 - k^2) e^{\pm ky}] v_\nu \, dy \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{C.5}$$

Es lassen sich aber leicht Funktionen w finden, für die $\int_{-1}^1 e^{\pm ky} L_{OS} w \, dy \neq 0$ gilt, so z.B. die achsen- bzw. punktsymmetrischen Funktionen

$$w^a = (1 - y^2)^2, \quad w^p = y(1 - y^2)^2. \tag{C.6}$$

Tabelle C.1 zeigt, daß bei dem Versuch, die Funktion w^a bei $R = 100$, $\alpha = 1.1$, $\beta = 2.4$ nach den Funktionen $\{v_{(m,n,\nu)}\}$ zu entwickeln, mit steigender Funktionenzahl N zwar die L_2 -Norm von 0., 1. und 2. Ableitung konvergieren, jedoch die der 4. Ableitung bzw. des Orr-Sommerfeld-Operators divergieren.

In dieser Arbeit wird jedoch lediglich auf diese Problematik hingewiesen; da ein endliches Galerkinsystem schon wegen seiner endlichen Amplitudenzahl nicht die volle Dynamik der partiellen Differentialgleichungen beinhalten kann, besteht die Erwartung, daß sich dieser Fehler nicht gravierend auswirkt, zumal durch die Renormierung die korrekten Energiebilanzen erfüllt werden.

N	$\int P(w^a - w_N) ^2 dy$				
	$P = 1$	$P = \partial_y$	$P = \partial_y^2$	$P = \partial_y^4$	$P = LOS$
6	$5.1 \cdot 10^{-5}$	$6.0 \cdot 10^{-3}$	1.3	$1.16 \cdot 10^5$	$1.15 \cdot 10^5$
8	$1.0 \cdot 10^{-5}$	$2.1 \cdot 10^{-3}$	0.70	$1.36 \cdot 10^5$	$1.38 \cdot 10^5$
10	$2.7 \cdot 10^{-6}$	$8.1 \cdot 10^{-4}$	0.40	$1.59 \cdot 10^5$	$1.61 \cdot 10^5$
12	$8.6 \cdot 10^{-7}$	$3.6 \cdot 10^{-4}$	0.25	$1.82 \cdot 10^5$	$1.84 \cdot 10^5$
14	$3.2 \cdot 10^{-7}$	$1.8 \cdot 10^{-4}$	0.16	$2.06 \cdot 10^5$	$2.07 \cdot 10^5$
16	$1.3 \cdot 10^{-7}$	$9.5 \cdot 10^{-5}$	0.11	$2.29 \cdot 10^5$	$2.31 \cdot 10^5$
18	$6.1 \cdot 10^{-8}$	$5.5 \cdot 10^{-5}$	$7.9 \cdot 10^{-2}$	$2.52 \cdot 10^5$	$2.54 \cdot 10^5$
20	$3.1 \cdot 10^{-8}$	$3.3 \cdot 10^{-5}$	$5.9 \cdot 10^{-2}$	$2.76 \cdot 10^5$	$2.78 \cdot 10^5$
25	$7.4 \cdot 10^{-9}$	$1.2 \cdot 10^{-5}$	$3.1 \cdot 10^{-2}$	$3.30 \cdot 10^5$	$3.30 \cdot 10^5$
30	$2.1 \cdot 10^{-9}$	$4.9 \cdot 10^{-6}$	$1.8 \cdot 10^{-2}$	$3.94 \cdot 10^5$	$3.95 \cdot 10^5$

Tabelle C.1: Quadrat der L_2 -Norm von verschiedenen Ableitungen der Näherung der Funktion $w^a = (1 - y^2)^2$ durch die Funktionen $\{v_{(m,n,\nu)}\}$ bei $R = 100$, $\alpha = 1.1$, $\beta = 2.4$. Deutlich ist zu erkennen, daß 0., 1. und 2. Ableitung konvergieren, die vierte Ableitung und auch der Orr-Sommerfeld-Operator jedoch zu Divergenz führen.

Literaturverzeichnis

- [1] J.S.Baggett, L.N.Trefethen, Low-dimensional models of subcritical transition to turbulence, *Phys. Fluids* 9:1043-1053 (1997).
- [2] D.J.Benney, L.H.Gustavsson, A new mechanism for linear and nonlinear instability, *Stud.Appl.Math.*64:185-209 (1981).
- [3] L.Bergström, Interactions of three components and subcritical self-sustained amplification of disturbances in plane Poiseuille flow, *Phys. Fluids* 11:590-601 (1999).
- [4] S.Bottin, O.Dauchot, F.Daviaud, P.Manneville, Experimental evidence of streamwise vortices as finite amplitude solutions in transitional plane Couette flow, *Phys. Fluids* 10:2597-2607 (1998).
- [5] K.M.Butler, B.F.Farrell, Three-dimensional optimal perturbations in viscous shear flow, *Phys. Fluids A* 4:1637-1650 (1992).
- [6] A.Cherhabili, U.Ehrenstein, Spatially localized 2-dimensional finite-amplitude states in plane Couette flow, *Eur.J.Mech. B/Fluids* 14:677-696 (1995).
- [7] A.Cherhabili, U.Ehrenstein, Finite-amplitude equilibrium states in plane Couette flow, *J.Fluid Mech.* 342:159-177 (1997).
- [8] R.M.Clever, F.H.Busse, Three-dimensional convection in a horizontal fluid layer subjected to a constant shear, *J.Fluid Mech.* 234:511-527 (1992).
- [9] T.Coffee, Finite amplitude instability of plane Couette flow, *J.Fluid Mech.* 83:401-413 (1977).
- [10] W.O.Criminale, T.L.Jackson, D.G.Lasseigne, R.D.Joslin, Perturbation dynamics in viscous channel flows, *J.Fluid Mech.* 339:55-75 (1997).
- [11] O.Dauchot, F.Daviaud, Finite amplitude perturbation and spots growth mechanism in plane Couette flow, *Phys.Fluids* 7:335-343 (1995).
- [12] O.Dauchot, F.Daviaud, Streamwise vortices in plane Couette flow, *Phys.Fluids* 7:901-903 (1995).

- [13] F.Daviaud, J.Hegseth, P.Bergé, Subcritical transition to turbulence in plane Couette flow, *Phys.Rev.Lett.*69:2511-2514 (1992).
- [14] B.Diedrichs, Three-dimensional disturbances; considering starting profiles and optimal profiles in Couette and Poiseuille flow, *Phys. Fluids* 8:1149-1158 (1992).
- [15] R.C.DiPrima, G.J.Habetler, A completeness theorem for non-selfadjoint eigenvalue problems in hydrodynamic stability, *Arch.Rat.Mech.Anal.*34 (1969).
- [16] C.R.Doering, J.D.Gibbon, *Applied analysis of the Navier-Stokes equations*, Cambridge University Press 1995.
- [17] P.G.Drazin, W.H. Reid, *Hydrodynamic stability*, Cambridge University Press 1981.
- [18] B.Eckhardt, K.Marzinzik, A.Schmiegel, Transition to turbulence in shear flows, In: *A perspective look at nonlinear media*, Springer-Verlag 1998.
- [19] T.Gebhardt, S.Großmann, Chaos transition despite linear stability, *Phys. Rev. E* 50:3705-3711 (1994).
- [20] D.Goldfarb, A.Idnani, A numerically stable dual method for solving strictly convex quadratic programs, *Math.Prog.* 271:33 (1983).
- [21] D.Gottlieb, S.A.Orszag, *Numerical analysis of spectral methods: theory and applications*, Society for Industrial and Applied Mathematics 1977.
- [22] S.Großmann, Wie entsteht eigentlich Turbulenz?, *Phys.Bl.*51:641-646 (1995).
- [23] J.M.Hamilton, J.Kim, F.Waleffe, Regeneration mechanisms of near-wall turbulence structures, *J.Fluid Mech.* 287:317-348 (1995).
- [24] D.S.Henningson, P.J.Schmid, Vector eigenfunction expansions for plane channel flows, *Stud.Appl.Math.*87:15-43 (1992).
- [25] D.S.Henningson, L.H.Gustavsson, K.S.Breuer, Localized disturbances in parallel shear flows, *Appl.Sc.Res.*53:51-97 (1994).
- [26] I.H.Herron, A completeness observation on the stability equations for stratified viscous shear flows, *Phys.Fluids* 23 (1980).
- [27] A.P.Hooper, R.Grimshaw, Two-dimensional disturbance-growth of linearly stable viscous shear flow, *Phys.Fluids* 8:1424-1432 (1996).
- [28] IMSL,Inc., *User's Manual Math/Library* 1987.
- [29] D.D.Joseph, *Stability of Fluid Motions*, Springer-Verlag, Berlin 1976.

- [30] A.Lundbladh, A.V.Johansson, Direct simulation of turbulent spots in plane Couette flow, *J.Fluid Mech.* 229:499-516 (1991).
- [31] M.Nagata, Three-dimensional finite-amplitude solutions in plane Couette flow: bifurcation from infinity, *J.Fluid Mech.* 217:519-527 (1990).
- [32] M.Nagata, Nonlinear solutions of modified plane Couette flow in the presence of a transverse magnetic field, *J.Fluid Mech.* 307:231-243 (1996).
- [33] R.Nicodemus, S.Großmann, M.Holthaus, Variational bounds on energy dissipation in plane Couette flow, *Phys. Rev. E* 56:6774-6786 (1997).
- [34] R.Nicodemus, S.Großmann, M.Holthaus, The background flow method. Part 1. Constructive approach to bounds on energy dissipation, *J.Fluid Mech.* 363:281-300 (1998).
- [35] S.A.Orszag, Accurate solution of the Orr-Sommerfeld stability equation, *J.Fluid Mech.* 50:689-703 (1971).
- [36] S.A.Orszag, L.C.Kells, Transition to turbulence in plane Poiseuille and plane Couette flow, *J.Fluid Mech.* 96:159-205 (1980).
- [37] J.Pade, A.Rauh, G.Tsarouhas, Application of normal forms to the Lorenz model in the subcritical region, *Physica D* 29:236-246 (1987).
- [38] A.Rauh, J.Pade, Decoupling of dissipative flows by interval normal forms in the Poincaré domain, *Reports on Math. Physics* 27:179-192 (1989).
- [39] A.Rauh, T.Zachrau, J.Zoller, Nonlinear stability analysis of plane Poiseuille flow by normal forms, *Physica D* 86:1-18 (1995).
- [40] A.Rauh, Remarks on unsolved basic problems of the Navier-Stokes equations, zur Publikation bei *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*.
- [41] S.C.Reddy, P.J.Schmid, J.S.Baggot, D.S.Henningson, On stability of streamwise streaks and transition thresholds in plane channel flows, *J.Fluid Mech.* 365:269-303 (1998).
- [42] V.A.Romanov, Stability of plane-parallel Couette flow, *Funct.Anal.Applics* 7:137-146 (1973).
- [43] A.Schmiegel, B.Eckhardt, Fractal stability border in plane Couette flow, *Phys.Rev.Lett.* 79:5250-5253 (1997).
- [44] A.Spille, Stabilitätsanalyse der ebenen Couette-Strömung mit der Intervall-Normalform-Transformation, Diplomarbeit am Fachbereich Physik der C.v.O. Universität Oldenburg 1995.

- [45] J.-L. Thiffeault, W.Horton, Energy-conserving truncations for convection with shear flow, *Phys. Fluids* 8:1715-1719 (1996).
- [46] N.Tillmark, P.H.Alfredsson, Experiments on transition in plane Couette flow, *J.Fluid Mech.*235:89-102 (1992).
- [47] F.Waleffe, Transition in shear flows. Nonlinear normality versus non-normal linearity, *Phys.Fluids* 7:3060-3066 (1995).
- [48] F.Waleffe, Hydrodynamic stability of turbulence: Beyond transients to a self-sustaining process, *Stud. Appl. Math.* 95:319-343 (1995).
- [49] F.Waleffe, On a self-sustaining process in shear flows, *Phys. Fluids* 9:883-900 (1997).
- [50] T.Zachrau, Nichtlineare Stabilitätsanalyse mit Intervall-Normalform am Beispiel der zweidimensionalen ebenen Poiseuille-Strömung, Doktorarbeit an der C.v.O. Universität Oldenburg 1994.

Lebenslauf

Name:	Andreas Spille
Geburtsdatum:	20. Februar 1970
Geburtsort:	Oldenburg
Staatsangehörigkeit:	deutsch
Schulausbildung:	
1976-1982	Grundschule und Orientierungsstufe in Hude
1982-1989	Gymnasium Graf-Anton-Günther-Schule in Oldenburg, Erwerb der Allgemeinen Hochschulreife
Wehrdienst:	
1989-1990	Grundwehrdienst in Wildeshausen
Studium:	
10.1990-11.1995	Studiengang Diplom-Physik an der Carl von Ossietzky Universität Oldenburg
Beruflicher Werdegang:	
11.1995-10.1998	Wissenschaftlicher Angestellter am Fachbereich Physik der Carl von Ossietzky Universität Oldenburg
11.1998-12.1998	Stipendiat im Graduiertenkolleg "Psychoakustik"
1.1999-2.1999	Wissenschaftlicher Angestellter am Fachbereich Physik der Carl von Ossietzky Universität Oldenburg

Erklärung gemäß §8(2) der Promotionsordnung

Hiermit erkläre ich, daß ich diese Arbeit selbständig verfaßt und nur die angegebenen Hilfsmittel benutzt habe.

(Andreas Spille)