

# Entwicklung eines Modells zur Abbildung des Prämienrisikos in der Schaden-/Unfallversicherung zur wert- und risikoorientierten Unternehmenssteuerung im Vergleich zu aufsichtsrechtlichen Anforderungen unter Solvency II

Von der Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften der  
Carl von Ossietzky Universität Oldenburg  
zur Erlangung des Grades und Titels eines

Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)

angenommene Dissertation

von Diplom-Mathematiker Marcel Thevißen  
geboren am 01. September 1982  
in Heinsberg

Gutachterin: Prof. Dr. Angelika May  
Weiterer Gutachter: Prof. Dr. Peter Ruckdeschel

Tag der Disputation: 07.12.2018



*Für Karin,  
Lena & Ella.*





# Danksagung

Für die erfolgreiche Fertigstellung meiner Promotion möchte ich zuallererst Frau Prof. Dr. Angelika May meinen Dank aussprechen. Sie hat mir die Möglichkeit eröffnet, an diesem interessanten, praxisnahen Thema zu arbeiten und mich mit ihrer konstruktiven Betreuung auf diesem Weg immer zielführend begleitet. Auch durch ihre ständige Diskussionsbereitschaft hat sie für mich einen perfekten Rahmen geschaffen, der mich als externer Doktorand die räumliche Distanz nicht hat wahrnehmen lassen.

Danken möchte ich auch Herrn Prof. Dr. Peter Ruckdeschel für die Anfertigung des Zweitgutachtens sowie für die wertvollen und konstruktiven Hinweise im Rahmen des Oberseminars und darüber hinaus.

Ein ganz besonderer Dank geht an meinen Freund Dr. Benedikt Funke, der mein Promotionsvorhaben stets als kritischer Diskussionspartner und Lektor begleitet hat. Ich habe seine Unterstützung als sehr förderlich und hilfreich erfahren.

Dr. Michael Fackler, Aktuar DAV und ehemaliger externer Doktorand am Institut für Mathematik bei Herrn Prof. Dr. Dietmar Pfeifer, gebührt mein Dank für seine wertvollen Ratschläge auf der Zielgeraden dieser Arbeit.

Ich danke auch meiner Familie und insbesondere meinen Eltern für ihre uneingeschränkte Unterstützung.

Vor allem danke ich Karin, Lena und Ella, die mir in der Zeit meiner Promotion nicht nur viel Geduld und Verständnis entgegengebracht haben, sondern mich auch mit liebevoller Anerkennung besonders bekräftigt haben.



# Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Modellierung des Prämienrisikos in der Schaden- und Unfallversicherung im Kontext aufsichtsrechtlicher Anforderungen und unternehmensspezifischer Ansätze. Der hierfür im aktuellen Standardmodell unter Solvency II verwendete Ansatz zur Abbildung des Prämienrisikos ist Faktor-basiert. Es ist deshalb fraglich, ob auf diese Weise das Risikoprofil eines Unternehmens entsprechend erfasst werden kann.

Aus diesem Grund wird untersucht, welches Potential ein individuelles, unternehmensspezifisches Modell im Vergleich zum Standardmodell besitzt. Hierzu wird ein unternehmens-eigenes Modell zur Abbildung des Prämienrisikos anhand einer Case Study für ein fiktives Versicherungsunternehmen – einen deutschen Monoliner im Bereich der Kraftfahrt-Haftpflichtversicherung – entwickelt, in dem das Vorhersagerisiko von Groß- und Basisschäden separat voneinander modelliert wird. Diese Trennung sowie die anschließende Modellierung der Großschäden basiert auf der Extremwerttheorie, speziell auf der Theorie der Threshold-Überschreitungen. Für die Großschäden oberhalb eines geeigneten zu wählenden Thresholds wird ein kollektives Modell angenommen, wobei bezüglich der Anzahl der Großschadenfälle eine Poisson-Verteilung unterstellt wird, die unabhängig von der i.i.d. Folge der Ultimate-Schadenaufwände sei. Motiviert durch das bekannte Theorem von Pickands, Balakrishna und de Haan wird gezeigt, dass diese einer verallgemeinerten Pareto-Verteilung genügen. Der ultimative Basisschadenaufwand wird über einen Frequency-Severity-Ansatz modelliert, wobei für die Schadenfrequenzen und -durchschnitte jeweils ein klassisches lineares Regressionsmodell unterstellt wird. Sowohl für das Groß- als auch für das Basisschadenmodell erfolgt die Beurteilung der Anpassungsgüte auf Basis statistischer Testverfahren. Schließlich wird das Parameterrisiko über ein Bootstrapping-Verfahren in einer Monte-Carlo-Simulationsstudie abgebildet. Das Modell erfüllt aufsichtsrechtliche Anforderungen und eignet sich auch zu einer wert- und risikoorientierten Unternehmenssteuerung.

# Abstract

The aim of this thesis is the modelling of premium risk in property and casualty insurance considering both regulatory requirements and undertaking-specific approaches. The actual model for premium risk in the standard formula within the Solvency II framework is factor-based. This motivates the question whether this approach reflects the risk profile of a company in an appropriate way or is of limited strength.

Within the thesis, we will discuss the potential of an undertaking-specific model in comparison to the factor-based standard formula according to Solvency II. For this aim we outperform a case study in which we develop an internal model to calculate the premium risk for a fictional insurance undertaking – a German monoliner in the field of motor third party insurance. In this model we will characterize the prediction risk for large and attritional claims separately. This separation as well as the subsequent modelling of large claims is based on extreme value theory, especially on the theory of threshold exceedances. For claims bigger than an appropriately high threshold, we will assume a collective model where we again presume a Poisson-distribution for the number of large claims which is independent of the i.i.d. sequence of ultimate claim amounts. We will show, that this sequence of ultimate claims can be described by generalized Pareto distributed random variable which is motivated by the well-known theorem of Pickands, Balkema and de Haan. The expenditure of the ultimate attritional claims will be modeled by a frequency-severity-approach. For the frequency and average severity of these claims we will assume a classic linear regression model. By the use of classical goodness of fit tests we will evaluate the suitability of our conducted approaches. Finally, a bootstrapping approach within a Monte Carlo simulation study is utilized in order to incorporate the parameter risk in our model. This internal model complies with the regulatory requirements and can also be used for value and risk based management.

# Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung . . . . .	1
2. Aktuarielle Grundlagen . . . . .	7
2.1. Maß- und wahrscheinlichkeitstheoretischer Rahmen . . . . .	9
2.2. Risiko und Risikomaße . . . . .	15
2.3. Risikoaggregation . . . . .	21
2.3.1. Diversifikation . . . . .	21
2.3.2. Korrelation . . . . .	22
2.3.3. Copulas . . . . .	24
2.4. Kollektives Modell . . . . .	33
2.5. Modellierung . . . . .	38
2.6. Heavy-tailed und subexponentielle Verteilungen . . . . .	43
2.6.1. Heavy-tailed Verteilungen . . . . .	44
2.6.2. Subexponentielle Verteilungen . . . . .	46
2.7. Extremwerttheorie . . . . .	50
2.7.1. Grenzverteilungen normierter Maxima . . . . .	51
2.7.2. Threshold-Überschreitungen . . . . .	58
2.8. Rückversicherung . . . . .	65
2.8.1. Formen und Strukturen der Rückversicherung . . . . .	65
2.8.2. Auswirkungen der Rückversicherung . . . . .	68
3. Prämienrisiko im Kontext aufsichtsrechtlicher, risikoorientierter Regelwerke . . . . .	71
3.1. Prämienrisiko im Solvency II-Standardmodell . . . . .	72
3.1.1. Meilensteine auf dem Weg zum neuen europäischen Aufsichtsregelwerk . . . . .	72
3.1.2. Anrechnungsfähige Eigenmittel . . . . .	74
3.1.3. Solvenzkapitalanforderungen . . . . .	79
3.2. Prämienrisiko im Standardmodell des Swiss Solvency Tests . . . . .	85
3.2.1. Meilensteine . . . . .	85
3.2.2. Risikotragendes Kapital . . . . .	86
3.2.3. Zielkapital . . . . .	86
3.3. Prämienrisiko unter US-Solvency . . . . .	92
3.3.1. Meilensteine . . . . .	92
3.3.2. Total Adjusted Capital . . . . .	93
3.3.3. Total Risk-Based Capital . . . . .	93
3.4. Vergleichende Analyse und Bewertung . . . . .	96
3.4.1. Versicherungswirtschaftliche Perspektive . . . . .	97
3.4.2. Aktuarielle Perspektive . . . . .	98
3.4.3. Zusammenfassung und Fazit . . . . .	109

4. Case Study: Modellierung des Prämienrisikos . . . . .	111
4.1. Geschäftstätigkeit und Risikoprofil . . . . .	111
4.2. Aufsichtsrechtliche Anforderungen unter Solvency II . . . . .	112
4.2.1. Solvenzkapitalanforderungen . . . . .	113
4.2.2. Solvenzbilanz . . . . .	119
4.3. Unternehmenseigene Modellierung des Prämienrisikos . . . . .	121
4.3.1. Datengrundlage . . . . .	121
4.3.2. Inflationsproblematik . . . . .	126
4.3.3. Explorative Datenanalyse . . . . .	129
4.3.4. Wahl der Großschadengrenze . . . . .	131
4.3.5. Modellierung der Großschäden . . . . .	134
4.3.6. Modellierung der Basisschäden . . . . .	154
4.3.7. Interne Schadenregulierungskosten . . . . .	169
4.3.8. Ergebnisse . . . . .	170
4.3.9. Vergleich zum Standardmodell . . . . .	176
5. Konklusion und Ausblick . . . . .	182
A. Nähere Angaben zu den Standardmodellen . . . . .	189
A.1. Solvency II . . . . .	189
A.1.1. Marktrisiko . . . . .	189
A.1.2. Versicherungstechnisches Risiko Leben . . . . .	190
A.1.3. Versicherungstechnisches Risiko Nicht-Leben . . . . .	191
A.1.4. Versicherungstechnisches Risiko Kranken . . . . .	193
A.2. Swiss Solvency Test . . . . .	194
A.3. US-Solvency . . . . .	197
B. Risikolose Zinsstrukturkurve . . . . .	198
C. Case Study: Beispielunternehmen CAPITOL . . . . .	201
C.1. Basisdaten der CAPITOL . . . . .	201
C.1.1. Prämien, Exposure, Kosten . . . . .	201
C.1.2. Schadeninformationen . . . . .	202
C.1.3. Ermittlung der Best Estimate Schadenrückstellungen . . . . .	205
C.2. Quantitative Anforderungen unter Solvency II . . . . .	209
C.2.1. Solvenzkapitalanforderungen . . . . .	209
C.2.2. Solvenzbilanz . . . . .	213
C.3. Interne Modellierung . . . . .	217
C.3.1. Modellierung der Großschäden . . . . .	217
C.3.2. Modellierung der Basisschäden . . . . .	218
Literatur . . . . .	219
Nomenklatur . . . . .	228

# Abbildungsverzeichnis

2.1.	Dreidimensionale Darstellung und Höhenliniendiagramm fundamentaler Copulas . . . . .	28
2.2.	Realisationen aus impliziten und expliziten Copulas . . . . .	29
3.1.	Schematische Darstellung der Solvenzbilanz . . . . .	76
3.2.	Schematische Darstellung des Tiering . . . . .	77
3.3.	Schematische Darstellung der Anrechnungsfähigkeit und Begrenzung der Tiers . . . . .	78
3.4.	Schematische Darstellung der Ermittlung der Solvenzkapitalanforderung . . . . .	79
3.5.	Schematische Darstellung des Solvency II-Standardmodells . . . . .	82
4.1.	Case Study: Prämien- und Bestandsentwicklung der Vergangenheit . . . . .	122
4.2.	Case Study: Endabgewickelte Schadenanzahlen und -frequenzen der Vergangenheit . . . . .	123
4.3.	Case Study: Ultimate-Schadenaufwände und -durchschnitte der Vergangenheit . . . . .	124
4.4.	Case Study: Loss Ratios, Combined Ratios und Brutto-Anfalljahreergebnisse der Vergangenheit . . . . .	125
4.5.	Case Study: Scatterplot und empirische Verteilungsfunktion der inflationsbereinigten Ultimate-Schadenaufwände der Einzelschäden ab 100 TEUR . . . . .	129
4.6.	Case Study: Histogramm und QQ-Plot der inflationsbereinigten Ultimate-Schadenaufwände der Einzelschäden ab 100 TEUR . . . . .	130
4.7.	Case Study: Mean Excess Plot der inflationsbereinigten Ultimate-Schadenaufwände der Einzelschäden ab 100 TEUR . . . . .	131
4.8.	Case Study: Mean Excess und Hill-Plot der inflationsbereinigten Ultimate-Schadenaufwände der Einzelschäden ab 100 TEUR . . . . .	133
4.9.	Case Study: Maximum-Likelihood-Schätzer des Formparameters der GPD in Abhängigkeit des Thresholds . . . . .	136
4.10.	Case Study: QQ-Plot sowie empirische und angepasste Verteilungsfunktion der GPD der inflationsbereinigten Ultimate-Großschadenaufwände . . . . .	137
4.11.	Case Study: Großschadenanzahl (Exposure-gewichteter Ultimate-Stand) oberhalb von 1 Mio. EUR . . . . .	141
4.12.	Case Study: Perzentilgraph des Prozess- und Vorhersagerisikos für die Großschadenanzahlen . . . . .	147
4.13.	Case Study: Perzentilgraphen des Parameterrisikos des Form-, Lage- und Skalenparameters der GPD für die Großschadenhöhen . . . . .	149
4.14.	Case Study: Perzentilgraph des Prozess- und Vorhersagerisikos für die Brutto-Großschadenhöhen . . . . .	150

---

4.15. Case Study: Perzentilgraph des Prozess- und Vorhersagerisikos für den Brutto-Jahresgesamtschaden der Großschäden . . . . .	151
4.16. Case Study: Ultimate-Schadenaufwände und -bedarfe der Basisschäden . . .	156
4.17. Case Study: Endabgewickelte Frequenzen und Durchschnittsschäden der Basisschäden . . . . .	157
4.18. Case Study: Scatterplot und QQ-Plot der standardisierten Residuen der Basisschadenfrequenzen und -durchschnitte . . . . .	160
4.19. Case Study: Perzentilgraphen der zentrierten Residuen und des Prozessrisikos für die Schadenfrequenzen und -durchschnitte der Basisschäden . . . . .	165
4.20. Case Study: Perzentilgraphen des Parameter- und Vorhersagerisikos für die prognostizierten Schadenfrequenzen und -durchschnitte der Basisschäden . .	168
4.21. Case Study: Perzentilgraphen des Vorhersagerisikos für die Gesamtschadenlast	171
4.22. Case Study: Perzentilgraphen des Brutto- und Netto-Anfalljahresergebnisses sowie der zedierten Zahlungen des RVU . . . . .	173
4.23. Case Study: Diskontierter Brutto- und Netto-Risikokapitalbedarf als VaR zum Sicherheitsniveau 99,5% und als TVaR zum Sicherheitsniveau 99,0% . .	174
4.24. Case Study: Perzentilgraphen des Vorhersagerisikos für den diskontierten Netto-Risikokapitalbedarf als VaR zum Sicherheitsniveau 99,5% . . . . .	175
4.25. Case Study: Vergleich zwischen der dem Standardmodell zugrunde liegenden Annahmen und dem unternehmenseigenen Ansatz . . . . .	177
4.26. Case Study: Komponenten des erwarteten Brutto-Anfalljahresergebnisses . .	181

# Tabellenverzeichnis

3.1.	Solvency II-Standardmodell: Korrelationsmatrix zur Aggregation der Risikomodule zur Basissolvenzkapitalanforderung . . . . .	81
3.2.	Case Study: Aufteilung des Gesamtschadens bei XL-Rückversicherung . . . . .	108
4.1.	Case Study: Zusammensetzung der Solvenzkapitalanforderung des Prämien- und Reserverisikos . . . . .	115
4.2.	Case Study: Zusammensetzung der Solvenzkapitalanforderung des vt. Risikos Nicht-Leben . . . . .	117
4.3.	Case Study: Zusammensetzung der Solvenzkapitalanforderung des Marktrisikos . . . . .	118
4.4.	Case Study: Zusammensetzung der Basissolvenzkapitalanforderung . . . . .	119
4.5.	Case Study: Solvenzbilanz . . . . .	120
4.6.	Case Study: Schadenindex . . . . .	127
4.7.	Case Study: Schadenindexfaktoren je Anfall- und Abwicklungsjahr . . . . .	128
4.8.	Case Study: Deskriptive Kennzahlen der inflationsbereinigten Ultimate-Schadenaufwände der Einzelschäden ab 100 TEUR . . . . .	130
4.9.	Case Study: Großschäden oberhalb von 1 Mio. EUR . . . . .	134
4.10.	Case Study: KH-Dreieck der Schadenanzahlen der Großschäden oberhalb von 1 Mio. EUR . . . . .	140
4.11.	Case Study: Großschadenanzahl (Exposure-gewichteter Ultimate-Stand) oberhalb von 1 Mio. EUR . . . . .	140
4.12.	Case Study: G-Test für Großschadenanzahl (Exposure-gewichteter Ultimate-Stand) oberhalb von 1 Mio. EUR . . . . .	142
4.13.	Case Study: Empirische Bootstrap-Verteilung des Parameter- und Vorhersagerisikos für die Großschadenanzahlen . . . . .	145
4.14.	Case Study: Deskriptive Kennzahlen des Prozess-, Parameter- und Vorhersagerisikos für die Großschadenanzahlen . . . . .	147
4.15.	Case Study: Empirische Bootstrap-Verteilung des Parameterrisikos für die Brutto-Großschadenhöhen . . . . .	148
4.16.	Case Study: Deskriptive Kennzahlen des Prozess-, Parameter- und Vorhersagerisikos (brutto und netto) für die Großschadenhöhen . . . . .	149
4.17.	Case Study: Empirische Bootstrap-Verteilung des Vorhersagerisikos für die Brutto-Großschadenhöhen . . . . .	150
4.18.	Case Study: Deskriptive Kennzahlen des Prozess- und Vorhersagerisikos (brutto und netto) für den Jahresgesamtschaden der Großschäden . . . . .	151
4.19.	Case Study: Entwicklung des Exposures und schadenbasierter Brutto-Kennzahlen der Basisschäden . . . . .	155

4.20.	Case Study: Empirische Bootstrap-Verteilung des Parameter- und des Vorhersagerisikos für die Schadenfrequenzen und -durchschnitte der Basisschäden	166
4.21.	Case Study: Deskriptive Kennzahlen des Parameterrisikos für die Schadenfrequenzen und -durchschnitte der Basisschäden . . . . .	166
4.22.	Case Study: Deskriptive Kennzahlen des Vorhersagerisikos für die Schadenfrequenzen und -durchschnitte und für den Ultimate der Basisschäden . . . . .	168
4.23.	Case Study: Deskriptive Kennzahlen des Vorhersagerisikos für die Gesamtschadenlast . . . . .	170
4.24.	Case Study: Deskriptive Kennzahlen des Vorhersagerisikos für das Anfalljahresergebnis . . . . .	172
4.25.	Case Study: Deskriptive Kennzahlen des Vorhersagerisikos für den diskontierten Netto-Risikokapitalbedarf als VaR zum Sicherheitsniveau 99,5% . . . . .	175
A.1.	Solvency II-Standardmodell: Korrelationsmatrix zur Aggregation der Risikosubmodule zum Marktrisiko . . . . .	189
A.2.	Solvency II-Standardmodell: Korrelationsmatrix zur Aggregation der Risikosubmodule zum vt. Risiko Leben . . . . .	190
A.3.	Solvency II-Standardmodell: Korrelationsmatrix zur Aggregation der Risikosubmodule zum vt. Risiko Nicht-Leben . . . . .	191
A.4.	Solvency II-Standardmodell: Geschäftsbereiche und Risikofaktoren für das Prämien- und Reserverisiko im vt. Risiko Nicht-Leben . . . . .	192
A.5.	Solvency II-Standardmodell: Korrelationsmatrix zur Aggregation der Geschäftsbereiche für das Prämien- und Reserverisiko im vt. Risiko Nicht-Leben	192
A.6.	Solvency II-Standardmodell: Korrelationsmatrix zur Aggregation der Risikosubmodule zum vt. Risiko Kranken . . . . .	193
A.7.	SST-Standardmodell: Geschäftsbereiche im vt. Risiko für Nicht-Lebensversicherer . . . . .	194
A.8.	SST-Standardmodell: Korrelationsmatrix bezüglich der Geschäftsbereiche für Basisschäden im vt. Risiko für Nicht-Lebensversicherer . . . . .	195
A.9.	SST-Standardmodell: Variationskoeffizienten für Basisschäden im vt. Risiko für Nicht-Lebensversicherer . . . . .	195
A.10.	SST-Standardmodell: Charakteristischer Index der Pareto-Verteilung für Großschäden im vt. Risiko für Nicht-Lebensversicherer . . . . .	196
A.11.	US-Solvency: Geschäftsbereiche und Risikofaktoren für das Prämienrisiko im Underwriting Risk . . . . .	197
B.1.	Schockfaktoren unter Solvency II bezüglich der risikolosen Zinsstrukturkurve	199
B.2.	Risikolose und geschockte Zinsstrukturkurven unter Solvency II zum Bewertungsstichtag 31.12.2016 . . . . .	200
C.1.	Case Study: Prämien- und Bestandsentwicklung . . . . .	201
C.2.	Case Study: Kostenentwicklung . . . . .	202
C.3.	Abwicklungsdreieck inkrementeller Schadenzahlungen . . . . .	202
C.4.	Case Study: KH-Dreieck der Schadenanzahlen . . . . .	204
C.5.	Case Study: KH-Paid-Dreieck der kumulierten Brutto-Schadenzahlungen . . . . .	204

---

C.6.	Case Study: KH-Incurred-Dreieck der Brutto-Schadenaufwendungen . . . . .	204
C.7.	Case Study: Geschätzte zukünftige (nominale bzw. diskontierte) Schaden- zahlungen . . . . .	207
C.8.	Case Study: Entwicklung der direkt zuzurechnenden und indirekt zuzurech- nenden Schadenregulierungskosten . . . . .	208
C.9.	Case Study: Entwicklung schadenbasierter Brutto-Kennzahlen . . . . .	208
C.10.	Case Study: Volumenmaße des Prämienrisikos . . . . .	209
C.11.	Case Study: Ermittlung der Solvenzkapitalanforderung des Zinsrisikos . . . .	211
C.12.	Case Study: Ermittlung der Solvenzkapitalanforderung des Aktienrisikos . .	212
C.13.	Case Study: Zukünftige (nominale bzw. diskontierte) Solvenzkapitalanforde- rung des Referenzunternehmens . . . . .	216
C.14.	Case Study: Maximum-Likelihood Schätzer und Standardfehler für die Pa- rameter der GPD in Abhängigkeit des Thresholds . . . . .	217
C.15.	Case Study: KH-Dreieck der Basisschadenanzahlen . . . . .	218
C.16.	Case Study: KH-Paid-Dreieck der kumulierten Brutto-Basisschadenzahlungen	218
C.17.	Case Study: KH-Incurred-Dreieck der Brutto-Basisschadenaufwendungen . .	218



# 1. Einleitung

Die heute für die Aufsicht der Banken und Versicherungsunternehmen zuständige Bundesanstalt für Finanzdienstleistungsaufsicht (BaFin) kann ihre heutigen Tätigkeiten und Zuständigkeiten auf eine mehr als 100-jährige Entwicklung zurückführen, in der die staatliche Regulierung und Aufsicht der Versicherungswirtschaft aufgrund deren großer volkswirtschaftlichen Bedeutung eine wichtige Rolle spielte.

Aus der Chronik der BaFin gemäß [BaFin16] kristallisieren sich einige wichtige Meilensteine in dieser Historie heraus; so auch der Zusammenbruch der Frankfurter Allgemeinen Versicherungsaktiengesellschaft im Jahre 1929. Der damit einhergehende Ruf nach mehr staatlicher Aufsicht für die Versicherungsunternehmen und die Änderungen an der bis dahin bestehenden Gesetzgebung mündeten 1931 im Versicherungsaufsichtsgesetz (VAG). Die Behörde, die von nun an die Versicherungsaufsicht innehatte, war das Reichsaufsichtsamt für das Versicherungs- und Bausparwesen. 1951 wurde per Gesetz das Bundesaufsichtsamt für das Versicherungs- und Bausparwesen (BAV) errichtet, das für die Aufsicht der privaten Versicherungsunternehmen und die öffentlich-rechtlichen Wettbewerbsversicherungsunternehmen, die in mehr als einem Bundesland tätig waren, zuständig war.

Die Aufsichtsgesetze, die heute bekannt sind, basieren allerdings hauptsächlich auf Entwicklungen auf europäischer Ebene. So wurden in den 1970er und 1980er Jahren EG-weit Harmonisierungen und Regelungen für die Versicherungstätigkeit in den EG-Mitgliedsstaaten erlassen. Diese prägten auch die Aufsichtstätigkeit des BAV. Mit der Versicherungsbilanzrichtlinie im Jahre 1991 sowie den Koordinierungsrichtlinien für die Schaden- und Lebensversicherung, die durch den Ministerrat der Europäischen Gemeinschaft im Jahre 1992 verabschiedet wurden, wurde das Aufsichtswesen über die Versicherungsunternehmen nahezu vereinheitlicht. Ein logischer Schritt war dann 1994 die Gründung eines einheitlichen europäischen Binnenmarktes für das Versicherungswesen.

Nach [GDV93] und [AW99] ging neben der Liberalisierung des Versicherungsmarktes in Form von mehr Wettbewerb und einer größeren Produktvielfalt allerdings auch eine Deregulierung einher, indem staatliche Eingriffsmöglichkeiten in den Versicherungsmarkt abgebaut wurden. So wurde beispielsweise das Sitzlandprinzip eingeführt, wonach ein Versicherungsunternehmen mit Sitz in einem Mitgliedsstaat des Europäischen Wirtschaftsraumes ausschließlich von der Aufsicht im Heimatland kontrolliert wird. In Deutschland übernahm demnach die BaFin, die am 1. Mai 2002 aus dem Zusammenschluss des BAV, des Bundesaufsichtsamtes für das Kreditwesen und des Bundesaufsichtsamtes für den Wertpapierhandel hervorgegangen ist, alle aufsichtsrechtlichen Tätigkeiten. Eine weitere Neuerung, die aus der Gründung des einheitlichen europäischen Binnenmarktes resultierte und direkte Auswirkungen auf das VAG

hatte, war die Abschaffung jeglicher Vorabgenehmigung der Allgemeinen Versicherungsbedingungen und der Tarife. Die präventive Kontrolle sowohl der Bedingungen als auch der Tarife entfiel damit und gab den Versicherungsunternehmen Räume für individuelle Produktgestaltungen und Preise. Folglich wurden deshalb die Anforderungen an die Kalkulationsverfahren und die zugrunde liegenden Daten erhöht, wodurch die Bedeutung der Tarifierung deutlich zunahm und damit mathematische Modelle Einzug erhielten.

Trotz Liberalisierung und Deregulierung wurde die Solvenz aller am Finanzmarkt aktiven Akteure gefordert: sie sollten über ausreichende Eigenmittel verfügen, um alle durch sie eingegangenen Verpflichtungen selbst erfüllen zu können. Das Eigenkapital sollte somit als Puffer gegen adverse Geschäftsentwicklungen dienen. Die Forderung nach ausreichendem Eigenkapital wurde unter anderem in den Solvency I-Gesetzen und der damit einhergehenden Reform der Solvabilitätsanforderungen an die in der damaligen EG ansässigen Unternehmen geregelt. Vor dem Hintergrund der Liberalisierung und der Deregulierung sowie der Tatsache, dass mit Basel II die Bankenaufsicht EG-weit weiterentwickelt wurde, gab die Europäische Kommission im Jahre 1999 mit der Entscheidung, die Finanzaufsicht über Versicherungsunternehmen grundlegend zu überarbeiten, den Startschuss für das Solvency II-Projekt. Die Dringlichkeit zur Schaffung eines EU-weiten aufsichtsrechtlichen Rahmens zur Ausstattung der Unternehmen mit ausreichendem Eigenkapital zeigte sich auch in der Finanzmarktkrise, die ihren Höhepunkt im Jahre 2008 in der Insolvenz der US-amerikanischen Bank Lehman Brothers fand. Wiederum wurde deutlich, dass die Solvenz von Banken und Versicherungen von immenser Bedeutung für die gesamte Stabilität des Finanzsektors ist.

Vor diesem Hintergrund beschäftigt sich die vorliegende Arbeit mit der Modellierung des Prämienrisikos in der Schaden-/Unfallversicherung im Kontext aufsichtsrechtlicher Anforderungen und unternehmensspezifischer Ansätze aus der Perspektive eines deutschen Monoliners im Bereich der Kraftfahrt-Haftpflichtversicherung. Der hierfür im aktuellen Standardmodell unter Solvency II verwendete Ansatz zur Abbildung des Prämienrisikos ist Faktor-basiert. Es ist deshalb fraglich, ob das Standardmodell angemessen umgesetzt wird und auf diese Weise das Risikoprofil eines Unternehmens entsprechend erfasst werden kann oder ob es aus Gründen der Praktikabilität zu einfach umgesetzt wird. Aus versicherungswirtschaftlicher Sicht hat Doff in [Dof08] die allgemeinen unter Solvency II vorgegebenen Rahmenbedingungen anhand von sieben Kriterien analysiert und bewertet. Holzmüller in [Hol09] hat dies aufgegriffen, die Kriterien um vier weitere ergänzt und auf dieser Basis das europäische Regelwerk mit dem der Schweiz und der USA verglichen. Darauf aufbauend hat Doff in [Dof16] seine Analyse aus 2008 überarbeitet und anhand von zwölf Kriterien die Wirksamkeit von Solvency II bewertet und dabei Stärken und Schwächen herausgearbeitet.

Aus dem aktuariellen Blickwinkel vergleicht Gisler in [Gis09] das Standardmodell im Schweizer Solvenztest mit dem damaligen Stand des europäischen Aufsichtsregelwerks unter Solvency II und beschränkt sich dabei auf das versicherungstechnische Risiko. Einen aktuariellen Vergleich der Standardmodelle in den USA, Kanada und Europa sowie eine Fallstudie zur Berechnung der Kapitalanforderungen gemäß dieser Standardmodelle für ein privates Portfolio in der Kraftfahrt-Haftpflichtversicherung leisten Sharara, Hardy und Saunders in [SHS10]. Clemente in [Cle18] vergleicht die Vorschläge zur Berücksichtigung von Schadenexzedenten in den *Quantitative Impact Studies 5* mit der Delegierten Verordnung und arbeitet aufgrund der

---

Schwäche des Faktors zur Berücksichtigung von nicht-proportionaler Rückversicherung einen Verbesserungsvorschlag für das Standardmodell aus. In der vorliegenden Arbeit hingegen ist eine Untersuchung des Prämienrisikos der Standardmodelle in der EU, der Schweiz und den USA aus aktuarieller Perspektive von Interesse. Dabei werden insbesondere Parallelen und Unterschiede zum Swiss Solvency Test aufgezeigt.

Diese Arbeit untersucht vor diesem Hintergrund, welches Potential ein individuelles, unternehmensspezifisches Modell zum Prämienrisiko im Vergleich zum Standardmodell besitzt. Aus versicherungswirtschaftlicher Sicht hat Höppener in [Höp10] ein einfaches internes Modell für ein Beispiel-Versicherungsunternehmen entwickelt und erörtert, welche Möglichkeiten dieses einerseits zur Unternehmenssteuerung bietet und wie es andererseits mit den aufsichtsrechtlichen Kapitalanforderungen zu verknüpfen ist. In diesem Zusammenhang analysiert Hübel in [Hüb13], inwiefern das Solvency II-Standardmodell in eine wertorientierte Unternehmenssteuerung integriert werden kann. Auch aus der aktuariellen Perspektive heraus bietet die Literatur zum Thema interne Modellierung einige Veröffentlichungen. Während Christiansen und Niemeyer in [CN14] mathematisch die Gemeinsamkeiten und Unterschiede verschiedener Interpretationen der Solvenzkapitalanforderungen eingebettet in einem Modellrahmen analysieren und den Begriff der Solvenzkapitalanforderung auch für zukünftige Zeitpunkte verallgemeinern, zeigt zum Beispiel Liewein in [Lie06] in einer Case Study, dass sich interne Modelle nicht nur zur Erfüllung aufsichtsrechtlicher Anforderungen, sondern auch zur wert- und risikoorientierten Unternehmenssteuerung eignen. Diers in [Die07b] und die Arbeitsgruppe Interne Risikomodelle der Deutschen Aktuarvereinigung in [DGVFM08] haben im Sinne eines Best Practice Ansatzes am Beispiel der bekannten „Feldafinger Brandkasse“ ein umfassendes stochastisches internes Modell zur wert- und risikoorientierten Unternehmenssteuerung entwickelt.

Außerdem haben sich verschiedene Autoren mit der Modellierung einzelner Risikomodule beschäftigt: Angefangen von der strategischen Asset-Allokation für ein Lebensversicherungsunternehmen im Kontext klassischer Portfoliotheorie unter Solvency II (Braun, Schmeiser und Schreiber in [BSS15]), über die Abbildung des Kredit-, Aktien- und Zinsänderungsrisikos (Gatzert und Martin in [GM12]) sowie des Spreadrisikos (Ahlin in [Ahl12]) bis hin zu den versicherungstechnischen Risiken. Hier präsentiert Diers im Bereich der Messung und Bewertung von Katastrophenrisiken in [Die09] zwei Ansätze zur Modellierung von Katastrophenschäden am Beispiel von Sturmereignissen, wobei das erste Verfahren *Event Loss Tables* verarbeitet und der zweite mathematisch-statistische Informationen über bestimmte Wiederkehrperioden nutzt. Für das Themenfeld des Reserverisikos gibt es eine Vielzahl an Veröffentlichungen, wie zum Beispiel Ohlsson und Lauzenings in [OL09], die einen Simulationsansatz für das einjährige Reserverisiko präsentieren und Alm in [Alm15], der den Einfluss von Trends in den ultimativen Schadenaufwänden auf die Höhe der Solvenzkapitalanforderung untersucht.

Das Prämienrisiko, das im Mittelpunkt der vorliegenden Arbeit steht, wird in der Literatur jedoch wenig diskutiert. Clemente und Savelli setzen in [CS13] zur Berechnung der Kapitalanforderung ein risikothoretisches Modell auf Basis des kollektiven Modells für den Gesamtschaden ein und ziehen einen Vergleich zu den Ergebnissen aus dem Solvency II-Standardmodell. In diesem Kontext stellen Clemente und Savelli in [CS17] darüber hinaus

fest, dass die Annahmen, die dem Prämien- und Reserverisiko im Solvency II-Standardmodell zugrunde liegen, insbesondere für kleine Versicherungsunternehmen zu einer Unterschätzung der entsprechenden Solvenzkapitalanforderung führen können. In der Literatur gilt der Fokus innerhalb des Prämienrisikos fast ausschließlich der Modellierung der Großschäden. Wie etwa Embrechts, Klüppelberg und Mikosch in [EKM97] sowie Klugman, Panjer und Willmot in [KPW12] präsentieren, wird basierend auf der klassischen Herangehensweise der Extremwerttheorie für die Großschäden ein kollektives Modell angenommen. Bereits 2010 veröffentlichten Pérez-Fructuoso und García Pérez ein Papier ([PG10]) zur Modellierung von Großschäden in der Kraftfahrt-Haftpflichtversicherung zweier spanischer Versicherungsunternehmen. Clemente, Savelli und Zappa stellen in diesem Kontext in [CSZ14] die Parameterschätzung über die Minimum-Distance-Methode in den Vordergrund. Stattdessen wählt Valecký in [Val17] einen alternativen Ansatz durch verallgemeinerte lineare Modelle und stellt die Ergebnisse dem klassischen Ansatz gegenüber.

Bezüglich dieser Veröffentlichungen wird deutlich, dass sich bereits einige Autoren mit der internen Modellierung einzelner Risikomodule sowie im Besonderen mit Teilaspekten des Prämienrisikos beschäftigt haben; jedoch diskutiert keine dieser Publikationen ein vollumfängliches internes Modell zum Prämienrisiko. Die vorliegende Arbeit schließt diese Lücke, indem ein unternehmenseigenes Modell zur Abbildung des Prämienrisikos anhand einer Fallstudie für ein fiktives Versicherungsunternehmen – einen deutschen Monoliner im Bereich der Kraftfahrt-Haftpflichtversicherung – entwickelt und in einen mathematischen Rahmen eingebettet wird. Dabei wird das Vorhersagerisiko und damit das Parameterrisiko sowohl von Groß- als auch von Basisschäden in einem stochastischen Simulationsmodell dargestellt. Mit dem Parameterrisiko beschäftigen sich bis dato nur wenige Veröffentlichungen; so Diers in [Die07a] mit einem allgemeinen Diskurs zur Bedeutung des Parameterrisikos in internen Modellen der Schaden- und Unfallversicherer, Diers und Linde in [DEL13] mit Ansätzen zur Modellierung des Parameterrisikos sowie Fröhlich und Weng in [FW17] mit dem Parameterrisiko im Rahmen des Reserverisikos.

Neben der Erfüllung von sowohl aufsichtsrechtlichen Weisungen als auch von Anforderungen aus der Unternehmenssteuerung soll das in dieser Arbeit entwickelte Modell spartenspezifische Besonderheiten berücksichtigen, die dem individuellen Risikoprofil des Unternehmens gerecht werden. Dazu zählt eine möglichst realitätsnahe Darstellung der Rückversicherungsstruktur, um die Wirkungsweise des Rückversicherungsprogramms adäquat abzubilden, vor allem die Berücksichtigung der in den Longtail-Sparten vereinbarten Stabilisierungsklausel. In diesem Zusammenhang haben Drieskens, Henry, Walhin und Wielandts in [Dri+12] den Fokus auf die stochastische Projektion einzelner Großschäden gelegt. Hingegen wird in der weiteren Literatur vornehmlich die Frage nach einer optimalen Rückversicherung diskutiert, so etwa bei Brandtner und Kürsten in [BK14] sowie Asimita, Chi und Hu in [ACH15].

Darüber hinaus sollen die resultierenden Ergebnisverteilungen des in dieser Arbeit entwickelten unternehmensindividuellen Modells, die die Basis zur Ermittlung von deskriptiven Kennzahlen und Profitabilitätskennzahlen bilden, Flexibilität in der Wahl des Risikomaßes und des Sicherheitsniveaus gewährleisten. Die Auswirkungen der Wahl des Risikomaßes wird in zahlreichen Veröffentlichungen untersucht. Schmeise, Siegel und Wagner erforschen in [SSW12] in einer Sensitivitätsanalyse den Einfluss verschiedener Risikomaße im Kontext

---

einer Fehlspezifikation des Modells auf die Höhe der Kapitalanforderung und Boonen in [Boo17] die Auswirkungen für ein Lebensversicherungsunternehmen, sofern die Risikomodule auf Basis des Expected Shortfalls kalibriert werden. Andere Autoren wie Zec beschäftigen sich in [Zec12] mit der Allokation von Risikokapital bei Verwendung verschiedener Risikomaße in internen Modellen; Bermúdez, Ferri, und Guillén untersuchen in [BFG14] die Beziehung zwischen Abhängigkeitsstrukturen, der Wahl des Risikomaßes und der resultierenden Risikokapitalanforderung. Insbesondere zu Abhängigkeitsstrukturen und Risikoaggregation wurden viele Arbeiten veröffentlicht. So lassen sich Werke wie [PS08] von Pfeifer und Strassburger sowie [BG17] von Bølviken und Guillen zur adäquaten Berücksichtigung schiefer Verteilungsfunktionen in der Aggregationsformel unter Solvency II sowie [PSP09] von Pfeifer, Strassburger und Philipp zur Modellierung und Monte-Carlo-Simulation hochdimensionaler Risiken auf Basis von Bernstein-Copulas zu Rate ziehen. Devineau und Loisel haben sich in [DL09] mit der Frage auseinandergesetzt, wie in Bezug auf die Risikoaggregation die Ergebnisse des Standardmodells zu den Ergebnissen einer internen Modellierung passen. Hürlimann in [Hür10] sowie Bermúdez, Ferri und Guillén in [BFG13] beschäftigen sich speziell mit der im Solvency II-Standardmodell getroffenen Annahme von konstanten Korrelationskoeffizienten zwischen den Geschäftsbereichen im Kontext des Reserverisikos.

Aus diesem Überblick über die bereits bestehenden Veröffentlichungen wird deutlich, dass es bereits einige Publikationen gibt, in denen es um die unterschiedlichsten Aspekte des Zusammenspiels von aufsichtsrechtlichen Forderungen und einer wert- und risikorientierten Unternehmensteuerung geht; dies auch im Kontext des Solvency II-Standardmodells oder sogar im Kontext von internen Modellen. Keine dieser Publikationen beschäftigt sich jedoch mit einer vollumfänglichen Analyse des Prämienrisikos im Rahmen eines unternehmenseigenen Modells im Vergleich zum Solvency II-Standardmodell. Mit der Entwicklung dieses Modells zur Abbildung des Prämienrisikos für ein fiktives deutsches Unternehmen im Bereich der Kraftfahrt-Haftpflichtversicherung leistet die vorliegende Arbeit deshalb einen wertvollen Beitrag in diesem Bereich.

Um dieses unternehmensspezifische Modell mathematisch einordnen zu können, werden zunächst in Kapitel 2 die dazu benötigten mathematischen und aktuariellen Grundlagen dargestellt. Im Rahmen der Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie wird der Begriff des Risikos eingeführt und durch die Anwendung eines Risikomaßes quantifiziert. Anschließend werden die Risikomaße Value at Risk, Tail Value at Risk sowie Expected Shortfall vor dem Hintergrund der Kohärenz-Axiomatik erläutert. Bei der Aggregation von Risiken unter Berücksichtigung von Diversifikation werden sowohl die Abhängigkeitskonzepte der Korrelation als auch der Copula vorgestellt. Danach wird in Bezug auf die Modellierung des Gesamtschadens die Theorie des Kollektiven Modells herangezogen und erklärt. Nach einem grundsätzlichen Abschnitt zum Thema Modellierung und ihren Risikoquellen wird die Klasse der heavy-tailed und subexponentiellen Verteilungen vorgestellt, die sich aufgrund ihrer Eigenschaften zur Modellierung der Schadenhöhen im Kontext der oben genannten Case Study eignen. Schließlich werden zur Modellierung von Extremwerten die Grundlagen der Extremwerttheorie gelegt, wobei der Schwerpunkt auf der Theorie der Threshold-Überschreitungen liegt. Kapitel 2 endet mit den Grundlagen der Rückversicherung.

Motivation für die Entwicklung eines unternehmensindividuellen Modells ist die Frage, ob die

Standardformel zur Ermittlung der Solvenzkapitalanforderung für das Prämienrisiko unter Solvency II im Vergleich zum Swiss Solvency Test und unter US-Solvency angemessen umgesetzt ist und sich zu einer wert- und risikoorientierten Unternehmenssteuerung eignet oder aus Gründen der Praktikabilität zu einfach implementiert ist. Daher wird in Kapitel 3 die Abbildung des Prämienrisikos in den genannten Standardmodellen zunächst vorgestellt und anschließend aus versicherungswirtschaftlicher Perspektive und aus aktuarieller Sicht vergleichend analysiert. Der Fokus richtet sich dabei auf die Modellauswahl, die Berücksichtigung des Vorhersagerisikos und den Risikotransfer durch proportionale und nicht-proportionale Rückversicherung. Weiterhin wird die Abbildung von Abhängigkeitsstrukturen durch Korrelation in Verbindung mit Diversifikationseffekten sowie die Wahl des Value at Risk als Risikomaß beurteilt.

In Kapitel 4 wird schließlich anhand einer Case Study das unternehmensspezifische Modell zur Abbildung des Prämienrisikos für den fiktiven deutschen Monoliner im Bereich der Kraftfahrt-Haftpflichtversicherung entwickelt und in einen mathematischen Rahmen eingebettet. Auf Basis der Theorie der Threshold-Überschreitungen wird das Vorhersagerisiko von Groß- und Basisschäden separat voneinander modelliert. Für die Großschäden oberhalb eines geeigneten zu wählenden Thresholds wird ein kollektives Modell angenommen, wobei bezüglich der Anzahl der Großschadenfälle eine Poisson-Verteilung unterstellt wird, die unabhängig von der i.i.d. Folge der Ultimate-Schadenaufwände sei. Es wird gezeigt, dass diese einer verallgemeinerten Pareto-Verteilung genügen. Der ultimative Basisschadenaufwand wird über einen Frequency-Severity-Ansatz modelliert, wobei für die Schadenfrequenzen und -durchschnitte jeweils ein klassisches lineares Regressionsmodell unterstellt wird. Sowohl für das Groß- als auch für das Basisschadenmodell erfolgt die Beurteilung der Anpassungsgüte auf Basis statistischer Testverfahren. Schließlich wird das Parameterrisiko über ein Bootstrapping-Verfahren in einer Monte-Carlo-Simulationsstudie abgebildet. Anhand der Ergebnisse für das unternehmensindividuelle Modell in der Fallstudie werden die Anforderungen an das Modell sowie dessen Leistungsfähigkeit analysiert und den Resultaten nach dem Solvency II-Standardmodell aus aktuariellem Blickwinkel gegenübergestellt.

Die Arbeit endet in Kapitel 5 mit einem Fazit und Ausblick. Dabei wird diskutiert, welche Relevanz das unternehmenseigene Modell in der Praxis für die Versicherungsunternehmen hat. Darüber hinaus wird aus mathematischer Sicht erörtert, an welchen Stellen das Modell erweitert werden kann.

## 2. Aktuarielle Grundlagen

Für die vorliegende Arbeit werden zunächst die aktuariellen Grundlagen gelegt sowie die damit einhergehende Notation eingeführt.

Die Frage „Was ist Versicherung?“ beantwortet [Alb92] wie folgt:

*„Versicherung ist der planmäßige Transfer und die planmäßige Transformation der Risiken von Wirtschaftseinheiten gegen Entgelt auf der Grundlage von Gesetzen und Methoden der Stochastik (Wahrscheinlichkeitstheorie auf der Modellebene und Statistik zur Modellspezifizierung) durch Konsolidierung des kollektiven Risikoausgleichs.“*

Das Versicherungsprinzip basiert auf dem sogenannten *Ausgleich im Kollektiv*. Die Zusammenfassung mehrerer Einzelrisiken zu einem Kollektiv (Bestand, Portefeuille) führt dazu, dass die durchschnittliche Schadenbelastung pro Risiko im Allgemeinen kleiner ist als die mögliche Schadenbelastung jedes Einzelrisikos im Bestand. Gemeint ist damit die Tatsache, dass sich im Kollektiv günstige und ungünstige Schadenverläufe im Vergleich zum individuellen Schadenverlauf der Risiken kompensieren. Der Ausgleich im Kollektiv ist gewährleistet, sofern es sich um einen homogenen Bestand handelt, dessen Risiken stochastisch unabhängig sind.

Für die idealtypische Situation stochastisch unabhängiger und identisch verteilter Einzelrisiken führt [Mac02] den Nachweis mit dem *Gesetz der großen Zahlen*. In diesem Zusammenhang wird das Gesetz der großen Zahlen häufig auch als *Produktionsgesetz der Versicherungstechnik* bezeichnet, denn:

In seiner „schwachen“ Formulierung besagt es, dass die arithmetischen Mittel einer Folge von Zufallsvariablen nach Wahrscheinlichkeit gegen ihren Erwartungswert konvergieren. Bezogen auf den Gesamtschaden eines Einzelrisikos bedeutet dies, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Gesamtschaden seinen Erwartungswert um mehr als 100% übersteigt, mit wachsender Größe des Kollektivs immer kleiner wird. In seiner „starken“ Formulierung, die besagt, dass die arithmetischen Mittel einer Folge von Zufallsvariablen fast sicher gegen ihren Erwartungswert konvergieren, zeigt es gleich zweierlei:

- (i) Der Erwartungswert der individuellen Versicherungsleistungen ist ein fairer Preis für die Übernahme der Risiken, da bei unabhängiger Wiederholung die durchschnittliche Zahlung mit Wahrscheinlichkeit 1 gegen den Erwartungswert konvergiert.
- (ii) Der unbekannte Erwartungswert kann durch Bildung eines möglichst großen Kollektivs von unabhängigen, identisch verteilten Risiken geschätzt werden, um dem Erwartungswert durch das arithmetische Mittel möglichst nahe zu kommen.

Die Forderung nach Homogenität eines Bestandes führt zwangsläufig zur Frage der Segmentierung von Risiken. Eine offensichtliche Zusammenfassung von Risiken zu einem Bestand erfolgt bereits anhand von Versicherungssparten und weiter in Versicherungsarten. Darüber hinaus können weitere Ausprägungen von Tarifmerkmalen herangezogen werden. Hierbei entsteht ein grundsätzlicher Zielkonflikt: auf der einen Seite erfordert die Erreichung eines bestimmten Homogenitätsgrades die Bildung kleiner Bestände, während gerade das Gesetz der großen Zahlen im Hinblick auf Stabilität die Bildung großer Bestände fordert. Diese Ziele gilt es gegeneinander abzuwägen.

Folglich sind in der Praxis große Kollektive nicht völlig homogen; dennoch ist auch dann ein *Ausgleichseffekt* möglich, der allerdings nicht derart ausgeprägt ist, als es im Idealfall von vollständig unabhängiger und identisch verteilter Risiken der Fall ist. Zur Sicherstellung des Ausgleichs im Kollektiv sind die (Rück-)Versicherungsunternehmen (VU) bestrebt, die eingegangenen Risiken zu steuern. Dies gelingt durch Vermeidung, Reduktion und Übertragung von Risiken.

Im Folgenden wird der Fokus auf die Nicht-Lebensversicherung, speziell auf die Sachschadenversicherung, gerichtet sein. Insbesondere stehen Modelle und Methoden zur quantitativen Beschreibung von Nicht-Lebensversicherungen im Vordergrund, bei denen der Zeitpunkt des Eintretens eines Versicherungsfalles und die Höhe der Versicherungsleistung zufällige Größen darstellen. Während der Vertragslaufzeit können somit eine zufällige Anzahl an Ereignissen auftreten. Um diesem Sachverhalt gerecht zu werden, werden Risiken eines VUs in Form von Zufallsvariablen modelliert.

In der Literatur existieren diverse Risikobegriffe. Für die vorliegende Arbeit wird *Risiko* aus wahrscheinlichkeitstheoretischer Sicht betrachtet: es wird als Ergebnis eines Zufallsexperiments aufgefasst und beschreibt die Unsicherheit bezüglich der Auswirkungen wirtschaftlichen Handelns. Mögliche Realisationen sind Geldbeträge. Für eine Vielzahl unterschiedlicher Risikoklassen seien beispielhaft Personenschäden im Segment der Kraftfahrt-Haftpflichtversicherung (KH) und reine Sachschäden, z. B. durch Feuer oder Naturkatastrophen verursacht, als Vertreter versicherungstechnischer Risiken sowie Zinsänderungs- und Fremdwährungsrisiken als Vertreter von Marktrisiken genannt.

Von besonderem Interesse ist das *versicherungstechnische (vt.) Risiko*, das die folgenden Risikokomponenten zusammenfasst:

- *Zufalls-* oder *Prozessrisiko*: zufällige Ausprägung von Anzahl und Höhe des eingetretenen Schadens trotz vollständiger Information
- *Irrtums-* oder *Parameterrisiko*: systematische Abweichung in Anzahl und/ oder Höhe des Schadens wegen unvollständiger Information
- *Änderungsrisiko*: Veränderung in der Risikocharakteristik.

Die genannten Unsicherheitsquellen können allerdings nur gedanklich getrennt werden und manifestieren sich stets gemeinsam. Insbesondere wird jedoch das Zufallsrisiko durch Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ergebnismöglichkeiten charakterisiert. Hiermit ist folglich die

Vorstellung verbunden, dass Schäden in einem Versicherungsvertrag wie Realisationen in einem Zufallsexperiment entstehen.

In diesem Kontext erfolgt eine weitere Eingrenzung durch die Unterscheidung zwischen Prämien- und Reserverisiko. Unter *Reserverisiko* ist das Risiko zu verstehen, dass die gebildeten vt. Rückstellungen für die in der Vergangenheit liegenden Schadenfälle nicht ausreichen. *Prämienrisiko* beschreibt das Risiko, dass die vereinnahmten Versicherungsprämien des aktuellen Geschäftsjahres nicht ausreichen, um die bei diesem Geschäft zukünftig anfallenden Schadenkosten und sonstige Kosten abzudecken. Besonderes Augenmerk gilt im Folgenden dem Prämienrisiko.

## 2.1. Maß- und wahrscheinlichkeitstheoretischer Rahmen

Grundlage für die einzuführende Notation aus dem Bereich der Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie bildet [Kle13b].

### Messbare Abbildungen

Sei  $\mathcal{A}$  eine  $\sigma$ -Algebra über  $\Omega \neq \emptyset$ , so bezeichne das Paar  $(\Omega, \mathcal{A})$  einen *Messraum*. Für einen weiteren Messraum  $(\Omega', \mathcal{A}')$  heißt die Abbildung  $X : \Omega \rightarrow \Omega'$   $\mathcal{A} - \mathcal{A}'$ -messbar, falls

$$X^{-1}(A') := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A'\} \in \mathcal{A} \quad \forall A' \in \mathcal{A}'.$$

Bezeichnung:  $X : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\Omega', \mathcal{A}')$ .

### Zufallsvariablen

Sei der Messraum  $(\Omega, \mathcal{A})$  zusätzlich mit einem Wahrscheinlichkeitsmaß  $P : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$  auf  $\mathcal{A}$  versehen, so sei durch  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein *Wahrscheinlichkeitsraum* bezeichnet.  $\Omega$  wird dabei als Menge der Elementarereignisse und  $\mathcal{A}$  als System von beobachtbaren Ereignissen interpretiert.

Allgemein ist eine *Zufallsvariable* eine  $\mathcal{A} - \mathcal{A}'$ -messbare Abbildung  $X : \Omega \rightarrow \Omega'$  auf  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  mit Werten in  $\Omega'$ . Im Folgenden sei  $(\Omega', \mathcal{A}') = (\mathbb{R}, \mathcal{B})$  bzw.  $(\Omega', \mathcal{A}') = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , wobei  $\mathcal{B}^n$  die *Borel'sche  $\sigma$ -Algebra* über  $\mathbb{R}^n$  bezeichne. In diesen Fällen ist von reellen bzw.  $n$ -dimensionalen (oder  $\mathbb{R}^n$ -wertigen) Zufallsvariablen bzw. Zufallsvektoren die Rede. Abkürzend seien für  $A' \in \mathcal{B}$

$$\{X \in A'\} := X^{-1}(A') = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A'\}$$

und

$$P(X \in A') := P(X^{-1}(A')) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A'\})$$

notiert. Die *Verteilung* von  $X$  wird dann durch das Wahrscheinlichkeitsmaß

$$P^X(A') := P(X^{-1}(A')) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A'\})$$

beschrieben.

Für die reelle Zufallsvariable  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  sei durch

$$F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1], x \mapsto P(X \leq x)$$

die *Verteilungsfunktion* bezeichnet.

Ist die Zufallsvariable  $X$  *diskret*, d.h.  $X : \Omega \rightarrow T_X$  besitzt einen endlichen oder abzählbar unendlichen Träger  $T_X := \{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , so werde die Verteilung von  $X$  durch die das Wahrscheinlichkeitsmaß definierende *Zähldichte*  $p_X : T_X \rightarrow [0, 1]$ ,

$$p_X(x_i) := P^X(x_i) = P(X = x_i), \quad \forall x_i \in T_X,$$

beschrieben.

Im Fall einer *stetigen* Zufallsvariablen  $X$ , d.h. die Verteilungsfunktion  $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  besitzt die Gestalt

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$$

für eine integrierbare Funktion  $f_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ := [0, \infty)$ , bezeichne  $f_X$  die *Dichte* (bezüglich des Lebesgue-Maßes) der Verteilung.

Für  $0 < p < 1$  sei

$$x_p := \sup\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) < p\} = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq p\}$$

das *p-Quantil* von  $X$ .

### Die Räume $\mathcal{L}^p$ und $L^p$

$X$  heißt *p-fach P-integrierbar* für  $0 < p < \infty$ , falls  $|X|^p$   $P$ -integrierbar ist. Dann sei durch

$$\mathcal{L}^p(P) := \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, P) = \left\{ X : X : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}), \|X\|_p := \left( \int_{\Omega} |X|^p dP \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}$$

die Menge der reellwertigen  $p$ -fach  $P$ -integrierbaren Zufallsvariablen definiert, wobei im Fall  $p = \infty$  für das *essentielle Supremum* von  $X$  gelte:

$$\|X\|_{\infty} := \operatorname{ess\,sup}_{\omega \in \Omega} |X(\omega)| < \infty.$$

Für  $1 \leq p \leq \infty$  ist  $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein halbnormierter Vektorraum bezüglich  $\|\cdot\|_p$ , wobei  $\|\cdot\|_p$  nicht positiv definit ist. Weiterhin heißt  $N \in \mathcal{A}$  *Nullmenge*, wenn  $P(N) = 0$  gilt. Eine Eigenschaft  $A(\omega)$  gelte *P-fast überall (P-f.ü.)* oder *P-fast sicher (P-f.s.)* auf  $\Omega$ , wenn eine Nullmenge  $N \in \mathcal{A}$  existiert, sodass  $A(\omega)$  für alle  $\omega \notin N$  zutrifft. In diesem Kontext heißen zwei Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  *P-f.ü. gleich*, falls  $P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \neq Y(\omega)\}) = 0$ .

Durch den Übergang von  $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, P)$  auf den Quotientenraum

$$L^p := L^p(P) := L^p(\Omega, \mathcal{A}, P) := \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, P) / \mathcal{N} := \{[X] := X + \mathcal{N} : X \in \mathcal{L}^p\},$$

wobei

$$\mathcal{N} = \{X : X : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}), X = 0 \text{ P-f.s.}\}$$

ein Untervektorraum von  $\mathcal{L}^p$  ist, ist  $L^p$  ein normierter und sogar vollständiger Vektorraum über  $\mathbb{R}$  bezüglich  $\|\cdot\|_p$ . Für  $[X] \in L^p$  hat  $\|X\|_p$  für alle Vertreter  $X \in [X]$  denselben Wert, sodass

$$\|[X]\|_p := \|X\|_p, \quad X \in [X].$$

Obwohl die Räume  $L^p$  keine Funktionen, sondern Äquivalenzklassen fast überall gleicher Funktionen als Elemente besitzen, wird in dieser Arbeit die übliche Vereinfachung herangezogen, anstelle der Klasse  $[X] \in L^p$  stets den zugehörigen Repräsentanten  $X$  zu betrachten.

### Momente und Streuungsmaße

Durch

$$E(X) := \int_{\Omega} X dP = \int_{\Omega} X(\omega) dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}} x dP^X(x) < \infty$$

sei der *Erwartungswert* für eine Zufallsvariable  $X \in L^1(P)$  notiert. Insbesondere gilt für den Erwartungswert im Fall einer diskreten bzw. stetigen Zufallsvariablen:

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot P(X = x_i), \quad x_i \in T_X = \{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N},$$

bzw.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x) dx.$$

Entsprechend sei für  $n \in \mathbb{N}$  und  $X \in L^n(P)$  durch  $E(X^k)$ ,  $k = 1, \dots, n$ , das *k-te Moment*, durch  $E(X - E(X))^k$  das *k-te zentrale Moment* von  $X$  bezeichnet.

Für  $X \in L^2(P)$  sei

$$\text{Var}(X) := E((X - E(X))^2),$$

die *Varianz*,

$$\text{Std}(X) := \sqrt{\text{Var}(X)}$$

die *Standardabweichung*,

$$\text{VKo}(X) := \frac{\text{Std}(X)}{E(X)} = \frac{\sqrt{\text{Var}(X)}}{E(X)}$$

der *Variationskoeffizient* und

$$\gamma(X) := E\left(\left(\frac{X - E(X)}{\text{Std}(X)}\right)^3\right)$$

die *Schiefe*.

### Mehrdimensionale Zufallsvariablen, Kovarianz, Korrelation

Der eingeführte maß- und wahrscheinlichkeitstheoretische Rahmen lässt sich auf Verteilungsfunktion und Momente mehrdimensionaler Zufallsvariablen übertragen. Für den Zufallsvektor  $\mathbf{X} := (X_1, \dots, X_n)^T : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , bezeichne  $P^{\mathbf{X}}$  die *gemeinsame Verteilung* seiner Komponenten  $X_1, \dots, X_n$ , deren Verteilung wiederum als *eindimensionale Randverteilungen* bezeichnet werden. Analog sei durch  $F_{\mathbf{X}}$  die *gemeinsame Verteilungsfunktion* und durch  $f_{\mathbf{X}}$  die *gemeinsame Dichte* notiert.

Sowohl der Erwartungswertvektor als auch der Vektor der Varianzen der Komponenten eines Zufallsvektors sagen lediglich etwas über die einzelnen Komponenten, nichts aber über deren Zusammenhang aus. Der Erfassung von (linearen) Zusammenhängen zwischen eindimensionalen Zufallsvariablen dient die Kovarianz.

Für zwei Zufallsvariablen  $X, Y \in L^1(P)$  mit  $(X \cdot Y) \in L^1(P)$  bezeichne

$$\text{Cov}(X, Y) := E((X - E(X)) \cdot (Y - E(Y)))$$

die *Kovarianz* von  $X$  und  $Y$ . Falls  $\text{Cov}(X, Y) = 0$  ist, heißen  $X$  und  $Y$  *unkorreliert*. Gilt ferner  $0 < \text{Var}(X), \text{Var}(Y) < \infty$ , so sei durch

$$\text{Corr}(X, Y) := \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X) \cdot \text{Var}(Y)}} \in [-1, 1]$$

der *Korrelationskoeffizient* von  $X$  und  $Y$  definiert, durch dessen Normierung Angaben über die Zusammenhänge von Zufallsvariablen vergleichbar sind.

### Stochastische Unabhängigkeit

Eine Familie  $(X_i)_{i \in I}$  von reellen Zufallsvariablen, die

- stochastisch unabhängig,

d.h. für jede endliche Menge  $J \in \mathcal{H}(I)$  und jede Wahl von  $A_j \in \mathcal{B}$ ,  $j \in J$ , gilt

$$P \left( \bigcap_{j \in J} \{X_j \in A_j\} \right) = \prod_{j \in J} P(X_j \in A_j),$$

und

- identisch verteilt, d.h.

$$P^{X_i} = P^{X_j} \quad \forall i, j \in I,$$

sind, werde als *independent identically distributed (i.i.d.)* bezeichnet. Hierbei sei für eine Indexmenge  $I \neq \emptyset$

$$\mathcal{H}(I) := \{J \subset I : 0 < |J| < \infty\}$$

das System der nichtleeren, endlichen Teilmengen von  $I$ .

**Faltung**

Für zwei unabhängige reelle Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  mit Verteilungsfunktionen  $F_X, F_Y$  und Dichten  $f_X, f_Y$  sei die *Faltung* der Verteilungen durch

$$P^{X+Y} = P^X * P^Y$$

notiert, wobei für die Verteilungsfunktion und Dichte von  $X + Y$  gilt:

$$F_X * F_Y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(x-y) \cdot f_Y(y) dy,$$

$$f_X * f_Y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x-y) \cdot f_Y(y) dy.$$

Erzeugende Funktionen bilden aufgrund ihrer Eigenschaften insbesondere im Zusammenhang mit Faltungen von Zufallsvariablen ein nützliches Hilfsmittel. So bezeichne im Fall einer diskreten Zufallsvariablen  $X$  mit Werten in  $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ , d.h.  $P(X \in \mathbb{N}_0) = 1$ ,

$$\psi_X : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto E(z^X) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \cdot P(X = n)$$

die *Erzeugendenfunktion* von  $P^X$ , die für  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| \leq 1$  absolut konvergent ist und mindestens den Konvergenzradius 1 besitzt. Für eine reelle Zufallsvariable  $X$  sei

$$\varphi_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto E(e^{itX})$$

die *charakteristische Funktion* von  $P^X$ . Speziell sei durch

$$M_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto E(e^{tX})$$

die *momenterzeugende Funktion* für diejenigen  $t \in \mathbb{R}$  bezeichnet, für die das Integral existiert.

Dieser Abschnitt schließt mit zwei Beispielen zur Einführung der Poisson- und Pareto-Verteilung, auf die im weiteren Verlauf Bezug genommen wird.

**Beispiel 2.1.** Für  $\lambda \in (0, \infty)$  und eine Zufallsvariable  $N : \Omega \rightarrow \mathbb{N}_0$  mit Zähldichte

$$p_N(k) := P^N(k) = P(N = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

heißt  $P^N =: Poi(\lambda)$  die *Poisson-Verteilung* mit Parameter  $\lambda$ .

Die momenterzeugende Funktion  $M_N$  berechnet sich für  $t \in \mathbb{R}$  zu:

$$\begin{aligned} M_N(t) &= E(e^{tN}) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk} \cdot P(N = k) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \\ &= e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^t \cdot \lambda)^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda e^t} = e^{\lambda(e^t - 1)}. \end{aligned}$$

Der Name der momenterzeugenden Funktion wird aus der Tatsache abgeleitet, dass die  $k$ -ten Ableitungen von  $M_N$  in Null gerade die  $k$ -ten Momente von  $N$  sind,  $k \in \mathbb{N}$ . Für die erste Differentiation nach  $t$  erhält man mit Hilfe von Produkt- und Kettenregel:

$$M'_N(t) = e^{\lambda(e^t-1)} \cdot \lambda \cdot e^t = \lambda \cdot e^t \cdot M_N(t).$$

Analog berechnet sich die zweite Differentiation nach  $t$  zu:

$$M''_N(t) = \lambda \cdot e^t \cdot M_N(t) + \lambda \cdot e^t \cdot M'_N(t) = \lambda \cdot e^t \cdot M_N(t) + (\lambda \cdot e^t)^2 \cdot M_N(t).$$

Ausgewertet an der Stelle  $t = 0$  folgt für den Erwartungswert:

$$E(N) = M'_N(0) = \lambda.$$

Mit Hilfe des Verschiebungssatzes folgt für die Varianz:

$$Var(N) = E(N^2) - E^2(N) = M''_N(0) - (M'_N(0))^2 = \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 = \lambda.$$

Schließlich erhält man für den Variationskoeffizienten:

$$VKo(N) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}.$$

Die Erzeugendenfunktion ist stetig, in  $(0, 1)$  unendlich oft differenzierbar und charakterisiert die Verteilung  $P^X$  von  $X$  eindeutig. Es gilt:

$$\psi_N(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-t} \cdot \frac{(\lambda \cdot z)^k}{k!} = e^{\lambda(z-1)}.$$

Seien nun  $N_1 \sim Poi(\lambda_1)$  und  $N_2 \sim Poi(\lambda_2)$  stochastisch unabhängig. Aufgrund der Multiplikatивität der Erzeugendenfunktion hat  $N_1 + N_2$  die Erzeugendenfunktion

$$\psi_{N_1}(t) \cdot \psi_{N_2}(t) = e^{\lambda_1(t-1)} \cdot e^{\lambda_2(t-1)} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)(t-1)} = \psi_{N_1+N_2}(t).$$

Die Verteilung  $P^{N_1+N_2}$  von  $N_1 + N_2$  wird durch  $\psi_{N_1+N_2}$  eindeutig charakterisiert, daher ist  $(N_1 + N_2) \sim Poi(\lambda_1 + \lambda_2)$  und hat

$$Poi(\lambda_1) * Poi(\lambda_2) = Poi(\lambda_1 + \lambda_2)$$

zur Folge. ◇

**Beispiel 2.2.** Auf dem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ist die Zufallsvariable  $X$  Paretoverteilt,  $X \sim Par(\alpha, x_m)$ ,  $\alpha, x_m \in (0, \infty)$ , falls  $X$  die Dichtefunktion

$$f_X(x) = \frac{\alpha}{x_m} \left( \frac{x_m}{x} \right)^{\alpha+1} \cdot \mathbb{1}_{[x_m, \infty)}(x)$$

besitzt. Der sogenannte *Threshold*  $x_m$  definiert dabei den kleinsten Wert, der durch die Verteilung beschrieben wird.

Dann gilt für die Verteilungsfunktion  $F_X$  von  $X$ :

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{x_m}^x f_X(t) dt = \frac{\alpha}{x_m} \cdot x_m^{\alpha+1} \cdot \int_{x_m}^x t^{-(\alpha+1)} dt = \alpha \cdot x_m^\alpha \cdot \left[ -\frac{1}{\alpha} \cdot t^{-\alpha} \right]_{x_m}^x \\ &= -x_m^\alpha \cdot (x^{-\alpha} - x_m^{-\alpha}) \\ &= 1 - \left( \frac{x_m}{x} \right)^\alpha, \quad x \geq x_m. \end{aligned}$$

Für den Erwartungswert von  $X$  erhält man:

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{x_m}^{\infty} x \cdot f_X(t) dt = \int_{x_m}^{\infty} x \cdot \frac{\alpha}{x_m} \cdot \frac{x_m^{\alpha+1}}{x} dx = \frac{\alpha}{x_m} \cdot x_m^{\alpha+1} \cdot \int_{x_m}^{\infty} \frac{x}{x^{\alpha+1}} dx \\ &= \alpha \cdot x_m^\alpha \cdot \int_{x_m}^{\infty} x^{-\alpha} dx = \alpha \cdot x_m^\alpha \cdot \left[ \frac{1}{-\alpha+1} x^{-\alpha+1} \right]_{x_m}^{\infty} = \frac{\alpha \cdot x_m^\alpha}{1-\alpha} \cdot \left( -x_m^{-(\alpha-1)} \right) \\ &= \frac{\alpha \cdot x_m}{\alpha-1}, \quad \alpha > 1. \end{aligned}$$

Analog berechnet sich das  $k$ -te Moment,  $k \in \mathbb{N}$ , von  $X$  zu

$$E(X^k) = \frac{\alpha \cdot x_m^k}{\alpha - k}, \quad \alpha > k.$$

Mit Hilfe des Verschiebungssatzes folgt für die Varianz von  $X$  für  $\alpha > 2$ :

$$\begin{aligned} Var(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{\alpha \cdot x_m^2}{\alpha-2} - \frac{\alpha^2 \cdot x_m^2}{(\alpha-1)^2} = \alpha \cdot x_m^2 \cdot \left( \frac{1}{\alpha-2} - \frac{\alpha}{(\alpha-1)^2} \right) \\ &= \frac{\alpha \cdot x_m^2}{(\alpha-2) \cdot (\alpha-1)^2}. \end{aligned}$$

Der Variationskoeffizient von  $X$  resultiert für  $\alpha > 2$  zu:

$$VKo(X) = \frac{\sqrt{Var(X)}}{E(X)} = \sqrt{\frac{\alpha \cdot x_m^2}{(\alpha-2) \cdot (\alpha-1)^2}} \cdot \sqrt{\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha^2 \cdot x_m^2}} = \sqrt{\frac{1}{\alpha \cdot (\alpha-2)}}.$$

Weiterhin ist für  $\alpha > 3$  durch

$$\begin{aligned} \gamma(X) &= E\left( \left( \frac{X - E(X)}{Var(X)} \right)^3 \right) = \frac{E(X^3) - 3 \cdot E(X) \cdot Var(X) - E^3(X)}{Std^3(X)} \\ &= \frac{2 \cdot (\alpha+1)}{\alpha-3} \cdot \sqrt{\frac{\alpha-2}{\alpha}} \end{aligned}$$

die Schiefe von  $X$ . Wegen  $\gamma(X) > 0$  ist die Pareto-Verteilung rechtsschief.  $\diamond$

## 2.2. Risiko und Risikomaße

In Bezug auf den in Kapitel 2.1 eingeführten maß- und wahrscheinlichkeitstheoretischen Rahmen kann der bereits heuristisch verwendete Begriff des Risikos nun in Anlehnung an [FS04] und [MFE05] präzisiert werden:

**Definition 2.3.** *Auf dem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  wird Risiko durch eine reelle Zufallsvariable  $Y$ , d.h. durch eine  $\mathcal{A} - \mathcal{B}$ -messbare Abbildung  $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , beschrieben.*

Gemäß Definition 2.3 können die Realisationen der reellen Zufallsvariablen  $Y$  sowohl positiv als auch negativ sein. Mit der Konvention nach [MFE05], Risiko im Versicherungskontext als Verlustvariable  $X = -Y$  zu betrachten, werden folglich positive Realisationen als Verlust und negative Realisationen als Gewinn aufgefasst. Für die vorliegende Arbeit ist das Verständnis von Risiko als Verlustvariable von besonderem Interesse, d.h. Risiko wird durch die reelle Zufallsvariable  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$  mit nichtnegativem Träger beschrieben. Für die Verteilungsfunktion  $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  gilt entsprechend:  $F_X(x) = 0$  für  $x < 0$ .

Die Quantifizierung des Risikos durch eine reelle Zahl erfolgt durch Anwendung eines Risikomaßes, das im Pionier-Papier [Art+99] wie folgt definiert wird:

**Definition 2.4.** *Ein Risikomaß ist eine Abbildung*

$$\rho : L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow \mathbb{R}, X \mapsto \rho(X).$$

Grundidee eines Risikomaßes besteht darin, Risiko durch einen Geldbetrag zu konkretisieren, der bei Manifestation des Risikos die Höhe des Verlusts (oder des Gewinns) angibt.

Im Rahmen dieser Arbeit werden Risikomaße unter Berücksichtigung des Risikoprofils und eines vorgegebenen Sicherheitsniveaus insbesondere zur Ermittlung des benötigten Risikokapitals verwendet. Dieses erfüllt gemäß [KE09] gleich mehrere Funktionen:

- *Kommunikationsfunktion:* Durch die Identifikation mit einem Geldbetrag wird das benötigte Risikokapital als Kapitalpuffer interpretiert, der bei unerwarteten, zukünftigen Verlusten herangezogen werden kann. Diese Interpretation ermöglicht innerhalb der VUs eine einheitliche und verständliche Kommunikation.
- *Vergleichsfunktion:* Durch die Identifikation mit einem Geldbetrag können unterschiedliche Risiken direkt miteinander verglichen werden.
- *Steuerungsfunktion:* Nach entsprechender Allokation auf die Geschäftsbereiche dient das benötigte Risikokapital als Bezugsgröße für risikobasierte Erfolgsgrößen im Rahmen der Unternehmenssteuerung.

Stellt sich Risikokapital aus mathematischer Perspektive rein als Ergebnis der Anwendung eines Risikomaßes auf eine Verlustverteilung dar, so stellt die Praxis unterschiedliche Anforderungen an das Risikokapital: etwa aus Sicht der Unternehmenssteuerung oder in Form von Solvenzkapital, das sich aus aufsichtsrechtlichen Anforderungen ergibt. Im Fokus dieser Arbeit liegt die Ermittlung des benötigten Risikokapitals in Form von Solvenzkapital.

[Art+99] greifen die Eigenschaften eines intuitiven Risikobegriffs durch eine Axiomatik bezüglich des Risikomaßes auf:

**Definition 2.5.** *Das Risikomaß  $\rho : L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow \mathbb{R}, X \mapsto \rho(X)$  heißt kohärent, falls folgende Eigenschaften erfüllt sind:*

(i) *Translationsinvarianz:*

$$\rho(X + c) = \rho(X) + c \quad \forall X \in L^\infty, c \in \mathbb{R}$$

(ii) *Positive Homogenität:*

$$\rho(c \cdot X) = c \cdot \rho(X) \quad \forall X \in L^\infty, c \in \mathbb{R}_+$$

(iii) *Monotonie:*

$$X_1 \geq X_2 \text{ P-f.ü.} \Rightarrow \rho(X_1) \geq \rho(X_2) \quad \forall X_1, X_2 \in L^\infty$$

(iv) *Subadditivität:*

$$\rho(X_1 + X_2) \leq \rho(X_1) + \rho(X_2) \quad \forall X_1, X_2 \in L^\infty.$$

**Bemerkung 2.6.** Die Eigenschaften eines kohärenten Risikomaßes gemäß Definition 2.5 können wie folgt interpretiert werden:

- (i) Translationsinvarianz besagt, dass sichere Verluste vollständig mit Kapital unterlegt werden müssen, das übrige Risiko allerdings nicht beeinflussen.
- (ii) Positive Homogenität ist eine Skalierungsinvarianz.
- (iii) Monotonie bedeutet, dass ein Risiko, das in jeder möglichen Situation höhere Verluste als ein anderes Risiko aufweist, zu einem höheren Risikokapital führen muss.
- (iv) Durch Subadditivität werden Diversifizierungseffekte berücksichtigt. ◇

Die Kohärenz-Axiomatik gemäß [Art+99] wird durch Föllmer und Schied in [FS02] sowie Frittelli und Rosazza Gianin in [FR02] aufgegriffen und in Form eines konvexen Risikomaßes auf  $L^\infty$  verallgemeinert. In der Praxis werden allerdings häufig unbeschränkte Verteilungen verwendet, für die  $L^\infty$  zu klein ist. Daher untersuchen unter anderem Filipovic und Svindland in [FS12] konvexe Risikomaße auf  $L^p$ ,  $p \in [1, \infty)$ .

Im Rahmen der Ermittlung des benötigten Risikokapitals als Solvenzkapital spielen zwei Shortfall-Risikomaße, der *Value at Risk (VaR)* und der *Expected Shortfall (ES)*, eine wichtige Rolle, die im Folgenden gemäß [FS04] und [MFE05] eingeführt werden:

**Definition 2.7.** Der *Value at Risk* zum Niveau  $\alpha \in (0, 1)$  einer reellen Verlustgröße  $X$  ist definiert als

$$\text{VaR}_\alpha(X) = F_X^{-1}(\alpha) := \inf \{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq \alpha\},$$

wobei  $F_X$  die Verteilungsfunktion und  $F_X^{-1}$  die zugehörige Pseudoinverse von  $X$  bezeichne.

**Bemerkung 2.8.** Definition 2.7 führt zu folgendem Verständnis:

- (i) Hält ein VU der Kommunikationsfunktion des Risikokapitals entsprechend einen Kapitalpuffer in Höhe des VaR zum Sicherheitsniveau  $\alpha$  vor, so wird der Verlust einer Periode mit Wahrscheinlichkeit  $\alpha$  diesen nicht vollständig verzehren.
- (ii) Gemäß Definition 2.7 bezieht sich der VaR auf das untere  $\alpha$ -Quantil. Folglich definiert der VaR den minimalen Kapitalpuffer, um das angestrebte Sicherheitsniveau zu erreichen.
- (iii) Ereignisse jenseits des vorgegebenen Quantils bleiben bei Verwendung des VaR als Risikomaß außen vor.  $\diamond$

In [Art+99] wird der Nachweis geführt, dass der VaR zwar die Axiome bezüglich Translationsinvarianz, positiver Homogenität und Monotonie erfüllt, allerdings im Allgemeinen nicht subadditiv ist. Wie in [MFE05] untersucht, ist dies häufig in Fällen von schiefen Verteilungen, heavy-tailed Verteilungen oder speziellen Abhängigkeitsstrukturen der Fall. Somit handelt es sich beim VaR um kein kohärentes Risikomaß, das im Allgemeinen keine Diversifizierungseffekte berücksichtigt. Lediglich im Spezialfall normalverteilter Risiken ist der VaR zum Niveau  $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1)$  subadditiv. Weiterhin fließt nur das Sicherheitsniveau bzw. die entsprechende Verlustwahrscheinlichkeit in die Risikomessung ein, nicht aber die tatsächliche Verlusthöhe. Diese Schwachpunkte des VaR führen zur Entwicklung des Tail Value at Risk (TVaR) gemäß [FS04] und [MFE05]:

**Definition 2.9.** *Der Tail Value at Risk (Conditional Tail Expectation) zum Niveau  $\alpha \in (0, 1)$  einer reellen Verlustgröße  $X$  ist definiert als der bedingte erwartete Verlust, gegeben, dass  $X$  den Value at Risk überschreitet:*

$$TVaR_\alpha : L^1(P) \rightarrow \mathbb{R},$$

$$TVaR_\alpha(X) := CTE_\alpha(X) := \begin{cases} E(X|X > VaR_\alpha(X)); & P(X > VaR_\alpha(X)) > 0 \\ VaR_\alpha(X); & P(X > VaR_\alpha(X)) = 0 \end{cases}.$$

**Bemerkung 2.10.** Definition 2.9 impliziert:

- (i) Per Definition des TVaR werden nur Verluste betrachtet, die über den VaR hinausgehen. Somit verlagert sich der Fokus von der einfachen Betrachtung des Sicherheitsniveaus bzw. der Verlustwahrscheinlichkeit auf die Folgen, die mit diesem Verlust einhergehen.
- (ii) Bei Überschreitung des VaR im Verlustfall, kann der TVaR als durchschnittlicher Verlust aufgefasst werden.
- (iii) Hält ein VU einen Kapitalpuffer in Höhe des TVaR zum vorgegebenen Sicherheitsniveau vor, so kann der durchschnittliche Verlust im Fall des zuvor beschriebenen Verlustereignisses aufgefangen werden.  $\diamond$

Während der TVaR somit eine klare ökonomische Interpretation erlaubt, erfüllt der Expected Shortfall die theoretisch wünschenswerten Kohärenzaxiome, wie in [FS04] nachgewiesen:

**Definition 2.11.** *Der Expected Shortfall (Average Value at Risk) zum Niveau  $\alpha \in (0, 1)$  ist definiert durch*

$$ES_\alpha : L^1(P) \rightarrow \mathbb{R},$$

$$ES_\alpha(X) := AVaR_\alpha(X) := \frac{1}{1 - \alpha} \cdot \int_\alpha^1 VaR_z(X) dz.$$

Einen Zusammenhang zwischen den eingeführten Risikomaßen liefert das folgende Resultat gemäß [FS04]. Mit Hilfe der partiellen Integration und der Substitutionsregel zeigt man, dass der ES eine Konvexkombination aus TVaR und VaR ist:

**Proposition 2.12.** *Für  $X \in L^1(P)$  gilt:*

$$ES_\alpha(X) = \lambda_\alpha \cdot TVaR_\alpha(X) + (1 - \lambda_\alpha) \cdot VaR_\alpha(X)$$

mit

$$\lambda_\alpha = \frac{P(X > VaR_\alpha(X))}{1 - \alpha} \in (0, 1).$$

Für die Klasse der normalverteilten Risiken lässt sich der VaR direkt angeben und das Integral des ES unmittelbar berechnen.

**Proposition 2.13.** *Auf dem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  sei das Risiko  $X$  normalverteilt, d.h.  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma > 0$ , dann gilt zum Niveau  $\alpha \in (0, 1)$ :*

(i)

$$VaR_\alpha(X) = \mu + \sigma \cdot \Phi^{-1}(\alpha),$$

(ii)

$$TVaR_\alpha(X) = ES_\alpha(X) = \mu + \sigma \cdot \frac{\varphi(\Phi^{-1}(\alpha))}{1 - \alpha},$$

wobei  $\varphi$  die Dichte und  $\Phi$  die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung  $\mathcal{N}(0, 1)$  sei.

*Beweis.*

(i) Da die Verteilungsfunktion  $F_X$  der Normalverteilung stetig und streng monoton wachsend ist, folgt mit  $VaR_\alpha(X) = x_0$  und Definition 2.7:

$$F_X(x_0) = \alpha \Leftrightarrow P(X \leq x_0) = \alpha \Leftrightarrow P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{x_0 - \mu}{\sigma}\right) = \alpha$$

$$\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{x_0 - \mu}{\sigma}\right) = \alpha \Leftrightarrow x_0 = \mu + \sigma \cdot \Phi^{-1}(\alpha)$$

(ii) Aus der Stetigkeit von  $X$  folgt:  $TVaR_\alpha(X) = ES_\alpha(X)$ . Per Definition 2.11 und der Substitution  $x := \Phi^{-1}(z) \Leftrightarrow z = \Phi(x)$  mit  $\frac{dz}{dx} = \Phi'(x) = \varphi(x) \Leftrightarrow dz = \varphi(x) dx$  gilt:

$$\begin{aligned} ES_\alpha(X) &= \frac{1}{1-\alpha} \cdot \int_\alpha^1 VaR_z(X) dz = \frac{1}{1-\alpha} \cdot \int_\alpha^1 \mu + \sigma \cdot \Phi^{-1}(z) dz \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \cdot \mu \cdot \int_\alpha^1 dz + \frac{1}{1-\alpha} \cdot \sigma \cdot \int_\alpha^1 \Phi^{-1}(z) dz \\ &= \mu + \frac{\sigma}{1-\alpha} \cdot \int_\alpha^1 \Phi^{-1}(z) dz = \mu + \frac{\sigma}{1-\alpha} \cdot \int_{\Phi^{-1}(\alpha)}^{\Phi^{-1}(1)} x \cdot \varphi(x) dx \\ &= \mu + \frac{\sigma}{1-\alpha} \cdot [-\varphi(x)]_{\Phi^{-1}(\alpha)}^\infty = \mu + \sigma \cdot \frac{\varphi(\Phi^{-1}(\alpha))}{1-\alpha}. \end{aligned}$$

□

Abschließend folgt exemplarisch für den Fall eines verschoben Pareto-verteilten Risikos die Berechnung von VaR und ES zum Niveau  $\alpha^* \in (0, 1)$ .

**Beispiel 2.14.** Auf dem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  sei das Risiko  $X$  verschoben Pareto-verteilt,  $X \sim Par^*(\alpha, x_m)$ ,  $\alpha, x_m \in (0, \infty)$ , mit zugehöriger Dichtefunktion

$$f_X(x) = \frac{\alpha}{x_m} \left( \frac{x_m}{x_m + x} \right)^{\alpha+1} \cdot \mathbb{1}_{(0, \infty)}(x),$$

d.h.  $(X + x_m) \sim Par(\alpha, x_m)$  (siehe auch Beispiel 2.2).

Dann gilt gemäß Beispiel 2.2 für die Verteilungsfunktion  $F_X$  von  $X$ :

$$F_X(x) = 1 - \left( \frac{x_m}{x_m + x} \right)^\alpha, \quad x > 0.$$

Da  $F_X$  stetig und streng monoton wachsend ist, folgt für den VaR zum Niveau  $\alpha^* \in (0, 1)$  mit  $VaR_{\alpha^*}(X) = x_0$  und Hilfe von Definition 2.7:

$$F_X(x_0) = \alpha^* \Leftrightarrow x_0 = x_m \cdot (1 - \alpha^*)^{-\frac{1}{\alpha}} - x_m.$$

Folglich gilt:

$$VaR_{\alpha^*}(X) = x_m \cdot \left( (1 - \alpha^*)^{-\frac{1}{\alpha}} - 1 \right).$$

Mit Hilfe von Definition 2.11 ist der ES durch

$$\begin{aligned} ES_{\alpha^*}(X) &= \frac{1}{1-\alpha^*} \cdot \int_{\alpha^*}^1 VaR_z(X) dz = \frac{1}{1-\alpha^*} \cdot \int_{\alpha^*}^1 x_m \cdot (1-z)^{-\frac{1}{\alpha}} - x_m dz \\ &= \frac{x_m}{1-\alpha^*} \cdot \int_{\alpha^*}^1 (1-z)^{-\frac{1}{\alpha}} dz - \frac{x_m}{1-\alpha^*} \cdot \int_{\alpha^*}^1 dz \\ &= \frac{x_m}{1-\alpha^*} \cdot \left[ \frac{1}{-\frac{1}{\alpha} + 1} \cdot (1-z)^{-\frac{1}{\alpha} + 1} \right]_{\alpha^*}^1 - \frac{x_m}{1-\alpha^*} \cdot (1-\alpha^*) \\ &= \frac{x_m \cdot \alpha}{(1-\alpha^*) \cdot (\alpha-1)} \left[ (1-z)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \right]_{\alpha^*}^1 - x_m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{x_m \cdot \alpha}{(1 - \alpha^*) \cdot (\alpha - 1)} \cdot (1 - \alpha^*)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} - x_m \\
&= \frac{x_m \cdot \alpha}{1 - \alpha} \cdot (1 - \alpha^*)^{-\frac{1}{\alpha}} - x_m, \quad \alpha > 1,
\end{aligned}$$

gegeben. ◇

## 2.3. Risikoaggregation

Kapitel 2.2 aufgreifend wird im Folgenden die Aggregation von Risiken unter Berücksichtigung von Diversifikation in Anlehnung an [MFE05] behandelt.

### 2.3.1. Diversifikation

Kohärente Risikomaße im Sinne von Definition 2.5 sind insbesondere subadditiv. Gemäß Bemerkung 2.6 werden durch die geforderte Eigenschaft der Subadditivität gerade Diversifikationseffekte berücksichtigt. Intuitiv bedeutet dies, dass sich Risiken nicht alle gleichzeitig oder im gleichen Ausmaß realisieren.

Für eine endliche Anzahl von Risiken im Sinne von Definition 2.3 wird der Diversifikationseffekt allgemeiner betrachtet.

**Definition 2.15.** *Auf dem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  seien  $X_1, \dots, X_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , Risiken und durch  $\rho : L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow \mathbb{R}$  ein Risikomaß gegeben. Dann ist der Diversifikationseffekt des Gesamtrisikos  $X = \sum_{i=1}^n X_i$  bezüglich  $\rho$  durch*

$$\sum_{i=1}^n \rho(X_i) - \rho(X)$$

gegeben.

**Proposition 2.16.** *Für kohärente Risikomaße ist der Diversifikationseffekt stets nichtnegativ.*

*Beweis.* Die Behauptung folgt direkt aus der Eigenschaft der Subadditivität eines kohärenten Risikomaßes gemäß Definition 2.5:

$$\rho(X) = \rho\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \rho(X_i).$$

□

**Bemerkung 2.17.** Der Diversifikationseffekt ist abhängig

- vom System der Risiken und deren Interdependenzen sowie
- von der Wahl des Risikomaßes.

Insbesondere führen kohärente Risikomaße stets zu nichtnegativer Diversifikation innerhalb der Risikoaggregation. Im Umkehrschluss bedeutet dies, dass die Verwendung des VaR als Risikomaß auch zu einem negativen Diversifikationseffekt führen kann.  $\diamond$

Ist ein Risikomaß  $\rho$  vorgegeben, so hängt der Diversifikationseffekt von der Abhängigkeitsstruktur der Risiken  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , ab. In diesem Kontext lautet die zentrale Frage, wie die Abhängigkeitsstruktur adäquat beschrieben werden kann.

### 2.3.2. Korrelation

Ein verbreiteter Ansatz, die Abhängigkeit zwischen zwei Risiken  $X_1$  und  $X_2$  zu messen, stellt die Korrelation dar (vergleiche Abschnitt 2.1). In der nächsten Bemerkung sind wichtige Eigenschaften der Korrelation zusammengefasst:

**Bemerkung 2.18.** Für zwei Risiken  $X_1, X_2 \in L^1(P)$  mit  $(X_1 \cdot X_2) \in L^1(P)$  gilt:

- (i) Nur unter der Voraussetzung endlicher Varianzen von  $X_1$  und  $X_2$  ist der Korrelationskoeffizient definiert.
- (ii) Korrelation ist ein Maß für lineare Abhängigkeit und nimmt Werte im Intervall  $[-1, 1]$  an.
- (iii) Sind  $X_1$  und  $X_2$  stochastisch unabhängig, so gilt für den Korrelationskoeffizienten:

$$\text{Corr}(X_1, X_2) = 0.$$

Allerdings folgt umgekehrt aus der Unkorreliertheit der Risiken nicht, dass diese auch stochastisch unabhängig sind.

- (iv) Im Falle von  $|\text{Corr}(X_1, X_2)| = 1$  spricht man von einer *perfekten linearen Abhängigkeit* von  $X_1$  und  $X_2$ . Das bedeutet, dass  $\alpha \in \mathbb{R}$  sowie  $\beta \neq 0$  mit  $\beta > 0$  für positive und  $\beta < 0$  für negative lineare Abhängigkeit existieren, sodass  $X_2 = \alpha + \beta \cdot X_1$  *P-f.s.*
- (v) Der Korrelationskoeffizient ist invariant unter strikt monotonen linearen Transformationen, d.h. für  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$  und  $\beta_1, \beta_2 \neq 0$  gilt:

$$\text{Corr}(\alpha_1 + \beta_1 \cdot X_1, \alpha_2 + \beta_2 \cdot X_2) = \text{Corr}(X_1, X_2).$$

Diese Aussage verliert allerdings ihre Gültigkeit im Falle strikt monotoner nichtlinearer Transformationen  $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Im Allgemeinen gilt dann:

$$\text{Corr}(T(X_1), T(X_2)) \neq \text{Corr}(X_1, X_2).$$

Speziell für normalverteilte Risiken können VaR und ES für das aggregierte Risiko direkt aus den entsprechenden Risikomaßen der einzelnen Verlustverteilungen bestimmt werden:

**Proposition 2.19.** Sei  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T \in \mathbb{R}^n$  ein *n*-variater normalverteilter Zufallsvektor von *n* Risiken  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , und  $X = \sum_{i=1}^n X_i$ . Dann gilt für  $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1)$ :

(i)

$$VaR_\alpha(X) = EX + \sqrt{\sum_{i,j=1}^n Corr(X_i, X_j) \cdot (VaR_\alpha(X_i) - E(X_i)) \cdot (VaR_\alpha(X_j) - E(X_j))},$$

(ii)

$$ES_\alpha(X) = EX + \sqrt{\sum_{i,j=1}^n Corr(X_i, X_j) \cdot (ES_\alpha(X_i) - E(X_i)) \cdot (ES_\alpha(X_j) - E(X_j))}.$$

*Beweis.* Basierend auf dem Cramér-Wold-Device (siehe [Kle13b]) ist  $\mathbf{X}$  genau dann  $n$ -variater normalverteilt, wenn jede Linearkombination  $\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{X}$  für alle  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$  univariat normalverteilt ist, insbesondere auch  $\mathbf{1}^T \cdot \mathbf{X} = \sum_{i=1}^n X_i = X$ . Es gilt:

$$E(X) = \sum_{i=1}^n E(X_i)$$

und

$$Var(X) = \sum_{i,j=1}^n Corr(X_i, X_j) \cdot \sqrt{Var(X_i) \cdot Var(X_j)}.$$

Proposition 2.13 impliziert für jedes normalverteilte Risiko  $X$ , dass für  $\rho_\alpha \in \{VaR_\alpha, ES_\alpha\}$  jeweils eine positive Funktion  $f : [\frac{1}{2}, 1) \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $\alpha \mapsto f(\alpha)$  existiert, sodass

$$\rho_\alpha(X) = E(X) + \sqrt{Var(X)} \cdot f(\alpha).$$

Damit erhält man:

$$\begin{aligned} \rho_\alpha(X) &= E(X) + \sqrt{Var(X)} \cdot f(\alpha) \\ &= E(X) + \sqrt{\sum_{i,j=1}^n Corr(X_i, X_j) \cdot \sqrt{Var(X_i) \cdot Var(X_j)} \cdot f(\alpha)} \\ &= E(X) + \sqrt{\sum_{i,j=1}^n Corr(X_i, X_j) \cdot \left(\sqrt{Var(X_i)} \cdot f(\alpha)\right) \cdot \left(\sqrt{Var(X_j)} \cdot f(\alpha)\right)} \\ &= E(X) + \sqrt{\sum_{i,j=1}^n Corr(X_i, X_j) \cdot (\rho_\alpha(X_i) - E(X_i)) \cdot (\rho_\alpha(X_j) - E(X_j))}. \end{aligned}$$

□

**Bemerkung 2.20.** Proposition 2.19 liefert ein Verfahren zur Bestimmung des Risikomaßes  $\rho_\alpha(X)$  für das Gesamtrisiko  $X$ , das folgende Schwächen aufweist:

- (i) Das Risikomaß  $\rho_\alpha(X)$  eines aggregierten Risikos  $X$  ist nur eine Kenngröße der unbekanntenen Gesamtverteilung, deren Gestalt allerdings ebenfalls von Interesse ist.

- (ii) In der Praxis ist die Normalverteilungsannahme häufig nicht gegeben. Wendet man obiges Verfahren dennoch bei nicht-normalverteilten Einzelrisiken und unbekannter Gesamtverteilung an, liefern die Formeln lediglich eine Approximation, deren Fehler in Abhängigkeit von Risikomaß und Verteilung beliebig groß werden kann.  $\diamond$

In Anlehnung an Bemerkung 2.20 werden abschließend zwei Fallstricke im Zusammenhang mit linearer Korrelation zusammengefasst, die in [MFE05] ausführlich diskutiert werden.

**Bemerkung 2.21.** (i) Aus der Kenntnis der Randverteilungen und der paarweisen Korrelationen lässt sich im Allgemeinen nicht die gemeinsame Verteilung bestimmen.

- (ii) Insbesondere lässt sich für gegebene Verteilungsfunktionen  $F_{X_1}$  und  $F_{X_2}$  zweier Risiken  $X_1$  und  $X_2$  und einen beliebigen Korrelationskoeffizienten  $\text{Corr}(X_1, X_2) \in [-1, 1]$  keine gemeinsame Verteilung  $F_X$  mit Randverteilungen  $F_{X_1}$  und  $F_{X_2}$  und Korrelation  $\text{Corr}(X_1, X_2)$  konstruieren.  $\diamond$

Die obigen Ausführungen verdeutlichen, dass (lineare) Korrelation nur sinnvoll im Falle linearer Abhängigkeitsstrukturen eingesetzt werden kann, da andernfalls die Aussagekraft begrenzt ist. Vor diesem Hintergrund motivieren insbesondere die Erkenntnisse aus Bemerkung 2.21 das folgende Konzept.

### 2.3.3. Copulas

Die Grundidee einer Copula besteht darin, die gemeinsame Verteilungsfunktion  $F_X$  eines Zufallsvektors  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T \in \mathbb{R}^n$  von  $n$  Risiken  $X_i$  in die Abhängigkeitsstruktur und die Randverteilungen  $F_{X_i}$  zu zerlegen,  $i = 1, \dots, n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Dann ist eine Funktion

$$C : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1], \mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)^T \mapsto C(\mathbf{u}) = C(u_1, \dots, u_n),$$

gesucht mit

$$F_X(x_1, \dots, x_n) = C(F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_n}(x_n)).$$

In der Praxis ist es oftmals aufgrund der Datenlage einfacher, statistische Aussagen über die Einzelrisiken als über das Gesamtrisiko zu treffen. Sind die Randverteilungen angepasst, kann im nächsten Schritt die Abhängigkeitsstruktur ermittelt werden. Das Konzept der Copula liefert schließlich die gemeinsame Verteilung.

Für die weiteren Ausführungen in diesem Kontext wird [MFE05] um [Nel99] und [CLV04] ergänzt.

**Definition 2.22.** Eine Verteilungsfunktion  $C(u_1, \dots, u_n)$  eines  $n$ -dimensionalen Zufallsvektors, sodass die Randverteilungen jeweils einer Gleichverteilung auf  $(0, 1)$  entsprechen, heißt  $n$ -dimensionale Copula.

Die Bedeutung von Copulas im Kontext multivariater Verteilungsfunktionen wird durch den folgenden Satz von Sklar (1959) zusammengefasst:

**Satz 2.23. (Sklar)**

- (i) Sei  $F_{\mathbf{X}}$  eine  $n$ -dimensionale Verteilungsfunktion und  $F_{X_1}, \dots, F_{X_n}$  seien die Randverteilungen. Dann existiert eine Copula  $C : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ , sodass

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) = C(F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_n}(x_n))$$

gilt. Sind darüber hinaus alle Randverteilungen stetig, so ist  $C$  eindeutig bestimmt.

- (ii) Seien umgekehrt  $C : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$  eine Copula und  $F_{X_1}, \dots, F_{X_n}$  eindimensionale Verteilungsfunktionen. Dann wird durch

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) := C(F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_n}(x_n))$$

eine multivariate Verteilungsfunktion mit Randverteilungen  $F_{X_1}, \dots, F_{X_n}$  definiert.

Für den Beweis sei der interessierte Leser auf [Nel99] verwiesen.

**Bemerkung 2.24.** Der Satz von Sklar besagt:

- (i) Jede multivariate Verteilungsfunktion lässt sich in ihre Randverteilungen und in ihre Copula zerlegen, in der die Information über die Abhängigkeiten zwischen den Randverteilungen enthalten ist. Im Fall stetiger Randverteilungen, ist die Copula sogar eindeutig bestimmt.

Der Satz von Sklar liefert zunächst nur eine Aussage über die Existenz der Copula  $C$ . Um die Copula  $C$  bei gegebener Verteilungsfunktion  $F_{\mathbf{X}}$  und gegebenen Randverteilungen  $F_{X_1}, \dots, F_{X_n}$  zu ermitteln, sind lediglich die Quantilfunktionen (inversen Verteilungsfunktionen) der Verteilungen der Einzelrisiken in die gemeinsame Verteilungsfunktion einzusetzen (vergleiche [MFE05]):

$$C(u_1, \dots, u_n) = F_{\mathbf{X}}\left(F_{X_1}^{-1}(u_1), \dots, F_{X_n}^{-1}(u_n)\right).$$

- (ii) Aus  $n$  univariaten Verteilungsfunktionen kann eine gemeinsame Verteilungsfunktion gewonnen werden, indem man die einzelnen Verteilungsfunktionen gerade in die Copula einsetzt. Die resultierende Funktion  $F_{\mathbf{X}}$  ist dann eine Verteilungsfunktion, die zudem die Eigenschaft besitzt, dass sie die Randverteilungen der Einzelrisiken reproduziert.

Dies führt insbesondere zu dem eingangs wünschenswert formulierten Vorgehen, das Gesamtrisiko in zwei getrennten Schritten modellieren zu können:

- Modellierung der Einzelrisiken, d. h. der Verteilungen  $F_{X_1}, \dots, F_{X_n}$ .
- Wahl eines geeigneten Copula-Modells  $C$ , das alle Informationen über die Abhängigkeiten zwischen den Einzelrisiken enthält.

Die gemeinsame Verteilung  $F_{\mathbf{X}}$  der Risiken ergibt sich dann gemäß Teil (ii) des Satzes von Sklar, der zudem gewährleistet, dass bei einer Zusammenfassung von Risiken mittels Copulas keine Informationen über die Einzelrisiken verloren gehen, da die Verteilungen der Einzelrisiken als Randverteilungen von  $F_{\mathbf{X}}$  erhalten bleiben.  $\diamond$

Im weiteren Verlauf werden wichtige Eigenschaften von Copulas zusammengetragen. Unter anderem sind Copulas invariant unter streng monotonen Transformationen.

**Satz 2.25.** Sei  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T \in \mathbb{R}^n$  ein Zufallsvektor von  $n$  Risiken  $X_i$  mit stetigen Randverteilungen  $F_{X_i}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , und Copula  $C : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ . Seien

$$T_i : D_i \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, n,$$

streng monoton wachsende Funktionen auf dem Intervall  $D_i$ , sodass  $P(X_i \in D_i) = 1$ . Bezeichne

$$\widetilde{\mathbf{X}} = (\widetilde{X}_1, \dots, \widetilde{X}_n) := (T_1(X_1), \dots, T_n(X_n))$$

den transformierte Zufallsvektor mit Randverteilungen  $F_{\widetilde{X}_i}$ , so ist die gemeinsame Verteilung  $F_{\widetilde{\mathbf{X}}}$  von  $\widetilde{\mathbf{X}}$  durch

$$F_{\widetilde{\mathbf{X}}}(x_1, \dots, x_n) = C(F_{\widetilde{X}_1}(x_1), \dots, F_{\widetilde{X}_n}(x_n))$$

gegeben.

*Beweis.* Gemäß Voraussetzung sind die Funktionen  $T_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , streng monoton wachsend, daher gilt:  $X_i = T_i^{-1}(\widetilde{X}_i)$ . Damit erhält man:

$$F_{\widetilde{X}_i}(x) = P(T_i(X_i) \leq x) = P(X_i \leq T_i^{-1}(x)) = F_{X_i}(T_i^{-1}(x)).$$

Dies impliziert:

$$\begin{aligned} C(F_{\widetilde{X}_1}(x_1), \dots, F_{\widetilde{X}_n}(x_n)) &= C(F_{X_1}(T_1^{-1}(x_1)), \dots, F_{X_n}(T_n^{-1}(x_n))) \\ &= F_{\mathbf{X}}(T_1^{-1}(x_1), \dots, T_n^{-1}(x_n)) \\ &= P(X_1 \leq T_1^{-1}(x_1), \dots, X_n \leq T_n^{-1}(x_n)) \\ &= P(T_1(X_1) \leq x_1, \dots, T_n(X_n) \leq x_n) \\ &= P(\widetilde{X}_1 \leq x_1, \dots, \widetilde{X}_n \leq x_n). \end{aligned}$$

□

Eine weitere interessante Eigenschaft ist die Existenz von oberen und unteren Schranken für jede Copula, die sogenannten *Fréchet-Hoeffding Schranken*.

**Satz 2.26.** Für jede  $n$ -dimensionale Copula

$$C : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1], \mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)^T \mapsto C(\mathbf{u}) = C(u_1, \dots, u_n),$$

gilt für  $0 \leq u_i \leq 1$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ :

$$W_n(\mathbf{u}) := \max \left\{ \sum_{i=1}^n u_i - (n-1), 0 \right\} \leq C(u_1, \dots, u_n) \leq \min \{u_1, \dots, u_n\} =: M_n(\mathbf{u}).$$

*Beweis.* Die Copula  $C$  sei die Verteilungsfunktion des Zufallsvektors  $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_n)^T$  mit  $U_i \sim \mathcal{U}(0, 1)$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gilt für  $j \in \{1, \dots, n\}$  und jedes  $\mathbf{u} \in [0, 1]^n$ :

$$\bigcap_{i=1}^n \{U_i \leq u_i\} \subset \{U_j \leq u_j\}.$$

Das impliziert aufgrund der Monotonie-Eigenschaft von  $P$ :

$$C(\mathbf{u}) = P\left(\bigcap_{i=1}^n \{U_i \leq u_i\}\right) \leq \min_{j \in \{1, \dots, n\}} P(\{U_j \leq u_j\}) = M_n(\mathbf{u}).$$

Für den Nachweis der unteren Schranke bemerkt man, dass

$$\begin{aligned} C(\mathbf{u}) &= P\left(\bigcap_{i=1}^n \{U_i \leq u_i\}\right) = 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^n \{U_i > u_i\}\right) \\ &\geq 1 - \sum_{i=1}^n P(U_i > u_i) = 1 - \sum_{i=1}^n (1 - u_i) = \sum_{i=1}^n u_i - (n - 1). \end{aligned}$$

Wegen  $C(\mathbf{u}) \geq 0$  folgt:  $C(\mathbf{u}) \geq W_n(\mathbf{u})$ . □

**Definition 2.27.** Zwei Risiken  $X_1$  und  $X_2$  heißen *komonoton*, falls  $X_2 = F_{X_2}^{-1}(F_{X_1}(X_1))$ , und *kontramoton*, falls  $X_2 = F_{X_2}^{-1}(1 - F_{X_1}(X_1))$ .

Aus den bisherigen Ausführungen ergeben sich die sogenannten *fundamentalen Copulas*, die wichtige Abhängigkeitsstrukturen repräsentieren:

**Beispiel 2.28.** (i) Unter Verwendung des Satzes 2.23 von Sklar ist durch

$$C(u_1, \dots, u_n) := \prod_{i=1}^n u_i$$

die *Unabhängigkeits-Copula* genau dann gegeben, falls die Risiken  $X_1, \dots, X_n$  stochastisch unabhängig sind.

(ii) Durch die obere Fréchet-Hoeffding-Schranke (siehe Satz 2.26)

$$M_n(u_1, \dots, u_n) = \min\{u_1, \dots, u_n\}$$

ist eine Copula gegeben, denn für  $U \sim \mathcal{U}(0, 1)$  und  $\mathbf{U} = (U, \dots, U)^T$  gilt für jedes  $\mathbf{u} \in [0, 1]^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ :

$$P(\mathbf{U} \leq \mathbf{u}) = P(U \leq \min\{u_1, \dots, u_n\}) = \min\{u_1, \dots, u_n\}.$$

$M_n$  wird als *Komonotonie-Copula* bezeichnet und beschreibt eine perfekte positive Abhängigkeit.

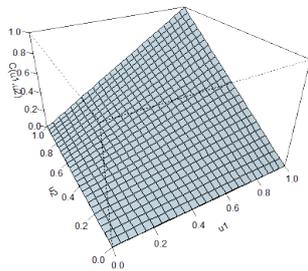
(iii) Für den Fall  $n = 2$  ist die untere Fréchet-Hoeffding-Schranke (siehe Satz 2.26)

$$W_2(u_1, u_2) = \max\{u_1 - (1 - u_2), 0\}$$

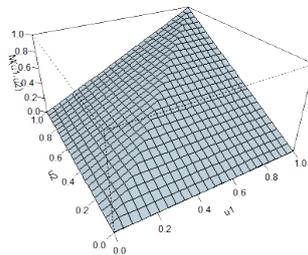
ebenfalls eine Copula, denn für  $U \sim \mathcal{U}(0, 1)$  und  $\mathbf{U} = (U_1, U_2)^T$  mit  $U_1 := U$  und  $U_2 := 1 - U$  erhält man:

$$P(U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2) = P(1 - u_2 \leq U \leq u_1) = \begin{cases} u_1 - (1 - u_2), & \text{falls } 1 - u_2 \leq u_1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

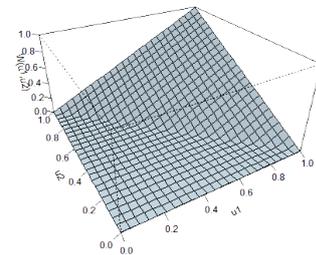
$W_2$  heißt *Kontramotonie-Copula* und beschreibt die perfekte negative Abhängigkeit. Für  $n > 2$  ist  $W_n$  keine Copula.  $\diamond$



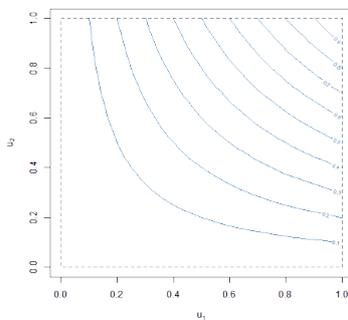
(a) Unabhängigkeits-Copula



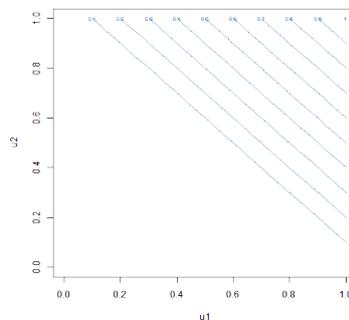
(b) Komonotonie-Copula



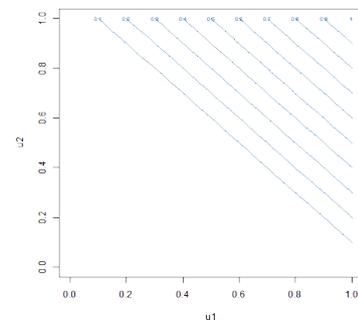
(c) Kontramotonie-Copula



(d) Unabhängigkeits-Copula



(e) Komonotonie-Copula



(f) Kontramotonie-Copula

Abbildung 2.1.: Dreidimensionale Darstellung und Höhenliniendiagramm fundamentaler Copulas (*Quelle: Eigene Darstellung*)

Exemplarisch werden einerseits als Vertreter *impliziter Copulas*, die mit Hilfe des Satzes 2.23 von Sklar aus bekannten multivariaten Verteilungsfunktionen abgeleitet werden und nicht notwendigerweise in einer einfachen geschlossenen Form angegeben werden können, die *Gauß-* und *t-Copula* vorgestellt. Andererseits folgen mit der *Gumbel-* und *Clayton-Copula* Beispiele *expliziter Copulas*, die in einfachen geschlossenen Ausdrücken angegeben werden können. Sowohl die Gumbel- als auch die Clayton-Copula gehören zur Familie der *Archimedischen Copulas*.

**Beispiel 2.29.** (i) Sei  $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$  ein multivariat verteilter Zufallsvektor der Risiken  $X_i, i = 1, \dots, n$ , mit Erwartungswertvektor  $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^n$  und Kovarianzmatrix  $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Dann besitzt  $\mathbf{X}$  die durch

$$C_{\boldsymbol{\rho}}^{Ga}(u_1, \dots, u_n) := \Phi_{\mathbf{0}, \boldsymbol{\rho}}(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n))$$

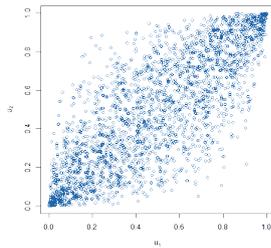
definierte *Gauß-Copula* als Copula, wobei  $\Phi$  die Verteilungsfunktion der univariaten Standardnormalverteilung ist und  $\Phi_{\mathbf{0}, \boldsymbol{\rho}}$  die gemeinsame Verteilungsfunktion von  $\tilde{\mathbf{X}} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\rho})$  mit  $\boldsymbol{\rho} = (\text{Corr}(X_i, X_j))_{i,j=1, \dots, n}$  die Korrelationsmatrix von  $\mathbf{X}$  bezeichne.

Die Gauß-Copula ist einfach handhabbar und wird oftmals genutzt, falls keine genaueren Informationen über die Abhängigkeitsstruktur vorliegen.

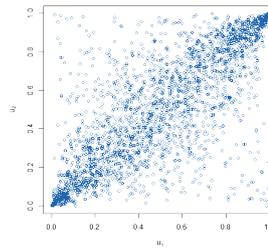
(ii) Die  $n$ -dimensionale *t-Copula* ist durch

$$C_{\nu, \boldsymbol{\rho}}^t(u_1, \dots, u_n) = \mathbf{t}_{\nu, \boldsymbol{\rho}}(t_{\nu}^{-1}(u_1), \dots, t_{\nu}^{-1}(u_n)),$$

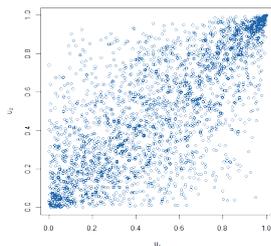
gegeben, wobei  $t_{\nu}$  die Verteilungsfunktion der univariaten Standard- $t$ -Verteilung mit  $\nu$  Freiheitsgraden ist und  $\mathbf{t}_{\nu, \boldsymbol{\rho}}$  die gemeinsame Verteilungsfunktion des Zufallsvektors  $\mathbf{X} \sim \mathbf{t}(\nu, \mathbf{0}, \boldsymbol{\rho})$  bezeichne mit der Korrelationsmatrix  $\boldsymbol{\rho} = (\text{Corr}(X_i, X_j))_{i,j=1, \dots, n}$  von  $\mathbf{X}$ .



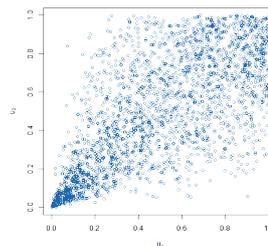
(a) Gauß-Copula,  $\rho = 0,8$



(b) t-Copula,  $\rho = 0,8, \nu = 2$



(c) Gumbel-Copula,  $\vartheta = 2$



(d) Clayton-Copula,  $\vartheta = 2$

Abbildung 2.2.: 2.500 Realisationen aus impliziten und expliziten Copulas (*Quelle: Eigene Darstellung*)

(iii) Die *Gumbel-Copula* ist durch

$$C_{\vartheta}^{Gu}(u_1, \dots, u_n) = \exp \left\{ - \left( \sum_{i=1}^n (-\ln(u_i))^{\vartheta} \right)^{\frac{1}{\vartheta}} \right\}, \quad 1 \leq \vartheta < \infty,$$

definiert und modelliert für  $\vartheta \geq 1$  höhere Abhängigkeit in den Tail der Verteilung. Für  $\vartheta = 1$  erhält man die Unabhängigkeits-Copula als Spezialfall und im Grenzfall  $\vartheta \rightarrow \infty$  die Komonotonie-Copula.

(iv) Die *Clayton-Copula* ist durch

$$C_{\vartheta}^{Cl}(u_1, \dots, u_n) = \max \left\{ \left( \sum_{i=1}^n u_i^{-\vartheta} + n - 1 \right)^{\frac{-1}{\vartheta}}, 0 \right\}, \quad \vartheta \in [-1, \infty) \setminus \{0\},$$

definiert und interpoliert zwischen der Kontramonotonie-Copula im Fall  $\vartheta = -1$ , der Unabhängigkeits-Copula im Grenzfall  $\vartheta \rightarrow 0$  und der Komonotonie-Copula im Grenzfall  $\vartheta \rightarrow \infty$ . Entsprechend der Familie der Gumbel-Copulas können durch die Familie der Clayton-Copulas verschiedene Abhängigkeitsstrukturen erfasst werden.  $\diamond$

Während Korrelation ein Maß für die lineare Abhängigkeit zweier Risiken ist, kann durch Rangkorrelationskoeffizienten der Grad monotoner Abhängigkeiten von zwei Risiken beschrieben werden. Diese werden aus den Rangzahlen von Daten ermittelt, wobei für die Berechnung lediglich die Reihenfolge relevant ist.

**Definition 2.30.** Sei  $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^T \in \mathbb{R}^2$  ein Zufallsvektor der Risiken  $X_i$  mit Randverteilungen  $F_{X_i}$ ,  $i = 1, 2$ . Die *Korrelation*

$$\rho_{\rho}(X_1, X_2) := \text{Corr}(F_{X_1}(X_1), F_{X_2}(X_2))$$

heißt *Spearman's rho*.

**Definition 2.31.** Sei  $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^T \in \mathbb{R}^2$  ein Zufallsvektor der Risiken  $X_i$  mit Randverteilungen  $F_{X_i}$ ,  $i = 1, 2$ . Weiterhin sei  $(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$  eine unabhängige Kopie von  $(X_1, X_2)$ . Dann ist *Kendall's tau* definiert durch

$$\rho_{\tau}(X_1, X_2) := P\left(\left(X_1 - \tilde{X}_1\right) \cdot \left(X_2 - \tilde{X}_2\right) > 0\right) - P\left(\left(X_1 - \tilde{X}_1\right) \cdot \left(X_2 - \tilde{X}_2\right) < 0\right).$$

Sowohl bei Spearman's rho als auch bei Kendall's tau handelt es sich nicht um eine Momentbasierte Korrelation. Diese sind invariant unter streng monoton wachsenden Transformationen. Insbesondere im Falle stetiger Randverteilungen hängen die Rangkorrelationen nur von der Copula ab:

**Proposition 2.32.** Sei  $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^T \in \mathbb{R}^2$  ein Zufallsvektor der Risiken  $X_i$  mit stetigen Randverteilungen  $F_{X_i}$ ,  $i = 1, 2$ , und Copula  $C : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ , dann gilt:

(i)

$$\rho_{\rho}(X_1, X_2) = 12 \cdot \int_0^1 \int_0^1 C(u_1, u_2) du_1 du_2 - 3.$$

(ii)

$$\rho_\tau(X_1, X_2) = 4 \cdot \int_0^1 \int_0^1 C(u_1, u_2) dC(u_1, u_2) - 1.$$

*Beweis.*

- (i) Für  $i = 1, 2$  gilt: Durch die Transformation mit  $F_{X_i}$  besitzt  $F_{X_i} \circ X_i \sim U_i$  auf  $(0, 1)$  eine Gleichverteilung mit Varianz  $\text{Var}(U_i) = \frac{1}{12}$ . Gemäß Definition 2.30 und der Definition des Korrelationskoeffizienten erhält man:

$$\rho_\rho(X_1, X_2) = \text{Corr}(F_{X_1}(X_1), F_{X_2}(X_2)) = 12 \cdot \text{Cov}(F_{X_1}(X_1), F_{X_2}(X_2)).$$

Mit dem Lemma von Hoeffding

$$\text{Cov}(X_1, X_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) - F_{X_1}(x_1) \cdot F_{X_2}(x_2)) dx_1 dx_2$$

folgt unter Zuhilfenahme der Copula-Definition 2.22 und  $U_i \sim \mathcal{U}(0, 1)$ :

$$\rho_\rho(X_1, X_2) = 12 \cdot \int_0^1 \int_0^1 (C(u_1, u_2) - u_1 \cdot u_2) du_1 du_2.$$

Durch die Integration  $12 \cdot \int_0^1 \int_0^1 u_1 \cdot u_2 du_1 du_2 = 3$  folgt die Behauptung.

- (ii) Wegen  $P\left(\left(X_1 - \tilde{X}_1\right) \cdot \left(X_2 - \tilde{X}_2\right) < 0\right) = 1 - P\left(\left(X_1 - \tilde{X}_1\right) \cdot \left(X_2 - \tilde{X}_2\right) > 0\right)$ , folgt:

$$\rho_\tau(X_1, X_2) := 2 \cdot P\left(\left(X_1 - \tilde{X}_1\right) \cdot \left(X_2 - \tilde{X}_2\right) > 0\right) - 1.$$

Weiterhin gilt:

$$P\left(\left(X_1 - \tilde{X}_1\right) \cdot \left(X_2 - \tilde{X}_2\right) > 0\right) = P\left(X_1 > \tilde{X}_1, X_2 > \tilde{X}_2\right) + P\left(X_1 < \tilde{X}_1, X_2 < \tilde{X}_2\right)$$

sowie

$$P\left(X_1 > \tilde{X}_1, X_2 > \tilde{X}_2\right) = P\left(X_1 < \tilde{X}_1, X_2 < \tilde{X}_2\right).$$

Damit erhält man:

$$\begin{aligned} \rho_\tau(X_1, X_2) &= 4 \cdot P\left(X_1 < \tilde{X}_1, X_2 < \tilde{X}_2\right) - 1 \\ &= 4 \cdot \int_0^1 \int_0^1 P\left(X_1 < x_1, X_2 < x_2\right) dF_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) \\ &= 4 \cdot \int_0^1 \int_0^1 C\left(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)\right) dC\left(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)\right). \end{aligned}$$

Mit  $u_1 = F_{X_1}(x_1)$  und  $u_2 = F_{X_2}(x_2)$  folgt die Behauptung.

□

Abschließend ist die Wahrscheinlichkeit für das gleichzeitige Eintreten von Extremereignissen von Interesse. In diesem Zusammenhang wird ein Abhängigkeitsmaß, die sogenannte *Tail-abhängigkeit*, betrachtet. Dabei wird nicht die vollständige Abhängigkeitsstruktur, sondern lediglich diejenige in den Randbereichen der Verteilung beschrieben.

**Definition 2.33.** Sei  $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^T \in \mathbb{R}^2$  ein Zufallsvektor der Risiken  $X_i$  mit Randverteilungen  $F_{X_i}$ ,  $i = 1, 2$ . Dann ist die obere Tailabhängigkeit durch

$$\lambda_U(X_1, X_2) = \lim_{u \rightarrow 1} P\left(X_2 > F_{X_2}^{-1}(u) \mid X_1 > F_{X_1}^{-1}(u)\right)$$

definiert, falls der Grenzwert existiert.

**Proposition 2.34.** Sei  $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^T \in \mathbb{R}^2$  ein Zufallsvektor der Risiken  $X_i$  mit stetigen Randverteilungen  $F_{X_i}$ ,  $i = 1, 2$ , und Copula  $C : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ . Falls die obere Tailabhängigkeit  $\lambda_U$  existiert, dann gilt:

$$\lambda_U(X_1, X_2) = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{1 - 2 \cdot u + C(u, u)}{1 - u}.$$

Insbesondere hängt die obere Tailabhängigkeit  $\lambda_U$  nur von der Copula  $C$  ab.

*Beweis.* Aufgrund der Stetigkeit von  $F_{X_i}$ ,  $i = 1, 2$ , gilt:

$$\begin{aligned} P\left(X_2 > F_{X_2}^{-1}(u) \mid X_1 > F_{X_1}^{-1}(u)\right) &= \frac{P\left(X_1 > F_{X_1}^{-1}(u), X_2 > F_{X_2}^{-1}(u)\right)}{1 - u} \\ &= 1 - \frac{P\left(X_1 \leq F_{X_1}^{-1}(u), X_2 \leq F_{X_2}^{-1}(u)\right)}{1 - u} - \frac{P\left(X_1 \leq F_{X_1}^{-1}(u), X_2 > F_{X_2}^{-1}(u)\right)}{1 - u} \\ &\quad - \frac{P\left(X_1 > F_{X_1}^{-1}(u), X_2 \leq F_{X_2}^{-1}(u)\right)}{1 - u}. \end{aligned}$$

Aus

$$P\left(X_1 \leq F_{X_1}^{-1}(u), X_2 > F_{X_2}^{-1}(u)\right) = P\left(X_1 \leq F_{X_1}^{-1}(u)\right) - P\left(X_1 \leq F_{X_1}^{-1}(u), X_2 \leq F_{X_2}^{-1}(u)\right)$$

und

$$P\left(X_1 \leq F_{X_1}^{-1}(u), X_2 \leq F_{X_2}^{-1}(u)\right) = C(u, u)$$

folgt:

$$\begin{aligned} P\left(X_2 > F_{X_2}^{-1}(u) \mid X_1 > F_{X_1}^{-1}(u)\right) &= \frac{1 - C(u, u) - u + C(u, u) - u + C(u, u)}{1 - u} \\ &= \frac{1 - 2 \cdot u + C(u, u)}{1 - u}. \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Während  $\lambda_U = 0$  asymptotische Unabhängigkeit im oberen Tail bedeutet, weist  $\lambda_U \in (0, 1]$  auf eine Abhängigkeit im oberen Tail hin. Je größer  $\lambda_U$  ist, desto größer ist die Abhängigkeit im oberen Tail. Die Tail-Abhängigkeit hängt ausschließlich von der Copula ab und ist ebenso wie die Rangkorrelation invariant unter streng monoton wachsenden Transformationen.

In Bezug auf Beispiel 2.28 gilt etwa im Fall der Unabhängigkeits-Copula  $\lambda_U = 0$ , im Fall der Komonotonie-Copula  $\lambda_U = 1$  und im Fall der Kontramotonie-Copula  $\lambda_U = 0$ .

## 2.4. Kollektives Modell

Wie eingangs von Kapitel 2 bereits angeklungen, werden Einzelrisiken durch eine geeignete Segmentierung zu einem möglichst homogenen Portefeuille zusammengefasst. Neben deterministischen Kenngrößen, wie etwa Beiträgen und Kosten, wird der Bestand insbesondere durch stochastische Kenngrößen beeinflusst. Diese unterliegen dem Zufall und werden als Zufallsvariablen modelliert. Dazu gehören unter anderem Schäden, die durch die Risiken des Bestandes generiert werden. Ungewiss ist die Höhe des Gesamtschadens, der wiederum von der Anzahl der eingetretenen Schäden und deren jeweiliger Höhe abhängt. Von zentraler Bedeutung sind daher folgende Fragestellungen:

- Wie können Schadenanzahlen und -höhen modelliert werden?
- Welche Modellansätze gibt es bezüglich des Gesamtschadens?
- Welcher Verteilung genügt der Gesamtschaden und welche Momente besitzt dieser?

Die Beantwortung der aufgeworfenen Fragen im Kontext der Nicht-Lebensversicherung, speziell der Sachschadenversicherung, stützt sich auf [Mac02] und [Goe+16].

Zur Modellierung des Gesamtschadens gibt es in der Versicherungsmathematik zwei klassische Modelle: das Individuelle und das Kollektive Modell. Zunächst wird das Individuelle Modell kurz skizziert:

Im *Individuellen Modell* der Risikotheorie werden einzelne Verträge modelliert. Alle Risiken oder Schäden, die aus einem Vertrag entstehen, werden zusammengefasst. Die Anzahl der Verträge ist eine deterministische Größe und daher bekannt. Hingegen ist die Schadenhöhe jedes einzelnen Vertrages zufällig und wird als Zufallsvariable aufgefasst. Die Schadenhöhen werden als stochastisch unabhängig angenommen und sind in der Regel nicht identisch verteilt. Der Gesamtschaden ist gerade die Summe der Einzelschäden aller Verträge des Bestandes. Einerseits ist der Modellierungsansatz präzise, andererseits besitzt dieser den Nachteil, dass sich die Parametrisierung hinsichtlich der Verteilungen für die einzelnen Schadenhöhen schwierig gestaltet. Daher wird das Individuelle Modell in der Praxis nur selten eingesetzt. Für weitere Details sei der interessierte Leser auf die genannte Literatur verwiesen.

Im Gegensatz zum Individuellen Modell stützt sich das *Kollektive Modell* nicht mehr auf eine näher spezifizierte Anzahl von Verträgen und ihren Tarifmerkmalen, sondern fasst den gesamten Bestand als einen einzigen Vertrag auf, der Schäden generiert. Dabei ist es bedeutungslos, aus welchem Vertrag und aus welcher Periode die Schäden stammen, alle Schäden werden gleich behandelt.

**Definition 2.35.** Sei  $N$  eine diskrete Zufallsvariable mit Werten in  $\mathbb{N}_0$ , d.h.  $N : \Omega \rightarrow \mathbb{N}_0$ , und  $(X_j)_{j \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Risiken, d.h.  $X_j : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $j \in \mathbb{N}$ . Gegeben sei ein Portefeuille von Risiken in einer festen Periode, in der eine zufällige Anzahl  $N$  von Einzelschäden der zufälligen Höhe  $X_j$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , auftreten.

Das Paar  $\langle N, (X_j)_{j \in \mathbb{N}} \rangle$  heißt *Kollektives Modell*, wenn die Folge der Schadenhöhen  $(X_j)_{j \in \mathbb{N}}$  i.i.d. und unabhängig von der Gesamtanzahl  $N$  der Schadenfälle ist. Der Gesamtschaden des Bestandes ist durch  $S : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$  mit

$$S := S_N := X_1 + \dots + X_N = \sum_{j=1}^N X_j$$

definiert.

**Bemerkung 2.36.** Für einen realen Bestand gilt es abzuwägen, ob die Annahmen im Kollektiven Modell erfüllt sind:

- (i) Sofern die Risiken eines Bestandes derselben Gefahr ausgesetzt sind, man denke etwa an Konjunktur-Einflüsse, dann sind die Unabhängigkeitsannahmen möglicherweise verletzt.
- (ii) Durch die Betrachtung von Schadenhöhen einzelner Schäden, die von jedem Risiko des Bestandes verursacht werden können, ist die Verteilung der Schadenhöhe eine Eigenschaft des Bestandes und nicht eines einzelnen Risikos. Daher ist die Annahme identisch verteilter Schadenhöhen selbst im Fall eines inhomogenen Bestandes unproblematisch.

◇

Typische Verteilungen der Schadenanzahl sind etwa Binomial-, Negative Binomial- und Poisson-Verteilung (siehe Beispiel 2.1). Für die Verteilung der Schadenhöhen kommen beispielsweise die Gamma-, Lognormal- oder Pareto-Verteilung (siehe Beispiel 2.14) in Frage.

### Verteilung und Momente des Gesamtschadens

Das Hauptziel des Kollektiven Modells besteht in der Berechnung der Verteilung des Gesamtschadens aus den Verteilungen für Schadenanzahl und Schadenhöhen. Die Gesamtschadenverteilung, die sogenannte *zusammengesetzte Verteilung*, ist erforderlich, um etwa durch Anwendung eines Risikomaßes das benötigte Risikokapital zu bestimmen (siehe Abschnitt 2.2).

**Lemma 2.37.** Durch  $\langle N, (X_j)_{j \in \mathbb{N}} \rangle$  mit  $X_j \sim X$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , sei ein Kollektives Modell gegeben. Dann gilt für die Verteilungsfunktion des Gesamtschadens  $S$ :

$$F_S : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1], x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} p_n \cdot F_X^{*n}(x) \cdot \mathbb{1}_{[0, \infty)}(x),$$

wobei  $p_n := P(N = n)$  und  $F_X^{*n}$  die  $n$ -fache Faltung von  $F_X$  mit der Konvention  $F_X^{*0}(x) := 0$  sei.

*Beweis.* Gemäß Definition 2.35 gilt für alle Schadenhöhen  $X_j \geq 0$ ,  $j \in \mathbb{N}$ . Daher folgt für  $x < 0$ :  $F_S(x) = 0$ .

Aufgrund der Unabhängigkeitsannahmen des Kollektiven Modells gilt für  $x \geq 0$ :

$$\begin{aligned} F_S(x) &= P(S \leq x) = E(P(S \leq x) | N) = \sum_{n=0}^{\infty} P(N = n) \cdot P(S \leq x | N = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(N = n) \cdot P\left(\sum_{j=1}^n X_j \leq x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \cdot F_X^{*n}(x). \end{aligned}$$

□

Die Modellbildung besticht zwar durch ihre Einfachheit, ist allerdings aufgrund der Berechnung der Gesamtschadenverteilung als geschlossene Darstellung nur in wenigen Fällen möglich. Eine geeignete genaue Approximation der Gesamtschadenverteilung liefert unter anderem für Verteilungen der Schadenanzahl der sogenannten *Panjer-Klasse*, bestehend aus Poisson-, Binomial- und Negativer Binomialverteilung, der Rekursionsansatz von *Panjer*. Ein verallgemeinerter Ansatz, der nicht auf die Panjer-Klasse beschränkt ist, ist die *Fast Fourier Transformation*. Bezüglich beider Approximationsverfahren sei der interessierte Leser auf die einschlägige Literatur, wie zum Beispiel [Mac02] und [Goe+16], verwiesen.

Eine zentrale Aussage bezüglich der Momente des Gesamtschadens für das Kollektive Modell beinhalten die sogenannten *Wald'schen Gleichungen*:

**Satz 2.38.** Sei  $\langle N, (X_j)_{j \in \mathbb{N}} \rangle$  mit  $X_j \sim X$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , ein Kollektives Modell.

(i) Für  $N, X \in L^1(P)$  gilt:

$$E(S) = E(N) \cdot E(X).$$

(ii) Für  $N, X \in L^2(P)$  gilt:

$$\text{Var}(S) = \text{Var}(N) \cdot E^2(X) + E(N) \cdot \text{Var}(X).$$

*Beweis.* Mit Hilfe der Rechenregeln für bedingte Erwartungswerte (vergleiche [Kle13b]) gilt

(i) für den Erwartungswert des Gesamtschadens  $S$ :

$$\begin{aligned} E(S) &= E(E(S | N)) = E\left(\sum_{j=1}^N E(X_j | N)\right) = E\left(\sum_{j=1}^N E(X)\right) = E(N \cdot E(X)) \\ &= E(N) \cdot E(X). \end{aligned}$$

(ii) für die Varianz des Gesamtschadens  $S$ :

$$\begin{aligned} \text{Var}(S) &= \text{Var}(E(S | N)) + E(\text{Var}(S | N)) = \text{Var}(N \cdot E(X)) + E(N \cdot \text{Var}(X)) \\ &= \text{Var}(N) \cdot E^2(X) + E(N) \cdot \text{Var}(X). \end{aligned}$$

□

Aus Satz 2.38 ergibt sich direkt eine Darstellung für den Variationskoeffizienten des Gesamtschadens:

**Korollar 2.39.** Sei  $\langle N, (X_j)_{j \in \mathbb{N}} \rangle$  mit  $X_j \sim X$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , ein Kollektives Modell mit  $N, X \in L^2(P)$ , dann gilt:

$$VKo(S) = VKo(N) + \frac{VKo(X)}{E(N)}.$$

Ein Verfahren zur Berechnung der charakteristischen Funktion von zusammengesetzten Verteilungen liefert folgender Satz gemäß [HM90] bzw. [Kle13b]:

**Satz 2.40.** Sei  $\langle N, (X_j)_{j \in \mathbb{N}} \rangle$  ein ein Kollektives Modell.  $N$  besitze die Erzeugendenfunktion  $\psi_N$  und  $X_j \sim X$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , die charakteristische Funktion  $\varphi_X$ . Dann gilt für die charakteristische Funktion  $\varphi_S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  der zusammengesetzten Verteilung  $S = \sum_{j=1}^N X_j$ :

$$\varphi_S(t) = \psi_N(\varphi_X(t)).$$

*Beweis.* Aufgrund der Unabhängigkeitsannahmen bezüglich  $N, X_j, j \in \mathbb{N}$ , gilt:

$$\begin{aligned} \varphi_S(t) &= E(e^{itS}) = E\left(e^{it \sum_{j=1}^N X_j}\right) = E\left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{N=n\}} \cdot e^{it \sum_{j=1}^n X_j}\right) \\ &= E\left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{N=n\}} \cdot \prod_{j=1}^n e^{itX_j}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n) \cdot E\left(\prod_{j=1}^n e^{itX_j}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n) \cdot \prod_{j=1}^n E(e^{itX_j}) = \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n) \cdot (E(e^{itX}))^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n) \cdot (\varphi_X(t))^n = E\left((\varphi_X(t))^N\right) \\ &= \psi_N(\varphi_X(t)). \end{aligned}$$

□

**Korollar 2.41.** Ist in Satz 2.40 speziell  $N \sim Poi(\lambda)$ , so gilt:

$$\varphi_S(t) = e^{\lambda(\varphi_X(t)-1)}.$$

*Beweis.* Der Spezialfall folgt unmittelbar wegen  $\psi_N(t) = e^{\lambda(t-1)}$  gemäß Beispiel 2.1 für  $t \in \mathbb{C}$  mit  $|t| \leq 1$ . □

Im Kontext einer zusammengesetzten Poisson-Verteilung ist deren Faltung wiederum zusammengesetzt Poisson-verteilt, wie der folgende Satz gemäß Satz gemäß [HM90] abschließend zeigt.

**Satz 2.42.** Sei  $(N_j)_{j \in J}$  eine Folge stochastisch unabhängiger, Poisson-verteilter Zufallsvariablen mit  $N_j \sim Poi(\lambda_j)$ ,  $\lambda_j \in \mathbb{R}_+$ ,  $j \in J := \{1, \dots, n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Ferner sei  $\langle N_j, (X_{j,k})_{k \in \mathbb{N}} \rangle$  für  $j \in J$  ein Kollektives Modell mit  $X_{j,k} \sim X_{j,\cdot}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , und Gesamtschaden

$$S_j := \sum_{k=1}^{N_j} X_{j,k}.$$

Dann besitzt die Summe unabhängiger Poisson-Schadensummen

$$S := \sum_{j=1}^n S_j = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{N_j} X_{j,k}$$

mit stochastisch unabhängigen  $S_j$ ,  $j \in J$ , eine zusammengesetzte Poisson-Verteilung, die durch das kollektive Modell  $\langle N, (X_j)_{j \in \mathbb{N}} \rangle$  mit  $X_j \sim X$ ,  $j \in \mathbb{N}$ ,

$$N \sim Poi(\lambda) := Poi\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j\right), \quad F_X := \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{\lambda} F_{X_{j,\cdot}}$$

darstellbar ist. Hierbei bezeichne  $F_{X_{j,\cdot}}$  die Verteilungsfunktion von  $X_{j,\cdot}$ .

*Beweis.* Für die charakteristische Funktion von  $S$  gilt aufgrund der stochastischen Unabhängigkeit der  $S_j$ ,  $j \in J$ :

$$\varphi_S(t) = E(e^{itS}) = E\left(e^{it \sum_{j=1}^n S_j}\right) = E\left(\prod_{j=1}^n e^{itS_j}\right) = \prod_{j=1}^n E(e^{itS_j}) = \prod_{j=1}^n \varphi_{S_j}(t).$$

Nach Voraussetzung ist  $\langle N_j, (X_{j,k})_{k \in \mathbb{N}} \rangle$  ein kollektives Modell mit  $N_j \sim Poi(\lambda_j)$ ,  $j \in J$ . Gemäß Korollar 2.41 gilt dann für die charakteristische Funktion von  $S_j$ :

$$\varphi_{S_j}(t) = e^{\lambda_j(\varphi_{X_{j,\cdot}}(t) - 1)}.$$

Es folgt mit  $\lambda = \sum_{j=1}^n \lambda_j$ :

$$\begin{aligned} \varphi_S(t) &= \prod_{j=1}^n \varphi_{S_j}(t) = \prod_{j=1}^n \exp\left\{\lambda_j \cdot (\varphi_{X_{j,\cdot}}(t) - 1)\right\} = \exp\left\{\sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot (\varphi_{X_{j,\cdot}}(t) - 1)\right\} \\ &= \exp\left\{\lambda \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{\lambda} \cdot (\varphi_{X_{j,\cdot}}(t) - 1)\right\} = \exp\left\{\lambda \left(\sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{\lambda} \cdot \varphi_{X_{j,\cdot}}(t) - \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{\lambda}\right)\right\} \\ &= \exp\left\{\lambda \left(\sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{\lambda} \cdot \varphi_{X_{j,\cdot}}(t) - 1\right)\right\}. \end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{\lambda} \cdot \varphi_{X_{j,\cdot}}(t) &= \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{\lambda} \cdot \int_0^\infty e^{itx} d(F_{X_{j,\cdot}}(x)) = \int_0^\infty e^{itx} d\left(\sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{\lambda} \cdot F_{X_{j,\cdot}}(x)\right) \\ &= \int_0^\infty e^{itx} d(F_X(x)) = \varphi_X(t) \end{aligned}$$

erhält man:

$$\varphi_S(t) = \exp\{\lambda(\varphi_X(t) - 1)\} = \psi_N(\varphi_X(t)).$$

□

Praktische Anwendungen für Satz 2.42 sind etwa die Aggregation von Ereignisschäden zu einem Jahresgesamtschaden oder die Aggregation von Jahresgesamtschäden verschiedener Geschäftsbereiche.

## 2.5. Modellierung

Die im bisherigen Verlauf dieser Arbeit verwendeten Begriffe „Modell“ bzw. „Modellierung“ werden im Folgenden spezifiziert. Unter einem *Modell* wird ein stark vereinfachtes Abbild der Realität verstanden, das in allen für das Untersuchungsziel wesentlichen Aspekten der Realität möglichst genau entsprechen soll. Motiviert aus praxisbezogenen Fragestellungen besteht die Aufgabe folglich darin, das geeignetste - bzw. wenigstens ein geeignetes - Modell zur Beantwortung zu finden. [Mac02] beschreibt dies wie folgt:

*„Ein Modell ist geeignet, wenn es die für die Fragestellung wesentlichen Aspekte der Realität möglichst genau abbildet und dabei noch so einfach bleibt, dass die Fragestellung mit erträglichem Aufwand innerhalb des Modells beantwortet werden kann.“*

Unter Berücksichtigung des *Actuarial Control Cycles* gemäß [Gof85] und [Bel+03], der vereinfacht die Schritte

1. Identifizierung und Spezifizierung des Problems
2. Entwicklung und Implementierung der Lösung
3. Überwachung der Ergebnisse

stetig wiederholt, besteht der Kern des Modellierungsprozesses aus der Modellspezifikation. Auf Basis bestehender und adäquater Daten gilt es dann, die für das Modell relevanten Parameter zu schätzen und deren Anpassungsgüte zu testen. Daran schließt die Berechnung und Validierung der Prognose an.

### Mathematische Statistik

Wie erwähnt, besteht im Rahmen des Schätzprozesses die Aufgabe in der vollständigen Spezifizierung der Verteilungsgesetze aller relevanten Modellgrößen. Dazu wird im Folgenden der mathematisch statistische Rahmen gemäß [Pru00] aufgespannt:

Durch den  $\mathbb{R}^n$ -wertigen Zufallsvektor  $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)^T : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , auf dem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  mit stochastisch unabhängigen  $Y_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , sei eine beliebige, aber feste Modellgröße bezeichnet. Es wird angenommen, dass die Verteilung von  $\mathbf{Y}$ , beschrieben durch das Wahrscheinlichkeitsmaß  $P^{\mathbf{Y}}$ , aus einer bekannten (parametrischen) Verteilungsfamilie  $\mathcal{P}$  auf  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$  stammt, die mittels des Parameterraums  $\Theta \subseteq \mathbb{R}^d$ ,  $d \in \mathbb{N}$ , als Borel-Menge in der Form  $P_{\boldsymbol{\vartheta}}$ ,  $\boldsymbol{\vartheta} = (\vartheta_1, \dots, \vartheta_d)^T \in \Theta$ , angegeben wird:

$$\mathcal{P} := \{P_{\boldsymbol{\vartheta}} : \boldsymbol{\vartheta} \in \Theta\} \neq \emptyset$$

mit  $P_{\boldsymbol{\vartheta}} \neq P_{\boldsymbol{\vartheta}'}$ , falls  $\boldsymbol{\vartheta} \neq \boldsymbol{\vartheta}'$  gilt. Durch  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n, \mathcal{P})$  ist dann ein *statistischer Raum* gegeben. Die Verteilung von  $\mathbf{Y}$  ist bis auf einen unbekanntem Parameter vollständig spezifiziert. Somit ist derjenige Parameter  $\boldsymbol{\vartheta}_* \in \Theta$  bzw. das Element  $P_{\boldsymbol{\vartheta}_*} \in \mathcal{P}$  zu bestimmen, sodass  $P_{\boldsymbol{\vartheta}_*} = P^{\mathbf{Y}}$ .

Da  $\vartheta_*$  in der Regel unbekannt ist, ist dieser aus den Beobachtungen bestmöglich zu schätzen. Ausgangspunkt dafür ist eine gegebene Stichprobe  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^T \in \mathbb{R}^n$  vom Umfang  $n$  als Realisation des reellen Zufallsvektors  $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)^T$ . Mit Hilfe der Stichprobe  $\mathbf{y}$  sollen Rückschlüsse auf den zugrunde liegenden „wahren“ Parameterwert  $\vartheta_*$  gezogen werden. Dies geschieht mittels sogenannter *Punktschätzer*. Ein Punktschätzer für  $\vartheta_*$  ist dabei eine messbare Abbildung  $\hat{\vartheta} : (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n) \rightarrow (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d)$ , die funktional nicht von  $\vartheta$  abhängt. Durch den Punktschätzer als Funktion der Beobachtungen  $\mathbf{y}$  werden die in der Stichprobe enthaltenen Informationen über den Parameter  $\vartheta_*$  zu einem konkreten Wert  $\hat{\vartheta}(y_1, \dots, y_n)$  verdichtet. Die Schätzung  $\hat{\vartheta}(y_1, \dots, y_n)$  kann als Realisierung der entsprechenden Zufallsvariablen bzw. der Schätzvariablen  $\hat{\vartheta}(Y_1, \dots, Y_n)$  aufgefasst werden.

Zusammenfassend erhält man das dreistufige Schema:

$$(\Omega, \mathcal{A}, P) \xrightarrow{\mathbf{Y}} (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n, \mathcal{P}) \xrightarrow{\hat{\vartheta}} (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d).$$

Zur Gewinnung von Punktschätzern können die klassischen Verfahren wie die Momentenmethode, die Maximum-Likelihood-Methode, die Kleinste-Quadrate-Methode sowie der Ansatz nach Bayes herangezogen werden. Beim Übergang zur Bayes-Statistik ist das parametrische Modell zu modifizieren. Anstelle der Modellannahme, dass der Parameter  $\vartheta_*$  ein zwar unbekannter, jedoch deterministischer Vektor ist, wird der Parameter selbst als Zufallsvektor  $\Lambda$  aufgefasst. Weiterhin wird unterstellt, dass gewisse Vorkenntnisse über die Verteilung von  $\Lambda$  bestehen. Diese Vorkenntnis wird durch die sogenannte *a-priori-Verteilung* über dem Parameterraum modelliert. An dieser Stelle sei ergänzend auf [BG05] verwiesen.

Die genannten Methoden ermöglichen ein systematisches Vorgehen bei der Wahl der Borel-messbaren Abbildung  $\hat{\vartheta} : \mathbb{R}^n \rightarrow \Theta$ , um den unbekannt Parametervektor  $\vartheta_*$  zu schätzen. Es kann also vorkommen, dass für ein und dasselbe Schätzproblem verschiedene Punktschätzer zur Verfügung stehen. Deshalb ist es nützlich, Güteeigenschaften zur Bewertung von Punktschätzern zu untersuchen. Dazu zählen unter anderem Erwartungstreue, Suffizienz, Vollständigkeit sowie asymptotische Eigenschaften von Punktschätzern wie Konsistenz und asymptotische Verteilungseigenschaften. Ebenfalls von Interesse ist die Konstruktion von Konfidenzintervallen sowie das Testen von Hypothesen über den Parameter  $\vartheta_*$ .

Durch die Verbindung von Realität und Modell in Form von Beobachtungen ist die Einordnung in einen mathematisch statistischen Rahmen erforderlich. Wie die vorangegangenen Ausführungen verdeutlichen, eröffnet diese Verbindung gleichzeitig weitere Untersuchungsfelder im Bereich der mathematischen Statistik.

### Risikoquellen bei der Modellierung

Aufgrund der Modellspezifikation sind die eingangs von Kapitel 2 genannten Risikokomponenten für das vt. Risiko um das *Modellierungsrisiko*, das die Wahl eines falschen Modells oder die Verwendung falscher bzw. fehlerhafter Daten umfasst, zu erweitern. Neben dem Änderungsrisiko, dass ein ehemals korrektes Modell nicht mehr zur aktuellen Risikolandschaft passt, ist auch für das Modellierungsrisiko naturgemäß keine quantitative Abschätzung möglich.

Im Gegensatz dazu handelt es sich beim Prämien- und Reserverisiko um sogenannte *Vorhersagerisiken*, die sich aus den bereits erwähnten Zufalls- bzw. Prozessrisiko sowie Irrtums- bzw. Parameterrisiko zusammensetzen. Während das Prozessrisiko die modellinhärente Unsicherheit durch den eigentlichen Zufallsprozess beschreibt, ist im Kontext des aufgespannten mathematisch statistischen Rahmens  $\widehat{\boldsymbol{\vartheta}}(Y_1, \dots, Y_n)$  wiederum eine Zufallsgröße, die zufallsbedingten Schwankungen unterliegt. Die Abweichung zum „wahren“ Parameter  $\boldsymbol{\vartheta}_*$  wird als Parameterrisiko bezeichnet und induziert wiederum eine Schätzunsicherheit über die aus  $\widehat{\boldsymbol{\vartheta}}(Y_1, \dots, Y_n)$  abgeleiteten Schätzer für die risikorelevanten Kennzahlen der Verteilung für die Modellgröße  $\mathbf{Y}$ .

Bei gegebener Verteilungsfamilie  $\mathcal{P}$  sind

- das gewählte Parameterschätzverfahren  $\mathcal{T}$ ,
- die Ausprägung des wahren Parameters  $\boldsymbol{\vartheta}_*$ ,
- und der endliche Umfang der Beobachtungen

die Einflussgrößen auf die Volatilität des Parameterschätzers  $\widehat{\boldsymbol{\vartheta}}(Y_1, \dots, Y_n)$ . Folglich ist eine Reproduktion des „wahren“ Parameters  $\boldsymbol{\vartheta}_*$  im Allgemeinen nicht möglich.

### Parameter- und Prozessrisiko

Im Folgenden werden zunächst allgemein die das Prozess- und Parameterrisiko definierenden Varianzen hergeleitet.

**Bemerkung 2.43.** Bezeichne  $\widehat{Y}$  den Schätzer für ein Risiko  $Y$ . Unter der Annahme, dass  $Y$  und  $\widehat{Y}$  stochastisch unabhängig sind, gilt gemäß [Die07a] bzw. [Die07b] für den *Mean Squared Error (MSE)*:

$$\begin{aligned}
 MSE(\widehat{Y}) &= E \left[ (Y - \widehat{Y})^2 \right] \\
 &= E \left[ \left\{ (Y - E(Y)) + (E(Y) - E(\widehat{Y})) + (E(\widehat{Y}) - \widehat{Y}) \right\}^2 \right] \\
 &= E \left[ (Y - E(Y))^2 + (E(Y) - E(\widehat{Y}))^2 + (E(\widehat{Y}) - \widehat{Y})^2 \right. \\
 &\quad \left. + 2 \cdot (Y - E(Y)) \cdot (E(Y) - E(\widehat{Y})) \right. \\
 &\quad \left. + 2 \cdot (Y - E(Y)) \cdot (E(\widehat{Y}) - \widehat{Y}) \right. \\
 &\quad \left. + 2 \cdot (E(Y) - E(\widehat{Y})) \cdot (E(\widehat{Y}) - \widehat{Y}) \right] \\
 &= E \left[ (Y - E(Y))^2 + (E(Y) - E(\widehat{Y}))^2 + (E(\widehat{Y}) - \widehat{Y})^2 \right] \\
 &\quad + 2 \cdot E \left[ Y \cdot E(Y) - Y \cdot E(\widehat{Y}) - E^2(Y) + E(Y) \cdot E(\widehat{Y}) \right] \\
 &\quad + 2 \cdot E \left[ Y \cdot E(\widehat{Y}) - Y \cdot \widehat{Y} - E(Y) \cdot E(\widehat{Y}) + \widehat{Y} \cdot E(Y) \right] \\
 &\quad + 2 \cdot E \left[ E(Y) \cdot E(\widehat{Y}) - \widehat{Y} \cdot E(Y) - E^2(\widehat{Y}) + \widehat{Y} \cdot E(\widehat{Y}) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \text{Var}(Y) + \left(E(Y) - E(\widehat{Y})\right)^2 + \text{Var}(\widehat{Y}) \\
&\quad + 2 \cdot E(Y) \cdot E(Y) - 2 \cdot E(Y) \cdot E(\widehat{Y}) - 2 \cdot E^2(Y) + 2 \cdot E(Y) \cdot E(\widehat{Y}) \\
&\quad + 2 \cdot E(Y) \cdot E(\widehat{Y}) - 2 \cdot E(Y) \cdot E(\widehat{Y}) - 2 \cdot E(Y) \cdot E(\widehat{Y}) + 2 \cdot E(\widehat{Y}) \cdot E(Y) \\
&\quad + 2 \cdot E(Y) \cdot E(\widehat{Y}) - 2 \cdot E(\widehat{Y}) \cdot E(Y) - E^2(\widehat{Y}) + 2 \cdot E^2(\widehat{Y}) \\
&= \text{Var}(Y) + \left(E(Y) - E(\widehat{Y})\right)^2 + \text{Var}(\widehat{Y}).
\end{aligned}$$

Dann wird das *Zufalls-* bzw. *Prozessrisiko* von  $Y$  durch  $\text{Var}(Y)$  und das *Irrtums-* bzw. *Parameterrisiko* von  $\widehat{Y}$  durch  $\text{Var}(\widehat{Y})$  charakterisiert.  $E(Y) - E(\widehat{Y})$  beschreibt gerade den Bias, der im Falle eines erwartungstreuen Schätzers gleich Null ist. Der Ausdruck

$$RMSE := \sqrt{E \left[ (Y - \widehat{Y})^2 \right]}$$

definiert den *Vorhersagefehler*, den sogenannten *Root Mean Squared Error (RMSE)*, und stellt eine Messgröße für das Prämienrisiko dar. Durch

$$r.e.(\widehat{Y}) := \sqrt{\text{Var}(Y)},$$

werde der Zufalls- bzw. Prozessfehler, der sogenannte *Random Error (r.e.)*, sowie durch

$$e.e.(\widehat{Y}) := \sqrt{\text{Var}(\widehat{Y})}$$

der Irrtums- bzw. Parameterfehler, der sogenannte *Estimation Error (e.e.)*, bezeichnet.  $\diamond$

Die allgemeine Darstellung von Prozess- und Parameterrisiko wird nun im Kontext des Kollektiven Modells gemäß Definition 2.35 betrachtet.

Einerseits existieren zufallsabhängige Schwankungen von Schadenanzahl und Schadenhöhe um den Erwartungswert, beschrieben durch das Zufalls- bzw. Prozessrisiko. Andererseits existiert bezüglich des Irrtums- bzw. Parameterrisikos eine Unsicherheit in den Parametern der Verteilung, die beispielsweise den Erwartungswert und die Varianz parametrisieren. Diese sind unbekannt und müssen geschätzt werden, was mit einer Unsicherheit behaftet ist, da entweder die Schätzung der Parameter selbst unsicher ist oder sich die Parameter in der Zeit aufgrund äußerer Umstände, beschrieben durch eine Zufallsvariable, ändern.

**Bemerkung 2.44.** Die Gesamtheit der äußeren Umstände werde durch die diskrete Zufallsvariable  $\Theta : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$  beschrieben.  $\Theta$  kann dabei als *Risikocharakteristik* aufgefasst werden und berücksichtigt insbesondere die äußeren Einflüsse, die nicht durch den Risikoausgleich im Kollektiv abgefangen werden.

Bei gegebener Risikocharakteristik  $\Theta$  bezeichne  $[X \mid \Theta = \vartheta] : \Theta^{-1}(\vartheta) \rightarrow \mathbb{R}$  das auf  $\{\Theta = \vartheta\}$  bedingte zufallsabhängige Risiko für ein Risiko  $X$ .  $\diamond$

**Lemma 2.45.** Sei  $\langle N, (X_j)_{j \in \mathbb{N}} \rangle$  ein Kollektives Modell und durch  $\Theta$  eine Risikocharakteristik gegeben, dann gilt:

$$\text{Var}(S) = E(\text{Var}(S \mid \Theta)) + \text{Var}(E(S \mid \Theta))$$

*Beweis.* Mit Hilfe der bedingten Varianz  $Var(S | \Theta) := E(S^2 | \Theta) - E^2(S | \Theta)$  gilt für die Varianz des Gesamtschadens  $S$ :

$$\begin{aligned} Var(S) &= E(S^2) - E^2(S) = E(E(S^2 | \Theta)) - E^2(E(S | \Theta)) \\ &= E(Var(S | \Theta) + E^2(S | \Theta)) - E^2(E(S | \Theta)) \\ &= E(Var(S | \Theta)) + Var(E(S | \Theta)). \end{aligned}$$

□

**Bemerkung 2.46.**  $Var(E(S | \Theta))$  beschreibt das Parameterrisiko für den Gesamtschaden  $S$  im Kollektiven Modell, das die Variabilität der Modellparameter darstellt, die durch äußere Umstände verursacht werden.

Der Ausdruck  $E(Var(S | \Theta))$  ist das Prozessrisiko, das aus der Unsicherheit bezüglich der Höhe des Gesamtschadens bei gegebenem Risikoparameter  $\Theta$ , d.h. bei gegebenem Erwartungswert und Varianz der Gesamtschadenverteilung, besteht. ◇

Im Fall Poisson-verteilter Schadenanzahlen gemäß der Situation in Satz 2.42 gilt für die Variationskoeffizienten:

**Satz 2.47.** Sei  $(N_j)_{j \in J}$  eine unter der Risikocharakteristik  $\Theta_j$ -bedingte Folge stochastisch unabhängiger, Poisson-verteilter Zufallsvariablen mit  $[N_j | \Theta_j = \vartheta] \sim Poi(\lambda_j(\vartheta))$ ,  $\lambda_j(\vartheta) \in \mathbb{R}_+$ ,  $\vartheta \in \Theta_j(\Omega) \subset \mathbb{R}$ ,  $j \in J := \{1, \dots, n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Weiterhin sei  $\langle N_j, (X_{jk})_{k \in \mathbb{N}} \rangle$  für  $j \in J$  ein unter  $\Theta_j$ -bedingtes Kollektives Modell mit  $[X_{jk} | \Theta_j = \vartheta] \sim [X_j. | \Theta_j = \vartheta]$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , und Gesamtschaden

$$S_j := \sum_{k=1}^{N_j} X_{jk}.$$

Bedingt unter der Risikocharakteristik ist insbesondere die Folge der Schadenhöhen i.i.d. und unabhängig von der Anzahl der Schadenfälle.

Die Risikocharakteristik  $\Theta_j = (\Theta_{N_j}, \Theta_{X_j.})$  selbst zerfalle in zwei unabhängige Teile  $\Theta_{N_j}$  und  $\Theta_{X_j.}$ , wobei  $\Theta_{N_j}$  nur auf  $\lambda_j(\Theta_j)$  und  $\Theta_{X_j.}$  nur auf  $E(X_j^2 | \Theta_j)$  wirke.

Dann gilt für den Variationskoeffizienten des Gesamtschadens:

$$VKo^2(S_j) = VKo^2(E(S_j | \Theta_j)) + \frac{1}{E(N_j)} \cdot (VKo^2(X_j.) + 1).$$

*Beweis.* Für  $j \in J$  gilt für die Momente der Schadenanzahlverteilung:

$$E(N_j | \Theta_j = \vartheta) = Var(N_j | \Theta_j = \vartheta) = \lambda_j(\vartheta).$$

Weiterhin gilt mit Hilfe der Wald'schen Gleichung in Satz 2.38 und des Verschiebungssatzes für die Varianz,  $j \in J$ :

$$Var(S_j | \Theta_j = \vartheta) = E(N_j | \Theta_j = \vartheta) \cdot Var(X_j. | \Theta_j = \vartheta)$$

$$\begin{aligned}
& + \text{Var}(N_j | \Theta_j = \vartheta) \cdot E^2(X_{j\cdot} | \Theta_j = \vartheta) \\
& = \lambda_j(\vartheta) \cdot \text{Var}(X_{j\cdot} | \Theta_j = \vartheta) + \lambda_j(\vartheta) \cdot E^2(X_{j\cdot} | \Theta_j = \vartheta) \\
& = \lambda_j(\vartheta) \cdot (\text{Var}(X_{j\cdot} | \Theta_j = \vartheta) + E(X_{j\cdot} | \Theta_j = \vartheta)) \\
& = \lambda_j(\vartheta) \cdot E(X_{j\cdot}^2 | \Theta_j = \vartheta)
\end{aligned}$$

Durch Bildung des Erwartungswertes über  $\Theta_j$  erhält man:

$$E(\text{Var}(S_j | \Theta_j)) = E(\lambda_j(\Theta_j) \cdot E(X_{j\cdot}^2 | \Theta_j)) = E(N_j) \cdot E(X_{j\cdot}^2),$$

wobei an dieser Stelle die Unabhängigkeitsannahme von  $\Theta_{N_j}$  und  $\Theta_{X_{j\cdot}}$  ausgenutzt wird.

Insgesamt erhält man für den Variationskoeffizienten:

$$\begin{aligned}
VKo^2(S_j) &= \frac{\text{Var}(E(S_j | \Theta_j))}{E^2(S_j)} + \frac{E(\text{Var}(S_j | \Theta_j))}{E^2(S_j)} \\
&= VKo^2(E(S_j | \Theta_j)) + \frac{E(N_j) \cdot E(X_{j\cdot}^2)}{E^2(N_j) \cdot E^2(X_{j\cdot})} \\
&= VKo^2(E(S_j | \Theta_j)) + \frac{E(X_{j\cdot}^2) - E^2(X_{j\cdot}) + E^2(X_{j\cdot})}{E(N_j) \cdot E^2(X_{j\cdot})} \\
&= VKo^2(E(S_j | \Theta_j)) + \frac{\text{Var}(X_{j\cdot}) + E^2(X_{j\cdot})}{E(N_j) \cdot E^2(X_{j\cdot})} \\
&= VKo^2(E(S_j | \Theta_j)) + \frac{1}{E(N_j)} \cdot (VKo^2(X_{j\cdot}) + 1).
\end{aligned}$$

□

**Bemerkung 2.48.**  $VKo^2(E(S_j | \Theta_j))$  beschreibt das Parameterrisiko und damit die Variabilität der Modellparameter, die durch äußere Umstände verursacht werden.

$\frac{1}{E(N_j)} \cdot (VKo^2(X_{j\cdot}) + 1)$  beschreibt das Zufallsrisiko und damit die Schwankungen von Schadenanzahl und Schadenhöhe um ihren Erwartungswert. ◇

## 2.6. Heavy-tailed und subexponentielle Verteilungen

Im Kontext des Kollektiven Modells gemäß Abschnitt 2.4 stellt sich die Frage nach der Modellierung der Schadenhöhen. Die eingangs von Kapitel 2 genannten Risiken bezüglich großer Personenschäden in KH oder durch Feuer verursachte Sachschäden besitzen *Großschaden-Potential*, wobei ein Großschaden als ein Schaden oberhalb einer vorgegebenen Grenze zu verstehen ist. Charakteristisch für Großschäden ist, dass diese einerseits relativ selten sind, andererseits einen erheblichen Aufwand am Gesamtschaden besitzen. Zur Modellierung der Schadenhöhen eignen sich insbesondere *heavy-tailed Verteilungen*, die im Folgenden in Anlehnung an [Rol+98], ergänzt durch [EKM97], untersucht werden.

### 2.6.1. Heavy-tailed Verteilungen

**Definition 2.49.** Sei  $X$  ein Risiko mit Verteilungsfunktion  $F_X$ .

$$\bar{F}_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1], \quad x \mapsto 1 - F_X(x) = 1 - P(X \leq x) = P(X > x)$$

heißt Tail-Funktion der Verteilung von  $X$ . Weiterhin heißt das Risiko  $X$  gutartig, falls die Tail-Funktion der Verteilung von  $X$  für Konstanten  $a, b \in (0, \infty)$  eine exponentielle Schranke besitzt:

$$\bar{F}_X(x) \leq a \cdot e^{-bx}, \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

Sofern keine obere exponentielle Schranke existiert, ist von einem gefährlichen Risiko die Rede.

**Definition 2.50.** Sei  $X$  ein Risiko mit Verteilungsfunktion  $F_X$ .  $F_X$  besitzt einen schweren (heavy) Tail bzw. ist heavy-tailed, falls für die momenterzeugende Funktion  $M_X$  gilt:

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_0^\infty e^{tx} dF_X(x) = \infty \quad \forall t > 0.$$

Der folgende Satz liefert die Beziehung zwischen Definition 2.49 und Definition 2.50.

**Satz 2.51.** Sei  $X$  ein Risiko mit Verteilungsfunktion  $F_X$ .

(i) Für ein  $t_0 \in (0, \infty)$  sei  $M_X(t_0) < \infty$ . Dann existiert ein  $a \in (0, \infty)$  derart, dass für alle  $x \in \mathbb{R}_+$  die Ungleichung

$$\bar{F}_X(x) \leq a \cdot e^{-t_0 x}$$

gilt. Ist umgekehrt die Ungleichung erfüllt, so ist  $M_X(t) < \infty$  für alle  $t \in [0, t_0]$ .

(ii) Analog, für ein  $t_0 \in (-\infty, 0)$  sei  $M_X(t_0) < \infty$ . Dann existiert ein  $a \in (0, \infty)$  derart, dass für alle  $x \leq 0$  die Ungleichung

$$F_X(x) \leq a \cdot e^{-t_0 x}$$

gilt. Ist umgekehrt die Ungleichung erfüllt, so ist  $M_X(t) < \infty$  für alle  $t \in (t_0, 0]$ .

Für den Beweis sei der interessierte Leser auf [Rol+98] verwiesen.

Satz 2.51 zeigt Zweierlei:

- Einerseits konvergiert die Tail-Funktion eines gefährlichen Risikos  $X$  für  $x \rightarrow \infty$  langsamer als  $e^{-bx}$  gegen Null. Daraus folgt allerdings nicht, dass  $E(X^k) = \infty$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .
- Andererseits bedeutet die Existenz aller Momente von  $X$  nicht, dass  $X$  einen leichten Tail hat.

Zur Charakterisierung von heavy-tailed Verteilungen wird zunächst der Begriff der *Hazard-Funktion* eingeführt.

**Definition 2.52.** Sei  $X$  ein Risiko mit Verteilungsfunktion  $F_X$ . Dann heißt die Funktion

$$h_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto -\ln(1 - F_X(x)) = -\ln(\bar{F}_X(x))$$

Hazard-Funktion von  $F_X$ .

**Satz 2.53.** Sei  $X$  ein Risiko mit Verteilungsfunktion  $F_X$  und Hazard-Funktion  $h_X$ . Falls

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{h_X(x)}{x} = 0$$

gilt, dann ist  $F_X$  heavy-tailed.

*Beweis.* Nach Voraussetzung gilt:

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{h_X(x)}{x} = 0.$$

Dann existiert für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $x_0 > 0$  derart, dass  $0 \leq \sup_{x \geq y} h_X(x) < \varepsilon$  für alle  $y > x_0$ . Per Definition 2.52 gilt für alle  $x > x_0$ :

$$\ln(\bar{F}_X(x)) > -\varepsilon \cdot x \Leftrightarrow \bar{F}_X(x) > e^{-\varepsilon x}.$$

Somit gilt für  $t > \varepsilon$ :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{tx} \cdot \bar{F}_X(x) dx &= \int_0^{x_0} e^{tx} \cdot \bar{F}_X(x) dx + \int_{x_0}^\infty e^{tx} \cdot \bar{F}_X(x) dx \\ &\geq \int_{x_0}^\infty e^{tx} \cdot e^{-\varepsilon x} dx = \int_{x_0}^\infty e^{x(t-\varepsilon)} dx = \infty \end{aligned}$$

Aufgrund der beliebigen Wahl von  $\varepsilon > 0$  ist

$$\int_0^\infty e^{tx} \cdot \bar{F}_X(x) dx = \infty$$

für alle  $t > 0$ .

Gemäß Definition 2.50 bleibt zu zeigen, dass aus dem Vorangegangenen für die momenterzeugende Funktion  $M_X$  gilt:

$$M_X(t) = \infty, t > 0.$$

Dazu werde angenommen, dass ein  $t_0 > 0$  derart existiere, dass  $M_X(t_0) < \infty$ . Gemäß Satz 2.51 existiert dann ein  $a > 0$ , sodass  $\bar{F}_X(x) \leq a \cdot e^{-t_0 x}$  für alle  $x \in \mathbb{R}_+$  gilt. Es folgt für alle  $t < t_0$ :

$$\int_0^\infty e^{tx} \cdot \bar{F}_X(x) dx \leq a \cdot \int_0^\infty e^{tx} \cdot e^{-t_0 x} dx = a \cdot \int_0^\infty e^{-x(t_0 - t)} dx < \infty.$$

Dies steht im Widerspruch zu  $\int_{x_0}^\infty e^{x(t-\varepsilon)} dx = \infty$  für alle  $t > 0$ . Somit folgt, dass  $M_X(t) = \infty$  für alle  $t > 0$  und dass insbesondere  $F_X$  heavy-tailed ist.  $\square$

Im Folgenden wird der Fokus auf die Klasse der subexponentiellen Verteilungen gerichtet, die für die Modellierung von Großschäden relevant ist.

### 2.6.2. Subexponentielle Verteilungen

**Definition 2.54.** Eine Verteilungsfunktion  $F_X$  mit  $F_X(x) < 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , eines Risikos  $X$  heißt subexponentiell, falls

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F_X^{*2}(x)}{1 - F_X(x)} = 2$$

gilt, wobei  $F_X^{*2}$  die zweifache Faltung von  $F_X$  bezeichne.

**Bemerkung 2.55.** Bezug nehmend auf Definition 2.54:

- (i) Die Charakterisierung subexponentieller Verteilungsfunktionen basiert auf folgender Idee: Seien  $X_1, X_2 \sim X$  zwei i.i.d. Risiken mit subexponentieller Verteilungsfunktion  $F_X(x) < 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Dann gilt einerseits

$$P(X_1 + X_2 > x) = 1 - P(X_1 + X_2 \leq x) = 1 - F_X^{*2}(x)$$

und andererseits

$$\begin{aligned} P(\max\{X_1, X_2\} > x) &= 1 - P(\max\{X_1, X_2\} \leq x) = 1 - P(X_1 \leq x, X_2 \leq x) \\ &= 1 - P(X_1 \leq x) \cdot P(X_2 \leq x) \\ &= 1 - F_X^2(x) \\ &= (1 - F_X(x)) \cdot (1 + F_X(x)) \\ &= (1 - F_X(x)) \cdot \sum_{k=0}^{2-1} F_X^k(x) \\ &\sim 2 \cdot (1 - F_X(x)) = 2 \cdot \bar{F}_X(x), \quad x \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Mit dem Vorangegangenen lässt sich Definition 2.54 wie folgt notieren:

$$1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F_X^{*2}(x)}{2 \cdot (1 - F_X(x))} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F_X^{*2}(x)}{1 - F_X^2(x)}.$$

Für  $x \rightarrow \infty$  erhält man:

$$P(X_1 + X_2 > x) \sim P(\max\{X_1, X_2\} > x).$$

Im Kontext des Gesamtschadens bedeutet dies, dass dieser durch wenige Großschäden beeinflusst wird.

- (ii) Wegen

$$F_X^{*2}(x) = P(X_1 + X_2 \leq x) \leq P(\max\{X_1, X_2\} \leq x) = F_X^2(x)$$

folgt insbesondere:

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F_X^{*2}(x)}{1 - F_X(x)} \geq \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F_X^2(x)}{1 - F_X(x)} = \liminf_{x \rightarrow \infty} 1 + F_X(x) = 2.$$

Somit handelt es sich beim Grenzwert in Definition 2.54 um das Minimum und

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F_X^{*2}(x)}{1 - F_X(x)} \leq 2$$

ist eine alternative Definition für subexponentielle Verteilungen.

(iii) Notiert man

$$\begin{aligned} \frac{1 - F_X^{*2}(x)}{1 - F_X(x)} - 1 &= \frac{F_X(x) - F_X^{*2}(x)}{1 - F_X(x)} = \frac{\int_0^x 1 \, dF_X(y) - \int_0^x F_X(x-y) \, dF_X(y)}{1 - F_X(x)} \\ &= \int_0^x \frac{1 - F_X(x-y)}{1 - F_X(x)} \, dF_X(y), \end{aligned}$$

so ergibt sich eine weitere Variante zur Definition subexponentieller Verteilungen:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x \frac{1 - F_X(x-y)}{1 - F_X(x)} \, dF_X(y) = 1.$$

(iv) Definition 2.54 ist verallgemeinerbar: Es lässt sich zeigen, dass eine Verteilungsfunktion  $F_X$  eines Risikos  $X$  genau dann subexponentiell ist, wenn für  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ ,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F_X^{*n}(x)}{1 - F_X(x)} = n$$

gilt (vergleiche [Rol+98]).

◇

Betrachtet werden nun Eigenschaften subexponentieller Funktionen:

**Lemma 2.56.** *Sei  $X$  ein Risiko mit subexponentieller Verteilungsfunktion  $F_X$ , dann gilt für alle  $x_0 \in \mathbb{R}$ :*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F_X(x - x_0)}{1 - F_X(x)} = 1.$$

*Beweis.* Sei  $x_0 \geq 0$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \frac{1 - F_X^{*2}(x)}{1 - F_X(x)} - 1 &= \int_0^{x_0} \frac{1 - F_X(x-t)}{1 - F_X(x)} \, dF_X(t) + \int_{x_0}^x \frac{1 - F_X(x-t)}{1 - F_X(x)} \, dF_X(t) \\ &\geq F_X(x_0) + \frac{1 - F_X(x - x_0)}{1 - F_X(x)} \cdot (F_X(x) - F_X(x_0)). \end{aligned}$$

Es folgt:

$$1 \leq \frac{1 - F_X(x - x_0)}{1 - F_X(x)} \leq \frac{1}{F_X(x) - F_X(x_0)} \cdot \left( \frac{1 - F_X^{*2}(x)}{1 - F_X(x)} - 1 - F_X(x_0) \right).$$

Für  $x \rightarrow \infty$  folgt die Behauptung.

Falls  $x_0 < 0$  ist, gilt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F_X(x - x_0)}{1 - F_X(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1 - F_X((x-x_0) - (-x_0))}{1 - F_X(x-x_0)}} \stackrel{y:=x-x_0}{=} \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1 - F_X(y - (-x_0))}{1 - F_X(y)}}.$$

□

**Lemma 2.57.** Sei  $X$  ein Risiko mit subexponentieller Verteilungsfunktion  $F_X$  und  $t \in (0, \infty)$ , dann gilt:

(i)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{tx} (1 - F_X(x)) = \infty.$$

(ii)

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_0^\infty e^{tx} dF_X(x) = \infty.$$

*Beweis.*

(i) Für  $0 < x_0 < x$  gilt:

$$e^{tx} \cdot (1 - F_X(x)) = \frac{1 - F_X(x)}{1 - F_X(x - x_0)} \cdot (1 - F_X(x - x_0)) \cdot e^{t(x-x_0)} \cdot e^{tx_0}.$$

Speziell durch die Diskretisierung  $g(n) := e^{rn} \cdot (1 - F_X(n))$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , führt dies zu folgender Gestalt:

$$g(n) = \frac{1 - F_X(n)}{1 - F_X(n - x_0)} \cdot g(n - x_0) \cdot e^{tx_0}.$$

Dann ist  $g$  mit Hilfe von Lemma 2.56 für  $n \in \mathbb{N}$  groß genug eine monoton wachsende Funktion. Folglich existiert ein Grenzwert in  $(0, \infty]$ , der wiederum für  $n \rightarrow \infty$  nur unendlich sein kann.

Sei nun  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine beliebige Folge derart, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ .

Mit  $\lfloor x_n \rfloor := \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x_n\} \geq x_n - 1$  gilt

$$\begin{aligned} F_X(\lfloor x_n \rfloor) \geq F_X(x_n - 1) &\Leftrightarrow 1 - F_X(\lfloor x_n \rfloor) \leq 1 - F_X(x_n - 1) \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{1 - F_X(\lfloor x_n \rfloor)} \geq \frac{1}{1 - F_X(x_n - 1)}, \end{aligned}$$

da  $F_X$  monoton wachsend ist. Es folgt:

$$\begin{aligned} e^{tx_n} \cdot (1 - F_X(x_n)) &= \frac{1 - F_X(x_n)}{1 - F_X(\lfloor x_n \rfloor)} \cdot (1 - F_X(\lfloor x_n \rfloor)) \cdot e^{r \lfloor x_n \rfloor} \cdot e^{t(x_n - \lfloor x_n \rfloor)} \\ &\geq \frac{1 - F_X(x_n)}{1 - F_X(x_n - 1)} \cdot (1 - F_X(\lfloor x_n \rfloor)) \cdot e^{t \lfloor x_n \rfloor} \end{aligned}$$

Für  $n \rightarrow \infty$  konvergiert die rechte Seite gegen unendlich.

(ii) Für die momenterzeugende Funktion gilt mit  $e^{tx} = \int_0^x t \cdot e^{ty} dy + 1$  und  $\int_0^\infty dF_X(x) = 1$ :

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E(e^{tX}) = \int_0^\infty e^{tx} dF_X(x) = 1 + \int_0^\infty \int_0^x t \cdot e^{ty} dy dF_X(x) \\ &= 1 + t \cdot \int_0^\infty \int_y^\infty dF_X(x) \cdot e^{ty} dy = 1 + t \cdot \int_0^\infty e^{ty} \cdot (1 - F_X(y)) dy = \infty, \end{aligned}$$

da der Integrand gemäß (i) gegen unendlich divergiert.

□

**Bemerkung 2.58.** Lemma 2.57, (i), ist die Rechtfertigung für die Charakterisierung „subexponentiell“ der Verteilungsfunktion  $F_X$ .  $\bar{F}_X$  fällt langsamer zu 0 ab als jede exponentielle Funktion der Form  $e^{-tx}$ ,  $t \in (0, \infty)$  für  $x \rightarrow \infty$ . ◇

Dieser Abschnitt schließt mit dem Nachweis, dass ein prominenter Vertreter der Klasse der heavy-tailed Verteilungen subexponentiell ist: die Pareto-Verteilung (siehe Beispiel 2.2).

Dazu wird folgende Definition benötigt:

**Definition 2.59.** Eine Funktion  $L : \mathbb{R}_+ \rightarrow (0, \infty)$  heißt regulär variierende Funktion von  $x$  in  $\infty$  mit Index  $\alpha$ , falls für alle  $t > 0$  gilt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{L(tx)}{L(x)} = t^\alpha.$$

Die Klasse der regulär variierenden Funktionen mit Index  $\alpha$  werde mit  $\mathcal{R}_\alpha$  bezeichnet. Im Fall  $\alpha = 0$  heißt  $L(x)$  langsam variierend.

Ein Spezialfall regulär variierender Funktionen ist die Pareto-Typ Eigenschaft:

**Definition 2.60.** Für ein Risiko  $X$  heißt die Verteilungsfunktion  $F_X$  vom Pareto-Typ mit Exponent  $\alpha > 0$ , falls

$$\bar{F}_X(x) = (1 - F_X(x)) \sim \frac{L(x)}{x^\alpha}, \quad x \rightarrow \infty,$$

für eine langsam variierende Funktion  $L(x)$ .

**Satz 2.61.** Sei  $X$  ein Risiko mit Verteilungsfunktion  $F_X$  vom Pareto-Typ, dann ist  $F_X$  subexponentiell.

*Beweis.* Seien  $X_1, X_2 \sim X$  zwei i.i.d. Risiken mit Verteilungsfunktion  $F_X$  vom Pareto-Typ. Für  $\varepsilon \in (0, 1)$  impliziert  $\{X_1 + X_2 > x\}$ :

$$\{X_1 > (1 - \varepsilon) \cdot x\} \text{ oder } \{X_2 > (1 - \varepsilon) \cdot x\} \text{ oder } \{X_1 > \varepsilon \cdot x \text{ und } X_2 > \varepsilon \cdot x\}.$$

Entsprechend gilt:

$$P(X_1 + X_2 > x) \leq 2 \cdot P(X > (1 - \varepsilon) \cdot x) + (P(X > \varepsilon \cdot x))^2.$$

Da  $F_X$  gemäß Voraussetzung vom Pareto-Typ und damit  $L(x)$  langsam variierend ist, folgt:

$$\begin{aligned} \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{P(X_1 + X_2 > x)}{1 - F_X(x)} &\leq \limsup_{x \rightarrow \infty} 2 \cdot \frac{P(X > (1 - \varepsilon) \cdot x)}{1 - F_X(x)} + \frac{(P(X > \varepsilon \cdot x))^2}{1 - F_X(x)} \\ &= \limsup_{x \rightarrow \infty} 2 \cdot \frac{L((1 - \varepsilon) \cdot x)}{L(x)} \cdot \frac{x^\alpha}{((1 - \varepsilon) \cdot x)^\alpha} + \frac{(L(\varepsilon \cdot x))^2}{L(x)} \cdot \frac{x^\alpha}{(\varepsilon \cdot x)^{2\alpha}} \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{(1 - \varepsilon)^\alpha}.$$

Da  $\varepsilon \in (0, 1)$  beliebig, gilt:

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F_X^{*2}(x)}{1 - F_X(x)} \leq 2.$$

Aufgrund von Bemerkung 2.55, (ii),

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F_X^{*2}(x)}{1 - F_X(x)} \geq 2,$$

folgt die Gleichheit, womit die Behauptung bewiesen ist.  $\square$

**Bemerkung 2.62.** Offensichtlich gilt für ein Pareto-verteiltes Risiko  $X$  (vergleiche Beispiel 2.2) mit Verteilungsfunktion  $F_X$ :

$$1 - F_X(x) = \left(\frac{x_m}{x}\right)^\alpha = \frac{L(x)}{x^\alpha}$$

für die langsam variierende Funktion  $L(x) \equiv x_m^\alpha$ ,  $x \in \mathbb{R}_+$ .

Gemäß Definition 2.60 und Satz 2.61 ist  $F_X$  somit vom Pareto-Typ und damit subexponentiell, insbesondere nach Lemma 2.57, (ii), heavy-tailed.  $\diamond$

## 2.7. Extremwerttheorie

In Kapitel 2.6 wurden heavy-tailed Verteilungen und die Klasse der subexponentiellen Verteilungen betrachtet, die sich aufgrund ihrer Charakteristik hinsichtlich der Randbereiche zur Modellierung der Schadenhöhen großer Personenschäden in KH eignen. In diesem Kontext ist allerdings weniger die durchschnittliche Schadenhöhe als vielmehr das Extremverhalten von Interesse. Folglich ist das Resultat aus dem Zentralen Grenzwertsatz, das besagt, dass die standardisierte Summe

$$\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{Var(S_n)}}$$

mit  $S_n := X_1 + \dots + X_n$  für eine Folge  $(X_j)_{j \in \mathbb{N}}$  von i.i.d. Risiken mit  $X_j \sim X$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , und  $Var(X) < \infty$  in Verteilung gegen die Standardnormalverteilung konvergiert, wenig hilfreich. Weiterhin stellt die Schätzung der Verteilung dieser *extremen* Risiken eine Herausforderung dar, da im relevanten Bereich, dem oberen Ende des Trägers der Verteilung, nur wenige bzw. teilweise keine Daten in Bezug auf Schadenhöhen bekannt sind. Hier bietet die Extremwerttheorie mit ihren statistischen Methoden einen natürlichen Zugang, wie sie in [EKM97] beschrieben wird. Zur Modellierung von Extremwerten existieren in der Theorie zwei Ansätze: Während der traditionelle Ansatz die Grenzverteilung entsprechend standardisierter Maxima  $M_n := \max\{X_1, \dots, X_n\}$  charakterisiert, wird im zweiten Ansatz die Verteilung derjenigen Risiken betrachtet, die eine vorgegebene Schranke, den *Threshold*, überschreiten und deren Grenzverteilung unter entsprechender Standardisierung zur Familie der heavy-tailed Verteilungen gehört.

Der guten Vollständigkeit halber werden zunächst die Grundlagen des klassischen Ansatzes kurz skizziert. Die im Fokus stehenden Maxima werden hierbei mit Hilfe der sogenannten *Block-Maxima-Methode* ermittelt, die auf [Gum58] zurückgeht und erstmals in der Hydrologie Anwendung fand. Realisationen von  $X_1, \dots, X_{n \cdot m}$  Zufallsvariablen werden in  $m \in \mathbb{N}$  Blöcke unterteilt, sodass der  $j$ -te Block aus  $n \in \mathbb{N}$  Realisationen von  $X_{1,j}, \dots, X_{n,j}$ ,  $1 \leq j \leq m$ , besteht. Je Block ist schließlich das Maximum

$$M_{n,j} := \max \{X_{1,j}, \dots, X_{n,j}\}$$

zu ermitteln.

### 2.7.1. Grenzverteilungen normierter Maxima

Im Folgenden sei  $(X_j)_{j \in \mathbb{N}}$  eine Folge von i.i.d. Risiken mit  $X_j \sim X$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , wobei  $F_X$  die Verteilungsfunktion von  $X$  bezeichne. Da extreme Risiken von Interesse sind, sei durch

$$M_n := \max \{X_1, \dots, X_n\}$$

das Maximum der ersten  $n \in \mathbb{N}$  Risiken bezeichnet. Insbesondere ist die Frage nach der Verteilung von  $M_n$  sowie ihren Eigenschaften im Grenzverhalten für  $n \rightarrow \infty$  von Interesse.

Im Gegensatz zum arithmetischen Mittel gibt es unter Ausnutzung der Voraussetzungen, dass  $X_j$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , stochastisch unabhängig und identisch verteilt sind, eine einfache Darstellung für die Verteilung von  $M_n$ :

$$F_{M_n}(x) = P(M_n \leq x) = P(X_1 \leq x, \dots, X_n \leq x) = F_X^n(x), \quad x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

Da Maxima im rechten Tail der Verteilung auftreten, ist das asymptotische Verhalten von  $M_n$  in der Nähe des rechten Randpunkts des Trägers der Verteilung, der durch

$$x_F := x_{F_X} := \sup \{x \in \mathbb{R} : F_X(x) < 1\}$$

bezeichnet sei, zu betrachten. Für jedes  $x < x_F$  erhält man mit Hilfe des Lemmas von Borel-Cantelli:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(M_n \leq x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_X^n(x) = 0.$$

Weiterhin gilt im Fall  $x_F < \infty$  für  $x \geq x_F$ , dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(M_n \leq x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_X^n(x) = 1.$$

Insbesondere ist die Grenzverteilungsfunktion von  $M_n$  gerade durch  $\mathbb{1}_{[x_F, \infty)}(x)$  gegeben und damit Dirac-verteilt im Punkt  $x_F$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n \sim \delta_{x_F}$ . Wegen

$$M_n \xrightarrow{\mathcal{D}} x_F \sim \delta_{x_F}, \quad n \rightarrow \infty,$$

konvergiert  $M_n$  folglich in Wahrscheinlichkeit für  $n \rightarrow \infty$  gegen  $x_F \leq \infty$ ,

$$M_n \xrightarrow{P} x_F, \quad n \rightarrow \infty.$$

Es lässt sich zeigen, dass  $M_n$   $P$ -f.s. gegen den rechten Randpunkt  $x_F$  des Trägers der Verteilung konvergiert. Allerdings ist dieses Resultat für die Praxis wenig hilfreich, da häufig  $x_F = \infty$  gilt. Es schließt sich die Frage an, ob die Maxima analog zum Zentralen Grenzwertsatz unter einer geeigneten Standardisierung in Verteilung konvergieren (schwache Konvergenz). Dies ist gleichbedeutend damit, dass reelle Folgen  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $c_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$  und  $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$  derart existieren, sodass für

$$\frac{M_n - d_n}{c_n} \xrightarrow{\mathcal{D}} H, \quad n \rightarrow \infty,$$

gelte. Die Verteilung der Risiken  $H$  sei hierbei nicht-entartet, d.h. das zugehörige Maß ist kein Dirac-Maß. In diesem Kontext werden Wahrscheinlichkeiten der Form

$$P\left(\frac{M_n - d_n}{c_n} \leq x\right)$$

betrachtet, die mit  $u_n \equiv u_n(x) := c_n \cdot x + d_n$  durch  $P(M_n \leq u_n)$  notiert werden können.

Zunächst wird ein elementares Resultat vorgestellt, das die Frage beantwortet, welche Voraussetzungen an die Verteilungsfunktion  $F_X$  zu stellen sind, sodass der Grenzwert  $P(M_n \leq u_n)$  für  $n \rightarrow \infty$  für geeignete  $u_n$  existiert.

**Satz 2.63. (Poisson-Approximation)** Sei  $\tau \in [0, \infty]$  und  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine reelle Zahlenfolge. Dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \bar{F}(u_n) = \tau \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P(M_n \leq u_n) = e^{-\tau}.$$

*Beweis.* Sei zunächst  $\tau \in [0, \infty)$  und es gelte  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \bar{F}(u_n) = \tau$ . Dann erhält man:

$$\begin{aligned} P(M_n \leq u_n) &= F^n(u_n) = \exp\{n \cdot \ln F(u_n)\} = \exp\{n \cdot \ln(1 - \bar{F}(u_n))\} \\ &= \left(1 - \frac{n \cdot \bar{F}(u_n)}{n}\right)^n \rightarrow e^{-\tau}, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Es gelte umgekehrt nun  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(M_n \leq u_n) = e^{-\tau}$ . Für  $n \rightarrow \infty$  konvergiert dann  $\bar{F}(u_n)$  gegen Null, denn angenommen,  $\bar{F}(u_n)$  wäre von 0 weg beschränkt. Dann existiert eine Teilfolge  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$  und ein  $b \in (0, 1)$  derart, dass  $|\bar{F}(u_{n_k})| = \bar{F}(u_{n_k}) > b$ . In diesem Fall erhält man:

$$0 \leq P(M_{n_k} \leq u_{n_k}) = F^{n_k}(u_{n_k}) = (1 - \bar{F}(u_{n_k}))^{n_k} \leq (1 - b)^{n_k} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Dies ist gerade ein Widerspruch zur Voraussetzung. Aus  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(M_n \leq u_n) = e^{-\tau}$  folgt durch Anwendung des Logarithmus wegen  $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{F}(u_n) = 0$ :

$$-n \cdot \ln(1 - \bar{F}(u_n))^n \sim n \cdot \bar{F}(u_n).$$

Somit erhält man:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \bar{F}(u_n) = \tau.$$

Sei schließlich  $\tau = \infty$  und es gelte  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \bar{F}(u_n) = \infty$ .

Angenommen,  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(M_n \leq u_n) = e^{-\tau}$  gelte nicht. Dann existiert eine Teilfolge  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$  derart, dass

$$P(M_{n_k} \leq u_{n_k}) \longrightarrow e^{-\tau'}, \quad k \rightarrow \infty,$$

für ein  $\tau' < \infty$ . Das bedeutet wiederum, dass  $n_k \cdot \bar{F}(u_{n_k})$  für  $k \rightarrow \infty$  gegen  $\tau' < \infty$  konvergiert. Dies widerspricht der Voraussetzung  $\tau = \infty$ , sodass die Behauptung folgt.

Der Beweis der Rückrichtung erfolgt analog.  $\square$

**Bemerkung 2.64.** Für die Wahrscheinlichkeit  $P(M_n \leq u_n)$  ist die Bezeichnung *Poisson-Approximation* durch

$$P(M_n \leq u_n) = P(B_n = 0) \longrightarrow e^{-\tau}, \quad n \rightarrow \infty,$$

motiviert, wobei  $B_n := \sum_{j=1}^n \mathbb{1}_{\{X_j > u_n\}}$  die Anzahl der Überschreitungen von  $u_n$  durch  $X_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , beschreibe. Dann ist  $B_n$  binomialverteilt mit Parametern  $n$  und  $\bar{F}(u_n)$ , d.h.  $B_n \sim \text{Bin}(n, \bar{F}(u_n))$  und es gilt:

$$B_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \text{Poi}(\tau) \Leftrightarrow E(B_n) = n \cdot \bar{F}(u_n) \longrightarrow \tau, \quad n \longrightarrow \infty.$$

Dies motiviert die Wahl der Poisson-Verteilung als Schadenanzahlverteilung für die Großschäden oberhalb einer geeigneten Grenze.  $\diamond$

Daran anknüpfend stellt sich die Frage, welche Verteilungen für alle  $n \geq 2$  gerade die Gleichheit in Verteilung

$$M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\} \sim c_n \cdot X + d_n$$

erfüllen.

**Definition 2.65.** Ein nicht-entartetes Risiko  $X$  oder dessen Verteilung bzw. Verteilungsfunktion heißt *max-stabil*, falls für eine Folge von i.i.d. Risiken  $(X_j)_{j \in \mathbb{N}}$  mit  $X_j \sim X$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , reelle Folgen  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $c_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$  und  $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$  existieren, sodass

$$M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\} \sim c_n \cdot X + d_n$$

gilt.

Fortan seien die zentrierenden und standardisierenden Konstanten  $d_n$  bzw.  $c_n$  als Normierungskonstanten bezeichnet.

Für ein max-stabiles Risiko  $X \sim c_n^{-1} \cdot (M_n - d_n)$  lässt sich jede max-stabile Verteilung als Grenzwert einer normierten Folge von Maxima notieren. Der folgende Satz legt dar, dass in diesem Fall auch die Grenzverteilung max-stabil ist.

**Satz 2.66.** Falls Normierungskonstanten  $c_n > 0$  und  $d_n \in \mathbb{R}$  derart existieren, dass

$$\frac{M_n - d_n}{c_n} \sim Y$$

für ein nicht-entartetes Risiko  $Y$  gilt, dann ist  $Y$  max-stabil.

Für den Beweis sei der interessierte Leser auf [EKM97] verwiesen.

Gemäß Satz 2.66 stimmt folglich die Klasse der max-stabilen Verteilungen mit der Klasse der möglichen nicht-entarteten Grenzverteilungen normierter Maxima von i.i.d. Risiken überein.

Die Basis der klassischen Extremwerttheorie bildet das Theorem von Fisher-Tippett (1928) gemäß [FT28], das die möglichen nicht-entarteten Grenzverteilungen als Fréchet-, Weibull- und Gumbel-Verteilung identifiziert. Diese werden als (*Standard-Extremwertverteilungen*) bezeichnet. Mit Hilfe der nächsten Definition kann anschließend das sogenannte *extremal types theorem* formuliert werden.

**Definition 2.67.** *Zwei Risiken  $X_1, X_2$  sind vom gleichen Typ, falls  $\sigma > 0$  und  $\mu \in \mathbb{R}$  derart existieren, sodass*

$$X_2 \sim \frac{X - \mu}{\sigma}$$

*gilt.*

**Satz 2.68. (Fisher-Tippett)** *Sei  $(X_j)_{j \in \mathbb{N}}$  eine Folge von i.i.d. Risiken mit  $X_j \sim X$ ,  $j \in \mathbb{N}$ . Falls Normierungskonstanten  $c_n > 0$  und  $d_n \in \mathbb{R}$  sowie ein Risiko  $H$  mit nicht-entarteter Verteilung existieren, sodass*

$$\frac{M_n - d_n}{c_n} \xrightarrow{\mathcal{D}} H, \quad n \rightarrow \infty,$$

*dann ist  $H$  vom gleichen Typ wie einer der folgenden drei Verteilungen:*

(i) *Fréchet-Verteilung mit der Verteilungsfunktion*

$$\Phi_\alpha(x) := \mathbb{1}_{x>0} \cdot \exp\{-x^{-\alpha}\}, \quad \alpha > 0,$$

(ii) *Weibull-Verteilung mit der Verteilungsfunktion*

$$\Psi_\alpha(x) := 1 - F_\alpha(-x), \quad x < 0, \alpha > 0,$$

*wobei  $F_\alpha(x) := 1 - e^{-x^\alpha}$  für  $x \geq 0$ ,*

(iii) *Gumbel-Verteilung mit der Verteilungsfunktion*

$$\Lambda(x) := \exp\{-e^{-x}\}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Der vollständige Beweis wurde durch Gnedenko (1943) in [Gne43] geführt. Ein detaillierter Beweis findet der interessierte Leser in [Res87].

**Bemerkung 2.69.** (i) Gemäß Satz 2.66 sind die Extremwertverteilungen gerade die max-stabilen Verteilungen. Ein entsprechendes Risiko  $X$  erfüllt folglich die Gleichheit in Verteilung

$$\frac{M_n - d_n}{c_n} \sim X.$$

Insbesondere in Bezug auf die drei identifizierten Grenzverteilungen für Maxima gemäß des Satzes 2.68 von Fisher-Tippett gilt

a) im Fall der Fréchet-Verteilung:

$$M_n \sim n^{\frac{1}{\alpha}} \cdot X.$$

b) im Fall der Weibull-Verteilung:

$$M_n \sim n^{-\frac{1}{\alpha}} \cdot X.$$

c) im Fall der Gumbel-Verteilung:

$$M_n \sim X + \ln n.$$

(ii) Die Grenzverteilung ist bis auf einen Lage- und Skalierungsparameter eindeutig bestimmt, die wiederum von der Wahl der Normierungskonstanten abhängig sind. Dies garantiert das sogenannte *convergence to types theorem* (siehe [Res87]). Folglich sind sowohl die Klasse als auch der Parameter  $\alpha$  eindeutig bestimmt.

(iii) Für  $\alpha > 0$  gelten folgende Eigenschaften:

$$X \sim \Phi_\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \cdot \ln X \sim \Lambda \quad \Leftrightarrow \quad -X^{-1} \sim \Psi_\alpha.$$

Während die Extremwertverteilung bisher als die nicht-entarteten Grenzverteilungen normierter Maxima von i.i.d. Risiken identifiziert wurden, richtet sich der Fokus bei gegebener Extremwertverteilung  $H$  nun darauf, welche Eigenschaften die Verteilungsfunktion  $F_X$  erfüllen muss, damit die normierten Maxima schwach gegen die Extremwertverteilung konvergieren. Dazu wird die nächste Definition benötigt:

**Definition 2.70.** *Ein Risiko  $X$  oder deren Verteilung bzw. Verteilungsfunktion liegt im Maximum-Anziehungsbereich (Maximum Domain of Attraction (MDA)) einer Extremwertverteilung  $H$ , falls Normierungskonstanten  $c_n > 0$  und  $d_n \in \mathbb{R}$  derart existieren, sodass*

$$\frac{M_n - d_n}{c_n} \xrightarrow{\mathcal{D}} H, \quad n \rightarrow \infty,$$

*gilt.*

*In diesem Fall wird  $X \in MDA(H)$  notiert.*

**Bemerkung 2.71.** Die Extremwertverteilungsfunktionen sind wegen

$$\frac{M_n - d_n}{c_n} \xrightarrow{\mathcal{D}} H, \quad n \rightarrow \infty.$$

offensichtlich stetig auf  $\mathbb{R}$ .

◇

Der Maximum-Anziehungsbereich lässt sich wie folgt charakterisieren:

**Proposition 2.72.** Eine Verteilungsfunktion  $F$  gehört zum Maximum-Anziehungsbereich einer Extremwertverteilung  $H$  mit Normierungskonstanten  $c_n > 0$  und  $d_n \in \mathbb{R}$  genau dann, wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \bar{F}(c_n \cdot x + d_n) = -\ln H(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

gilt, wobei  $\bar{F}$  die Tail-Funktion von  $F$  bezeichne.

Falls  $H(x) = 0$  gilt, wird der Grenzwert als  $\infty$  interpretiert.

Gemäß des Satzes 2.68 von Fisher-Tippett sind die Extremwertverteilungen gerade die Grenzverteilungen normierter Maxima. Daher stellt sich die Frage, welche Verteilungen im MDA der Extremwertverteilungen liegen und welche Bedingungen, die als sogenannte *von Mises-Bedingungen* bezeichnet werden, diesbezüglich erfüllt sein müssen. Zur Beantwortung dieser Frage ist das folgende Konzept hilfreich, das eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Verteilungsfunktionen definiert.

**Definition 2.73.** Zwei Verteilungsfunktionen  $F$  und  $G$  heißen *Tail-äquivalent*, falls sie denselben rechten Randpunkt besitzen, d.h. falls

$$x_F = x_G$$

sowie

$$\lim_{x \uparrow x_F} \frac{\bar{F}(x)}{\bar{G}(x)} = c$$

für eine Konstante  $0 < c < \infty$  gelten.

In [EKM97] wird gezeigt, dass jeder MDA einer Extremwertverteilung  $H$  abgeschlossen ist bis auf Tail-Äquivalenz. Das bedeutet, dass für zwei Tail-äquivalente Verteilungsfunktionen  $F$  und  $G$  gilt:

$$F \in MDA(H) \Leftrightarrow G \in MDA(H).$$

Für die relevanten Extremwertverteilungen ist fallweise jeweils der MDA charakterisierbar.

Mit Hilfe der verallgemeinerten Extremwertverteilung, der sogenannten *Generalized Extreme Value Distribution (GEV)*, lassen sich jedoch die gemäß des Satzes 2.68 von Fisher-Tippett identifizierten nicht-entarteten Grenzverteilungen normierter Maxima von i.i.d. Risiken in Gestalt von Fréchet-, Weibull- und Gumbel-Verteilung zunächst in einer einparametrischen Darstellung durch Einführung des Formparameters  $\xi$  zu einer Familie von Verteilungsfunktionen zusammenfassen:

**Definition 2.74.** Die Dichtefunktion der verallgemeinerten Extremwertverteilung (GEV) ist durch

$$H_\xi(x) := \begin{cases} \exp \left\{ - (1 + \xi \cdot x)^{-\frac{1}{\xi}} \right\}, & \text{falls } \xi \neq 0, \\ \exp \{ - \exp \{ -x \} \}, & \text{falls } \xi = 0, \end{cases}$$

mit  $1 + \xi \cdot x > 0$  gegeben. Der Träger von  $H_\xi$  entspricht

$$\begin{aligned} x &> -\xi^{-1} \text{ für } \xi > 0, \\ x &< -\xi^{-1} \text{ für } \xi < 0, \\ x &\in \mathbb{R} \text{ für } \xi = 0. \end{aligned}$$

Ersetzt man das Argument  $x$  durch  $\frac{x-\mu}{\sigma}$ , so ist durch

$$H_{\xi,\mu,\sigma}(x) := H_\xi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

mit einem Lageparameter  $\mu \in \mathbb{R}$  und Skalenparameter  $\sigma > 0$  eine drei-parametrische Familie gegeben.

**Bemerkung 2.75.** (i)  $H_0$  kann als Grenzwert von  $H_\xi$  für  $\xi \rightarrow 0$  interpretiert werden.

(ii) In Abhängigkeit des Formparameters  $\xi$  ist die GEV für

- $\xi > 0$  vom Typ der Fréchet-Verteilung  $\Phi_{\xi^{-1}}$  mit

$$H_\xi(x) = \Phi_{\xi^{-1}}(1 + \xi \cdot x) \quad \forall 1 + \xi \cdot x > 0,$$

- $\xi = 0$  vom Typ der Gumbel-Verteilung  $\Lambda$  mit

$$H_\xi(x) = \Lambda(x),$$

- $\xi < 0$  vom Typ der Weibull-Verteilung  $\Psi_{-\xi^{-1}}$  mit

$$H_\xi(x) = \Psi_{-\xi^{-1}}(-(1 + \xi \cdot x)) \quad \forall 1 + \xi \cdot x > 0.$$

Eine Veränderung des Lageparameters  $\mu$  bewirkt eine Verschiebung der Dichte um denselben Wert. Der Skalenparameter  $\sigma$  gleicht der Varianz und zeigt an, wie weit die Extrema streuen. Ein Anstieg von  $\sigma$  bewirkt eine Stauchung der Dichtefunktion.

(iii) Durch die einparametrische Darstellung der drei möglichen Extremwertverteilungen in Form der GEV, die insbesondere durch statistische Anwendungen motiviert ist und sich im Kontext von Verteilungsanpassungen als nützlich erweist, lässt sich Satz 2.68 von Fisher-Tippett im Hinblick auf die GEV verallgemeinert notieren. In diesem Fall gehört die Grenzverteilung  $H$  zur GEV-Familie  $H_\xi$ .  $\diamond$

Die Charakterisierung des MDA unter Verwendung der GEV fasst der nächste Satz zusammen:

**Satz 2.76.** Sei  $\xi \in \mathbb{R}$ . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i)  $F \in MDA(H_\xi)$ .

(ii) Es existiert eine positiv messbare Funktion  $a(\cdot)$  derart, dass für  $1 + \xi \cdot x > 0$

$$\lim_{u \uparrow x_F} \frac{\overline{F}(u + x \cdot a(u))}{\overline{F}(u)} = \begin{cases} (1 + \xi \cdot x)^{-\frac{1}{\xi}} & , \text{ falls } \xi \neq 0, \\ e^{-x} & , \text{ falls } \xi = 0 \end{cases}$$

gilt.

Für den Beweis sei der interessierte Leser auf [deH84] verwiesen.

**Bemerkung 2.77.** Im Fall der Frechét-Verteilung lässt sich für jede Extremwertverteilung der zugehörige MDA mit Hilfe des Konzeptes regulär variierender Funktionen (siehe Definition 2.59) charakterisieren, zu der insbesondere die Klasse der heavy-tailed Verteilungen zählt (siehe Kapitel 2.6). Unter anderem liegt somit die Pareto-Verteilung zum MDA der Frechét-Verteilung.  $\diamond$

**Bemerkung 2.78.** Sei  $X$  ein Risiko mit Verteilungsfunktion  $F_X \in MDA(H_\xi)$ . Mit Hilfe der Definition des bedingten Erwartungswertes und unter Ausnutzung, dass  $a(\cdot)$  eine positiv messbare Funktion ist, lässt Satz 2.76 für  $x, u > 0$  wegen

$$\begin{aligned} P\left(\frac{X-u}{a(u)} > x \mid X > u\right) &= \frac{P\left(\frac{X-u}{a(u)} > x, X > u\right)}{P(X > u)} = \frac{P(X > x \cdot a(u) + u, X > u)}{P(X > u)} \\ &= \frac{P(X > x \cdot a(u) + u)}{\overline{F}_X(u)} = \frac{\overline{F}_X(x \cdot a(u) + u)}{\overline{F}_X(u)} \end{aligned}$$

eine interessante stochastische Interpretation zu. Entsprechend kann die aufgezeigte Bedingung wie folgt formuliert werden:

$$\lim_{u \uparrow x_F} P\left(\frac{X-u}{a(u)} > x \mid X > u\right) = \begin{cases} (1 + \xi \cdot x)^{-\frac{1}{\xi}}, & \text{ falls } \xi \neq 0, \\ e^{-x}, & \text{ falls } \xi = 0, \end{cases}$$

Dies liefert eine Approximation der skalierten Überschreitungswahrscheinlichkeit der Schranke  $u$ , wobei der geeignete Skalierungsfaktor gerade  $a(u)$  ist.  $\diamond$

### 2.7.2. Threshold-Überschreitungen

Das Problem der in Kapitel 2.7.1 aufgezeigten Block-Maxima-Methode besteht darin, dass zur Durchführung ein entsprechend großer Datensatz benötigt wird. Dieser Datensatz wird wiederum in Blöcke unterteilt und je Block ist lediglich das Maximum relevant. Aufgrund des „verschwenderischen“ Umgangs mit Datensätzen wurde die Block-Maxima-Methode in der Praxis überwiegend durch Ansätze ersetzt, die auf Schranken- bzw. Schwellenüberschreitungen basieren. In diesem Kontext werden alle extremen Datensätze in dem Sinne verwendet, die ein bestimmtes höheres Niveau überschreiten. Unter Berücksichtigung von Bemerkung 2.78 ist der zweite natürliche Zugang zur Modellierung von Extremwerten motiviert, für den die erste Definition hilfreich ist.

**Definition 2.79.** Sei  $X \in L^1(P)$  ein Risiko mit Verteilungsfunktion  $F_X$  und rechtem Randpunkt  $x_F$ . Für ein festes  $u < x_F$  heißt

$$F_u(x) := P(X - u \leq x \mid X > u), \quad x \geq 0$$

Exzess-Verteilungsfunktion bzw. Exzess-Funktion des Risikos  $X$  bzw. der Verteilungsfunktion  $F_X$  über dem Threshold  $u$ . Die Funktion

$$e(u) := E(X - u \mid X > u)$$

heißt mittlere Exzess-Funktion (mean excess function) von  $X$ .

Threshold-Überschreitungen spielen in diversen Anwendungsbereichen eine fundamentale Rolle. Je nach Anwendungsbereich werden in diesem Zusammenhang unterschiedliche Bezeichnungen verwendet. Für die Versicherungsbranche wird  $F_u$  als sogenannte *excess-of-loss* Verteilungsfunktion bezeichnet, während man in der Zuverlässigkeitstheorie von der Verteilungsfunktion der Restlebensdauer spricht.

Erneut Satz 2.76 und Bemerkung 2.78 aufgreifend, stellt die Grenzfunktion auf dem eingeschränkten Bereich gerade Teilfunktionen von Verteilungsfunktionen dar, deren zugehörige Verteilung die verallgemeinerte Pareto-Verteilung, die sogenannte *Generalized Pareto Distribution (GPD)*, ist und folgende Definition motiviert:

**Definition 2.80.** Die Verteilungsfunktion der verallgemeinerten Pareto-Verteilung ist durch

$$G_\xi(x) := \begin{cases} 1 - (1 + \xi \cdot x)^{-\frac{1}{\xi}}, & \text{falls } \xi \neq 0, \\ 1 - e^{-x}, & \text{falls } \xi = 0, \end{cases}$$

wobei  $x \geq 0$ , falls  $\xi \geq 0$ , und  $0 \leq x \leq -\frac{1}{\xi}$ , falls  $\xi < 0$ . Ersetzt man  $x$  durch  $\frac{x-\mu}{\beta}$ , wobei  $\mu \in \mathbb{R}$  der Lageparameter und  $\beta > 0$  der Skalenparameter sind, so erhält man eine drei-parametrische Lagen-Skalen Familie  $G_{\xi,\mu,\beta}$ .

**Bemerkung 2.81.** (i) Analog zur GEV-Verteilung kann  $G_0$  als Grenzwert von  $G_\xi$  für  $\xi \rightarrow 0$  interpretiert werden.

(ii) Die verallgemeinerte Pareto-Verteilung wird häufig durch

$$G_{\xi,\beta}(x) = 1 - \left(1 + \xi \cdot \frac{x}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}}$$

notiert, wobei  $x \in [0, \infty)$  für  $\xi \geq 0$  und  $x \in [0, -\frac{\beta}{\xi}]$  für  $\xi < 0$ ,  $\beta > 0$ .

(iii) Während durch die GEV Grenzverteilungen normierter Maxima beschrieben werden, ist die GPD gerade Grenzverteilung skaliertener Threshold-Überschreitungen.  $\diamond$

Die zentrale Aussage im Kontext von Threshold-Überschreitungen bildet das sogenannte *Pickands-Balkema-de Haan-Theorem*:

**Satz 2.82. (Pickands-Balkema-de Haan)** Für alle  $\xi \in \mathbb{R}$  liegt eine in  $x_F$  stetige Verteilungsfunktion  $F \in MDA(H_\xi)$  genau dann vor, wenn

$$\lim_{u \uparrow x_F} \sup_{0 < x_F - u} |F_u(x) - G_{\xi, \beta(u)}(x)| = 0$$

für eine geeignete positive, messbare Funktion  $\beta$  gilt.

Für den Beweis sei der interessierte Leser auf [BdH74] und [Pic75] verwiesen.

**Bemerkung 2.83.** Das Pickands-Balkema-de Haan-Theorem besagt, dass, wenn eine Verteilung  $F$  im Maximum-Anziehungsbereich einer nicht-entarteten Extremwertverteilung liegt, die Exzess-Verteilungsfunktion  $F_u$  für hinreichend große  $u$  durch eine verallgemeinerte Pareto-Verteilung angenähert werden kann.  $\diamond$

In diesem Zusammenhang sind die folgenden Eigenschaften der verallgemeinerten Pareto-Verteilung von Interesse:

**Satz 2.84.** (i) Sei  $N \sim Poi(\lambda)$  eine Zufallsvariable, die stochastisch unabhängig von der i.i.d.-Folge  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sei, welche der verallgemeinerten Pareto-Verteilung mit Parametern  $\xi \neq 0$  und  $\beta > 0$  genügen möge. Weiterhin sei  $M_N := \max\{X_1, \dots, X_N\}$ . Dann gilt

$$P(M_N \leq x) = \exp \left\{ -\lambda \cdot \left( 1 + \xi \cdot \frac{x}{\beta} \right)^{-\frac{1}{\xi}} \right\} = H_{\xi, \mu, \psi}(x),$$

wobei  $\mu = \beta \cdot \xi^{-1} \cdot (\lambda^\xi - 1)$  und  $\psi = \beta \cdot \lambda^\xi$ .

(ii)  $X$  genüge der verallgemeinerten Pareto-Verteilung mit den Parametern  $\xi < 1$  und  $\beta$ . Dann gilt für jedes  $u < x_F$ :

$$e(u) = E(X - u | X > u) = \frac{\beta + \xi \cdot u}{1 - \xi}, \quad \beta + u \cdot \xi > 0.$$

*Beweis.*

(i) Gemäß Voraussetzung sei  $N \sim Poi(\lambda)$  eine Zufallsvariable, die stochastisch unabhängig von der i.i.d.-Folge  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sei, welche der verallgemeinerten Pareto-Verteilung mit Parametern  $\xi$  und  $\beta > 0$  genüge. Dann gilt:

$$\begin{aligned} P(M_n \leq x) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(\{M_n \leq x\} \cap \{N = n\}) = \sum_{n=0}^{\infty} P(M_n \leq x) \cdot P(N = n) \\ &= e^{-\lambda} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{G_{\xi, \beta}^n(x) \cdot \lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} \cdot \exp\{\lambda \cdot G_{\xi, \beta}(x)\} \\ &= \exp\{-\lambda \cdot \bar{G}_{\xi, \beta}(x)\} \end{aligned}$$

Für  $\xi \neq 0$  erhält man:

$$P(M_n \leq x) = \exp \left\{ -\lambda \cdot \left( 1 + \frac{\xi}{\beta} \cdot x \right)^{-\frac{1}{\xi}} \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \exp \left\{ - \left( 1 + \xi \cdot \frac{x - \xi^{-1} \cdot \beta \cdot (\lambda^\xi - 1)}{\beta \cdot \lambda^\xi} \right)^{-\frac{1}{\xi}} \right\} \\
&= H_{\xi, \mu, \sigma}(x)
\end{aligned}$$

mit  $\mu := \frac{1}{\xi} \cdot \beta \cdot (\lambda^\xi - 1)$  und  $\sigma := \beta \cdot \lambda^\xi$ .

Im Fall  $\xi = 0$  gilt:

$$P(M_n \leq x) = e^{-\lambda \cdot e^{-\frac{x}{\beta}}} = \exp \left\{ -e^{-\frac{x - \beta \cdot \ln \lambda}{\beta}} \right\} = H_{\xi, \mu, \sigma}(x)$$

mit  $\sigma := \beta$  und  $\mu := \lim_{\xi \rightarrow 0} \beta \cdot \left( \frac{\lambda^\xi - 1}{\xi} \right) = \beta \cdot \ln \lambda$ .

Damit ist die Aussage gezeigt.

- (ii)  $X$  genüge nach Voraussetzung der verallgemeinerten Pareto-Verteilung mit den Parametern  $\xi < 1$  und  $\beta$ . Mittels partieller Integration ergibt sich:

$$\begin{aligned}
e(u) &= E(X - u \mid X > u) = \frac{1}{\overline{G}_{\xi, \beta}(u)} \cdot \int_{\{X > u\}} X - u \, dP \\
&= \frac{1}{\overline{G}_{\xi, \beta}(u)} \cdot \int_u^{x_F} (x - u) \frac{dG_{\xi, \beta}(u)}{dx} \, dx \\
&= \frac{1}{\overline{G}_{\xi, \beta}(u)} \cdot \left( [G_{\xi, \beta}(x) \cdot (x - u)]_u^{x_F} \cdot \int_u^{x_F} G_{\xi, \beta}(x) \, dx \right) \\
&= \frac{1}{\overline{G}_{\xi, \beta}(u)} \cdot \left( \int_u^{x_F} 1 \, dx - \int_u^{x_F} G_{\xi, \beta}(x) \, dx \right) \\
&= \frac{1}{\overline{G}_{\xi, \beta}(u)} \cdot \int_u^{x_F} \overline{G}_{\xi, \beta}(x) \, dx
\end{aligned}$$

unter Ausnutzung von  $G_{\xi, \beta}(x_F) = 1$ . Für  $\xi \neq 0$  erhält man:

$$\begin{aligned}
e(u) &= \left( 1 + \frac{\xi}{\beta} \cdot u \right)^{\frac{1}{\xi}} \cdot \left[ \overline{G}_{\xi, \beta}(x) \cdot \left( 1 + \frac{\xi}{\beta} \cdot x \right) \cdot \frac{\beta}{\xi - 1} \right]_u^{x_F} \\
&= \left( 1 + \frac{\xi}{\beta} \cdot u \right) \cdot \frac{\beta}{1 - \xi} = \frac{\beta + \xi \cdot u}{1 - \xi}.
\end{aligned}$$

Im Fall  $\xi = 0$  erhält man für alle  $u < x_F$  und für alle  $\beta + u \cdot \xi$ :

$$e(u) = e^{\frac{u}{\beta}} \cdot \int_u^\infty e^{-\frac{x}{\beta}} \, dx = \beta.$$

□

**Bemerkung 2.85.** (i) In Bezug auf Satz 2.63 und Bemerkung 2.64 ist die Anzahl an Threshold-Überschreitungen nahezu Poisson-verteilt. Der erste Teil von Satz 2.84 sagt nun aus, dass, wenn die Anzahl an Überschreitungen Poisson-verteilt ist und die Exzess-Verteilungsfunktion gerade durch die verallgemeinerte Pareto-Verteilung gegeben ist, dann besitzt das Maximum der Überschreitungen eine verallgemeinerte Extremwertverteilung.

- (ii) Der zweite Teil von Satz 2.84 bietet die Motivation für ein visuelles Näherungsverfahren, das es gestattet, einen geeignet großen Threshold  $u$ , der die Approximation der Exzess-Verteilungsfunktion  $F_u$  durch eine verallgemeinerte Pareto-Verteilung rechtfertigt, auf Basis einer Grafik zu wählen.

Hierzu bezeichne für eine Folge von i.i.d. Risiken  $(X_j)_{j \in \mathbb{N}}$  mit  $X_j \sim X$

$$N_u := \# \{j : j = 1, \dots, n, X_j > u\}$$

die Anzahl der Überschreitungen von  $u$  durch  $X_j$ . Die empirische mittlere Exzess-Funktion sei durch

$$e_n(u) := \frac{1}{N_u} \cdot \sum_{j=1}^n (X_j - u) \cdot \mathbb{1}_{\{X_j > u\}}, \quad u > 0,$$

definiert. Die Linearität der mittleren Exzess-Funktion von  $X$  gemäß Satz 2.84 (ii) charakterisiert die GPD. Daher betrachtet man zur Wahl der Schranke  $u$  den *Mean Excess Plot* bzw. den *Mean Residual Life Plot*

$$\{(x_{k:n}, e_n(x_{k:n})) : k = 1, \dots, n\}$$

wobei durch  $x_{1:n} \leq \dots \leq x_{n:n}$  die geordneten Realisationen von  $X_{1:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$  notiert seien. Eine geeignete Schranke  $u_0 > 0$  ist dann derart zu wählen, dass die empirische mittlere Exzess-Funktion  $e_n$  annähernd linear ist für  $u \geq u_0$ .  $\diamond$

**Bemerkung 2.86.** Eine weitere graphische Möglichkeit zur Wahl eines geeigneten Thresholds  $u$  ergibt sich aus der Schätzung des Tails der Verteilung in Form der sogenannten *Hill-Methode*. Ausgangspunkt für eine Folge von i.i.d. Risiken  $(X_j)_{j \in \mathbb{N}}$  mit  $X_j \sim X$  ist, dass ihre Verteilungsfunktion  $F_X$  im MDA der Fréchet-Verteilung liegt,  $F_X \in MDA(\Phi_\alpha)$ . In [EKM97] wird aufgezeigt, dass in diesem Fall für jede Extremwertverteilung der zugehörige MDA mit Hilfe des Konzeptes regulär variierender Funktionen (siehe Definition 2.59) charakterisierbar ist, d.h.

$$F \in MDA(\Phi_\alpha) \Leftrightarrow \bar{F}(x) = \frac{L(x)}{x^\alpha}, \quad \alpha > 0,$$

wobei  $L$  eine langsam variierende Funktion sei. Zum MDA der Fréchet-Verteilung zählt unter anderem die Klasse der heavy-tailed Verteilungen (siehe Kapitel 2.6) und im Besonderen die GPD. Gesucht ist demnach ein Schätzer für den Parameter  $\alpha$ . In Anlehnung an den zweiten Teil von Satz 2.84 (ii) und Bemerkung 2.85 werde hierzu die mittlere Exzess-Funktion der logarithmierten Größe  $\ln X$  betrachtet:

$$e^*(\ln u) := E(\ln X - \ln u \mid \ln X > \ln u).$$

Mit Hilfe partieller Integration und unter Ausnutzung, dass  $\bar{F}_X$  regulär variierend ist mit Index  $\alpha$ , gilt:

$$e^*(\ln u) = E(\ln X - \ln u \mid \ln X > \ln u)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\overline{F}_X(u)} \cdot \int_u^\infty (\ln x - \ln u) dF_X(x) \\
&= \frac{1}{\overline{F}_X(u)} \cdot \left( [-(\ln x - \ln u) \cdot \overline{F}_X(x)]_u^\infty + \int_u^\infty \frac{\overline{F}_X(x)}{x} dx \right) \\
&= \frac{1}{\overline{F}_X(u)} \cdot \int_u^\infty \frac{L(x)}{x^\alpha} \cdot \frac{1}{x} dx \\
&= \frac{1}{\overline{F}_X(u)} \cdot \int_u^\infty x^{-(\alpha+1)} \cdot L(x) dx.
\end{aligned}$$

Für hinreichend großes  $u$  kann die langsam variierende Funktion  $L$  für  $x \geq u$  als Konstante  $c$  aufgefasst, d.h.  $L(x) = c$ ,  $x \geq u$ , und vor das Integral gezogen werden. Die formale Begründung liefert der Satz von Karamata (siehe [EKM97]) unter Berücksichtigung, dass einerseits  $L$  langsam variierend und andererseits lokal auf  $[u, \infty)$  beschränkt ist. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
e^*(\ln u) &= \frac{1}{\overline{F}_X(u)} \cdot \int_u^\infty x^{-(\alpha+1)} \cdot L(x) dx \\
&\sim \frac{1}{\overline{F}_X(u)} \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot u^{-\alpha} \cdot L(u) = \frac{1}{\overline{F}_X(u)} \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \overline{F}_X(u) = \frac{1}{\alpha}, \quad u \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Für die empirische mittlere Exzess-Funktion  $e_n^*$  ist ein ähnliches Tail-Verhalten zu erwarten, d.h.

$$e_n^*(\ln X_{k:n}) \approx \frac{1}{\alpha},$$

wobei durch  $X_{1:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$  wiederum die Ordnungsstatistiken von  $X_1, \dots, X_n$  notiert seien. Die Berechnung von  $e_n^*(\ln X_{k:n})$  liefert den Schätzer

$$\hat{\alpha} = \left( \frac{1}{k-1} \cdot \sum_{j=1}^k (\ln X_{j:n} - \ln X_{k:n}) \right)^{-1},$$

der durch eine geringe Anpassung von  $k-1$  zu  $k$ , die im asymptotischen Sinne vernachlässigbar ist, zum natürlichen Hill-Schätzer

$$\hat{\alpha}_{k:n}^{(H)} = \left( \frac{1}{k} \cdot \sum_{j=1}^k (\ln X_{j:n} - \ln X_{k:n}) \right)^{-1}$$

für den Tail-Index  $\alpha$  führt, der insbesondere von den  $k = k(n)$  größten Beobachtungen der Stichprobe  $X_1, \dots, X_n$  abhängt. Der Schätzer der Konstanten  $c$  ist durch

$$\hat{c}_{k:n} = \frac{k}{n} \cdot X_{k:n}^{\hat{\alpha}_{k:n}^{(H)}}$$

gegeben. Daher sollte die Schwelle  $u$  in Abhängigkeit von  $n$  so gewählt werden, dass für die Anzahl an Überschreitungen  $k$  gilt:

$$k(n) \rightarrow \infty \text{ und } \frac{k(n)}{n} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Unter diesen Voraussetzungen lässt sich zeigen, dass der Hill-Schätzer sowohl konsistent im Sinne von

$$\hat{\alpha}_{k:n}^{(H)} \xrightarrow{P} \alpha$$

als auch asymptotisch normalverteilt ist:

$$\sqrt{k} \cdot \left( \hat{\alpha}_{k:n}^{(H)} - \alpha \right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \alpha^2).$$

Zusammenfassend kann der Hill-Schätzer als empirische mittlere Exzess-Funktion von logarithmierten Risiken bzw. ihrer entsprechenden Realisationen interpretiert werden, berechnet am Threshold  $u = \ln x_{k,n}$ . Analog zu Bemerkung 2.85 bietet dann der *Hill-Plot*

$$\left\{ \left( k, \hat{\alpha}_{k:n}^{(H)} \right) : k = 2, \dots, n \right\}$$

ein Instrument zur Wahl einer geeigneten Schranke. Hierzu wählt man den Schätzwert aus einem Bereich kleiner  $k$ , in dem der Hill-Plot ungefähr horizontal verläuft.  $\diamond$

**Bemerkung 2.87.** Wie in Bemerkung 2.86 erläutert, erfüllt der Hill-Schätzer mit Konsistenz und asymptotischer Normalverteilttheit wünschenswerte Güteeigenschaften eines Schätzers. Allerdings garantieren die genannten Eigenschaften nicht, dass der Hill-Schätzer stets die beste Wahl ist. Bei Verwendung des Hill-Schätzers sind folgende Punkte zu berücksichtigen:

- (i) Die asymptotische Varianz  $\frac{\alpha^2}{k}$  des Hill-Schätzers  $\hat{\alpha}_{k:n}^{(H)}$  hängt von dem unbekanntem Parameter  $\alpha$  ab und fällt in  $k$ . Bei der Wahl von  $k$  ist daher zu beachten, dass für kleines  $k$  die Asymptotik noch nicht greift und  $k$  daher möglichst groß gewählt werden sollte. Allerdings kann es bei zu großer Wahl von  $k$  passieren, dass die Annahme, dass für hinreichend großes  $u$  die langsam variierende Funktion  $L$  für  $x \geq u$  als Konstante aufgefasst werden kann, nicht mehr hinreichend gut erfüllt ist. Dies kann zu einer Verzerrung, dem sogenannten *Bias*, des Hill-Schätzers führen, woraus wiederum eine geringere Überdeckungswahrscheinlichkeit bezüglich des Konfidenzintervalls resultiert.

Um dies zu vermeiden, muss  $k(n)$  in Abhängigkeit von  $L$  so gewählt werden, dass  $k(n)$  hinreichend langsam gegen unendlich konvergiert. Daher dürfen nur eine verhältnismäßig kleine Anzahl  $k$  der  $n$  vorliegenden  $X_1, \dots, X_n$  zur Ermittlung des Hill-Schätzers verwendet werden. In diesem Kontext ist von einem sogenannten *Bias-Variance-Trade-off* die Rede.

- (ii) Gemäß der vorangegangenen Bemerkung 2.86 setzt die Hill-Methode voraus, dass  $F_X \in MDA(\Phi_\alpha)$  für eine Folge von i.i.d. Risiken  $(X_j)_{j \in \mathbb{N}}$  mit  $X_j \sim X$ , sodass für jede Extremwertverteilung der zugehörige MDA mit Hilfe des Konzeptes regulär variierender Funktionen charakterisierbar ist. Praktische Erfahrungen gemäß [MFE05] zeigen, dass sofern diese Voraussetzung verletzt ist und die Stichprobe keiner Verteilung mit regulär variierendem Tail folgt, sich der Hill-Schätzer als ungeeignet erweist und der dazugehörige Hill-Plot irreführend sein kann.
- (iii) Insbesondere ist der Hill-Plot äußerst sensibel gegenüber seriellen Abhängigkeiten in den Daten und kann zu verfälschten Ergebnissen führen.

- (iv) Wie andere Schätzer, die auf einer logarithmisch-transformierten Stichprobe basieren, ist auch der Hill-Schätzer gemäß [Bei+04] nicht invariant gegenüber Verschiebungen.

In der Literatur gibt es eine Vielzahl an heuristischen Verfahren zur Auswahl des „optimalen“  $k$ . So schlägt etwa DuMouchel in [DuM83] vor, für  $k$  fix 10% der oberen Ordnungsstatistiken anzusetzen. Ferreira et al. verwenden in [FHP03] eine Faustformel der Form  $k = \sqrt{n}$ , wohingegen Loretan und Phillips in [LP94] sich der empirisch motivierten Regel  $k = \frac{n^{\frac{2}{3}}}{\log(\log(n))}$  bedienen. Darüber hinaus bieten auch theoretisch fundierte Verfahren eine semi-automatische bzw. automatische Wahl eines „optimalen“  $k$  an. Der interessierte Leser sei an dieser Stelle etwa auf [Bei+04] und [FHP03] verwiesen. Die Zugänge basieren unter anderem auf der Minimierung des MSE (siehe Bemerkung 2.43), also der Minimierung des *Bias-Variance-Trade-offs*, in Bezug auf den Tail-Index, der Quantile oder der Tail-Wahrscheinlichkeiten.

Ungeachtet dessen bleibt die Sensibilität des Hill-Schätzers gegenüber einer geeigneten Wahl von  $k$  bestehen.  $\diamond$

Die obigen Ausführungen verdeutlichen, dass im Kontext von Threshold-Überschreitungen die Wahl einer geeigneten Schwelle  $u$  ein wesentlicher, aber auch kritischer Schritt ist. Die bezüglich des Hill-Schätzers zu berücksichtigenden Aspekte sowie die Schwierigkeit in Bezug auf den Mean Excess Plot, „annähernde“ Linearität zu interpretieren, erschweren das Vorhaben. An dieser Stelle sollte das Bewusstsein geschürt sein, dass es keine eindeutige Wahl von  $u$  gibt. Daher sind die Empfehlungen in der Literatur pragmatischer Natur. So raten etwa Reiss und Thomas in [RT07] dazu, sowohl den Mean Excess Plot als auch den Hill-Plot als visuelle Hilfsmittel zur Wahl einer geeigneten Schwelle zu Rate zu ziehen und die resultierenden Schätzungen für verschiedene Werte von  $u$  miteinander zu vergleichen.

## 2.8. Rückversicherung

Neben der Identifikation und Erfassung sowie der Analyse und Bewertung von Risiken spielt im Rahmen eines *Risikokontrollprozesses* die Risikosteuerung eine entscheidende Rolle. In diesem Kontext ist insbesondere die Übertragung von Risiken von Interesse. Risikotransfer findet einerseits in der Erstversicherung zwischen Versicherungsnehmern und dem Erstversicherungsunternehmen (EVU), andererseits zwischen dem EVU und dem Rückversicherungsunternehmen (RVU) statt, wobei zuletzt genannte Form für die vorliegende Arbeit betrachtet wird. Durch Rückversicherung kann EVU seine vt. Risiken verringern und damit seine Zeichnungskapazität erhöhen, wodurch risikogebundenes Eigenkapital freigesetzt wird. Die weiteren Ausführungen sind an [Lie09] und [Sch01] angelehnt.

### 2.8.1. Formen und Strukturen der Rückversicherung

In der Rückversicherung wird zwischen obligatorischer und fakultativer Rückversicherung unterschieden. Bei einer *obligatorischen Rückversicherung* muss das EVU alle nach Art

und/oder Größe üblichen Policen einer Sparte, die die Kapazität des Rückversicherungsvertrages nicht übersteigen, in die Rückversicherung einbringen. Policen mit höheren Versicherungssummen können in der Regel erst nach entsprechender proportionaler fakultativer Vorwegdeckung transferiert werden. Während das EVU verpflichtet ist, das RVU an jedem Risiko zu beteiligen, ist das RVU verpflichtet, jedes vom EVU gezeichnete Risiko zu übernehmen. Bei der *fakultativen Rückversicherung* handelt es sich um eine fallbezogene Überwälzung eines oder mehrerer „außergewöhnlicher“ Risiken. Die Abgabe bzw. Annahme von Risiken ist freigestellt.

Eingrenzend auf die obligatorische Rückversicherung unterscheidet diese zwischen proportionaler und nichtproportionaler Rückversicherung. Bei *proportionaler Rückversicherung* erfolgt die Risikoteilung pro Risiko zwischen EVU und RVU in einem bestimmten Verhältnis, nach dem Haftung sowie die gesamte Abwicklung von Prämien und Schäden aufgeteilt wird. Da das RVU geringere interne Kosten hat als das EVU, leistet dieser eine Kostenerstattung in Form einer *Provision*, die als Preiselement verhandelt wird. Im Falle *nichtproportionaler Rückversicherung* wird der Bestand als Produzent von Schäden aufgefasst, anhand dessen die Risikoteilung erfolgt. Die Kalkulation der Rückversicherungsprämie ist frei und bildet das zu verhandelnde Preiselement.

Zur Beschreibung der verschiedenen Ausprägungen der proportionalen und nichtproportionalen Rückversicherung werde auf die Darstellung des Gesamtschadens  $S$  durch das Kollektive Modell gemäß Kapitel 2.4 zurückgegriffen. Im Sinne von Definition 2.35 erfolgt die Zerlegung nach Einzelschäden durch  $\langle N, (X_j)_{j \in \mathbb{N}} \rangle$ . Durch  $\check{S}$  sei fortan der vom EVU sowie durch  $\tilde{S}$  der vom RVU zu bezahlende Teil von  $S$  notiert. Die verschiedenen Formen der Risikoteilung ermöglichen eine vt. Differenzierung der Vertragsformen der Rückversicherung:

### Proportionale Rückversicherung

Im Rahmen der proportionalen Rückversicherung unterscheidet man zwischen einer *Quoten-Rückversicherung* und einer *Summenexzendentenrückversicherung*. Bei ersterer erfolgt die Rückdeckung aller Risiken mit einem einheitlichen Prozentsatz  $q \in (0, 1)$ , wobei  $q$  als *Quotenabgabe (Cession)* und  $1 - q$  als *Quotenselbstbehalt (Retention)* bezeichnet wird. Für die Schadenaufteilung gilt:

$$\check{S} = q \cdot S, \quad \tilde{S} = (1 - q) \cdot S.$$

Analog erfolgt die Aufteilung der Prämien  $P$ . Folglich liegt für das EVU das Kollektive Modell  $\langle N, (\tilde{X}_j)_{j \in \mathbb{N}} \rangle$  mit  $\tilde{X}_j = (1 - q) \cdot X_j$  und für das RVU das Kollektive Modell  $\langle N, (\check{X}_j)_{j \in \mathbb{N}} \rangle$  mit  $\check{X}_j = q \cdot X_j$  vor.

Quoten-Rückversicherung eignet sich zur Schadenreduzierung, falls viele Klein- und Mittelschäden eintreten. Sie ist vornehmlich in den Massensparten wie KH ohne Homogenisierungsbedarf verbreitet. Durch eine Quoten-Rückversicherung wird die Solvabilität – Ersatz von Eigenkapital – verbessert und der Einfluss der größten Sparte verringert, was zu einer Homogenisierung des Bestandes über die Sparten hinweg führt. Insbesondere beim Aufbau neuer Geschäftsbereiche wird sie mit entsprechend hohen Quoten herangezogen.

Wie oben erwähnt, bildet die *Summenexzedentenrückversicherung* eine weitere Form der proportionalen Rückversicherung. Hierzu sei der interessierte Leser auf die eingangs genannte Literatur verwiesen.

### Nichtproportionale Rückversicherung

Nichtproportionale Rückversicherung umfasst *Schadenexzedenten (Excess of Loss (XL))* pro Risiko und pro Ereignis sowie *Jahresschadenexzedenten (Stop Loss (SL))*.

Bei einer *XL-Rückversicherung pro Risiko* erfolgt die Risikoteilung anhand der eingetretenen Schäden. Das RVU trägt die *Exzess (xs)*-Schäden, also die die *Priorität (Deductible)*  $D \in (0, \infty)$  übersteigenden Anteile der Einzelschäden, begrenzt durch die maximale *Haftung (Cover)*  $C \in (0, \infty)$  des RVUs. In diesem Kontext ist die Notation „ $C$  xs.  $D$ “ üblich.

Für die Aufteilung des Gesamtschadens gilt im Kollektiven Modell mit  $x^+ := \max\{x, 0\}$ :

$$\check{S} = \sum_{j=1}^N \min \{C, (X_j - D)^+\} =: \sum_{j=1}^N \check{X}_j,$$

$$\tilde{S} = S - \check{S} = \sum_{j=1}^N (X_j - \check{X}_j) =: \sum_{j=1}^N \tilde{X}_j.$$

Die Paare  $\left\langle N, \left( \tilde{X}_j \right)_{j \in \mathbb{N}} \right\rangle$  mit  $\tilde{X}_j = \min \{X_j, D\} + (X_j - (D + C))^+$  bzw.  $\left\langle N, \left( \check{X}_j \right)_{j \in \mathbb{N}} \right\rangle$  mit  $\check{X}_j = \min \{C, (X_j - D)^+\}$  bilden die entsprechenden Kollektiven Modelle des EVUs bzw. RVUs.

RVUs sind bei XL-Verträgen einem Frequenzrisiko ausgesetzt. Um diesem entgegenzuwirken, wird oftmals ein *Jahreslimit*, das sogenannte *Annual Aggregate Limit (AAL)*, vereinbart bzw. die Haftstrecke nur endlich oft zur Verfügung gestellt. Eine erneute Wiederauffüllung erfolgt dann gegen Zahlung einer *Wiederauffüllungsprämie*. Zusätzlich kann noch ein *Jahresselbstbehalt* des EVUs, das sogenannte *Annual Aggregate Deductible (AAD)*, vereinbart werden. Für die Schadenaufteilung erhält man:

$$\check{S} = \min \left\{ AAL, \max \left\{ 0, \left( \sum_{j=1}^N \check{X}_j \right) - AAD \right\} \right\}, \quad \tilde{S} = S - \check{S}.$$

Einen XL pro Risiko mit niedriger Priorität bezeichnet man als *Working-XL*. In der Praxis wird die Haftstrecke oftmals auf mehrere XLs aufgeteilt, die dann *Layer* genannt werden. Die Summe aus Priorität und Haftung, der sogenannte *Plafond*, des ersten Layers ist dann gleich der Priorität des zweiten Layers etc.. Hierbei werden die höheren Layer nicht durch die darunter liegenden Layer entlastet. Die Layerung erleichtert die Platzierung des XLs auf dem Rückversicherungsmarkt und trägt zur Transparenz bei der Preisbestimmung bei. Weiterhin ermöglicht sie die Vereinbarung von AALs bzw. bezahlten Wiederauffüllungen und AADs pro Layer.

Für eine *XL-Deckung pro Ereignis* erfolgt die Risikoaufteilung analog zum XL pro Risiko, jedoch unter Berücksichtigung von Schadenereignissen, wobei in diesem Kontext die Ereignisdefinition entscheidend ist.

Bei der *SL-Rückversicherung* übernimmt das RVU den die Priorität  $D$  übersteigenden Anteil des Jahresgesamtschadens und maximal den Haftungsanteil  $C$ . Für die Aufteilung des Gesamtschadens ergibt sich damit:

$$\check{S} = \min \{C, (S - D)^+\}, \quad \tilde{S} = S - \check{S}.$$

Priorität und Haftung werden oftmals in Prozent des verdienten Prämienvolumens festgelegt, wobei die Mindestpriorität in diesem Fall 100% beträgt. Die SL-Rückversicherung eignet sich sinnvoll als Schutz gegen die Häufung von Kumulschäden, insbesondere im Zusammenhang bei Naturgefahren. Beim SL handelt es sich um eine Frequenzdeckung, die nur in stark schadenbelasteten Jahren betroffen sein sollte.

### 2.8.2. Auswirkungen der Rückversicherung

Im Fokus der folgenden Betrachtung steht die Auswirkung der Risikoteilung bezüglich der charakterisierenden Schadenvariablen. Die wesentlichen Ergebnisse werden in Anlehnung an [Goe+16] und [Mac02] zusammengefasst.

#### Proportionale Rückversicherung

Für eine Quoten-Rückversicherung mit Abgabe  $q \in (0, 1)$  gilt für die Schadenanzahl:

$$N = \check{N} = \tilde{N}.$$

Bezüglich der Einzelschäden der zufälligen Höhe  $X_j$ ,  $j \in \mathbb{N}$  gilt:

$$\check{X}_j = q \cdot X_j, \quad \tilde{X}_j = (1 - q) \cdot X_j.$$

Unter diesen Skalentransformationen bleibt bei vielen Schadenhöhenverteilungen der Typ der Verteilung erhalten und es ändern sich lediglich die Parameter. Im Kontext des Kollektiven Modells gemäß Definition 2.35 seien die Schadenhöhen  $X_j$  weiterhin identisch verteilt mit  $X_j \sim X$ ,  $j \in \mathbb{N}$ . Für  $N, X \in L^2(P)$  erhält man für die Erwartungswerte

$$E(\check{X}) = E(q \cdot X) = q \cdot E(X), \quad E(\tilde{X}) = (1 - q) \cdot E(X),$$

für die Varianzen

$$\text{Var}(\check{X}) = \text{Var}(q \cdot X) = q^2 \cdot \text{Var}(X), \quad \text{Var}(\tilde{X}) = (1 - q)^2 \cdot \text{Var}(X),$$

und wegen  $\text{Cov}(\check{X}, \tilde{X}) = q \cdot (1 - q) \cdot \text{Var}(X)$  für die Variationskoeffizienten

$$\text{VKo}(\check{X}) = \text{VKo}(X) = \text{VKo}(\tilde{X}).$$

Entsprechend ergeben sich hinsichtlich der Kennzahlen für den Gesamtschaden analoge Ergebnisse wie für die Schadenhöhen, sodass Quoten-Rückversicherung keinen Einfluss auf den Variationskoeffizienten besitzt, der ein Maß für das Risiko darstellt.

### Nichtproportionale Rückversicherung

Für einen unlimitierten XL pro Risiko oder pro Ereignis gilt bei einer Priorität  $D \in (0, \infty)$  für die Schadenanzahl:

$$\check{N} = \sum_{j=1}^N \mathbb{1}_{\{X_j > D\}} \leq N, \quad \tilde{N} = N.$$

Mit Hilfe der Wald'schen Gleichung gemäß Satz 2.38 erhält man für  $N, X \in L^1(P)$ :

$$E(\check{N}) = E\left(\sum_{j=1}^N \mathbb{1}_{\{X_j > D\}}\right) = E(N) \cdot P(X_j > D).$$

Für die Schadenhöhen  $X_j, j \in \mathbb{N}$ , des  $j$ -ten Einzelschadens gilt:

$$\check{X}_j = (X_j - D)^+, \quad \tilde{X}_j = \min\{X_j, D\}.$$

Im Falle identisch verteilter Schadenhöhen  $X_j \sim X, j \in \mathbb{N}$ , mit Verteilungsfunktion  $F_X$  erhält man:

$$F_{\check{X}} = F_X(x + D), \quad F_{\tilde{X}} = \begin{cases} F_X(x), & \text{falls } x < D \\ 1, & \text{falls } D \leq x \end{cases}.$$

Entsprechend gilt für die Erwartungswerte,  $X \in L^1(P)$ :

$$E(\check{X}) = E((X - D)^+) = \int_D^\infty (1 - F_X(x)) dx,$$

$$E(\tilde{X}) = E(\min\{X, D\}) = \int_0^D (1 - F_X(x)) dx.$$

Für  $X \in L^2(P)$  gilt  $Cov(\check{X}, \tilde{X}) \geq 0$  und damit:

$$Var(\tilde{X}) + Var(\check{X}) \leq Var(X).$$

Es folgt für den Variationskoeffizienten:

$$VKo(\tilde{X}) \leq VKo(X) \leq VKo(\check{X}).$$

Schließlich erhält man folgende Identitäten bezüglich des Gesamtschadens unter der Annahme  $N, X \in L^2(P)$ :

$$\check{S} = \sum_{j=1}^N \check{X}_j, \quad \tilde{S} = \sum_{j=1}^N \tilde{X}_j.$$

Wegen  $Cov(\check{S}, \tilde{S}) \geq 0$  gilt:

$$Var(\tilde{S}) + Var(\check{S}) \leq Var(S).$$

Im Gegensatz hierzu gilt aufgrund der Ungleichung von Cauchy-Schwarz für die Standardabweichungen:

$$Std(\tilde{S}) + Std(\check{S}) \geq Std(S).$$

Während Erwartungswert und Varianz des Gesamtschadens des EVUs monoton wachsend in der Priorität sind, sind Erwartungswert und Varianz des Gesamtschadens des RVUs monoton fallend in der Priorität. Die Variationskoeffizienten verhalten sich anders: diese sind monoton wachsend in der Priorität sowohl in Bezug auf das EVU als auch auf das RVU. Aus

$$VKo(\tilde{X}) \leq VKo(X) \leq VKo(\check{X})$$

folgt mittels der Wald'schen Gleichung gemäß Satz 2.38:

$$VKo(\tilde{S}) \leq VKo(S) \leq VKo(\check{S}).$$

Folglich lässt sich der Variationskoeffizient des Gesamtschadens durch eine unlimitierte XL-Rückversicherung reduzieren. Analoge Ergebnisse gelten für XL- bzw. SL-Rückversicherung in Bezug auf Kumulschäden bzw. Jahresschäden.

### 3. Prämienrisiko im Kontext aufsichtsrechtlicher, risikoorientierter Regelwerke

#### Case Study

Die CAPITOL sei ein (fiktives), im Jahr 1982 gegründetes, deutsches VU, das seine Geschäftstätigkeit als sogenannter *Monoliner* auf dem deutschen Versicherungsmarkt im Bereich der KH betreibt. In den Geltungsbereich des VAGs fallend steht die CAPITOL folglich unter der Aufsicht der BaFin, die in Deutschland unter anderem mit der Versicherungsaufsicht betraut ist. Sie überwacht VUs, denen sie die Erlaubnis zum Betreiben von Versicherungsgeschäften erteilt hat, laufend. Besondere Bedeutung kommt dabei der Solvenzaufsicht zu.

Seit dem 01.01.2016 haben alle europäischen VUs die Anforderungen gemäß Solvency II zu erfüllen, so auch die CAPITOL. In der Vorbereitungsphase hat die Geschäftsleitung das Risikomanagement damit beauftragt, sich mit den Anforderungen des neuen Regelwerks vertraut zu machen und dabei folgenden Rahmen festgelegt:

- Da die CAPITOL über kein internes Modell verfügt, soll die Solvenzkapitalanforderung zunächst gemäß der Standardformel berechnet werden.
- Das Hauptaugenmerk soll dem Prämienrisiko gelten, das man als wesentliches Risiko der CAPITOL identifiziert hat.
- Die Analyse soll sich nicht ausschließlich auf den Geschäftsbereich KH beschränken, sondern auch die übrigen Geschäftsbereiche der Sachschadenversicherung umfassen, weil die CAPITOL vor dem Hintergrund mittelfristiger Wachstumsziele erwägt, diese durch Betreiben weiterer Geschäftsbereiche zu erreichen.
- Auch wenn die CAPITOL weder Lebens- noch Krankenversicherungsgeschäft betreibt, können dennoch Verpflichtungen aus entsprechenden Rentenfällen in diese Risikokategorie fallen. Die erwähnten Risikokategorien sowie das Marktrisiko, das Kreditausfallrisiko, das Risiko aus immateriellen Vermögenswerten und das operationale Risiko werden ebenso wie Anpassungen auf Basis zukünftiger Überschussbeteiligungen und latenter Steuern nur am Rande betrachtet und liegen ansonsten außerhalb der weiteren Analyse.

Zur Einordnung der Anforderungen des Prämienrisikos gemäß Solvency II möchte sich die Geschäftsleitung darüber hinaus einen Überblick darüber verschaffen, welche Anforderungen an das Prämienrisiko durch andere Regelwerke gestellt werden. Naheliegend ist daher der Blick in die Schweiz. Daher soll das Risikomanagement die Anforderungen an das Prämienrisiko im Schweizer Solvenztest herausarbeiten. Interkontinental soll abschließend eine Auseinandersetzung mit dem Regelwerk der USA erfolgen.

### 3.1. Prämienrisiko im Solvency II-Standardmodell

#### 3.1.1. Meilensteine auf dem Weg zum neuen europäischen Aufsichtsregelwerk

Am 01. Januar 2016 ist das neue europäische Aufsichtsregelwerk „Solvency II“ vollständig in Kraft getreten.

Die dem zugrunde liegende Solvency II-Rahmenrichtlinie 2009/138/EG (RRL) des Europäischen Parlaments und des Rates vom 25. November 2009 betreffend Aufnahme und Ausübung der Versicherungs- und Rückversicherungstätigkeit (Solvabilität II) zielt darauf ab, VUs dazu zu verpflichten, ihre Kapitalanlagen und Verpflichtungen markt- und risikoorientiert statt wie zuvor bilanziell zu bewerten. Mit dieser Richtlinie wurden Aufsichtsstandards EU-weit vereinheitlicht und so eine einheitliche Aufsichtspraxis innerhalb der Europäischen Union eingeführt. Da das Insolvenzrisiko von VUs so verringert werden soll, dienen die durch die Richtlinie geforderten Neuerungen auch dem Verbraucherschutz.

Mit der Entwicklung und Festlegung von neuen Vorschriften zur Solvabilität von VUs beauftragte die Europäische Kommission das *Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors (CEIOPS)*, seit 2011 umgewandelt in *European Insurance and Occupational Pensions Authority (EIOPA)*.

Von der Entscheidung der EU-Kommission im Juni 1999, die Finanzaufsicht über VUs grundlegend zu überarbeiten, über die Vorlage des daraus resultierenden Entwurfs der oben genannten Richtlinie beim Europäischen Parlament und beim Europäischen Rat vom 10. Juli 2007 bis zur endgültigen Umsetzung der Richtlinie in nationales Recht im April 2015 sind mehr als 15 Jahre vergangen. In der Zwischenzeit initiierte die Europäische Kommission mit der am 16. April 2014 verabschiedeten Omnibus-II-Richtlinie einige Änderungen an der ursprünglichen Richtlinie zum 22.05.2014, die die Bewertung von langfristigen Garantien, der befristeten Drittstaatenäquivalenz, dem Proportionalitätsprinzip und die Übergangsvorschriften der EIOPA betrafen. Nur nach zähen Verhandlungen konnten sich die Trilog-Parteien, d.h. die EU-Kommission, das Europäische Parlament und der Europäische Rat, auf einheitliche Formulierungen einigen. Gefordert wurde dann, dass bis zum 31. März 2015 die Richtlinie in nationales Recht umgesetzt wird, um ein Inkrafttreten des neuen Regelwerks zum 1. Januar 2016 zu gewährleisten. In der Bundesrepublik Deutschland erfolgte die Umsetzung der Solvency II-Rahmenrichtlinie mit dem „Gesetz zur Modernisierung der Finanzaufsicht über Versicherungen“, dem der Bundesrat am 6. März 2015 zustimmte. Das Gesetz umfasst in Artikel 1 das neue VAG.

Dem vorangegangen waren verschiedene Schritte im sogenannten „Lamfalussy-Verfahren“, das darauf abzielt, den EU-Gesetzgebungsprozess auf mehreren Ebenen zu beschleunigen. Außerdem wurden bereits während der Beratungen zur Rahmenrichtlinie von Seiten der CEIOPS beziehungsweise der EIOPA umfangreiche Feldstudien zur Angemessenheit, Anwendbarkeit und Durchführbarkeit der geplanten Anforderungen an die VUs in Bezug auf ihre Solvabilität durchgeführt, sogenannte *Quantitative Impact Studies (QIS)*. Die Ergebnisse dieser Studien flossen in den Gesetzgebungsprozess mit ein.

Neben diesen Untersuchungen wurde außerdem das *Long-Term Guarantees Assessment (LT-GA)* im Jahr 2013 von der EIOPA durchgeführt. Damit sollte zusätzlich die aktuelle und vergangene wirtschaftliche Situation bei der Analyse der Auswirkungen der Solvency II-Anforderungen auf die Versicherungsbranche berücksichtigt werden. Die Ergebnisse des LT-GA flossen ebenfalls in den Gesetzgebungsprozess mit ein.

Das Resultat des Prozesses ist eine nun geltende Harmonisierung des Aufsichtswerks, das auf einem Drei-Säulen-Ansatz basiert:

1. *Säule 1*: Kapitalanlagen und Leistungsverpflichtungen müssen risiko- beziehungsweise marktwertorientiert bewertet werden. Die Anforderungen an die Eigenmittel sind also nicht mehr an starre Obergrenzen, die sich am Geschäftsvolumen des VUs orientiert haben, gebunden. Unter Berücksichtigung der Marktrisiken, der versicherungstechnischen Risiken, der Kreditrisiken und der operationellen Risiken wird die Eigenmittelanforderung nun mit einem ganzheitlichen Ansatz berechnet, was zu einer marktnahen Einschätzung der Risikolage der VUs führt. Zusätzlich wird die Berechnung der Eigenmittelanforderungen von nun an durch die geforderte Unterscheidung in Mindestkapitalanforderung und Solvenzkapitalanforderung reformiert. Letzteres kann mit Hilfe eines internen Modells oder der Standardformel berechnet werden und wird den verfügbaren Eigenmitteln gegenübergestellt.
2. *Säule 2*: Die VUs sollen sicherstellen, dass das VU über geeignete und wirksame Prozesse und Strukturen verfügt, durch die ein umsichtiges Management geleistet werden kann. Damit einher gehen die Formulierung von Eignungsvoraussetzungen für das Risikomanagement, die Compliance-Funktionen, die versicherungsmathematische Funktion und die interne Revision. Vor allem die Anforderungen an das Risikomanagement werden erhöht, da dieses mit einem jährlichen Solvabilitäts- und Finanzbericht gleichwohl die Aufsicht als auch die Öffentlichkeit informieren muss.
3. *Säule 3*: Vor dem Hintergrund der Marktdisziplin und der Transparenz werden die Berichtspflichten an die VUs erhöht. Sowohl gegenüber den Aufsichtsbehörden als auch gegenüber der Öffentlichkeit müssen beispielsweise regelmäßig bestimmte Kennzahlen offengelegt werden oder über die Geschäftsorganisation berichtet werden.

In allen drei Säulen gilt dabei der Proportionalitätsgrundsatz, nach dem die individuelle Situation eines jeden VUs im Hinblick auf Risiken, Geschäftsbetrieb und –modell bei der Erfüllung der Solvency II-Anforderungen berücksichtigt werden müssen.

Die quantitativen Anforderungen aus Säule 1 sollen unter Berücksichtigung sämtlicher Risiken ein umfassendes Bild hinsichtlich der Solvabilität der VUs gewährleisten. Dazu heißt es in [RRL], Artikel 100:

„Die Mitgliedstaaten schreiben vor, dass die Versicherungs- und Rückversicherungsunternehmen anrechnungsfähige Eigenmittel zur Bedeckung der Solvenzkapitalanforderung besitzen.“

In einem ersten Schritt werden anrechnungsfähige Eigenmittel in den Kontext der Solvenzbilanz, das Kernstück für die Ermittlung der verfügbaren Eigenmittel, eingeordnet.

### 3.1.2. Anrechnungsfähige Eigenmittel

Mit *Solvenzbilanz* sei die gemäß dem Versicherungsaufsichtsgesetz bezeichnete *Solvabilitätsübersicht* – abgeleitet vom Begriff des *Solvency Balance Sheet* gemäß der englischen Ausgabe der Solvency II-Rahmenrichtlinie – gemeint, in der die Aufstellung der Vermögenswerte und Verbindlichkeiten folgt.

Laut [RRL], Artikel 75, sind die Vermögenswerte und Verbindlichkeiten mit dem Betrag zu bewerten, zu dem sie zwischen sachverständigen, vertragswilligen und voneinander unabhängigen Geschäftspartnern getauscht beziehungsweise übertragen oder beglichen werden könnten. Hierbei wird bezüglich der Bewertung von Verbindlichkeiten keine Berichtigung zwecks Bonität des VUs vorgenommen.

Der Ansatz und die Bewertung erfolgt grundsätzlich zum beizulegenden Zeitwert, dem sogenannten *Fair Value*, im Sinne des *International Financial Reporting Standards (IFRS)*, sofern IFRS mit einer marktkonsistenten Bewertung gemäß [RRL], Artikel 75, konsistent ist. Speziell im IFRS 13 ist die Ermittlung des Fair Value geregelt, die sich an einer dreistufigen Bewertungshierarchie, der sogenannten *Fair Value-Hierarchie*, orientiert (IFRS 13.72 ff):

1. *Stufe 1: Mark-to-Market*: Für Vermögenswerte und Verbindlichkeiten, die auf einem aktiven Markt gehandelt werden, sind Marktwerte heranzuziehen.
2. *Stufe 2: Marktvergleichswerte*: Für Vermögenswerte und Verbindlichkeiten, für die keine Marktwerte gemäß dem Mark-to-Market ermittelt werden können, sind Marktwerte für vergleichbare Vermögenswerte und Verbindlichkeiten heranzuziehen.
3. *Stufe 3: Mark-to-Model*: Für Vermögenswerte und Verbindlichkeiten, für die weder Marktwerte nach Mark-to-Market noch Marktvergleichswerte herangezogen können, wird ein Marktpreis auf Grundlage von Bewertungsmodellen unter Berücksichtigung aller vorhandenen Marktinformationen ermittelt.

Der Fair Value-Hierarchie entsprechend sind Marktwerte anzusetzen, sofern diese verfügbar sind. Andernfalls sind Vergleichs- beziehungsweise Schätzwerte heranzuziehen. In Bezug auf tiefere Ansatz- und Bewertungsfragen zu einzelnen Bilanzpositionen sei der interessierte Leser an dieser Stelle auf [Roc+07] verwiesen.

Für die einzelnen Assetklassen der Kapitalanlagen sind in der Regel Marktwerte vorhanden, zu denen diese in der Solvenzbilanz angesetzt werden.

Hingegen liegen speziell für die vt. Rückstellungen keine Marktwerte vor, sodass diese gemäß [RRL], Artikel 76, mit dem Betrag anzusetzen sind, den das VU bei unverzüglicher Übertragung auf ein anderes VU zahlen müsste. Die Berechnung hat dabei auf vorsichtige, verlässliche und objektive Art und Weise zu erfolgen. Der Wert der vt. Rückstellungen entspricht der Summe aus einem „Besten Schätzwert“, dem sogenannten *Best Estimate (BE)*, - ein wahrscheinlichkeitsgewichteter Durchschnitt aller zukünftiger Zahlungsströme diskontiert mit der maßgeblichen risikofreien Zinsstrukturkurve - und einer Risikomarge, die die Kosten für die Bereitstellung des für die Abwicklung benötigten Solvenzkapitalbedarfs widerspiegelt. Bezüglich der vt. Rückstellungen unterscheidet man zwischen Rückstellungen *nach Art der Lebensversicherung* und *nach Art der Nicht-Lebensversicherung*, die sich wiederum in Schaden- und Prämienrückstellungen aufgliedern. *Schadenrückstellungen* werden gebildet, um Verpflichtungen aus bereits eingetretenen, durch den Versicherungsvertrag abgedeckte Schäden bis zum Ende der Abwicklungszeit begleichen zu können. Hingegen werden *Prämienrückstellungen* für Zahlungsströme im Zusammenhang mit Verpflichtungen aus künftigen Schadensfällen aus bestehenden Versicherungsverträgen gebildet.

Im Vergleich zur nationalen Rechnungslegung nach Handelsgesetzbuch (HGB) weist die Solvenzbilanz einige Besonderheiten auf. So wird der Best Estimate ohne Abzug der aus Rückversicherungsverträgen und von Zweckgesellschaften einforderbaren Beträge berechnet ([RRL], Artikel 77 (2)), d.h. bei der Solvenzbilanz handelt es sich um eine Bruttobilanz. Die einforderbaren Beträge aus Rückversicherung (nach Anpassung um den erwarteten Ausfall) sind Aktiva und demnach implizit Teil der Eigenmittel. Weiterhin stellt die unter HGB passivierte Schwankungsrückstellung in der Solvenzbilanz keine Verpflichtung dar und wird im Rahmen der Umbewertung aufgelöst und erhöht folglich die Eigenmittel. Latente Steuern rühren aus Unterschieden in den Bewertungsansätzen von Vermögenswerten und Verbindlichkeiten in der Solvenz- und Steuerbilanz und sind folglich in der Solvenzbilanz anzusetzen.

Im Ausgangszustand resultieren aus der Solvenzbilanz die *Eigenmittel* als Residuum der Summe der Aktiva und Summe der Passiva unter Berücksichtigung der Risikomarge. In diesem Zusammenhang spricht man auch von *vorhandenem Risikokapital* beziehungsweise *Available Solvency Margin (ASM)*.

Der interessierte Leser gewinnt bei Betrachtung der *Quantitative Reporting Templates (QRTs)* zur Solvenzbilanz (S.02.01: Solvenzbilanz, S.02.02: Vermögenswerte und Verbindlichkeiten nach Währung und S.03.01: Außerbilanzielle Posten) einen Eindruck vom geforderten Detaillierungsgrad. Aus den obigen Darstellungen leitet sich die schematische Darstellung der Solvenzbilanz gemäß Abbildung 3.1 ab.

Die als Residualgröße aus der Solvenzbilanz abgeleiteten Eigenmittel *OF (Own Funds)* bilden die Basis für die Ermittlung der *anrechenbaren Eigenmittel*. Grundsätzlich wird zwischen bilanziellen und außerbilanziellen Eigenmitteln differenziert. In diesem Zusammenhang ist ebenfalls von *Basiseigenmitteln BOF (Basic Own Funds)* und *ergänzenden Eigenmitteln AOF (Ancillary Own Funds)* die Rede ([RRL], Artikel 87).



Abbildung 3.1.: Schematische Darstellung der Solvenzbilanz (*Quelle: Eigene Darstellung*)

Die Basiseigenmittel setzen sich aus dem Überschuss der Vermögenswerte über die Verbindlichkeiten *EAOl* (*Excess Assets over Liabilities*) und den nachrangigen Verbindlichkeiten abzüglich der gehaltenen eigenen Aktien zusammen ([RRL], Artikel 88).

Mit vorheriger aufsichtsrechtlicher Genehmigung zählen zu den ergänzenden Eigenmitteln die Bestandteile, die nicht zu den Basiseigenmitteln gehören und zum Ausgleich von Verlusten eingefordert werden können ([RRL], Artikel 89 und 90). Exemplarisch seien an dieser Stelle Teile des nicht eingezahlten Grundkapitals oder des nicht eingezahlten Gründungsstocks, Kreditbriefe und Garantien, einforderbare Nachschüsse sowie sonstige erhaltene rechtsverbindliche Verpflichtungen erwähnt.

Die Summe aus Basiseigenmitteln und ergänzenden Eigenmitteln bezeichnet man als *verfügbare Eigenmittel AvOF* (*Available Own Funds*).

Um dem Qualitätsgrad der verfügbaren Eigenmittel gerecht zu werden, werden diese in drei Klassen eingestuft, den sogenannten *Tiers*. Gemäß [RRL], Artikel 93, erfolgt die Zuordnung zu den Tiers anhand von 6 Kriterien:

1. Verlustausgleichsfähigkeit im laufenden Geschäft
2. Verlustausgleichsfähigkeit in der Insolvenz und Nachrangigkeit
3.
  - a) Angemessene Laufzeit
  - b) Freiheit von Rückzahlungsanreizen
  - c) Freiheit von Bedienkosten
  - d) Freiheit von sonstigen Belastungen.

Unter Berücksichtigung der unter Punkt 3. genannten Kriterien werden gemäß [RRL], Artikel 94,

- Basiseigenmittel in *Tier 1 (T1)* eingestuft, sofern die Verlustausgleichsfähigkeit sowohl im laufenden Geschäft als auch in der Insolvenz und Nachrangigkeit gegeben ist.



- b) Der anrechnungsfähige Betrag an Tier 3-Bestandteilen beträgt weniger als 15% der Solvenzkapitalanforderung.
- c) Die Summe der anrechnungsfähigen Anteile von Tier 2 und Tier 3-Bestandteilen darf nicht größer als 50% der Solvenzkapitalanforderung sein.
2. In Bezug auf die Einhaltung der Mindestkapitalanforderung *MCR* (*Minimum Capital Requirement*):
- a) Der anrechnungsfähige Anteil von Tier 1-Bestandteilen muss mindestens 80% der Mindestkapitalanforderung betragen. Dabei darf die Summe der beschränkten Basiseigenmittelbestandteile nicht mehr als 20% des Gesamtbetrags der Tier 1-Bestandteile ausmachen.
- b) Es dürfen ausschließlich Tier 1- und Tier 2-Eigenmittel eingesetzt werden.

Die geforderten Anrechnungsgrenzen für die einzelnen Tier-Bestandteile in Bezug auf die Einhaltung der Solvenz- und Mindestkapitalanforderung sind in der folgenden schematischen Abbildung zusammengefasst:

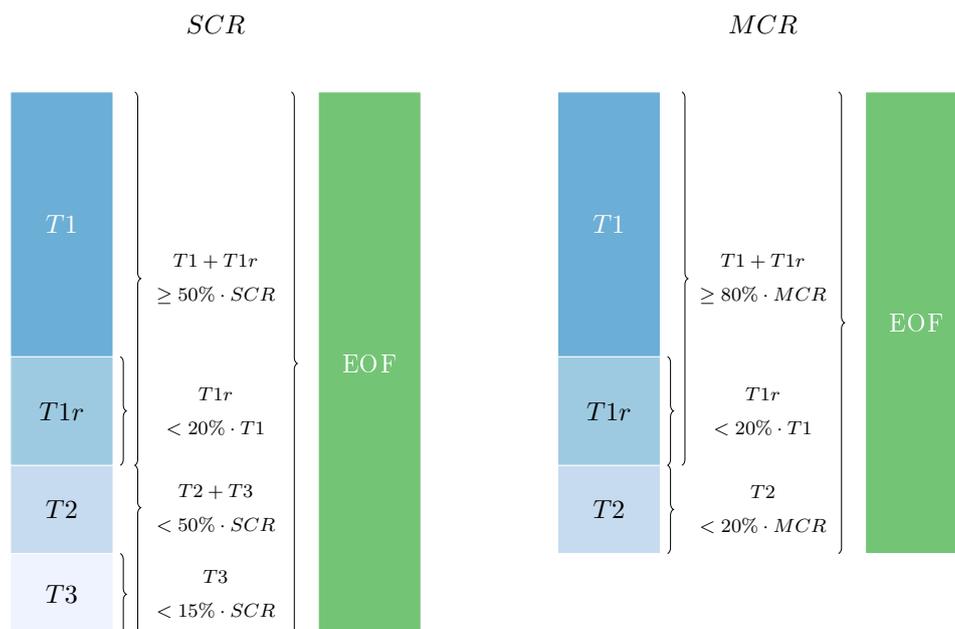


Abbildung 3.3.: Schematische Darstellung der Anrechnungsfähigkeit und Begrenzung der Tiers (*Quelle: Eigene Darstellung*)

Nach Ermittlung der verfügbaren Eigenmittel unter Berücksichtigung der Differenzierung in Basiseigenmittel und ergänzende Eigenmittel, dem anschließenden Tiering und der daraus abgeleiteten Anrechnungsfähigkeit folgt im nächsten Schritt die Berechnung der Solvenzkapitalanforderung.

### 3.1.3. Solvenzkapitalanforderungen

Das folgende Kapitel widmet sich der Berechnung der Solvenzkapitalanforderung. Hierfür zieht der schon zitierte Artikel 100 der [RRL] zwei Möglichkeiten in Betracht: mit Hilfe der sogenannten *Standardformel* oder mit Hilfe eines internen Modells. Beiden gemein sind die zugrunde liegenden Annahmen, die in [RRL], Artikel 101, formuliert sind:

1. Das VU agiert nach dem *Going-Concern-Prinzip*:

Dieses unterstellt, dass das VU seine Geschäftstätigkeit nach dem Grundsatz der Unternehmensfortführung ausübt. Daran anknüpfend soll die Solvenzkapitalanforderung unerwartete Verluste resultierend aus der laufenden Geschäftstätigkeit sowie aus der Geschäftstätigkeit der folgenden zwölf Monate abdecken. Hierbei sind alle quantifizierbaren Risiken, denen ein VU ausgesetzt sind, mindestens aber die unter dem folgenden Punkt 3. genannten Risiken zu berücksichtigen.

2. Die Solvenzkapitalanforderung ist derart kalibriert, dass sie dem *Value at Risk* der Basiseigenmittel eines VUs zu einem Konfidenzniveau von 99,5% für das kommende Geschäftsjahr entspricht:

Gemäß Definition 2.7 des VaR und der zugehörigen Interpretation in Bemerkung 2.8 sieht das Standardmodell vor, dass die Verlustwahrscheinlichkeit des VUs für das folgende Geschäftsjahr höchstens 0,5% beträgt oder anders formuliert, dass mit einer 99,5%-igen Sicherheit ein Kapitalpuffer in Höhe des VaR ausreicht, um die Verpflichtungen des Folgejahres im Verlustfall zu bedienen. Unter Berücksichtigung der Erläuterungen zur Solvenzbilanz im Abschnitt 3.1.2 entspricht die Solvenzkapitalanforderung dann der Veränderung der Basiseigenmittel im Ausgangszustand und im „gestressten“ Zustand der Solvenzbilanz, d.h. bei Eintritt des Verlustfalls, für den Zeitraum eines Geschäftsjahres, wie folgende schematische Darstellung verdeutlicht:

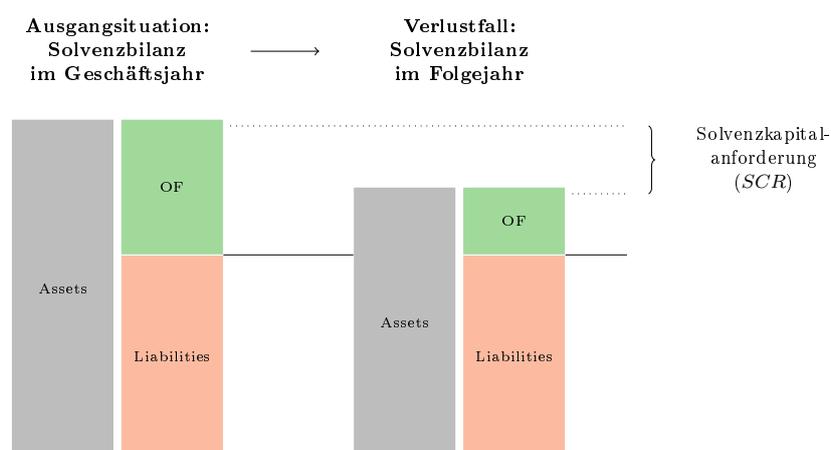


Abbildung 3.4.: Schematische Darstellung der Ermittlung der Solvenzkapitalanforderung  
(Quelle: Eigene Darstellung)

3. Berücksichtigt werden in der Solvenzkapitalanforderung zumindest die folgenden Risiken:
- a) Marktrisiko
  - b) vt. Risiko Kranken
  - c) Kreditausfallrisiko
  - d) vt. Risiko Leben
  - e) vt. Risiko Nicht-Leben
  - f) operationelles Risiko.

Die Standardformel folgt einem modularen Ansatz, bei dem das gesamte Risiko, dem ein VU ausgesetzt ist, in Risikomodule und in einigen Risikomodulen auch in Risikosubmodule unterteilt ist. Für jedes Risikomodul (oder Risikosubmodul) wird eine Kapitalanforderung bestimmt. Die Kapitalanforderung auf der Ebene von Risikomodulen oder Risikosubmodulen wird unter Verwendung von Korrelationsmatrizen aggregiert, um die Kapitalanforderung für das gesamte Risiko zu erhalten.

Gemäß [RRL], Artikel 103, ist die anhand der Standardformel berechnete *Solvenzkapitalanforderung*, *Solvency Capital Requirement (SCR)*, die Summe folgender Bestandteile:

- der *Basissolvenzkapitalanforderung BSCR* gemäß [RRL], Artikel 104,
- der Solvenzkapitalanforderung  $SCR_{operational}$  für das *operationale Risiko* gemäß [RRL], Artikel 107,
- der Anpassung für die Verlustausgleichsfähigkeit der vt. Rückstellungen  $Adj_{TP}$  und latenten Steuern  $Adj_{DT}$  gemäß [RRL], Artikel 108.

Für das SCR gilt demnach:

$$SCR := BSCR + SCR_{operational} + Adj_{TP} + Adj_{DT}.$$

Das operationale Risiko, das zwischen den Geschäftsbereichen Leben und Nicht-Leben differenziert, bezeichnet das Verlustrisiko, das sich aus der Unzulänglichkeit oder dem Versagen von Menschen, internen Prozessen oder Systemen oder durch externe Ereignisse ergibt. Rechtsrisiken sind eingeschlossen. Reputationsrisiken und Risiken aus strategischen Entscheidungen fallen hingegen nicht unter das operationale Risiko, ebenso wie alle Risiken, die bereits Gegenstand anderer Risikomodule sind. Die Kapitalanforderung für das operationale Risiko ist gemäß [RRL], Artikel 107, definiert und wird in [DVO], Artikel 204, spezifiziert. Hierbei handelt es sich rechnerisch um eine gekappte Linearkombination aus Brutto-Volumenmaßen, d.h. vor Rückversicherung, in Form von Prämien und Best Estimates.

Die *Basissolvenzkapitalanforderung*, *Basic Solvency Capital Requirement (BSCR)*, umfasst gemäß [RRL], Artikel 104, die Solvenzkapitalanforderungen folgender Risikomodule:

- $SCR_{market}$  für das Marktrisiko,

- $SCR_{life}$  für das vt. Risiko Leben,
- $SCR_{non-life}$  für das vt. Risiko Nicht-Leben,
- $SCR_{health}$  für das vt. Risiko Kranken,
- $SCR_{def}$  für das Gegenparteiausfallrisiko.

Um sicherzustellen, dass das SCR unter Verwendung des VaR der Basiseigenmittel eines VU zu einem Konfidenzniveau von 99,5% über ein Jahr kalibriert ist, gilt dieses Kalibrierungsziel für jedes einzelne Risikomodul auf konsistente Weise. Die Aggregation der Risikomodule zum BSCR basiert auf der Annahme, dass sich die Abhängigkeit zwischen den Verteilungen vollständig durch einen linearen Zusammenhang (Korrelation) erfassen lässt.

Sei  $\mathbf{x}_{BSCR} \in \mathbb{R}^{5 \times 1}$  definiert durch den transponierten Vektor der Solvenzkapitalanforderungen der Risikomodule zur Berechnung des BSCR:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{BSCR}^T &:= (SCR_i)_{i \in I_{BSCR}} \\ &:= (SCR_{market}, SCR_{def}, SCR_{life}, SCR_{health}, SCR_{non-life}) \in \mathbb{R}^{1 \times 5} \end{aligned}$$

mit  $I_{BSCR} := \{market, def, life, health, non-life\}$ .

Weiterhin sei durch

$$\mathbf{Corr}_{BSCR} := (Corr_{i,j})_{i,j \in I_{BSCR}} \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$$

die Korrelationsmatrix zur Aggregation der Risikomodule zum BSCR mit Korrelationskoeffizienten  $Corr_{i,j}$

$Corr_{i,j}$	$SCR_{market}$	$SCR_{def}$	$SCR_{life}$	$SCR_{health}$	$SCR_{non-life}$
$SCR_{market}$	1	0,25	0,25	0,25	0,25
$SCR_{def}$	0,25	1	0,25	0,25	0,5
$SCR_{life}$	0,25	0,25	1	0,25	0
$SCR_{health}$	0,25	0,25	0,25	1	0
$SCR_{non-life}$	0,25	0,5	0	0	1

Tabelle 3.1.: Korrelationsmatrix  $\mathbf{Corr}_{BSCR}$  zur Aggregation der Risikomodule zur Basissolvvenzkapitalanforderung

zwischen den Risikomodulen  $i$  und  $j$  bezeichnet,  $i, j \in I_{BSCR}$ . Dann gilt gemäß [RRL], Anhang IV, 1.:

$$BSCR := \sqrt{\mathbf{x}_{BSCR}^T \cdot \mathbf{Corr}_{BSCR} \cdot \mathbf{x}_{BSCR}} = \sqrt{\sum_{i \in I_{BSCR}} \sum_{j \in I_{BSCR}} Corr_{i,j} \cdot SCR_i \cdot SCR_j}.$$

Abbildung 3.5 gibt einen Überblick der Risiko- und Risikosubmodule.

Ehe der Fokus auf das Prämienrisiko im Bereich der Nicht-Lebensversicherung gerichtet wird, werden der Vollständigkeit halber die Risikomodule und Risikosubmodule kurz erläutert:

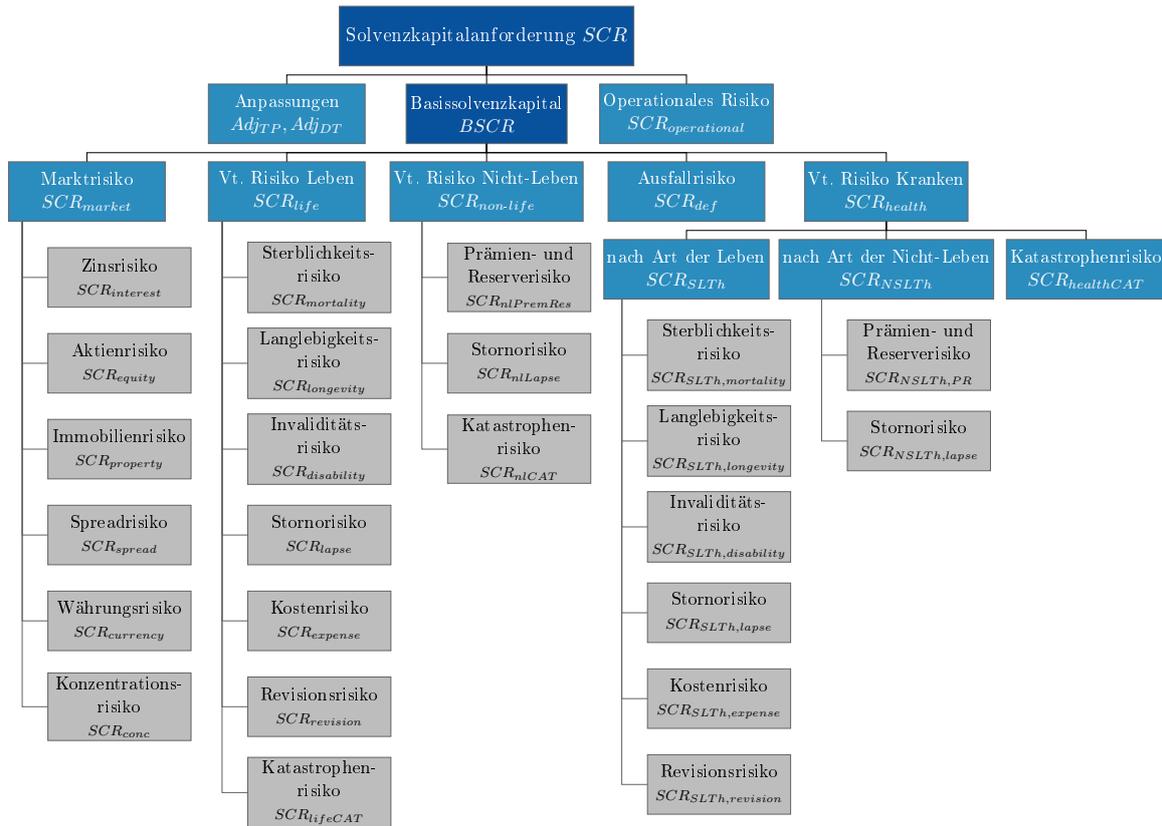


Abbildung 3.5.: Schematische Darstellung des Solvency II-Standardmodells (*Quelle: Eigene Darstellung*)

- Das *Marktrisiko* ergibt sich aus Höhe und Volatilität der Marktpreise von Finanzinstrumenten, [RRL], Artikel 105 (5). Dabei werden die folgenden Risikosubmodule betrachtet: Zinsänderungs-, Aktien-, Immobilien-, Spread-, Konzentrations- und Währungsrisiko. Für jedes der genannten Risiken erfolgt die Neubewertung der Aktiva und Passiva unter vorgegebenen Stressszenarien. Das Zinsänderungsrisiko wird hierbei durch Neubewertung der zinsensitiven Anlagen und versicherungstechnischen Zahlungsströme (Cashflows) mit geänderten Zinskurven (Zinsschock nach oben und nach unten) bestimmt. Aktien-, Immobilien-, Spread- und Währungsrisiko erhält man durch Anwendung vorgegebener Stressfaktoren auf die relevanten Anlagen. Die entsprechende Solvenzkapitalanforderung  $SCR_{market}$  berechnet sich gemäß Anhang A.1.1.
- Das *vt. Risiko Leben* ist gemäß [RRL], Artikel 105 (3), das Risiko sich verändernder Zahlungsströme aufgrund ungünstiger Entwicklungen der zugrunde liegenden Rechnungsgrundlagen. Daher werden gemäß dem modularen Aufbau des Standardansatzes folgende Teilrisiken betrachtet: Sterblichkeits-, Langlebighkeits-, Invaliditäts-, Kosten-, Revisions-, Storno- und Katastrophenrisiko. Die entsprechende Solvenzkapitalanforderung  $SCR_{life}$  berechnet sich gemäß Anhang A.1.2.
- Das Prämien- und Reserverisiko, Storno- als auch das Katastrophenrisiko bilden das

vt. Risiko Nicht-Leben, [RRL], Artikel 105 (2). Die entsprechende Solvenzkapitalanforderung  $SCR_{non-life}$  berechnet sich gemäß Anhang A.1.3.

- Gemäß [RRL], Artikel 105 (4), werden im vt. Risiko Kranken Risiken berücksichtigt, die durch Krankheit, Invalidität oder Unfall ausgelöst werden. Mindestens sind jedoch Änderungs-, Schwankungs- und Katastrophenrisiken, differenziert nach Risiken, die nach Art der Leben bzw. nach Art der Nicht-Leben zu bewerten sind, berücksichtigt. Die entsprechende Solvenzkapitalanforderung  $SCR_{health}$  berechnet sich gemäß Anhang A.1.4.
- Das *Gegenparteiausfallrisiko* bezeichnet das Risiko von Verlusten aufgrund unerwarteter Ausfälle oder Verschlechterungen der Bonität von Gegenparteien und Schuldnern während der nächsten 12 Monate, [RRL], Artikel 105 (6).

### Prämien- und Reserverisiko

Im Folgenden wird das *Prämien- und Reserverisiko* im vt. Risiko Nicht-Leben untersucht, das nicht getrennt nach Prämien- und Reserverisiko, sondern gesamthaft berechnet wird.

Die Solvenzkapitalanforderung für das Prämien- und Reserverisiko ist gemäß [RRL], Artikel 105 (2), definiert und wird in [DVO], Artikel 115, spezifiziert:

$$SCR_{nlPremRes} := 3 \cdot \sigma_{nl} \cdot V_{nl} = 3 \cdot \sigma_{nl} \cdot \sum_{s \in LoB} V_s.$$

Dabei bezeichnen

- $\sigma_{nl}$  die Standardabweichung des Prämien- und Reserverisikos und
- $V_{nl}$  das Volumenmaß des Prämien- und Reserverisikos als Summe der Volumenmaße  $V_s$  des Prämien- und Reserverisikos je Solvency II-Geschäftsbereich, *Line of Business (LoB)*,  $s, s \in LoB := \{4, 5, \dots, 12, 16, 17, \dots, 24, 26, 27, 28\}$ .

Das Volumenmaß  $V_{nl}$  und die Standardabweichung  $\sigma_{nl}$  als maßgebliche Größen für das Prämien- und Reserverisiko werden im Folgenden dargestellt. In Tabelle A.4 des Anhangs sind die relevanten LoBs gemäß [RRL], Anhang I, bzw. [DVO], Anhang I und II, aufgeführt. Exemplarisch sei an dieser Stelle erwähnt, dass es sich bei LoB 4 um die Kraftfahrt-Haftpflichtversicherung handelt.

**Bestimmung der Volumenmaße.** Gemäß [DVO], Artikel 116 (3), ist das Volumenmaß des *Prämienrisikos* des LoBs  $s$  zu bestimmen:

$$V_{(prem,s)} = \max \{P_s, P_{(last,s)}\} + FP_{(existing,s)} + FP_{(future,s)}.$$

Dabei bezeichnen

- $P_s$  die geschätzten verdienten Netto-Prämieneinnahmen des LoBs  $s$  der nächsten zwölf Monate, d.h. im ersten Folgejahr einschließlich Neugeschäft,

- $P_{(last,s)}$  die verdienten Netto-Prämieneinnahmen des LoBs  $s$  der letzten zwölf Monate, also im Geschäftsjahr,
- $FP_{(existing,s)}$  den erwarteten Barwert zukünftiger verdienter Netto-Prämienzahlungen bestehender Verträge des LoBs  $s$  nach Ablauf der nächsten zwölf Monate, ergo ab dem zweiten Folgejahr,
- $FP_{(future,s)}$  den erwarteten Barwert zukünftiger verdienter Netto-Prämienzahlungen aus Verträgen des LoBs  $s$ , die in den nächsten zwölf Monaten gezeichnet werden. Nicht zu berücksichtigen sind die zukünftigen verdienten Netto-Prämienzahlungen der zwölf Monate nach Zeichnung.

Das Volumenmaß für das *Reserverisiko* sind die Best Estimates der Schadenrückstellungen netto je LoBs  $s$  gemäß [DVO], Artikel 116 (6):

$$V_{(res,s)} = \underline{BE}_{(res,s)}.$$

Gemäß [DVO], Artikel 116 (2), berechnet sich das Volumenmaß des Prämien- und Reserverisikos des LoB  $s$  durch:

$$V_s = (V_{(prem,s)} + V_{(res,s)}) \cdot (0,75 + 0,25 \cdot DIV_s),$$

wobei durch  $DIV_s$  die geographische Diversifikation des LoBs  $s$  gemäß [DVO], Artikel 116 (2.c), und [DVO], Anhang III, 1., beschrieben wird.

**Ermittlung der Risikofaktoren.** Für den LoB  $s$  ist die Standardabweichung des Prämien- und Reserverisikos gemäß [DVO], Artikel 117 (2), durch

$$\sigma_s = \frac{\sqrt{\sigma_{(prem,s)}^2 \cdot V_{(prem,s)}^2 + \sigma_{(prem,s)} \cdot V_{(prem,s)} \cdot \sigma_{(res,s)} \cdot V_{(res,s)} + \sigma_{(res,s)}^2 \cdot V_{(res,s)}^2}}{V_{(prem,s)} + V_{(res,s)}}$$

gegeben. Dabei bezeichnen:

- $\sigma_{(prem,s)}$  die Standardabweichung des Prämienrisikos des LoBs  $s$ , die gemäß [DVO], Artikel 117, gerade das Produkt aus Standardabweichung für das Brutto-Prämienrisiko  $\sigma_{(GrossPrem,s)}$  und einem Anpassungsfaktor für die nichtproportionale Rückversicherung  $NP_s$  ist:

$$\sigma_{(prem,s)} = \sigma_{(GrossPrem,s)} \cdot NP_s$$

- $\sigma_{(res,s)}$  die Standardabweichung des Reserverisikos des LoBs  $s$ .

Die Risikofaktoren gemäß [DVO], Anhang II, können der Tabelle A.4 entnommen werden.

Mit dem Vektor

$$\mathbf{x}_{nlPremRes}^T := (\sigma_s \cdot V_s)_{s \in LoB},$$

dessen Komponenten aus dem Produkt aus Standardabweichung und Volumenmaß für jeden LoB  $s$  gebildet werden, wird die Standardabweichung des Prämien- und Reserverisikos gemäß [DVO], Artikel 117, über alle LoBs zusammengefasst:

$$\begin{aligned}\sigma_{nl} &:= \frac{1}{V_{nl}} \cdot \sqrt{\mathbf{x}_{nlPremRes}^T \cdot \mathbf{CorrS}_{nlPremRes} \cdot \mathbf{x}_{nlPremRes}} \\ &= \frac{1}{V_{nl}} \cdot \sqrt{\sum_{s \in LoB} \sum_{t \in LoB} CorrS_{s,t} \cdot \sigma_s \cdot V_s \cdot \sigma_t \cdot V_t}\end{aligned}$$

Dabei sei  $\mathbf{CorrS}_{nlPremRes} := (CorrS_{s,t})_{s,t \in LoB}$  die Matrix bestehend aus den Korrelationskoeffizienten zwischen dem Prämien- und Reserverisiko für den LoB  $s$  und dem LoB  $t$ , die der Tabelle A.5 gemäß [DVO], Anhang IV, entnommen werden können.

## 3.2. Prämienrisiko im Standardmodell des Swiss Solvency Tests

### 3.2.1. Meilensteine

Beim *Swiss Solvency Test (SST)* handelt es sich um ein marktkonsistentes und risikoorientiertes Aufsichtsregelwerk für den Schweizer Versicherungsmarkt, das am 01. Januar 2011 in Kraft getreten ist.

Die gesetzliche Grundlage des Schweizer Solvenztests wurde am 01. Januar 2006 mit dem überarbeiteten Schweizer VAG und der „Verordnung über die Beaufsichtigung von privaten Versicherungsunternehmen (Aufsichtsverordnung, AVO)“ gelegt und zielt auf den Schutz der Versicherten ab. Dazu legt der SST in Abhängigkeit der vom VU eingegangenen Risiken fest, über wie viel ökonomisches Eigenkapital das VU mindestens verfügen muss, um solvent zu bleiben und um folglich die eingegangenen langfristigen Verpflichtungen erfüllen zu können. Verantwortlich für die Entwicklung und Festlegung der Vorschriften ist die Eidgenössische Finanzmarktaufsicht (FINMA), die ihre Tätigkeit zum 01. Januar 2009 als Zusammenschluss mehrerer Behörden aufnahm.

Der Projektstart zur Ausarbeitung des SST erfolgte im Jahr 2003, gefolgt von zwei Feldstudien. Nach der gesetzlichen Verankerung führen seit 2008 alle Schweizer VUs die Berechnungen zum SST auf Basis der technischen Spezifikation durch und berichten ihre Ergebnisse. Das technische Dokument stammt aus dem Jahr 2006 und wurde zwischenzeitlich durch die Rundschreiben 2008/44 und 2013/02 überarbeitet. Weitere konzeptionelle Grundlagen zum SST sind in einer Reihe von sogenannten „Wegleitungen“ notiert. Am 01. Januar 2011 endete die 5-jährige Übergangsphase und alle VUs müssen seitdem die Anforderungen des SST erfüllen.

Gemäß [AVO], Artikel 22, haben die Schweizer VUs ihre Solvabilität nach dem SST zu beurteilen, dessen Rahmen von den Artikeln 41 – 53 der [AVO] aufgespannt und durch das Technische Dokument spezifiziert wird. Die folgenden Ausführungen sind an [BPV06], Kapitel 2, angelehnt.

### 3.2.2. Risikotragendes Kapital

Der SST misst die Risikotragfähigkeit eines VUs als sogenanntes *risikotragendes Kapital* (*RTK*). In einem ersten Schritt ist das verfügbare Kapital zu bestimmen. Dazu werden Vermögenswerte und Verbindlichkeiten auf Basis einer marktkonsistenten Bewertung in einer Bilanz gegenübergestellt. Der Ansatz und die Bewertung der Vermögenswerte und Verbindlichkeiten erfolgt zum Fair Value, dessen Ermittlung sich an der Fair Value-Hierarchie (vergleiche Kapitel 3.1.2) orientiert. Diesbezüglich sei auf [BPV06], Kapitel 3, verwiesen, wobei die Bewertungsgrundsätze der Assetklassen der Kapitalanlagen in einem gesonderten Dokument „Bestimmung der marktnahen Bilanzwerte zur Ermittlung des risikotragenden Kapitals im SST“ behandelt werden.

Im Ausgangszustand resultiert das RTK aus der Bilanz als Differenz zwischen Marktwert der Vermögenswerte und dem Best Estimate der Verbindlichkeiten, diskontiert mit der risikofreien Zinsstrukturkurve. Insbesondere ist der marktkonsistente Wert der vt. Rückstellungen gerade die Summe aus dem Best Estimate der vt. Rückstellungen und dem sogenannten *Mindestbetrag* bzw. der *Market Value Margin* (*MVM*), die durch einen Kapitalkostenansatz approximiert wird. Somit ist das verfügbare Kapital durch das RTK gegeben und dient dem Ausgleich von Schwankungen im Geschäftsverlauf. Das RTK ist wiederum die Summe aus dem sogenannten *Kernkapital* und dem *ergänzenden Kapital*. Diese Kriterien sind in [AVO], Artikel 47 – 50, formuliert.

### 3.2.3. Zielkapital

Neben der Aussage über die Risikotragfähigkeit eines VUs trifft der SST eine Aussage über die Höhe der vom VU eingegangenen Risiken, die als sogenanntes *Zielkapital* (*ZK*) gemessen wird. Gemäß [AVO], Artikel 41, Absatz 1, ist das Zielkapital als untere Grenze für das RTK zu verstehen, das zu Beginn des Geschäftsjahres vorhanden sein muss, damit im Verlustfall das durchschnittliche RTK am Ende des folgenden Geschäftsjahres mindestens so groß ist wie die MVM. Bei der Durchschnittsbildung werden allerdings nur die Werte des RTK berücksichtigt, die oberhalb des vorgegebenen Schwellenwertes in Form des VaR liegen.

Zur Präzisierung der Anforderungen an das Zielkapital sowie zur Einordnung in den Kontext der im SST verwendeten Notation wird das Jahr, in dem der SST durchgeführt wird, als das sogenannte *Current Year* (*CY*) bezeichnet. Der Beginn des Geschäftsjahres im CY werde durch  $t_0$  (in der Regel der 01. Januar) und das Ende des nun folgenden Geschäftsjahres im CY durch  $t_1$  (in der Regel der 31. Dezember) deklariert, sodass gilt:

$$CY := [t_0, t_1).$$

Die Definition des Zielkapitals *ZK* ist durch

$$ZK := TVaR_\alpha \left( \frac{RTK^{(t_1)}}{1 + r_1^{(t_0)}} - RTK^{(t_0)} \right) + \frac{MVM}{1 + r_1^{(t_0)}},$$

gegeben, wobei

- $\alpha = 99\%$ ,
- $RTK^{(t_0)}$  bzw.  $RTK^{(t_1)}$  das RTK zum Zeitpunkt  $t_0$  bzw.  $t_1$  und
- $r_1^{(t_0)}$  der einjährige risikofreie Zinssatz zum Zeitpunkt  $t_0$

sein. Das Zielkapital ist demnach derart kalibriert, dass es dem TVaR der Veränderung des RTK eines VUs zu einem Konfidenzniveau von  $\alpha = 99\%$  über den Zeitraum von einem Jahr und der MVM entspricht. Gemäß Definition 2.9 des TVaR und der zugehörigen Interpretation in Bemerkung 2.10 sieht der SST unter Berücksichtigung der MVM vor, dass ein Kapitalpuffer in Höhe des TVaR zum Sicherheitsniveau von 99% ausreichend ist, um den durchschnittlichen Verlust bei Eintritt des Verlustereignisses im folgenden Geschäftsjahr aufzufangen.

Sofern das RTK zu Beginn des Geschäftsjahres größer ist als das Zielkapital,

$$RTK^{(t_0)} > ZK,$$

erfüllt ein VU die Anforderungen des SST. Dies ist äquivalent zur Forderung, dass für den SST-Quotienten

$$\frac{RTK^{(t_0)}}{ZK} > 100\%$$

gilt.

Die Berechnung des ZK erfolgt gemäß [AVO], Artikel 50, entweder anhand des von der Aufsichtsbehörde in Zusammenarbeit mit der Versicherungswirtschaft und den Hochschulen entwickelten Standardmodells oder auf Basis eines (partiellen) internen Modells, das der Genehmigung der FINMA bedarf. Unabhängig von der Wahl des Berechnungsmodells sind laut [AVO], Artikel 42, die folgenden Risiken zu berücksichtigen:

- Marktrisiko
- Kreditrisiko
- vt. Risiko.

Ehe der Fokus auf das vt. Risiko im Standardmodell für die Nicht-Lebensversicherung gerichtet wird, sei der Vollständigkeit halber erwähnt, dass das Standardmodell für Kreditrisiken in [BPV06], Kapitel 4.2, sowie für das vt. Risiko im Bereich der Lebens- und Krankenversicherung in [BPV06], Kapitel 4.3 und 4.5, erläutert werden, während dem Standardmodell für Marktrisiken eine Wegweisung gewidmet ist.

Im Bereich der Nicht-Lebensversicherung basiert das Standardmodell des SST auf dem sogenannten *Anfalljahresprinzip*, d.h. es ist maßgeblich, zu welchem Zeitpunkt sich ein Schaden ereignet hat. Zum Zeitpunkt  $t_0$  im CY wird durch

$$PY := (-\infty, t_0)$$

der Beobachtungszeitraum für Vorjahresschäden deklariert. In diesem Zusammenhang ist ebenfalls von sogenannten *Previous Year (PY)-Schäden* die Rede. Die im SST gebräuchliche Notation in Form von CY-Schäden, die sich auf zukünftig anfallende Schäden des CY

beziehen, und PY-Schäden, dient letztlich der Differenzierung zwischen Prämien- und Reserverisiko.

Ausgehend von der Definition des Zielkapitals ist eine Verteilung für

$$\frac{RTK^{(t_1)}}{1 + r_1^{(t_0)}} - RTK^{(t_0)}$$

von Interesse, die in [BPV06], Kapitel 4.4, hergeleitet wird. Im Ergebnis lässt sich die Veränderung des RTK über den Zeitraum eines Geschäftsjahres als Summe darstellen, deren Bestandteile ins Marktrisiko und ins vt. Risiko einfließen. Insbesondere lassen sich die für das vt. Risiko relevanten Terme in Anlehnung an [Gis09] als technisches Ergebnis (TE), definiert durch

$$TE := P - K - S_{CY} + CDR_{PY}^{(t_0 \rightarrow t_1)},$$

darstellen. Hierbei bezeichnen

- $P$  die verdienten Prämien,
- $K$  die Verwaltungs- und Betriebskosten,
- $S_{CY}$  den Schadenaufwand jeweils im CY und
- $CDR_{PY}^{(t_0 \rightarrow t_1)}$  das einjährige ökonomische Abwicklungsergebnis.

Das sogenannte *Claims Development Result (CDR)* ist definiert als eingehende BE-Reserve zum Zeitpunkt  $t_0$  abzüglich der ausgehenden BE-Reserve zum Zeitpunkt  $t_1$  und den Schadenzahlungen im Zeitraum  $CY = [t_0, t_1]$  für PY-Schäden.

$CDR_{PY}^{(t_0 \rightarrow t_1)} < 0$  bedeutet einen Abwicklungsverlust, der damit ceteris paribus zu einem Rückgang der ökonomischen Eigenmittel führt. Entsprechend stellt im Kontext des SST das Risiko eines ökonomischen Abwicklungsverlustes für den Zeitraum eines Geschäftsjahres gerade das (einjährige) Reserverisiko dar.

Der Vollständigkeit halber sei an dieser Stelle erwähnt, dass BE-Reserven im Kontext des SST als diskontierte BE-Reserven zu verstehen sind, wobei zur Diskontierung die maßgebliche risikofreie Zinsstrukturkurve herangezogen wird. Gleiches gilt für den Schadenaufwand  $S_{CY}$  im CY, der ebenfalls als diskontierter Schadenaufwand des CY zu interpretieren ist.

### Prämienrisiko

Das TE lässt sich ausgehend von seiner Definition wie folgt umformen:

$$\begin{aligned} TE &= P - K - S_{CY} + CDR_{PY}^{(t_0 \rightarrow t_1)} \\ &= (P - K - E(S_{CY})) - (S_{CY} - E(S_{CY})) + CDR_{PY}^{(t_0 \rightarrow t_1)} \\ &= E(P - K - E(S_{CY})) - (S_{CY} - E(S_{CY})) + CDR_{PY}^{(t_0 \rightarrow t_1)}. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit gilt aufgrund der Annahmen des SST-Standardmodells gemäß [BPV06], Kapitel 4.2.2, da es sich sowohl bei den verdienten Prämien als auch bei den Verwaltungs- und Betriebskosten um deterministische Größen handelt. Entsprechend bilden

- das erwartete TE  $E(P - K - E(S_{CY}))$ ,
- die Abweichung des Schadenaufwands  $S_{CY}$  im CY vom Erwartungswert  $E(S_{CY})$  und
- das Reserverisiko  $CDR_{PY}^{(t_0 \rightarrow t_1)}$

gerade die Komponenten des TE. Durch den Term  $S_{CY} - E(S_{CY})$  wird insbesondere das Prämienrisiko beschrieben, sodass im Folgenden der Fokus auf die Modellierung des Schadenaufwands  $S_{CY}$  im CY gerichtet wird. Hierzu ist eine Differenzierung nach LoBs erforderlich, die gemäß [BPV06], Kapitel 8, in Tabelle A.7 des Anhangs aufgeführt ist.

**Modellierung des Jahresgesamtschadens  $S_{CY}$ .** Bezüglich der Modellierung des Jahresgesamtschadens  $S_{CY}$  im CY wird im Standardmodell des SST zwischen Basisschäden, sogenannter *Attritional Claims (AC)*, und Großschäden, sogenannter *Large Claims (LC)*, differenziert, da in der Regel keine Wahrscheinlichkeitsverteilung existiert, die Basis- und gleichsam Großschäden adäquat beschreiben kann. Unter Großschäden werden sowohl Einzelgroßschäden (pro LoB), z.B. Personenschäden in KH, als auch (LoB-übergreifende) Kumulschäden, etwa durch Naturkatastrophen verursacht, zusammengefasst. Die Separierung von Basis- und Großschäden erfolgt im Standardmodell anhand der Wahl einer Großschadengrenze  $x_m$ , für die gilt:

$$x_m \in \{1.000.000, 5.000.000\}.$$

Hierbei sind die angegebenen Werte für die Großschadengrenze in der Landeswährung Schweizer Franken (CHF) zu verstehen. Unter der im Standardmodell getroffenen Annahme, dass die Basis- und Großschäden stochastisch unabhängig sind, ist folglich zur Modellierung des Jahresgesamtschadens  $S_{CY}$  jeweils der Schadenaufwand für Basis- und Großschäden zu modellieren, denn es gilt:

$$S_{CY} := S_{CY}^{AC} + S_{CY}^{LC}.$$

**Modellierung der Basisschäden.** Zur Modellierung des Schadenaufwands  $S_{CY}^{AC}$  für Basisschäden gilt die übliche LoB-Aufteilung, wie sie in Tabelle A.7 des Anhangs aufgeführt ist. Eine Ausnahme betrifft die Basisschäden im Elementarschadenpool. Diesbezüglich sei der interessierte Leser auf [BPV06], Kapitel 4.4.9, verwiesen.

Der Jahresschadenaufwand der Basisschäden setzt sich aus der Summe aller Einzelschäden über alle LoBs zusammen. Da das Standardmodell des SST keine Verteilungsannahme für Basisschäden unterstellt, sind zur Berechnung lediglich Erwartungswert als Summe der erwarteten Jahresschadenaufwände pro LoB  $s$

$$E(S_{CY}^{AC}) = \sum_{s=1}^{12} E(S_{CY,s}^{AC})$$

und Varianz erforderlich. Ein möglicher Schätzer für den erwarteten Schadenaufwand der Basisschäden pro LoB ist etwa das Produkt aus erwartetem Schadensatz und Erwartungswert

der verdienten Prämien. Für die Varianz gilt folgende Zerlegung:

$$\begin{aligned}
Var(S_{CY}^{AC}) &= Var\left(\sum_{s=1}^{12} S_{CY,s}^{AC}\right) = \sum_{s,t=1}^{12} Cov(S_{CY,s}^{AC}, S_{CY,t}^{AC}) \\
&= \sum_{s=1}^{12} Var(S_{CY,s}^{AC}) + \sum_{\substack{s,t=1 \\ s \neq t}}^{12} Cov(S_{CY,s}^{AC}, S_{CY,t}^{AC}) \\
&= \sum_{s=1}^{12} (VKo(S_{CY,s}^{AC}) \cdot E(S_{CY,s}^{AC}))^2 \\
&\quad + \sum_{\substack{s,t=1 \\ s \neq t}}^{12} Corr(S_{CY,s}^{AC}, S_{CY,t}^{AC}) \cdot (VKo(S_{CY,s}^{AC}) \cdot E(S_{CY,s}^{AC})) \\
&\quad \cdot (VKo(S_{CY,t}^{AC}) \cdot E(S_{CY,t}^{AC})).
\end{aligned}$$

Die Anwendung der Definition des Variationskoeffizienten und der Kovarianz bzw. des Korrelationskoeffizienten führt zur letzten Gleichheit. Die Korrelationskoeffizienten

$$\rho_{s,t} := Corr(S_{CY,s}^{AC}, S_{CY,t}^{AC})$$

für Basisschäden bezüglich der SST-LoBs können der Tabelle A.8 im Anhang gemäß [BPV06], Kapitel 8.4.2, entnommen werden. Unter der Annahme, dass die Anzahl der Schadenfälle  $N_{CY,s}^{AC}$  im LoB  $s$  Poisson-verteilt ist mit Parameter  $\lambda_s$  (vergleiche Beispiel 2.1),

$$N_{CY,s}^{AC} \sim Poi(\lambda_s), \lambda_s \in (0, \infty),$$

gilt mit Hilfe von Satz 2.47 für den Variationskoeffizienten des Gesamtschadens  $S_{CY,s}^{AC}$ :

$$VKo^2(S_{CY,s}^{AC}) = \frac{Var(S_{CY,s}^{AC})}{(E(S_{CY,s}^{AC}))^2} = VKo_{p,s}^2 + \frac{1}{\lambda_s} \cdot (VKo^2(X_{j,s}) + 1),$$

wobei

- $VKo(X_{j,s})$  den Variationskoeffizienten der  $j$ -ten Einzelschadenhöhe im LoB  $s$  und
- $VKo_{p,s}$  den Variationskoeffizienten des Parameterrisikos für den LoB  $s$

bezeichne. Unter Berücksichtigung von Bemerkung 2.48 verdeutlicht diese Darstellung des Variationskoeffizienten seine Beiträge zum Parameter- und Zufallsrisiko (vergleiche Abschnitt 2.5). Der Variationskoeffizient  $VKo_{p,s}$ , dessen Struktur Satz 2.47 entnommen werden kann, besteht aus der Parameterunsicherheit bezüglich des Erwartungswertes sowohl für die Einzelschadenhöhe  $E(X_{j,s})$  als auch für die Anzahl der Einzelschäden  $N_{CY,s}^{AC}$  des LoBs  $s$ . Diese Unsicherheit betrifft nahezu alle VUs, sodass das Standardmodell Standardwerte für den Variationskoeffizienten des Parameterrisikos vorsieht, die Tabelle A.9 im Anhang gemäß [BPV06], Kapitel 8.4.3, entnommen werden können. Der Variationskoeffizient  $VKo(X_{j,s})$  bildet die Variabilität der  $j$ -ten Einzelschadenhöhe des LoBs  $s$  ab. Die Standardwerte gemäß

[BPV06], Kapitel 8.4.4, sind ebenfalls - in Abhängigkeit der Wahl der Großschadengrenze - in Tabelle A.9 des Anhangs aufgeführt.

Bei Verwendung der Standardwerte sind folglich durch die Schweizer VUs zur Berechnung der Varianzen bzw. Variationskoeffizienten lediglich die Anzahl der Schäden je LoB zu schätzen.

**Modellierung der Großschäden.** Wie bereits angedeutet, werden Großschäden nach Einzel- und Kumulschäden differenziert, wobei insbesondere Einzelschäden für diese Arbeit von Interesse sind. Der interessierte Leser werde an dieser Stelle auf [BPV06], Kapitel 4.4.8.1 und 4.4.8.2, verwiesen. Die Modellierung erfolgt dabei pro LoB bzw. Ereignistyp auf Basis eines kollektiven Modells (siehe Definition 2.35)  $\left\langle N_s^{LC}, \left( X_{j,s}^{LC} \right)_{j \in \mathbb{N}} \right\rangle$  mit Gesamtschaden

$$S_{CY,s}^{LC} := \sum_{j=1}^{N_s^{LC}} X_{j,s}^{LC},$$

wobei das SST-Standardmodell eine Poisson-Verteilung (siehe Beispiel 2.1) bezüglich der Schadenanzahl,  $N_{CY,s}^{LC} \sim Poi(\lambda_s)$ ,  $\lambda_s \in (0, \infty)$ , und eine Pareto-Verteilung mit Parametern  $\alpha_s, x_{m,s} \in (0, \infty)$  (vergleiche Beispiel 2.2 und Abschnitt 2.6) bezüglich der Brutto-Schadenhöhe  $X_{j,s}^{LC} \sim X_{\cdot,s}^{LC}$  mit zugehöriger Dichtefunktion

$$f_{X_{j,s}^{LC}}(x) = \frac{\alpha_s}{x_{m,s}} \cdot \left( \frac{x_{m,s}}{x} \right)^{\alpha_s+1} \cdot \mathbb{1}_{(x_{m,s}, \infty)}(x)$$

und Verteilungsfunktion

$$F_{X_{j,s}^{LC}}(x) = \left( 1 - \left( \frac{x_{m,s}}{x} \right)^{\alpha_s} \right) \cdot \mathbb{1}_{(x_{m,s}, \infty)}(x)$$

unterstellt. Der Threshold  $x_{m,s}$  als Großschadengrenze kann in Abhängigkeit des LoBs  $s$  gewählt werden. Hierbei die Separierung zwischen Basis- und Großschäden aufgreifend gilt im Standardmodell des SST:  $x_{m,s} \in \{1.000.000, 5.000.000\}$ .

Die Standardwerte im SST für den Parameter  $\alpha_s$  in Abhängigkeit des LoBs können gemäß [BPV06], Kapitel 4.4.8, in Tabelle A.10 des Anhangs eingesehen werden. So wird etwa im Bereich KH bei einer Großschadengrenze in Höhe von einer Million (Mio.) CHF der charakteristische Index mit dem Wert  $\alpha_1 = 2,5$  angesetzt.

Durch die Wahl der Pareto-Verteilung zur Modellierung der Schadenhöhen sind theoretisch beliebig hohe Schäden denkbar. Was aufgrund von Illimitée-Deckungen im Bereich KH sinnvoll ist, ist etwa in der Feuerversicherung nicht adäquat, da etwa Schäden durch die Angabe von Versicherungssummen begrenzt werden. Entsprechend werden im Standardmodell des SST in Abhängigkeit des LoBs Abschneidepunkte für die Pareto-Verteilung definiert, [BPV06], Kapitel 4.4.8. In diesem Zusammenhang spricht man auch von einer sogenannten (*two-sided*) *Truncated-Pareto-Distribution*.

In einem letzten Schritt gilt es, die Großschadenverteilungen zu aggregieren. Hierzu wird das Ergebnis aus Satz 2.42 verwendet: die Summe unabhängiger Variablen, die zusammengesetzt

Poisson-verteilt sind, sind wiederum Poisson-verteilt sind. Die Verteilung des Gesamtschadens der Großschäden

$$S = \sum_s S_{CY,s}^{LC} = \sum_s \sum_{j=1}^{N_{CY,s}^{LC}} X_{CY,j,s}^{LC}$$

kann aufgrund der unterstellten Poisson-Verteilung beispielsweise mit dem Panjer-Algorithmus berechnet werden (vergleiche Abschnitt 2.4).

### 3.3. Prämienrisiko unter US-Solvency

#### 3.3.1. Meilensteine

Im Jahr 1994 wurde in den USA das *Risk-Based Capital (RBC)* als Bestandteil des US-Solvency Rahmenwerks etabliert.

Als Frühwarnsystem zur Vermeidung von Insolvenzen US-amerikanischer VUs dient das RBC-System durch Überwachung der Solvabilität der VUs insbesondere dem Schutz der Versicherten. Dazu werden einerseits unter Berücksichtigung von Größe und Risikoprofil des VU, die Anforderungen an die vorzuhaltenden Eigenmittel durch Berechnung des RBC ermittelt, das als minimale Kapitalanforderung zu interpretieren ist. Andererseits wird ein objektiver Standard für die Auslösung regulatorischer Maßnahmen durch die Aufsichtsbehörden festgelegt.

Die Versicherungsaufsicht der USA ist dezentral geregelt und obliegt den jeweiligen Bundesstaaten. Aufgrund zahlreicher Insolvenzen von VUs in den späten 1980er- und frühen 1990er-Jahren beauftragte die *National Association of Insurance Commissioners (NAIC)* eine Arbeitsgruppe mit der Entwicklung einer gesetzlichen, risikoorientierten Eigenmittelanforderung für die VUs. Bei der NAIC handelt es sich um eine Organisation der *Chief Insurance Commissioners* der einzelnen Bundesstaaten, die weder über Regulierungsbefugnisse noch über Aufsichtskompetenz verfügt, sondern bei der Erstellung regulatorischer Standards unterstützt. Das mit Hilfe der NAIC eingeführte RBC-System hat im Bereich der Solvenzprüfung zu einer Harmonisierung beigetragen, da alle Bundesstaaten der USA den RBC-Regeln unterliegen. Seit Einführung wurde das US-Solvency Rahmenwerk und speziell die Methodik zur Berechnung des RBC kontinuierlich gemäß den Veränderungen der Versicherungswirtschaft weiterentwickelt. Die letzte große Anpassung erfolgte im Zeitraum von 2008 bis 2013 im Zuge der sogenannten *Solvency Modernization Initiative (SMI)* als Reaktion auf die weltweite Finanzkrise, die Mitte 2007 in der US-Immobilienkrise ihren Ursprung fand.

Den aktuellen Rahmen für US-Solvency bildet [NAIC13]. Die RBC-Methodik für die Lebensversicherung basiert auf [NAIC94], das in [Sch97] diskutiert wird. Auf Grundlage von [NAIC94] wurde ein entsprechendes System für die Nicht-Lebensversicherung entwickelt, dessen Ergebnisse unter anderem durch [MR96] aufgegriffen werden. Bis heute haben die genannten Quellen bezüglich des RBC-Systems in ihren Grundzügen Bestand, weshalb diese

für die folgenden Ausführungen herangezogen werden. [NAIC16b] und [AAA16] ergänzen diese Quellen in Bezug auf die aktuellen Entwicklungen im Bereich *Property and Casualty*.

Das RBC-System im Sinne eines Standardmodells stellt das sogenannte *Total Adjusted Capital (TAC)* in Relation zum sogenannten *Total Risk-Based Capital (TRBC)*.

### 3.3.2. Total Adjusted Capital

Die US-amerikanischen VUs sind verpflichtet, einen gesetzlichen Jahresabschluss nach den gesetzlichen Rechnungslegungsgrundsätzen, den sogenannten *Statutory Accounting Principles (SAP)*, zu erstellen, die in [NAIC16a] aufgeführt sind. Vor dem Hintergrund der Überwachung der Solvabilität der VUs konzentrieren sich die SAP eher auf die Bilanz als auf die Gewinn- und Verlustrechnung und unterstreichen damit die Liquidität der VUs. Grundsätzlich verwendet SAP das nach United States - General Accepted Accounting Principle (US-GAAP) eingerichtete Rahmenwerk, dennoch weisen beide Rechnungslegungsstandards deutliche Unterschiede auf. Exemplarisch sei an dieser Stelle die konservative Bewertungsmethodik bezüglich der Vermögenswerte und Verbindlichkeiten genannt, siehe [NAIC16a] sowie unter anderem [Roc+07].

Beim TAC handelt es sich um das verfügbare Kapital mit Eigenmittelcharakter, das im Rahmen des gesetzlichen Jahresabschlusses nach den gesetzlichen Rechnungslegungsgrundsätzen ermittelt wird. Wesentlicher Bestandteil des TACs ist dabei das sogenannte *Capital and Surplus*.

### 3.3.3. Total Risk-Based Capital

In Relation zum TAC wird das geforderte Solvenzkapital TRBC gesetzt, das auf Basis eines einfachen, standardisierten Faktormodells, differenziert nach Lebens-, Nicht-Lebens- und Krankenversicherung, bestimmt wird. Im Bereich der Nicht-Lebensversicherung ist das TRBC gemäß der sogenannten *Kovarianz-Formel* zur Berücksichtigung von Diversifikationseffekten wie folgt definiert:

$$TRBC := R_0 + \sqrt{R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 + R_4^2 + R_5^2}$$

Dabei bezeichnet,

- $R_0$  das RBC aus Beteiligungen an verbundenen Unternehmen sowie aus bilanzneutralen Risiken (*Asset Risk - Insurance Affiliates and Off-Balance-Sheet Risks*),
- $R_1$  das RBC aus Investitionen in festverzinsliche sowie kurzfristige Anleihen (*Asset Risk - Fixed Income*),
- $R_2$  das RBC aus Investitionen in Aktien und Immobilien (*Asset Risk - Equity*),
- $R_3$  das RBC für das Kreditrisiko (*Credit Risk - Recoverables, Reinsurance*),

- $R_4$  das RBC für das Reserverisiko (*Underwriting Risk - Reserves*),
- $R_5$  das RBC für das Prämienrisiko (*Underwriting Risk - Net Written Premiums*).

An dieser Stelle sei bemerkt, dass gemäß [NAIC16b] die Kovarianz-Formel um das Katastrophenrisiko  $R_{cat}$  erweitert werden soll. Ebenfalls wird aktuell geprüft, inwiefern ein operationales Risiko berücksichtigt werden kann.

Die Ermittlung des benötigten Risikokapitals je Risikokategorie  $i \in \{0, \dots, 5\}$  erfolgt allgemein durch ein Faktor-basiertes Modell. Dazu wird zunächst jede Risikokategorie  $i$  wiederum in  $n_i \in \mathbb{N}$  Unterkategorien  $j \in \{1, \dots, n_i\} \subset \mathbb{N}$ , unterteilt. Für jede Unterkategorie  $j$  liefert die Multiplikation von vorgegebenen Risikofaktoren mit den entsprechenden Volumengrößen das benötigte Risikokapital für das einzelne Risiko:

$$R_i = \sum_{j=1}^{n_j} f_{i,j} \cdot B_{i,j}.$$

Dabei bezeichnet

- $f_{i,j}$  den  $j$ -ten Risikofaktor der Risikokategorie  $i$ ,
- $B_{i,j}$  den  $j$ -ten Basiswert der Risikokategorie  $i$ ,

für  $i = 0, \dots, 5$ ,  $j = 1, \dots, n_i$ . Durch gesetzliche Verankerung wird den Aufsichtsbehörden die Befugnis eingeräumt, Kontrolle über das VU zu nehmen. Die Gestaltung der Eingriffsbefugnis der Aufsichtsbehörde bemisst sich an der sogenannten *RBC-Ratio*,

$$RBC-Ratio := \frac{TAC}{ACL},$$

wobei das sogenannte *Authorized Control Level (ACL)* gerade 50% des TRBC beträgt. In diesem Zusammenhang wird zwischen den weichen Interventionsstufen,

- *Company Action Level (CAL)*:  $TAC \geq 200\% \cdot ACL$ ,
- *Regulatory Action Level (RAL)*:  $200\% \cdot ACL > TAC \geq 150\% \cdot ACL$ ,

und harten Interventionsstufen,

- *Authorized Control Level*:  $100\% \cdot ACL > TAC \geq 70\% \cdot ACL$ ,
- *Mandatory Control Level (MCL)*:  $70\% \cdot ACL > TAC$ ,

unterschieden. In Abhängigkeit der minimalen Eigenmittelanforderung verglichen mit dem tatsächlich verfügbaren Eigenmitteln reicht die Einflussnahme von vorbeugenden und korrigierenden Maßnahmen bis hin zur Liquidation oder Sanierung des VUs.

### Prämienrisiko

Speziell für das Prämienrisiko  $R_5$  sind Unterkategorien gerade durch die relevanten LoBs  $s$  gegeben, die gemäß [NAIC16b] in Tabelle A.11 des Anhangs aufgeführt sind. Entsprechend gilt für das benötigte Risikokapital resultierend aus dem Prämienrisiko, wobei es sich bei der Volumengröße  $B_{5,s}$  je LoB  $s$  um die Netto-Prämieneinnahmen des folgenden Geschäftsjahres handelt:

$$R_5 = \sum_{s=1}^{19} f_{5,s} \cdot B_{5,s}.$$

Die Basis zur Ermittlung der Risikofaktoren  $f_{5,s}$ ,  $s = 1, \dots, 19$ , der einzelnen LoBs bilden Schadenquoten der *Industry* bzw. *Company*. Es gilt:

$$f_{5,s} = \max \left\{ \frac{1}{2} \cdot LR_s^I \left( 1 + \frac{ALR_s^C}{ALR_s^I} \right) \cdot PV_s + ER_s - 1, 0 \right\}.$$

Dabei sei

- $LR_s^I$  die Branchen-Schadenquote, *Loss Ratio (LR)*,
- $ALR_s^C$  die durchschnittliche unternehmensspezifische Schadenquote, *Average Loss Ratio (ALR)*,
- $ALR_s^I$  die durchschnittliche branchenspezifische Schadenquote,
- $PV_s$  der *Present Value (PV)*-Faktor, der den durchschnittlichen Diskonteffekt der Prämien nach Berücksichtigung der Kosten darstellt,
- $ER_s$  die unternehmensspezifische Kostenquote, *Expense Ratio (ER)*,

für den LoB  $s$ ,  $s = 1, \dots, 19$ . Es sei bemerkt, dass die Schadenquoten insbesondere auch die den Schäden zuordenbaren Kosten, die sogenannten *Loss Adjusted Expenses (LAE)*, berücksichtigen. Weiterhin sei vermerkt, dass es sich bei den ALRs um den ungewichteten Durchschnitt der Schadenquoten der letzten 10 Jahre handelt.

Bezüglich der benötigten Risikokapitalanforderung räumt das RBC-System die Möglichkeit ein, Adjustierungen vorzunehmen. Diese betreffen einerseits sogenanntes *loss-sensitive business* basierend auf der Idee, dass eine adverse Entwicklung des Schadenverlaufs durch Zusatzprämien kompensiert wird. Zur Klassifizierung Schaden-sensitiver Verträge existiert ein Kriterienkatalog, nach dem zum Beispiel Zahlungen im Zusammenhang mit Schaden-sensitiven Verträgen entweder Prämien oder Provisionen sind und in der Gewinn- und Verlustrechnung zu berücksichtigen sind. Weiterhin werden Verträge, bei denen ein Anstieg des Schadenaufwands zu höheren Zahlungen führt, als Schaden-sensitiv deklariert. Exemplarisch seien Rückversicherungsverträge genannt, für die eine Gleitprämie, d.h. die Rückversicherungsprämie hängt vom Schadenverlauf ab, vereinbart ist. In diesem Fall werden die Risikofaktoren  $f_{5,s}$ ,  $s \in \{1, \dots, 19\}$ , durch

$$f_{5,s}^{adj} = (1 - 30\% \cdot \beta_{5,s}) \cdot f_{5,s}$$

ersetzt, wobei  $\beta_{5,s} \in [0, 1]$  gerade den Anteil der Prämie Schaden-sensitiver Verträge an der Gesamtprämie des LoBs  $s$  beschreibt. Diversifikation zwischen den LoBs wird durch den sogenannten *Premium Concentration Factor*, definiert durch

$$PCF := 70\% + 30\% \cdot \frac{\max_{s \in \{1, \dots, 19\}} B_{5,s}}{\sum_{s=1}^{19} B_{5,s}},$$

berücksichtigt. Gemäß der Definition bestimmt folglich der prämiemäßig größte LoB die Höhe des Abschlages bezüglich der Diversifikation. Somit ergibt sich folgende Darstellung für die Solvenzkapitalanforderung des Prämienrisikos:

$$R_5^{adj} = PCF \cdot \sum_{s=1}^{19} f_{5,s}^{adj} \cdot B_{5,s}.$$

Entgegen der beschriebenen reduzierenden Adjustierungen ist im Falle von überproportional wachsendem Geschäft ein Loading anzusetzen, das gleichbedeutend mit einer Erhöhung des benötigten Risikokapitals einhergeht. Dazu wird zunächst das Prämienwachstum  $g \in [0, 1]$  als arithmetisches Mittel der letzten drei jährlichen Wachstumsraten für die gesamte Gruppe des VU ermittelt. Durch Beschränkungen des Prämienwachstums  $g$  gemäß des RBC-Systems erhält man die Solvenzkapitalanforderung bezüglich des Prämienrisikos:

$$R_5 = R_5^{adj} + \max \{ 22,5\% \cdot (\min \{ 40\%, g \} - 10\%), 0 \} \cdot \sum_{s=1}^{19} f_{5,s} \cdot B_{5,s}.$$

### 3.4. Vergleichende Analyse und Bewertung

Die aufsichtsrechtlichen, risikoorientierten Regelwerke der USA, der Schweiz und Europas verfolgen das gemeinsame Ziel, das Insolvenzzisiko von VUs zu reduzieren. Unter Berücksichtigung bestimmter Risikokategorien sind hierzu durch die VUs das benötigte Risikokapital zu ermitteln, das den verfügbaren Eigenmitteln gegenübergestellt wird. In Abhängigkeit dieses Verhältnisses ergeben sich für die jeweiligen Aufsichtsbehörden unterschiedliche Interventionsstufen zur Einflussnahme. Die so geschaffene Transparenz trägt zu einer Stabilisierung der Versicherungswirtschaft und folglich des gesamten Finanzmarktes bei und dient somit letztlich insbesondere dem Schutz der Versicherten.

Den Ausführungen der vorangegangenen Abschnitte, die sich auf das Prämienrisiko konzentrieren, ist zu entnehmen, dass die Ausgestaltung zur Erreichung dieses gemeinsamen Ziels teils deutliche Unterschiede bezüglich der zu berücksichtigenden Risiken und in Bezug auf die Ermittlung des benötigten Risikokapitals aufweist. Während sowohl im SST als auch unter Solvency II den VUs eine Wahlmöglichkeit zwischen einem Standardmodell und einem internen Modell eingeräumt wird, sieht das RBC-System im Rahmen von US-Solvency ausschließlich die Möglichkeit vor, das benötigte Risikokapital über das in Abschnitt 3.3.3 beschriebene Faktormodell zu bestimmen. Bevor die genannten Systeme aus aktuarieller Perspektive analysiert und bewertet werden, wird zunächst ein kurzer allgemeiner Vergleich

der Regelwerke aus dem versicherungswirtschaftlichen Blickwinkel vollzogen. An diesen ist insbesondere die Frage geknüpft, wie bzw. unter welchen Gesichtspunkten die Rahmenwerke analysiert und bewertet werden können. Hierzu wird im Folgenden ein Ausblick in die Literatur gegeben.

### 3.4.1. Versicherungswirtschaftliche Perspektive

Cummins et al. veröffentlichten in ihrem Papier [CHN94] sieben Kriterien, auf deren Basis das RBC-System der Vereinigten Staaten beurteilt werden kann. In [Dof08] werden diese Kriterien auf das europäische Solvency II-System im damalig aktuellen Entwicklungsstand angewendet. Holzmüller geht in ihrem Papier [Hol09] noch einen Schritt weiter und ergänzt die sieben Kriterien aus [CHN94] durch weitere vier. In [Hol09] wird die Ergänzung der vier Kriterien damit begründet, dass seit Erscheinen des Diskurses von [CHN94] Änderungen in den Versicherungs- und Kapitalmärkten vollzogen worden seien, wodurch die Kapitalanforderungen nicht mehr durch die Größe des VUs, sondern durch die Risiken, denen das VU sich aussetzt, motiviert werden. Diese nun elf Kriterien werden in [Hol09] zur Bewertung des RBC-System als Bestandteil des US-Solvency Rahmenwerkes, des Swiss Solvency Tests und des Solvency II-Regelwerkes angewendet.

Im Folgenden seien die sieben Kriterien von Cummins et al. gemäß [CHN94] in Bezug auf das Formelwerk zur Berechnung des benötigten Risikokapitals genannt:

1. *Geeignete Anreize*: Das Regelwerk soll für schwache VUs einen Anreiz schaffen, mehr Eigenkapital aufzubauen und/oder sich weniger stark den Risiken auszusetzen.
2. *Risiko-Sensitivität*: Das Regelwerk soll die Hauptrisiken, denen die VUs ausgesetzt sind, widerspiegeln und außerdem berücksichtigen, wie diese Risiken sich bezüglich der verschiedenen VUs unterscheiden.
3. *Kalibrierung*: Das Regelwerk soll jedes einzelne Risiko proportional zu seinem jeweiligen Einfluss auf das Gesamtrisiko gewichten.
4. *Höchste Insolvenzkosten*: Das Regelwerk soll die VUs identifizieren, die die höchsten Insolvenzkosten verursachen würden.
5. *Wirtschaftliche Werte*: Die Messung des aktuellen Eigenkapitals soll den wirtschaftlichen Wert von Vermögenswerten und Verbindlichkeiten der VUs widerspiegeln.
6. *Vermeidung von falschen Informationen*: Das Regelwerk soll so gestaltet sein, dass es Fehlinformationen, zum Beispiel durch vom VU manipulierte Berichte, verhindert.
7. *Einfachheit*: Das Regelwerk soll nur so komplex sein, wie es zur exakten Messung des Risikos nötig ist.

Die durch Holzmüller in [Hol09] ergänzten vier Kriterien werden im Folgenden aufgelistet:

8. *Wirtschaftliche Krisen und systemische Risiken*: Das Regelwerk soll die Lage der VUs in wirtschaftlichen Krisensituationen berücksichtigen und systemische Risiken antizipieren.

9. *Bewertung des Managements*: Das Regelwerk soll auch „weiche“ Faktoren, wie die Fähigkeiten des Managements des VUs, in die Beurteilung mit einbeziehen.
10. *Flexibilität*: Das Regelwerk soll unter Berücksichtigung aktueller Entwicklungen im Kontext von Modellen und Konzepten ständig verbessert und aktualisiert werden.
11. *Stärkung des Risikomanagements*: Ein gutes Risikomanagement führt zu einer höheren Markttransparenz, wodurch langfristig weniger Regulierung nötig sein wird.

Wie schon erwähnt, wird in [Hol09] der Vergleich zwischen dem RBC-System als Bestandteil des US-Solvency Rahmenwerkes, dem Swiss Solvency Test und Solvency II auf Basis dieser elf Kriterien geführt. Es wird konkludiert, dass sowohl der SST als auch Solvency II hinsichtlich dieser Kriterien besser abschneiden als das RBC-System unter US-Solvency. Letzteres wird als reformwürdig bezeichnet, auch wenn man berücksichtige, dass das RBC-System circa zehn Jahre älter ist als der SST und Solvency II.

Laut [Hol09] erfüllen sowohl der SST als auch Solvency II die oben genannten elf Kriterien. Die Hauptkritikpunkte in Bezug auf Solvency II sind seine Faktor-basierten Rechnungen im Standardmodell und die Nutzung des Konzepts des VaR, das im Falle einer Insolvenz nicht die Verteilung der Kosten berücksichtigt. Weiterhin werde das Managementrisiko nur unzureichend berücksichtigt.

In [Hol09] sind auch einige Schwächen bezüglich des SST genannt: So bezieht sich das minimale Solvenz-Niveau nicht auf Risiken, denen das VU ausgesetzt ist, sondern verlässt sich auf gesetzlich festgelegte Finanzdaten. Auch der SST lässt das Managementrisiko außer Acht.

Da sowohl der SST als auch Solvency II zwar einige Schwächen haben, aber auch die aktuellen Trends im Risikomanagement und in der Versicherungsregulierung berücksichtigen, lässt sich nicht feststellen, welches Regelwerk das bessere ist. Allein die zukünftige Performance der Regelwerke in der Praxis wird zeigen, welches System besser dazu geeignet ist, Fehler von VUs zu vermeiden.

### 3.4.2. Aktuarielle Perspektive

Nach diesem kurz zusammengefassten allgemeinen Vergleich aus versicherungswirtschaftlicher Perspektive orientieren sich die folgenden Ausführungen an einem berühmten Zitat von Albert Einstein:

*„Mache die Dinge so einfach wie möglich - aber nicht einfacher.“*

Motiviert durch die Äußerung Einsteins wird nun das neu in Kraft getretene europäische Aufsichtsregelwerk Solvency II aus aktuarieller Perspektive analysiert. Der Diskurs konzentriert sich auf die Fragestellung, ob das Standardmodell angemessen umgesetzt wird oder ob es aus Gründen der Praktikabilität gar zu einfach umgesetzt wird.

Dabei werden insbesondere Parallelen und Unterschiede zum Swiss Solvency Test aufgezeigt. Das RBC-System der USA wird außer Acht gelassen, da bereits Holzmüller in [Hol09] anhand des Kriterienkatalogs zur Analyse und Bewertung der Regelwerke zu dem Schluss gelangt,

dass das RBC-System als Bestandteil des US-Solvency Rahmenwerkes einem Vergleich mit dem schweizerischen Regelwerk sowie dem der Europäischen Union nicht standhalten kann.

Darüber hinaus handelt es sich beim RBC-System, wie in Abschnitt 3.3.3, *Prämienrisiko*, aufgezeigt, um ein Faktor-basiertes Modell der Form

$$R_i = \sum_{j=1}^{n_j} f_{i,j} \cdot B_{i,j},$$

das einen Satz von Risikofaktoren  $f_{i,j}$  je Risikokategorie vorgibt, die nach Multiplikation mit den VU-individuellen Volumengrößen  $B_{i,j}$  die benötigten Risikokapitalien für die einzelnen Risiken liefern, insbesondere auch für das Prämienrisiko. Diese Risikokapitalien werden über einen Korrelationsansatz der Form

$$TRBC := R_0 + \sqrt{R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 + R_4^2 + R_5^2}$$

zum benötigten Risikokapital TRBC aggregiert.

Einerseits ist das RBC-System als Faktor-basiertes Modell einfach anzuwenden. Andererseits kann auf diese Art und Weise kein VU-individuelles Risikoprofil angemessen abgebildet werden, selbst wenn diverse Einflussgrößen auf das Risiko im Risikofaktor Berücksichtigung finden. Wie am Beispiel des Prämienrisikos aufgezeigt, werden zwar unternehmens- und branchenspezifische Parameter sowie Zu- und Abschläge aufgrund von überproportional wachsendem Geschäft bzw. Schaden-sensitiver Verträge und Diversifikation zwischen den LoBs berücksichtigt; dennoch fließen Informationen zum Bestand, wie etwa der Bestandsmix, nicht ein. Die einfache Ausgestaltung geht schlicht zu Lasten der Angemessenheit. Insbesondere ist bezüglich der Risikoaggregation durch die Kovarianz-Formel bei nichtlinearen Abhängigkeiten die Risikosensitivität der Ergebnisse eingeschränkt (siehe Kapitel 2.3.2), sodass die Gefahr falscher unternehmerischer Anreize besteht. Darüber hinaus ist unter anderem die Ausgestaltung und wirtschaftliche Interpretation der Interventionsstufen unterhalb des CAL, das vom Grundgedanken der Solvenzquote bzw. dem SST-Quotienten in der Form entspricht, dass der Quotient aus vorhandenem und benötigtem Risikokapital mindestens 100% beträgt, durch die Aufsichtsbehörde fragwürdig.

Ein derartiges Faktormodell eignet sich daher lediglich als Indikation sowie zu Vergleichszwecken ähnlich exponierter VUs. Als Instrument zur Vermeidung von Insolvenzen von VUs oder gar zur Unternehmenssteuerung ist es aufgrund der fehlenden Berücksichtigung des aktuellen Risikoprofils ungeeignet.

Im Folgenden wird das Solvency II-Standardmodell nun anhand von fünf Punkten analysiert, um die oben genannte Fragestellung zu beantworten.

#### **Wahl des Risikomaßes**

Wie in Kapitel 3.1.3 bereits erläutert, sind die Solvenzkapitalanforderungen unter Solvency II derart kalibriert, dass sie dem *Value at Risk* (siehe Definition 2.7) der Basiseigenmittel zum Konfidenzniveau  $\alpha = 99,5\%$  für das kommende Geschäftsjahr entsprechen.

Aufgrund der Nutzung des VaR als Risikomaß ist kritisch zu bemerken:

1. Der VaR ist kein kohärentes Risikomaß:

Gemäß Kapitel 2.2 erfüllt der VaR nicht die theoretisch wünschenswerte Eigenschaft eines Risikomaßes in Form der Kohärenz nach Definition 2.5. Denn im Allgemeinen verletzt der VaR die Eigenschaft der Subadditivität,

$$\rho(X_1 + X_2) \leq \rho(X_1) + \rho(X_2) \quad \forall X_1, X_2 \in L^\infty,$$

die gerade einen nichtnegativen Diversifikationseffekt

$$\sum_{i=1}^n \rho(X_i) - \rho\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \geq 0$$

für eine beliebige Folge  $X_1, \dots, X_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , von Risiken auf dem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  gemäß Definition 2.15 induziert. Lediglich im Fall normalverteilter Risiken ist der VaR für ein Konfidenzniveau  $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1)$  subadditiv, wie in [MFE05] untersucht.

In Bezug auf die Case Study sind für die CAPITOL als KH-Monoliner insbesondere Risiken bezüglich großer Personenschäden von Bedeutung, die Großschaden-Potential besitzen. Diese sind allerdings oftmals nicht normalverteilt, sondern zur Modellierung der Schadenhöhen eignen sich gemäß Kapitel 2.6 insbesondere *heavy-tailed Verteilungen*, zu deren Klasse die Normalverteilung nicht zählt. Folglich ist in diesem Kontext der VaR nicht subadditiv.

2. Die erwartete Verlusthöhe wird ausgeblendet:

Per Definition 2.7 und Bemerkung 2.8 blendet der VaR Ereignisse jenseits des Quantils  $\alpha$  aus. In die Risikomessung fließt somit lediglich das Sicherheitsniveau bzw. die entsprechende Verlustwahrscheinlichkeit ein, nicht aber die tatsächliche Verlusthöhe. Der VaR als Risikomaß beantwortet demnach lediglich die Frage:

„Wie schlimm kann es kommen?“

Der erwartete Verlust, der bereits die Insolvenz für das VU bedeuten kann, wird nicht berücksichtigt. Folglich ist aus Sicht der Aufsichtsbehörden und Versicherten fragwürdig, inwiefern die Verwendung des VaR ein elementares Ziel von Solvency II, das Insolvenzrisiko der VUs zu reduzieren, aushebelt.

Im Vergleich dazu wird im Swiss Solvency Test der *Tail Value at Risk* (siehe Definition 2.9) zum Konfidenzniveau  $\alpha = 99\%$  herangezogen. Allgemein folgt aus Proposition 2.12 für ein Risiko  $X \in L^1(P)$ :

$$E(X \mid X \geq VaR_\alpha(X)) \leq ES_\alpha(X) \leq E(X \mid X > VaR_\alpha(X)) = TVaR_\alpha(X).$$

Denn nach oben genannter Proposition ordnet der ES bei der Integration dem Szenario mit dem kleinsten Wert,  $\{X = VaR_\alpha(X)\}$ , die Wahrscheinlichkeit  $1 - \lambda_\alpha = 1 - \frac{P(X > VaR_\alpha)}{1 - \alpha}$  zu, folglich dem TVaR die größere Wahrscheinlichkeit  $\frac{P(X = VaR_\alpha)}{P(X \geq VaR_\alpha)} = 1 - \frac{P(X > VaR_\alpha)}{1 - P(X < VaR_\alpha)}$  und dem VaR 0.

Stetiges  $X$  impliziert

$$1 - P(X \leq VaR_\alpha(X)) = 1 - F_X(VaR_\alpha(X)) = 1 - \alpha,$$

und wegen

$$\begin{aligned} P(X > VaR_\alpha(X)) &= P(X \geq VaR_\alpha(X)) - P(X = VaR_\alpha(X)) \stackrel{!}{=} 1 - \alpha \\ &\Leftrightarrow P(X = VaR_\alpha(X)) = 0 \quad \forall \alpha \in (0, 1) \end{aligned}$$

gilt:

$$ES_\alpha(X) = TVaR_\alpha(X).$$

Insbesondere stimmen *Tail Value at Risk* und *Expected Shortfall* für stetige Risiken überein, wie es im SST angenommen wird. Folglich ist das im SST verwendete Risikomaß kohärent, also insbesondere subadditiv, und garantiert damit nichtnegative Diversifikationseffekte.

Gemäß Definition 2.10 und Bemerkung 2.10 erlaubt der TVaR eine klare ökonomische Interpretation, da dieser den erwarteten Verlust für den Fall angibt, dass der VaR überschritten wird. Der TVaR beantwortet demnach die Fragestellung:

„Wenn es schlimm kommt, wie hoch ist dann der erwartete Verlust?“

Eine weitere Erkenntnis folgt direkt aus Definition 2.9 für ein Konfidenzniveau  $\alpha \in (0, 1)$ :

$$VaR_\alpha(X) < TVaR_\alpha(X), \quad X \in L^1(P).$$

Somit wird bei gleichem Sicherheitsniveau  $\alpha$  unter Nutzung des ES mehr Risikokapital benötigt als im Falle des VaR. Dies stärkt den Grundgedanken der aufsichtsrechtlichen, risikoorientierten Regelwerke, insbesondere das Insolvenzrisiko der VUs zu reduzieren und den Schutz der Versicherten zu stärken. Allerdings ist - vorausgesetzt alle übrigen Annahmen sind identisch - im Allgemeinen keine Aussage darüber zu treffen, ob die Verwendung des VaR zum Konfidenzniveau  $\alpha = 99,5\%$  oder des TVaR zum Konfidenzniveau  $\alpha = 99\%$  zu einer höheren Kapitalanforderung führt. Dies ist abhängig von der unterstellten Verteilungsannahme. Etwa unter Normalverteilungsannahme  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  erhält man gemäß Proposition 2.13 mit  $\Phi^{-1}(1 - 99,5\%) = 2,58$  und  $\frac{\varphi(\Phi^{-1}(99\%))}{1-99\%} = 2,67$ :

$$VaR_{99,5\%}(X) = \mu + 2,58 \cdot \sigma < \mu + 2,67 \cdot \sigma = TVaR_{99,5\%}(X).$$

Nichtsdestotrotz setzt sich nicht erst seit Inkrafttreten von Solvency II der Schweizerische Versicherungsverband SVV - wie auf der Internetpräsenz zu verfolgen - dafür ein, dass der geltende SST gleichwertig zu Solvency II ausgestaltet wird, da strengere Anforderungen an Schweizer VUs diese im internationalen Wettbewerb benachteiligen würden.

Aus aktuarieller Perspektive sind die Argumente auf Seiten des TVaR bzw. ES. Es stellt sich folglich die Frage, warum unter Solvency II dennoch der VaR als Risikomaß verwendet wird. Die Argumente für den VaR sind, dass dieser als Risikomaß akzeptiert ist, bereits weite Verbreitung findet und insbesondere leicht zu interpretieren ist. Letzters erfüllt insbesondere die Kommunikationsfunktion (siehe Kapitel 2.2). Die Argumente pro VaR sind gleichzeitig die Argumente contra TVaR. Vor allen Dingen die Komplexität wird in diesem Kontext angeführt.

### Prämienrisiko

Wie in Abschnitt 3.1.3, *Prämien- und Reserverisiko*, erläutert, wird unter Solvency II das kombinierte Prämien- und Reserverisiko in einem zweistufigen Prozess ermittelt. Dazu werden für jeden LoB  $s$  die Volumenmaße  $V_{(prem,s)}$ ,  $V_{(res,s)}$  sowohl für das Prämien- als auch für das Reserverisiko bestimmt. Unter der Annahme,  $Corr(SCR_{(prem,s)}, SCR_{(res,s)}) = \frac{1}{2}$ , wird die gemeinsame Standardabweichung  $\sigma_s$  für das Prämien- und Reserverisiko unter Verwendung der vorgegebenen Standardabweichungen  $\sigma_{(prem,s)}$ ,  $\sigma_{(res,s)}$  berechnet. In einem zweiten Schritt werden die LoB-abhängigen Volumenmaße und Standardabweichungen zum Volumenmaß  $V_{nl}$  und zur Standardabweichung  $\sigma_{nl}$  des kombinierten Prämien- und Reserverisikos aggregiert.

Das Prämien- und Reserverisiko wird folglich nach einem Faktor-basierten Ansatz berechnet, in dem die Risikofaktoren  $\sigma_{(grossprem,s)}$  und  $\sigma_{(res,s)}$  sowohl für das Prämien- als auch für das Reserverisiko gemäß Tabelle A.4 vorgegeben sind. Ebenfalls sind die relevanten Korrelationskoeffizienten, die zur Abbildung der Abhängigkeitsstruktur herangezogen werden, einheitlich gegeben. Lediglich die Volumengrößen sind VU-individuell.

Im weiteren Verlauf wird das dem Faktor-basierten Ansatz zugrunde liegende Kalibrierungsmodell gemäß [EIOPA11] betrachtet:

Zunächst sei erinnernd erwähnt, dass das Prämienrisiko sich auf künftige Schadenfälle bezieht und das Risiko beschreibt, dass die vereinnahmten Versicherungsprämien  $P$  des aktuellen Geschäftsjahres nicht ausreichen, um die bei diesem Geschäft zukünftig anfallenden Schadenkosten und sonstige Kosten  $S$  zu decken.

Wie im SST für Großschäden umgesetzt, kann zur Modellierung des zukünftigen Jahresgesamtschadens  $S$  das kollektive Modell gemäß Kapitel 2.4 herangezogen werden, das den gesamten Bestand als einen einzigen Vertrag auffasst, der Schäden generiert. Im Falle Poisson-verteilter Schadenanzahlen  $N$  ist die Faltung wiederum zusammengesetzt Poisson-verteilt (siehe 2.42). Insbesondere sind Erwartungswert  $E(S)$  Varianz  $Var(S)$  des Gesamtschadens  $S$  aufgrund der Wald'schen Gleichungen (siehe Satz 2.38) proportional zur erwarteten Schadenanzahl.

Die Kalibrierung des Prämienrisikos erfolgt durch die Standardabweichung der Endschadenquote, der Loss Ratio  $LR$ , definiert durch

$$LR := \frac{S}{P}$$

mit

$$E(LR) := \mu_{LR}, \quad Var(LR) := \sigma_{LR}^2.$$

Als Maß für die Risikoexponierung werden die verdienten Prämien  $P$  verwendet und der oben beschriebene proportionale Zusammenhang im Kontext des Kollektiven Modells bei Poisson-verteilter Schadenanzahlen unterstellt:

$$E(S) = \mu_{LR} \cdot P, \quad Var(S) = \sigma_{LR}^2 \cdot P^2.$$

Für  $Var(S)$  wird bezüglich  $P$  ein allgemeiner quadratischer Ausdruck verwendet. Im Detail handelt es sich um eine Linearkombination, die die Sonderfälle enthält, dass die Varianz proportional zu den verdienten Prämien und zu deren Quadrat ist. Diese Varianzstruktur impliziert:  $\frac{Std(S)}{P} = \sigma_{LR}$ , d.h. die relative Standardabweichung des Gesamtschadens (Risiko pro verdienter Prämie) ist unabhängig von der Prämie und kann daher nicht durch weiter wachsenden Bestand reduziert werden.

Weiterhin wird einerseits für die Loss Ratio  $LR$  eine Log-Normalverteilung unterstellt, d.h.  $\ln(LR) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma > 0$ , mit

$$E(LR) = \mu_{LR} = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}},$$

$$Var(LR) = \sigma_{LR}^2 = e^{2\mu + \sigma^2} \cdot (e^{\sigma^2} - 1),$$

und andererseits können gemäß dem Äquivalenzprinzip erwartete Kosten und Gewinne ignoriert werden, d.h.  $E(S) = P$ . Dies impliziert  $E(LR) = 100\%$  für die erwartete Loss Ratio und führt zu

$$\sigma^2 = \ln(1 + \sigma_{LR}^2)$$

wegen  $\mu = -\frac{1}{2} \cdot \sigma^2$ .

Zur Berechnung der Solvenzkapitalanforderung ist schließlich der VaR zum Konfidenzniveau  $\alpha = 99,5\%$  auf die Verlustgröße  $L := S - P$  anzuwenden. Allgemein kann der zufällige Verlust  $L$  in Relation zu einem Volumenmaß  $V$  durch

$$\frac{L}{V} := \frac{S - P}{P} = LR - 1$$

beschrieben werden, sodass insbesondere  $Std\left(\frac{L}{V}\right)$  mit dem VU-individuellen Volatilitätsparameter  $\sigma_{LR} = \sqrt{Var(LR)}$  identifiziert werden kann. Wegen  $\ln(LR) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  gilt gemäß Proposition 2.13:

$$\begin{aligned} VaR_\alpha(L) &= VaR_\alpha\left(\frac{L}{V}\right) \cdot V = (VaR_\alpha(LR) - 1) \cdot V \\ &= \left( \exp\left\{-\frac{1}{2} \cdot \sigma^2 + \sigma \cdot \Phi^{-1}(\alpha)\right\} - 1 \right) \cdot V \\ &= \left( \frac{\exp\left\{\Phi^{-1}(\alpha) \cdot \sqrt{\ln(1 + \sigma_{LR}^2)}\right\}}{\sqrt{1 + \sigma_{LR}^2}} - 1 \right) \cdot V \\ &= \rho_\alpha(\sigma_{LR}) \cdot V, \end{aligned}$$

wodurch die volatilitätsabhängige Funktion  $\rho_\alpha(\sigma_{LR})$  durch  $\rho_{99,5\%}(\sigma_{LR}) \approx 3 \cdot \sigma_{LR}$  im Fall  $\alpha = 99,5\%$  approximiert werden kann, sodass die Solvenzkapitalanforderung für das Prämienrisiko der Struktur nach der bereits in Kapitel 3.1.3 vorgestellten Darstellung gleicht.

In diesem Zusammenhang ist zu bemerken:

1. Prämien sind in der Regel kein gutes Maß, um die Risikoexponierung angemessen abzubilden:

Als Pendant zur Schadenanzahl im Kollektiven Modell herangezogen, handelt es sich bei verdienten Prämien im Gegensatz zur Schadenanzahl nicht um eine Zufallsgröße. Daher ist fragwürdig, inwiefern verdiente Prämien charakteristisch für die Risikoexponierung eines Bestandes sind.

Prämien unterliegen im Laufe der Zeit nicht nur unter anderem Margenveränderungen der Prämienbestandteile, Inflation oder auch Prämienzyklen, sondern werden oftmals auch zur Erreichung unternehmerischer Ziele angepasst. In diesem Zusammenhang sei auf die CAPITOL verwiesen, die in den ersten Jahren nach ihrer Gründung bewusst mit niedrig kalkulierten Prämien in den Markt eingetreten ist, um in der Folge Bestand aufzubauen. Die Gefahr einer Untertarifierung geht komplementärerweise mit einem Sinken der entsprechenden Solvenzkapitalanforderung einher. Aus den genannten Gründen sind Prämien in der Regel kein gutes Maß, um die Risikoexponierung angemessen abzubilden.

2. Die Annahme einer erwarteten Loss Ratio in Höhe von 100% kann im Einzelfall bei vt. defizitären Geschäftsbereichen, wie es oftmals im LoB KH der Fall ist, zu einer Unterschätzung des Prämienrisikos durch die derart kalibrierte Kapitalanforderung führen.
3. Die volatilitätsabhängige Funktion  $\rho_\alpha(\sigma_{LR})$ , der eine Log-Normalverteilung zugrunde liegt, hat für das aktuelle Standardmodell lediglich noch die Relevanz der Kalibrierung. In Anbetracht der Erwägungsgründe zur [RRL] ist  $\rho_\alpha(\sigma_{LR})$  durch den einfachen Faktor  $3 \cdot \sigma_{nl}$  ersetzt, was politisch motiviert ist. Die Verteilungsannahme bezüglich der Log-Normalverteilung kann in der Praxis häufig als angemessen bezeichnet werden. Diese ist jedoch VU-individuell zu überprüfen.
4. Es ist festzuhalten, dass die endgültigen Risikofaktoren die durchschnittliche Größe des Bestandes von VUs auf den europäischen Märkten widerspiegeln. Der VU-individuelle Bestand je LoB wird in der Praxis größer bzw. kleiner als der europäische Durchschnitt sein und damit tendenziell eine niedrigere bzw. größere Volatilität aufweisen. Daher treffen die europaweit gewichteten Volatilitätsparameter streng genommen auf kein einziges VU zu; vor allen Dingen nicht auf regional fokussierte Monoliner, wie etwa die CAPITOL.

Der Vergleich mit dem in Kapitel 3.2.3 beschriebenen Modellierung des Prämienrisikos im Standardmodell des SST - Separierung von Basis- und Großschäden, Verwendung des Kollektiven Modells - verdeutlicht, dass das einfache, aber wenig differenzierte Modell des Prämienrisikos unter Solvency II das Risikoprofil eines VUs nicht angemessen abbilden kann.

### Parameterrisiko

An den zuletzt genannten Punkt anknüpfend bleibt festzuhalten, dass im SST das Parameterrisiko Berücksichtigung findet, während dieses unter Solvency II gänzlich vernachlässigt wird.

### Korrelation und Diversifikation

Mit Fokus auf das Prämien- und Reserverisiko im vt. Risiko Nicht-Leben des Standardmodells unter Solvency II werden Beziehungen zwischen verschiedenen Risiken, die zu Abhängigkeiten im Risikoprofil führen könnten, durch Korrelationen unter den Risikomodulen, den LoBs und dem Prämien- und Reserverisiko für jeden LoB beschrieben (siehe Kapitel 3.1.3).

1. Die Korrelationskoeffizienten sind politisch gesetzt:

Gemäß [RRL], Erwägungsgrund (26), soll die Standardformel zur Berechnung der Solvenzkapitalanforderung das Risikoprofil der meisten VUs widerspiegeln. Es mag jedoch Fälle geben, in denen das Standardkonzept dem sehr spezifischen Risikoprofil eines Unternehmens nicht gerecht wird. Interessant ist in diesem Kontext die Frage, in welchen Fällen das Risikoprofil eines VUs nicht zum Standardmodell passt. Gemäß [RRL], Artikel 35, sind die VUs dazu aufgefordert, einen Bericht über die unternehmenseigene Risiko- und Solvabilitätsbeurteilung, den sogenannten *ORSA*-Bericht, als Bestandteil des narrativen Aufsichtsberichts zu erstellen. Laut [RRL], Artikel 45, umfasst diese Bewertung mindestens den Gesamtsolvabilitätsbedarf unter Berücksichtigung des spezifischen Risikoprofils sowie die Signifikanz der Abweichungen des Risikoprofils von den Annahmen, die der Solvenzkapitalanforderung zugrunde liegen und gemäß der Standardformel berechnet wurden.

Unterstellt man zunächst, dass die Annahmen des Standardmodells erfüllt sind, so sind durch die VUs unter anderem auch die Korrelationskoeffizienten zu überprüfen. Entsprechend ist einerseits die Korrelation zwischen dem Prämien- und dem Reserverisiko zu verifizieren. Gemäß Abschnitt 3.1.3, *Ermittlung der Risikofaktoren*,

$$\sigma_s = \frac{\sqrt{\sigma_{(prem,s)}^2 \cdot V_{(prem,s)}^2 + \sigma_{(prem,s)} \cdot V_{(prem,s)} \cdot \sigma_{(res,s)} \cdot V_{(res,s)} + \sigma_{(res,s)}^2 \cdot V_{(res,s)}^2}}{V_{(prem,s)} + V_{(res,s)}}$$

wird diesbezüglich eine Korrelation von  $Corr(SCR_{(prem,s)}, SCR_{(res,s)}) = \frac{1}{2}$  für alle LoBs  $s$  angenommen. Andererseits wird zur Berechnung der gemeinsamen Standardabweichung des Prämien- und Reserverisikos

$$\begin{aligned} \sigma_{nl} &:= \frac{1}{V_{nl}} \cdot \sqrt{\mathbf{x}_{nlPremRes}^T \cdot \mathbf{CorrS}_{nlPremRes} \cdot \mathbf{x}_{nlPremRes}} \\ &= \frac{1}{V_{nl}} \cdot \sqrt{\sum_{s \in LoB} \sum_{t \in LoB} CorrS_{s,t} \cdot \sigma_s \cdot V_s \cdot \sigma_t \cdot V_t} \end{aligned}$$

die Korrelationsmatrix  $\mathbf{CorrS}_{nlPremRes}$  gemäß Tabelle A.5 zur Aggregation der LoBs für das Prämien- und Reserverisiko verwendet, wobei die Komponenten des Vektors  $\mathbf{x}_{nlPremRes}^T := (\sigma_s \cdot V_s)_{s \in LoB}$  das Produkt der Standardabweichung  $\sigma_s$  und des Volumenmaßes  $V_s$  des kombinierten Prämien- und Reserverisikos für jeden LoB  $s$  sind.

In beiden Fällen ist fragwürdig, ob die verwendeten Korrelationen sachgerecht sind, da ihre Wahl den Anschein einer groben Festsetzung ohne statistische Basis erweckt, zumal seitens der EIOPA keine Dokumentation der Kalibrierung bezüglich der verwendeten Korrelationen im Standardmodell vorliegt. Insbesondere erscheint eine identische

Korrelation  $Corr(SCR_{(prem,s)}, SCR_{(res,s)}) = \frac{1}{2}$  zwischen dem Prämien- und dem Reserverisiko für alle LoBs  $s$  für jede Art der Rückversicherungsstruktur oder Abwicklungsmuster für alle europäischen VUs als wenig sachgerecht. Darüber hinaus werden durch die Korrelationskoeffizienten  $CorrS_{s,t}$  zwischen dem Prämien- und Reserverisiko für den LoB  $s$  und dem LoB  $t$ , gemäß Tabelle A.5 diverse vt. und regionale Charakteristika miteinander vermenget, was ebenfalls wenig sachgerecht ist. Exemplarisch seien Produkte, Schadenabwicklung und Wettbewerbszyklen genannt.

Durch den Faktor-basierten Ansatz des Prämien- und Reserverisikos und die Verwendung von Korrelationen zur Abbildung von (linearen) Abhängigkeiten ist eine einfache Berechnung durch die VUs gewährleistet, allerdings sind politisch gesetzte Korrelationskoeffizienten auf europäischer Ebene nur kaum mit dem eigenen Risikoprofil zu vergleichen, insbesondere wenn man an einen deutschen KH-Monoliner wie die CAPITOL denkt.

## 2. Korrelation ist ein Maß für lineare Abhängigkeiten:

In Anlehnung an den ersten Diskussionspunkt ist grundsätzlich fragwürdig, ob Korrelation ein geeignetes Maß ist, um die komplexe Abhängigkeitsstrukturen zwischen den Risiken, denen ein VU ausgesetzt ist bzw. sich aussetzt, abzubilden. Wie in Kapitel 2.3.2 aufgezeigt, ist (lineare) Korrelation nur im Falle linearer Abhängigkeitsstrukturen sinnvoll einzusetzen, da andernfalls die Aussagekraft begrenzt ist. Aus aktuarieller Sicht ist die Beschreibung stochastischer Abhängigkeiten zwischen endlich vielen Risiken allein durch eine stochastische Struktur in Form von Copulas, wie sie in Kapitel 2.3.3 eingeführt werden, möglich. Insbesondere liefert das Konzept der Copulas die Gesamtverteilung und damit deutlich mehr Informationen als bei Verwendung von Korrelationen, deren Berechnung im Kontext von (partiellen) internen Modellen nicht wirklich einfacher handhabbar ist als die Berechnung einer einfachen Copula, wie etwa der Gauß-Copula.

Nichtsdestotrotz sind die Schwächen in der Modellierung der Standardformel zugunsten der Praktikabilität und der bereits im Zusammenhang mit dem Risikomaß *Value at Risk* genannten Kommunikationsfunktion gewollt. Inwiefern die Aussagekraft bei Verwendung des Standardmodells - in die eine oder andere Richtung - verzerrt ist, bleibt durch die VUs im Rahmen der unternehmenseigenen Risiko- und Solvabilitätsbeurteilung kritisch zu prüfen.

## 3. Es besteht kein Zusammenhang zwischen Korrelation und Diversifikation:

Gemäß [RRL], Artikel 13 (37), werden „Diversifikationseffekte“ als eine Reduzierung des Gefährdungspotenzials der VUs durch die Diversifizierung ihrer Geschäftstätigkeit definiert, die sich aus der Tatsache ergebe, dass das negative Resultat eines Risikos durch das günstigere Resultat eines anderen Risikos ausgeglichen werden könne, sofern die Risiken nicht voll korreliert seien. Pfeifer stellt in seinem Papier „*Hält das Standardmodell unter Solvency II, was es verspricht?*“, erschienen in [Pfe16], unter anderem fest, dass der als Tatsache geschilderte Zusammenhang allerdings das gerade nicht sei, da es nachweislich keinen Zusammenhang zwischen Korrelation und Diversifikation gebe.

Pfeifer demonstriert an einem einfachen Beispiel, dass ein Risikokonzentrationseffekt unter Verwendung des VaR, definiert als

$$\rho(X_1 + X_2) > \rho(X_1) + \rho(X_2), \quad X_1, X_2 \in L^\infty,$$

oder ein Diversifikationseffekt bei gleichen Randverteilungen der Risiken vollständig unabhängig von deren Korrelationen sind. Praktikern entgegnet er mit einem Beispiel aus einem Naturkatastrophenportfolio, in dem die Aggregation der Schäden in sehr vielen Fällen nicht zu einem Risikodiversifikationseffekt, sondern zu einem Risikokonzentrationseffekt führt.

### Berücksichtigung von Rückversicherung

Positiv zu bewerten ist die Tatsache, dass im Kontext von Solvency II das Risiko- und das Kapitalmanagement zusammengeführt werden. Im Vergleich zu anderen Formen des Transfers von Risiken weist Rückversicherung, insbesondere die Entlastung durch Rückversicherung, die Vorteile auf, dass sie

- flexibel auf Geschäftsveränderungen angepasst werden kann,
- individuell auf das Risikoprofil des VUs abgestellt werden kann,
- zur Glättung von Ergebnissen verwendet werden kann,
- ohne Kapitalmarktzugang möglich ist und
- keine Einschränkung aus Eigenmittel-Klassifizierung aufweist.

Auf die Solvenzquote unter Solvency II besitzt Rückversicherung eine doppelte Wirkung: einerseits sinkt die Solvenzkapitalanforderung durch die Wirkung von Rückversicherung, andererseits steigen die Eigenmittel aufgrund der gleichzeitig sinkenden Risikomarge. Unter der Annahme, dass alle übrigen Einflussfaktoren unverändert bleiben, erhöht sich die Solvenzquote durch den gezielten Einsatz von Rückversicherung.

Der Entlastung durch Rückversicherung auf der Passivseite der Solvenzbilanz wirkt die Solvenzkapitalanforderung für den Forderungsausfall, die sich aus dem Gegenparteiausfallrisiko ergibt, entgegen. Hierbei fließen die Exponierung in Form der Forderungen gegenüber dem Rückversicherungsunternehmen sowie die Kapitalisierung des Rückversicherungsunternehmens in Form von Rating und Risikokonzentration in die Kalkulation des Standardmodells ein, [RRL], Artikel 105 (6), und [DVO], Artikel 189 – 215. Allerdings ist die Rückversicherungsentlastung in Bezug auf die vt. Risiken typischerweise höher als der Aufschlag für die Forderungsausfallrisiken.

In der Standardformel findet in Abhängigkeit des Risikomoduls Rückversicherung unterschiedliche Berücksichtigung. Mit Blick auf das vt. Risiko Nicht-Leben kann im Risikomodul *Katastrophenrisiko*, das in [RRL], Artikel 105 (2) definiert und in [DVO], Artikel 119 – 135, spezifiziert wird, sowohl proportionale als auch nichtproportionale Rückversicherung (vergleiche Kapitel 2.8.1) weitgehend VU-individuell berücksichtigt werden. Denn zunächst wird

der erwartete Brutto-Schaden unter dem Katastrophenszenario ermittelt, der sich wiederum aus mehreren Komponenten (Szenarien) zusammensetzen kann. Je Katastrophenszenario kann auf den erwarteten Brutto-Schaden die VU-individuelle Rückversicherungsstruktur risikomindernd angewendet werden, was zur Netto-Solvenzkapitalanforderung führt. Problematisch kann in diesem Zusammenhang sein, dass die VU-individuelle Rückversicherungsstruktur im Allgemeinen nicht gemäß den Solvency II-LoBs segmentiert ist, was zu einem erheblichen Aufwand im VU führen kann.

Während im *Prämien- und Reserverisiko* proportionale Rückversicherung adäquat auf die entsprechenden Volumengrößen angewendet werden kann, wird nichtproportionale Rückversicherung, wie in Abschnitt 3.1.3, *Ermittlung der Risikofaktoren*, mit Verweis auf Tabelle A.4 des Anhangs aufgezeigt, durch eine einheitliche, fest vorgegebene Formel zur Bestimmung der risikomindernden Wirkung von Rückversicherung berücksichtigt:

$$\sigma_{(prem,s)} = \sigma_{(grossprem,s)} \cdot NP_s.$$

Dabei wird die Standardabweichung des Brutto-Prämienrisikos  $\sigma_{(grossprem,s)}$  für den LoB  $s$  schlicht durch einen Anpassungsfaktor  $NP_s$  zur entsprechenden Netto-Größe übergeleitet. Gemäß [EIOPA11] erfolgt die Kalibrierung des Anpassungsfaktors  $NP_s$  anhand von Berechnungen an Musterportfolios sowie Marktabwicklungsmustern zum Verhältnis der Standardabweichungen netto zu brutto für einfache nichtproportionale Rückversicherung mit üblichen Franchisen. Für die LoBs zur Kraftfahrt-Haftpflichtversicherung, Allgemeinen Haftpflichtversicherung sowie Feuer- und Sachversicherung gilt:  $NP_s = 80\%$ , für die übrigen LoBs hingegen:  $NP_s = 100\%$ . Der Anpassungsfaktor  $NP_s$  wird folglich unabhängig von der VU-individuellen Rückversicherungsstruktur angewendet. Insbesondere ist zu bemerken, dass der Anpassungsfaktor  $NP_s$  lediglich XL-Rückversicherung berücksichtigt; andere Formen nichtproportionaler Rückversicherung, etwa in Form einer SL-Rückversicherung, bzw. deren Kombinationen in strukturierten Rückversicherungsprogrammen (siehe Abschnitt 2.8.1) bleiben gänzlich unberücksichtigt.

In Bezug auf die Case Study werde angenommen, dass die CAPITOL als KH-Monoliner lediglich nichtproportionalen Rückversicherungsschutz in Form einer XL-Rückversicherung bei unbegrenztem Jahreslimit einkauft (siehe Abschnitt 2.8.1, *Nichtproportionale Rückversicherung*):

98.500.000 EUR xs. 1.500.000 EUR.

Inflationsproblematik sowie Stabilisierungsklauseln seien der Einfachheit halber aus den folgenden Überlegungen ausgeschlossen. Es werde angenommen, dass gleich im ersten Jahr der Geschäftstätigkeit zwei Großschäden eintreten, die sich gemäß der eingekauften Rückversicherungsstruktur wie folgt auf die CAPITOL und das RVU verteilen:

Schadennummer	Bruttoschaden $S$	Selbstbehalt $\tilde{S}$	Zediert $\hat{S}$	Selbstbehaltsanteil $\frac{\tilde{S}}{\hat{S}}$
1	1.750.000	1.500.000	250.000	85,7%
2	3.000.000	1.500.000	1.500.000	50,0%

Tabelle 3.2.: Case Study: Aufteilung des Gesamtschadens bei XL-Rückversicherung

Somit verbleiben im Eigenbehalt der CAPITOL 85,7% des ersten Großschadens, während es beim zweiten Großschaden 50,0% sind. Insgesamt beträgt das Verhältnis Netto- zu Bruttoschaden  $63,2\% < 80\% = NP_1$ . Wie in der Praxis oftmals zu beobachten, mag der Anpassungsfaktor für große VUs bei einfacher nichtproportionaler Rückversicherung mit üblichen Franchisen noch etwa risikogerecht sein. Hingegen erscheint dieser desto konservativer, je kleiner das VU ist.

Ein Vergleich mit dem Prämienrisiko im SST (siehe Abschnitt 3.2.3, *Prämienrisiko*) zeigt im Kontext der Berücksichtigung von Rückversicherung, dass im Standardmodell des SST aufgrund der Trennung von Basis- und Großschäden sowohl proportionale als auch nichtproportionale Rückversicherung in Form von XL-Deckungen angemessen dargestellt werden kann. Denn insbesondere ergibt sich bezüglich der Modellierung der Großschäden die Verteilung der Netto-Schadenhöhe pro Schaden dadurch, indem die entsprechenden XL-Deckungen auf die Paretoverteilung appliziert werden. Unberücksichtigt bleiben lediglich SL-Deckungen. Ausgenommen ist der Elementarschadenpool, der eine SL-Deckung besitzt, [BPV06], Kapitel 4.4.9. Eine SL-Deckung bewirkt, dass die Verteilung des Netto-Jahresschadens gerade nicht zusammengesetzt Poisson-verteilt ist. Daher kann diese Verteilung nicht mit den Verteilungen der übrigen Großschäden mit Hilfe von Satz 2.42 aggregiert werden. Stattdessen wird diese durch Faltung nachträglich zu  $S_{CY,s}^{LC}$  hinzu addiert.

Während proportionale Rückversicherung im Standardmodell unter Solvency II bereits angemessene Berücksichtigung findet, kann nichtproportionale Rückversicherung im Kontext der Erläuterungen in Abschnitt 2.8.2, *Nichtproportionale Rückversicherung*, lediglich durch ein (partielles) internes Modell, das auf das Risikoprofil des VUs zugeschnitten ist, adäquat abgebildet werden. Folglich werden in der Standardformel komplexe Rückversicherungsprogramme und ihre wirtschaftlichen Effekte auf eine einfache Sequenz heruntergebrochen und können nicht vollumfänglich abgebildet werden, was zu einer Unterbewertung des tatsächlichen Effekts führt. Zu kritisieren ist in diesem Kontext insbesondere die Angemessenheit des Faktors zur Berücksichtigung der nichtproportionalen Rückversicherung im Prämien- und Reserverisiko.

Bezüglich der Frage nach Angemessenheit und Komplexität lässt sich festhalten, dass das Standardmodell im Kontext der Rückversicherung zwar einfach, allerdings als wenig angemessen scheint. Einzig ein (partielles) Modell kann auf das Risikoprofil des VUs zugeschnitten werden, was zu Lasten der Praktikabilität geht, denn der Komplexitätsgrad steigt weiter an.

### 3.4.3. Zusammenfassung und Fazit

Im Vergleich zu „Solvency I“ bringt das neue europäische Aufsichtsregelwerk „Solvency II“ deutliche Verbesserungen mit sich. Diese betreffen insbesondere die markt- und risikoorientierte Bewertung der Vermögenswerte und Verbindlichkeiten und das damit einhergehende Ziel, durch Reduktion des Insolvenzrisikos eines VUs insbesondere den Schutz der Versicherten zu gewährleisten.

Aus allgemein versicherungswirtschaftlicher Perspektive wird nicht nur Kritik an der mangelnden Berücksichtigung des Managementrisikos geübt, sondern ebenfalls an strukturellen Schwächen bei der mathematischen Umsetzung des Standardmodells. Diese Kritikpunkte sind aus aktuarieller Perspektive im Einzelnen:

1. Beim verwendeten Risikomaß Value at Risk handelt es sich um ein nicht-kohärentes Risikomaß, das die erwartete Verlusthöhe ausblendet. Insbesondere in der Situation des Standardmodells, das unter der Annahme einer linearen Abhängigkeitsstruktur Diversifikationseffekte berücksichtigen will, kann die Verwendung des Value at Risk gar zu einem unerwünschten Risikokonzentrationseffekt führen.
2. Das Prämienrisiko ist ein Faktor-basiertes Modell und unterstellt, dass verdiente Prämien für die Risikoexponierung herangezogen werden können. Diese stellen allerdings kein gutes Maß für die Risikoexponierung dar. Weiterhin kann die Annahme einer Log-Normalverteilung mit erwarteter LR in Höhe von 100% bei defizitären Geschäftsbereichen zu einer Unterschätzung des korrespondierenden Prämienrisikos führen. Schließlich bleibt zu bemerken, dass die Risikofaktoren nur für einen durchschnittlichen Bestand auf dem europäischen Markt angemessen sind.
3. Das Parameterrisiko bleibt im ganzen Standardmodell unberücksichtigt.
4. Die unterstellten Korrelationskoeffizienten sind einerseits politisch gesetzt, andererseits ein Maß für lineare Abhängigkeiten, die auch nur in diesem Zusammenhang mit der entsprechenden Aussagekraft sinnvoll eingesetzt werden können. Liegt keine lineare Abhängigkeitsstruktur vor, wovon in der Praxis auszugehen ist, ist die Beschreibung stochastischer Abhängigkeiten zwischen den Risiken ausschließlich durch das Copula-Konzept möglich. Unter Verwendung des Value at Risk als Risikomaß gibt es keinen mathematischen Zusammenhang zwischen Korrelation und Diversifikation.
5. Proportionale Rückversicherung wird im Standardmodell zwar angemessen berücksichtigt, hingegen nichtproportionale Rückversicherung nur unzureichend über einen einfachen Faktor-basierten Ansatz. Die Wirkung von SL-Deckungen wird gänzlich außer Acht gelassen.

Die oben genannten Punkte zeigen, dass das Standardmodell aus Gründen der Praktikabilität zu einfach umgesetzt wird. Es kann das Risikoprofil eines einzelnen VUs nur sehr grob beschreiben. Abweichungen in die eine oder andere Richtung sind möglich, die zu falschen unternehmerischen Anreizen führen können. Aus diesem Grund eignet sich das Standardmodell nicht zur Unternehmenssteuerung; diesbezüglich bleibt den VUs lediglich die Abbildung des eigenen Risikoprofils durch ein internes (partiell)es Modell.

## 4. Case Study: Modellierung des Prämienrisikos

Während im vorangegangenen Kapitel das Prämienrisiko hauptsächlich aus Sicht aufsichtsrechtlicher, risikoorientierter Regelwerke betrachtet wurde, wechselt der Fokus nun hin zu einer unternehmensindividuellen Modellierung des Prämienrisikos, wie sie etwa in einem (partiellen) internen Modell durchgeführt werden kann. Als *Best Practice Ansatz* zu verstehen, wird hierzu die eingangs von Kapitel 3 eingeführte Case Study herangezogen, in der wesentliche Erkenntnisse am vorgestellten Beispielunternehmen, der CAPITOL, illustriert werden sollen.

Zunächst werden das Geschäftsmodell und das Risikoprofil der CAPITOL vorgestellt.

### 4.1. Geschäftstätigkeit und Risikoprofil

Wie in Kapitel 3 beschrieben, handelt es sich bei der CAPITOL um ein (fiktives) deutsches Schaden-/Unfall-VU. Als Monoliner betreibt die Gesellschaft ausschließlich die Sparte KH im Privatkundensegment innerhalb Deutschlands. Charakteristisch für die Versicherungsverträge der CAPITOL sind:

- (A.1) Der Versicherungsbeginn und die Beitragsfälligkeit seien stets der 01.01. eines Jahres.
- (A.2) Die Vertragslaufzeit betrage ein Jahr, sodass der Versicherungsvertrag am 31.12. eines Jahres ende.
- (A.3) Zum Jahreswechsel erfolge eine automatische Prolongation.
- (A.4) Die Versicherungssumme je Vertrag betrage 100 Mio. Euro (EUR).

Zum Zeitpunkt 31.12.2016 liegen der CAPITOL die Entwicklung der Prämieinnahmen, des Exposures und der Kosten seit 2002 vor (siehe Anhang C). Für das folgende Geschäftsjahr 2017 plant die Gesellschaft 100 Mio. EUR verdiente Brutto-Prämieinnahmen in der Sparte KH zu schreiben. Dabei soll der Bestand 400.000 einjährige Versicherungsverträge umfassen, die eine durchschnittliche Jahresprämie von 250 EUR haben.

Als wesentliches Risiko hat die CAPITOL jenes bezüglich großer Personenschäden in KH identifiziert (vergleiche Kapitel 2.6), zu dessen Absicherung sie über eine zeitlich konstante

Rückversicherungsstruktur verfügt. Das KH-Portfolio wird durch nichtproportionale Rückversicherung in Form einer XL-Deckung pro Risiko (vergleiche Kapitel 2.8) mit

98,5 Mio. EUR xs. 1,5 Mio. EUR

geschützt, wobei eine unbegrenzte Anzahl an Wiederauffüllungen ohne Fälligkeit einer Wiederauffüllungsprämie vereinbart ist. Ein zusätzlicher Jahresselbstbehalt besteht nicht; das bedeutet  $AAD = 0$  (siehe Kapitel 2.8.1). Die CAPITOL zahlt für den Rückversicherungsschutz eine Prämienrate in Höhe von 3,0% der verdienten Bruttoprämie, was in 2017 zu verdienten Netto-Prämieneinnahmen von 97,0 Mio. EUR führt.

Neben den Bestandsinformationen liegt der CAPITOL ebenfalls die Schadenabwicklung seit 2002 zum Bewertungsstichtag 31.12.2016 vor. Laufende Renten aus KH-Schäden befinden sich nicht im Bestand. Auf dieser Basis ermittelt das Reserve-Aktuariat die (nominalen) BE-Schadenrückstellungen in Höhe von 185.351 Tausend Euro (TEUR) brutto sowie 176.256 TEUR netto (siehe Kapitel C.1.2 und C.1.3).

Das Kapitalanlageportfolio der CAPITOL besteht zu 95% aus festverzinslichen Wertpapieren. Hierbei handelt es sich ausschließlich um deutsche Staatsanleihen mit einer Laufzeit von zehn Jahren, deren Marktwert 309.202 TEUR zum 31.12.2016 beträgt. Mit einer Aktienquote in Höhe von 5% investiert die Gesellschaft in ein gut diversifiziertes, in Euro notiertes Portfolio aus DAX-Titeln, dessen aktueller Marktwert mit 16.274 TEUR bewertet ist. Ein Investment in Immobilien tätigt die CAPITOL aktuell nicht, sodass die CAPITOL insgesamt über ein Kapitalanlagevolumen in Höhe von 325.476 TEUR verfügt.

Bevor sich der Fokus auf die unternehmensindividuelle Modellierung des Prämienrisikos richtet, werden am Beispiel der CAPITOL die in Kapitel 3.1 dargestellten aufsichtsrechtlichen Anforderungen aus Säule 1 von Solvency II betrachtet.

## 4.2. Aufsichtsrechtliche Anforderungen unter Solvency II

Seit dem 01.01.2016 hat die CAPITOL die Anforderungen gemäß Solvency II zu erfüllen, die unter Berücksichtigung sämtlicher Risiken dazu dienen sollen, ein umfassendes Bild hinsichtlich der Solvabilität zu gewährleisten. Hierzu sind einerseits die anrechnungsfähigen Eigenmittel im Kontext der Solvenzbilanz zu ermitteln, andererseits die Berechnung der Solvenzkapitalanforderungen durchzuführen. Da die CAPITOL zum Bewertungsstichtag 31.12.2016 über kein internes Modell verfügt, zieht das VU zur Berechnung der Solvenzkapitalanforderungen die Solvency II-Standardformel heran. Die entsprechenden Kalkulationen werden im Folgenden aufgezeigt. Hierzu werden weitere vereinfachende Annahmen getroffen:

- (A.5) Bei Neugeschäft, das in den nächsten zwölf Monaten gezeichnet werde, fallen Erstberücksichtigungsdatum und Vertragsbeginn des darauf folgenden Jahres zusammen.
- (A.6) Zur Ermittlung der Prämienrückstellung werde eine Schaden-/Kostenquote in Höhe von 100% unterstellt.

- (A.7) Es existieren keine sonstigen Aktiva außerhalb der Kapitalanlagen und keine sonstigen Passiva außerhalb der vt. Rückstellungen.
- (A.8) Das Ausfallrisiko sei vernachlässigbar.
- (A.9) Es existieren weder aktive noch passive latente Steuern.
- (A.10) Es existieren keine nachrangigen Verbindlichkeiten und keine ergänzenden Eigenmittel.

Insbesondere impliziert Annahme (A.6), dass der BE der Prämienrückstellung mit Null bewertet wird, denn gemäß [EIOPA15], Leitlinie 72 und Technischer Anhang III, gilt vereinfacht:

$$BE_{(prem,s)} := (CR_s - AER_s) \cdot VM_s + (CR_s - 1) \cdot PVFP_s,$$

wobei

- $CR_s$  die *Combined Ratio (CR)* bezüglich der verdienten Brutto-Prämieneinnahmen,
- $AER_s$  die Abschlusskostenquote für Abschlusskosten des aktuellen Bestandes,
- $VM_s$  die ökonomischen Beitragsüberträge aus bekannten Verträgen und
- $PVFP_s$  den Barwert zukünftiger Brutto-Prämieneinnahmen derjenigen Verträge des aktuellen Bestandes, die innerhalb der Vertragsgrenzen zu berücksichtigen sind,

für den LoB  $s$  bezeichnen.

Für die CAPITOL ist aufgrund von Annahme (A.1) die Beitragsfälligkeit der 01.01. eines jeden Jahres, sodass keine Beitragsüberträge bestehen, d.h.  $VM_4 = 0$ . Mit einer unterstellten CR in Höhe von 100% wegen Annahme (A.6), erhält man:

$$BE_{(prem,4)} = 0.$$

Folglich gilt für den BE der vt. Rückstellungen, der sich aus dem BE der Prämien- und Schadenrückstellungen zusammensetzt:

$$BE = BE_{prem} + BE_{res} = BE_{(prem,4)} + BE_{(res,4)} = BE_{(res,4)}.$$

Im Folgenden werden die Berechnungen der Solvenzkapitalanforderungen gemäß Solvency II-Standardmodell durchgeführt.

#### 4.2.1. Solvenzkapitalanforderungen

Zunächst wird dabei das vt. Risiko Nicht-Leben betrachtet.

##### Versicherungstechnisches Risiko Nicht-Leben

Unter Solvency II ist für die CAPITOL als KH-Monoliner im vt. Risiko Nicht-Leben lediglich der LoB  $s = 4$  relevant. Diesbezüglich ist zunächst die Solvenzkapitalanforderung aus dem Prämien- und Reserverisiko zu ermitteln, das als wesentliches Risiko des VUs identifiziert wurde.

**Prämien- und Reserverisiko.** Zur Bestimmung der Volumenmaße für das Prämienrisiko (siehe Kapitel 3.1.3) im LoB  $s = 4$  liegen der CAPITOL unter Berücksichtigung der Ausführungen in Kapitel 4.1 die Entwicklung der verdienten Brutto- und Netto-Prämieneinnahmen gemäß Tabelle C.1 des Anhangs vor, auf deren Basis die Volumengrößen  $P_4$  und  $P_{(last,4)}$  ermittelt werden können.

Aufgrund der einjährigen Laufzeit der Versicherungsverträge mit automatischer Prolongation (siehe Annahmen (A.1) – (A.3)), gilt:

$$FP_{(existing,4)} = 0.$$

Weiterhin gilt wegen Annahme (A.5):

$$FP_{(future,4)} = 0.$$

Unter Berücksichtigung von Diskontierung bezüglich der risikolosen Zinsstrukturkurve  $RFR$  zum Zeitpunkt  $t_0 = 31.12.2016$  (siehe Anhang B) sind die einzelnen Volumenmaße des Prämienrisikos des LoBs  $s = 4$  in Tabelle C.10 zusammengefasst. Gemäß Kapitel 3.1.3 bestimmt sich das Volumenmaß des Prämienrisikos insgesamt durch:

$$\begin{aligned} V_{(prem,4)} &= \max \{P_4, P_{(last,4)}\} + FP_{(existing,4)} + FP_{(future,4)} \\ &= \max \{97.294, 95.184\} + 0 + 0 \\ &= 97.294 \text{ [TEUR]}. \end{aligned}$$

Das Volumenmaß für das Reserverisiko ist gemäß Abschnitt 3.1.3 gerade der bezüglich der maßgeblichen risikolosen Zinsstrukturkurve  $RFR$  diskontierte Netto-BE der Schadenrückstellungen. Unter Berücksichtigung der Ausführungen in Kapitel C.1.3 gilt gemäß Tabelle C.7:

$$V_{(res,4)} = 160.102 \text{ [TEUR]}.$$

Da alle Verträge der CAPITOL innerhalb Deutschlands gezeichnet werden, erfolgt keine geographische Diversifikation. Mit  $DIV_4 = 1$  erhält man für das Volumenmaß des Prämien- und Reserverisikos:

$$\begin{aligned} V_4 &= (V_{(prem,4)} + V_{(res,4)}) \cdot (0,75 + 0,25 \cdot DIV_4) \\ &= (97.294 + 160.102) \cdot (0,75 + 0,25 \cdot 1) \\ &= 257.395 \text{ [TEUR]}. \end{aligned}$$

Aufgrund der bestehenden XL-Deckung gilt für den Risikofaktor des Prämienrisikos als Produkt aus dem Risikofaktor für das Brutto-Prämienrisiko  $\sigma_{(GrossPrem,4)}$  und einem Anpassungsfaktor für die nichtproportionale Rückversicherung  $NP_4$  gemäß Tabelle A.4:

$$\sigma_{(prem,4)} = \sigma_{(GrossPrem,4)} \cdot NP_4 = 10\% \cdot 80\% = 8\%.$$

Der Risikofaktor des Reserverisikos beträgt  $\sigma_{(res,4)} = 9\%$  gemäß Tabelle A.4, sodass der kombinierte Risikofaktor des Prämien- und Reserverisikos durch

$$\begin{aligned}\sigma_4 &= \frac{\sqrt{\sigma_{(prem,4)}^2 \cdot V_{(prem,4)}^2 + \sigma_{(prem,4)} \cdot V_{(prem,4)} \cdot \sigma_{(res,4)} \cdot V_{(res,4)} + \sigma_{(res,4)}^2 \cdot V_{(res,4)}^2}}{V_{(prem,4)} + V_{(res,4)}} \\ &= 7,58\%\end{aligned}$$

gegeben ist. Als KH-Monoliner gilt darüber hinaus:

$$\sigma_{nl} = \sigma_4 = 7,58\%.$$

Folglich errechnet sich die Solvenzkapitalanforderung für das Prämien- und Reserverisiko nach:

$$SCR_{nlPremRes} = 3 \cdot \sigma_{nl} \cdot V_{nl} = 3 \cdot 7,58\% \cdot 257.395 = 58.508 \text{ [TEUR]}.$$

Die Beiträge zur Solvenzkapitalanforderung  $SCR_{nlPremRes}$  sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst:

Zusammensetzung $SCR_{nlPremRes}$	(in TEUR)
$SCR_{prem}$	23.351
$SCR_{res}$	43.227
<i>Diversifikation</i>	-8.069
$SCR_{nlPremRes}$	58.508

Tabelle 4.1.: Case Study: Zusammensetzung der Solvenzkapitalanforderung  $SCR_{nlPremRes}$  des Prämien- und Reserverisikos (in TEUR)

Neben dem Prämien- und Reserverisiko ist das Katastrophenrisiko als Untermodul zum vt. Risiko Nicht-Leben zu betrachten.

**Katastrophenrisiko.** Als KH-Monoliner ist für die CAPITOL aus dem Risikosubmodul zum Katastrophenrisiko lediglich das Risiko vom Menschen verursachter Katastrophen relevant, das wiederum ausschließlich durch das KH-Risiko bestimmt ist. Für nähere Erläuterungen sei an dieser Stelle auf Abschnitt C.2.1 im Anhang verwiesen.

Gemäß Annahme (A.4) besitzen alle Verträge der CAPITOL eine Deckungssumme in Höhe von 100 Mio. EUR. Folglich gilt:

$$N_a = 400.000, N_b = 0,$$

wobei  $N_a$  bzw.  $N_b$  Anzahl der versicherten Fahrzeuge der LoBs 4 und 16 mit einer geschätzten Deckungssumme größer als bzw. kleiner gleich 24 Mio. EUR bezeichnen.

Für den Bruttoschaden erhält man:

$$L_{motor} = 50 \cdot \max \left\{ 120, \sqrt{400.000 + 0,05 \cdot 0 + 0,95 \cdot \min \{0, 20.000\}} \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= 50 \cdot \max \left\{ 120, \sqrt{400.000} \right\} \\
&= 31.623 \text{ [TEUR]}.
\end{aligned}$$

Die Netto-Solvenzkapitalanforderung wird errechnet, indem auf  $L_{motor}$  die unternehmensindividuelle Rückversicherung angewendet wird. Aufgrund der bestehenden XL-Deckung pro Risiko verbleibt maximal ein Schaden in Höhe der Priorität im Selbstbehalt der CAPITOL, sodass gilt:

$$SCR_{motor} = 1.500 \text{ [TEUR]}.$$

Damit errechnet sich unter Berücksichtigung von Abschnitt C.2.1 des Anhangs zum Katastrophenrisiko zunächst die Solvenzkapitalanforderung für das vom Menschen verursachte Katastrophenrisiko durch

$$SCR_{mmCAT} = SCR_{motor} = 1.500 \text{ [TEUR]}.$$

Schließlich erhält man die Solvenzkapitalanforderung des Katastrophenrisikos im vt. Risiko Nicht-Leben, die sich wie folgt reduziert:

$$SCR_{nlCAT} = SCR_{mmCAT} = 1.500 \text{ [TEUR]}.$$

Unter dem vt. Risiko Nicht-Leben ist zudem noch das Stornorisiko zu betrachten.

**Stornorisiko.** Gemäß Annahme (A.6) wird zur Ermittlung der Prämienrückstellung eine CR in Höhe von 100% angenommen. Konsistent zur Berechnung des BE der Prämienrückstellungen erfolgt die Berechnung der Solvenzkapitalanforderung des Stornorisikos im vt. Risiko Nicht-Leben gemäß [DVO], Artikel 118. Hierzu werden vereinfacht durch die CR auskömmliche Geschäftsbereiche mit erwartetem Gewinn identifiziert, sofern die CR kleiner als 100% ist. In diesem Fall beträgt der Stornoschock 40% der Erträge der so identifizierten LoBs, sodass für die Solvenzkapitalanforderung im LoB  $s$  gilt:

$$SCR_{lapse,s} = 40\% \cdot (1 - CR_s) \cdot PVFP.$$

Im Falle von  $CR_s \geq 100\%$  gilt:  $SCR_{lapse,s} = 0$ .

Für die CAPITOL gilt folglich:

$$SCR_{lapse} = SCR_{lapse,4} = 0 \text{ [TEUR]}.$$

Die Solvenzkapitalanforderung  $SCR_{non-life}$  für das vt. Risiko Nicht-Leben ist gemäß Kapitel A.1.3 zu aggregieren.

**Aggregation  $SCR_{non-life}$ .** Im Kontext der Case Study reduziert sich die Solvenzkapitalanforderung auf:

$$\begin{aligned}
SCR_{non-life} &= \sqrt{SCR_{nlPremRes}^2 + 2 \cdot 0,25 \cdot SCR_{nlPremRes} \cdot SCR_{nlCAT} + SCR_{nlCAT}^2} \\
&= 58.901 \text{ [TEUR]}.
\end{aligned}$$

Die Beiträge zur Solvenzkapitalanforderung  $SCR_{non-life}$  sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst:

Zusammensetzung $SCR_{non-life}$	(in TEUR)
$SCR_{nlPremRes}$	58.508
$SCR_{nlLapse}$	0
$SCR_{nlCAT}$	1.500
<i>Diversifikation</i>	-1.107
$SCR_{non-life}$	58.901

Tabelle 4.2.: Case Study: Zusammensetzung der Solvenzkapitalanforderung  $SCR_{non-life}$  des vt. Risikos Nicht-Leben (in TEUR)

### Versicherungstechnisches Risiko Kranken und Leben

Die CAPITOL betreibt weder Kranken- noch Lebensversicherungsgeschäft. Insbesondere befinden sich gemäß Kapitel 4.1 zum Bewertungsstichtag auch keine laufenden Renten aus KH-Schäden im Bestand, sodass gilt:

$$SCR_{health} = 0 \text{ [TEUR]}, \quad SCR_{life} = 0 \text{ [TEUR]}.$$

### Marktrisiko

Gemäß 4.1 besteht das Kapitalanlageportfolio der CAPITOL zu 95% aus festverzinslichen Wertpapieren in Form von deutschen Staatsanleihen und zu 5% aus einem diversifizierten, in Euro notierten Aktieninvestment aus DAX-Titeln. Aufgrund der Kapitalanlagestrategie ist die Gesellschaft keinem Wechselkursrisiko ausgesetzt. Staatsanleihen der Zentralregierung oder der Zentralbank von Staaten, die Mitglied des Europäischen Wirtschaftsraums oder der Organisation für wirtschaftliche Zusammenarbeit und Entwicklung sind, weisen gemäß [DVO], Artikel 180, weder ein Spread- noch ein Konzentrationsrisiko gemäß [DVO], Artikel 187, auf. Zudem tätigt das VU aktuell kein Investment in Immobilien. Folglich setzt sich das Marktrisiko der CAPITOL aus dem Zinsänderungs- und dem Aktienrisiko zusammen. Für weitere Informationen zum Marktrisiko mit Fokus auf dem Zinsänderungs- und Aktienrisiko sei auf Kapitel C.2.1 verwiesen.

**Zinsänderungsrisiko.** Im Zinsänderungsrisiko werden die Schockszenarien Zinsanstieg und -rückgang im Vergleich zur risikoneutralen Bewertung für alle zinssensitiven Assets als auch für alle zinssensitiven Liabilities analysiert. Neben den deutschen Staatsanleihen gehören bei der CAPITOL auch die einforderbaren Beträge zu den zinssensitiven Aktiva. Zu den zinssensitiven Passivpositionen zählen die vt. Rückstellungen, die sich aus den BE Prämien- und Schadenrückstellungen zusammensetzen. Aufgrund von Annahme (A.6) beschränken sich die vt. Rückstellungen rein auf die Netto-BE Schadenrückstellungen. Gemäß Annahme (A.7) gibt es ansonsten keine weiteren zinssensitiven Aktiva oder Passiva. Da alle genannten Positionen in EUR notiert sind, entfällt eine Differenzierung nach Währung.

Gemäß Abschnitt C.2.1 zum Zinsänderungsrisiko und Tabelle C.11 ist das für die CAPITOL maßgebliche Szenario das Zinsrückgangsszenario, sodass sich eine Solvenzkapitalanforderung für dieses Risikosubmodul in Höhe von 6.428 TEUR ergibt.

**Aktienrisiko.** Im Aktienrisiko werden Risiken aus Schwankungen der Aktienkursen betrachtet. Unter Berücksichtigung der Ausführungen zum Abschnitt C.2.1 zum Aktienrisiko handelt es sich beim Aktienportfolio ausschließlich um in Euro notierte DAX-Titel, die als Typ 1-Aktien zu klassifizieren sind und mit einem unmittelbaren Kursrückgang in Höhe von 39% gestresst werden. Gemäß Tabelle C.12 beträgt das Aktienrisiko 6.347 TEUR.

Die Solvenzkapitalanforderung  $SCR_{market}$  für das Marktrisiko ist gemäß Kapitel C.2.1 zu aggregieren.

**Aggregation  $SCR_{market}$ .** Hierbei reduziert sich die Solvenzkapitalanforderung bei der CAPITOL auf:

$$\begin{aligned} SCR_{market} &= \sqrt{SCR_{interest}^2 + 2 \cdot 0,5 \cdot SCR_{interest} \cdot SCR_{equity} + SCR_{equity}^2} \\ &= 11.063 \text{ [TEUR]}. \end{aligned}$$

Die Beiträge zur Solvenzkapitalanforderung  $SCR_{market}$  sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst:

Zusammensetzung $SCR_{market}$	(in TEUR)
$SCR_{interest}$	6.428
$SCR_{equity}$	6.347
<i>Diversifikation</i>	-1.711
$SCR_{market}$	11.063

Tabelle 4.3.: Case Study: Zusammensetzung der Solvenzkapitalanforderung  $SCR_{market}$  des Marktrisikos (in TEUR)

### Basissolvvenzkapitalanforderung

Aus Vereinfachungsgründen sei das Ausfallrisiko gemäß Annahme (A.7) vernachlässigbar. Mit Hilfe von Kapitel 3.1.3 erhält man das BSCR, das sich auf folgende Form reduziert:

$$\begin{aligned} BSCR &= \sqrt{SCR_{market}^2 + 2 \cdot 0,25 \cdot SCR_{market} \cdot SCR_{non-life} + SCR_{non-life}^2} \\ &= 62.591 \text{ [TEUR]}. \end{aligned}$$

Die Beiträge zur Solvenzkapitalanforderung BSCR sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst:

Zusammensetzung <i>BSCR</i>	(in TEUR)
<i>SCR<sub>market</sub></i>	11.063
<i>SCR<sub>non-life</sub></i>	58.901
<i>Diversifikation</i>	-7.374
<i>BSCR</i>	62.591

Tabelle 4.4.: Case Study: Zusammensetzung der Basissolvenzkapitalanforderung *BSCR* (in TEUR)

### Operationales Risiko

Unter Berücksichtigung der Ausführungen in Kapitel C.2.1 macht das operationale Risiko mit 5.051 TEUR rund 7,5% des gesamten Unternehmensrisikos der CAPITOL aus.

### Solvenzkapitalanforderung

Gemäß Annahme (A.9) existieren weder aktive latente Steueransprüche noch passive latente Steuerschulden, sodass ohne Berücksichtigung der Anpassung für die Verlustausgleichsfähigkeit der latenten Steuern für das SCR der CAPITOL gilt:

$$SCR = BSCR + SCR_{operational} = 62.591 + 5.051 = 67.642 \text{ [TEUR]}.$$

#### 4.2.2. Solvenzbilanz

Bei der Aufstellung der Solvenzbilanz zum Bewertungsstichtag 31.12.2016 erfolgt der Ansatz und die Bewertung aller Positionen zum Fair Value anhand der in Kapitel 3.1.2 aufgezeigten Fair Value-Hierarchie. Sofern Marktwerte verfügbar sind, sind diese anzusetzen.

Die Marktwerte der Kapitalanlagen werden in Kapitel 4.1 erwähnt; der BE der einforderbaren Beträge aus Rückversicherung sowie der Brutto-BE der Schadenrückstellungen können Tabelle C.7 des Anhangs entnommen werden. Als Bestandteil der vt. Rückstellungen ist schließlich noch die *Risikomarge* zu ermitteln. Unter Beachtung der Ausführungen in Abschnitt C.2.2 zur Risikomarge beträgt die Risikomarge der CAPITOL 30.096 TEUR.

Damit stellt sich die Solvenzbilanz der CAPITOL zum Bewertungsstichtag 31.12.2016 wie folgt dar:

Solvenzbilanz			
Vermögenswerte (in TEUR)		Verbindlichkeiten (in TEUR)	
Kapitalanlagen	325.476	Überschuss Vermögenswerte über Verbindlichkeiten	135.278
... davon Staatsanleihen	309.202	Versicherungstechnische Rückstellungen	198.459
... davon Aktien	16.274	... davon Risikomarge	30.096
Einforderbare Beträge aus Rückversicherung	8.262	... davon Best Estimate	168.363
Latente Steueransprüche	0	Latente Steuerschulden	0
Sonstige Aktiva	0	Sonstige Passiva	0
Gesamt	333.738	Gesamt	333.738

Tabelle 4.5.: Case Study: Solvenzbilanz (in TEUR)

Die Ausführungen in Kapitel 3.1.2 berücksichtigend, existieren gemäß Annahme (A.10) keine nachrangigen Verbindlichkeiten, sodass die Basiseigenmittel  $BOF$  gerade der Überschuss der Vermögenswerte über die Verbindlichkeiten  $EAL$  sind. Ergänzende Eigenmittel  $AOF$  liegen ebenfalls nicht vor. Folglich bilden die als Residualgröße aus der Solvenzbilanz abgeleiteten Eigenmittel  $OF$  auch die verfügbaren Eigenmittel  $AvOF$ , die gesamthaft als unbeschränkte T1-Eigenmittel klassifiziert werden und damit in voller Höhe die anrechenbaren Eigenmittel  $EOF$  der CAPITOL bilden (siehe Abbildungen 3.2 und 3.3).

**Solvabilitätsquote.** Mit Hilfe der hergeleiteten anrechenbaren Eigenmittel  $EOF = 135.279$  TEUR und der Solvenzkapitalanforderung  $SCR = 67.642$  TEUR ergibt sich die Solvabilitätsquote der CAPITOL wie folgt:

$$\text{Solvabilitätsquote} := \frac{ASM}{SCR} = \frac{EOF}{SCR} = \frac{135.278}{67.642} = 200,0\%.$$

Durch eine Solvabilitätsquote in Höhe von 200% zum Stichtag 31.12.2016 erfüllt die CAPITOL die aufsichtsrechtlichen Anforderungen gemäß Solvency II. Doch vor dem Hintergrund der in Kapitel 3.4 diskutierten Kritikpunkte, insbesondere aus aktuarieller Perspektive, bleibt die Frage unbeantwortet, inwiefern das Risikoprofil der CAPITOL adäquat durch das Solvency II-Standardmodell abgebildet wird. Abweichungen in beide Richtungen sind möglich, werden allerdings weder bestimmt noch quantifiziert. Das verdeutlicht erneut, dass das Standardmodell trotz markt- und risikoorientierter Bewertung nicht dazu geeignet ist, ein VU alleinig auf dieser Basis zu steuern. Nichtsdestotrotz bleibt die Erfüllung der aufsichtsrechtlichen Anforderungen für die Aufrechterhaltung des Geschäftsbetriebs eine notwendige Bedingung.

Der Fokus richtet sich nun auf die unternehmensindividuelle Modellierung des Prämienrisikos. Im Rahmen von Säule II ist die CAPITOL angehalten, eine quantitative Prüfung der Angemessenheit der der Standardformel zugrunde liegenden Annahmen durchzuführen. Doch auch neben der aufsichtsrechtlichen Pflicht gibt es gute Gründe für eine eigene Modellierung, etwa eine adäquate Beurteilung der Wertschöpfung eines VUs.

### 4.3. Unternehmenseigene Modellierung des Prämienrisikos

Im Rahmen der Erstellung des ORSA-Berichts befasst sich die CAPITOL mit der unternehmenseigenen Risiko- und Solvabilitätsbeurteilung. Als Teil des Risikomanagementsystems dient diese unter anderem dazu, den Gesamtsolvabilitätsbedarf unter Berücksichtigung des spezifischen Risikoprofils zu bewerten. Hierzu ist es gemäß [RRL], Artikel 45, erforderlich zu prüfen, ob signifikante Abweichungen zwischen den Annahmen, die der aufsichtsrechtlichen standardisierten Berechnung der Solvenzkapitalanforderung zugrunde liegen, und dem tatsächlichen Risikoprofil bestehen. Die für die Standardformel zur Berechnung der Solvenzkapitalanforderungen verwendeten Annahmen gemäß [EIOPA14], die bereits in Kapitel 3.4.2 unter dem Paragraphen zum Prämienrisiko diskutiert wurden, werden hier kurz zusammengefasst:

- Die Kalibrierung des Prämienrisikos basiert auf einem volumengewichteten, europäischen Versicherungskollektiv und erfolgt durch die Standardabweichung der Endscha-denquote.
- Als Maß für die Risikoexponierung werden verdiente Prämien verwendet.
- Der Jahresgesamtschaden ist das Produkt aus erwarteter Endscha-denquote und Risikoexponierung.
- Für die Varianz des Jahresgesamtschadens wird ein allgemeiner quadratischer Ausdruck herangezogen.
- Nach Spezifikation von Mittelwert und Varianz des Jahresgesamtschadens werden diese in ein normales bzw. lognormales Wahrscheinlichkeitsmodell eingebettet.

Bei Abweichungen zu den Annahmen sind insbesondere die folgenden Konstellationen zu berücksichtigen:

- Abweichungen durch die Nichtberücksichtigung sowie
- Abweichungen durch die Über- bzw. Unterbewertung

von Risiken in der Berechnung der Solvenzkapitalanforderungen.

Unter Beachtung der einzelnen Risikobeiträge zum aufsichtsrechtlichen Gesamtsolvabilitätsbedarf der CAPITOL wird das Prämienrisiko nun hinsichtlich der zugrunde liegenden Annahmen und Bewertungsverfahren analysiert. Entsprechend wird zur Berechnung des benötigten Risikokapitals  $RBC$  der VaR als Risikomaß zum Sicherheitsniveau  $\alpha = 99,5\%$  verwendet.

#### 4.3.1. Datengrundlage

Wie in Kapitel 4.1 bereits erwähnt, liegen der CAPITOL zur Modellierung des Prämienrisikos zum Bewertungsstichtag 31.12.2016 sowohl Bestandsinformationen als auch Schaden-daten seit 2002 vor. Für die folgenden Ausführungen wird die *Anfalljahressicht* – analog

zum Standardmodell des SST (siehe Kapitel 3.2.3) – eingenommen. Der Datenstand der beobachteten Anfalljahre 2002 bis 2016 bezieht sich jeweils auf das Ende des entsprechenden Geschäftsjahres, den 31. Dezember. Im Hinblick auf die mathematische Notation im Kontext von Anfalljahren und Abwicklungsdreiecken ist es vorteilhaft, Anfalljahre in gleicher Weise wie Abwicklungsjahre und damit als relative Anfalljahre zu behandeln. Die relativen Anfalljahre der CAPITOL seien unter Berücksichtigung der Replik in Kapitel C.1.2 zu den Abwicklungsdreiecken durch den Index  $i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , notiert. Entsprechend werden  $n$  Anfalljahre zum Bewertungsstichtag 31.12.2016 betrachtet.

Bezüglich der Bestandsinformationen (siehe Anhang C.1.1) seien durch

- $P_i$  die (nominalen) verdienten Brutto-Prämieneinnahmen,
- $v_i$  das Exposure als Anzahl der Jahreseinheiten, das gemäß Annahme (A.2) gerade der Anzahl der Einjahresverträge entspricht, und
- $E_i$  die Kosten als Summe der Abschluss- und Verwaltungskosten

des Anfalljahres  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , bezeichnet. Abbildung 4.1 stellt einerseits die Entwicklung der verdienten Brutto-Prämieneinnahmen  $P_i$  im Vergleich zur Durchschnittsprämie  $\frac{P_i}{v_i}$  bzw. zum KH-Exposure  $v_i$  der CAPITOL dar.

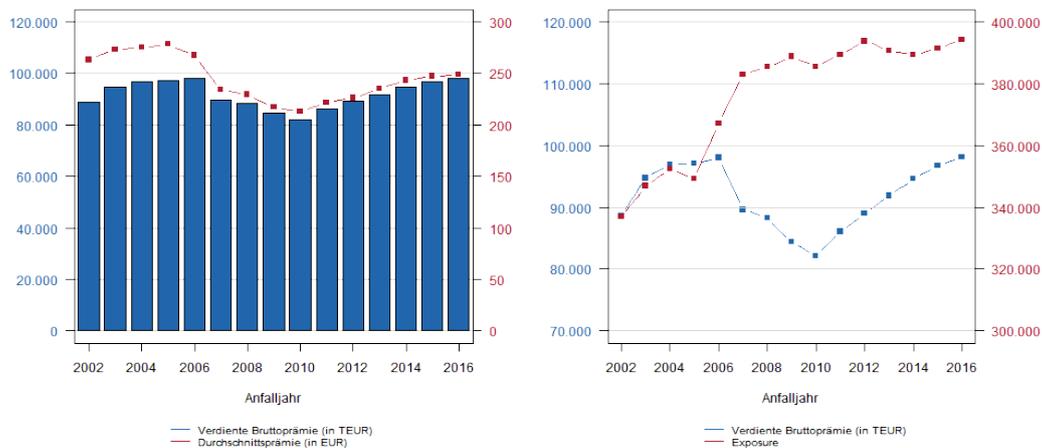


Abbildung 4.1.: Case Study: Entwicklung der verdienten Brutto-Prämieneinnahmen (in TEUR), der Durchschnittsprämie (in EUR) und des Bestandes der Vergangenheit (*Quelle: Eigene Darstellung*)

Es wird deutlich, dass die Gesellschaft im Privatkundensegment seit Jahren einem starken Wettbewerb ausgesetzt ist, der sich insbesondere im Zeitraum 2006 bis 2010 bemerkbar macht. Umsatzorientierte Ziele zur Gewinnung von Marktanteilen gehen einher mit einem Preisverfall. Das bedeutet, dass trotz wachsendem Bestand die verdienten Brutto-Prämieneinnahmen und folglich auch die entsprechenden Durchschnittsprämien sinken. Die

Trendwende gelingt der CAPITOL 2011, sodass für die genannten Größen wiederum ein Anstieg zu verzeichnen ist, der bis zum aktuellen Bewertungsstichtag anhält. Damit folgt die Prämien- und Bestandsentwicklung des KH-Monoliners dem Marktzyklus.

Bezüglich der Schadendaten steht die Schadenabwicklung in Form von Abwicklungsdreiecken (siehe Anhang C.1.2) für Schadenanzahlen und für (nominale) Brutto-Schadenzahlungen bzw. Brutto-Schadenaufwände zur Verfügung. Aus aktuarieller Perspektive werden die genannten Größen bezogen auf ihren jeweiligen Endschadenstand, den sogenannten *Ultimate* betrachtet, der im Rahmen des Reserving-Prozesses ermittelt wird. Das Ergebnis der separaten Abwicklung von Schadenanzahlen  $N_{i,k}$  und (nominalen) Brutto-Schadenhöhen  $C_{i,k}$  (Schadenzahlungen bzw. -aufwände) für das Anfalljahr  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , im Abwicklungsjahr  $k$ ,  $1 \leq k \leq \omega$ , wobei  $\omega$  den Endabwicklungszeitpunkt bezeichne, sind die entsprechenden Ultimate-Schadenanzahlen  $\widehat{N}_i^{(n)}$  und Ultimate-Schadenaufwände  $\widehat{U}_i^{(n)}$  zum Zeitpunkt  $t = n$ . Für die CAPITOL sind die entsprechenden Brutto-Kennzahlen aus Ultimate-Sicht in Tabelle C.9 zusammengefasst.

Eine differenzierte Betrachtung von Schadenanzahlen und -höhen zeigt ein zweigeteiltes Bild. Im Beobachtungszeitraum erreichen sowohl die endabgewickelten Schadenanzahlen  $\widehat{N}_i^{(n)}$  als auch die Schadenfrequenzen

$$\widehat{Freq}_i := \frac{\widehat{N}_i^{(n)}}{v_i}$$

des Anfalljahres  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , einen historischen Tiefstand zum Bewertungsstichtag. Der Verlauf verdeutlicht zudem, dass zu Zeiten des Preiskampfes der fallende Trend leicht abgeschwächt wird.

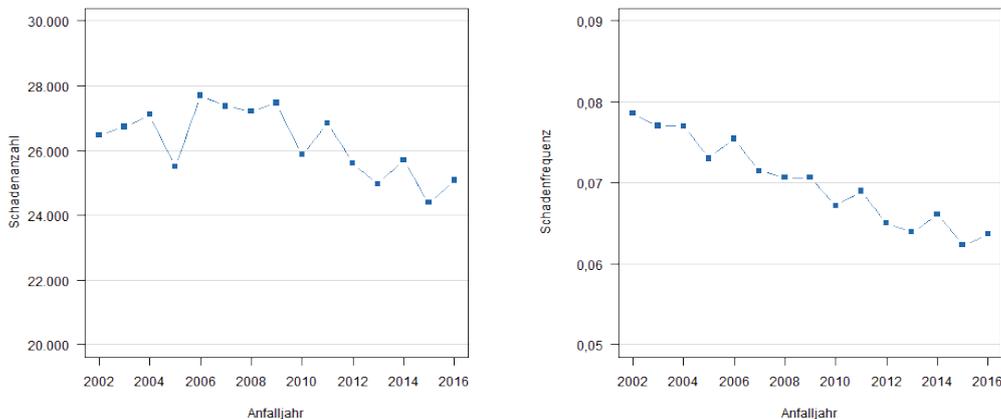


Abbildung 4.2.: Case Study: Endabgewickelte Schadenanzahlen und -frequenzen der Vergangenheit (*Quelle: Eigene Darstellung*)

Diesem kontinuierlichen Rückgang steht ein Anstieg der Schadendurchschnitte

$$\frac{\widehat{U}_i^{(n)}}{\widehat{N}_i^{(n)}}$$

über den gesamten Beobachtungszeitraum entgegen, während das Niveau der Ultimate-Schadenaufwände  $\widehat{U}_i^{(n)}$  über die Anfalljahre  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , hinweg ein stabiles Bild ergibt, wie in Abbildung 4.3 dargestellt wird.

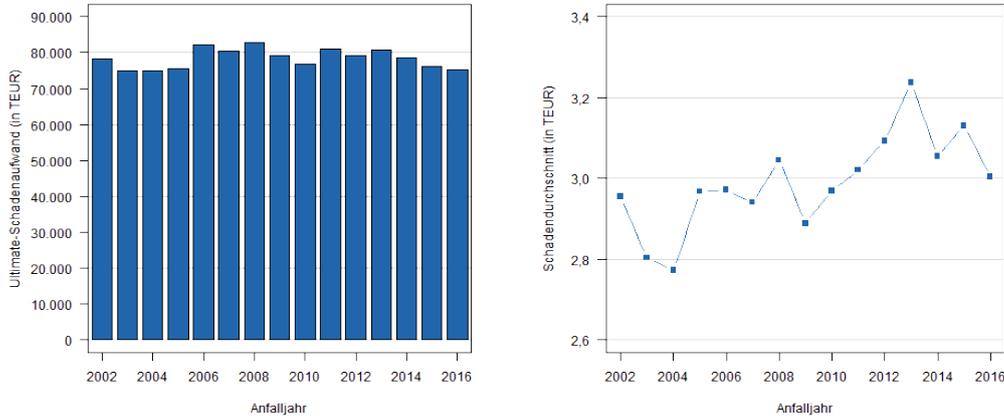


Abbildung 4.3.: Case Study: Ultimate-Schadenaufwände und -durchschnitte (in TEUR) der Vergangenheit (*Quelle: Eigene Darstellung*)

Darüber hinaus liegen der CAPITOL noch die direkt zuzurechnenden und indirekt zuzurechnenden Schadenregulierungskosten, die als *Unallocated Loss Adjustment Expense (ULAE)* bezeichnet und in Tabelle C.8 aufgeführt werden, vor. Damit können wesentliche Kennzahlen ermittelt werden. Hierzu zählen

- die (nominale) Brutto-Schadenquote

$$\widehat{LR}_i^{(n)} := \frac{\widehat{U}_i^{(n)}}{P_i}$$

bzw. die (nominale) Brutto-Schadenquote unter Berücksichtigung der ULAE

$$\widehat{LR}_i^{ULAE,(n)} := \frac{\widehat{U}_i^{(n)} + ULAE_i}{P_i},$$

- die (nominale) kombinierte Brutto-Schaden-/Kostenquote

$$\widehat{CR}_i^{(n)} := \frac{\widehat{U}_i^{(n)} + E_i}{P_i}$$

sowie

- das (nominale) Brutto-Anfalljahresergebnis, *Underwriting Profit*,

$$\widehat{UWP}_i^{(n)} := P_i - E_i - \widehat{U}_i^{(n)}$$

für ein einzelnes Anfalljahr  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Entsprechend lassen sich die Kennzahlen auch für alle Anfalljahre  $\{C_{i,1}, \dots, C_{i,n}\}$  bestimmen.

Während die Schadenquote ein Maßstab für die Qualität des gezeichneten Geschäfts und die Effizienz des Schadenmanagements ist, misst die kombinierte Schaden-/Kostenquote das Anfalljahresergebnis und ist damit Maßstab für die Profitabilität des Geschäftes.

Die eingeführten Kennzahlen der CAPITOL sind in Abbildung 4.4 dargestellt. Insbesondere in Zeiten des Preiskampfes zeigt sich eine Verschlechterung der Loss Ratio und damit verbunden auch der Combined Ratio, die die Profitabilitätsgrenze in Höhe von 100% übersteigt. Im genannten Zeitraum verbucht die CAPITOL Verluste aus der Versicherungstechnik, die sich im Verlauf der Anfalljahresergebnisse niederschlagen. Erst die Tendenz zur Prämienhöhung führt zu einer Senkung der CR und damit auch wieder zu vt. Gewinnen in den Anfalljahren 2014 bis 2016.

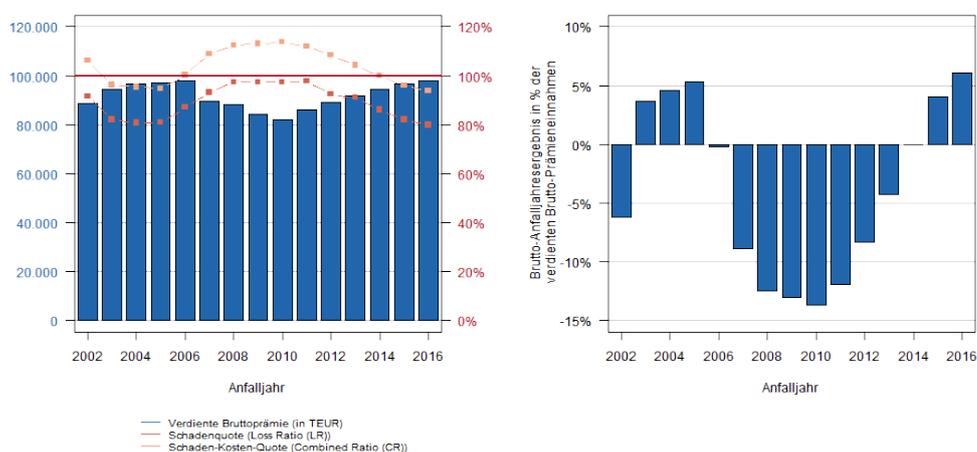


Abbildung 4.4.: Case Study: Loss Ratios (inklusive ULAE), Combined Ratios und Brutto-Anfalljahresergebnisse der Vergangenheit in Relation zu den verdienten Brutto-Prämieneinnahmen (*Quelle: Eigene Darstellung*)

Für das Anfalljahr 2017 erwartet die CAPITOL ebenfalls einen vt. Gewinn. Fraglich ist, ob sich die aktuell positive Marktsituation in gleichem Maße fortsetzt. Die größte Unsicherheit bringt naturgemäß die Schadenseite mit sich. Unterstellt man jedoch eine weiterhin stabile Schadenentwicklung wie beobachtet, bleibt an dieser Stelle Folgendes festzuhalten: die Entwicklung der KH-Versicherung insgesamt wird durch die Marktteilnehmer selbst durch Festlegung des zukünftigen Prämienniveaus gesteuert. So werden sich alle zukünftigen Bestands- und Tarifmaßnahmen unmittelbar im Anfalljahresergebnis niederschlagen und folglich Einfluss auf die Profitabilität haben. Verbleibt die Frage, zu welchem Zeitpunkt welches VU den nächsten Preiskampf einläuten und in welchem Ausmaß dies geschehen wird. Die Voraussetzungen für einen weiteren starken Wettbewerb sind im Spannungsfeld der aktuellen Niedrigzinsphase eher ungünstig.

Zurückkommend auf die Modellierung des Prämienrisikos zeigen obige Darstellungen, dass

der gewählte Detaillierungsgrad nicht ausreichend ist, um einerseits den Einfluss großer Personenschäden zu erkennen und andererseits ihrer Charakteristik im Modell gerecht zu werden. Somit ist zwischen großen Personenschäden und Basisschäden (Sach- und kleinen Personenschäden) zu differenzieren. Hierzu stehen der CAPITOL neben den erwähnten Abwicklungsdreiecken weiterhin Einzelschadensätze ab 100 TEUR, bestehend aus Schadenzahlungen  $S_{i,k}$  und -reserven  $R_{i,k}$ , je Anfall- und Abwicklungsjahr ohne Abzug von Rückversicherung für die Anfalljahre 2002 bis 2016 zur Verfügung,  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq k \leq n + 1 - i$ . Auf Basis dieser Daten und der gegebenen Rückversicherungsstruktur wird in Anlehnung an [Die07b] und [DGVFM08] ein stochastisches Modell für das Prämienrisiko erstellt. Das Simulationsmodell basiert auf einer Konvexkombination von Groß- und Basisschäden, um unterschiedliche Risiken von einerseits seltenen Schäden mit hohem Schadenaufwand und schwankenden Schadenfrequenzen sowie von andererseits schwankenden Schadenbedarfen innerhalb der Basisschadenlast besser abzubilden.

Zunächst gilt der Fokus der Inflationsproblematik, die im folgenden Kapitel in Anlehnung an [Lie09] und [Sch01] behandelt wird.

#### 4.3.2. Inflationsproblematik

Große Personenschäden in der KH-Versicherung wickeln sich in der Regel über einen sehr langen Zeitraum ab. Die Schäden sind oft erst nach 50 Jahren reguliert, weshalb man in diesem Kontext auch von einer sogenannten *Longtail-Sparte* spricht. Aus diesem Grund spielt die Inflation in diesen Segmenten eine bedeutende Rolle, insbesondere in Verbindung mit nichtproportionaler Rückversicherung in Form einer XL-Deckung. An dieser Stelle sei das Schlagwort „Stabilisierungsklausel“ erwähnt, das im weiteren Verlauf dieser Arbeit noch betrachtet wird.

Aufgrund der langen Abwicklungsdauer großer Personenschäden nimmt die Entwicklung des Lohn- und Preisniveaus Einfluss auf die unterschiedlichen Schadenkomponenten, wie etwa Verdienstausfall, Pflegemaßnahmen, Schmerzensgeld und Heilbehandlung, und folglich auch auf die Schadenhöhen. Durch sogenannte *As-if-Korrekturen* sollen diejenigen Einflussfaktoren berücksichtigt werden, die alle Schadenzahlungen in ihrer Höhe gleichmäßig beeinflussen. Daher erfolgt die Bewertung der inflationsbedingten Teuerung, der die großen Personenschäden im Laufe ihrer Abwicklung unterliegen, über einen Inflationsindex, der sogenannten „Indexierung“ dieser Schäden mit einem geeigneten *Schadenindex*. In Deutschland wird hierzu der „*Index der Bruttomonatsverdienste vollzeitbeschäftigter Arbeitnehmer*“ herangezogen, der vierteljährlich vom Statistischen Bundesamt ermittelt wird. Allerdings bildet der genannte Lohn- und Gehaltsindex die Teuerung im Pflegebereich, die bei großen Personenschäden einen hohen Anteil besitzt, nicht ab. Aus diesem Grund wird neben dem Lohn- und Gehaltsindex (L&G-Index) eine sogenannte *Superimposed Inflation* angesetzt, die sich als Differenz der „wahren“ Schadenteuerung und der Steigerung des Lohn- und Gehaltsindex ergibt. Hierunter werden alle nicht bzw. nur schwer vorhersehbaren und kalkulierbaren schadenbeeinflussenden Faktoren zusammengefasst. Die Herausforderung besteht jedoch darin, die „wahre“ Inflation und damit auch die Superimposed Inflation zu ermitteln.

An dieser Stelle sei erwähnt, dass weitere Indizes möglich sind; etwa eine Mischung aus dem Lohn- und Gehaltsindex sowie einem Pflegekostenindex.

Bei der CAPITOL basiere die Wahl des Schadenindex auf dem Lohn- und Gehaltsindex gemäß [Destatis17], korrigiert um eine jährliche Superimposed Inflation in Höhe von 2%, um Kostensteigerungen etwa durch medizinischen Fortschritt bei den Personenschäden zu berücksichtigen. Der sich daraus ergebende Schadenindex  $I^S$  ist in der folgenden Tabelle dargestellt, wobei das Anfalljahr 2002 auf 100 gesetzt wird:

Anfalljahr	L&G-Index	Steigerung L&G-Index	Superimposed Inflation	Steigerung Schadenindex	Schadenindex $I^S$
2002	75,9				100,0
2003	77,9	2,6%	2,0%	4,6%	104,6
2004	79,5	2,1%	2,0%	4,1%	108,9
2005	80,6	1,4%	2,0%	3,4%	112,6
2006	81,7	1,4%	2,0%	3,4%	116,3
2007	83,4	2,1%	2,0%	4,1%	121,1
2008	85,7	2,8%	2,0%	4,8%	126,9
2009	86,2	0,6%	2,0%	2,6%	130,1
2010	88,7	2,9%	2,0%	4,9%	136,5
2011	91,1	2,7%	2,0%	4,7%	142,9
2012	93,4	2,5%	2,0%	4,5%	149,4
2013	95,1	1,8%	2,0%	3,8%	155,1
2014	97,6	2,6%	2,0%	4,6%	162,3
2015	100,0	2,5%	2,0%	4,5%	169,5
2016	102,2	2,3%	2,0%	4,3%	176,8

Tabelle 4.6.: Case Study: Schadenindex basierend auf dem Lohn- und Gehaltsindex, korrigiert um eine Superimposed Inflation

Mit Hilfe des Schadenindex werden nun zu den Einzelschadensätzen der CAPITOL ab 100 TEUR die zugehörigen As-if-Schäden ermittelt. Um das Prämienrisiko zum Bewertungsstichtag 31.12.2016 für das nächste Folgejahr quantifizieren zu können, sind hierzu sämtliche Einzelschäden derart darzustellen, als hätten sich diese im Anfalljahr 2017 ereignet. Entsprechend werden die beobachteten Abwicklungsjahre auf die Jahre 2017 und folgende abgebildet. Die Einzelschäden der beobachteten Anfalljahre  $1, \dots, n$  werden durch die As-if-Betrachtung im Jahr  $n + 1$  inflationsbereinigt und sind damit vergleichbar.

Die Notation in Kapitel C.1.3 aufgreifend, bezeichne  $S_{i,j,k}$  die inkrementelle Schadenzahlung des  $j$ -ten Einzelschadens aus dem Anfalljahr  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , im Abwicklungsjahr  $k$ ,  $1 \leq k \leq n + 1 - i$  mit  $j = 1, \dots, n_i$ , wobei  $n_i$  die Anzahl der Einzelschäden im Anfalljahr  $i$  sei. Entsprechend sei durch  $R_{i,j,k}$  der Reservestand des  $j$ -ten Einzelschadens aus dem Anfalljahr  $i$  im Abwicklungsjahr  $k$  gekennzeichnet, sodass der Schadenaufwand nach dem  $k$ -ten Abwicklungsjahr durch

$$\left( \sum_{\kappa=1}^k S_{i,j,\kappa} \right) + R_{i,j,k} = C_{i,j,k} + R_{i,j,k}$$

gegeben ist.

Wie oben erwähnt, werden die beobachteten Abwicklungsjahre als Folgejahre in Relation zum Anfalljahr  $n + 1$  betrachtet. Während der Schadenindex  $I_i^S$  gemäß Tabelle 4.6 im Jahr

$i, i = 1, \dots, n$ , bekannt ist, muss dieser für  $i > n$  geschätzt werden. Hierzu werde für die Zukunft eine Steigerung des Lohn- und Gehaltsindex in Höhe von 2,5% angenommen, die der mittleren Steigerung des Lohn- und Gehaltsindex im Zeitraum 2014 bis 2016 entspricht. Die Superimposed Inflation wird unverändert mit 2,0% prognostiziert, sodass

$$I_i^S = 104,5$$

für  $i > n$  gelte.

Damit können zum  $j$ -ten Einzelschaden aus dem Anfalljahr  $i$  im Abwicklungsjahr  $k$  die inkrementellen Schadenzahlungen des zugehörigen As-if-Schadens durch

$$\bar{S}_{i,j,k} := \frac{I_{(n+1)+k-1}^S}{I_{i+k-1}^S} \cdot S_{i,j,k}$$

sowie analog die Reservestände durch

$$\bar{R}_{i,j,k} := \frac{I_{(n+1)+k-1}^S}{I_{i+k-1}^S} \cdot R_{i,j,k}$$

ermittelt werden. Für den As-if-Schadenaufwand gilt entsprechend:

$$\left( \sum_{\kappa=1}^k \bar{S}_{i,j,\kappa} \right) + \bar{R}_{i,j,k} = \bar{C}_{i,j,k} + \bar{R}_{i,j,k}$$

Die resultierenden Indexfaktoren

$$\frac{I_{(n+1)+k-1}^S}{I_{i+k-1}^S}$$

sind je Anfalljahr  $i, 1 \leq i \leq n$ , und Abwicklungsjahr  $k, 1 \leq k \leq n + 1 - i$ , der folgenden Tabelle zu entnehmen.

Anfalljahr	Abwicklungsjahr														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2002	1,8477	1,8453	1,8533	1,8733	1,8938	1,9015	1,8968	1,9322	1,9249	1,9211	1,9206	1,9332	1,9308	1,9316	1,9353
2003	1,7659	1,7735	1,7926	1,8123	1,8196	1,8151	1,8490	1,8420	1,8384	1,8379	1,8500	1,8477	1,8484	1,8519	
2004	1,6971	1,7154	1,7343	1,7412	1,7370	1,7694	1,7627	1,7592	1,7588	1,7703	1,7681	1,7688	1,7722		
2005	1,6415	1,6596	1,6663	1,6622	1,6932	1,6867	1,6834	1,6830	1,6941	1,6920	1,6926	1,6959			
2006	1,5881	1,5945	1,5906	1,6203	1,6141	1,6109	1,6106	1,6211	1,6191	1,6197	1,6229				
2007	1,5258	1,5221	1,5505	1,5446	1,5416	1,5412	1,5513	1,5494	1,5500	1,5530					
2008	1,4565	1,4838	1,4781	1,4752	1,4748	1,4845	1,4827	1,4833	1,4861						
2009	1,4199	1,4144	1,4117	1,4113	1,4206	1,4188	1,4194	1,4221							
2010	1,3535	1,3509	1,3506	1,3594	1,3577	1,3583	1,3609								
2011	1,2927	1,2924	1,3009	1,2993	1,2998	1,3023									
2012	1,2367	1,2448	1,2433	1,2438	1,2462										
2013	1,1912	1,1898	1,1902	1,1925											
2014	1,1385	1,1390	1,1412												
2015	1,0899	1,0920													
2016	1,0450														

Tabelle 4.7.: Case Study: Schadenindexfaktoren je Anfall- und Abwicklungsjahr

Um die in Kapitel 4.3.1 erläuterte actuarielle Perspektive einnehmen zu können, werden mit Hilfe der Informationen aus dem Reserve-Aktuariat der CAPITOL die inflationsbereinigten Einzelschäden auf ihren Endschadenstand

$$\hat{X}_{i,j} := \sum_{k=1}^{n+1-i} \bar{S}_{i,j,k} + \sum_{k=n+2-i}^{\omega} \bar{S}_{i,j,k}^{(n)}$$

$$= \overline{C}_{i,j,n+1-i} + \overline{R}_{i,j}^{(n)}$$

abgewickelt, wobei  $\widehat{X}_{i,j}$  den  $j$ -ten Einzelschadens aus dem Anfalljahr  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , mit  $j = 1, \dots, n_i$ , bezeichne.

### 4.3.3. Explorative Datenanalyse

In Anlehnung an [Gum58] wird zunächst ein „erster Blick“ auf die zu analysierenden Daten gerichtet. Mit Hilfe graphischer Methoden erfolgt eine Untersuchung und Begutachtung der Datenbasis mit dem Ziel, die Methoden für das weitere Vorgehen auszuwählen.

Für die auf das Jahr 2017 inflationierten und endabgewickelten Schadenaufwände  $\widehat{X}_{i,j}$  ab 100 TEUR des  $j$ -ten Einzelschadens aus dem Anfalljahr  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $j = 1, \dots, n_i$ , liegen insgesamt  $m := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} 1 = 1.851$  Realisationen  $\widehat{x}_{i,j}$  vor. In Abbildung 4.5 sind die Realisationen  $\widehat{x}_{i,j}$  gegen die Anfalljahre durch den Scatterplot

$$\{(i, \widehat{x}_{i,j}) : i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n_i\}$$

sowie deren empirische Verteilungsfunktion  $F_m$  dargestellt.

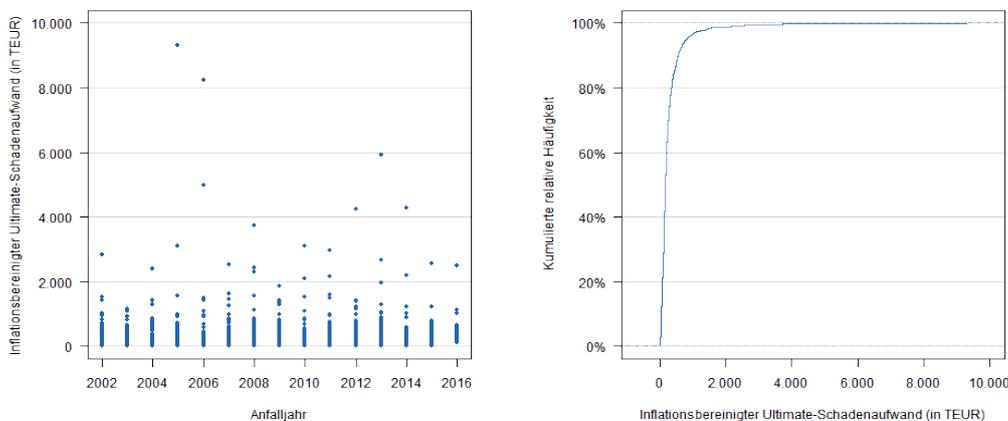


Abbildung 4.5.: Case Study: Scatterplot und empirische Verteilungsfunktion der inflationsbereinigten Ultimate-Schadenaufwände (in TEUR) der Einzelschäden ab 100 TEUR (Quelle: Eigene Darstellung)

Es ist zu beobachten, dass einerseits 87,8% bzw. 96,7% aller betrachteten Einzelschäden einen Ultimate-Schadenstand besitzen, der kleiner als 500 TEUR bzw. 1.000 TEUR ist. Folglich ist der Anteil der Schäden mit einem Ultimate-Schadenstand größer als 1.000 TEUR eher gering. Dennoch zeigt sich andererseits, dass es nicht nur in jedem Anfalljahr Schäden gibt, die 1.000 TEUR überschreiten, sondern dass diese auch Schadenstände von 4.000 TEUR und mehr erreichen können.

Diese Beobachtung wird durch die graphische Darstellung der empirischen Häufigkeitsverteilung der inflationsbereinigten Ultimate-Schadenaufwände ab 100 TEUR in Form eines Histogramms für eine Klassenbreite von 100 TEUR gemäß Abbildung 4.6 bestätigt. Es zeigt sich, dass die empirische Häufigkeitsverteilung unimodal und asymmetrisch ist, insbesondere ist diese deutlich rechtsschief. Der Median der inflationsbereinigten Ultimate-Schadenaufwände der Einzelschäden ab 100 TEUR beträgt 168 TEUR und ist damit kleiner als der empirische Mittelwert in Höhe von 272 TEUR. Neben Median und arithmetischem Mittel sind in Tabelle 4.8 weitere wesentliche Kennzahlen zusammengefasst.

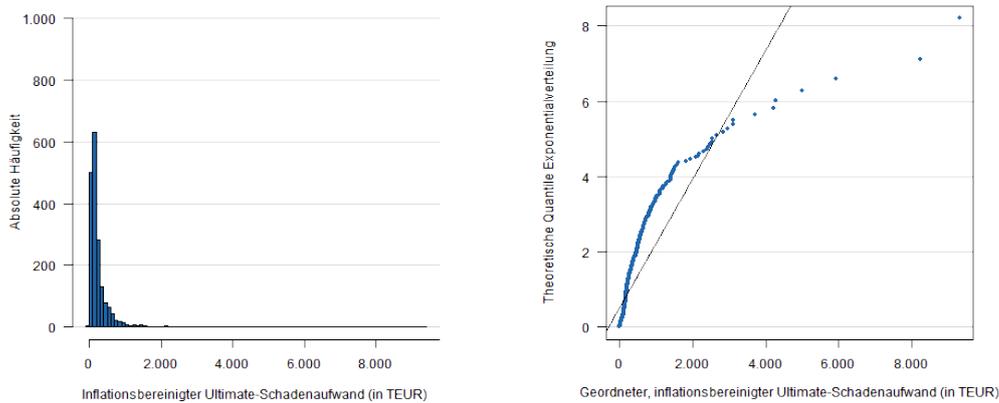


Abbildung 4.6.: Case Study: Histogramm und QQ-Plot der inflationsbereinigten Ultimate-Schadenaufwände (in TEUR) der Einzelschäden ab 100 TEUR (*Quelle: Eigene Darstellung*)

Minimum	25%-Quantil	Median	Mittelwert	75%-Quantil	99%-Perzentil	99,5%-Quantil	99,9%-Quantil	Maximum
0	89	168	272	279	2.165	2.941	6.266	9.308

Tabelle 4.8.: Case Study: Deskriptive Kennzahlen der inflationsbereinigten Ultimate-Schadenaufwände (in TEUR) der Einzelschäden ab 100 TEUR

Weiterhin ist im Quantil-Quantil (QQ)-Plot in Abbildung 4.6 die Quantilfunktion der empirischen Verteilungsfunktion für die inflationsbereinigten Ultimate-Schadenaufwände der Einzelschäden ab 100 TEUR gegen die Quantilfunktion der Exponentialverteilung abgetragen. Die Punktwolke ist mit Bezug auf die Gerade rechtsgekrümmt und damit konkav. Unter Berücksichtigung der Ausführungen in Kapitel 2.6.1 deutet dies darauf hin, dass der Tail der empirischen Verteilung schwerer als der Tail der Exponentialverteilung ist, was wiederum ein Indiz dafür ist, dass die zugrunde liegende Verteilung *heavy-tailed* ist. In diesem Fall kann eine Verteilungsanpassung durch eine subexponentielle Verteilung (vergleiche Abschnitt 2.6.2) erforderlich sein.

Der entsprechende *Mean Excess Plot* gemäß Bemerkung 2.85 zeigt ein nahezu lineares Verhalten, das darauf hinweist, dass die zugrunde liegende Verteilung durch eine (verallgemei-

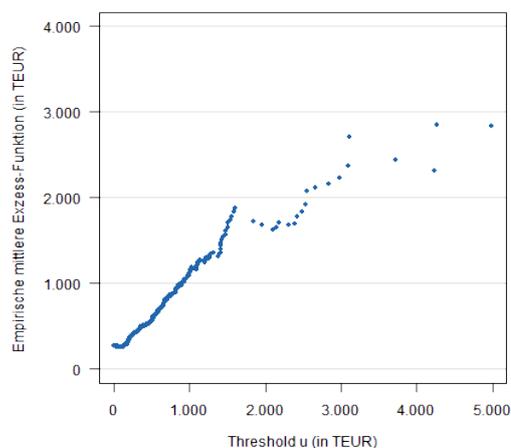


Abbildung 4.7.: Case Study: Mean Excess Plot der inflationsbereinigten Ultimate-Schadenaufwände (in TEUR) der Einzelschäden ab 100 TEUR (*Quelle: Eigene Darstellung*)

nerter) Pareto-Verteilung modelliert werden kann. Folglich wird die Methodik der Threshold-Überschreitungen gemäß Kapitel 2.7.2 relevant.

Unter Berücksichtigung der gewonnenen Erkenntnisse aus der vorangegangenen explorativen Datenanalyse erfolgt im nächsten Schritt die Bestimmung einer geeigneten Großschadengrenze auf Basis der inflationsbereinigten Ultimate-Schadenaufwände der Einzelschäden ab 100 TEUR, um die in Kapitel 4.3.1 erwähnte Unterscheidung von großen Personenschäden und Basisschäden vornehmen zu können.

#### 4.3.4. Wahl der Großschadengrenze

Bei der Ermittlung der Großschadengrenze kann die CAPITOL zwar auf eine intern etablierte Großschadengrenze zurückgreifen, die jedoch im Modellierungsprozess durch Verfahren der statistischen Extremwerttheorie verifiziert bzw. modifiziert werden sollte. Da die CAPITOL ihr KH-Portfolio durch nichtproportionale Rückversicherung in Form einer XL-Deckung pro Risiko schützt, ist in diesem Kontext insbesondere zu beachten, dass die Großschadengrenze unterhalb der aktuellen bzw. geplanten Priorität in Höhe von 1,5 Mio. EUR liegt.

Die theoretische Grundlage für das weitere Vorgehen basiert auf der Extremwerttheorie (siehe Kapitel 2.7), im Besonderen auf der Methodik der Threshold-Überschreitungen gemäß Kapitel 2.7.2. Hier nimmt das Pickands-Balkema-de Haan-Theorem gemäß Satz 2.82 eine zentrale Rolle ein, wonach die Exzess-Verteilungsfunktion

$$F_u(x) = P(X - u \leq x \mid X > u), \quad x \geq 0,$$

für eine Folge von i.i.d. Risiken  $(X_j)_{j \in \mathbb{N}}$ ,  $X_j \sim X$ , mit Verteilungsfunktion  $F_X$  und rechtem Randpunkt  $x_F$  über einem Schwellenwert  $u < x_F$  für steigende Schwellenwerte gleichmäßig gegen die Verteilungsfunktion einer verallgemeinerten Pareto-Verteilung konvergiert. In diesem Fall konvergiert auch die empirische mittlere Exzess-Funktion

$$e_n(u) = \frac{1}{N_u} \cdot \sum_{j=1}^n (X_j - u) \cdot \mathbb{1}_{\{X_j > u\}}, \quad u > 0,$$

wobei

$$N_u = \# \{j : j = 1, \dots, n, X_j > u\}$$

die Anzahl der Überschreitungen von  $u$  durch  $X_j$  bezeichne, gegen die tatsächliche Exzess-Funktion

$$e(u) = E(X - u | X > u) = \frac{\beta + \xi \cdot u}{1 - \xi}, \quad \beta + u \cdot \xi > 0,$$

der verallgemeinerten Pareto-Verteilung mit Formparameter  $\xi$  und Skalenparameter  $\beta > 0$  in Wahrscheinlichkeit gemäß des Gesetzes der großen Zahlen. Die Eigenschaft, dass in diesem Fall die tatsächliche Exzess-Funktion von  $X$  gemäß Satz 2.84 linear im Argument  $u$  ist, motiviert das in Bemerkung 2.85 (ii) erläuterte visuelle Näherungsverfahren, das es erlaubt, einen geeignet großen Threshold  $u$  aus dem *Mean Excess Plot* zu bestimmen. Demnach sollte  $u$  als kleinster Punkt gewählt werden, ab dem die zugehörige empirische mittlere Exzess-Funktion gerade ein lineares Verhalten zeigt.

Während also das Pickands-Balkema-de Haan-Theorem gemäß Satz 2.82 die Approximation der Exzess-Verteilungsfunktion  $F_u$  für hinreichend große  $u$  durch eine verallgemeinerte Pareto-Verteilung rechtfertigt, ist weiterhin in Bezug auf Satz 2.63 und Bemerkung 2.64 die Anzahl an Threshold-Überschreitungen nahezu Poisson-verteilt. Leadbetter zeigt in [Lea91] darüber hinaus, dass im asymptotischen Sinne die Anzahl an Überschreitungen unabhängig von der Höhe der Überschreitungen ist, wie es im Kollektiven Modell gefordert ist.

Zusammenfassend legen die aufgezeigten Erkenntnisse daher das folgende approximative Großschadenmodell nahe:

- (i) Eine geeignete Großschadengrenze  $u$  kann mit Hilfe eines *Mean Excess Plots* gemäß Bemerkung 2.85 (ii) auf Basis der inflationsbereinigten Ultimate-Schadenaufwände  $\widehat{X}_{i,j}$  ermittelt werden, wobei durch  $\widehat{X}_{i,j}$  der  $j$ -te Einzelschaden ab 100 TEUR aus dem Anfalljahr  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$  mit  $j = 1, \dots, n_i$  bezeichnet sei.
- (ii) Diejenigen Schäden, deren jeweiliger inflationsbereinigter Ultimate-Schadenaufwand  $\widehat{X}_{i,j}$  oberhalb des Thresholds  $u$  liegt, werden als Großschäden  $\widehat{X}_{u,i,j}$ ,  $1 \leq i \leq n$  mit  $j = 1, \dots, N_{u,i}$ , identifiziert, andernfalls als Basisschäden.
- (iii) Für die Großschäden  $\widehat{X}_{u,i,j}$  oberhalb der Schranke  $u$  wird ein Kollektives Modell im Sinne von Kapitel 2.4 herangezogen. Hierbei werde
  - a) bezüglich der Gesamtanzahl  $N_u$  der Großschadenfälle bzw. bezüglich der Anzahl  $N_{u,i}$  der Großschadenfälle je Anfalljahr  $i$  eine Poisson-Verteilung gemäß Satz 2.63 und Bemerkung 2.64 unterstellt, d.h.  $N_{u,i} \sim Poi(\lambda)$ ,

- b) die unabhängig von der i.i.d. Folge  $\widehat{X}_{u, \cdot, 1}, \dots, \widehat{X}_{u, \cdot, N_u} \sim \widehat{X}_{u, \cdot}$  der inflationsbereinigten Ultimate-Schadenaufwände sei mit

$$N_u := \sum_{i=1}^n N_{u,i}.$$

Nach dem Pickands-Balkema-de Haan-Theorem gemäß Satz 2.82 genüge  $\widehat{X}_{u, \cdot}$  der verallgemeinerten Pareto-Verteilung mit Parametern  $\xi \neq 0$  und  $\beta > 0$ . Insbesondere eignet sich die GPD entsprechend ihrer Charakteristik als *heavy-tailed* Verteilung gemäß Kapitel 2.6 zur Modellierung großer Personenschäden in KH.

Zunächst erfolgt die Wahl einer geeigneten Großschadengrenze anhand des *Mean Excess Plots* gemäß Bemerkung 2.85. Hierbei ist einerseits zu berücksichtigen, dass bei einer zu niedrig gewählten Großschadengrenze die Asymptotik nicht greift, und andererseits, dass eine zu hoch gewählte Großschadengrenze zu wenigen Datenpunkten und damit zu einem großen Modellfehler hinsichtlich der Verteilungsanpassung führen kann.

Im Fall der CAPITOL zeigt der *Mean Excess Plot*, der in Abbildung 4.8 dargestellt ist und auf den inflationsbereinigten Ultimate-Schadenaufwänden ab 100 TEUR basiert, ein zweigeteiltes Bild: während für Schäden mit einem inflationsbereinigten Ultimate-Schadenaufwand oberhalb einer Grenze  $u_0$  in Höhe von 1 Mio. EUR die empirische mittlere Exzess-Funktion aufgrund der geringen Anzahl ein typisch volatiles Verhalten aufweist, liegt erkennbar für Schäden mit einem inflationsbereinigten Ultimate-Schadenaufwand unterhalb der Grenze  $u_0$  eine andere Verteilungsstruktur vor. Die Gerade oberhalb von  $u_0$  besitzt eine positive Steigung, was wiederum auf eine GPD mit positivem Formparameter  $\xi$  hindeutet.

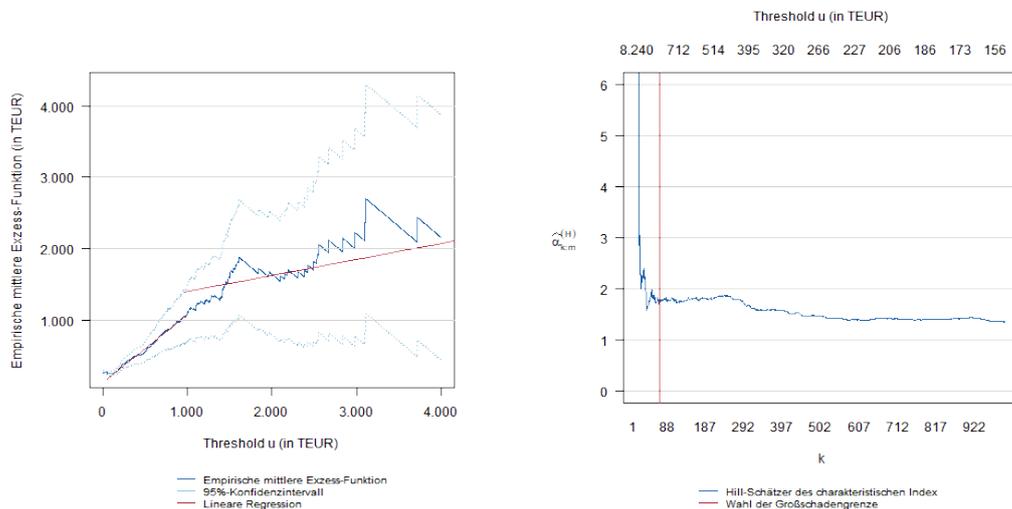


Abbildung 4.8.: Case Study: Mean Excess und Hill-Plot der inflationsbereinigten Ultimate-Schadenaufwände (in TEUR) der Einzelschäden ab 100 TEUR (*Quelle: Eigene Darstellung*)

Auch der zugehörige Hill-Plot, welcher abhängig von einer Anzahl  $k$  der größten KH-Schäden

unter allen  $m$  Schäden ab 100 TEUR den zugehörigen Hill-Schätzer

$$\hat{\alpha}_{k:m}^{(H)} = \left( \frac{1}{k} \cdot \sum_{j=1}^k \left( \ln \hat{X}_{\cdot, j:m} - \ln \hat{X}_{\cdot, k:m} \right) \right)^{-1}$$

gemäß Bemerkung 2.86 für den Formparameter  $\alpha$  der zugehörigen Extremwertverteilung gegenüberstellt, zeigt, dass ab der Grenze in Höhe von 1 Mio. EUR ein stabiles Verhalten einsetzt.

Aufgrund dieser Beobachtungen wird die Großschadengrenze  $u$  auf 1 Mio. EUR festgelegt. Die verbleibenden Schäden werden anschließend ohne Inflationsbereinigung den Basisschäden zugeordnet, da diese als Kollektiv modelliert und dabei mögliche Inflationseffekte über Steigerungen des durchschnittlichen Schadenaufwands abgebildet werden. Eine detaillierte Erläuterung erfolgt im weiteren Verlauf dieser Arbeit.

#### 4.3.5. Modellierung der Großschäden

Zur Modellierung der KH-Großschäden liegen unter Berücksichtigung der zugrunde gelegten Großschadengrenze  $u$  in Höhe von 1 Mio. EUR folgende Einzelschadendaten inflationsbereinigt und auf Ultimate-Basis vor:

Nr.	Anfalljahr	Ultimate (in TEUR)	Nr.	Anfalljahr	Ultimate (in TEUR)	Nr.	Anfalljahr	Ultimate (in TEUR)
1	2002	1.014	26	2008	1.122	51	2013	5.918
2	2002	2.835	27	2008	2.420	52	2013	1.032
3	2002	1.433	28	2008	3.721	53	2014	1.008
4	2002	1.506	29	2009	1.840	54	2014	2.183
5	2003	1.094	30	2009	1.273	55	2014	1.206
6	2003	1.144	31	2009	1.312	56	2014	4.269
7	2003	1.095	32	2009	1.383	57	2015	1.202
8	2004	1.274	33	2009	1.420	58	2015	2.546
9	2004	1.413	34	2010	1.067	59	2016	1.014
10	2004	2.386	35	2010	3.099	60	2016	2.491
11	2005	3.110	36	2010	2.102	61	2016	1.106
12	2005	1.538	37	2010	1.501			
13	2005	9.308	38	2011	2.148			
14	2006	1.481	39	2011	1.474			
15	2006	1.095	40	2011	2.977			
16	2006	4.990	41	2011	1.584			
17	2006	8.239	42	2012	4.229			
18	2006	1.408	43	2012	1.397			
19	2007	1.609	44	2012	1.408			
20	2007	1.257	45	2012	1.212			
21	2007	2.532	46	2012	1.147			
22	2007	1.444	47	2013	1.960			
23	2008	2.305	48	2013	1.282			
24	2008	1.563	49	2013	2.671			
25	2008	1.101	50	2013	1.021			

Tabelle 4.9.: Case Study: Inflationsbereinigte Ultimate-Großschadenaufwände (in TEUR) oberhalb von 1 Mio. EUR

### Parametrisierung der Schadenhöhenverteilung

Wie in Kapitel 2.6 erörtert, eignen sich *heavy-tailed* Verteilungen, um der Risikocharakteristik großer Personenschäden in KH gerecht zu werden. Unter dem angegebenen Modellrahmen wird die GPD gemäß Definition 2.80 zur Modellierung der Schadenhöhenverteilung herangezogen. Dazu werden zunächst die Parameter der unterstellten GPD ermittelt.

Der Vollständigkeit halber sei an dieser Stelle erwähnt, dass der Formparameter  $\xi$  bereits mit Hilfe des *Mean Excess Plots* und des *Hill-Plots* in Abbildung 4.8 angenähert werden kann. Während man im Fall des *Mean Excess Plot* unter Berücksichtigung von Bemerkung 2.85 per linearem Regressionsmodell die Steigung der Regressionsgeraden zu  $0.2218 = \frac{\hat{\xi}_{MRL}}{1 - \hat{\xi}_{MRL}}$  berechnet, d.h.  $\hat{\xi}_{MRL} = 0.2805$ , ist im *Hill-Plot* der charakteristische Index  $\hat{\alpha}_{k:m}^{(H)}$  an der Stelle  $k = 61$  näherungsweise durch 1,8 abzulesen, d.h.  $\hat{\xi}_{Hill} = \frac{1}{\alpha_{k:m}^{(H)}} = 0,5556$ .

Die Parametrisierung der verallgemeinerten Pareto-Verteilung erfolgt schließlich auf Basis der beobachteten Schäden mit Hilfe des Maximum-Likelihood-Ansatzes. Aus der Dichtefunktion der GPD

$$g_{\xi,\beta}(x) = \frac{1}{\beta} \cdot \left(1 + \xi \cdot \frac{x}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}-1},$$

wobei  $\beta > 0$ ,  $x \in [0, \infty)$  für  $\xi \geq 0$  und  $x \in [0, -\frac{\beta}{\xi}]$  für  $\xi < 0$ , ergibt sich die Log-Likelihood-Funktion  $L$  zu:

$$\ln L \left( (\xi, \beta), (\hat{X}_{u,\cdot,1}, \dots, \hat{X}_{u,\cdot,N_u}) \right) = -n \ln(\beta) - \left( \frac{1}{\xi} + 1 \right) \cdot \sum_{j=1}^{N_u} \ln \left( 1 + \frac{\xi}{\beta} \cdot \hat{X}_{u,\cdot,j} \right).$$

Durch numerische Lösung des Maximierungsproblems ergeben sich die Maximum-Likelihood-Schätzer  $\hat{\xi}$ ,  $\hat{\beta}$  für die Exzess-Verteilungsfunktion  $F_{\hat{X}_{u,\cdot}}$ .

Die Anpassung hinsichtlich der vorliegenden  $n_u = 61$  Realisationen  $\hat{x}_{u,\cdot,1}, \dots, \hat{x}_{u,\cdot,61}$  führt zu folgendem Set für Form-, Lage- und Skalenparameter:

$$\hat{\xi}_{61} = 0,4537, \quad \hat{\mu}_{61} = 1.000, \quad \hat{\beta}_{61} = 651,9161.$$

Mit Bezug auf das Anfalljahr  $n + 1$  besitzt die parametrisierte Schadenhöhenverteilung folgende Kennzahlen:

$$E \left( \hat{X}_{u,n+1} \right) = 2.193, \quad Std \left( \hat{X}_{u,n+1} \right) = 3.921, \quad VKo \left( \hat{X}_{u,n+1} \right) = 1,7875.$$

Insbesondere charakterisiert der Formparameter  $\xi$  den Tail der GPD. Daher wird im Folgenden untersucht, wie die Maximum-Likelihood Schätzer  $\hat{\xi}$  des Formparameters  $\xi$  in Abhängigkeit des Thresholds  $u$  variieren. Gemäß Tabelle C.14 werden die Schätzer  $\hat{\xi}$  als Funktion der Anzahl der Überschreitungen  $N_u$  von  $u$  in Abbildung 4.9 dargestellt.

Es wird ersichtlich, dass für steigendes  $u$  der Standardfehler RMSE des Maximum-Likelihood Schätzers  $\hat{\xi}$  wächst, während die Anzahl der Überschreitungen  $n_u$  abnimmt. Mit Bezug auf

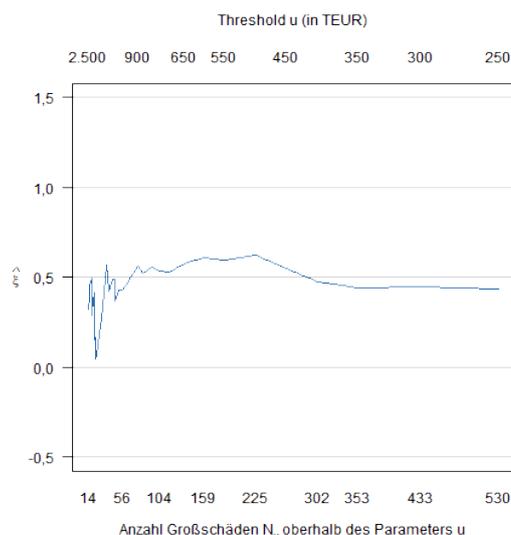


Abbildung 4.9.: Case Study: Maximum-Likelihood-Schätzer des Formparameters der GPD in Abhängigkeit des Thresholds  $u$  (in TEUR) (*Quelle: Eigene Darstellung*)

die gewählte Großschadengrenze in Höhe von 1 Mio. EUR variieren die Schätzer des Formparameters für  $u \in [250, 1.000]$  im Intervall zwischen 0,4370 und 0,6246, wobei die Standardabweichung der  $\hat{\xi}$  gerade 13,44% in Bezug auf  $\hat{\xi}_{61} = 0,4536$  beträgt. Das zugehörige lineare Regressionsmodell zwischen  $\hat{\xi}$  und  $u$  weist eine Steigung von 0,0001 mit einem Achsenabschnitt in Höhe von 0,4889 auf. Interessant ist in diesem Kontext die Beobachtung, dass das arithmetische Mittel der  $\hat{\xi}$  für  $u \in [250, 1.500]$  gerade 0,4852 ist, für  $u \in [750, 1.500]$  gerade 0,4579 sowie für  $u \in [1.000, 1.500]$  gerade 0,4228. Insgesamt erweist sich die Wahl der Großschadengrenze in Höhe von 1 Mio. EUR in Bezug auf die Maximum-Likelihood-Schätzer des Formparameters als stabil.

Im weiteren Verlauf erfolgt die Beurteilung der Modellauswahl und Anpassungsgüte zweistufig; zunächst auf Basis graphischer Methoden und anschließend unter Verwendung eines geeigneten statistischen Tests.

Hierzu wird in Abbildung 4.10 die empirische Verteilungsfunktion der parametrisierten Verteilungsfunktion gegenübergestellt. Hinsichtlich der Modellauswahl bietet die unterstellte GPD visuell eine gute Anpassung an die beobachteten Daten und erscheint grundsätzlich als geeignet.

Als weiterer graphischer Test wird der QQ-Plot betrachtet, der die geordneten Beobachtungen mit den theoretischen Quantilen der angepassten Verteilung in Abbildung 4.10 vergleicht. Die Datenpunkte bewegen sich längs einer Geraden, von der lediglich die zwei größten beobachteten Schäden abweichen. Folglich stimmen empirische und theoretische Quantile annähernd überein. Der QQ-Plot bestätigt den ersten Eindruck, dass die Großschadenhöhen durch die parametrisierte verallgemeinerte Pareto-Verteilung modelliert werden können.

Um letztlich die Anpassungsgüte beurteilen zu können, reichen rein graphische Testverfahren

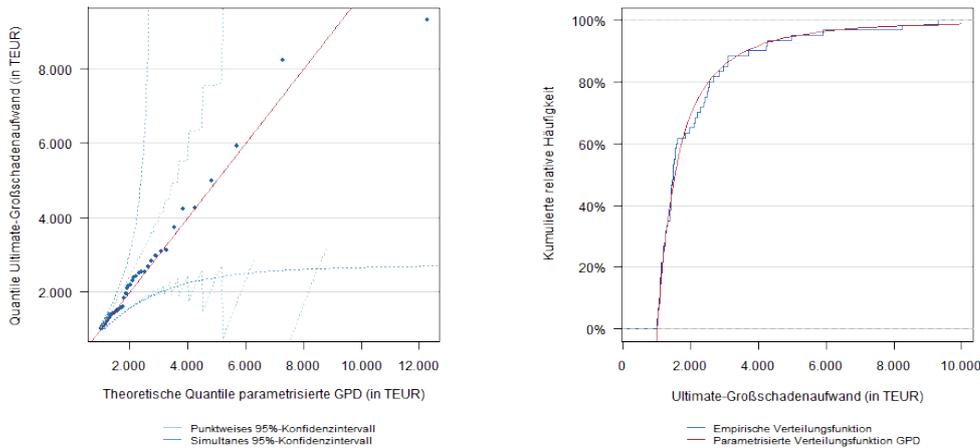


Abbildung 4.10.: Case Study: QQ-Plot sowie empirische und angepasste Verteilungsfunktion der GPD der inflationsbereinigten Ultimate-Großschadenaufwände (in TEUR) (Quelle: Eigene Darstellung)

jedoch nicht aus. Dies leisten nur geeignete statistische Testverfahren, sogenannte *Goodness-of-Fit-Tests*. Im vorliegenden Fall kommen dafür einerseits der *Kolmogorov-Smirnov-Test* und andererseits der *Anderson-Darling-Test* in Frage. Der Kolmogorov-Smirnov-Test verwendet als Teststatistik ausschließlich das Maximum der vertikalen Abstände zwischen empirischer und unterstellter Verteilungsfunktion und eignet sich daher zu einer ganzheitlichen Überprüfung der Anpassungsgüte der Verteilung. Hingegen bezieht der Anderson-Darling-Test alle Beobachtungen in die Teststatistik ein, die ein gewichteter Durchschnitt der quadrierten Differenzen zwischen empirischer und unterstellter Verteilung ist. Zudem erhält der Tail der Verteilung eine stärkere Gewichtung.

Für die CAPITOL kann durch den Kolmogorov-Smirnov-Test zunächst ganzheitlich die Anpassungsgüte der unterstellten GPD untersucht werden und anschließend durch den Anderson-Darling-Test eine detaillierte Bewertung aller Beobachtungen mit Fokus auf die Anpassungsqualität hoher Millionenschäden im Randbereich der Verteilung erfolgen.

Im Rahmen des *Kolmogorov-Smirnov-Tests* ist gemäß [DS86] für i.i.d. Risiken  $X_1, \dots, X_n$  mit Verteilungsfunktion  $F_X$  die Hypothese zu prüfen, ob die unbekannte Verteilungsfunktion  $F_X$  gleich einer vollständig spezifizierten stetigen Verteilungsfunktion  $F_0$  ist,

$$H_0 : F_X(x) = F_0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Mit Hilfe der empirischen Verteilungsfunktion  $F_n$  der  $X_1, \dots, X_n$  wird die Teststatistik

$$D_n := \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - F_0(x)|$$

eingeführt, die den maximalen Abstand zwischen der empirischen und theoretischen Verteilungsfunktion misst. Nach dem Satz von Glivenko-Cantelli gilt  $D_n \rightarrow 0$  *P*-f.s. für  $n \rightarrow \infty$ .

Die Grenzverteilung von  $\sqrt{n} \cdot D_n$  ist durch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\sqrt{n} \cdot D_n \leq x) = K(x)$$

mit

$$K(x) := \left(1 - 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot e^{-2k^2 x^2}\right) \cdot \mathbb{1}_{(0, \infty)}(x)$$

gegeben. Bezeichne  $K_\alpha$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ , das  $(1 - \alpha)$ -Quantil der stetigen Grenzverteilung von  $\sqrt{n} \cdot D_n$  unter der Nullhypothese, so verwirft man  $H_0$  im Einstichprobentest, falls  $D_n > K_\alpha$ .

Für große  $n$  kann der kritische Wert  $K_\alpha$  näherungsweise durch  $K_\alpha = \frac{\sqrt{-0,5 \cdot \ln(\frac{\alpha}{2})}}{\sqrt{n}}$  ermittelt werden.

Wie erwähnt, basiert der *Anderson-Darling-Test* auf einer Teststatistik der Form

$$W_n^2 := n \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (F_n(x) - F_0(x))^2 \cdot \psi(x) dF_0(x)$$

quadrierter Differenzen zwischen empirischer und unterstellter Verteilungsfunktion, die durch die Funktion  $\psi(x)$  gewichtet werden. Im Fall  $\psi(x) = 1$  ist  $W_n^2$  gerade die Teststatistik des sogenannten *Cramér-von Mises-Tests*. Die Teststatistik im Anderson-Darling-Test ist

$$A_n^2 := n \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(F_n(x) - F_0(x))^2}{F_0(x) \cdot (1 - F_0(x))} dF_0(x),$$

wobei durch die Funktion

$$\psi(x) := \frac{1}{F_0(x) \cdot (1 - F_0(x))}$$

gerade die Beobachtungen in den Tails der Verteilung mehr Gewicht erhalten. Für die geordneten Realisationen  $x_{1:n} \leq \dots \leq x_{n:n}$  von  $X_{1:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$  lässt sich  $A_n^2$  gemäß [AD52] als

$$A_n^2 = -n - S$$

notieren mit

$$S := \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (2 \cdot i - 1) \cdot (\ln(F_0(x_{k:n})) + \ln(1 - F_0(x_{n+1-i:n}))).$$

Die Nullhypothese  $H_0$  im Einstichprobentest wird dann verworfen, falls  $A_n^2 > A_\alpha^2$ , wobei  $A_\alpha^2$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ , das  $(1 - \alpha)$ -Quantil der Grenzverteilung von  $A_n^2$  bezeichne, die einzig im Fall der Gleichverteilung bislang in der Literatur bestimmt werden konnte. Im Gegensatz zum Kolmogorov-Smirnov-Test hängen bei einer vollständig spezifizierten stetigen Verteilungsfunktion die kritischen Werte von der getesteten Verteilungsfunktion  $F_0$  ab. Für Tests auf Normal-, Exponential-, Weibull-, Gamma- und Logistischer Verteilung sind die kritischen Werte etwa in [Ste74] und [DS86] tabelliert. Im Fall der GPD sei auf [CS01] verwiesen.

Sowohl der Kolmogorov-Smirnov-Test als auch der Anderson-Darling-Test setzen eine vollständig spezifizierte Verteilungsfunktion mit bekannten Parametern voraus. Für die CAPITOL sind die Parameter jedoch auf Basis einer Maximum-Likelihood-Methode aus den

Beobachtungen geschätzt, sodass basierend auf dem Ansatz von Lilliefors, vergleiche [Lil67] und [Lil69], daher die Verteilungen der Teststatistiken per Monte-Carlo-Simulation ermittelt werden. Die jeweiligen kritischen Werte werden dann in Abhängigkeit des Signifikanzniveaus bestimmt und sind im Vergleich zum Fall bekannter Parameter kleiner.

Unter der Nullhypothese  $H_0$ , dass die inflationsbereinigten Ultimate-Großschadenaufwände der CAPITOL aus der parametrisierten GPD stammen, wird diese durch den *Kolmogorov-Smirnov-Test* bei einem Signifikanzniveau von  $\alpha = 5\%$  wegen  $D_{61} = 0,0818 < 0,1103 = K_\alpha^*$  (p-Wert: 0,3555) nicht verworfen. Auch im *Anderson-Darling-Test* wird die Nullhypothese wegen  $A_{61}^2 = 0,3094 < 0,8415 = A_\alpha^{2,*}$  (p-Wert: 0,6173) bei einem Signifikanzniveau von  $\alpha = 5\%$  nicht abgelehnt. Zum Vergleich, bei vollständig spezifizierter Verteilungsfunktion betragen die entsprechenden kritischen Wert  $K_\alpha = 0,1739$  (p-Wert: 0,7779) bzw.  $A_\alpha^2 = 1,9148$  (p-Wert: 0,9307).

Die qualitative und quantitative Überprüfung der Anpassungsgüte lässt den Schluss zu, dass eine hinreichend große Wahrscheinlichkeit dafür besteht, dass die angepasste parametrische Verteilung die beobachtete Stichprobe erzeugt hat. Folglich erweist sich der vorgegebene Modellrahmen als plausibel.

Durch die Wahl der GPD zur Modellierung der Einzelschadenshöhen sind beliebig hohe Schadenshöhen im Modell möglich. Die CAPITOL hat nach Annahme (A.4) jedoch ausschließlich Verträge mit einer Deckungssumme in Höhe von  $L := 100$  Mio. EUR im Portefeuille. Selbst wenn die Wahrscheinlichkeit  $P(\widehat{X}_{u,\cdot} > L) = 0,0086\%$  gering ist, besteht die Gefahr, die Wirkung der Großschäden  $\widehat{X}_{u,\cdot}$  deutlich zu überschätzen. Daher werden im Simulationsmodell gemäß [DGVFM08] auch nur Großschäden bis zur maximalen Versicherungssumme simuliert, indem diese durch Einbeziehung der Minimum-Funktion gekappt werden:

$$\widehat{X}_{u,\cdot}^{(L)} := \min \left\{ \widehat{X}_{u,\cdot}, L \right\}.$$

Während die gewählte Kappung nur marginale Auswirkung auf den Erwartungswert besitzt, werden insbesondere Schwankung und damit auch der Variationskoeffizient reduziert. Mit Bezug auf das Anfalljahr  $n+1$  besitzt die Schadenhöhenverteilung dann folgende Kennzahlen:

$$E\left(\widehat{X}_{u,n+1}^{(L)}\right) = 2.186, \text{ Std}\left(\widehat{X}_{u,n+1}^{(L)}\right) = 2.632, \text{ VKo}\left(\widehat{X}_{u,n+1}^{(L)}\right) = 1,2040.$$

### Parametrisierung der Schadenanzahlverteilung

Weiterhin ist für die CAPITOL zur Modellierung der Schadenanzahlverteilung ein geeigneter Schätzer  $\widehat{N}_{u,i}$  für die Anzahl  $N_{u,i}$  der Überschreitungen des Thresholds  $u$  durch  $\widehat{X}_{u,i,j}$  im Anfalljahr  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$  mit  $j = 1, \dots, N_{u,i}$ , gesucht, um die in Kapitel 4.3.1 erläuterte aktuarielle Perspektive in Bezug auf die Ultimate-Sichtweise einnehmen zu können. Hierzu liegen Realisationen der  $N_{u,i}$  in Form eines Abwicklungsdreiecks der Schadenanzahlen für die Großschäden oberhalb von 1 Mio. EUR gemäß Tabelle 4.10 vor.

$N_{u,i,k}$  bezeichne hierbei die Schadenanzahl der Großschäden im Anfalljahr  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , nach  $k$ ,  $1 \leq k \leq n+1-i$ , Abwicklungsjahren oberhalb der Schwelle  $u$ . Analog zu den Einzelschadenshöhen werden mit Hilfe des Reserve-Aktuariats der CAPITOL Schätzer  $\widehat{\varphi}_1, \dots, \widehat{\varphi}_\omega$

Anfalljahr	Abwicklungsjahr														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2002	1	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	4
2003	0	1	1	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	
2004	0	1	1	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3		
2005	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3			
2006	2	4	4	4	4	4	4	4	4	5	5				
2007	2	2	4	4	4	4	4	4	4	4					
2008	2	4	5	5	6	6	6	6	6	6					
2009	3	4	3	3	4	4	4	5							
2010	3	3	3	4	4	4	4								
2011	1	1	3	4	4	4									
2012	2	4	5	5	5										
2013	2	5	5	6											
2014	3	3	4												
2015	2	2													
2016	3														

Tabelle 4.10.: Case Study: KH-Dreieck der Schadenanzahlen der Großschäden oberhalb von 1 Mio. EUR

für ein Abwicklungsmuster  $\varphi_1, \dots, \varphi_\omega$  für Faktoren abgeleitet (vergleiche [Mac02]), um die Großschadenanzahlen  $N_{u,i,k}$  auf ihren Ultimate-Stand

$$\widehat{N}_{u,i} := \left[ \frac{v_{n+1}}{v_i} \cdot N_{u,i,n+1-i} \cdot \prod_{\kappa=n+2-i}^{\omega} \widehat{\varphi}_\kappa + 0,5 \right]$$

abzuwickeln, wobei  $\omega$  den Endabwicklungszeitpunkt kennzeichne. Durch den Faktor  $\frac{v_{n+1}}{v_i}$  erfolgt einerseits eine Bereinigung der Ultimates für die Großschadenanzahlen um das Exposure  $v_i$  im Anfalljahr  $i$  und andererseits eine Volumengewichtung in Bezug zu dem im Anfalljahr  $n+1$  erwarteten Exposure  $v_{n+1}$  in Form der Anzahl der Jahreseinheiten.

Unter Berücksichtigung der gewählten Großschadengrenze  $u$  in Höhe von 1 Mio. EUR liegen folgende Realisationen  $\widehat{n}_{u,i}$  für die Volumen-gewichteten Ultimate-Großschadenanzahlen  $\widehat{N}_{u,i}$  je Anfalljahr  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , vor:

Anfalljahr	Originaldaten															
	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	
$\widehat{n}_{u,i}$	5	3	3	3	5	4	6	5	4	4	5	6	4	2	5	

Tabelle 4.11.: Case Study: Großschadenanzahl (Exposure-gewichteter Ultimate-Stand) oberhalb von 1 Mio. EUR

Die beobachteten Schadenanzahlen  $\widehat{n}_{u,2002}, \dots, \widehat{n}_{u,2016}$  bzw.  $\widehat{n}_{u,1}, \dots, \widehat{n}_{u,n}$  aus Ultimate-Sicht unterliegen keinem deutlichen Trend, weil die zugehörige Regressionsgerade lediglich eine Steigung in Höhe von 0,0324 hat. Letztere wird im Folgenden deshalb nicht weiter berücksichtigt.

Für den empirischen Mittelwert und die empirische Varianz gilt dann:

$$\bar{\widehat{n}}_{u,\cdot} := \frac{1}{15} \cdot \sum_{i=2002}^{2016} \widehat{n}_{u,i} = 4,2667, \quad \sigma_{\widehat{n}_{u,\cdot}}^2 := \frac{1}{15} \sum_{i=2002}^{2016} \left( \widehat{n}_{u,i} - \bar{\widehat{n}}_{u,\cdot} \right)^2 = 1,3524.$$

Insbesondere ist  $\widehat{n}_{u,\cdot} > \sigma_{\widehat{n}_{u,\cdot}}^2$ , sodass der empirische Mittelwert als Realisierung des Stichprobenmittels und die empirische Varianz als Realisierung der Stichprobenvarianz die Wahl der Binomialverteilung aus der Panjer-Klasse als Schadenanzahlverteilung rechtfertigt. Das Stichprobenmittel und die Stichprobenvarianz sind dabei wiederum Schätzfunktionen für den unbekanntem Erwartungswert bzw. für die unbekannte Varianz. Dem Vorsichtsprinzip folgend wird im Kontext des Großschadenmodells dennoch zunächst die Poisson-Verteilung mit Parameter  $\lambda$  als Verteilung für die Schadenanzahl herangezogen. Da Erwartungswert und Varianz der Poisson-Verteilung übereinstimmen, wird damit die Streuung zufälliger Schadenanzahlen vergrößert, sodass tendenziell auch mehr Großschäden als bislang betrachtet denkbar sind und grundsätzlich vom Modell nicht ausgeschlossen werden (siehe Beispiel 2.1).

Für den Beobachtungsvektor  $\widehat{N}_{u,\cdot} := (\widehat{N}_{u,1}, \dots, \widehat{N}_{u,n})^T$  von  $n$  unabhängigen und identisch Poisson-verteilten Schadenanzahlen  $\widehat{N}_{u,i}$  sind Maximum-Likelihood-Schätzer und Momentenschätzer für den Parameter  $\lambda$  identisch und berechnen sich als Stichprobenmittel

$$\widehat{\lambda}_n := \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \widehat{N}_{u,i}$$

zu

$$\widehat{\lambda}_{15} = 4,2667.$$

In Abbildung 4.11 sind die Volumen-gewichteten, endabgewickelten Großschadenanzahlen oberhalb des Thresholds  $u$  sowie die Prognose für das folgende Anfalljahr  $n+1$  dargestellt.

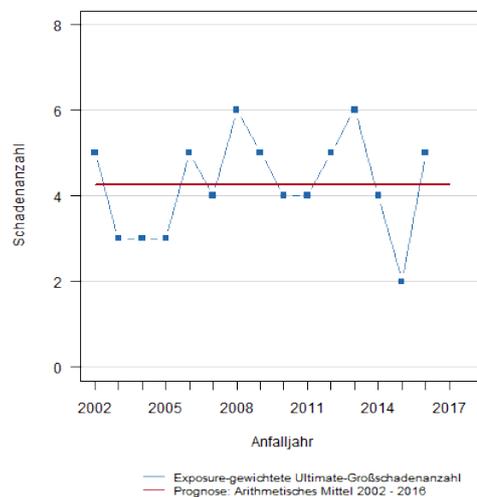


Abbildung 4.11.: Case Study: Großschadenanzahl (Exposure-gewichteter Ultimate-Stand) oberhalb von 1 Mio. EUR (Quelle: Eigene Darstellung)

Die Kennzahlen der angepassten Poisson-Verteilung lauten:

$$E(\widehat{N}_{u,n+1}) = 4,2667, \text{ Std}(\widehat{N}_{u,n+1}) = 2,0656, \text{ VKo}(\widehat{N}_{u,n+1}) = 0,4841.$$

Abschließend werde noch die Nullhypothese  $H_0$  untersucht, ob die beobachteten Großschadenanzahlen  $\widehat{N}_{u,1}, \dots, \widehat{N}_{u,n}$  aus einer Poisson-Verteilung mit Parameter  $\widehat{\lambda}_n$  stammen. Hierzu werde gemäß [DS86] der Träger  $T_{\widehat{N}_{u,\cdot}}$  von  $P^{\widehat{N}_{u,\cdot}}$  in  $k$  disjunkte Klassen  $C_j, 1 \leq j \leq k$ , eingeteilt.

$$O_j := \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{\widehat{N}_{u,\cdot} \in C_j\}}$$

bezeichne die absolute Häufigkeit, mit der Realisationen von  $\widehat{N}_{u,\cdot}$  in die  $j$ -te Klasse fallen. Die unter der Nullhypothese zu erwartende absolute Klassenhäufigkeit sei durch

$$E_j := n \cdot P\left(\widehat{N}_{u,\cdot} \in C_j \mid H_0\right)$$

bezeichnet. Dann ist bei kleinen Stichproben die gegenüber der  $\chi^2$ -Teststatistik

$$\chi^2 := \sum_{j=1}^k \frac{(O_j - E_j)^2}{E_j}$$

robustere Teststatistik

$$G := 2 \cdot \sum_{j=1}^k O_j \cdot \log\left(\frac{O_j}{E_j}\right)$$

des  $G$ -Tests vorzuziehen. Sowohl die Zufallsvariable  $\chi^2$  als auch die Zufallsvariable  $G$  sind asymptotisch  $\chi^2$ -verteilt mit  $k - 1$  Freiheitsgraden, wobei diese noch um die Anzahl der geschätzten Parameter reduziert werden. Für die CAPITOL erhält man:

$j$	$C_j$	$O_j$	$E_j$	$O_j \cdot \log\left(\frac{O_j}{E_j}\right)$
1	{0, 1, 2}	1	3,0236	-1,1064
2	{3}	3	2,7241	0,2895
3	{4}	4	2,9057	1,2785
4	{5}	5	2,4795	3,5069
5	{6, 7, ...}	2	3,8672	-1,3188

Tabelle 4.12.: Case Study: G-Test für Großschadenanzahl (Exposure-gewichteter Ultimate-Standard) oberhalb von 1 Mio. EUR

Wegen  $G = 5,2994 < 7,81 = \chi_{1-\alpha,3}^2$  (p-Wert: 0,1511) wird die Nullhypothese  $H_0$  mit einer Sicherheit von  $1 - \alpha = 95\%$  nicht fälschlicherweise verworfen, sodass sich die Modellannahme hinsichtlich der Großschadenanzahlen als geeignet erweist.

### Gesamtschaden

Nach der Wald'schen Gleichung gemäß Satz 2.38 besitzt das Großschadenmodell in Bezug auf das nächste Anfalljahr  $n + 1$  folgende Kennzahlen:

$$E\left(\widehat{S}_{u,n+1}^{(n,L)}\right) = 9.328, \text{ Std}\left(\widehat{S}_{u,n+1}^{(n,L)}\right) = 7.068, \text{ VKo}\left(\widehat{S}_{u,n+1}^{(n,L)}\right) = 0,7577.$$

Somit erwartet die CAPITOL im Anfalljahr 2017 einen Gesamtschaden in Höhe von 9.328 TEUR aus Großschäden vor Berücksichtigung der relevanten Rückversicherungsstruktur.

### Vorhersagerisiko: Prozess- und Parameterrisiko

Der folgende Abschnitt bezieht sich auf das Zusammenspiel von Prozess- und Parameterrisiko mit Blick auf das Vorhersagerisiko. Wie schon in Kapitel 2.5 in Anlehnung an [Die07a] bzw. [Die07b] erläutert, wird hinsichtlich der Modellierung der Großschäden bisher das Prozessrisiko als wesentlicher Bestandteil des Vorhersagerisikos berücksichtigt. Die Auswahl geeigneter Verteilungen und adäquater Parameter bezüglich Großschadenshöhe und -anzahl basiert in diesem Zusammenhang im Wesentlichen auf der Analyse und einer geeigneten Fortschreibung historischer Daten. Das dabei entstehende Parameterrisiko ist bisher nicht einbezogen. Um die Vorhersageverteilung jedoch vollständig abzubilden, ist die bisherige Modellierung um eben dieses Parameterrisiko zu ergänzen.

Für die CAPITOL werden dafür in einem ersten Schritt zunächst für die Großschadenanzahlen die Prozess- und Parameterfehler, die das Prozess- und Parameterrisiko charakterisieren, analytisch ermittelt.

Als Prozessverteilung der Großschadenanzahl  $N_{u,i}$  der Überschreitungen des Thresholds  $u$  durch  $\hat{X}_{u,i,j}$  im Anfalljahr  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$  mit  $j = 1, \dots, N_{u,i}$ , wird eine Poisson-Verteilung mit Zähldichte

$$p_{N_{u,i}}(k) := P^{N_{u,i}}(k) = P(N_{u,i} = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

herangezogen. Für den Beobachtungsvektor  $\widehat{\mathbf{N}}_{u,\cdot} = (\widehat{N}_{u,1}, \dots, \widehat{N}_{u,n})^T$  von  $n$  unabhängigen und identisch Poisson-verteilten Schadenanzahlen  $\widehat{N}_{u,i}$  berechnet sich wie bereits erwähnt der Maximum-Likelihood-Schätzer für den Parameter  $\lambda$  als Stichprobenmittel

$$\widehat{\lambda}_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \widehat{N}_{u,i}.$$

zu

$$\widehat{\lambda}_{15} = 4,2667.$$

Das Prozessrisiko im Anfalljahr  $n+1$  ist dann durch

$$\text{Var}(\widehat{N}_{u,n+1}) = \lambda$$

gegeben. Ersetzt man den unbekannt Parameter  $\lambda$  durch den geschätzten Parameter  $\widehat{\lambda}_n$ , so erhält man den Prozessfehler als sogenannten *Plug-In-Schätzer*  $\sqrt{\widehat{\text{Var}}(\widehat{N}_{u,n+1})}$ :

$$r.e.(\widehat{n}_{u,n+1}) = \sqrt{\widehat{\text{Var}}(\widehat{N}_{u,n+1})} = \sqrt{\widehat{\lambda}_{15}} = 2,0656.$$

Für die Varianz des Schätzers gilt:

$$\text{Var}(\widehat{\lambda}_n) = \text{Var}\left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \widehat{N}_{u,i}\right) = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^n \text{Var}(\widehat{N}_{u,i}) = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \lambda = \frac{\lambda}{n}.$$

Unter erneuter Anwendung des *Plug-In-Prinzips* erhält man den Schätzfehler  $\widehat{Var}(\widehat{\lambda}_n)$ :

$$e.e.(\widehat{\lambda}_{15}) = \sqrt{\widehat{Var}(\widehat{\lambda}_{15})} = \sqrt{\frac{\widehat{\lambda}_{15}}{15}} = \sqrt{\frac{4,2667}{15}} = 0,5333.$$

Aufgrund der Erwartungstreue des Schätzers erhält man für den Vorhersagefehler:

$$RMSE(\widehat{n}_{u,n+1}) = \sqrt{\widehat{Var}(\widehat{N}_{u,n+1}) + \widehat{Var}(\widehat{\lambda}_{15})} = \sqrt{\widehat{\lambda}_{15} + \frac{\widehat{\lambda}_{15}}{15}} = 2,1333.$$

Um das Parameterrisiko und folglich das Vorhersagerisiko vollständig abzubilden, wird jedoch nicht nur eine Angabe über die Höhe des Prozess- und Schätzfehlers benötigt, sondern auch die Vorhersageverteilung, die sich als Mischung aus Prozess- und Parameterverteilung ergibt. Dabei beschreibt die zugehörige Verteilung der  $\widehat{\lambda}_n$  unter den beobachteten Daten das noch abzubildende Parameterrisiko, das mit Hilfe des sogenannten *Bootstrapping*-Verfahrens – initial durch Efron in [Efr79] eingeführt – ermittelt werden kann.

Gemäß [Hal92] und [ET93] handelt es sich im Allgemeinen beim Bootstrapping um eine Methode zur Schätzung der Verteilung eines Schätzers oder einer Teststatistik durch sogenanntes *Resampling* der Daten oder eines Modells, das bereits aus den Daten geschätzt wird. Unter der Annahme, dass die beobachteten Daten unabhängig und identisch verteilt sind, basiert das Bootstrap-Verfahren auf der Idee, dass die vorliegende Realisation bereits das beste Indiz für die Bestimmung der „wahren“ Verteilung ist. Gegenüber anderen Verfahren zur Modellierung des Parameterrisikos, wie etwa dem asymptotischen Normalverteilungsansatz oder des Bayes'schen Ansatzes, besitzt das Bootstrap-Verfahren den Vorteil, dass es für alle Verteilungen und Schätzer und somit auf jedes Schadenmodell anwendbar ist. Das Basis-Prinzip des Bootstrapping lässt sich wie folgt skizzieren:

In Bezug auf den Abschnitt „Mathematische Statistik“ in Kapitel 2.5 sei  $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)^T$  ein  $\mathbb{R}^n$ -wertiger Zufallsvektor von stochastisch unabhängigen  $Y_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , mit gemeinsamer Verteilung  $P^{\mathbf{Y}}$ , die aus einer bekannten (parametrischen) Verteilungsfamilie  $\mathcal{P}$  stammt und bis auf einen unbekanntem Parameter  $\vartheta \in \Theta$  vollständig spezifiziert ist, wobei  $\Theta \subseteq \mathbb{R}^d$ ,  $d \in \mathbb{N}$ , den Parameterraum bezeichne. Um die Güteeigenschaft eines Schätzers  $\widehat{\vartheta}$  für  $\vartheta$  beurteilen zu können, kann etwa der Mean Squared Error herangezogen werden, der jedoch von  $\widehat{\vartheta} - \vartheta$  abhängt und folglich unbekannt ist. Bootstrap-Methoden stellen in diesem Fall einen Ansatz bereit, um die Verteilung von  $\widehat{\vartheta}$  zu schätzen.

Hierzu wird zunächst ein Schätzer  $\widehat{P}^{\mathbf{Y}}$  für  $P^{\mathbf{Y}}$  konstruiert. Anschließend werden Zufallsvariablen  $\mathbf{Y}^* = (Y_1^*, \dots, Y_n^*)^T$  aus  $\widehat{P}^{\mathbf{Y}}$  generiert. Die Beziehung zwischen  $\mathbf{Y}$  und  $P^{\mathbf{Y}}$  wird dann durch  $\mathbf{Y}^*$  und  $\widehat{P}^{\mathbf{Y}}$  reproduziert. Wendet man dann das Parameterschätzverfahren  $\mathcal{T}$ , zum Beispiel die Momentenmethode, die Maximum-Likelihood-Methode oder die Kleinste-Quadrate-Methode, auf  $\mathbf{Y}^*$  an, so erhält man eine entsprechende Bootstrap-Version  $\widehat{\vartheta}^*$  von  $\widehat{\vartheta}$ . Entsprechend definiert man  $\vartheta^*$ , indem  $P^{\mathbf{Y}}$  in  $\vartheta = \vartheta(P^{\mathbf{Y}})$  durch  $\widehat{P}^{\mathbf{Y}}$  ersetzt wird. Die bedingte Verteilung von  $\widehat{\vartheta}^* - \vartheta^*$  gegeben  $\mathbf{Y}$  liefert dann einen Bootstrap-Schätzer für die entsprechende Verteilung von  $\widehat{\vartheta} - \vartheta$ .

Die numerische Berechnung erfolgt hierbei unter Zuhilfenahme der Monte-Carlo-Simulation. Dabei werde zunächst zufällig eine hinreichend große Anzahl  $M_{Sim}$  von Realisationen  $\mathbf{y}_n^{*,(1)}, \dots, \mathbf{y}_n^{*,(M_{Sim})}$  der  $\mathbf{Y}^* = (Y_1^*, \dots, Y_n^*)^T$  erzeugt. Das Anwenden des Parameterschätzverfahrens  $\mathcal{T}$  auf jeden Pseudodatensatz  $\mathbf{y}_n^{*,(M)}$ ,  $1 \leq M \leq M_{Sim}$ , liefert in jedem Simulationspfad  $1 \leq M \leq M_{Sim}$  einen Schätzer  $\hat{\boldsymbol{\vartheta}}^{*,(M)}$  sowie insgesamt aus  $(\hat{\boldsymbol{\vartheta}}^{*,(1)}, \dots, \hat{\boldsymbol{\vartheta}}^{*,(M_{Sim})})$  die „simulierte“ Bootstrap-Verteilung des Schätzers.

An dieser Stelle lässt sich zwischen *parametrischem* und *nicht-parametrischem Bootstrap* differenzieren:

- Der *nicht-parametrische Bootstrap* basiert auf dem aus der Wahrscheinlichkeitstheorie im Kontext von Urnenmodellen bekannten „Ziehen mit Zurücklegen“ aus den Originaldaten.
- Beim *parametrischen Bootstrap* werden die neuen Stichproben aus der parametrischen Prozessverteilung  $P_{\hat{\boldsymbol{\vartheta}}}$  mit dem eingangs geschätzten Parametervektor  $\hat{\boldsymbol{\vartheta}}$  gezogen.

Um schließlich den Vorhersagefehler zu berechnen, wird in einem zweiten Schritt für jeden Simulationspfad  $M$ ,  $1 \leq M \leq M_{Sim}$ , eine Zufallszahl  $\hat{y}_{n+1}^{*,(M)}$  erzeugt. Dies geschieht mittels der zur Modellierung des Prozessfehlers verwendeten Verteilung mit Parameter  $\hat{\boldsymbol{\vartheta}}^{*,(M)}$ .

Im Rahmen der Großschadenmodellierung wird auf den parametrischen Bootstrap zurückgegriffen, da durch dessen Verwendung insbesondere Werte realisiert werden können, die im Originaldatensatz nicht enthalten sind. Insbesondere im Fall der Poisson-verteilten Großschadenfälle wird aus Gründen der Kohärenz mit der später folgenden Schätzung der Schadenhöhen- und Gesamtschadenverteilung für die Großschäden ebenfalls das parametrische Bootstrapping-Verfahren herangezogen.

Für die CAPITOL werden nun zur Modellierung der Großschadenanzahl  $\hat{N}_{u,i}$  per parametrischem Bootstrap unter Verwendung der Poisson-Verteilung mit Parameter  $\hat{\lambda}_{15} = 4,2667$  als Prozessverteilung folgende Pseudo-Datensätze

$$\hat{\mathbf{n}}_{u,\cdot}^{*,(1)}, \dots, \hat{\mathbf{n}}_{u,\cdot}^{*,(M_{Sim})}$$

mit  $\hat{\mathbf{n}}_{u,\cdot}^{*,(M)} := (\hat{n}_{u,1}^{*,(M)}, \dots, \hat{n}_{u,n}^{*,(M)})$ ,  $1 \leq M \leq M_{Sim}$ , in  $M_{Sim} = 100.000$  Wiederholungen erzeugt:

M	Pseudo-Daten											ML-Schätzer	Prognose
	$\hat{n}_{u,1}^{*,(M)}$	$\hat{n}_{u,2}^{*,(M)}$	$\hat{n}_{u,3}^{*,(M)}$	$\hat{n}_{u,4}^{*,(M)}$	$\hat{n}_{u,5}^{*,(M)}$	$\dots$	$\hat{n}_{u,11}^{*,(M)}$	$\hat{n}_{u,12}^{*,(M)}$	$\hat{n}_{u,13}^{*,(M)}$	$\hat{n}_{u,14}^{*,(M)}$	$\hat{n}_{u,15}^{*,(M)}$	$\hat{\lambda}_{15}^{*,(M)}$	$\hat{n}_{u,n+1}^{*,(M)}$
1	3	6	5	4	2	...	8	7	4	4	4	3,9333	2
2	3	9	2	0	8	...	5	5	3	4	8	4,3333	3
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
50.000	4	3	6	6	3	...	5	5	3	4	6	4,2667	4
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
99.999	4	3	6	9	5	...	5	3	7	4	3	4,6000	4
100.000	4	8	4	5	11	...	3	7	6	3	2	5,1333	5

Tabelle 4.13.: Case Study: Empirische Bootstrap-Verteilung des Parameter- und Vorhersagerisikos für die Großschadenanzahlen

Der empirische Mittelwert

$$\widehat{\lambda}_n^{*,(M)} := \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \widehat{n}_{u,i}^{*,(M)}$$

liefert in jedem Simulationspfad  $1 \leq M \leq M_{Sim}$  einerseits eine Schätzung für den Poisson-Parameter  $\lambda$ , andererseits die empirische Bootstrap-Verteilung und damit einen Schätzer für die Parameterverteilung.

Für  $\widehat{\lambda}_{15}^* = \left( \widehat{\lambda}_{15}^{*,(1)}, \dots, \widehat{\lambda}_{15}^{*,(M_{Sim})} \right)^T$  ist der Schätzfehler

$$e.e. \left( \widehat{\lambda}_{15}^* \right) = \sqrt{Var \left( \widehat{\lambda}_{15}^* \right)} = 0,5346,$$

durch die Standardabweichung der  $\widehat{\lambda}_{15}^{*,(M)}$ ,  $1 \leq M \leq M_{Sim}$ , gegeben und liegt sehr nahe an der analytischen Berechnung des Schätzfehlers  $e.e. \left( \widehat{\lambda}_{15} \right) = 0,5333$ . Abbildung 4.12 zeigt die per parametrischen Bootstrap erzeugte Verteilung des Poisson-Parameters  $\widehat{\lambda}_{15}^*$ . Die simulierten Werte schwanken zwischen 2,0667 und 6,7333.

Um zu einer konkreten Prognose der Großschadenanzahlen für das folgende Anfalljahr  $n+1$  zu kommen, wird im nächsten Schritt wiederum die für das Prozessrisiko relevante Poisson-Verteilung als Prozessverteilung herangezogen. Dabei wird je Simulationspfad  $1 \leq M \leq M_{Sim}$  eine Zufallszahl  $\widehat{n}_{u,n+1}^{*,(M)}$  gemäß Poisson-Verteilung mit dem Parameter  $\widehat{\lambda}_n^{*,(M)}$  simuliert. In Tabelle 4.13 sind die entsprechenden Prognosen dargestellt.

Die Standardabweichung der  $\widehat{n}_{u,n+1}^{*,(M)}$ ,  $1 \leq M \leq M_{Sim}$ , liefert für

$$\widehat{\mathbf{n}}_{u,n+1}^* := \left( \widehat{n}_{u,n+1}^{*,(1)}, \dots, \widehat{n}_{u,n+1}^{*,(M_{Sim})} \right)$$

den Vorhersagefehler

$$RMSE \left( \widehat{\mathbf{n}}_{u,n+1}^* \right) = \sqrt{Var \left( \widehat{\mathbf{n}}_{u,n+1}^* \right)} = 2,2653,$$

der größer als die analytische Berechnung des Schätzfehlers  $RMSE \left( \widehat{n}_{u,i} \right) = 2,1333$  ist. Die folgende Tabelle fasst die wesentlichen deskriptiven Kennzahlen des Prozess-, Parameter- und Vorhersagerisikos für die Großschadenanzahlen zusammen:

Deskriptive Kennzahl	Prozessrisiko	Parameterrisiko	Vorhersagerisiko
	$\tilde{N}_{u,n+1}$	$\tilde{\lambda}_{15}^*$	$\tilde{d}_{u,n+1}^*$
Mittelwert	4,2667	4,2660	4,3055
Varianz	4,2667	0,2858	5,1314
Standardabweichung	2,0656	0,5346	2,2653
Variationskoeffizient	0,4841	0,1253	0,5261
Minimum	0	2,0667	0
Maximum		6,7333	17
<b>Perzentile</b>			
0,50%	0	2,9333	0
1,00%	0	3,0667	0
5,00%	1	3,4000	1
10,00%	2	3,6000	2
20,00%	2	3,8000	2
30,00%	3	4,0000	3
40,00%	4	4,1333	4
50,00%	4	4,2667	4
60,00%	5	4,4000	5
70,00%	5	4,5333	5
80,00%	6	4,7333	6
90,00%	7	4,9333	7
95,00%	8	5,1333	8
99,00%	10	5,5333	10
99,50%	10	5,7333	11

Tabelle 4.14.: Case Study: Deskriptive Kennzahlen des Prozess-, Parameter- und Vorhersagerisikos für die Großschadenanzahlen

Es zeigt sich, dass die Varianz durch Berücksichtigung des Parameterrisikos von 4,2667 auf 5,1314 ansteigt und damit größer ist als der empirische Mittelwert der simulierten Prognose für das folgende Anfalljahr. Der parametrische Bootstrap führt im Fall der Großschadenanzahlen zu einer höheren Streuung der Prognose. Dies wird durch den Perzentilgraphen des Prozessrisikos im Vergleich zum Vorhersagerisiko, d.h. unter Berücksichtigung des Parameterrisikos, in Abbildung 4.12 verdeutlicht.

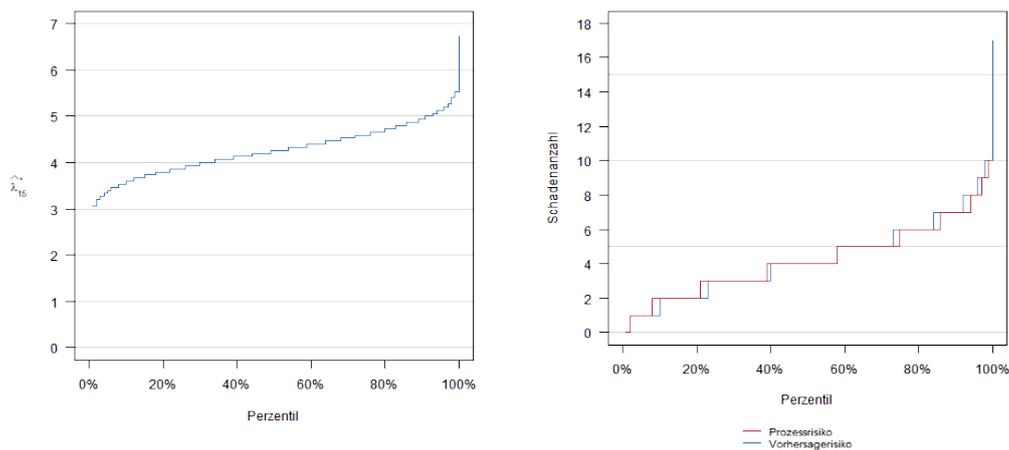


Abbildung 4.12.: Case Study: Perzentilgraph des Prozess- und Vorhersagerisikos für die Großschadenanzahlen (Quelle: Eigene Darstellung)

Analog wird das Parameterrisiko für die zur Modellierung der Schadenhöhenverteilung unterstellte GPD per parametrischem Bootstrap-Verfahren berücksichtigt. Auf Basis der mit Hilfe eines Maximum-Likelihood-Ansatzes angepassten Form-, Lage- und Skalenparameter

$$\hat{\xi}_{61} = 0,4537, \quad \hat{\mu}_{61} = 1.000, \quad \hat{\beta}_{61} = 651,9161$$

der verallgemeinerten Pareto-Verteilung an die beobachteten Schäden werden in  $M_{Sim}$  Simulationen per parametrischen Bootstrapping neue Pseudo-Schäden  $\hat{\mathbf{x}}_{u,\cdot}^{*(1)}, \dots, \hat{\mathbf{x}}_{u,\cdot}^{*(M_{Sim})}$  mit

$$\hat{\mathbf{x}}_{u,\cdot}^{*(M)} := \left( \hat{x}_{u,\cdot,1}^{*(M)}, \dots, \hat{x}_{u,\cdot,n_{u,\cdot}}^{*(M)} \right), \quad 1 \leq M \leq M_{Sim},$$

erzeugt. Für jeden Pseudo-Datensatz  $\hat{\mathbf{x}}_{u,\cdot}^{*(1)}, \dots, \hat{\mathbf{x}}_{u,\cdot}^{*(M_{Sim})}$  werden anschließend die Parameter der GPD per Maximum-Likelihood-Methode geschätzt.

In der folgenden Tabelle 4.15 sind die Realisationen des parametrischen Bootstraps sowie die geschätzten Parameter der GPD aufgeführt:

M	Pseudo-Daten							ML-Schätzer		
	$\hat{x}_{u,\cdot,1}^{*(M)}$	$\hat{x}_{u,\cdot,2}^{*(M)}$	$\hat{x}_{u,\cdot,3}^{*(M)}$	...	$\hat{x}_{u,\cdot,59}^{*(M)}$	$\hat{x}_{u,\cdot,60}^{*(M)}$	$\hat{x}_{u,\cdot,61}^{*(M)}$	$\hat{\xi}_{61}^{*(M)}$	$\hat{\mu}_{61}^{*(M)}$	$\hat{\beta}_{61}^{*(M)}$
1	1.174	2.619	2.075	...	3.146	6.925	1.854	0,3761	1.004	599
2	1.273	6.595	1.127	...	1.257	1.136	3.841	0,5435	1.004	795
⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
50.000	1.549	1.311	2.776	...	1.772	1.333	1.010	-0,0832	1.010	1.051
⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
99.999	1.437	1.175	2.775	...	1.366	1.054	1.172	0,4008	1.004	700
100.000	1.437	4.488	1.604	...	2.539	1.374	1.280	0,6396	1.005	670

Tabelle 4.15.: Case Study: Empirische Bootstrap-Verteilung des Parameterrisikos für die Brutto-Großschadenhöhen (in TEUR)

Tabelle 4.16 fasst die Schätzfehler als Standardabweichung des jeweiligen GPD-Parameters neben weiteren deskriptiven Kennzahlen zusammen.

Während die simulierten Werte für den Lageparameter  $\hat{\mu}_{61}^*$  nur moderat zwischen 1.000 und 1.133 (in TEUR) schwanken, zeigt sich ein deutlich volatileres Bild für den entsprechenden Form- und Skalenparameter  $\hat{\xi}_{61}^*$  bzw.  $\hat{\beta}_{61}^*$ :

$$\hat{\xi}_{61}^* \in [-0,5412, 1,3651], \quad \hat{\beta}_{61}^* \in [207, 1.785].$$

Die Perzentilgraphen in Abbildung 4.13 zeigen die per parametrischen Bootstrap erzeugten Verteilungen des Form-, Lage- und Skalenparameters der GPD auf.

Deskriptive Kennzahl	Prozessrisiko		Parameterrisiko		Vorhersagerisiko	
	$\hat{X}_{u,\cdot}^{(L)}$	$\hat{\xi}_{61}^*$	$\hat{\mu}_{61}^*$	$\hat{\beta}_{61}^*$	$\hat{x}_{u,n+1}^{*,(L)}$	$\hat{z}_{u,n+1}^{*,(L)}$
Mittelwert	2.186	0,4155	1.011	689	2.252	1.604
Varianz	6.928.668	0,0395	116	24.499	10.100.624	166.848
Standardabweichung	2.632	0,1987	11	157	3.178	408
Variationskoeffizient	1,2040	0,4783	0,0107	0,2273	1,4111	0,2547
Minimum	1.000	-0,5412	1.000	207	1.000	1.000
Maximum	100.000	1,3651	1.133	1.785	100.000	2.408
<b>Perzentile</b>						
0,50%	1.003	-0,1154	1.000	368	1.010	1.010
1,00%	1.007	-0,0556	1.000	392	1.015	1.015
5,00%	1.034	0,0897	1.001	462	1.045	1.045
10,00%	1.070	0,1622	1.001	502	1.083	1.083
20,00%	1.153	0,2502	1.002	555	1.169	1.169
30,00%	1.252	0,3139	1.004	598	1.272	1.272
40,00%	1.375	0,3663	1.005	636	1.399	1.399
50,00%	1.531	0,4157	1.007	673	1.562	1.562
60,00%	1.740	0,4656	1.010	712	1.778	1.764
70,00%	2.044	0,5191	1.013	757	2.091	1.924
80,00%	2.545	0,5811	1.017	812	2.595	2.037
90,00%	3.648	0,6676	1.025	896	3.670	2.133
95,00%	5.158	0,7405	1.032	969	5.155	2.207
99,00%	11.171	0,8805	1.050	1.123	11.617	2.399
99,50%	15.470	0,9344	1.058	1.188	16.807	2.408

Tabelle 4.16.: Case Study: Deskriptive Kennzahlen des Prozess-, Parameter- und Vorhersagerisikos (brutto und netto) für die Großschadenhöhen (in TEUR)

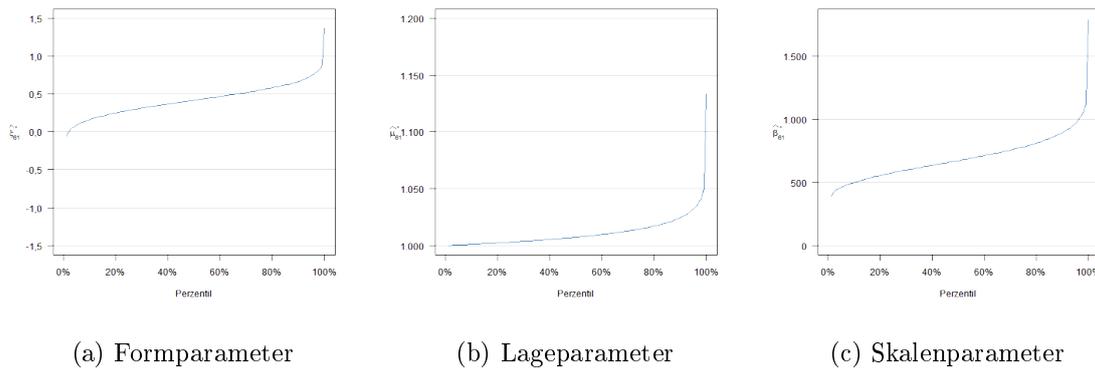


Abbildung 4.13.: Case Study: Perzentilgraphen des Parameterrisikos des Form-, Lage- und Skalenparameters der GPD bezüglich für die Großschadenhöhen (in TEUR) (Quelle: Eigene Darstellung)

Auf Basis der simulierten Prognose  $\hat{n}_{u,n+1}^{*,(M)}$  der Schadenanzahlen sowie der Parameter  $\hat{\xi}_{n_{u,\cdot}}^{*,(M)}$ ,  $\hat{\mu}_{n_{u,\cdot}}^{*,(M)}$ ,  $\hat{\beta}_{n_{u,\cdot}}^{*,(M)}$  der GPD, die zur Modellierung der Großschadenhöhen herangezogen werden, werden je Simulationspfad  $M$ ,  $1 \leq M \leq M_{Sim}$ , gerade  $\hat{n}_{u,n+1}^{*,(M)}$  Prognosen der Schadenhöhen aus der Prozessverteilung gezogen. Dies liefert einerseits die Vorhersageverteilung der Großschadenhöhen, siehe Tabelle 4.17, und andererseits eine Prognose des Jahresgesamtschadens

$$\hat{s}_{u,n+1}^{(n),*,(M,L)} = \sum_{j=1}^{\hat{n}_{u,n+1}^{*,(M)}} \hat{x}_{u,n+1,j}^{*,(M,L)}.$$

M	ML-Schätzer				Pseudo-Daten						$\hat{s}_{u,n+1}^{(n),*,(M,L)}$
	$\hat{\eta}_{u,n+1}^{*,(M)}$	$\hat{\xi}_{61}^{*,(M)}$	$\hat{\mu}_{61}^{*,(M)}$	$\hat{\beta}_{61}^{*,(M)}$	$\hat{x}_{u,n+1,1}^{*,(M,L)}$	$\hat{x}_{u,n+1,2}^{*,(M,L)}$	$\hat{x}_{u,n+1,3}^{*,(M,L)}$	$\hat{x}_{u,n+1,4}^{*,(M,L)}$	$\dots$	$\hat{x}_{u,n+1,16}^{*,(M,L)}$	
1	2	0,3761	1.004	599	1.162	1.252					2.414
2	3	0,5435	1.004	795	1.465	2.037	2.928				6.430
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮							⋮
50.000	4	-0,0832	1.010	1051	4.717	1.609	1.202	1.578			9.106
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮							⋮
99.999	4	0,4008	1.004	700	1.659	3.214	2.476	1.659			9.009
100.000	5	0,6396	1.005	670	1.812	1.032	1.604	1.415	...		9.773

Tabelle 4.17.: Case Study: Empirische Bootstrap-Verteilung des Vorhersagerisikos bezüglich der Brutto-Großschadenshöhen (in TEUR)

Auch hinsichtlich der Großschadenshöhen legen die Perzentilgraphen des Prozessrisikos im Vergleich zum Vorhersagerisiko, d.h. unter Berücksichtigung des Parameterrisikos, gemäß Abbildung 4.14 dar, dass gerade unter Einbeziehung der Parameterunsicherheit annähernd zu jedem Perzentil-Level leicht größere Schadenshöhen realisiert werden als im Fall ohne Parameterunsicherheit. Erst im Tail werden die Unterschiede deutlicher.

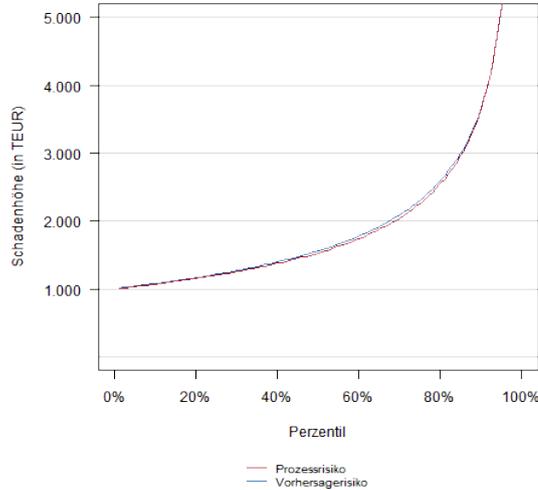


Abbildung 4.14.: Case Study: Perzentilgraph des Prozess- und Vorhersagerisikos für die Brutto-Großschadenshöhen (in TEUR) (Quelle: Eigene Darstellung)

Abschließend wird im Sinne des Kollektiven Modells die Verteilung des Jahresgesamtschadens ermittelt. Dafür wird das Vorhersagerisiko unter Berücksichtigung des Parameterrisikos dem Prozessrisiko in der folgenden Tabelle bzw. Abbildung gegenübergestellt:

Deskriptive Kennzahl	Prozessrisiko		Vorhersagerisiko
	$\hat{S}_{u,n+1}^{(n,L)}$	$\hat{s}_{u,n+1}^{(n),*(L)}$	$\hat{s}_{u,n+1}^{(n),*(L)}$
Mittelwert	9.328	9.697	6.904
Varianz	49.954.741	75.134.669	14.274.587
Standardabweichung	7.068	8.668	3.778
Variationskoeffizient	0,7577	0,8939	0,5472
Minimum	0	0	0
Maximum	124.327	216.350	29.546
Perzentile			
0,50%	0	0	0
1,00%	0	0	0
5,00%	1.768	1.413	1.413
10,00%	2.815	2.555	2.354
20,00%	4.317	4.060	3.590
30,00%	5.564	5.347	4.623
40,00%	6.753	6.623	5.539
50,00%	7.974	7.947	6.480
60,00%	9.320	9.425	7.460
70,00%	10.954	11.193	8.561
80,00%	13.162	13.628	9.940
90,00%	16.801	17.885	11.983
95,00%	20.651	22.662	13.762
99,00%	32.784	39.368	17.396
99,50%	40.838	51.879	18.765

Tabelle 4.18.: Case Study: Deskriptive Kennzahlen des Prozess- und Vorhersagerisikos (brutto und netto) für den Jahresgesamtschaden (in TEUR) der Großschäden

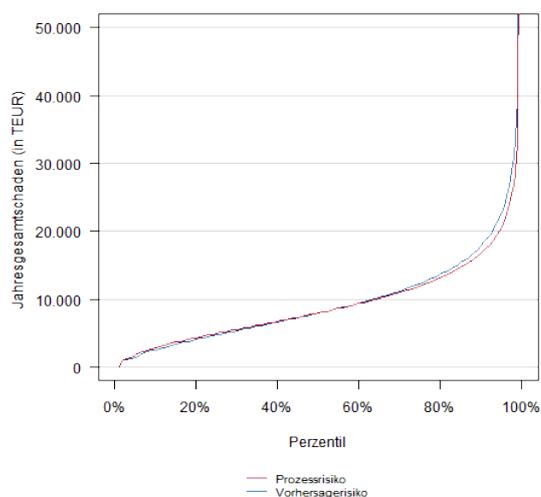


Abbildung 4.15.: Case Study: Perzentilgraph des Prozess- und Vorhersagerisikos für den Brutto-Jahresgesamtschaden (in TEUR) der Großschäden (*Quelle: Eigene Darstellung*)

Die bisher gemachten Beobachtungen unter Einbeziehung des Parameterrisikos in der Schadenanzahl- und höhenverteilung spiegeln sich im Vorhersagerisiko des Jahresgesamtschadens der CAPITOL wider. In der Praxis zeigt sich jedoch, dass das Ausmaß des Parameterrisikos stark vom Umfang der Datengrundlage abhängt. Eine deutlich dünnere Datenbasis als diejenige, die der Case Study zu Grunde liegt, führt meist zu einem deutlich höheren Parameterrisiko. Aber selbst in der Case Study kann eine Vernachlässigung des Parameterrisikos

zu einer Unterschätzung der Risikosituation führen. Während für Perzentil-Level unterhalb von 60% der realisierte Jahresgesamtschaden unter Einbeziehung der Parameterunsicherheit marginal kleiner ist als der Jahresgesamtschaden ohne Parameterunsicherheit, kehrt sich diese Relation für Perzentil-Level oberhalb von 60% um. Insbesondere im Tail weist die Vorhersageverteilung deutlich größere Jahresgesamtschadenaufwände auf.

### Berücksichtigung der Rückversicherungsstruktur

Wie in Kapitel 4.1 beschrieben, schützt die CAPITOL ihr KH-Portfolio durch nichtproportionale Rückversicherung in Form einer XL-Deckung pro Risiko (vergleiche Kapitel 2.8) mit

$$98,5 \text{ Mio. EUR xs. } 1,5 \text{ Mio. EUR,}$$

wobei eine unbegrenzte Anzahl an freien Wiederauffüllungen ohne einen zusätzlichen Jahres-selbstbehalt vereinbart ist.

In den Longtail-Sparten gilt es darüber hinaus eine Besonderheit der Vertragsgestaltung in Form einer vereinbarten *Stabilisierungsklausel* zu berücksichtigen, weil das das RVU für einen Layer  $C$  xs.  $D$  aufgrund der lang-abwickelnden Schäden überproportional an der Inflation partizipiert. Das wird im Hinblick auf die Entlastungseffektfunktion, die sogenannte *Loss Elimination Ratio (LER)*,

$$LER_{X_{i,j}}(D) := \frac{E(\min\{X_{i,j}, D\})}{E(X_{i,j})}$$

deutlich, wobei  $X_{i,j}$  den  $j$ -ten Einzelschaden aus dem Anfalljahr  $i$  bezeichne,  $1 \leq i \leq n$  mit  $j = 1, \dots, n_i$ . Für eine Inflationsrate  $r > 0$ , die zu einer inflationsbedingten Teuerung  $(1+r) \cdot X_{i,j}$  des Schadenaufwands führt, gilt in diesem Fall:

$$\begin{aligned} LER_{(1+r) \cdot X_{i,j}}(D) &= \frac{E(\min\{(1+r) \cdot X_{i,j}, D\})}{E((1+r) \cdot X_{i,j})} = \frac{E\left(\min\left\{X_{i,j}, \frac{D}{1+r}\right\}\right)}{E(X_{i,j})} \\ &= LER_{X_{i,j}}\left(\frac{D}{1+r}\right) \\ &< LER_{X_{i,j}}(D). \end{aligned}$$

Um diesem Effekt entgegen zu wirken, wird im Rückversicherungsvertrag eine Stabilisierungsklausel vereinbart, die besagt, dass eine inflationsbedingte Teuerung bei einem Schaden im gleichen Verhältnis aufzuteilen ist, wie der Schaden ohne Teuerung auf EVU und RVU aufgeteilt worden wäre. In der Praxis finden verschiedene Variationen der Stabilisierungsklausel Anwendung, etwa die sogenannte *Severe Inflation Clause (SIC)* mit 30% Abzugsfranchise. Hierzu sei auf [Lie09] und [Sch01] verwiesen. Im Folgenden wird die Funktionsweise der Stabilisierung exemplarisch an der in Deutschland üblichen „Anpassungsklausel“ mit einer Franchise  $FM$  in Höhe von 10% (*APK10*) beschrieben. Die sogenannte *Full Index Clause (FIC)* zieht zur Bewertung der Teuerung den L&G-Index heran.

Die Notation in Kapitel 4.3.2 aufgreifend, sei durch

$$X_{i,j,k} = \left( \sum_{\kappa=1}^k S_{i,j,\kappa} \right) + R_{i,j,k} = C_{i,j,k} + R_{i,j,k}$$

der Schadenaufwand nach dem  $k$ -ten Abwicklungsjahr bezeichnet  $k$ ,  $1 \leq k \leq n+1-i$ . Weiterhin bezeichne  $I_B$  den Indexstand im Basisjahr und  $I_k$  den entsprechenden Indexstand nach  $k$  Abwicklungsjahren. Dann berechnen sich die Bereinigungsfaktoren  $f_k$  für die inkrementellen Schadenzahlungen und die Bedarfsreserve durch:

$$f_k := \begin{cases} 1, & \text{falls } \frac{I_k}{I_B} < 1 + FM \\ \frac{I_B}{I_k} & \text{falls } \frac{I_k}{I_B} \geq 1 + FM. \end{cases}$$

Zu jedem Abwicklungsjahr  $k$  erhält man die Stabilisierungsfaktoren

$$F_k := \frac{\left(\sum_{\kappa=1}^k S_{i,j,\kappa}\right) + R_{i,j,k}}{\left(\sum_{\kappa=1}^k f_{\kappa} \cdot S_{i,j,\kappa}\right) + f_k \cdot R_{i,j,k}},$$

zur Berechnung der stabilisierten Deckung

$$C_{k,stab} \text{ xs. } D_{k,stab}$$

mit  $C_{k,stab} := F_k \cdot C$  und  $D_{k,stab} := F_k \cdot D$ . Für die Aufteilung des Schadenaufwands auf RVU und EVU nach  $k$ -Abwicklungsjahren gilt gemäß Kapitel 2.8.1 schließlich:

$$\check{X}_{i,j,k} = \min \{C_{k,stab}, (X_{i,j,k} - D_{k,stab})^+\}, \quad \tilde{X}_{i,j,k} = X_{i,j,k} - \check{X}_{i,j,k}.$$

Für die CAPITOL ist das dargelegte Verfahren nun auf die Prognosen der Schadenhöhen anzuwenden. Um die simulierten Brutto-Schäden unter Berücksichtigung der Stabilisierungsklausel gemäß der gültigen Rückversicherungsstruktur abrechnen zu können, sind jedoch Cashflow-Informationen erforderlich. Hierzu leitet das Reserve-Aktuarat der CAPITOL aus den Abwicklungsmustern der inflationsbereinigten Ultimate-Schadenaufwände ab 100 TEUR insgesamt  $m_{C\text{P}Pattern}$  kumulierte Auszahlungspattern  $(c_{l,k})_{k=1,\dots,\omega}$  mit

$$0 \leq c_{l,1} \leq \dots \leq c_{l,\omega} = 1$$

für  $l = 1, \dots, m_{C\text{P}Pattern}$  ab. Aus jedem kumulierten Auszahlungspattern  $(c_{l,k})_{k=1,\dots,\omega}$  lassen sich iterativ die benötigten Cashflow-Informationen hinsichtlich inkrementeller Schadenzahlung und Schadenreserve gewinnen. Dazu definiere man mit  $c_{l,0} := 0$  für  $k = 1, \dots, \omega$ :

$$s_{l,k} := c_{l,k} - c_{l,k-1}, \quad r_{l,k} := 1 - c_{l,k}.$$

Schließlich wird in jedem Simulationspfad  $M$ ,  $1 \leq M \leq M_{Sim}$ , zu jedem simulierten Schaden  $\hat{x}_{u,n+1,j}^{*(M,L)}$ ,  $j = 1, \dots, \hat{n}_{u,n+1}^{*(M)}$ , zufällig ein kumuliertes Auszahlungspattern  $(c_{l,k})_{k=1,\dots,\omega}$  gezogen. Für jedes Abwicklungsjahr  $k$  erhält man durch

$$\hat{x}_{u,n+1,j,k}^{*(M,L)} := \left(\sum_{\kappa=1}^k s_{l,\kappa} \cdot \hat{x}_{u,n+1,j}^{*(M,L)}\right) + r_{l,k} \cdot \hat{x}_{u,n+1,j}^{*(M,L)} = c_{l,k} \cdot \hat{x}_{u,n+1,j}^{*(M,L)} + r_{l,k} \cdot \hat{x}_{u,n+1,j}^{*(M,L)}$$

eine Aufteilung des prognostizierten Schadenaufwands.

Da sich die Großschadenhöhen unter Berücksichtigung des Parameterrisikos auf das Anfalljahr  $n + 1$  beziehen, hängen die Stabilisierungsfaktoren  $(F_{l,k})_{k=1,\dots,\omega}$  ausschließlich vom kumulierten Auszahlungsmuster  $(c_{l,k})_{k=1,\dots,\omega}$ ,  $l = 1, \dots, m_{CPPattern}$ , ab:

$$F_k := \frac{\left(\sum_{\kappa=1}^k s_{l,\kappa}\right) + r_{l,k}}{\left(\sum_{\kappa=1}^k f_{\kappa} \cdot s_{l,\kappa}\right) + f_k \cdot r_{l,k}}.$$

Zur Berechnung der Bereinigungs-faktoren  $(f_k)_{k=1,\dots,\omega}$  nimmt die Indexbasis  $I_B = 100\%$  hierbei Bezug auf das Anfalljahr  $n$  und entsprechend Kapitel 4.3.2 wird für die Entwicklung des L&G-Index eine zukünftige jährliche Steigerung in Höhe von 2,5% angenommen.

Unter Beachtung der APK10 erfolgt dann zu jedem Abwicklungsstand  $k$  die Brutto-Netto-Überleitung gemäß

$$\hat{x}_{u,n+1,j,k}^{*,(M,L)} := \hat{x}_{u,n+1,j,k}^{*,(M,L)} - \min \left\{ C_{k,stab}, \left( \hat{x}_{u,n+1,j,k}^{*,(M,L)} - D_{k,stab} \right)^+ \right\}.$$

für  $1 \leq M \leq M_{Sim}$ ,  $j = 1, \dots, \hat{n}_{u,n+1}^{*,(M)}$ . Die entsprechenden Zeitreihen der prognostizierten Brutto- und Netto-Schadenzahlungen bilden die Basis für die Diskontierung der Großschäden mittels risikoloser Zinsstrukturkurve *RFR*. Schließlich ist der zu  $\hat{x}_{u,n+1,j}^{*,(M,L)}$  gehörende Netto-Schaden dann gerade durch

$$\hat{x}_{u,n+1,j}^{*,(M,L)} := \hat{x}_{u,n+1,j,\omega}^{*,(M,L)}$$

gegeben. In Tabelle 4.16 ist die risikomindernde Wirkung der bestehenden Rückversicherung auf die Einzelschäden bzw. in Tabelle 4.18 auf den Jahresgesamtschaden der Großschäden dargestellt. Im Mittel beträgt die Entlastung aus Rückversicherung 28,79%, sodass 71,21% des Bruttoschadens im Eigenbehalt der CAPITOL verbleiben.

#### 4.3.6. Modellierung der Basisschäden

Auf die Modellierung der Großschäden folgt die der Basisschäden. Letztere weisen im Allgemeinen eine wesentlich höhere Homogenität und damit eine niedrigere Schwankung im Vergleich zu den Großschäden auf. Deshalb werden die Basisschäden als Kollektiv modelliert, indem nicht mehr die Einzelschäden, sondern der gesamte Schadenaufwand je Anfalljahr betrachtet wird.

Aufgrund der in Kapitel 4.3.4 ermittelten Großschadengrenze werden alle Schäden unterhalb von 1 Mio. EUR ohne Inflationsbereinigung den Basisschäden zugeordnet. Gemäß Kapitel 4.3.1 analysiert man aus aktuarieller Perspektive auch bei der Modellierung der Basisschäden vollständig abgewickelte Schadendaten in der Anfalljahressicht. Hierzu stehen nach Separation von Groß- und Basisschäden Abwicklungsdreiecke der Basisschäden (siehe Kapitel C.3.2) für Schadenanzahlen und (nominale) Brutto-Schadenzahlungen bzw. Brutto-Schadenaufwände zur Verfügung.

Im Rahmen der Ermittlung der Endschadenstände je Anfalljahr ist eine angemessene Behandlung der Inflation erforderlich. Die in Kapitel 4.3.2 erörterte Inflationsproblematik der

*Superimposed Inflation* im Kontext großer Personenschäden ist für die Basisschadenlast jedoch nicht relevant, weil diese vornehmlich aus Sachschäden besteht. Etwa durch die Wahl des Chain-Ladder-Verfahrens wird die Schadenteuerung implizit abgebildet. Dabei wird unterstellt, dass die historisch beobachtbare Inflation, die den Daten zugrunde liegt, auch auf den projizierten zukünftigen Zeitraum unverändert wirkt.

Daher ermittelt das Reserve-Aktuariat der CAPITOL unter Berücksichtigung des Brutto-Schadenzahlungs- und -aufwandsdreiecks der Basisschäden den Ultimate auf *Paid*- sowie auf *Incurred*-Basis jeweils mit Hilfe des Chain-Ladder-Verfahrens (siehe [Mac02]). Hierbei vertraut das Reserve-Aktuariat auf die Entwicklung der letzten 15 Anfalljahre und verwendet das Gesamtittel ohne Ausschluss einzelner Abwicklungsfaktoren. Hinsichtlich des auf *Paid*-Basis ermittelten Ultimates wird zudem eine per log-linearer Regression ermittelte Tail-Funktion mit einem Tailfaktor in Höhe von 1,0005 angesetzt. Der selektierte Ultimate ist dann ein 1:1-Mix aus zahlungs- und aufwandsbasierter Chain-Ladder-Methode. Das Ergebnis der separaten Abwicklung von Schadenanzahlen und -höhen ist in der folgenden Tabelle zusammengefasst:

Anfalljahr	Jahres-einheiten	Schaden-anzahl	Ultimate (in TEUR)	Schaden-bedarf (in TEUR)	Schaden-frequenz	Schaden-durchschnitt (in TEUR)
2002	336.923	26.471	74.197	0,2202	0,0786	2,8029
2003	346.851	26.720	73.041	0,2106	0,0770	2,7336
2004	352.266	27.099	72.672	0,2063	0,0769	2,6817
2005	349.212	25.493	69.860	0,2001	0,0730	2,7404
2006	367.080	27.685	75.044	0,2044	0,0754	2,7106
2007	382.880	27.359	76.101	0,1988	0,0715	2,7816
2008	385.339	27.212	76.848	0,1994	0,0706	2,8240
2009	388.744	27.452	74.753	0,1923	0,0706	2,7230
2010	385.453	25.867	71.811	0,1863	0,0671	2,7762
2011	389.302	26.844	75.511	0,1940	0,0690	2,8130
2012	393.685	25.601	73.061	0,1856	0,0650	2,8538
2013	390.730	24.964	71.360	0,1826	0,0639	2,8585
2014	389.160	25.701	72.069	0,1852	0,0660	2,8041
2015	391.325	24.379	71.131	0,1818	0,0623	2,9177
2016	394.089	25.069	68.870	0,1748	0,0636	2,7472

Tabelle 4.19.: Case Study: Entwicklung des Exposures und schadenbasierter Brutto-Kennzahlen der Basisschäden aus Ultimate-Sichtweise

Die in Abbildung 4.16 dargestellten Realisationen des ultimativen Schadenaufwands

$$\begin{aligned}\widehat{U}_{<u,i}^{(n)} &:= \sum_{j \in \{1, \dots, n_i: \widehat{X}_{i,j} < u\}} \left( \sum_{k=1}^{n+1-i} S_{i,j,k} + \sum_{k=n+2-i}^{\omega} \widehat{S}_{i,j,k}^{(n)} \right) \\ &= \sum_{j \in \{1, \dots, n_i: \widehat{X}_{i,j} < u\}} \left( C_{i,j,n+1-i} + \widehat{R}_{i,j}^{(n)} \right),\end{aligned}$$

wobei  $\widehat{X}_{i,j}$  gemäß Kapitel 4.3.2 den Endschadenstand des inflationsbereinigten  $j$ -ten Einzelschadens aus dem Anfalljahr  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , mit  $j = 1, \dots, n_i$ , bezeichne, zeigen im Vergleich

zum Exposure einen adversen Verlauf. Während für den Schadenaufwand über den gesamten Beobachtungszeitraum ein Rückgang zu beobachten ist, wächst das Exposure  $v_i$  in Form von Jahreseinheiten kontinuierlich an. Daher wird der Schadenaufwand volumenbereinigt, was zum Schadenbedarf

$$\widehat{Z}_{<u,i}^{(n)} := \frac{\widehat{U}_{<u,i}^{(n)}}{v_i} = \frac{\widehat{N}_{<u,i}^{(n)}}{v_i} \cdot \frac{\widehat{U}_{<u,i}^{(n)}}{\widehat{N}_{<u,i}^{(n)}}$$

führt. Der Schadenbedarf ist wiederum als Produkt aus Frequenz

$$\widehat{Freq}_{<u,i}^{(n)} := \frac{\widehat{N}_{<u,i}^{(n)}}{v_i}$$

und Schadendurchschnitt

$$\widehat{AvgSev}_{<u,i}^{(n)} := \frac{\widehat{U}_{<u,i}^{(n)}}{\widehat{N}_{<u,i}^{(n)}}$$

darstellbar, wobei  $\widehat{N}_{<u,i}^{(n)}$  die endabgewickelte Schadenanzahl des Anfalljahres  $i$  bezeichne.

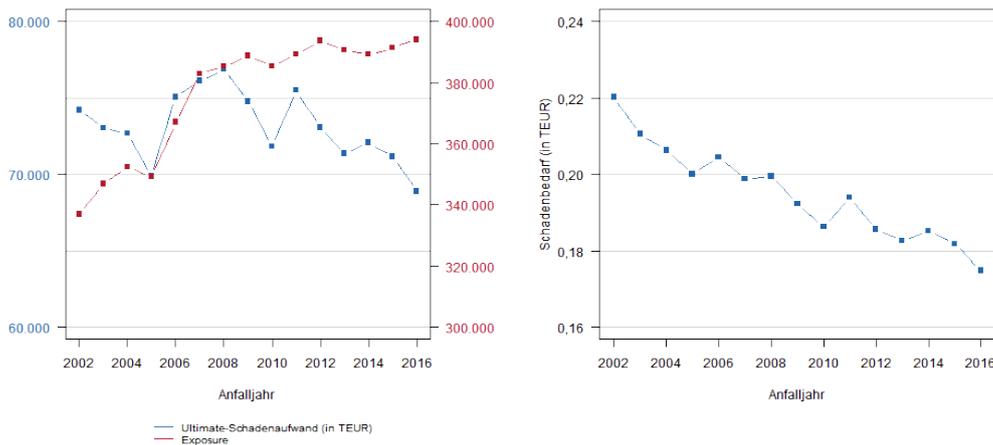


Abbildung 4.16.: Case Study: Ultimate-Schadenaufwände und -bedarfe der Basisschäden (in TEUR) (Quelle: Eigene Darstellung)

Durch die Volumenbereinigung des ultimativen Schadenaufwands ist für den Schadenbedarf ein fortlaufender Rückgang zu verzeichnen. Eine differenzierte Betrachtung von Schadenfrequenz und Durchschnittsschaden in Abbildung 4.17 legt jedoch ein zweigeteiltes Bild offen.

Die Ultimate-Schadenfrequenzen der vergangenen Anfalljahre folgen dem im Markt zu beobachtenden Abwärtstrend, der u. a. in der Weiterentwicklung von Fahrsicherheitssystemen begründet ist. Dem gegenüber steht ein Anstieg der Schadendurchschnitte. Hierfür sind etwa die Preisentwicklungen für Neuwagen und das Wachstum an höherwertigen Fahrzeugen verantwortlich. Aufgrund der Analyse der beobachteten Schadenfrequenzen und -durchschnitte wird die Basisschadenlast mittels eines sogenannten *Frequency-Severity-Ansatzes* modelliert, um die auf den Schadenaufwand wirkenden adversen Effekte separieren zu können. Zunächst sind dafür geeignete Modelle zu definieren und entsprechend zu parametrisieren.

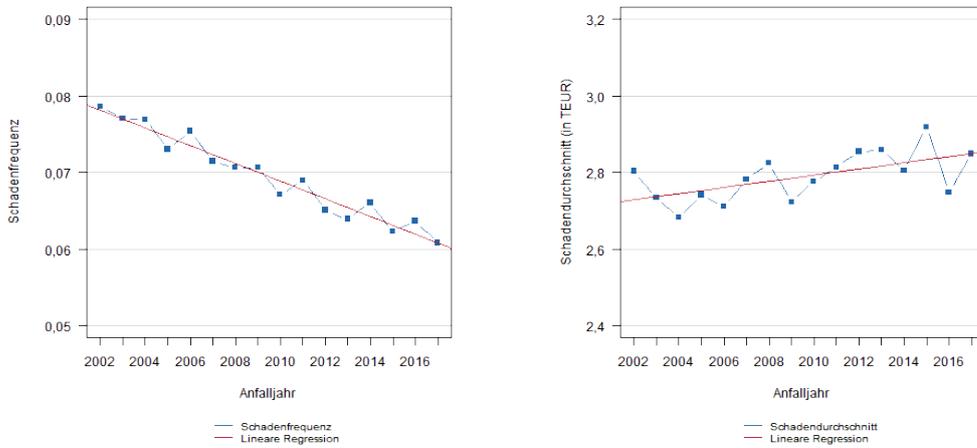


Abbildung 4.17.: Case Study: Endabgewickelte Frequenzen und Durchschnittsschäden (in TEUR) der Basisschäden (*Quelle: Eigene Darstellung*)

### Modellauswahl und Parametrisierung

Aufgrund des Verlaufs der vorliegenden  $n$  Wertepaare  $\left(i, \widehat{freq}_{<u,i}^{(n)}\right)$  bzw.  $\left(i, \widehat{avgsev}_{<u,i}^{(n)}\right)$  wird für die ultimativen Schadenfrequenzen bzw. -durchschnitte jeweils ein klassisches lineares Regressionsmodell gemäß [Fah+13] unterstellt, wobei  $\widehat{freq}_{<u,i}^{(n)}$  bzw.  $\widehat{avgsev}_{<u,i}^{(n)}$  als Realisationen der Zufallsvariablen  $\widehat{Freq}_{<u,i}^{(n)}$  bzw.  $\widehat{AvgSev}_{<u,i}^{(n)}$  aufgefasst werden,  $i = 1, \dots, n$ . Mit  $LM \in \{freq, avgsev\}$  und

$$Y_{LM,i}^{(n)} := \begin{cases} \widehat{Freq}_{<u,i}^{(n)}, & \text{falls } LM = freq, \\ \widehat{AvgSev}_{<u,i}^{(n)}, & \text{falls } LM = avgsev, \end{cases}$$

lassen sich für  $i = 1, \dots, n$  die Modelle kompakt in Matrixschreibweise durch

$$\mathbf{Y}_{LM}^{(n)} = \mathbf{X}_{(n)} \cdot \boldsymbol{\beta}_{LM} + \boldsymbol{\varepsilon}_{LM}$$

notieren. Hierbei bezeichnen

$$\mathbf{X}_{(n)} := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & n \end{pmatrix}$$

die Designmatrix der unabhängigen bzw. erklärenden Variablen mit vollem Spaltenrang  $rg(\mathbf{X}_{(n)}) = 2$ ,  $\boldsymbol{\beta}_{LM} = (\beta_{LM,0}, \beta_{LM,1})^T$  den Vektor der unbekanntenen Regressionsparameter und  $\boldsymbol{\varepsilon}_{LM} = (\varepsilon_{LM,1}, \dots, \varepsilon_{LM,n})^T$  den Vektor der unbeobachtbaren zufälligen Störgrößen. Im klassisch linearen Regressionsmodell werden für  $\boldsymbol{\varepsilon}_{LM} \in L^2(P^{\boldsymbol{\varepsilon}_{LM}})$  die folgenden Annahmen getroffen:

- (i) Die Störgrößen sind im Mittel Null, d.h.

$$E(\boldsymbol{\varepsilon}_{LM}) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n \times 1}.$$

(ii) Die zufälligen Fehler sind unkorreliert und homoskedastisch, d.h.

$$\text{Cov}(\boldsymbol{\varepsilon}_{LM}) = E(\boldsymbol{\varepsilon}_{LM} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{LM}^T) = \sigma_{LM}^2 \cdot \mathbf{I}_n,$$

wobei  $\mathbf{I}_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$  die Einheitsmatrix sei.

Zur Konstruktion von Hypothesentests werden die Störterme zusätzlich als normalverteilt,  $\boldsymbol{\varepsilon}_{LM} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma_{LM}^2 \cdot \mathbf{I}_n)$ , und damit auch unabhängig angenommen.

Insbesondere erhält man als Folgerung aus den Modellannahmen für den Erwartungswert und die Kovarianz von  $\mathbf{Y}_{LM}^{(n)}$ :

$$\begin{aligned} E(\mathbf{Y}_{LM}^{(n)}) &= \mathbf{X}_{(n)} \cdot \boldsymbol{\beta}_{LM} + E(\boldsymbol{\varepsilon}_{LM}) = \mathbf{X}_{(n)} \cdot \boldsymbol{\beta}_{LM}, \\ \text{Cov}(\mathbf{Y}_{LM}^{(n)}) &= \text{Cov}(\boldsymbol{\varepsilon}_{LM}) = \sigma_{LM}^2 \cdot \mathbf{I}_n. \end{aligned}$$

Im Sinne des Gauß-Markov-Theorems ist dann eine optimale Schätzung des Erwartungswertes  $E(\mathbf{Y}_{LM}^{(n)}) = \mathbf{X}_{(n)} \cdot \boldsymbol{\beta}_{LM}$  durch  $\mathbf{X}_{(n)} \cdot \hat{\boldsymbol{\beta}}_{LM}$  gegeben, wobei der Kleinste-Quadrate-Schätzer

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{LM} = \left( \mathbf{X}_{(n)}^T \cdot \mathbf{X}_{(n)} \right)^{-1} \cdot \mathbf{X}_{(n)}^T \cdot \mathbf{Y}_{LM}^{(n)}$$

ein minimalvarianter linearer erwartungstreuer Schätzer ist. Die Kovarianzmatrix von  $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{LM}$  ist durch

$$\text{Cov}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{LM}) = \sigma_{LM}^2 \cdot \left( \mathbf{X}_{(n)}^T \cdot \mathbf{X}_{(n)} \right)^{-1}$$

gegeben, deren Diagonalelemente gerade die Varianzen der Kleinste-Quadrate-Schätzer sind. Weitere Eigenschaften des Schätzers findet der interessierte Leser in [Fah+13].

Durch Einsetzen von  $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{LM}$  erhält man

$$\hat{\mathbf{Y}}_{LM}^{(n)} := E(\widehat{\mathbf{Y}}_{LM}^{(n)}) = \mathbf{X}_{(n)} \cdot \hat{\boldsymbol{\beta}}_{LM} = \mathbf{X}_{(n)} \cdot \left( \mathbf{X}_{(n)}^T \cdot \mathbf{X}_{(n)} \right)^{-1} \cdot \mathbf{X}_{(n)}^T \cdot \mathbf{Y}_{LM}^{(n)} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{Y}_{LM}^{(n)}$$

als Schätzer für den Erwartungswert von  $\mathbf{Y}_{LM}^{(n)}$  mit der  $n \times n$ -Prädiktionsmatrix

$$\mathbf{H} := \mathbf{X}_{(n)} \cdot \left( \mathbf{X}_{(n)}^T \cdot \mathbf{X}_{(n)} \right)^{-1} \cdot \mathbf{X}_{(n)}^T,$$

die auch *Hat-Matrix* genannt wird. Für die Eigenschaften der Hat-Matrix werde der interessierte Leser auf [Fah+13] verwiesen. Dann ist der Schätzfehler, das sogenannte *Residuum*, durch

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{LM} := \mathbf{Y}_{LM}^{(n)} - \hat{\mathbf{Y}}_{LM}^{(n)} = \mathbf{Y}_{LM}^{(n)} - \mathbf{X}_{(n)} \cdot \hat{\boldsymbol{\beta}}_{LM} = \mathbf{Y}_{LM}^{(n)} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{Y}_{LM}^{(n)} = (\mathbf{I}_n - \mathbf{H}) \cdot \mathbf{Y}_{LM}^{(n)}$$

gegeben. Die Residuen werden als Schätzer der Störgrößen  $\boldsymbol{\varepsilon}_{LM}$  insbesondere zur Modellüberprüfung verwendet, da sie zufällig und nicht beobachtbar sind. Sofern also die Annahmen über  $\boldsymbol{\varepsilon}_{LM}$  erfüllt sind, sollten die Residuen im Sinne der Heuristik die genannten Eigenschaften der stochastischen Fehler besitzen. So erhält man einerseits  $E(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{LM}) = \mathbf{0}$  und andererseits  $\text{Cov}(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{LM}) = \sigma_{LM}^2 \cdot (\mathbf{I}_n - \mathbf{H})$ . Allerdings besitzen die Residuen wegen

$Var(\hat{\varepsilon}_{LM,i}) = \sigma_{LM}^2 \cdot (1 - h_{i,i})$  heteroskedastische Varianzen, weshalb sie zur Modellüberprüfung derart nicht geeignet sind. Erst eine Standardisierung der Form

$$r_{LM,i} := \frac{\hat{\varepsilon}_{LM,i}}{\hat{\sigma}_{LM} \cdot \sqrt{1 - h_{i,i}}}$$

stellt homoskedastische Varianzen der *standardisierten Residuen* sicher. Hierbei bezeichnen  $h_{i,i}$  das  $i$ -te Diagonalelement von  $\mathbf{H}$  und  $\hat{\sigma}_{LM}^2 := \frac{1}{n-2} \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{LM}^T \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{LM}$  den erwartungstreuen Schätzer der Standardabweichung. Damit lässt sich auch die Kovarianzmatrix durch

$$Cov(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{LM}) = \hat{\sigma}_{LM}^2 \cdot (\mathbf{X}_{(n)}^T \cdot \mathbf{X}_{(n)})^{-1} = \frac{1}{n-2} \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{LM}^T \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{LM} \cdot (\mathbf{X}_{(n)}^T \cdot \mathbf{X}_{(n)})^{-1}$$

schätzen. Die Standardabweichung der Diagonalelemente definieren dann den Schätzfehler; insbesondere gilt:

$$\begin{aligned} e.e.(\hat{\beta}_{LM,0}) &:= \sqrt{Var(\hat{\beta}_{LM,0})} = \sqrt{\hat{\sigma}_{LM}^2 \cdot \left( \frac{1}{n} + \frac{(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n i)^2}{\sum_{i=1}^n (i - \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n i)^2} \right)} \\ e.e.(\hat{\beta}_{LM,1}) &:= \sqrt{Var(\hat{\beta}_{LM,1})} = \sqrt{\frac{\sigma_{LM}^2}{\sum_{i=1}^n (i - \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n i)^2}}. \end{aligned}$$

Die CAPITOL ermittelt mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate folgende Regressionsparameter:

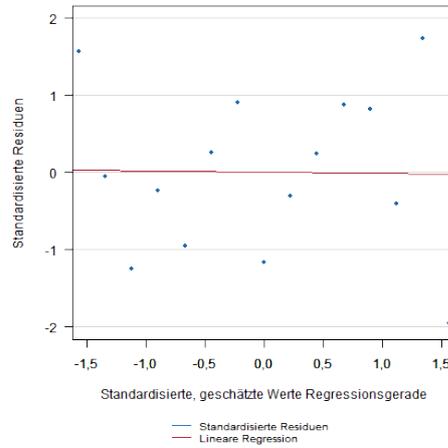
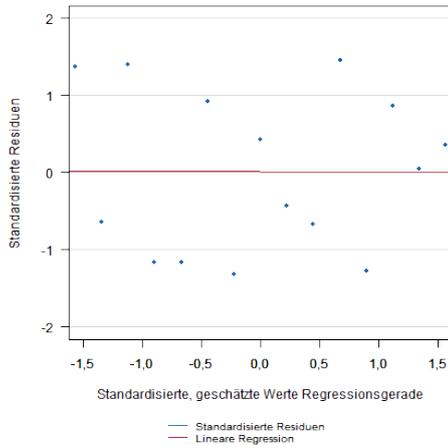
$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\beta}}_{freq} &= (2,392305, -0,001156)^T, & \hat{\boldsymbol{\beta}}_{avgsev} &= (-13,316752, 0,008015)^T, \\ e.e.(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{freq}) &= (0,167385, 0,000083)^T, & e.e.(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{avgsev}) &= (6,572250, 0,003271)^T. \end{aligned}$$

Zur Modellüberprüfung sind in Abbildung 4.18 die standardisierten Residuen gegen die standardisierten vorhergesagten Schadenfrequenzen bzw. -durchschnitte geplottet.

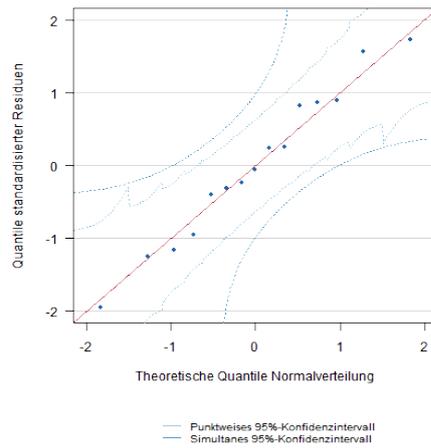
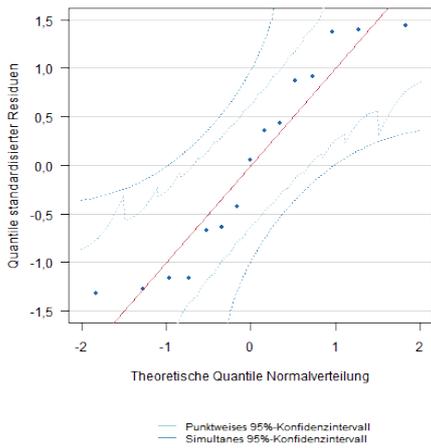
Falls die Streuung der standardisierten Residuen in einer Reihe von Werten der prognostizierten abhängigen Variablen nicht konstant ist, d.h. wenn die Fehlerterme systematisch streuen, dann liegt Heteroskedastizität vor, die zur Ineffizienz der Schätzung führt. In beiden Plots schwanken die standardisierten Residuen jeweils unsystematisch und mit konstanter Variabilität um die Nulllinie, sodass keine Hinweise auf heteroskedastische Varianzen vorliegen. Insbesondere lässt die abgetragene Regressionsgerade den Schluss zu, dass es sich um zentrierte Zufallsvariablen handelt.

Weiterhin wird mit Hilfe der standardisierten Residuen  $r_{LM,i}$  zunächst graphisch geprüft, ob die Normalverteilungsannahme gerechtfertigt ist. Hierzu werden für die endabgewickelten Schadenfrequenzen und -durchschnitte jeweils die geordneten standardisierten Residuen den theoretischen Quantilen der Normalverteilung im QQ-Plot in Abbildung 4.18 gegenübergestellt.

In beiden QQ-Plots bewegen sich die Datenpunkte jeweils längs einer Geraden, sodass die empirischen und theoretischen Quantile nahezu übereinstimmen. Lediglich das kleinste und



(a) Standardisierte Residuen der Schadenfrequenzen gegen die standardisierten, geschätzten Schadenfrequenzen (b) Standardisierte Residuen der Schadendurchschnitte gegen die standardisierten, geschätzten Schadendurchschnitte



(c) QQ-Plot der Schadenfrequenzen (d) QQ-Plot der Schadendurchschnitte

Abbildung 4.18.: Case Study: Scatterplot und QQ-Plot der standardisierten Residuen für die Basisschadenfrequenzen und -durchschnitte (Quelle: Eigene Darstellung)

das größte standardisierte Residuum der Ultimate-Schadenfrequenzen weichen ab. Der visuelle Eindruck normalverteilter Residuen ist im Folgenden durch einen geeigneten Test zu bestätigen. Hierzu wird der sogenannte *Shapiro-Wilk-Test* gemäß [SW65] verwendet, der ausschließlich die Nullhypothese der Normalität untersucht und insbesondere für kleine Stichproben eine hohe Teststärke besitzt.

Der *Shapiro-Wilk-Test* basiert allgemein auf einer Varianzanalyse der Stichprobe  $X_1, \dots, X_n$  und greift die Grundidee eines Normal-Probability-Plots auf. Falls die geordnete Stichprobe normalverteilt ist mit Parametern  $\mu \in \mathbb{R}$  und  $\sigma > 0$ , so liegen die Punktpaare der geordneten

Realisationen näherungsweise auf einer Geraden, deren Steigung gerade die Standardabweichung ist. Entsprechend lässt sich die Ordnungsstatistik  $X_{i:n}$  darstellen als:

$$X_{i:n} = \mu + \sigma \cdot Z_{i:n}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Hierbei bezeichnen  $Z_{1:n} \leq \dots \leq Z_{n:n}$  die Ordnungsstatistiken einer standardnormalverteilten Stichprobe  $Z_1, \dots, Z_n$  mit  $m_i := E(Z_{i:n})$  für  $i = 1, \dots, n$  sowie  $v_{i,j} := \text{Cov}(Z_{i:n}, Z_{j:n})$  für  $i, j = 1, \dots, n$ .

Die unbekannt Parameter  $\mu$  und  $\sigma$  werden dann mittels der Methode der kleinsten Quadrate geschätzt. Mit  $\mathbf{m} := (m_1, \dots, m_n)^T$ ,  $\mathbf{V} := (v_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$  und  $\mathbf{X}_{\leq} := (X_{1:n} \leq \dots \leq X_{n:n})^T$  gilt:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n X_{i:n}, \quad \hat{\sigma} = \frac{\mathbf{m}^T \cdot \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{X}_{\leq}}{\mathbf{m}^T \cdot \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{m}}.$$

Der Shapiro-Wilk-Test vergleicht nun den gewonnenen Schätzer  $\hat{\sigma}$  für die Standardabweichung  $\sigma$  und damit für die Steigung der Regressionsgeraden im Normal-Probability-Plot mit der empirischen Standardabweichung

$$S_n := \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\mu})^2}.$$

Die Teststatistik bildet bis auf einen Faktor den Quotienten beider Werte:

$$W := C \cdot \frac{\hat{\sigma}^2}{S_n^2} = \frac{b^2}{(n-1) \cdot S_n^2} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i \cdot X_{i:n}}{\sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\mu})^2}$$

mit

$$C := \frac{(\mathbf{m}^T \cdot \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{m})^2}{(n-1) \cdot (\mathbf{m}^T \cdot \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{m})^{\frac{1}{2}}},$$

$$b := \frac{\mathbf{m}^T \cdot \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{m} \cdot \hat{\sigma}}{(\mathbf{m}^T \cdot \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{m})^{\frac{1}{2}}},$$

$$\mathbf{a} := (a_1, \dots, a_n)^T = \frac{\mathbf{m}^T \cdot \mathbf{V}^{-1}}{(\mathbf{m}^T \cdot \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{m})^{\frac{1}{2}}},$$

wobei die gewichtenden Koeffizienten  $\mathbf{a}$  u.a. in [DS86] tabelliert sind. Die Nullhypothese  $H_0$  wird dann für ein Signifikanzniveau  $\alpha \in (0, 1)$  verworfen, falls  $W < W_\alpha$ , wobei  $W_\alpha$  das  $(1 - \alpha)$ -Quantil der Grenzverteilung von  $W$  bezeichne, deren Nachweis in [LSF86] erbracht wird. Die kritischen Werte  $W_\alpha$  sind in Abhängigkeit von  $n$  und  $\alpha$  ferner in [DS86] tabelliert.

Zurückkommend auf die Case Study wird wegen  $W_{freq} = 0,8995 > 0,881 = W_\alpha$  und  $W_{avgsev} = 0,9755 > 0,881 = W_\alpha$  (p-Werte: 0,0935 bzw. 0,9294) die Nullhypothese in beiden Fällen bei einem Signifikanzniveau von  $\alpha = 5\%$  nicht abgelehnt, sodass eine hinreichend große Wahrscheinlichkeit dafür besteht, dass die Residuen jeweils normalverteilt sind.

Abschließend wird die Güte der Modellanpassung basierend auf dem Konzept der Varianzzerlegung

$$\sum_{i=1}^n \left( Y_{LM,i}^{(n)} - \bar{Y}_{LM}^{(n)} \right)^2 = \sum_{i=1}^n \left( \hat{Y}_{LM,i}^{(n)} - \bar{Y}_{LM}^{(n)} \right)^2 + \sum_{i=1}^n \left( Y_{LM,i}^{(n)} - \hat{Y}_{LM,i}^{(n)} \right)^2$$

mit  $\bar{Y}_{LM}^{(n)} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n Y_{LM,i}^{(n)}$  untersucht. Hierbei wird die gesamte Varianz

$$TSS_{LM} := \sum_{i=1}^n \left( Y_{LM,i}^{(n)} - \bar{Y}_{LM}^{(n)} \right)^2$$

der abhängigen Variablen  $Y_{LM,i}^{(n)}$  in die aus dem Regressionsmodell erklärte Varianz

$$ESS_{LM} := \sum_{i=1}^n \left( \hat{Y}_{LM,i}^{(n)} - \bar{Y}_{LM}^{(n)} \right)^2$$

und unerklärte Varianz in Form der Residualquadratsumme

$$RSS_{LM} := \sum_{i=1}^n \left( Y_{LM,i}^{(n)} - \hat{Y}_{LM,i}^{(n)} \right)^2$$

zerlegt. Das Bestimmtheitsmaß

$$R_{LM}^2 := \frac{\sum_{i=1}^n \left( \hat{Y}_{LM,i}^{(n)} - \bar{Y}_{LM}^{(n)} \right)^2}{\sum_{i=1}^n \left( Y_{LM,i}^{(n)} - \bar{Y}_{LM}^{(n)} \right)^2} = \frac{ESS_{LM}}{TSS_{LM}} = \frac{TSS_{LM} - RSS_{LM}}{TSS_{LM}} = 1 - \frac{RSS_{LM}}{TSS_{LM}} \in [0, 1]$$

als Quotient aus erklärter Variabilität und Gesamtvariabilität ist dann eine Maßzahl für die Anpassungsgüte des Regressionsmodells. Die Güte ist folglich umso schlechter, je größer die Residualstreuung  $RSS_{LM}$  ist.

Im Fall der CAPITOL beträgt  $R_{freq}^2 = 0,9367$ , d.h. 93,67% der Variation der Schadenfrequenzen sind auf die Anfalljahre als erklärende Variable zurückzuführen. Im Gegensatz dazu spiegelt sich die in Abbildung 4.17 zu beobachtende weite Streuung der Schadendurchschnitte um die Regressionsgerade auch im Bestimmtheitsmaß wider:  $R_{avgsev}^2 = 0,3159$ , sodass lediglich 31,59% der Varianz in den Schadendurchschnitten durch das Modell erklärt werden kann. Ob dennoch statistische Signifikanz für das parametrisierte Modell besteht, wird im Folgenden anhand des *F-Tests* untersucht.

Gemäß [Pru00] prüft der *F-Test* als Hypothesentest bezüglich des Bestimmtheitsmaßes die statistische Signifikanz der Einflussfaktoren mit Ausnahme von  $\beta_{LM,0}$ . Es wird untersucht, ob  $R_{LM}^2 = 0$  ist. Getestet wird folglich die Nullhypothese  $H_0 : \beta_{freq,1} = 0$  bzw.  $H_0 : \beta_{avgsev,1} = 0$  gegen die Alternative  $H_1 : \beta_{freq,1} \neq 0$  bzw.  $H_1 : \beta_{avgsev,1} \neq 0$ . Unter  $H_0$  ist die Teststatistik *F*-verteilt mit 1 und  $n - 2$  Freiheitsgraden, die sich aus der Anzahl der Realisationen und erklärenden Variablen ergibt, d.h.

$$F := \frac{n-2}{1} \cdot \frac{R^2}{1-R^2} \sim F_{1,n-2}.$$

Die Nullhypothese  $H_0$  wird dann für ein Signifikanzniveau  $\alpha \in (0, 1)$  abgelehnt, falls die Teststatistik  $F$  größer als das  $(1 - \alpha)$ -Quantil der entsprechenden  $F$ -Verteilung mit 1 und  $n - 2$  Freiheitsgraden ist.

Im Fall der CAPITOL wird für ein Signifikanzniveau von  $\alpha = 5\%$  die Nullhypothese wegen  $F_{freq} = 192, 4837 > 4, 67 = F_{1,13}$  bzw.  $F_{avgsev} = 6, 0020 > 4, 67 = F_{1,13}$  (p-Werte:  $0, 36 \cdot 10^{-8}$  bzw.  $0, 0292$ ) verworfen. Der Zusammenhang ist folglich jeweils statistisch signifikant.

Aufgrund der vorangegangenen Analyse erscheinen die angenommenen Regressionsmodelle für die ultimativen Schadenfrequenzen und -durchschnitte plausibel. Daher prognostiziert die CAPITOL für das Anfalljahr  $n + 1$  auf Basis der ermittelten Kleinste-Quadrate-Schätzer  $\hat{\beta}_{freq} = (2, 392305, -0, 001156)^T$  bzw.  $\hat{\beta}_{avgsev} = (-13, 316752, 0, 008015)^T$  folgende Schadenfrequenzen bzw. -durchschnitte:

$$E\left(\widehat{Freq}_{<u,n+1}^{(n)}\right) = 0, 060791, \quad E\left(\widehat{AvgSev}_{<u,n+1}^{(n)}\right) = 2, 848680.$$

Die Schätzfehler der Prognosen

$$e.e.\left(\widehat{Y}_{LM,n+1}^{(n)}\right) := \sqrt{\text{Var}\left(\widehat{Y}_{LM,n+1}^{(n)} - Y_{LM,n+1}^{(n)}\right)} = \hat{\sigma}_{LM}^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{\left((n+1) - \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n i\right)^2}{\sum_{i=1}^n \left(i - \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n i\right)^2}\right)$$

betragen

$$e.e.\left(\widehat{freq}_{<u,n+1}^{(n)}\right) = 0, 001587, \quad e.e.\left(\widehat{avgsev}_{<u,n+1}^{(n)}\right) = 0, 062300.$$

### Vorhersagerisiko

Zur Modellierung des Vorhersagerisikos ist zunächst das Parameterrisiko zu berücksichtigen, das im Rahmen der Parameterschätzungen für die angenommenen und parametrisierten linearen Regressionsmodelle entsteht. Wie in Kapitel 4.3.5 aufgezeigt, wird hierzu wiederum das Bootstrapping-Verfahren herangezogen, das gemäß [Hal92] auf einem Resampling der Residuen basiert.

Das in [Efr79] initiierte Bootstrapping-Verfahren für Regressionsmodelle greift Freedman in [Fre81] auf und untermauert Efrons Anwendungen mit der entsprechenden asymptotischen Theorie. Demnach ist unter den Annahmen klassischer Normalregression entscheidend für die Konvergenz der Bootstrap-Verteilung von  $\sqrt{n} \cdot \left(\hat{\beta}_{LM}^* - \hat{\beta}_{LM}\right)$  gegen die Verteilung von  $\sqrt{n} \cdot \left(\hat{\beta}_{LM} - \beta_{LM}\right)$ , dass die im Bootstrap verwendeten Residuen zentriert sind.

Vor diesem Hintergrund wird im Folgenden die Modellierung des Vorhersagerisikos ausgeführt. Ausgehend von den angenommenen Regressionsmodellen

$$\mathbf{Y}_{LM}^{(n)} = \mathbf{X}_{(n)} \cdot \beta_{LM} + \varepsilon_{LM}$$

werden die unbekanntenen Regressionsparameter  $\beta_{LM} = (\beta_{LM,0}, \beta_{LM,1})^T$  mittels der Methode der kleinsten Quadrate durch  $\hat{\beta}_{LM} = \left(\hat{\beta}_{LM,0}, \hat{\beta}_{LM,1}\right)^T$  geschätzt. Die resultierenden Residuen  $\hat{\varepsilon}_{LM} = \mathbf{Y}_{LM}^{(n)} - \hat{\mathbf{Y}}_{LM}$  erfassen die Abweichung des wahren Wertes  $\mathbf{Y}_{LM}^{(n)}$  von der Schätzung

des Erwartungswertes  $\widehat{\mathbf{Y}}_{LM}^{(n)}$  und sind für den folgenden Bootstrap-Prozess mit Verweis auf [Fre81] zunächst zu zentrieren:

$$r_{LM,ctr,i} := \widehat{\varepsilon}_{LM,i} - \frac{1}{n} \cdot \sum_{\iota=1}^n r_{LM,\iota}.$$

Die Menge der beobachteten zentrierten Residuen

$$\{r_{LM,ctr,1}, \dots, r_{LM,ctr,n}\}$$

bildet schließlich die Basis für das Resampling, aus der in  $M_{Sim}$  Wiederholungen mittels „Ziehen mit Zurücklegen“ gezogen wird, um eine Bootstrapping-Stichprobe

$$\{r_{LM,ctr,1}^{*,(M)}, \dots, r_{LM,ctr,n}^{*,(M)}\}$$

für  $1 \leq M \leq M_{Sim}$  zu erzeugen. Mit Hilfe der vorhergesagten Werte  $\widehat{\mathbf{Y}}_{LM}^{(n)}$  werden dann neue Pseudodaten durch

$$\mathbf{Y}_{LM}^{(n),*,(M)} := \widehat{\mathbf{Y}}_{LM}^{(n)} + \mathbf{r}_{LM,ctr}^{*,(M)}$$

gewonnen, für die ebenfalls ein klassisches lineares Regressionsmodell der Form

$$\mathbf{Y}_{LM}^{(n),*,(M)} = \mathbf{X}_{(n)} \cdot \boldsymbol{\beta}_{LM}^{(M)} + \boldsymbol{\varepsilon}_{LM}^{*,(M)}$$

unterstellt wird mit  $\boldsymbol{\varepsilon}_{LM}^{*,(M)} \in L^2 \left( P^{\boldsymbol{\varepsilon}_{LM}^{*,(M)}} \right)$ . Auf dieser Basis werden wiederum die Kleinst-Quadrat-Schätzer  $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{LM}^{*,(M)}$  ermittelt. Unter Berücksichtigung des Parameterrisikos ergibt sich für das folgende Anfalljahr die Prognose

$$\widetilde{\mathbf{Y}}_{LM,n+1}^{(n),*,(M)} := (1 \quad n+1) \cdot \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{LM}^{*,(M)} = \widehat{\beta}_{LM,0}^{*,(M)} + (n+1) \cdot \widehat{\beta}_{LM,1}^{*,(M)}.$$

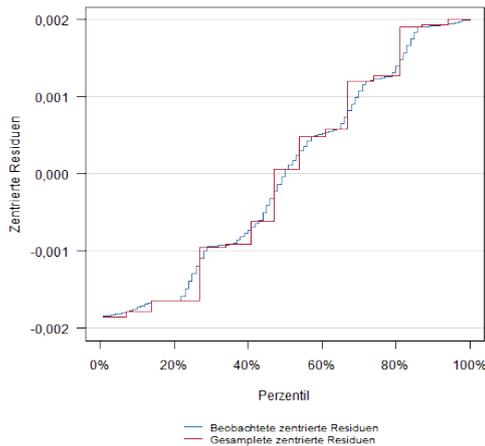
Zur Abbildung des Prozessfehlers wird darüber hinaus eine Prozessverteilung benötigt und erfordert daher eine Verteilungsannahme. Hierzu wird angenommen, dass die beobachteten zentrierten Residuen  $r_{LM,ctr,i}$  Realisierungen einer zentrierten Zufallsvariablen  $\rho_{LM}$  mit Erwartungswert  $E(\rho_{LM}) := \mu_{LM}$  und Varianz  $Var(\rho_{LM}) := \sigma_{LM}^2$  darstellen. Wie im letzten Abschnitt „Modellauswahl und Parametrisierung“ anhand von QQ-Plot und Shapiro-Wilk-Test untersucht, erscheint die Normalverteilung als Residualverteilung plausibel. Auf Grundlage der simulierten Residuen  $r_{LM,ctr,i}^{*,(M)}$  und der linearen Prädiktoren  $\widetilde{\mathbf{Y}}_{LM,n+1}^{(n),*,(M)}$  werden mittels Momentenmethode die Parameter der Normalverteilung in jedem Simulationsspfad  $1 \leq M \leq M_{Sim}$  geschätzt:

$$\widehat{\mu}_{LM}^{*,(M)} := \widetilde{\mathbf{Y}}_{LM,n+1}^{(n),*,(M)}, \quad \widehat{\sigma}_{LM}^{*,(M)} := \sqrt{\frac{1}{n-2} \cdot \sum_{i=1}^n \left( r_{LM,ctr,i}^{*,(M)} - \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n r_{LM,ctr,i}^{*,(M)} \right)^2}.$$

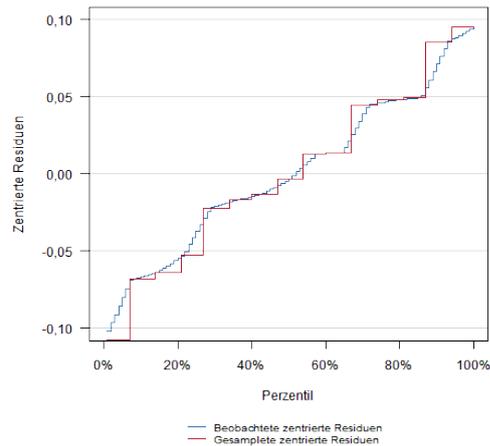
Unter Berücksichtigung von Parameter- und Prozessrisiko gilt für die Prognose des folgenden Anfalljahres schließlich:

$$Y_{LM,n+1}^{(n),*,(M)} \sim \mathcal{N} \left( \widehat{\mu}_{LM}^{*,(M)}, \widehat{\sigma}_{LM}^{2,*,(M)} \right).$$

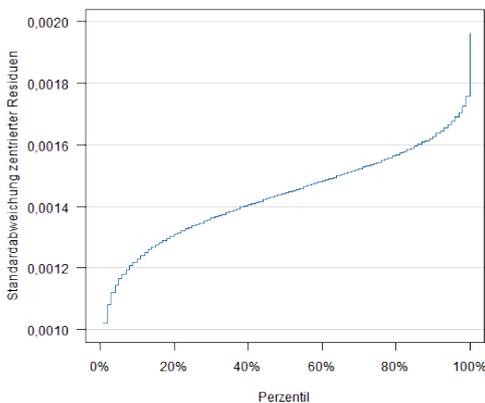
Die CAPITOL führt zur Modellierung des Vorhersagerisikos den gerade beschriebenen Prozess in einer Simulation mit  $M_{Sim} = 100.000$  Wiederholungen aus. In Abbildung 4.19 sind die Perzentilgraphen der zentrierten beobachteten und gesampleten Residuen dargestellt, die aus dem nicht-parametrischen Bootstrap hervorgehen. Sowohl im Fall der Schadenfrequenzen als auch im Fall der Schadendurchschnitte wird deutlich, dass durch Resampling der zentrierten Residuen insbesondere die oberen Quantile steigen.



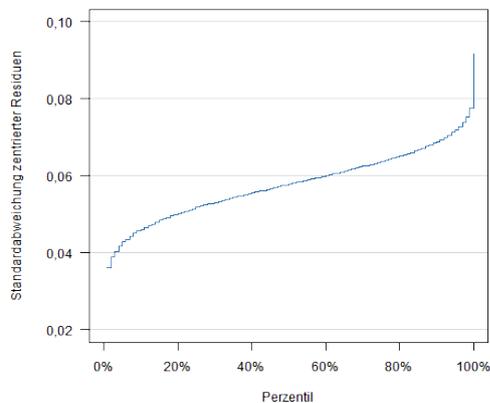
(a) Schadenfrequenz: beobachtete und gesamplete zentrierte Residuen



(b) Schadendurchschnitt: beobachtete und gesamplete zentrierte Residuen



(c) Schadenfrequenz: Prozessrisiko



(d) Schadendurchschnitt: Prozessrisiko

Abbildung 4.19.: Case Study: Perzentilgraphen der zentrierten Residuen und des Prozessrisikos für die Schadenfrequenzen und -durchschnitte der Basisschäden (*Quelle: Eigene Darstellung*)

Weiterhin ist die Variabilität der zentrierten gesampleten Residuen als Perzentilgraph dar-

gestellt, die sich in jedem Simulationspfad  $M$ ,  $1 \leq M \leq M_{Sim}$ , aus den jeweiligen  $n = 15$  Beobachtungen berechnet. Die entsprechenden numerischen Werte sind ausschnittsweise neben weiteren Ergebnissen der Simulation in Tabelle 4.20 aufgeführt. Diese umfassen die Kleinste-Quadrate-Schätzer  $\hat{\beta}_{LM}^{*,(M)}$  für die simulierten Regressionsmodelle und die auf dieser Basis ermittelte Prognose  $\tilde{y}_{LM,n+1}^{(n),*(M)}$  für das Anfalljahr  $n + 1$  unter Berücksichtigung des Parameterrisikos sowie die Prognose  $y_{LM,n+1}^{(n),*(M)}$ , in die zusätzlich das Prozessrisiko mit einfließt.

$M$	Schadenfrequenz					Schadendurchschnitt				
	$\hat{\sigma}_{freq}^{*,(M)}$	$\hat{\beta}_{freq,0}^{*,(M)}$	$\hat{\beta}_{freq,1}^{*,(M)}$	$\tilde{y}_{freq,n+1}^{(n),*(M)}$	$y_{freq,n+1}^{(n),*(M)}$	$\hat{\sigma}_{avgsev}^{*,(M)}$	$\hat{\beta}_{avgsev,0}^{*,(M)}$	$\hat{\beta}_{avgsev,1}^{*,(M)}$	$\tilde{y}_{avgsev,n+1}^{(n),*(M)}$	$y_{avgsev,n+1}^{(n),*(M)}$
1	0,001377	2,286784	-0,001103	0,061090	0,059268	0,066664	-11,324280	0,007021	2,836951	2,748738
2	0,000913	2,485782	-0,001202	0,061604	0,062135	0,065014	-19,007291	0,010832	2,840666	2,878425
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
50.000	0,001550	2,419955	-0,001169	0,061194	0,060341	0,039118	-18,053561	0,010367	2,856498	2,834959
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
99.999	0,001275	2,617143	-0,001268	0,059228	0,059358	0,053278	-18,837513	0,010767	2,879849	2,885254
100.000	0,001595	2,336780	-0,001128	0,060635	0,058880	0,069176	-16,422188	0,009558	2,856691	2,780580

Tabelle 4.20.: Case Study: Empirische Bootstrap-Verteilung des Parameter- und des Vorhersagerisikos für die Schadenfrequenzen und -durchschnitte (in TEUR) der Basisschäden

Ein Schätzer der jeweiligen Parameterverteilung ist durch die empirische Bootstrap-Verteilung der Kleinste-Quadrate-Schätzer  $\hat{\beta}_{LM}^{*,(M)}$  gegeben, deren Standardabweichung den Schätzfehler definiert. Dieser ist neben weiteren deskriptiven Kennzahlen in Tabelle 4.21 zusammengefasst.

Deskriptive Kennzahl	Parameterrisiko: Schadenfrequenz			Parameterrisiko: Schadendurchschnitt		
	$\hat{\beta}_{freq,0}^*$	$\hat{\beta}_{freq,1}^*$	$\tilde{y}_{freq,n+1}^{(n),*}$	$\hat{\beta}_{avgsev,0}^*$	$\hat{\beta}_{avgsev,1}^*$	$\tilde{y}_{avgsev,n+1}^{(n),*}$
Mittelwert	2,391881	-0,001156	0,060792	-13,253106	0,007983	2,848414
Varianz	0,027893	0,000000	0,000001	45,582457	0,000011	0,000934
Standardabweichung	0,167011	0,000083	0,000757	6,751478	0,003361	0,030557
Variationskoeffizient	0,069824	-0,071931	0,012448	-0,509426	0,420976	0,010728
Minimum	1,771185	-0,001499	0,057962	-40,547220	-0,005921	2,724753
Maximum	3,082361	-0,000847	0,063720	14,699862	0,021566	2,971436
<b>Perzentile</b>						
0,50%	1,974518	-0,001364	0,058920	-30,550468	-0,000464	2,770681
1,00%	2,010745	-0,001346	0,059078	-28,851850	0,000264	2,778483
5,00%	2,117496	-0,001292	0,059553	-24,393201	0,002450	2,798037
10,00%	2,174866	-0,001263	0,059812	-21,913440	0,003652	2,808858
20,00%	2,248821	-0,001227	0,060139	-18,971815	0,005144	2,822374
30,00%	2,302041	-0,001200	0,060382	-16,830519	0,006197	2,832302
40,00%	2,348702	-0,001177	0,060593	-14,970004	0,007110	2,840720
50,00%	2,391864	-0,001156	0,060787	-13,244286	0,007977	2,848456
60,00%	2,435123	-0,001134	0,060985	-11,500675	0,008838	2,856284
70,00%	2,481434	-0,001111	0,061199	-9,664371	0,009762	2,864582
80,00%	2,535316	-0,001084	0,061443	-7,547121	0,010829	2,874558
90,00%	2,608030	-0,001048	0,061778	-4,552110	0,012293	2,887847
95,00%	2,666198	-0,001019	0,062042	-2,136754	0,013526	2,898764
99,00%	2,773991	-0,000966	0,062525	2,252091	0,015744	2,918279
99,50%	2,810591	-0,000948	0,062693	3,708986	0,016596	2,925335

Tabelle 4.21.: Case Study: Deskriptive Kennzahlen des Parameterrisikos für die Schadenfrequenzen und -durchschnitte (in TEUR) der Basisschäden

Die simulierten Schätzfehler stimmen im Vergleich mit den analytisch berechneten Schätz-

fehlern

$$e.e. \left( \widehat{\beta}_{freq} \right) = (0, 167385, 0, 000083)^T, \quad e.e. \left( \widehat{\beta}_{avgsev} \right) = (6, 572250, 0, 003271)^T$$

nahezu überein. Lediglich im Fall von

$$e.e. \left( \widehat{\beta}_{avgsev,0}^* \right) = 6, 751478 > 6, 572250 = e.e. \left( \widehat{\beta}_{avgsev,0} \right)$$

ist eine größere Abweichung zu beobachten. An dieser Stelle spiegeln sich die bereits gemachten Beobachtungen im Hinblick auf die weite Streuung um die Regressionsgerade bzw. des eher niedrigen Bestimmtheitsmaßes für die Schadendurchschnitte wider.

Weiterhin korrespondiert die simulierte Prognose  $\widetilde{y}_{freq,n+1}^{(n),*}$  bzw.  $\widetilde{y}_{avgsev,n+1}^{(n),*}$  für das Anfalljahr  $n + 1$  unter Berücksichtigung des Parameterrisikos nahezu mit der vorhergesagten Schadenfrequenz bzw. dem vorhergesagten Schadendurchschnitt der analytischen Berechnung:

$$E \left( \widehat{Freq}_{<u,n+1}^{(n)} \right) = 0, 060791, \quad E \left( \widehat{AvgSev}_{<u,n+1}^{(n)} \right) = 2, 848680.$$

Die Schätzfehler der simulierten Prognosen  $\widetilde{y}_{freq,n+1}^{(n),*}$  bzw.  $\widetilde{y}_{avgsev,n+1}^{(n),*}$  sind durch

$$\left( \widehat{\beta}_{LM,0} - \widehat{\beta}_{LM,0}^{*,(M)} \right) + \left( \widehat{\beta}_{LM,1} - \widehat{\beta}_{LM,1}^{*,(M)} \right) \cdot (n + 1) + r_{LM,ctr}^{**},$$

gegeben, wobei  $r_{LM,ctr}^{**}$  ein zentriertes Residuum der simulierten Regressionsmodelle bezeichne, das aus der dazugehörigen Grundgesamtheit zufällig mit Zurücklegen gezogen wird. Konkret erhält man:

$$e.e. \left( \widehat{freq}_{<u,n+1}^{(n),*} \right) = 0, 001585 \approx e.e. \left( \widehat{freq}_{<u,n+1}^{(n)} \right),$$

$$e.e. \left( \widehat{avgsev}_{<u,n+1}^{(n),*} \right) = 0, 064044 \approx e.e. \left( \widehat{avgsev}_{<u,n+1}^{(n)} \right).$$

Selbst wenn das Prozessrisiko zusätzlich in die Realisation  $y_{freq,n+1}^{(n),*}$  bzw.  $y_{avgsev,n+1}^{(n),*}$  miteinbezogen wird, hat dies keinen Einfluss auf die erwartete Prognosen für das folgende Anfalljahr, wie die entsprechenden Mittelwerte in Tabelle 4.22 belegen.

Deskriptive Kennzahl	Vorhersagerisiko		
	$\widehat{fred}_{n+1}^{(n),*}$	$\widehat{avgsev}_{n+1}^{(n),*}$	$\widehat{u}_{<u,n+1}^{(n),*}$
Mittelwert	0,060798	2,848637	69.305
Varianz	0,000003	0,004361	9.935.644
Standardabweichung	0,001630	0,066041	3.152
Variationskoeffizient	0,026811	0,023183	0,0455
Minimum	0,053405	2,503812	56.200
Maximum	0,068467	3,150353	84.133
Perzentile			
0,50%	0,056575	2,672590	61.296
1,00%	0,056996	2,691087	62.085
5,00%	0,058118	2,740230	64.192
10,00%	0,058727	2,764560	65.313
20,00%	0,059441	2,793968	66.663
30,00%	0,059949	2,814897	67.628
40,00%	0,060381	2,832528	68.476
50,00%	0,060790	2,848748	69.263
60,00%	0,061197	2,865226	70.049
70,00%	0,061639	2,882647	70.915
80,00%	0,062157	2,903055	71.937
90,00%	0,062882	2,932115	73.342
95,00%	0,063493	2,956941	74.559
99,00%	0,064623	3,005450	76.840
99,50%	0,065057	3,024063	77.752

Tabelle 4.22.: Case Study: Deskriptive Kennzahlen des Vorhersagerisikos für die Schadenfrequenzen und -durchschnitte und für den Ultimate der Basisschäden (in TEUR)

Die letztlich für das Prozessrisiko herangezogene Variabilität der zentrierten gesampelten Residuen, die in Abbildung 4.19 dargestellt ist, führt allerdings zu einer höheren Streuung der Prognose. Das verdeutlicht insbesondere ein Vergleich der Perzentile. In Abbildung 4.20 sind die Perzentilgraphen der prognostizierten Schadenfrequenz und des -durchschnitts unter Einbeziehung der Parameterunsicherheit sowie unter zusätzlicher Berücksichtigung des Prozessrisikos als Vorhersagerisiko dargestellt.

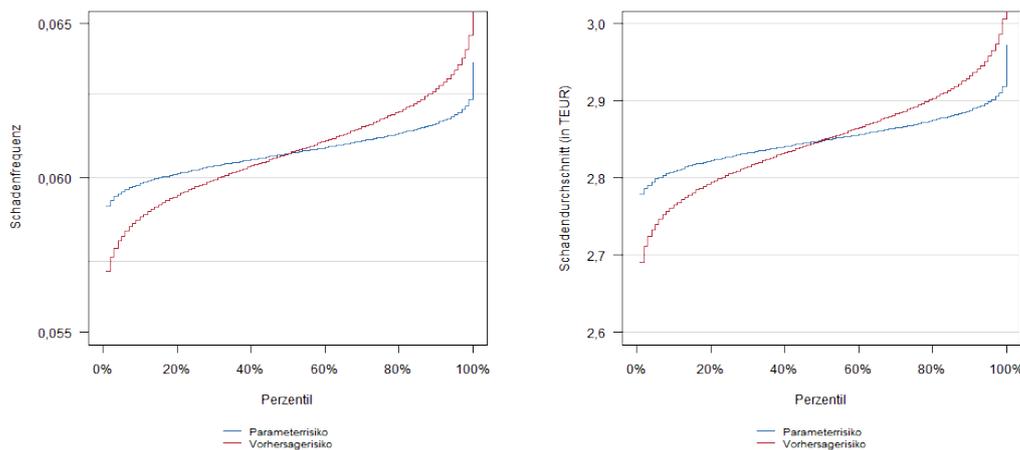


Abbildung 4.20.: Case Study: Perzentilgraphen des Parameter- und Vorhersagerisikos für die prognostizierten Schadenfrequenzen und -durchschnitte (in TEUR) der Basisschäden (*Quelle: Eigene Darstellung*)

Die durch das Prozessrisiko begründete höhere Streuung der Prognose manifestiert sich zu-

dem in den Vorhersagefehlern

$$RMSE\left(\widehat{freq}_{<u,n+1}^{(n),*}\right) = \sqrt{\text{Var}\left(\widehat{freq}_{<u,n+1}^{(n),*}\right)} = 0,001630 > e.e.\left(\widehat{freq}_{<u,n+1}^{(n)}\right)$$

$$RMSE\left(\widehat{avgsev}_{<u,n+1}^{(n),*}\right) = \sqrt{\text{Var}\left(\widehat{avgsev}_{<u,n+1}^{(n),*}\right)} = 0,066041 > e.e.\left(\widehat{avgsev}_{<u,n+1}^{(n)}\right),$$

die sich als Standardabweichung der empirischen Bootstrapverteilung ergeben. Im Vergleich zu den analytisch berechneten Schätzfehlern der Prognosen für das Anfalljahr  $n + 1$  steigen diese.

Die pfadweise Multiplikation der simulierten Schadenfrequenzen  $\widehat{freq}_{<u,n+1}^{(n),*,(M)}$  und durchschnittlichen Schadenhöhen  $\widehat{avgsev}_{<u,n+1}^{(n),*,(M)}$  unter Berücksichtigung des geschätzten Exposures  $\widehat{v}_{n+1}$  in Höhe von 400.000 Jahreseinheiten gemäß Tabelle C.1 des Anhangs liefert den geschätzten Gesamtschadenaufwand

$$\widehat{u}_{<u,n+1}^{(n),*,(M)} := \widehat{freq}_{<u,n+1}^{(n),*,(M)} \cdot \widehat{avgsev}_{<u,n+1}^{(n),*,(M)} \cdot \widehat{v}_{n+1}, \quad 1 \leq M \leq M_{Sim},$$

für die Basisschäden, deren deskriptive Kennzahlen in Tabelle 4.22 aufgeführt sind. So erwartet die CAPITOL für das folgende Geschäftsjahr 2017 einen Schadenaufwand aus Basisschäden  $\widehat{s}_{<u,n+1}^{(n),*}$  von 69.305 TEUR. Da lediglich ein Einzelschadenexzedent das Portefeuille der CAPITOL vor Großschäden schützt, ist eine Entlastung aus Rückversicherung nicht gegeben. Folglich gilt für den zugehörigen Netto-Jahresschadenaufwand:

$$\widehat{\underline{s}}_{<u,n+1}^{(n),*} := \widehat{s}_{<u,n+1}^{(n),*}.$$

Mit einem durch das Reserve-Aktuariat ermittelten Auszahlungspattern werden schließlich die Zeitreihen der prognostizierten Schadenzahlungen, die die Basis für die Diskontierung mittels risikoloser Zinsstrukturkurve  $RFR$  bilden, analog zu den Großschäden ermittelt.

#### 4.3.7. Interne Schadenregulierungskosten

Die Entwicklung der direkt zuzurechnenden und indirekt zuzurechnenden Schadenregulierungskosten werden bei der Modellierung des Prämienrisikos deterministisch berücksichtigt. Gemäß Tabelle C.8 des Anhangs werden für das Geschäftsjahr 2017 ULAE in Höhe von 3,2% der verdienten Bruttoprämien geschätzt. Diese werden gemäß des bestehenden Rückversicherungsvertrages nicht an die RVUs zediert, sodass gilt:

$$E\left(\widehat{S}_{ULAE,n+1}^{(n)}\right) = E\left(\widehat{\underline{S}}_{ULAE,n+1}^{(n)}\right) = 3.200.$$

Wie bei den Basisschäden auch, stellt das Reserve-Aktuariat ein Auszahlungspattern zur Verfügung, um die Cashflows zukünftiger Zahlungen gemäß der risikolosen Zinsstrukturkurve  $RFR$  diskontieren zu können. Entsprechend erhält man:

$$E\left(\widehat{\underline{S}}_{dis,ULAE,n+1}^{(n)}\right) = E\left(\widehat{S}_{dis,ULAE,n+1}^{(n)}\right) = 3.125.$$

### 4.3.8. Ergebnisse

Nach der separaten Modellierung von Groß- und Basisschäden in den Kapiteln 4.3.5 und 4.3.6 werden die jeweiligen Brutto-Größen der CAPITOL neben den ULAE nun im Gesamtschadenmodell aggregiert. Der nominelle Brutto-Jahresgesamtschaden

$$\widehat{S}_{n+1}^{(n)} := \widehat{S}_{u,n+1}^{(n)} + \widehat{S}_{<u,n+1}^{(n)} + \widehat{S}_{ULAE,n+1}^{(n)}$$

bzw. der diskontierte Brutto-Jahresgesamtschaden

$${}_{dis}\widehat{S}_{n+1}^{(n)} := {}_{dis}\widehat{S}_{u,n+1}^{(n)} + {}_{dis}\widehat{S}_{<u,n+1}^{(n)} + {}_{dis}\widehat{S}_{ULAE,n+1}^{(n)}$$

sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst:

Deskriptive Kennzahl	Vorhersagerisiko			
	$\widehat{s}_{n+1}^{(n),*}$	${}_{dis}\widehat{s}_{n+1}^{(n),*}$	$\widehat{s}_{n+1}^{(n),*}$	${}_{dis}\widehat{s}_{n+1}^{(n),*}$
Mittelwert	82.201	80.138	79.409	78.141
Varianz	85.174.764	58.581.036	24.180.198	20.224.175
Standardabweichung	9.229	7.654	4.917	4.497
Variationskoeffizient	0,1123	0,0955	0,0619	0,0576
Minimum	60.389	60.246	60.389	60.246
Maximum	285.617	250.952	106.587	101.781
<b>Perzentile</b>				
0,50%	68.175	67.717	68.061	67.603
1,00%	69.184	68.617	69.001	68.477
5,00%	72.126	71.374	71.798	71.124
10,00%	73.820	72.934	73.349	72.576
20,00%	76.006	74.883	75.282	74.364
30,00%	77.685	76.377	76.707	75.696
40,00%	79.218	77.701	77.954	76.832
50,00%	80.746	79.049	79.147	77.923
60,00%	82.403	80.447	80.379	79.058
70,00%	84.316	82.073	81.719	80.267
80,00%	86.890	84.205	83.380	81.770
90,00%	91.249	87.799	85.799	83.963
95,00%	96.074	91.741	87.937	85.905
99,00%	112.465	104.724	92.165	89.722
99,50%	124.912	114.842	93.847	91.173

Tabelle 4.23.: Case Study: Deskriptive Kennzahlen des Vorhersagerisikos für die Gesamtschadenlast (in TEUR)

So beträgt die erwartete Brutto-Gesamtschadenlast 82.201 TEUR, was einer Schadenquote in Höhe von  $LR = 82,2\%$  entspricht. Im Vergleich dazu liegt das arithmetische Mittel der historisch endabgewickelten nominellen Brutto-Schadenquoten mit  $88,8\%$  folglich  $6,6\%$ -Punkte über dem modellierten ultimativen Ergebnis. Maßgeblich für die niedrigere prognostizierte Loss Ratio ist an dieser Stelle etwa der in der Modellierung der Basisschäden berücksichtigte fallende Trend der Schadenfrequenzen, der durch den gleichzeitig steigenden Trend der Schadendurchschnitte nicht kompensiert wird. Weiterhin schwanken die beobachteten Brutto-Schadenquoten der letzten 15 Anfalljahre zwischen  $79,9\%$  und  $97,7\%$ . Dies entspricht im Modell dem  $44,5\%$ - bzw.  $95,9\%$ -Perzentil, sodass modellseitig sowohl niedrigere als auch höhere Schadenquoten realisiert werden.

Um neben den Brutto-Ergebnissen auch die Netto-Ergebnisse darzustellen, sind die bestehenden Rückversicherungsverträge auf Einzelvertragebene abzubilden. Gemäß Kapitel 4.1 besteht das Rückversicherungsprogramm der CAPITOL lediglich aus einer XL-Deckung pro

Risiko, um das als wesentlich identifizierte Risiko großer Personenschäden abzusichern. Wie in Abschnitt 4.3.5 zur *Berücksichtigung der Rückversicherungsstruktur* aufgezeigt, führt der eingekaufte Rückversicherungsschutz zu einer Risikominderung der Großschäden oberhalb von 1,5 Mio. EUR. Sowohl für die Basisschäden als auch für die internen Schadenregulierungskosten ist Risikominderung durch Rückversicherung nicht vereinbart, sodass die jeweiligen Netto-Ergebnisse mit den entsprechenden Brutto-Ergebnissen übereinstimmen.

Die nominelle Netto-Jahreslast

$$\widehat{\underline{S}}_{n+1}^{(n)} := \widehat{\underline{S}}_{u,n+1}^{(n)} + \widehat{\underline{S}}_{<u,n+1}^{(n)} + \widehat{\underline{S}}_{ULAE,n+1}^{(n)}$$

bzw. der diskontierte Jahresschadenaufwand nach Rückversicherung

$$dis\widehat{\underline{S}}_{n+1}^{(n)} := dis\widehat{\underline{S}}_{u,n+1}^{(n)} + dis\widehat{\underline{S}}_{<u,n+1}^{(n)} + dis\widehat{\underline{S}}_{ULAE,n+1}^{(n)}$$

sind ebenfalls in Tabelle 4.23 dargestellt. Durch den Risikotransfer auf die RVUs sinkt die erwartete Gesamtschadenlast von 82.201 TEUR moderat auf 79.409 TEUR und führt zu einer Netto-Schadenquote in Höhe von  $\underline{LR} = 79,4\%$ .

Im Fokus der weiteren Betrachtung stehen diskontierte Ergebnisgrößen unter Verwendung der maßgeblichen risikofreien Zinsstrukturkurve RFR. Die folgende Abbildung zeigt daher die Perzentilgraphen der diskontierten Brutto- und Netto-Schadenaufwendungen, die sich auf Basis der  $M_{Sim} = 100.000$  durchgeführten Simulationen ergeben.

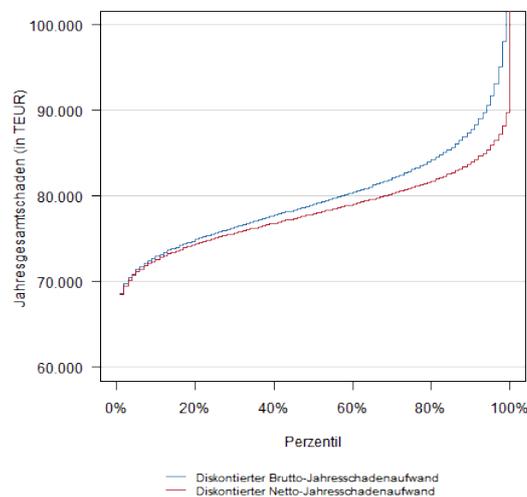


Abbildung 4.21.: Case Study: Perzentilgraphen des Vorhersagerisikos für die Gesamtschadenlast (in TEUR) (*Quelle: Eigene Darstellung*)

Während die Wirkungsweise der Rückversicherung in Bezug auf die Schadenquote nur moderat ausfällt, kann der Variationskoeffizient von 9,6% auf 5,8% reduziert werden. Zudem verdeutlicht Abbildung 4.21, dass mit steigendem Perzentil-Level auch die Entlastung aus

der bestehenden Rückversicherungsordnung zunimmt. Diese Beobachtung spiegelt sich auch bei der Beurteilung der Profitabilität des Geschäftes in Form des Anfalljahresergebnisses wider. Unter Einbeziehung der geplanten Prämieinnahmen und Kosten gemäß Tabellen C.1 und C.2 des Anhangs für das kommende Anfalljahr  $n + 1$  sind in Tabelle 4.24 sowohl das nominelle und diskontierte Brutto-Anfalljahresergebnis

$$\widehat{UWP}_{n+1}^{(n)} := \widehat{P}_{n+1} - \widehat{E}_{n+1} - \widehat{S}_{n+1}^{(n)},$$

$${}_{dis}\widehat{UWP}_{n+1}^{(n)} := \widehat{P}_{n+1} - \widehat{E}_{n+1} - {}_{dis}\widehat{S}_{n+1}^{(n)}$$

als auch das nominelle und diskontierte Netto-Anfalljahresergebnis

$$\widehat{UWP}_{n+1}^{(n)} := \widehat{P}_{n+1} - \widehat{E}_{n+1} - \widehat{S}_{n+1}^{(n)},$$

$${}_{dis}\widehat{UWP}_{n+1}^{(n)} := \widehat{P}_{n+1} - \widehat{E}_{n+1} - {}_{dis}\widehat{S}_{n+1}^{(n)}$$

zusammengefasst.

Deskriptive Kennzahl	Vorhersagerisiko			
	$\widehat{uwp}_{n+1}^{(n),*}$	${}_{dis}\widehat{uwp}_{n+1}^{(n),*}$	$\widehat{uwp}_{n+1}^{(n),*}$	${}_{dis}\widehat{uwp}_{n+1}^{(n),*}$
Mittelwert	3.799	5.862	3.591	4.859
Varianz	85.174.764	58.581.036	24.180.198	20.224.175
Standardabweichung	9.229	7.654	4.917	4.497
Variationskoeffizient	2,4296	1,3056	1,3693	0,9255
Minimum	-199.617	-164.952	-23.587	-18.781
Maximum	25.611	25.754	22.611	22.754
<b>Perzentile</b>				
0,50%	-38.912	-28.842	-10.847	-8.173
1,00%	-26.465	-18.724	-9.165	-6.722
5,00%	-10.074	-5.741	-4.937	-2.905
10,00%	-5.249	-1.799	-2.799	-963
20,00%	-890	1.795	-380	1.230
30,00%	1.684	3.927	1.281	2.733
40,00%	3.597	5.553	2.621	3.942
50,00%	5.254	6.951	3.853	5.077
60,00%	6.782	8.299	5.046	6.168
70,00%	8.315	9.623	6.293	7.304
80,00%	9.994	11.117	7.718	8.636
90,00%	12.180	13.066	9.651	10.424
95,00%	13.874	14.626	11.202	11.876
99,00%	16.816	17.383	13.999	14.523
99,50%	17.825	18.283	14.939	15.397

Tabelle 4.24.: Case Study: Deskriptive Kennzahlen des Vorhersagerisikos für das Anfalljahresergebnis (in TEUR)

Im Vergleich zum mittleren historischen Brutto-Anfalljahresergebnis von -3.028 TEUR laut Tabelle C.9 des Anhangs fällt das erwartete Brutto-Ergebnis in Höhe von 5.862 TEUR für das prognostizierte Anfalljahr im Modell deutlich positiv aus. Ursächlich hierfür sind zwei Effekte: Einerseits zeigt sich bestandsseitig seit 2011 wieder ein Anstieg der Durchschnittsprämie gemäß Tabelle C.1, die im Zeitraum 2015 bis 2016 bereits zu positiven Anfalljahresergebnissen geführt hat. Andererseits reduziert der eingangs bereits erwähnte fallende Trend der Schadenfrequenzen den erwarteten Jahresschadenaufwand aus Basisschäden auf der Schauseite.

Das erwartete Brutto-Anfalljahresergebnis in Höhe von 5.862 TEUR wird mit 57,9% über- bzw. mit 42,1% unterschritten und liegt leicht unterhalb des Medians von 6.951 TEUR.

Diese Beobachtung ist insbesondere in der Wahl der GPD als rechtsschiefe Verteilung für die Modellierung der Großschäden begründet, die wiederum zu linksschiefen Ergebnisfunktionen führt. Gemäß Abbildung 4.22 erzielt die CAPITOL mit 14,2%-iger Wahrscheinlichkeit ein negatives diskontiertes Brutto-Anfalljahresergebnis.

Die risikomindernde Wirkung des Rückversicherungsprogramms zeigt sich vor allem im Bereich der unteren Perzentil-Level. Während das schlechteste diskontierte Brutto-Anfalljahresergebnis -164.952 TEUR beträgt, liegt in der Netto-Betrachtung das Minimum mit -18.781 TEUR deutlich darüber. Umgekehrt liefert das beste diskontierte Brutto-Anfalljahresergebnis in Höhe von 25.754 TEUR ein entsprechend schlechteres Netto-Ergebnis mit 22.754 TEUR. Dies resultiert aus der Tatsache, dass die CAPITOL für ihren Rückversicherungsschutz eine Rückversicherungsprämie an die RVUs zu entrichten hat. Folglich reduziert die XL-Deckung zwar den Aufwand in den Anfalljahren mit einem negativen Ergebnis, mindert aber das Netto-Ergebnis in den Jahren, in denen ein positives Anfalljahresergebnis erwartet wird. So verschlechtert sich auch das mittlere Ergebnis von 5.862 TEUR auf 4.859 TEUR um 1.003 TEUR. Dennoch erhöht sich die Eintrittswahrscheinlichkeit für ein positives diskontiertes Netto-Anfalljahresergebnis leicht von 85,8% auf 86,2%.

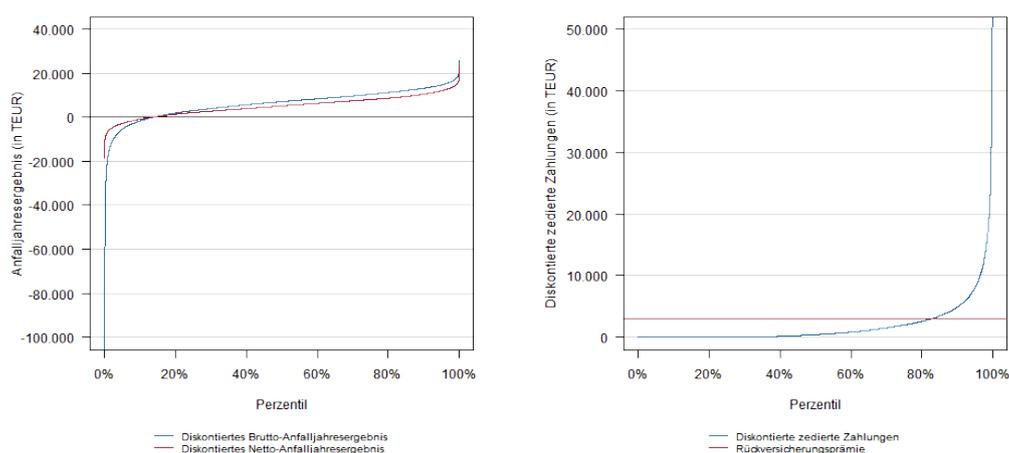


Abbildung 4.22.: Case Study: Perzentilgraphen des Brutto- und Netto-Anfalljahresergebnisses sowie der zedierten Zahlungen des RVU (in TEUR) (Quelle: Eigene Darstellung)

Im Kontext der Wirkungsweise der Rückversicherung ist zudem die Frage von Interesse, in wie vielen Fällen die CAPITOL aus dem bestehenden Schadenexzedenten eine Entlastung erhält. Hierzu zeigt Abbildung 4.22 den Perzentilgraphen der aus der XL-Deckung resultierenden Zahlungen durch die RVUs. In 29,6% der Fälle erhält die CAPITOL keine Entschädigungsleistung aus der Rückdeckung, in 52,8% der Fälle liegt die Entschädigungsleistung unterhalb der vertraglich vereinbarten Rückversicherungsprämie in Höhe von 3,0 Mio. EUR und in 17,6% der Fälle wird diese teilweise weit überschritten.

Abschließend wird das benötigte Risikokapital zunächst als VaR zum Sicherheitsniveau 99,5%

ermittelt. Gemäß Abbildung 4.23 beträgt der diskontierte Brutto-Risikokapitalbedarf 34.704 TEUR und kann durch die bestehende Rückversicherungsordnung um 21.671 TEUR auf 13.033 TEUR reduziert werden.

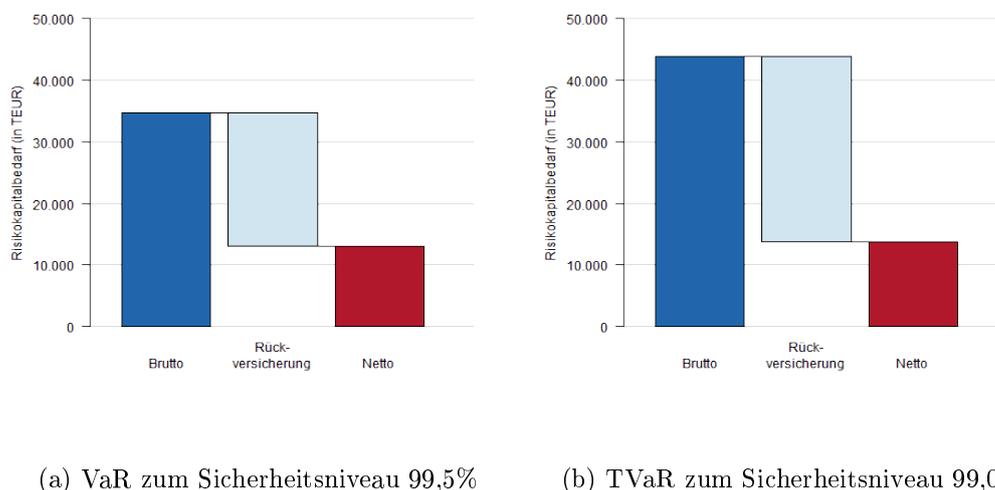


Abbildung 4.23.: Case Study: Diskontierter Brutto- und Netto-Risikokapitalbedarf als VaR zum Sicherheitsniveau 99,5% und als TVaR zum Sicherheitsniveau 99,0% (in TEUR) (Quelle: Eigene Darstellung)

Während sich allerdings das Rückversicherungsprogramm mit 1.003 TEUR negativ auf das diskontierte Anfalljahresergebnis auswirkt, führt die bestehende XL-Deckung zu einer Reduktion des benötigten Risikokapitals und mindert folglich die Kapitalkosten.

Zu Vergleichszwecken berechnet die CAPITOL schließlich noch den diskontierten Risikokapitalbedarf nach dem TVaR zum Niveau von 99%. In diesem Fall muss die CAPITOL ein Brutto-Risikokapital in Höhe von 43.795 TEUR vorhalten, das durch den Risikotransfer an die RVUs auf 13.684 TEUR sinkt.

Die Frage nach der empirischen Bootstrap-Verteilung des Risikokapitalbedarfs als VaR zum Sicherheitsniveau 99,5% wird in einer Simulation mit  $M_{Sim.Sample} := 1.000$  Wiederholungen ermittelt. Hierzu wird jeweils eine Stichprobe vom Umfang  $k \leq M_{Sim}$  mittels „Ziehen ohne Zurücklegen“ aus der Grundgesamtheit des diskontierten Netto-Jahresgesamtschadens  $dis_{\hat{S}_{n+1}}^{(n),*,(M)}$  für  $1 \leq M \leq M_{Sim}$  gezogen. Um letztlich bei einem Konfidenzniveau von 95% auf 5% bzw. 1% präzise schätzen zu können, wird entsprechend ein Stichprobenumfang von  $k = 500$  bzw.  $k = 10.000$  gewählt.

Die deskriptiven Kennzahlen in Tabelle 4.25 sowie die Perzentilgraphen in Abbildung 4.24 fassen die Ergebnisse zusammen.

Deskriptive Kennzahl	$VaR_{99,5\%} \left( \widehat{d}_{is}^{(n),*} \right)$	
	$k = 500$	$k = 10.000$
Mittelwert	12.695	13.013
Varianz	1.301.574	91.257
Standardabweichung	1.141	302
Variationskoeffizient	0,0899	0,0232
Minimum	9.840	12.175
Maximum	16.993	14.072
Perzentile		
0,50%	10.428	12.329
1,00%	10.517	12.418
5,00%	11.036	12.546
10,00%	11.298	12.629
20,00%	11.736	12.751
30,00%	12.036	12.817
40,00%	12.295	12.915
50,00%	12.582	13.000
60,00%	12.886	13.107
70,00%	13.198	13.188
80,00%	13.632	13.265
90,00%	14.271	13.397
95,00%	14.712	13.510
99,00%	15.685	13.738
99,50%	15.993	13.817

Tabelle 4.25.: Case Study: Deskriptive Kennzahlen des Vorhersagerisikos für den diskontierten Netto-Risikokapitalbedarf als VaR zum Sicherheitsniveau 99,5% (in TEUR)

Bei einer Fehlerobergrenze von 1% zeigt sich, dass der Risikokapitalbedarf moderat zwischen 12.175 TEUR und 14.072 TEUR schwankt. In diesem Fall entspricht das benötigte, ausgewiesene Risikokapital in Höhe von 13.033 TEUR dem 53,8%-Perzentil. Eine größere Fehlertoleranz spiegelt sich entsprechend in einem volatileren Verhalten des erforderlichen Risikokapitalbedarfs wider.

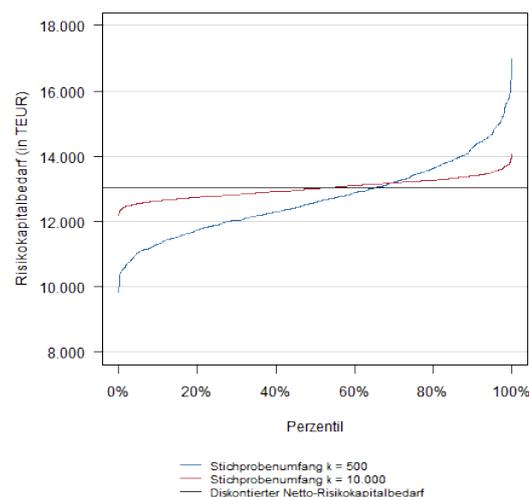


Abbildung 4.24.: Case Study: Perzentilgraphen des Vorhersagerisikos für den diskontierten Netto-Risikokapitalbedarf als VaR zum Sicherheitsniveau 99,5% (in TEUR) (Quelle: Eigene Darstellung)

### 4.3.9. Vergleich zum Standardmodell

Im folgenden Abschnitt wird das unternehmensindividuelle Modell des Prämienrisikos der CAPITOL mit dem Pendant im Solvency II-Standardmodell verglichen. Hierzu werden in einem ersten Schritt die Ergebnisse beider Modellierungsansätze gegenübergestellt.

#### Ergebnisvergleich

Das im Kontext von Solvency II maßgebliche Risikomaß ist der Value at Risk zum Sicherheitsniveau 99,5%. Wie in Kapitel 4.3.8 aufgezeigt, berechnet sich der diskontierte Netto-Risikokapitalbedarf für das Prämienrisiko der CAPITOL auf 13.033 TEUR und liegt damit deutlich unterhalb der Risikokapitalanforderung  $SCR_{prem}$ , die sich im Solvency II-Standardmodell gemäß Tabelle 4.1 zu 23.351 TEUR ergibt. Demnach hat die CAPITOL nach dem Standardmodell ein um 79,2% höheres Risikokapital für das Prämienrisiko vorzuhalten. Die Diskrepanz zwischen dem unternehmenseigenen und dem standardisierten Ansatz ist markant, insbesondere vor dem Hintergrund, dass das Risikoprofil des KH-Monoliners im Privatkundensegment als marktüblich angesehen werden kann.

Die Ursache für den großen Unterschied zwischen beiden Ansätzen zeigt sich im Vergleich der Variationskoeffizienten, die ein Maß für die Volatilität des zugrunde liegenden Risikos darstellen. Gemäß Abschnitt 3.1.3 zum *Prämien- und Reserverisiko* setzt sich nämlich der Risikofaktor des Prämienrisikos im Solvency II-Standardmodell aufgrund der bestehenden XL-Deckung als Produkt aus dem Risikofaktor für das Brutto-Prämienrisiko  $\sigma_{(GrossPrem,4)}$  und einem Anpassungsfaktor für die nichtproportionale Rückversicherung  $NP_4$  laut Tabelle A.4 zusammen:

$$\sigma_{(prem,4)} = \sigma_{(GrossPrem,4)} \cdot NP_4 = 10\% \cdot 80\% = 8\%.$$

Die Differenz des Standardrisikofaktors zum CAPITOL-individuell bestimmten Variationskoeffizienten nach Tabelle 4.23 in Höhe von 5,76% beträgt 2,24%-Punkte. Folglich erscheint das Geschäft der CAPITOL in der Sparte KH stabiler als es durch das Standardmodell angenommen wird.

Anknüpfend an Abschnitt 3.4.2 zum *Prämienrisiko* wird abschließend die dem Prämienrisiko des Standardmodells zugrunde liegende Annahme einer Log-Normalverteilung überprüft. Hierzu wird der logarithmierte diskontierte Netto-Jahresschadenaufwand  $\widehat{dis}_{n+1}^{(n),*}$  zunächst der angenommenen Normalverteilung graphisch im QQ-Plot in Abbildung 4.25 gegenübergestellt.

Auf Basis des QQ-Plots erscheint die Annahme einer Log-Normalverteilung für den diskontierten Netto-Jahresschadenaufwand zumindest bis zum 99,5%-Perzentil von 2,58 gerechtfertigt. Oberhalb dessen zeigt sich eine leichte Rechtskrümmung der Punktwolke in Bezug auf die Regressionsgerade, sodass der Tail der simulierten Verteilung schwerer als der Tail der Normalverteilung ist. Der visuelle Eindruck wird indes weiter durch den *Kolmogorov-Smirnov-Test* und *Anderson-Darling-Test* gestützt. Denn unter der Nullhypothese  $H_0$ , dass der diskontierte Netto-Jahresschadenaufwand der CAPITOL aus einer Log-Normalverteilung stammt, wird bei einem Signifikanzniveau von  $\alpha = 5\%$  wegen  $D_{MSim} = 0,0098 > 0,0019 = K_{\alpha}^*$  (p-Wert:  $0,11 \cdot 10^{-7}$ ) bzw.  $A_{MSim}^2 = 19,186 > 0,787 = A_{\alpha}^{2,*}$  (p-Wert:  $0,06 \cdot 10^{-7}$ ) die

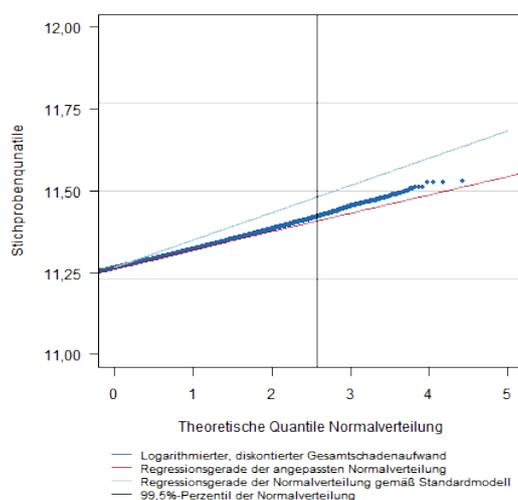


Abbildung 4.25.: Case Study: Vergleich zwischen der dem Standardmodell zugrunde liegenden Annahmen und dem unternehmenseigenen Ansatz (*Quelle: Eigene Darstellung*)

Nullhypothese jeweils verworfen. Die Log-Normalverteilungsannahme des Standardmodells kann somit für die CAPITOL nicht bestätigt werden. Dies ist allerdings nicht allgemeingültig und kann durchaus unterschiedlich bei anderen Marktteilnehmern und Sparten ausfallen.

Ungeachtet dessen visualisiert die in Abbildung 4.25 eingetragene Regressionsgerade der Log-Normalverteilung auf Basis des durch das Solvency II-Standardmodell marktweit vorgegebenen Risikofaktors von 8% den Unterschied zur unternehmensindividuell ermittelten Regressionsgeraden. Das Standardmodell ist im Fall der CAPITOL schlicht zu konservativ in dem Sinne, dass die Solvenzkapitalanforderung deutlich oberhalb des benötigten Risikokapitals liegt, das auf Basis des unternehmenseigenen Modells ermittelt wird.

### Potential des unternehmensindividuellen Modells

Im weiteren Verlauf wird nun erörtert, welchen Nutzen die CAPITOL aus dem unternehmenseigenen Modell ziehen kann. In diesem Kontext wird zudem untersucht, inwiefern die in Kapitel 3.4 geäußerten Kritikpunkte am Solvency II-Standardmodell durch den individuellen Ansatz ausgeräumt werden können.

In einem ersten Schritt werden die Modelle zur Abbildung des Prämienrisikos gegenübergestellt. Das Solvency II-Standardmodell bildet das Prämienrisiko als Faktor-basiertes Modell ab und zieht verdiente Prämieinnahmen als Maß für die Risikoexponierung heran. Wie in Abschnitt 3.4.2 zum *Prämienrisiko* diskutiert, sind Prämien allerdings kein geeignetes Maß, um die Risikoexponierung adäquat zu erfassen. Dem begegnet das unternehmensindividuelle Modell der CAPITOL durch die Separierung von Groß- und Basisschäden und weist somit Parallelen zum Modellansatz im Standardmodell des SST auf.

Die Trennung von Groß- und Basisschäden sowie die anschließende Modellierung der Großschäden basiert mathematisch auf der Extremwerttheorie, insbesondere auf der Theorie der Threshold-Überschreitungen gemäß Kapitel 2.7.2. Für diejenigen Schäden oberhalb eines geeigneten Thresholds  $u$  wird schließlich ein Kollektives Modell im Sinne von Kapitel 2.4 angenommen, wobei die unterstellte Poisson-Verteilung für die Schadenanzahl  $N_{u,i}$  und die GPD für die Ultimate-Schadenaufwände der i.i.d. Folge  $\widehat{X}_{u,\cdot,1}, \dots, \widehat{X}_{u,\cdot,N_u} \sim \widehat{X}_{u,\cdot}$  zu parametrisieren sind. Dieser Modellansatz eröffnet somit die Möglichkeit, spartenspezifische Besonderheiten zu berücksichtigen. Im Fall der CAPITOL besteht die Herausforderung darin, Risiken bezüglich großer Personenschäden in KH adäquat abzubilden. Einerseits weisen diese in der Regel eine lange Abwicklungsdauer auf. Andererseits unterliegen große Personenschäden gemäß Kapitel 4.3.2 neben der inflationsbedingten Teuerung einer zusätzlichen Teuerung im Pflegebereich, die in den entsprechenden AsIf-Korrekturen der  $\widehat{X}_{u,i,j}$  unter Einbeziehung der Superimposed Inflation Berücksichtigung findet. Vor diesem Hintergrund erweist sich dann die GPD entsprechend ihrer Charakteristik als heavy-tailed Verteilung gemäß Kapitel 2.7.2 zur Modellierung großer Personenschäden in KH als geeignet.

Des Weiteren zeigt im Fall der CAPITOL die Modellierung der Basisschäden in Kapitel 4.3.6 auf, dass erst eine differenzierte Analyse adverse Effekte identifiziert, die im Modell zu berücksichtigen sind. So verzeichnet der Schadenbedarf  $\widehat{Z}_{<u,i}^{(n)}$  der vergangenen Anfalljahre zwar einen fortlaufenden Rückgang. Allerdings folgen Schadenfrequenzen  $\widehat{Freq}_{<u,i}^{(n)}$  und - durchschnittliche  $\widehat{AvgSev}_{<u,i}^{(n)}$  diesem nicht gleichermaßen: dem Abwärtstrend der Schadenfrequenzen steht ein Anstieg der Schadendurchschnitte gegenüber. Die gewonnenen Erkenntnisse eröffnen Fragestellungen zu weiterführenden Analysemöglichkeiten. So kann etwa untersucht werden, ob die beobachteten Trends charakteristisch für den Gesamtbestand sind oder sich gar nur auf einzelne Altersgruppen bzw. Typklassen erstrecken.

Unter Berücksichtigung obiger Ausführungen unterstreicht der gewählte Modellansatz erneut, dass die im Standardmodell herangezogenen Prämieinnahmen kein angemessenes Exposure-Maß darstellen, um spartenspezifische Besonderheiten und damit ein VU-individuelles Risikoprofil auf geeignete Weise abzubilden. Hierzu ist eine detaillierte Modellierung erforderlich. Erkenntnisse aus dem Modellierungsprozess, wie zum Beispiel die erwartete Großschadenfrequenz sowie der erwartete Schadenaufwand aus Groß- und Basisschäden, bieten darüber hinaus Impulse für die interne Planung und Steuerung. Im Ergebnis weist der KH-Monoliner einen im Vergleich zum Standardmodell niedrigeren Variationskoeffizienten aus, wodurch die Anforderung an das vorzuhaltende Risikokapital gesenkt werden kann. Auch in diesem Punkt hat die Diskussion gemäß Kapitel 3.4 gezeigt, dass der Standardrisikofaktor streng genommen auf kein einziges VU zutrifft, insbesondere dann nicht, je spezieller das Geschäftsmodell des VUs ist. Die Reduktion des benötigten Risikokapitals als Solvenzkapital ist ein gern mitgenommener Nebeneffekt. Doch der Nutzen des detaillierten Modells übersteigt die reine Erfüllung aufsichtsrechtlicher Anforderungen im Rahmen von Solvency II.

In diesem Kontext ist die Brutto-Netto-Überleitung unter Solvency II sowie im unternehmensindividuellen Modell zu nennen. Hier legt der Abschnitt 3.4.2 zur *Berücksichtigung von Rückversicherung* dar, dass im Solvency II-Standardmodell lediglich proportionale Rückversicherung angemessen berücksichtigt wird und die Wirkungsweise nichtproportionaler Rück-

versicherung über einen schlichten Faktor-basierten Ansatz nur grob Rechnung getragen werden kann. Allerdings spielt der Risikotransfer auf die RVUs eine maßgebliche Rolle für die Ergebnisse des VUs. Erst durch die Berücksichtigung der bestehenden und auf das VU zugeschnittenen Rückversicherungsstruktur auf Einzelvertrageebene können die wirtschaftlichen Effekte vollumfänglich abgebildet werden. Wie Kapitel 4.3.8 im Fall der CAPITOL zeigt, wirkt die vereinbarte XL-Deckung sehr unterschiedlich. Gemäß Tabelle 4.18 wird die erwartete Jahreslast aus Großschäden im Mittel um 28,8% von 9.697 TEUR auf 6.904 TEUR durch den Schadenexzedenten entlastet. Insbesondere reduziert der Rückversicherungsschutz die Streuung, was sich im Variationskoeffizienten, der von 89,4% auf 54,7% sinkt, niederschlägt. Im Kontext der Gesamtschadenlast wird der beschriebene Effekt abgeschwächt. Gemäß Tabelle 4.23 reduziert sich der Brutto-Jahresgesamtschaden von 80.138 TEUR auf 78.141 TEUR um lediglich 2,5% im Netto. Wie in Kapitel 4.3.8 erörtert, fällt die Auswirkung des bestehenden Rückversicherungsprogramms auf die Brutto- und Netto-Schadenquote moderat aus. Mit Blick auf das Anfalljahresergebnis zeigt sich des Weiteren, dass der KH-XL zwar den Aufwand in den Anfalljahren mit einem negativen Ergebnis mindert, aber das mittlere Netto-Ergebnis in den Jahren, in denen ein positives Anfalljahresergebnis erwartet wird, um um 1.003 TEUR verschlechtert. Der mittleren Ergebnisverschlechterung steht wiederum eine Reduktion der Solvenzkapitalanforderung von 62,4% entgegen. Zu bemerken ist an dieser Stelle, dass die Rückversicherungsordnung der CAPITOL einfacher Natur ist. Dennoch kann die Wirkungsweise selbst eines einzelnen XL-Vertrages nicht durch einen Überleitungsfaktor abgegriffen werden. Komplexere Rückversicherungsprogramme können die Effekte sowohl in die eine als auch in die andere Richtung verstärken und somit erhebliche Auswirkungen auf das Netto-Ergebnis des VUs haben. Daher ist eine möglichst realitätsnahe Abbildung der Rückversicherungsstruktur erforderlich, um der Wirkungsweise des Rückversicherungsprogramms gerecht zu werden.

Aus dem erläuterten Modellierungsansatz resultieren Brutto- und Netto-Ergebnisverteilungen des Vorhersagerisikos für Groß- und Basisschäden und damit unter Berücksichtigung der ULAE auch für den Jahresgesamtschaden. Damit wird im CAPITOL-individuellen Modell neben dem Prozessrisiko auch explizit das Parameterrisiko vollständig abgebildet, das im gesamten Solvency II-Standardmodell unberücksichtigt bleibt. Im Vergleich zum Standardmodell des SST, das gemäß Kapitel 3.2 Standardwerte für den Variationskoeffizienten des Parameterrisikos vorsieht, erhält man im unternehmenseigenen Modell durch die Anwendung des Bootstrapping-Verfahrens nicht nur die Höhe über den Schätzfehler, sondern die Parameterverteilung und damit auch die Vorhersageverteilung als Mischung aus Prozess- und Parameterverteilung.

Die Brutto- und Netto-Ergebnisverteilungen des Vorhersagerisikos bilden wiederum die Basis zur Ermittlung von deskriptiven Kennzahlen wie Erwartungswert oder Perzentilen. Weiterhin fußt die Berechnung des erforderlichen Risikokapitals dann auf der Anwendung eines Shortfall-Risikomaßes auf die empirische Ergebnisverteilungen, die einerseits erlauben, die Solvenzkapitalanforderung nach dem unter Solvency II maßgeblichen Risikomaß Value at Risk zum Konfidenzniveau  $\alpha = 99,5\%$  zu ermitteln. Wie in Abschnitt 3.4.2 zur *Wahl des Risikomaßes* abgehandelt, ist der Value at Risk ein nicht-kohärentes Risikomaß, das die erwartete Verlusthöhe ausblendet. Andererseits eröffnen die empirischen Ergebnisverteilungen

die Flexibilität, nicht nur das Risikomaß, sondern auch das Sicherheitsniveau zu variieren. Am Beispiel von Kapitel 4.3.8 demonstriert, kann so etwa in Anlehnung an die regulatorischen Anforderungen des SST auch der Tail Value at Risk zum Konfidenzniveau  $\alpha = 99,0\%$  ermittelt werden, der eine klare ökonomische Interpretation erlaubt und im Verlustfall auch den erwarteten Verlust berücksichtigt. Mit Blick auf eine wert- und risikoorientierte Unternehmenssteuerung ist der TVaR dem VaR vorzuziehen. Nicht zuletzt deshalb, weil der TVaR als kohärentes Risikomaß insbesondere subadditiv ist und demnach Diversifikationseffekte adäquat abbildet.

Neben den Ergebnisverteilungen resultieren aus der CAPITOL-individuellen Modellierung des Prämienrisikos zudem die nominellen sowie diskontierten Brutto- und Netto-Cashflows zukünftiger Schadenzahlungen getrennt für Großschäden, Basisschäden und ULAE. Mit Hilfe der Cashflow-Informationen können nach dem Durationskonzept etwa die sogenannten *Macaulay-Durations* berechnet werden, die Grundlage für ein Durations-Matching im *Asset Liability Management* bilden. Dessen Ziel ist die optimierte strategische Steuerung eines Unternehmens nach finanziellen Kriterien, bei der Assets und Liabilities sowie ihre gegenseitigen Abhängigkeiten simultan betrachtet werden. Die Durations der Aktiv- und Passivseite werden dann dazu verwendet, um das Wechselspiel zwischen Kapitalanlage und den Verpflichtungen des VUs gegenüber den Versicherungsnehmern zu berücksichtigen. Wie unterschiedlich die Charakteristik der Groß- und Basisschäden ist, spiegelt sich auch in der Duration wider: so beträgt die erwartete Macaulay-Duration der diskontierten Netto-Großschäden  $\hat{x}_{u,n+1}^{*,(L)}$  10,52 und die der Basisschäden  $\hat{s}_{<u,n+1}^*$  lediglich 1,75.

Ein weiteres elementares Ergebnis des gewählten Modells für das Prämienrisiko ist das Anfalljahresergebnis, das die Profitabilität des Geschäfts bewertet. Der modulare Modellierungsansatz erlaubt es nun, das Anfalljahresergebnis in seine Bestandteile zu zerlegen und eröffnet damit die Möglichkeit, zu ergründen, weshalb ein vorgegebenes Ziel-Anfalljahresergebnis nicht erreicht wird. Ziel ist die Identifikation von Ansatzpunkten zur Verbesserung des Anfalljahresergebnisses. Beispielhaft ist in Abbildung 4.26 das erwartete Brutto-Anfalljahresergebnis für das Anfalljahr  $n + 1$  mit den Komponenten verdiente Brutto-Prämieneinnahmen, Ultimate-Schadenaufwand aus Basis- und Großschäden unter Berücksichtigung der ULAE sowie den Kostenpositionen aus Abschluss- und Verwaltungskosten dargestellt.

So können unter Berücksichtigung der erwarteten Schadenbelastung hinsichtlich der Brutto-Prämieneinnahmen folgende Fragestellungen untersucht werden:

- Ist das Prämienniveau angemessen?
- Können die Prämieneinnahmen etwa durch eine gesunde Wachstumsstrategie gesteigert werden?
- Ist eine Beitragsanpassung des Bestandes ausreichend oder ist gar eine Sanierung des Bestandes notwendig?

Daran schließt sich die kritische Überprüfung der Abschluss- und Verwaltungskosten an, um gegebenenfalls neue Vertriebskonzepte zu erarbeiten bzw. das Prozess- und Kostenmanagement zu optimieren. Einen wichtigen Ansatzpunkt, um das Anfalljahresergebnis zu verbessern, bietet die Schadenseite. Daher ist die Frage von Interesse, ob die Schadenbelastung

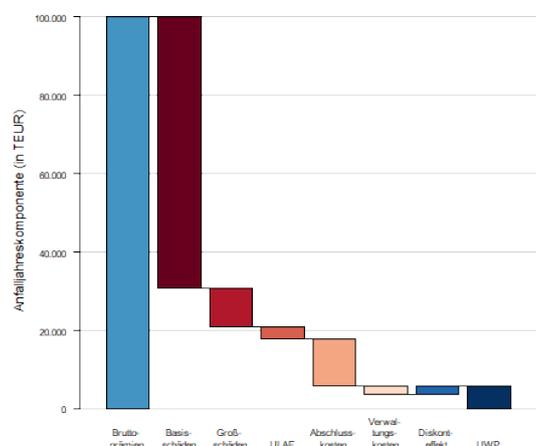


Abbildung 4.26.: Case Study: Komponenten des erwarteten Brutto-Anfalljahresergebnisses (in TEUR) (Quelle: Eigene Darstellung)

insgesamt bzw. speziell bei den Groß- oder Basisschäden zu hoch ist. Hierzu ist einerseits die Risikoselektion und andererseits die Tarifierung auf den Prüfstand zu stellen. Im Schadenfall gilt es dann, die Effektivität des Schadenmanagements zu beurteilen. Der Perspektivenwechsel von Brutto zu Netto geht mit der Frage einher, ob durch eine Anpassung der Rückversicherungsstruktur das Netto-Ergebnis verbessert werden kann. Neben der Analyse auf Basis von Erwartungswerten ist die in Abbildung 4.26 dargestellte Zerlegung des Anfalljahresergebnisses auch für beliebige Perzentil-Level möglich, deren Erkenntnisse folglich mit in den unternehmerischen Entscheidungsprozess einfließen können.

### Fazit

Wie eingangs bereits erwähnt, übersteigt der vorgestellte Modellierungsansatz für das Prämienrisiko die reine Erfüllung aufsichtsrechtlicher Anforderungen im Rahmen von Solvency II. Die Abbildung des unternehmensindividuellen Risikoprofils schafft einerseits Transparenz über die eingegangenen Risiken und identifiziert andererseits die Risikotreiber. Es wird aber nicht nur die reine Risikosicht eingenommen, sondern durch die erzeugten Ergebnisverteilungen kann darüber hinaus die Profitabilität des Geschäftes bewertet werden. Mit der Modellierung des Prämienrisikos als Bestandteil des vt. Modells ist darüber hinaus die Grundlage für die Entwicklung hin zu einem internen Unternehmensmodell gelegt, das wiederum zur wert- und risikoorientierten Unternehmenssteuerung herangezogen werden kann, um langfristig den Unternehmenswert steigern zu können.

## 5. Konklusion und Ausblick

Die vorliegende Arbeit beschäftigte sich mit der Modellierung des Prämienrisikos in der Schaden- und Unfallversicherung vor dem Hintergrund aufsichtsrechtlicher Anforderungen und unternehmensspezifischer Ansätze. Im Mittelpunkt stand die Frage, ob der Faktor-basierte Ansatz im Standardmodell unter Solvency II geeignet ist, um das Risikoprofil eines Unternehmens adäquat abzubilden. Um diese Aufgabenstellung zu untersuchen, wurde als zentrales Element dieser Arbeit ein individuelles unternehmensspezifisches Modell für ein fiktives deutsches Versicherungsunternehmen entwickelt. Das Potential dieses Modells wurde dem des Standardmodells unter Solvency II gegenüber gestellt.

Doch zunächst wurde aus aktuarieller Perspektive der Modellansatz im Solvency II-Standardmodell mit den Modellansätzen des Swiss Solvency Tests und unter US-Solvency dahingehend vergleichend analysiert, ob das Solvency II-Standardmodell angemessen oder aus Gründen der Praktikabilität zu einfach umgesetzt wird. Dabei lag der Schwerpunkt auf dem Vergleich der Modellauswahl, der Berücksichtigung des Parameterrisikos und des Risikotransfers durch proportionale und nichtproportionale Rückversicherung. Weiterhin wurde die Abbildung von Abhängigkeitsstrukturen durch Korrelation in Verbindung mit Diversifikationseffekten sowie die Wahl des VaR als Risikomaß beurteilt.

So konnten aus diesem Blickwinkel die folgenden Kritikpunkte bei der mathematischen Umsetzung des Standardmodells unter Solvency II identifiziert werden: Neben der Wahl des VaR als Risikomaß stellte sich auch das Faktor-basierte Modell für das Prämienrisiko als ungeeignet heraus. Das Parameterrisiko bleibt im ganzen Standardmodell unberücksichtigt. Darüber hinaus lässt sich kein mathematischer Zusammenhang zwischen Korrelation und Diversifikation herstellen und nichtproportionale Rückversicherung wird nur unzureichend betrachtet. Die Analyse legte dar, dass das Standardmodell unter Solvency II im Hinblick auf das Prämienrisiko insgesamt zu einfach umgesetzt wird und daher das Risikoprofil eines Versicherungsunternehmens nur grob erfassen kann. Daher eignet sich das Standardmodell unter Solvency II nicht zu einer risikogerechten Unternehmenssteuerung.

Vor diesem Hintergrund wurde in der vorliegenden Arbeit ein unternehmensspezifisches Modell für das Prämienrisiko der CAPITOL, ein fiktives deutsches Versicherungsunternehmen als Monoliner in der Kraftfahrt-Haftpflichtversicherung, entwickelt. Um das Potential dieses individuellen Modells gegenüber dem Standardmodell unter Solvency II herausarbeiten zu können, wurden die folgenden Anforderungen an das unternehmenseigene Modell gestellt:

- Berücksichtigung des individuellen Risikoprofils sowie spartenspezifischer Besonderheiten des Unternehmens

- Realistische Darstellung der Rückversicherungsstruktur zur adäquaten Abbildung der Wirkungsweise des Rückversicherungsprogramms
- Vollumfängliche Berücksichtigung des Vorhersagerisikos und damit auch des Parameterrisikos
- Flexibilität in der Wahl des Risikomaßes und des Sicherheitsniveaus
- Erfüllung von aufsichtsrechtlichen Maßgaben.

Basierend auf der Extremwerttheorie wurden im unternehmensindividuellen Modell Groß- und Basisschäden separat voneinander modelliert. Die Modellierung der Großschäden berücksichtigt dabei insbesondere die Theorie der Threshold-Überschreitungen, wobei für Großschäden oberhalb eines geeignet zu wählenden Threshold ein kollektives Modell angenommen wurde. Für letzteres wurde bezüglich der Anzahl der Großschadenfälle eine Poisson-Verteilung unterstellt, die unabhängig von der i.i.d. Folge der Ultimate-Schadenaufwände sei. Mit Hilfe des G-Tests konnte die Modellannahme hinsichtlich der Großschadenanzahlen untermauert werden. Zur Modellierung der Ultimate-Schadenaufwände wurde eine verallgemeinerte Pareto-Verteilung herangezogen und mittels Maximum-Likelihood-Methode parametrisiert. Die Ergebnisse des Kolmogorov-Smirnov-Tests und des Anderson-Darling-Tests ließen den Schluss zu, dass eine hinreichend große Wahrscheinlichkeit dafür besteht, dass die angepasste parametrische Verteilung die beobachtete Stichprobe erzeugt hat. Für die Modellierung des ultimativen Basisschadenaufwandes wurde ein Frequency-Severity-Ansatz gewählt, bei dem für die Schadenfrequenzen und -durchschnitte jeweils ein klassisches Regressionsmodell unterstellt wurde, dessen Anpassungsgüte durch den F-Test beurteilt wurde. Das Parameterrisiko konnte schließlich über ein Bootstrapping-Verfahren in einer Monte-Carlo-Simulationsstudie dargestellt werden.

Der Vergleich des unternehmenseigenen Modells mit der Solvency II-Standardformel hat gezeigt, dass das unternehmensindividuelle Modell die Schwächen hinsichtlich des Standardmodells aushebelt. Neben dem direkten Effekt, dass die Risikokapitalanforderung deutlich reduziert werden konnte, ließ sich feststellen, dass ein unternehmenseigenes Modell zu weit mehr als der Erfüllung der aufsichtsrechtlichen Anforderungen dient. Im Besonderen ist es dem Standardmodell in den folgenden Punkten überlegen:

- Transparenz bezüglich der eingegangenen Risiken und Identifikation der Risikotreiber aufgrund der Abbildung des individuellen Risikoprofils
- Möglichkeit zur Bewertung der Profitabilität des gesamten Geschäfts.

Folglich wird durch die VU-spezifische Abbildung des Prämienrisikos die Grundlage für ein internes Modell gelegt, das sich zur wert- und risikoorientierten Unternehmenssteuerung eignet und so langfristig zur Steigerung des Unternehmenswertes beitragen kann.

An dieser Stelle gilt es aufzuzeigen, an welchen Stellen das im Rahmen der vorliegenden Arbeit entwickelte Modell zur Abbildung des Prämienrisikos Ansatzpunkte für nachfolgende Untersuchungen bietet, um etwa die gewählte Methodik weitergehend zu analysieren. Vor

diesem Hintergrund werden aus aktuarieller Perspektive im Folgenden einige Ansatzpunkte diskutiert.

- Bereits im Zuge der Datenaufbereitung stellt sich die Frage, welche Unsicherheit mit der Inflationsproblematik im Modell verbunden ist. Bei einer weit in die Vergangenheit zurückreichenden Datenhistorie ist nämlich davon auszugehen, dass der Einfluss der Inflation zunimmt. Daran knüpft sich die Fragestellung an, ob und wie für Gesellschaften, die auf eine Schadenhistorie von 30, 50 oder mehr Anfalljahre zurückblicken können, der Beobachtungszeitraum geeignet einzuschränken ist. Im Falle der Case Study wurde in Kapitel 4.3.1 die zur Verfügung stehende Datenhistorie von 15 Anfalljahren als repräsentativ erachtet und im Zusammenhang großer Personenschäden in KH die Bedeutung der Entwicklung von Lohn- und Preisniveau auf die unterschiedlichen Schadenkomponenten in Kapitel 4.3.2 erörtert. Hierzu wurde in Form des L&G-Index sowie der *Superimposed Inflation* eine As-if-Korrektur vorgenommen, um der inflationsbedingten Teuerung gerecht zu werden. Insbesondere wurde demnach die Inflation nicht aus den vorliegenden Daten, sondern exogen abgeleitet, sodass eine Abweichung zwischen der „wahren“ Inflation und dem gewählten Index existieren dürfte. Dieser Inflations-Gap impliziert eine weitere Unsicherheit in Bezug auf die Höhe des geschätzten endabgewickelten Schadenaufwands.

Mit dieser Thematik setzt sich Fackler in [Fac17] im Rahmen der verteilungsfreien Erfahrungstarifizierung basierend auf dem Stichprobenmittel, dem sogenannten *Burning Cost*, bei nichtproportionalem Risikotransfer für Versicherungs- bzw. Rückversicherungsdeckungen in Shorttail-Sparten auseinander und erarbeitet ein umfassendes Modell für die Unsicherheit vergangener und zukünftiger Inflation. Bei der klassischen Erfahrungstarifizierung werden zur Berücksichtigung sich in der Zeit ändernder Effekte auf die Schadenhöhe durch Inflation und auf die Schadenfrequenz durch Bestandsveränderungen oder Trends sowohl die Schadendaten als auch das Exposure mit Hilfe geeigneter Indizes, die zumeist nicht aus den Daten selbst ermittelt werden, As-if-bereinigt. Diese Indizes sind zufällige Zeitreihen und weichen vom „wahren“ Index ab. Die Prämie wird schließlich als ein Vielfaches eines Volumenmaßes, das als *offizielles Volumen* bezeichnet wird, bestimmt. Ausgangspunkt von Facklers Untersuchung bildet die Tarifizierung einer proportionalen Deckung für ein gleichbleibendes Exposure zum Zeitpunkt  $t - 1$  für das Quotierungsjahr  $t$ , sodass sich die Unsicherheit der Inflation lediglich auf die Vergangenheit beschränkt. In diesem Fall wird der Inflations-Gap auf Basis eines geometrischen Random Walks mit lognormalen Fehlertermen modelliert. Sukzessive werden die ursprünglichen Annahmen im Modell hin zur Prämienkalkulation einer nichtproportionalen Deckung für ein in der Zeit variierendes Exposure für das Quotierungsjahr  $t \geq 0$  verallgemeinert, sodass die Unsicherheit hinsichtlich der Inflation sowohl die Vergangenheit als auch die Zukunft betrifft. Hierzu schlägt Fackler ein Schadenzahlmodell für Risiken variabler Größe vor, das die Volumenabhängigkeit der Varianz flexibel beschreibt. Weiterhin wird die nicht-lineare Hebelwirkung der Inflation auf die Risikoprämie bei nichtproportionalem Risikotransfer im Falle Paretoverteilter Schadenhöhen analytisch beschrieben und gezeigt, dass dieser Hebel von der Geometrie der Verteilungsfunktion der Schadenhöhen abhängt, quantifizierbar durch

das regionale Pareto- $\alpha$ . Facklers Modellansatz führt zu einem umfassenden System aus neun Indexreihen, das die potentiellen Wechselwirkungen untereinander aufzeigt. Anstelle der Problemstellung einer geeigneten Einschränkung des Beobachtungszeitraums im Rahmen der Burning Cost-Berechnung rückt Fackler die Frage nach einer geeigneten Gewichtung der Daten in den Vordergrund und erarbeitet schließlich, dass eine optimale Gewichtung im Sinne einer Minimierung des MSE für das Stichprobenmittel zu einer Verbesserung der Prognosegenauigkeit bei der Prämienkalkulation führt. Hierzu erhalten Daten mit zunehmendem Alter eine geringere Gewichtung, die vom Index und der Geometrie der Verteilungsfunktion der Schadenhöhen abhängt. Facklers Arbeit unterstreicht mathematisch, dass die Behandlung der Inflationsthematik innerhalb der Case Study ein sensibler Modellierungsschritt ist, der mit größter Sorgfalt zu behandeln ist.

Das auf Shorttail-Sparten ausgerichtete Fackler-Modell zielt auf die Berücksichtigung der Anfalljahresinflation ab. Da sich in Longtail-Sparten einerseits Kalenderjahreseffekte etwa durch Veränderungen der Schadenregulierung, Fallreserven oder Rechtssprechung mit Anfalljahreseffekten mischen und andererseits der Run-off die Komplexität der Problemstellung deutlich erhöhen, ist das Fackler-Modell gemäß [Fac17], Kapitel 2.2.3, nicht ohne Weiteres auf lang abwickelnde Sparten übertragbar. Hierzu bedarf es einer entsprechenden Erweiterung. Insbesondere aus der Mischung von Kalenderjahres- und Anfalljahresinflation ergibt sich darüber hinaus eine weitere Unsicherheit, die die Berechnung der As-if-Korrektur betrifft. Es bleibt festzuhalten, dass die tatsächliche inflationsbedingte Teuerung der Schäden, die durch eine Kombination von L&G-Index sowie einer *Superimposed Inflation* abgebildet wird, schwer zu schätzen ist. So können etwa mit Hilfe von Sensitivitätsanalysen durch Variation der Superimposed Inflation zunächst die Auswirkungen auf das Brutto- und Nettoergebnis sowie im Besonderen die Hebelwirkung im Fall der XL-Deckung pro Risiko untersucht werden.

- Ein weiterer Ansatzpunkt bietet die mathematische Modellierung der in Abschnitt 4.3.5 zur *Parametrisierung der Schadenhöhenverteilung* vorgenommenen Kappung der Großschadenrealisationen im Simulationsmodell in Höhe der Deckungssumme. In diesem Kontext ist die Terminologie in der Literatur nicht einheitlich. Die folgenden Ausführungen sind daher an [KPW12] angelehnt.

Unter *right truncation* ist die bedingte Verteilung  $X \mid X \leq T$  für ein Risiko  $X$  mit  $T > 0$  durch die Tail-Funktion

$$\bar{F}_X^{(T)}(x) = \begin{cases} \frac{\bar{F}_X(x) - \bar{F}_X(T)}{1 - \bar{F}_X(T)} & \text{für } x < T \\ 0 & \text{für } T \leq x \end{cases}$$

darstellbar. Insbesondere ist diese stetig an der Stelle  $T$ . Im Vergleich zur nicht-gestutzten Version besitzt die gestutzte Verteilung eine leicht andere Form mit dünnerem Tail. Für die Problemstellung zur Berücksichtigung eines Maximalschadens entwickeln Beirlant, Fraga und Reynkens in [BFR17] ein Modell zur Schätzung der Tail-Eigenschaften der Verteilung unter Trunkierung, das insbesondere den Fall der Nicht-Trunkierung impliziert. Hierzu verallgemeinern die Autoren den klassischen Ansatz

der Threshold-Überschreitungen und schätzen die Verteilungsparameter der GPD über einen Maximum-Likelihood-Ansatz.

Durch *right truncation* kann die gesetzliche Deckungssumme bereits bei der Parameterschätzung berücksichtigt werden. Allerdings hat die in der vorliegenden Arbeit verwendete Minimum-Funktion, die auch als *right censoring* bezeichnet wird, einen aus der Praxis motivierten Vorteil gegenüber der mathematisch sauberen Abbildung der Großschadenkappungsgrenze: die Verteilungsform bleibt im relevanten Bereich unverändert, selbst im Falle eines Anstiegs der Deckungssumme. Zudem erscheint ein Massepunkt bei  $T$  mit einer – wenn auch kleinen – positiven Wahrscheinlichkeit  $\bar{F}_X^{(T)}$  für einen Totalschaden als plausibel. Darüber hinaus liegt das im Rahmen der Case Study ermittelte Pareto- $\alpha$  mit  $\hat{\alpha} = \frac{1}{\xi_{61}} = 2,2041$  im branchenweiten Range. Gemäß [Sch01] wird in KH ein Pareto- $\alpha$  im Bereich zwischen 1,5 und 3,0 vorgeschlagen. Das Standardmodell des SST sieht gemäß Tabelle A.10 ein Pareto- $\alpha$  in Höhe von 2,5 bei einem Threshold von 1 Mio. CHF vor.

Neben *right truncation* und *right censoring* finden in der Praxis weitere alternative Ansätze zur Berücksichtigung eines Maximalschadens in Simulationsmodellen Anwendung, die allerdings zu unterschiedlichen Effekten führen. Hierzu zählt die Anwendung einer sogenannten *accept-function*, durch die eine Realisation der Einzelschadenhöhe erst akzeptiert wird, sofern diese kleiner oder gleich der Großschadenkappungsgrenze ist. Basierend auf der *accept-function* kann eine Überschätzung der Großschäden im Gesamtmodell zudem durch Setzen eines Filters erreicht werden, der nur die Realisationen zulässt, für die die *accept-function* erfüllt ist. Gegenüber der Verwendung der *accept-function* hat die Filter-Methode den Nachteil, dass im Simulationsmodell nicht in jedem Pfad eine konsistente Anzahl an Realisationen vorliegt. Im Vergleich zur Verwendung der Minimum-Funktion führen die genannten Alternativen zu einer Reduktion des Erwartungswertes aus Großschäden.

- Einen alternativen Ansatz zur Modellierung der Großschäden in KH präsentiert Klemmt in [Kle13a]. Der Ansatz ist durch die hohe Unsicherheit, die sich einerseits aufgrund der Anpassung einer Verteilungsfunktion auf Basis der beobachteten Schadenerfahrung und andererseits aufgrund der Extrapolation in einen bislang schadenfreien Bereich ergibt, motiviert. Daher schlägt Klemmt vor, ab einer Grenze von 1 Mio. EUR auf Marktdaten zurückzugreifen und nur in begründeten Fällen davon abzuweichen. Zur Modellierung der Großschäden verwendet der Autor eine Variation der Pareto-Verteilung. Um das Spektrum an Großschäden oberhalb des Thresholds adäquat abbilden zu können, wird die Pareto-Verteilung modifiziert. Der Formparameter  $\alpha$  soll dabei mit wachsendem Großschaden streng monoton wachsen, für  $x \rightarrow \infty$  gegen einen konstanten Wert konvergieren, aber in der Nähe des Thresholds kleinere Werte annehmen. Daher wird  $\alpha$  durch den dynamisierten Formparameter  $\alpha \cdot \frac{\lambda \cdot x}{1 + \lambda \cdot x}$ ,  $\lambda > 0$ , ersetzt. Sofern keine ausreichende Schadenerfahrung vorliegt, können Marktgrößen in Form eines Branchen- $\alpha$ 's herangezogen werden.

Darüber hinaus schlägt Klemmt eine Aufteilung der Schadenhöhenverteilung in drei Abschnitte vor: Basis-, Mittel- und Großschäden. Die Mittelschadengrenze variiert hier-

bei in Abhängigkeit von der Unternehmensgröße und liegt im fünf- bis sechsstelligen Bereich. Als Mittelschadenverteilung schlägt der Autor eine loglineare Verteilung zur Interpolation zwischen Basis- und Großschadenbereich vor, wobei die Parameter derart zu bestimmen sind, dass der Übergang vom Mittel- in den Großschadenbereich stetig ist. Die gleiche Anforderung stellt er auch an den Übergang von den Basis- zu den Mittelschäden. Als Verteilung für die Basisschäden regt Klemmt eine Lognormalverteilung an, deren Parameter auf der Schadenerfahrung des VUs basieren. Die Vorteile des Modellansatzes sieht der Autor in der Transparenz, Einfachheit, Konsistenz und vor allem in der Stabilität gegenüber der Wahl des Beobachtungspunktes.

Insbesondere die Aufteilung der Schadenhöhenverteilung in drei Abschnitte bietet einen weiteren Ansatzpunkt, die in der vorliegenden Arbeit gewählte Separierung von Basis- und Großschäden weiter zu verfeinern und etwa die Basisschäden auf Basis einer geeigneten mathematischen Grundlage in Klein- und Mittelschäden aufzuteilen.

Gerade die Separierung der Schadenbereiche legt ein weiteres Dilemma offen: die gewählte Schadenverteilung ist nur für den entsprechenden Bereich geeignet. Während die dynamisierte Pareto-Verteilung bereits einen modifizierten Verteilungsansatz für den Großschadenbereich auf Basis von Marktdaten darstellt, konzentrieren sich Autoren wie Fackler in [Fac13] sowie Reynkens, Verbelen und Beirlant in [RVB17] auf den *global fit*, um sowohl den Basis- als auch den Großschadenbereich mit Hilfe einer adäquaten Schadenhöhenverteilung abzubilden. Hierzu werden zwei Verteilungen in einem sogenannten *Splicing-Modell* verbunden, wobei der Tail oftmals durch eine Pareto-Verteilung oder GPD modelliert wird. Der Vorteil dieser Herangehensweise besteht in der Vermeidung großer Schätzfehler durch den Vergleich mit den Marktparametern.

Abschließend soll erörtert werden, welche Praxisrelevanz das unternehmensspezifische Modell besitzt. Motiviert durch den permanenten Wandel innerhalb des Unternehmens sowie durch Veränderungen im Marktumfeld wird diskutiert, an welchen Stellen das Modell erweitert werden kann und welchen aktuellen sowie zukünftigen Entwicklungen es sich zu stellen hat.

- Mit der unternehmenseigenen Modellierung des Prämienrisikos ist der Grundstein für die Entwicklung eines (partiellen) internen Modells und damit für eine wert- und risikoorientierte Unternehmenssteuerung gelegt. Im Kontext von Solvency II ist es unter Säule 1 zunächst nicht verwendbar. Grundsätzlich gestattet Artikel 68 der [RRL] zwar die Verwendung von vollständigen oder partiellen internen Modellen. Allerdings sind diese zuvor durch die lokalen Aufsichtsbehörden zu zertifizieren, die im Rahmen des Zertifizierungsprozesses einerseits das interne Risikomodell und andererseits dessen Einbettung in das VU prüfen. Den hohen Aufwand scheuen viele VUs und ziehen stattdessen zur Berechnung der Anforderungen aus Säule 1 das Standardmodell heran, obwohl es den ursprünglichen Anforderungen nicht in dem Maße gerecht wird wie ein unternehmenseigenes Modell. An dieser Stelle ist es mit Blick auf die Überprüfung der Solvenzkapitalanforderungen wünschenswert, einerseits die genannten Schwächen der Standardformel auszubessern und andererseits die Hürde für die Verwendung interner Modelle zu senken. Im derzeit gültigen Aufsichtsrecht kann das VU-individuelle Modell

ohne Zertifizierung zumindest im ORSA-Bericht über die unternehmenseigene Risiko- und Solvabilitätsbeurteilung verwendet werden.

- Um das vt. Modell zu komplettieren, ist es noch erforderlich, das Reserverisiko risikogerecht abzubilden. Darüber hinaus kann für die Aktivseite ein Kapital- und Investmentmodell entwickelt werden, sodass die Grundstruktur für ein internes Unternehmensmodell gegeben ist. An dieser Stelle sei explizit auf [Die07b] verwiesen. Dort wird ein Vorschlag zur Entwicklung eines stochastischen Unternehmensmodells dargestellt. Im Rahmen einer wertorientierten Unternehmenssteuerung spielen darüber hinaus Kapitalkosten sowie Konzepte der Erfolgsmessung eine wesentliche Rolle. Ungeachtet dessen können die Modelle schließlich nicht nur für eine Einjahressicht, sondern auch für eine Mehrjahresbetrachtung weiter entwickelt werden.

Anknüpfend an die Case Study kann ein KH-Monoliner etwa durch die Aufnahme weiterer Geschäftsfelder, wie zum Beispiel Kraftfahrt-Kaskoversicherung, wachsen. In diesem Fall gewinnen Fragen der Risikoaggregation, wie in Kapitel 2.3 behandelt, an Bedeutung. Ist es beispielsweise ausreichend, die Abhängigkeitsstruktur zwischen den Sparten durch einen Korrelationsansatz abzubilden? Des Weiteren ist Risikokapital schließlich verursachergerecht auf die Geschäftsbereiche zu verteilen, sodass Allokationsverfahren in den Vordergrund rücken.

- Weiterhin ist zu untersuchen, welchen Einfluss die aktuellen Entwicklungen in der Kraftfahrtversicherung auf die bestehenden Modelle haben werden. So wird das automatische Notrufsystem für Kraftfahrzeuge *eCall* durch den Wettbewerb mit der Automobilindustrie Druck auf die Kostenseite ausüben. Telematik-Tarife, die das individuelle Fahrverhalten durch eine risikogerechte Prämie berücksichtigen, werden Einfluss auf die Prämieinnahmen sowie die Schadensituation nehmen. Insbesondere ist im Zuge der Weiterentwicklung des autonomen Fahrens von sinkenden Schadenhäufigkeiten auszugehen. Inwiefern sich das Schadenbild großer Personenschäden in KH verändert, bleibt zu beobachten und im Modell für das Prämienrisiko adäquat zu berücksichtigen.

# A. Nähere Angaben zu den Standardmodellen

## A.1. Solvency II

### A.1.1. Markttrisiko

Die Solvenzkapitalanforderung  $SCR_{market}$  für das Markttrisiko wird gemäß [RRL], Artikel 105 (5), aggregiert:

$$SCR_{market} := \sqrt{\mathbf{x}_{market}^T \cdot \mathbf{Corr}_{market} \cdot \mathbf{x}_{market}} = \sqrt{\sum_{i \in I_{market}} \sum_{j \in I_{market}} Corr_{i,j} \cdot SCR_i \cdot SCR_j}$$

mit  $I_{market} := \{interest, equity, property, spread, conc, currency\}$ .

Gemäß [DVO], Artikel 164, gilt für die Korrelationskoeffizienten:

$Corr_{i,j}$	$SCR_{interest}$	$SCR_{equity}$	$SCR_{property}$	$SCR_{spread}$	$SCR_{conc}$	$SCR_{currency}$
$SCR_{interest}$	1	A	A	A	0	0,25
$SCR_{equity}$	A	1	0,75	0,75	0	0,25
$SCR_{property}$	A	0,75	1	0,5	0	0,25
$SCR_{spread}$	A	0,75	0,5	1	0	0,25
$SCR_{conc}$	0	0	0	0	1	0
$SCR_{currency}$	0,25	0,25	0,25	0,25	0	1

Tabelle A.1.: Korrelationsmatrix  $\mathbf{Corr}_{market}$  zur Aggregation der Risikosubmodule zum Markttrisiko

Wenn für das Zinsänderungsrisiko das Szenario mit steigendem Zins maßgebend ist, gilt:  $A = 0$ , andernfalls  $A = 0,5$ .

### A.1.2. Versicherungstechnisches Risiko Leben

Die Solvenzkapitalanforderung  $SCR_{life}$  für das vt. Risiko Leben wird gemäß [RRL], Artikel 105 (3), aggregiert:

$$SCR_{life} := \sqrt{\mathbf{x}_{life}^T \cdot \mathbf{Corr}_{life} \cdot \mathbf{x}_{life}} = \sqrt{\sum_{i \in I_{life}} \sum_{j \in I_{life}} Corr_{i,j} \cdot SCR_i \cdot SCR_j}$$

mit  $I_{BSCR} := \{mortality, longevity, disability, expense, revision, lapse, lifeCAT\}$ .

Gemäß [DVO], Artikel 136, gilt:

$Corr_{i,j}$	$SCR_{mortality}$	$SCR_{longevity}$	$SCR_{disability}$	$SCR_{expense}$	$SCR_{revision}$	$SCR_{lapse}$	$SCR_{lifeCAT}$
$SCR_{mortality}$	1	-0,25	0,25	0,25	0	0	0,25
$SCR_{longevity}$	-0,25	1	0	0,25	0,25	0,25	0
$SCR_{disability}$	0,25	0	1	0,5	0	0	0,25
$SCR_{expense}$	0,25	0,25	0,5	1	0,5	0,5	0,25
$SCR_{revision}$	0	0,25	0	0,5	1	0	0
$SCR_{lapse}$	0	0,25	0	0,5	0	1	0,25
$SCR_{lifeCAT}$	0,25	0	0,25	0,25	0	0,25	1

Tabelle A.2.: Korrelationsmatrix  $\mathbf{Corr}_{life}$  zur Aggregation der Risikosubmodule zum vt. Risiko Leben

### A.1.3. Versicherungstechnisches Risiko Nicht-Leben

Die Solvenzkapitalanforderung  $SCR_{non-life}$  für das vt. Risiko Nicht-Leben wird gemäß [RRL], Artikel 105 (2), aggregiert:

$$\begin{aligned} SCR_{non-life} &:= \sqrt{\mathbf{x}_{non-life}^T \cdot \mathbf{CorrNL} \cdot \mathbf{x}_{non-life}} \\ &= \sqrt{\sum_{i \in I_{non-life}} \sum_{j \in I_{non-life}} CorrNL_{i,j} \cdot SCR_i \cdot SCR_j} \end{aligned}$$

mit  $I_{non-life} := \{nlPremRes, lapse, nlCAT\}$ .

Gemäß [DVO], Artikel 114, gilt:

$CorrNL_{i,j}$	$SCR_{nlPremRes}$	$SCR_{lapse}$	$SCR_{nlCAT}$
$SCR_{nlPremRes}$	1	0	0,25
$SCR_{lapse}$	0	1	0
$SCR_{nlCAT}$	0,25	0	1

Tabelle A.3.: Korrelationsmatrix  $\mathbf{CorrNL}$  zur Aggregation der Risikosubmodule zum vt. Risiko Nicht-Leben

### Solvency II-Geschäftsbereiche, Risikofaktoren und Korrelationsmatrix zur Aggregation der Solvency II-Geschäftsbereiche für das Prämien- und Reserverisiko im vt. Risiko Nicht-Leben

Mit Ausnahme der Segmente zur nichtproportionalen Rückversicherung (LoBs 26, 27, 28) umfasst jedes Segment jeweils auch die entsprechende proportionale Rückversicherung in Form des zweitgenannten LoBs:

LoB s	Segment	$\sigma_{(\text{GrossPrem},s)}$	$\text{NP}_s$	$\sigma_{(\text{res},s)}$
4 und 16	Kraftfahrzeughaftpflichtversicherung	10%	80%	9%
5 und 17	Sonstige Kraftfahrtversicherung	8%	100%	8%
6 und 18	See-, Luftfahrt- und Transportversicherung	15%	100%	11%
7 und 19	Feuer- und andere Sachversicherungen	8%	80%	10%
8 und 20	Allgemeine Haftpflichtversicherung	14%	80%	11%
9 und 21	Kredit- und Kautionsversicherung	12%	100%	19%
10 und 22	Rechtsschutzversicherung	7%	100%	12%
11 und 23	Assistance	9%	100%	20%
12 und 24	Versicherung gegen verschiedene finanzielle Verluste	13%	100%	20%
26	Nichtproportionale Unfall- rückversicherung	17%	100%	20%
27	Nichtproportionale See-, Luftfahrt- und Transportrückversicherung	17%	100%	20%
28	Nichtproportionale Sachrückversicherung	17%	100%	20%

Tabelle A.4.: Solvency II-Geschäftsbereiche und Risikofaktoren für das Prämien- und Reserverisiko im vt. Risiko Nicht-Leben

$\text{CorrS}_{s,t}$	4 & 16	5 & 17	6 & 18	7 & 19	8 & 20	9 & 21	10 & 22	11 & 23	12 & 24	26	27	28
<b>4 &amp; 16</b>	1	0,5	0,5	0,25	0,5	0,25	0,5	0,25	0,5	0,25	0,25	0,25
<b>5 &amp; 17</b>	0,5	1	0,25	0,25	0,25	0,25	0,5	0,5	0,5	0,25	0,25	0,25
<b>6 &amp; 18</b>	0,5	0,25	1	0,25	0,25	0,25	0,25	0,5	0,5	0,25	0,5	0,25
<b>7 &amp; 19</b>	0,25	0,25	0,25	1	0,25	0,25	0,25	0,5	0,5	0,25	0,5	0,5
<b>8 &amp; 20</b>	0,5	0,25	0,25	0,25	1	0,5	0,5	0,25	0,5	0,5	0,25	0,25
<b>9 &amp; 21</b>	0,25	0,25	0,25	0,25	0,5	1	0,5	0,25	0,5	0,5	0,25	0,25
<b>10 &amp; 22</b>	0,5	0,5	0,25	0,25	0,5	0,5	1	0,25	0,5	0,5	0,25	0,25
<b>11 &amp; 23</b>	0,25	0,5	0,5	0,5	0,25	0,25	0,25	1	0,5	0,25	0,25	0,5
<b>12 &amp; 24</b>	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	1	0,25	0,5	0,25
<b>26</b>	0,25	0,25	0,25	0,25	0,5	0,5	0,5	0,25	0,25	1	0,25	0,25
<b>27</b>	0,25	0,25	0,5	0,5	0,25	0,25	0,25	0,25	0,5	0,25	1	0,25
<b>28</b>	0,25	0,25	0,25	0,5	0,25	0,25	0,25	0,5	0,25	0,25	0,25	1

Tabelle A.5.: Korrelationsmatrix  $\text{CorrS}$  zur Aggregation der Solvency II-Geschäftsbereiche für das Prämien- und Reserverisiko im vt. Risiko Nicht-Leben

#### A.1.4. Versicherungstechnisches Risiko Kranken

Die Solvenzkapitalanforderung  $SCR_{health}$  für das vt. Risiko Kranken wird gemäß [RRL], Artikel 105 (4), aggregiert:

$$SCR_{health} := \sqrt{\mathbf{x}_{health}^T \cdot \mathbf{CorrH} \cdot \mathbf{x}_{health}} = \sqrt{\sum_{i \in I_{health}} \sum_{j \in I_{health}} CorrH_{i,j} \cdot SCR_i \cdot SCR_j}$$

mit  $I_{health} := \{SLTh, NSLTh, healthCAT\}$ .

Gemäß [DVO], Artikel 144, gilt:

$CorrH_{i,j}$	$SCR_{SLTh}$	$SCR_{NSLTh}$	$SCR_{healthCAT}$
$SCR_{SLTh}$	1	0,5	0,25
$SCR_{NSLTh}$	0,5	1	0,25
$SCR_{healthCAT}$	0,25	0,25	1

Tabelle A.6.: Korrelationsmatrix  $\mathbf{CorrH}$  zur Aggregation der Risikosubmodule zum vt. Risiko Kranken

## A.2. Swiss Solvency Test

### Swiss Solvency Test-Geschäftsbereiche im vt. Risiko für Nicht-Lebensversicherer

LoB s	Bezeichnung	Segment
1	MFH	Motorfahrzeughaftpflichtversicherung
2	MFK	Motorfahrzeugkaskoversicherung ohne Schäden aufgrund von großen Elementarereignissen
3	Sach	Feuer-, Elementarschaden-, Bauwesen-, Engineering, Maschinen-, Diebstahl-, Hausratversicherung, Übrige Versicherungen gegen Sachschäden
4	Haftpflicht	Gebäude-, Privat-, Unternehmens-, Bauherrenhaftpflichtversicherung, Allgemeine Haftpflichtversicherung
5	UVG	Obligatorische (Nicht-)Berufsunfallversicherung, Freiwillige UVG Zusatzversicherung
6	Unfall ohne UVG	Einzelunfallversicherung, UVG Zusatzversicherung, Motorfahrzeuginsassen-Unfallversicherung, Übrige Kollektivunfallversicherung
7	Kollektiv-Kranken	Kollektivkrankenversicherung
8	Einzel-Kranken	Einzelkrankenversicherung
9	Transport	Transportgüter-, Schienen- und Wasserfahrzeugkasko-, und -haftpflichtversicherung
10	Luftfahrt	Luftfahrzeug-, Luftfahrzeughaftpflichtversicherung
11	Finanz und Kautions	Kredit-, Kautions-, Baugarantiever sicherung, Versicherungen gegen finanzielle Verluste
12	Rechtsschutz	Rechtsschutzversicherung
13	Andere	Reise-, Touristen-, Verkehrsserviceversicherung, Epidemieversicherung

Tabelle A.7.: SST-Geschäftsbereiche im vt. Risiko für Nicht-Lebensversicherer

**Korrelationsmatrix bezüglich der Swiss Solvency Test-Geschäftsbereiche für Basisschäden im vt. Risiko für Nicht-Lebensversicherer**

$\text{Corr}(S_{CY,s}^{AC}, S_{CY,t}^{AC})$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	1	0,50	0	0,25	0,25	0,25	0	0	0	0	0	0	0
2	0,5	1	0,25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0,25	1	0,25	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0,25	0	0,25	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0,25	0	0	0	1	0,5	0,5	0	0	0	0	0	0
6	0,25	0	0	0	0,5	1	0,5	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0,5	0,5	1	0,25	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0,25	1	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Tabelle A.8.: Korrelationsmatrix bezüglich der SST-Geschäftsbereiche für Basisschäden im vt. Risiko für Nicht-Lebensversicherer

**Variationskoeffizienten für Basisschäden im vt. Risiko für Nicht-Lebensversicherer**

LoB s	Bezeichnung	$VKo_{p,s}$	$VKo(X_{j,s})$ ,	
			$\beta = 1 \text{ Mio. CHF}$	$\beta = 5 \text{ Mio. CHF}$
1	MFH	3,50%	7,00	10,00
2	MFK	3,50%	2,50	2,50
3	Sach	5,00%	5,00	8,00
4	Haftpflcht	3,50%	8,00	11,00
5	UVG	3,50%	7,50	9,50
6	Unfall ohne UVG	4,75%	4,50	5,50
7	Kollektiv-Kranken	5,75%	2,50	2,50
8	Einzel-Kranken	5,75%	2,25	2,25
9	Transport	5,00%	6,50	7,00
10	Luftfahrt	5,00%	2,50	3,00
11	Finanz und Kauttion	5,00%	5,00	5,00
12	Rechtsschutz	5,00%		
13	Andere	4,50%	5,00	5,00

Tabelle A.9.: Variationskoeffizienten  $VKo_{p,s}$ ,  $VKo(X_{j,s})$  für Basisschäden im vt. Risiko für Nicht-Lebensversicherer

**Charakteristischer Index der Pareto-Verteilung für Großschäden im vt. Risiko für Nicht-Lebensversicherer**

LoB s	Bezeichnung	$\alpha_s$	
		$\beta = 1 \text{ Mio. CHF}$	$\beta = 5 \text{ Mio. CHF}$
1	MFH	2,50	2,80
2	MFK	1,85	1,85
3	Sach	1,40	1,50
4	Haftpflicht	1,80	2,00
5	UVG	2,00	2,00
6	Unfall ohne UVG	2,00	2,00
7	Kollektiv-Kranken	3,00	3,00
8	Einzel-Kranken	3,00	3,00
9	Transport	1,50	1,50
11	Finanz und Kaution	0,75	0,75
13	Andere	1,50	1,50

Tabelle A.10.: Charakteristischer Index der Pareto-Verteilung für Großschäden im vt. Risiko für Nicht-Lebensversicherer

### A.3. US-Solvency

#### US-Solvency-Geschäftsbereiche und Risikofaktoren für das Prämienrisiko im Underwriting Risk

LoB s	Bezeichnung	Segment	ALR <sub>s</sub> <sup>I</sup>	LR <sub>s</sub> <sup>I</sup>
1	H/F	Homeowners	0,687	0,910
2	PPA	Personal Auto	0,792	0,699
3	CA	Commercial Auto	0,689	0,988
4	WC	Workers Compensation	0,752	1,033
5	CMP	Commercial Multi-Peril	0,647	0,903
6	MPL Occ.	Miscellaneous Professional Liability Occurrence	0,767	1,822
7	MPL C-M	Miscellaneous Professional Liability Claims-Made	0,691	1,092
8	SL	Special Liability	0,562	0,889
9	OL	Other Liability	0,618	1,042
10	Fidelity/ Surety	Fidelity/ Surety	0,464	0,883
11	Spec. Prop.	Special Property	0,549	0,924
12	APD	Auto Physical Damage	0,711	0,843
13	Other	Other	0,699	0,893
14	Financial/ Mortgage	Financial/ Mortgage Guaranty	1,293	1,482
15	INTL	International	0,563	1,169
16	Reins. P&F	Reinsurance Property & Financial	0,440	1,273
17	Reins. Liab.	Reinsurance Liability	0,588	1,506
18	PL	Products Liability	0,684	1,214
19	Warranty	Warranty	0,611	0,883

Tabelle A.11.: US-Solvency-Geschäftsbereiche und Risikofaktoren für das Prämienrisiko im Underwriting Risk

## B. Risikolose Zinsstrukturkurve

Das folgende Kapitel behandelt die unter Solvency II maßgebliche risikolose Zinsstrukturkurve.

Zur Bestimmung der risikolosen Zinsstrukturkurve, *Risk-free interest rate (RFR)*, werden für jede Währung und Fälligkeit die risikolosen Zinssätze gemäß [DVO], Artikel 43 und 44, auf der Grundlage von Zinsswaps der entsprechenden Währung abgeleitet, adjustiert um einen den Swap Rates immanenten Kreditrisikobetrag. Dabei wird die in [DVO], Artikel 45, beschriebene Adjustierung der Swap Rates um Kreditrisiken auf Basis von 50% der über ein Jahr gemittelten Differenzen zwischen Sätzen, die das Kreditrisiko im variablen Teil des Swapzinssatzes abbilden, und Übernachtindex-Swapsätzen derselben Fälligkeit bestimmt. Die Adjustierung soll dabei mindestens zehn Basispunkte und höchstens 35 Basispunkte betragen.

Bei Extrapolation der Zinsstrukturkurve sollen die Extrapolationstechniken über alle Währungen gleich angewendet werden, [DVO], Artikel 46. Dabei sollte das *Volatility Adjustment*, jedoch kein *Matching Adjustment* enthalten sein. Das *Matching Adjustment* wird auf die extrapolierte Kurve angewendet. In [DVO], Artikel 49, wird die Berechnung des *Volatility Adjustment* basierend auf Anforderungen an das zugrundeliegende Referenzportfolio, in [DVO], Artikel 52, die Berechnung des *Matching Adjustment* mit Spezifikation von Stressszenarien für Sterblichkeitsrisiken zur Anwendung auf anrechnungsfähige Verbindlichkeiten beschrieben.

In der vorliegenden Arbeit ist nur die risikolose Zinsstrukturkurve für die an den Euro gekoppelten Währungen ohne Berücksichtigung von *Volatility Adjustment* und *Matching Adjustment* von Interesse.

Zur Fälligkeit  $t \in \mathbb{N}$  (in Jahren) bezeichne  $r_t^{(t_0)}$  den risikolosen Zinssatz zum Bewertungsstichtag  $t_0$ . Dann ist durch die Folge

$$RFR := \left( r_t^{(t_0)} \right)_{t \in \mathbb{N}}$$

die risikolose Zinsstrukturkurve gegeben.

Im Kontext des Zinsrisikos sind zwei Schockszenarien gegenüber der risikoneutralen Bewertung relevant. Gemäß [DVO], Artikel 166, ist das Szenario des Zinsanstiegs definiert durch eine sofortige Änderung des risikolosen Zinses  $r_t$  zur Fälligkeit  $t$  in Jahren:

$$r_t^{(t_0),up} := \max \left\{ r_t^{(t_0)} + 1\%, r_t^{(t_0)} \cdot (1 + s_t^{up}) \right\}.$$

Die nach oben verschobene Zinsstrukturkurve wird durch die Folge

$$RFR^{up} := \left( r_t^{(t_0),up} \right)_{t \in \mathbb{N}}$$

definiert. Gemäß [DVO], Artikel 167, ist das Szenario des Zinsrückgangs definiert durch eine sofortige Änderung des risikolosen Zinses  $r_t^{(t_0)}$  zur Fälligkeit  $t$  in Jahren:

$$r_t^{(t_0),down} := \min \left\{ r_t^{(t_0)} \cdot \left( 1 - s_t^{down} \right), r_t^{(t_0)} \right\}.$$

Die Folge

$$RFR^{down} := \left( r_t^{(t_0),down} \right)_{t \in \mathbb{N}}$$

bezeichne die nach unten verschobene Zinsstrukturkurve. Dabei werden die Schockfaktoren für beide Szenarien gemäß [DVO], Artikel 166 bzw. 167, in Bezug auf die risikolose Zinsstrukturkurve wie folgt definiert:

Fälligkeit $t$	$s_t^{up}$	$s_t^{down}$
$\leq 1$	70%	75%
2	70%	65%
3	64%	56%
4	59%	50%
5	55%	46%
6	52%	42%
7	49%	39%
8	47%	36%
9	44%	33%
10	42%	31%
11	39%	30%
12	37%	29%
13	35%	28%
14	34%	28%
15	33%	27%
16	31%	28%
17	30%	28%
18	29%	28%
19	27%	29%
20	26%	29%
$\geq 90$	20%	20%

Tabelle B.1.: Schockfaktoren unter Solvency II bezüglich der risikolosen Zinsstrukturkurve

Bei nicht aufgeführten Fälligkeiten  $20 < t < 90$  werden die Schockfaktoren entsprechend [DVO], Artikel 166 bzw. 167, linear interpoliert.

Zum Bewertungsstichtag  $t_0 = 31.12.2016$  stellen sich die risikolose und geschockten Zinsstrukturkurven gemäß [EIOPA17] wie folgt dar:

Fälligkeit t	$r_t^{(\tau_0)}$	$r_t^{(\tau_0),up}$	$r_t^{(\tau_0),down}$
1	-0,3020%	0,6980%	-0,3020%
2	-0,2610%	0,7390%	-0,2610%
3	-0,2080%	0,7920%	-0,2080%
4	-0,1230%	0,8770%	-0,1230%
5	-0,0240%	0,9760%	-0,0240%
6	0,0920%	1,0920%	0,0530%
7	0,2150%	1,2150%	0,1310%
8	0,3410%	1,3410%	0,2180%
9	0,4610%	1,4610%	0,3090%
10	0,5710%	1,5710%	0,3940%
11	0,6710%	1,6710%	0,4700%
12	0,7600%	1,7600%	0,5400%
13	0,8410%	1,8410%	0,6060%
14	0,9080%	1,9080%	0,6540%
15	0,9580%	1,9580%	0,6990%
16	0,9930%	1,9930%	0,7150%
17	1,0190%	2,0190%	0,7340%
18	1,0460%	2,0460%	0,7530%
19	1,0770%	2,0770%	0,7650%
20	1,1170%	2,1170%	0,7930%
21	1,1670%	2,1670%	0,8300%
22	1,2260%	2,2260%	0,8740%
23	1,2890%	2,2890%	0,9200%
24	1,3550%	2,3550%	0,9690%
25	1,4230%	2,4230%	1,0190%
26	1,4920%	2,4920%	1,0710%
27	1,5590%	2,5590%	1,1210%
28	1,6260%	2,6260%	1,1710%
29	1,6920%	2,6920%	1,2210%
30	1,7560%	2,7560%	1,2690%
31	1,8180%	2,8180%	1,3160%
32	1,8780%	2,8780%	1,3620%
33	1,9370%	2,9370%	1,4080%
34	1,9930%	2,9930%	1,4510%
35	2,0470%	3,0470%	1,4930%
36	2,0990%	3,0990%	1,5330%
37	2,1490%	3,1490%	1,5730%
38	2,1980%	3,1980%	1,6110%
39	2,2440%	3,2440%	1,6480%
40	2,2890%	3,2890%	1,6840%
41	2,3320%	3,3320%	1,7190%
42	2,3730%	3,3730%	1,7520%
43	2,4130%	3,4130%	1,7850%
44	2,4510%	3,4510%	1,8160%
45	2,4880%	3,4880%	1,8460%
46	2,5240%	3,5240%	1,8760%
47	2,5580%	3,5580%	1,9050%
48	2,5910%	3,5910%	1,9330%
49	2,6220%	3,6220%	1,9590%
50	2,6530%	3,6530%	1,9860%

Tabelle B.2.: Risikolose und geschockte Zinsstrukturkurven unter Solvency II zum Bewertungsstichtag 31.12.2016

## C. Case Study: Beispielunternehmen CAPITOL

### C.1. Basisdaten der CAPITOL

#### C.1.1. Prämien, Exposure, Kosten

Für die CAPITOL liegen zum Zeitpunkt 31.12.2016 die Entwicklung der Prämieinnahmen und des Bestandes der letzten 15 Jahre sowie eine Schätzung für das folgende Geschäftsjahr 2017 vor:

Anfalljahr	Verdiente Bruttoprämien (in TEUR)	Verdiente Nettoprämien (in TEUR)	Jahres- einheiten	Durchschnitts- prämie (in EUR)
2002	88.611	85.952	336.923	263
2003	94.690	91.850	346.851	273
2004	96.873	93.967	352.266	275
2005	97.081	94.168	349.212	278
2006	98.010	95.070	367.080	267
2007	89.594	86.906	382.880	234
2008	88.243	85.595	385.339	229
2009	84.357	81.827	388.744	217
2010	82.101	79.638	385.453	213
2011	86.036	83.455	389.302	221
2012	88.973	86.304	393.685	226
2013	91.821	89.067	390.730	235
2014	94.566	91.729	389.160	243
2015	96.657	93.758	391.325	247
2016	98.128	95.184	394.089	249
<i>2017</i>	<i>100.000</i>	<i>97.000</i>	<i>400.000</i>	<i>250</i>

Tabelle C.1.: Case Study: Entwicklung der verdienten Brutto- und Netto-Prämieinnahmen (in TEUR), des Exposures und der Durchschnittsprämie (in EUR)

Weiterhin verfügt die CAPITOL über die Entwicklung der Verwaltungs- und Abschlusskosten. Auf Basis der beobachteten Kosten in Bezug zu den verdienten Bruttoprämien erfolgt die Kostenschätzung für 2017.

Anfalljahr	Abschlusskosten (in TEUR)	in % der verdienten Bruttoprämien	Verwaltungskosten (in TEUR)	in % der verdienten Bruttoprämien	Gesamtkosten (in TEUR)	in % der verdienten Bruttoprämien
2002	10.894	12,29%	1.978	2,23%	12.872	14,53%
2003	11.505	12,15%	1.970	2,08%	13.474	14,23%
2004	12.251	12,65%	1.970	2,03%	14.222	14,68%
2005	11.398	11,74%	1.899	1,96%	13.297	13,70%
2006	10.972	11,19%	1.927	1,97%	12.899	13,16%
2007	12.086	13,49%	1.972	2,20%	14.057	15,69%
2008	11.291	12,80%	2.014	2,28%	13.305	15,08%
2009	11.086	13,14%	2.044	2,42%	13.130	15,57%
2010	11.331	13,80%	1.989	2,42%	13.320	16,22%
2011	10.328	12,00%	1.946	2,26%	12.275	14,27%
2012	12.195	13,71%	1.931	2,17%	14.126	15,88%
2013	9.979	10,87%	2.033	2,21%	12.012	13,08%
2014	11.101	11,74%	2.052	2,17%	13.153	13,91%
2015	11.510	11,91%	1.988	2,06%	13.497	13,96%
2016	11.671	11,89%	2.070	2,11%	13.741	14,00%
2017		12,00%		2,00%		14,00%

Tabelle C.2.: Case Study: Entwicklung der Abschluss- und Verwaltungskosten (in TEUR)

### C.1.2. Schadeninformationen

Die Bestandsdaten der CAPITOL werden durch die Schadendaten seit 2002 in Form von Abwicklungsdreiecken ergänzt. Hierzu eine kurze

**Replik.** Gemäß [Mac02] wird durch ein Abwicklungsdreieck der Form

Anfalljahr $i$	Abwicklungsjahr $k$					
	1	...	$k$	...	$n+1-i$	$n$
1	$S_{1,1}$	...	$S_{1,k}$	...	$S_{1,n+1-i}$	$S_{1,n}$
⋮	⋮		⋮		⋮	⋮
$i$	$S_{i,1}$	...	$S_{i,k}$	...	$S_{i,n+1-i}$	
⋮	⋮		⋮		⋮	
$n+1-k$	$S_{n+1-k,1}$	...	$S_{n+1-k,k}$			
⋮	⋮		⋮			
$n$	$S_{1,n}$					

Tabelle C.3.: Abwicklungsdreieck der zum Zeitpunkt  $t = n, n \in \mathbb{N}$ , bereits angefallenen, aber noch nicht vollständig abgewickelten Schadenfälle für das Anfalljahr  $i (i = 1, \dots, n)$  im Abwicklungsjahr  $k (k = 1, \dots, n)$

die Abwicklung der zum Zeitpunkt  $t = n, n \in \mathbb{N}$ , bereits angefallenen, aber noch nicht vollständig abgewickelten Schadenfälle eines homogenen, hinreichend großen Geschäftsbereichs

dargestellt.

$S_{i,k}$  bezeichne die (nominalen) inkrementellen Schadenzahlungen für das Anfalljahr  $i$ ,  $i = 1, \dots, n$  im Abwicklungsjahr  $k$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Hierbei wird als *Anfalljahr* dasjenige Jahr bezeichnet, in dem der Schaden eingetreten ist. Für  $k = 1$  ist das erste Abwicklungsjahr das Anfalljahr selbst, für  $k \geq 2$  sind es die dem Anfalljahr folgenden Kalenderjahre. Folglich sind die im Abwicklungsdreieck C.3 enthaltenen Beträge  $S_{i,k}$  für  $i + k \leq n + 1$  bekannt. Während vom jüngsten Anfalljahr  $i = n$ , das gerade das dem aktuellen Jahr vorangehende Jahr ist, lediglich die Schäden bekannt sind, die im Laufe dieses Jahres eingetreten sind, sind vom ältesten Anfalljahr  $i = 1$  bereits  $k = n$  Abwicklungsjahre bekannt.

$$C_{i,k} := \sum_{j=1}^k S_{i,j}$$

repräsentiere die kumulierten Schadenzahlungen eines Anfalljahres  $i$  nach  $k$  Abwicklungsjahren. Folglich enthalte das Schadendreieck

$$\mathcal{D}_n := \{S_{i,k}\}_{i+k \leq n+1}$$

die bis  $t = n$  bereits geleisteten Schadenzahlungen.

Die Schadenzahlungen  $\{S_{i,k}\}_{1 \leq i \leq n, n+1-i < k \leq \omega}$  sind zum Zeitpunkt  $t = n$  noch unbekannt und damit ebenfalls

- die nominale Bedarfsreserve

$$R_i^{(n)} := \sum_{k=n+2-i}^{\omega} S_{i,k}$$

eines jeden Anfalljahres  $1 \leq i \leq n$  sowie

- die nominale Bedarfsreserve

$$R^{(n)} := \sum_{i=1}^{\omega} R_i^{(n)}$$

aller Anfalljahre  $\{1, \dots, n\}$ .

Hierbei sei  $\omega$  mit  $1 \leq k \leq \omega$  der Endabwicklungszeitpunkt.

Neben Abwicklungsdreiecken auf Basis von inkrementellen bzw. kumulierten Schadenzahlungen gibt es weitere Datenarten, die in Form eines Abwicklungsdreiecks dargestellt werden können. Etwa ist  $C_{i,k}$  der bis einschließlich Abwicklungsjahr  $k$  angefallene Schadenbetrag, d.h. alle Zahlungen zuzüglich der zu diesem Zeitpunkt bestehenden Einzelfallreserven. Entsprechend ist  $S_{i,k}$  die Summe aller im Abwicklungsjahr  $k$  geleisteten Zahlungen für Schäden aus dem Anfalljahr  $i$  zuzüglich des Saldos aller Änderungen der Einzelfallreserven. Auch aus den Einzelfallreserven selbst kann ein Abwicklungsdreieck gebildet werden, das gerade die Differenz zwischen dem Dreieck der angefallenen Schäden und dem Dreieck der bezahlten Schäden darstellt. Weiterhin können Abwicklungsdreiecke auf Basis von Schadenanzahlen abgeleitet werden. Vor- und Nachteile der beschriebenen Darstellungsformen werden in [Mac02] diskutiert.

Für die CAPITOL liegen zum Bewertungsstichtag 31.12.2016 im Segment KH folgende Abwicklungsdreiecke der Schadenanzahlen und Brutto-Schadenzahlungen bzw. -aufwendungen für angefallene Schäden vor:

Anfalljahr	Abwicklungsjahr														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2002	26.085	26.451	26.468	26.473	26.474	26.475	26.475	26.475	26.475	26.475	26.475	26.475	26.475	26.475	26.475
2003	26.330	26.699	26.716	26.721	26.722	26.723	26.723	26.723	26.723	26.723	26.723	26.723	26.723	26.723	26.723
2004	26.703	27.078	27.095	27.100	27.101	27.102	27.102	27.102	27.102	27.102	27.102	27.102	27.102	27.102	27.102
2005	25.121	25.473	25.489	25.494	25.495	25.496	25.496	25.496	25.496	25.496	25.496	25.496	25.496	25.496	25.496
2006	27.282	27.665	27.682	27.688	27.689	27.690	27.690	27.690	27.690	27.690	27.690	27.690	27.690	27.690	27.690
2007	26.960	27.338	27.356	27.361	27.362	27.363	27.363	27.363	27.363	27.363	27.363	27.363	27.363	27.363	27.363
2008	26.817	27.194	27.211	27.216	27.217	27.218	27.218	27.218	27.218	27.218	27.218	27.218	27.218	27.218	27.218
2009	27.053	27.432	27.450	27.455	27.456	27.457	27.457	27.457	27.457	27.457	27.457	27.457	27.457	27.457	27.457
2010	25.490	25.848	25.864	25.869	25.870	25.871	25.871	25.871	25.871	25.871	25.871	25.871	25.871	25.871	25.871
2011	26.453	26.824	26.841	26.846	26.847	26.848	26.848	26.848	26.848	26.848	26.848	26.848	26.848	26.848	26.848
2012	25.229	25.583	25.599	25.604	25.605	25.605	25.605	25.605	25.605	25.605	25.605	25.605	25.605	25.605	25.605
2013	24.602	24.947	24.963	24.968	24.968	24.968	24.968	24.968	24.968	24.968	24.968	24.968	24.968	24.968	24.968
2014	25.327	25.682	25.698	25.698	25.698	25.698	25.698	25.698	25.698	25.698	25.698	25.698	25.698	25.698	25.698
2015	24.022	24.359	24.359	24.359	24.359	24.359	24.359	24.359	24.359	24.359	24.359	24.359	24.359	24.359	24.359
2016	24.703	24.703	24.703	24.703	24.703	24.703	24.703	24.703	24.703	24.703	24.703	24.703	24.703	24.703	24.703

Tabelle C.4.: KH-Dreieck der Schadenanzahlen

Anfalljahr	Abwicklungsjahr														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2002	47.992	62.244	66.116	68.273	70.257	71.759	72.756	73.484	74.323	74.802	75.210	75.480	75.761	75.905	76.118
2003	46.935	61.288	65.227	67.098	68.728	69.834	70.934	71.597	72.133	72.223	72.293	72.354	72.373	72.410	72.410
2004	46.438	60.100	63.576	65.504	66.928	68.657	69.701	70.270	70.969	71.323	71.504	71.765	71.852	71.852	71.852
2005	44.223	58.349	62.579	64.833	66.573	67.914	69.030	69.297	69.451	69.611	70.282	70.379	70.379	70.379	70.379
2006	47.512	62.091	65.437	67.511	69.427	70.932	72.289	73.413	74.155	75.546	76.317	76.317	76.317	76.317	76.317
2007	47.785	61.599	65.626	68.189	69.840	71.353	72.920	74.054	74.404	74.760	74.760	74.760	74.760	74.760	74.760
2008	47.466	62.910	67.669	69.355	70.806	72.512	73.018	73.379	73.836	73.836	73.836	73.836	73.836	73.836	73.836
2009	45.750	60.957	64.852	66.814	68.386	69.247	69.775	70.314	70.314	70.314	70.314	70.314	70.314	70.314	70.314
2010	43.734	57.645	62.459	64.223	65.632	66.249	66.841	66.841	66.841	66.841	66.841	66.841	66.841	66.841	66.841
2011	45.035	59.336	63.407	65.325	66.965	67.822	67.822	67.822	67.822	67.822	67.822	67.822	67.822	67.822	67.822
2012	43.693	57.780	61.971	63.862	65.142	65.142	65.142	65.142	65.142	65.142	65.142	65.142	65.142	65.142	65.142
2013	41.830	54.945	59.338	61.945	61.945	61.945	61.945	61.945	61.945	61.945	61.945	61.945	61.945	61.945	61.945
2014	43.116	56.968	60.395	60.395	60.395	60.395	60.395	60.395	60.395	60.395	60.395	60.395	60.395	60.395	60.395
2015	41.455	54.673	54.673	54.673	54.673	54.673	54.673	54.673	54.673	54.673	54.673	54.673	54.673	54.673	54.673
2016	41.967	41.967	41.967	41.967	41.967	41.967	41.967	41.967	41.967	41.967	41.967	41.967	41.967	41.967	41.967

Tabelle C.5.: KH-Paid-Dreieck der kumulierten Brutto-Schadenzahlungen (in TEUR)

Anfalljahr	Abwicklungsjahr														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2002	80.624	83.131	82.439	81.422	81.549	80.810	80.512	80.594	79.885	79.821	79.744	79.605	79.581	79.452	79.490
2003	78.763	80.727	80.311	79.761	79.006	78.260	77.971	77.299	77.131	77.110	76.709	76.625	76.597	76.521	76.521
2004	78.803	81.086	80.170	79.542	79.083	79.152	78.590	78.284	78.129	77.840	77.688	77.651	77.634	77.634	77.634
2005	79.216	82.912	82.389	81.167	81.353	80.748	80.407	79.750	80.027	79.958	79.915	80.005	80.005	80.005	80.005
2006	83.874	89.136	89.213	89.161	88.591	88.274	88.145	87.927	87.433	87.148	87.154	87.154	87.154	87.154	87.154
2007	86.261	88.219	88.439	87.181	86.707	86.410	85.654	85.248	85.150	84.858	84.858	84.858	84.858	84.858	84.858
2008	89.206	92.800	93.033	91.462	90.661	90.894	90.594	90.517	90.526	90.526	90.526	90.526	90.526	90.526	90.526
2009	87.085	89.487	88.278	86.681	86.695	86.328	86.087	86.385	86.385	86.385	86.385	86.385	86.385	86.385	86.385
2010	85.186	87.115	86.712	86.585	85.907	85.529	84.546	84.546	84.546	84.546	84.546	84.546	84.546	84.546	84.546
2011	88.844	92.352	93.161	92.645	92.013	91.442	91.442	91.442	91.442	91.442	91.442	91.442	91.442	91.442	91.442
2012	87.449	90.343	89.828	88.648	89.902	89.902	89.902	89.902	89.902	89.902	89.902	89.902	89.902	89.902	89.902
2013	90.593	96.983	96.289	95.687	95.687	95.687	95.687	95.687	95.687	95.687	95.687	95.687	95.687	95.687	95.687
2014	87.503	90.054	90.879	90.879	90.879	90.879	90.879	90.879	90.879	90.879	90.879	90.879	90.879	90.879	90.879
2015	86.656	88.524	88.524	88.524	88.524	88.524	88.524	88.524	88.524	88.524	88.524	88.524	88.524	88.524	88.524
2016	82.487	82.487	82.487	82.487	82.487	82.487	82.487	82.487	82.487	82.487	82.487	82.487	82.487	82.487	82.487

Tabelle C.6.: KH-Incurred-Dreieck der Brutto-Schadenaufwendungen (in TEUR)

### C.1.3. Ermittlung der Best Estimate Schadenrückstellungen

Anknüpfend an die Replik in C.1.2 zu den Abwicklungsdreiecken erfolgt die Berechnung des BE zum Zeitpunkt  $t = n$  durch aktuarielle Schätzung der erwarteten nominalen zukünftigen Schadenzahlungen  $\{E(S_{i,k} | \mathcal{D}_n)\}_{1 \leq i \leq n, n+1-i < k < \omega}$  mit Hilfe einer Reservierungsmethode  $\mathcal{T}_n$ :

$$\widehat{S}_{i,k}^{(n)} := E(S_{i,k} | \mathcal{D}_n)$$

Entsprechend ergeben sich

- der nominale Reserveschätzer eines einzelnen Anfalljahres  $1 \leq i \leq n$ :

$$\widehat{R}_i^{(n)} := \sum_{k=n+2-i}^{\omega} \widehat{S}_{i,k}^{(n)},$$

- der Schätzer für den erwarteten nominalen Endschadenaufwand (*Ultimate*) eines einzelnen Anfalljahres  $1 \leq i \leq n$ :

$$\widehat{U}_i^{(n)} := C_{i,n+1-i} + \widehat{R}_i^{(n)},$$

- der nominale Reserveschätzer für alle Anfalljahre  $\{1, \dots, n\}$ :

$$\widehat{R}^{(n)} := \sum_{i=1}^n \widehat{R}_i^{(n)}.$$

Die Diskontierung der geschätzten zukünftigen Schadenzahlungen  $\widehat{S}_{i,k}^{(n)}$  erfolgt mittels der zum Zeitpunkt  $t = n$  gültigen risikolosen Zinsstrukturkurve *RFR* bzw. der verschobenen Zinsstrukturkurve im entsprechenden Schockszenario (siehe Kapitel B). Bei Auszahlung zum Jahresende ermittelt sich der Barwert der Zahlungen als

$${}_{dis}\widehat{S}_{i,k}^{(n)} = \frac{\widehat{S}_{i,k}^{(n)}}{\left(1 + r_{n,i+k-1-n}^{(n)}\right)^{i+k-1-n}}.$$

Entsprechend erhält man den diskontierten Reserveschätzer

$${}_{dis}\widehat{R}_i^{(n)} = \sum_{k=n-i+2}^{\omega} {}_{dis}\widehat{S}_{i,k}^{(n)}$$

für ein einzelnes Anfalljahr  $1 \leq i \leq n$  bzw.

$${}_{dis}\widehat{R}^{(n)} = \sum_{i=1}^n {}_{dis}\widehat{R}_i^{(n)}$$

für alle Anfalljahre  $\{1, \dots, n\}$ .

Die Berechnung der einforderbaren Beträge aus Rückversicherung hat den gleichen Anforderungen wie die Bewertung der Brutto-BEs zu genügen. Ein zulässiges Vorgehen in diesem

Kontext bei der Schätzung der einforderbaren Beträge aus Rückversicherung ist zunächst die Ableitung eines Schätzers  $\widehat{\underline{R}}^{(n)}$  bzw.  ${}_{dis}\widehat{\underline{R}}^{(n)}$  für die zukünftigen (nominalen bzw. diskontierten) Nettozahlungen und die anschließende Saldierung der Brutto- und Nettoschätzer  $\widehat{R}^{(n)}$  und  $\widehat{\underline{R}}^{(n)}$  bzw.  ${}_{dis}\widehat{R}^{(n)}$  und  ${}_{dis}\widehat{\underline{R}}^{(n)}$ . In der Praxis erfolgt die Berechnung von  $\widehat{\underline{R}}^{(n)}$  und  ${}_{dis}\widehat{\underline{R}}^{(n)}$  zumeist durch quotale Überleitung der Bruttogrößen per

$$\widehat{\underline{R}}^{(n)} = q \cdot \widehat{R}^{(n)}.$$

Der Faktor  $q$  wird dabei häufig aus dem Netto-/Brutto-Verhältnis der HGB/IFRS Rückstellungen bestimmt, teils auch anfalljahresspezifisch vorgegeben. Wird darüber hinaus vereinfacht angenommen, dass Brutto- und Nettoschäden das gleiche Zahlungsmuster aufweisen, ergeben sich die diskontierten Schadenrückstellungen  ${}_{dis}\widehat{\underline{R}}^{(n)}$  wegen

$$\widehat{\underline{S}}_{i,k}^{(n)} = q \cdot \widehat{S}_{i,k}^{(n)}$$

für alle  $n + 1 < i + k \leq \omega$  ebenfalls zu  ${}_{dis}\widehat{\underline{R}}^{(n)} = q \cdot {}_{dis}\widehat{R}^{(n)}$ .

Unter Berücksichtigung der Abwicklungsdreiecke der Schadenanzahlen und Brutto-Schaden-zahlungen bzw. -aufwendungen für angefallene Schäden (siehe Tabellen C.4, C.5 und C.6) berechnet das Reserve-Aktuariat den jeweiligen Ultimate mit Hilfe des Chain-Ladder-Verfahrens (siehe [Mac02]). Hierbei wird jeweils die Entwicklung der letzten 15 Anfalljahre herangezogen und das Gesamtmittel ohne Ausschluss einzelner Abwicklungsfaktoren verwendet, wobei der auf Paid-Basis kalkulierte Ultimate zudem einen per log-linearer Regression ermittelten Tailfaktor berücksichtigt. Der selektierte Ultimate-Schadenaufwand ist dann die Summe aus Paid-Ultimate und Incurred-Ultimate. Letzterer wird abhängig vom Anfalljahr gewichtet. Die Ultimate-Schadenanzahlen und -aufwände sind in Tabelle C.9 zusammengefasst.

Auf dieser Grundlage ermittelt das Reserve-Aktuariat den BE der Schadenrückstellungen. Hierbei werden die nominellen Cashflows zukünftiger Schadenzahlungen je Anfalljahr unter Ansatz einer jährlichen Inflationsrate in Höhe von 0,8% zu Netto per  $q = 95,1\%$  übergeleitet. In folgender Tabelle ist der nominelle Cashflow zukünftiger Schadenzahlungen für alle Anfalljahre aufgeführt:

t	Brutto		Zediert				Netto			
	nominal	diskontiert	nominal	diskontiert			nominal	diskontiert		
		RFR		RFR	RFR <sup>up</sup>	RFR <sup>down</sup>		RFR	RFR <sup>up</sup>	RFR <sup>down</sup>
1	39.713	39.833	1.949	1.955	1.935	1.955	37.764	37.878	37.502	37.878
2	20.437	20.544	1.003	1.008	988	1.008	19.434	19.536	19.150	19.536
3	14.931	15.025	733	737	716	737	14.199	14.287	13.866	14.287
4	11.477	11.533	563	566	544	566	10.913	10.967	10.539	10.967
5	9.233	9.244	453	454	432	454	8.780	8.790	8.363	8.790
6	7.689	7.647	377	375	354	376	7.312	7.272	6.851	7.289
7	6.458	6.361	317	312	291	314	6.141	6.049	5.643	6.085
8	5.627	5.475	276	269	248	271	5.351	5.207	4.810	5.258
9	4.975	4.773	244	234	214	237	4.731	4.539	4.152	4.601
10	4.451	4.205	218	206	187	210	4.233	3.999	3.622	4.070
11	4.023	3.737	197	183	164	187	3.825	3.554	3.188	3.633
12	3.665	3.347	180	164	146	169	3.486	3.183	2.827	3.267
13	3.364	3.017	165	148	130	153	3.199	2.869	2.524	2.957
14	3.107	2.738	152	134	117	139	2.955	2.603	2.268	2.697
15	2.885	2.501	142	123	106	128	2.744	2.378	2.051	2.472
16	2.693	2.299	132	113	96	118	2.560	2.186	1.867	2.285
17	2.524	2.124	124	104	88	109	2.400	2.020	1.708	2.119
18	2.375	1.969	117	97	81	102	2.258	1.873	1.568	1.973
19	2.243	1.830	110	90	74	95	2.133	1.740	1.443	1.845
20	2.125	1.701	104	83	69	89	2.020	1.618	1.329	1.725
21	2.019	1.582	99	78	63	83	1.920	1.505	1.224	1.614
22	1.924	1.471	94	72	58	78	1.829	1.399	1.127	1.511
23	1.838	1.369	90	67	54	73	1.747	1.302	1.038	1.415
24	1.759	1.274	86	63	49	68	1.673	1.211	957	1.327
25	1.688	1.186	83	58	46	64	1.605	1.128	882	1.246
26	1.623	1.104	80	54	42	60	1.543	1.050	814	1.170
27	1.563	1.030	77	51	39	57	1.487	979	752	1.100
28	1.509	960	74	47	36	53	1.435	913	694	1.036
29	1.458	896	72	44	33	50	1.387	852	642	975
30	1.412	837	69	41	31	47	1.342	796	594	920
31	1.369	783	67	38	28	45	1.302	745	550	868
32	1.329	733	65	36	26	42	1.264	697	510	820
33	1.292	686	63	34	24	40	1.228	652	473	774
34	1.257	643	62	32	23	38	1.196	611	439	733
35	1.225	603	60	30	21	36	1.165	573	407	694
36	1.156	547	57	27	19	33	1.099	520	366	636
37	1.086	494	53	24	17	30	1.032	470	328	579
38	1.008	441	49	22	15	27	958	420	290	522
39	908	382	45	19	13	24	864	363	249	457
40	808	327	40	16	11	20	769	311	211	394
41	723	281	35	14	9	18	687	267	179	342
42	611	228	30	11	7	14	581	217	144	280
43	515	185	25	9	6	12	490	176	116	229
44	425	146	21	7	5	9	404	139	91	183
45	328	109	16	5	3	7	312	103	67	137
46	244	78	12	4	2	5	232	74	47	99
47	154	47	8	2	1	3	147	45	28	60
48	90	26	4	1	1	2	86	25	16	34
49	37	11	2	1	0	1	36	10	6	14
<b>Summe</b>	<b>185.351</b>	<b>168.363</b>	<b>9.095</b>	<b>8.262</b>	<b>7.664</b>	<b>8.458</b>	<b>176.256</b>	<b>160.102</b>	<b>148.511</b>	<b>163.903</b>

Tabelle C.7.: Geschätzte zukünftige (nominale bzw. diskontierte) Schadenzahlungen brutto, zediert und netto (in TEUR)

Die Entwicklung der ULAE beachtend

Anfalljahr	ULAE (in TEUR)	in % der verdienten Bruttoprämien
2002	2.970	3,35%
2003	2.806	2,96%
2004	3.008	3,11%
2005	2.998	3,09%
2006	3.051	3,11%
2007	3.076	3,43%
2008	3.083	3,49%
2009	2.924	3,47%
2010	3.159	3,85%
2011	2.943	3,42%
2012	3.055	3,43%
2013	2.857	3,11%
2014	2.941	3,11%
2015	2.958	3,06%
2016	3.118	3,18%
2017		3,20%

Tabelle C.8.: Case Study: Entwicklung der direkt zuzurechnenden und indirekt zuzurechnenden Schadenregulierungskosten (in TEUR)

erhält man folgende Übersicht zur Entwicklung schadenbasierter Brutto-Kennzahlen der CAPITOL aus Ultimate-Sicht:

Anfalljahr	Schaden- anzahl	Schaden- frequenz	Ultimate (in TEUR)	Schaden- durchschnitt (in TEUR)	Ultimate inkl. ULAE (in TEUR)	Loss Ratio	Combined Ratio	Underwrit- ing Profit
2002	26.475	0,0786	78.236	2,955	81.206	91,64%	106,17%	-6,17%
2003	26.723	0,0770	74.898	2,803	77.704	82,06%	96,29%	3,71%
2004	27.102	0,0769	75.152	2,773	78.161	80,68%	95,36%	4,64%
2005	25.496	0,0730	75.632	2,966	78.630	80,99%	94,69%	5,31%
2006	27.690	0,0754	82.275	2,971	85.327	87,06%	100,22%	-0,22%
2007	27.363	0,0715	80.435	2,940	83.511	93,21%	108,90%	-8,90%
2008	27.218	0,0706	82.889	3,045	85.972	97,43%	112,50%	-12,50%
2009	27.457	0,0706	79.293	2,888	82.217	97,46%	113,03%	-13,03%
2010	25.871	0,0671	76.813	2,969	79.972	97,41%	113,63%	-13,63%
2011	26.848	0,0690	81.098	3,021	84.041	97,68%	111,95%	-11,95%
2012	25.606	0,0650	79.172	3,092	82.228	92,42%	108,30%	-8,30%
2013	24.970	0,0639	80.837	3,237	83.694	91,15%	104,23%	-4,23%
2014	25.705	0,0661	78.510	3,054	81.451	86,13%	100,04%	-0,04%
2015	24.381	0,0623	76.309	3,130	79.267	82,01%	95,97%	4,03%
2016	25.072	0,0636	75.292	3,003	78.411	79,91%	93,91%	6,09%

Tabelle C.9.: Case Study: Entwicklung schadenbasierter Brutto-Kennzahlen aus Ultimate-Sichtweise

## C.2. Quantitative Anforderungen unter Solvency II

Durch die CAPITOL sind zur Erfüllung der quantitativen Anforderungen aus Säule 1 unter Solvency II einerseits die anrechnungsfähigen Eigenmittel im Kontext der Solvenzbilanz zu ermitteln, andererseits die Berechnung der Solvenzkapitalanforderungen durchzuführen. In diesem Kontext werden in den folgenden Kapiteln die notwendigen Zwischenschritte unter Berücksichtigung der aufsichtsrechtlichen Anforderungen aufgezeigt.

### C.2.1. Solvenzkapitalanforderungen

#### Versicherungstechnisches Risiko Nicht-Leben

**Prämien- und Reserverisiko.** Für das Prämien- und Reserverisiko als Untermodul des vt. Risikos Nicht-Leben werden folgende Volumenmaße für das Prämienrisiko ermittelt:

t	$P_{(last,s)}$		$P_s$		$FP_{(existing,s)}$		$FP_{(future,s)}$	
	nominal	diskontiert	nominal	diskontiert	nominal	diskontiert	nominal	diskontiert
1	95.184	/	97.000	97.294	/	/	/	/
2	/	/	/	/	0	0	0	0

Tabelle C.10.: Volumenmaße des Prämienrisikos im LoB  $s = 4$  (in TEUR)

**Katastrophenrisiko.** Die Solvenzkapitalanforderung für das *Katastrophenrisiko* im vt. Risiko Nicht-Leben ist gemäß [RRL], Artikel 105 (2), definiert und wird in [DVO], Artikel 119 – 135, spezifiziert:

$$SCR_{nlCAT} = \sqrt{(SCR_{natCAT} + SCR_{npproperty})^2 + SCR_{mmCAT}^2 + SCR_{otherCAT}^2}$$

Es umfasst die Solvenzkapitalanforderungen der folgenden Risikosubmodule:

- $SCR_{natCAT}$  für das *Naturkatastrophenrisiko*, [DVO], Artikel 120 – 126,
- $SCR_{npproperty}$  für die *nichtproportionale Rückversicherung in der Sachversicherung*, [DVO], Artikel 127,
- $SCR_{mmCAT}$  für die *vom Menschen verursachten Katastrophenrisiken*, [DVO], Artikel 128 – 134, und
- $SCR_{otherCAT}$  für die *sonstigen Katastrophenrisiken in der Schadenversicherung*, [DVO], Artikel 135.

Für die CAPITOL als KH-Monoliner ist ausschließlich das Risiko vom Menschen verursachter Katastrophen relevant, das sich gemäß [DVO], Artikel 128, wiederum aus sechs weiteren Risikosubmodulen zusammensetzt. Für die entsprechende Solvenzkapitalanforderung gilt:

$$SCR_{mmCAT} = \sqrt{\sum_{i \in I_{mmCAT}} SCR_i}$$

wobei  $SCR_i$ ,  $i \in I_{mmCAT} := \{motor, marine, aviation, fire, liability, credit\}$ , die Netto-Solvenzkapitalanforderung für eines der vorgenannten Untermodule sei. Im Kontext der Case Study wird das Untermodul *man-made CAT* lediglich vom KH-Risiko bestimmt, das im Folgenden betrachtet wird.

Gemäß [DVO], Artikel 129, wird der erwartete Bruttoschaden  $L_{motor}$  anhand der Anzahl der zum Stichtag versicherten Fahrzeuge ermittelt und beträgt mindestens 6 Mio. EUR.

$$L_{motor} = \max \left\{ 6.000.000, 50.000 \cdot \sqrt{N_a + 0,05 \cdot N_b + 0,95 \cdot \min \{N_b, 20.000\}} \right\}.$$

Hierbei bezeichnen

- $N_a$  die Anzahl der versicherten Fahrzeuge der LoBs 4 und 16 mit einer geschätzten Deckungssumme größer als 24 Mio. EUR und
- $N_b$  die Anzahl der versicherten Fahrzeuge der LoBs 4 und 16 mit einer geschätzten Deckungssumme kleiner gleich 24 Mio. EUR

zum Bewertungsstichtag. Aktive proportionale Rückversicherung findet Berücksichtigung, indem die Anzahl der Fahrzeuge mit der übernommenen Quotenhöhe multipliziert wird.

### Marktrisiko

Das *Marktrisiko*, das in [RRL], Artikel 105 (5), definiert und in [DVO], Artikel 164 – 188, spezifiziert wird, setzt sich aus den Risikosubmodulen für das Zinsänderungs-, Aktien-, Immobilien-, Spread-, Konzentrations- und Fremdwährungsrisiko zusammen. Die entsprechende Solvenzkapitalanforderung wird dabei gemäß Kapitel A.1.1 ermittelt.

**Zinsänderungsrisiko.** Im *Zinsänderungsrisiko* gemäß [DVO], Artikel 165 – 167, ist die Sensitivität der Werte von Assets und Liabilities in Bezug auf Veränderungen in der Zinskurve oder in Bezug auf die Volatilität der Zinssätze zu berechnen. Folglich besteht das Zinsänderungsrisiko aus allen Assets und Liabilities, die sensitiv auf Veränderungen in der Zinsstrukturkurve oder der Zinsvolatilitäten reagieren. Für die Ermittlung der Solvenzkapitalanforderung des Zinsrisikos sind die Szenarien

- Zinsanstieg als Verschiebung der risikolosen Zinsstrukturkurve nach oben und
- Zinsrückgang als Verschiebung der risikolosen Zinsstrukturkurve nach unten

relevant (siehe Kapitel B). Für die zinssensitiven Aktiva  $i \in I_A$  sind auf Grundlage von Laufzeit und Cashflows unter Berücksichtigung der risikolosen Zinsstrukturkurve  $RFR$  sowie der beiden geschockten Zinsstrukturkurven  $RFR^{up}$  und  $RFR^{down}$  Barwerte  $PV_{k,i}^A$ ,  $PV_{k,i}^{A,up}$  und  $PV_{k,i}^{A,down}$  je Währung  $k$  zu ermitteln. Der Barwert aller zinssensitiven Aktivpositionen der Währung  $k$  sei als

$$PV_k^A := \sum_{i \in I_A} PV_{k,i}^A$$

bezüglich der risikolosen Zinsstrukturkurve  $RFR$  bzw. entsprechend der geschockten Zinsstrukturkurven definiert. Analoge Bezeichnungen gelten bezüglich der zinssensitiven Passiva.

Dann bezeichne *Net Asset Value (NAV)* die Differenz zwischen den Barwerten der Aktiva und Passiva unter Berücksichtigung der risikolosen sowie der nach oben bzw. nach unten verschobenen Zinsstrukturkurve. Die Solvenzkapitalanforderung für das Zinsänderungsrisiko berechnet sich als das Maximum der Summe der Anforderungen für das Risiko aus allen Währungen  $k$ :

$$SCR_{interest} = \max \left\{ \sum_k SCR_{interest,k}^{up}, \sum_k SCR_{interest,k}^{down} \right\},$$

wobei als Kapitalanforderung für beide Schockszenarien

$$SCR_{interest,k}^{up} = \Delta NAV_{interest,k}^{up} = NAV_{interest,k} - NAV_{interest,k}^{up}$$

und

$$SCR_{interest,k}^{down} = \Delta NAV_{interest,k}^{down} = NAV_{interest,k} - NAV_{interest,k}^{down}$$

die Veränderung des NAV zu bestimmen ist.

Während die deutschen Staatsanleihen und die einforderbaren Beträge aus Rückversicherung der CAPITOL die zinssensitiven Assets bilden, beschränken sich die zinssensitiven Passiva auf die Netto-BE Schadenrückstellungen. Unter Berücksichtigung obiger Ausführungen werden die Werte nach Schock (ohne Herleitung für die Assets) ermittelt und entsprechend NAV und  $\Delta NAV$  berechnet.

	vor Schock			nach Schock			$\Delta NAV$	$SCR_{interest}$
	Assets	Liabilities	NAV	Assets	Liabilities	NAV		
Zinsanstieg	317.464	160.102	157.362	335.008	148.511	186.497	-29.135	6.428
Zinsrückgang	317.464	160.102	157.362	314.838	163.903	150.934	6.428	

Tabelle C.11.: Ermittlung der Solvenzkapitalanforderung des Zinsrisikos (in TEUR)

**Aktienrisiko.** Gemäß [DVO], Artikel 168 – 170, umfasst das *Aktienrisiko* Typ 1-Aktien und Typ 2-Aktien. Dabei sind *Typ 1-Aktien* diejenigen Aktien, die an geregelten Märkten in Mitgliedsstaaten des Europäischen Wirtschaftsraums oder der Organisation für wirtschaftliche Zusammenarbeit und Entwicklung notiert sind; unter *Typ 2-Aktien* werden alle übrigen Aktien zusammengefasst. Die Solvenzkapitalanforderung errechnet sich durch

$$SCR_{equity} = \sqrt{SCR_{type1eq}^2 + 2 \cdot 0,75 \cdot SCR_{type1eq} \cdot SCR_{type2eq} + SCR_{type2eq}^2},$$

wobei

- $SCR_{type1eq}$  die Solvenzkapitalanforderung für Typ 1-Aktien und
- $SCR_{type2eq}$  die Solvenzkapitalanforderung für Typ 2-Aktien

bezeichnen. Die entsprechende Solvenzkapitalanforderung entspricht dem Verlust an Basis-eigenmitteln, der sich aus einem unmittelbaren Rückgang der Marktwerte in Form eines Stressfaktors angewandt auf das Marktwertexposure ergibt.

Das rein aus Typ 1-Aktien bestehende Portfolio der CAPITOL wird mit einem Basisschock in Höhe von 39% versehen. Folglich gilt für das Aktienrisiko ohne Berücksichtigung eines symmetrischen Anpassungsfaktors:

	vor Schock			nach Schock			$\Delta NAV$	$SCR_{equity}$
	Assets	Liabilities	NAV	Assets	Liabilities	NAV		
Typ 1	16.274	0	16.274	9.927	0	9.927	6.347	6.347
Typ 2	0	0	0	0	0	0	0	

Tabelle C.12.: Ermittlung der Solvenzkapitalanforderung des Aktienrisikos (in TEUR)

### Operationales Risiko

Im *operationalen Risiko* wird zwischen den Geschäftsbereichen Leben und Nicht-Leben unterschieden. Die Solvenzkapitalanforderung für das operationale Risiko ist gemäß [RRL], Artikel 107, definiert und wird in [DVO], Artikel 204, spezifiziert. Hierbei handelt es sich rechnerisch um eine gekappte Linearkombination aus Brutto-Volumenmaßen:

$$SCR_{operational} := \min \{0, 3 \cdot BSCR, Op\} + 0,25 \cdot Exp_{ul},$$

wobei

- $Op := \max \{Op_{premiums}, Op_{provisions}\}$  die Solvenzkapitalanforderung für operationale Risiken auf Basis verdienter Brutto-Prämien und vt. Brutto-Rückstellungen sowie
- $Exp_{ul}$  die Kosten ohne Abschlusskosten, die während der letzten zwölf Monate für Lebensversicherungsverträge angefallen sind, bei denen der Versicherungsnehmer das Anlagerisiko trägt,

bezeichnen. Da die CAPITOL kein Lebensversicherungsgeschäft betreibt, gilt zum einen  $Exp_{ul} = 0$ . Zum anderen reduziert sich die Solvenzkapitalanforderung auf Basis verdienter Brutto-Prämieneinnahmen auf das Nicht-Lebensversicherungsgeschäft wie folgt:

$$Op_{premiums} := 0,03 \cdot Earn_{non-life} + \max \{0, 0,03 \cdot (Earn_{non-life} - 1,2 \cdot pEarn_{non-life})\},$$

wobei  $Earn_{non-life}$  die verdienten Brutto-Prämieneinnahmen der letzten zwölf Monate für Nicht-Lebensversicherungsverpflichtungen inklusive Krankenversicherung nach Art der Nicht-Lebensversicherung vor Abzug von Beiträgen an den Rückversicherer und  $pEarn_{non-life}$  die entsprechende Größe in Bezug auf die zwölf Monate vor den letzten zwölf Monaten bezeichnen.

Mit Hilfe von Tabelle C.1 gilt für die Solvenzkapitalanforderung auf Basis verdienter Brutto-Prämieneinnahmen:

$$\begin{aligned} Op_{premiums} &= 0,03 \cdot Earn_{non-life} + \max \{0, 0,03 \cdot (Earn_{non-life} - 1,2 \cdot pEarn_{non-life})\} \\ &= 0,03 \cdot 100.000 + \max \{0, 0,03 \cdot (100.000 - 1,2 \cdot 98.128)\} \\ &= 3.000 \text{ [TEUR]}. \end{aligned}$$

Entsprechend gilt die Solvenzkapitalanforderung auf Basis des Brutto-BE der vt. Brutto-Rückstellungen:

$$Op_{provisions} := 0,03 \cdot \max \{0, TP_{non-life}\},$$

wobei  $TP_{non-life}$  den Brutto-BE der vt. Rückstellungen Nicht-Lebensversicherungs- und Rückversicherungsverpflichtungen inklusive Krankenversicherung Nicht-Lebensversicherung bezeichne. Mittels Tabelle C.7 erhält man:

$$\begin{aligned} Op_{provisions} &= 0,03 \cdot \max \{0, TP_{non-life}\} \\ &= 0,03 \cdot \max \{0, 168.363\} \\ &= 5.051 \text{ [TEUR]}. \end{aligned}$$

Insgesamt berechnet sich die Solvenzkapitalanforderung für das operationale Risiko zu:

$$\begin{aligned} SCR_{operational} &= \min \{0,3 \cdot BSCR, Op\} \\ &= \min \{0,3 \cdot 62.591, \max \{3.000, 5.051\}\} \\ &= 5.051 \text{ [TEUR]}. \end{aligned}$$

### C.2.2. Solvenzbilanz

Als Bestandteil der vt. Rückstellungen ist die Risikomarge im Zuge der Aufstellung der Solvenzbilanz zu ermitteln.

#### Risikomarge

Die Hintergründe der Risikomarge werden in [RRL], Artikel 77, Absätze (1) und (3), erläutert. Der Wert der vt. Rückstellungen entspricht der Summe aus einem BE und der Risikomarge. Die Risikomarge deckt die zusätzlichen Sicherheiten ab, die bei einer Übertragung dieser Verpflichtungen auf ein Referenzunternehmen (RU) marktgerecht gefordert würden, um diese erfüllen zu können. Gemäß [DVO], Artikel 38, basiert die Übernahme der Versicherungsverpflichtungen auf folgenden Annahmen:

- Das Ursprungsunternehmen (UU) überträgt das gesamte Portfolio auf das RU, einschließlich aller Rückversicherungs- und Zweckgesellschaftsverträge, die mit diesen Verpflichtungen zusammenhängen.
- Das RU ist vor Übertrag leer und nach dem Übertrag gibt es keine neuen Verpflichtungen.
- Das RU bringt anrechenbare Eigenmittel auf, die genau dem SCR für die gesamte Laufzeit der Verpflichtungen entspricht; das SCR beinhaltet:
  - vt. Risiko in Verbindung mit dem übertragenen Geschäft,
  - Marktrisiko (ohne Zinsänderungsrisiko) insoweit materiell und unter einer Anlagestrategie, die das SCR des Marktrisikos minimiert,

- Kreditausfall aus Versicherungstechnik in Bezug auf Rückversicherungsverträge, Vereinbarungen mit Zweckgesellschaften, Intermediären, Versicherungsnehmern und anderen wesentlichen Risikoexponierungen, die eng mit den Versicherungs- und Rückversicherungsverpflichtungen verbunden sind,
- operationales Risiko.
- Nach Übertragung hat das RU Vermögenswerte, die genau der Summe von SCR und vt. Rückstellungen entsprechen.
- Die risikoanpassende Wirkung der ZÜB im RU entspricht derjenigen des UU, außerdem gibt es keine Risikoanpassung durch latente Steuern.
- Managemententscheidungen des RU sind konsistent von den Managementregeln des UU zu übernehmen.

Die Risikomarge ist nach [DVO], Artikel 37, risikogerecht auf die LoBs aufzuteilen. Gleichzeitig wird aber die Diversifikation (zwischen den Hauptrisiken und innerhalb der jeweiligen Hauptrisiken) in der Risikomarge berücksichtigt.

Die generelle Berechnung der Risikomarge  $RM$  gemäß [RRL], Artikel 77, ist in [DVO], Artikel 37, definiert:

$$RM := CoC \cdot \sum_{t \geq 0} \frac{SCR_{RU,t}}{\left(1 + r_{t+1}^{(t_0)}\right)^{t+1}},$$

wobei

- $CoC$  den Kapitalkostensatz in Höhe von 6% gemäß [DVO], Artikel 39,
- $SCR_{RU,t}$  die Solvenzkapitalanforderung des RU nach  $t$  Jahren und
- $r_t^{(t_0)}$  den risikolosen Zins für eine Laufzeit von  $t$  Jahren zum Bewertungsstichtag  $t_0$

bezeichnen. Die exakte Durchführung dieser Berechnungsmethodik gestaltet sich als sehr aufwändig, sodass unter Proportionalitätsgesichtspunkten Vereinfachungen gemäß [DVO], Artikel 58, zulässig sind. Die zulässigen Vereinfachungen werden in [EIOPA15], speziell in Leitlinie 62, beschrieben und bewertet. Dort wird eine vierstufige Hierarchie von Vereinfachungen aufgelistet, die zunehmend methodisch einfacher aber zugleich mit wachsenden Mängeln in der Werthaltigkeit der Ergebnisse behaftet ist. Innerhalb der Hierarchieebenen sind weitere Abstufungen möglich.

Die CAPITOL entscheidet sich für die Vereinfachungsmethode 2, die eine Approximation des gesamten SCR für jedes künftige Jahr  $t \geq 1$  mittels eines proportionalen Ansatzes vorsieht, unter anderem durch die Verwendung des Verhältnisses des Netto-BE  $\underline{BE}_t$  im künftigen Jahr  $t$  zum Netto-BE  $\underline{BE}^{(t_0)}$  zum Bewertungsstichtag  $t_0$ :

$$SCR_{RU,t} = SCR_{RU,0} \cdot \frac{\underline{BE}_t}{\underline{BE}^{(t_0)}}.$$

Folglich ist zunächst die Solvenzkapitalanforderung  $SCR_{RU,0}$  des RU nach 0 Jahren, also zum Bewertungsstichtag  $t_0$  zu bestimmen.

Gemäß dem beschriebenen Übernahmeszenario zur Berechnung der Risikomarge durch das Referenzunternehmen beinhaltet das SCR das Marktrisiko (falls materiell) – ohne das Zinsänderungsrisiko – derart, dass eine Anlagestrategie verfolgt wird, die die Solvenzkapitalanforderung des Marktrisikos minimiert. Entsprechend gilt bereits zum Zeitpunkt  $t_0$ :

$$SCR_{RU,market,0} = 0 \text{ [TEUR]}.$$

Folglich gelte für die zeitliche Fortschreibung zum Zeitpunkt  $t \geq 1$ :

$$SCR_{RU,market,t} = 0 \text{ [TEUR]}.$$

Aufgrund des fehlenden vt. Risikos Leben und Kranken ist das BSCR des RU gerade das vt. Risiko Nicht-Leben des UU zum Bewertungsstichtag  $t_0$ . Unter Berücksichtigung des operationalen Risikos des UU zum Bewertungsstichtag  $t_0$  ergibt sich das SCR des RU zu:

$$\begin{aligned} SCR_{RU,0} &= SCR_{UU,non-life}^{(t_0)} + SCR_{UU,operational}^{(t_0)} \\ &= 58.508 + 5.051 \\ &= 63.559 \text{ [TEUR]}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe des nominalen Cashflows gemäß C.7 der Netto-BE Schadenrückstellungen erhält man, wie in Tabelle C.13 dargestellt, die zeitliche Entwicklung der Solvenzkapitalanforderung des RU, die nach 48 Jahren endet.

Folglich berechnet sich die Risikomarge zu:

$$RM = 6\% \cdot \sum_{t=0}^{48} \frac{SCR_{RU,t}}{\left(1 + r_{t+1}^{(t_0)}\right)^{t+1}} = 30.096 \text{ [TEUR]}.$$

t	$SCR_{RU}(t)$	
	nominal	diskontiert
0	63.559	63.752
1	49.941	50.203
2	42.933	43.202
3	37.813	38.000
4	33.878	33.918
5	30.712	30.543
6	28.075	27.656
7	25.861	25.166
8	23.931	22.961
9	22.225	20.995
10	20.699	19.231
11	19.319	17.641
12	18.062	16.199
13	16.909	14.899
14	15.843	13.732
15	14.854	12.682
16	13.930	11.725
17	13.065	10.833
18	12.251	9.995
19	11.482	9.194
20	10.753	8.428
21	10.061	7.695
22	9.401	7.002
23	8.771	6.350
24	8.168	5.737
25	7.589	5.164
26	7.032	4.631
27	6.496	4.135
28	5.979	3.675
29	5.479	3.250
30	4.995	2.857
31	4.525	2.495
32	4.070	2.161
33	3.627	1.854
34	3.196	1.572
35	2.775	1.314
36	2.379	1.083
37	2.007	878
38	1.661	699
39	1.350	546
40	1.072	417
41	825	308
42	615	221
43	439	151
44	293	97
45	180	57
46	97	29
47	44	13
48	13	4

Tabelle C.13.: Zukünftige (nominale bzw. diskontierte) Solvenzkapitalanforderung des Referenzunternehmens (in TEUR)

## C.3. Interne Modellierung

### C.3.1. Modellierung der Großschäden

$u$	$N_u$	$\hat{\xi}$	$\hat{\beta}$	$RMSE(\hat{\xi})$	$RMSE(\hat{\beta})$	$\hat{\xi}^{-1} = \hat{\alpha}$	$E(X)$	$Var(X)$
2.500	14	0,3239	1.287	0,4830	702	3,0871	4.404	10.293.551
2.450	15	0,3955	1.139	0,4775	607	2,5284	4.334	16.991.485
2.400	16	0,4500	1.030	0,4678	534	2,2223	4.272	35.034.324
2.350	17	0,4734	969	0,4465	480	2,1125	4.189	63.497.200
2.300	18	0,4936	918	0,4309	438	2,0259	4.113	256.719.831
2.250	18	0,3763	1.087	0,3851	481	2,6575	3.992	12.267.303
2.200	18	0,2891	1.236	0,3539	519	3,4584	3.939	7.168.306
2.150	19	0,3117	1.175	0,3466	481	3,2081	3.857	7.735.752
2.100	21	0,4159	968	0,3567	395	2,4045	3.758	16.342.414
2.050	21	0,3242	1.113	0,3238	427	3,0847	3.697	7.713.988
2.000	21	0,2531	1.247	0,3009	458	3,9504	3.669	5.642.640
1.950	22	0,2639	1.210	0,2956	436	3,7890	3.594	5.727.472
1.900	22	0,2044	1.336	0,2775	464	4,8932	3.579	4.768.934
1.850	22	0,1547	1.457	0,2641	492	6,4655	3.573	4.298.973
1.800	23	0,1657	1.416	0,2594	469	6,0354	3.498	4.310.150
1.750	23	0,1213	1.532	0,2478	495	8,2430	3.494	4.016.042
1.700	23	0,0816	1.645	0,2377	520	12,2502	3.491	3.835.668
1.650	23	0,0473	1.753	0,2300	544	21,1276	3.490	3.741.459
1.600	24	0,0637	1.697	0,2285	520	15,7096	3.412	3.762.670
1.550	26	0,1243	1.510	0,2344	460	8,0434	3.274	3.957.791
1.500	29	0,2301	1.238	0,2540	386	4,3464	3.108	4.786.732
1.450	31	0,2698	1.142	0,2575	354	3,7071	3.014	5.309.137
1.400	37	0,5724	695	0,3504	261	1,7469	3.025	$\infty$
1.350	39	0,5078	734	0,2982	241	1,9691	2.842	$\infty$
1.300	40	0,4192	824	0,2586	244	2,3855	2.718	12.441.591
1.250	44	0,4875	715	0,2615	209	2,0514	2.645	77.591.116
1.200	47	0,4868	695	0,2484	194	2,0544	2.553	69.106.926
1.150	47	0,3645	838	0,2125	211	2,7436	2.469	6.415.513
1.100	52	0,4290	727	0,2163	182	2,3311	2.372	11.398.553
1.050	56	0,4299	702	0,2056	167	2,3259	2.282	10.826.484
1.000	61	0,4537	652	0,2008	151	2,2042	2.193	15.370.988
950	68	0,4990	576	0,1972	129	2,0041	2.100	651.535.732
900	77	0,5625	491	0,1958	107	1,7777	2.022	$\infty$
850	83	0,5202	503	0,1773	101	1,9222	1.899	$\infty$
800	94	0,5558	446	0,1711	85	1,7993	1.804	$\infty$
750	104	0,5380	434	0,1576	77	1,8588	1.690	$\infty$
700	116	0,5322	415	0,1475	69	1,8789	1.586	$\infty$
650	135	0,5790	355	0,1435	57	1,7272	1.493	$\infty$
600	159	0,6089	308	0,1349	46	1,6422	1.388	$\infty$
550	185	0,5928	289	0,1213	39	1,6870	1.261	$\infty$
500	225	0,6246	246	0,1133	31	1,6010	1.155	$\infty$
450	263	0,5469	254	0,0943	27	1,8285	1.010	$\infty$
400	302	0,4727	268	0,0803	26	2,1155	909	4.748.301
350	353	0,4446	264	0,0729	23	2,2491	826	2.046.334
300	433	0,4504	239	0,0675	19	2,2203	735	1.903.432
250	530	0,4370	224	0,0605	16	2,2886	648	1.253.320

Tabelle C.14.: Case Study: Maximum-Likelihood Schätzer  $\hat{\xi}$ ,  $\hat{\beta}$  und Standardfehler  $RMSE(\hat{\xi})$ ,  $RMSE(\hat{\beta})$  für die Parameter der GPD sowie Erwartungswert und Varianz jeweils in Abhängigkeit des Thresholds  $u$  (in TEUR)

### C.3.2. Modellierung der Basisschäden

Unter Berücksichtigung der Ausführungen in Kapitel 4.3.6 liegen für die CAPITOL zum Bewertungsstichtag 31.12.2016 folgende Abwicklungsdreiecke der Schadenanzahlen und Brutto-Schadenzahlungen bzw. -aufwendungen für angefallene Basisschäden im Segment KH vor:

Anfalljahr	Abwicklungsjahr														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2002	26.081	26.447	26.464	26.469	26.470	26.471	26.471	26.471	26.471	26.471	26.471	26.471	26.471	26.471	26.471
2003	26.327	26.696	26.713	26.718	26.719	26.720	26.720	26.720	26.720	26.720	26.720	26.720	26.720	26.720	26.720
2004	26.700	27.075	27.092	27.097	27.098	27.099	27.099	27.099	27.099	27.099	27.099	27.099	27.099	27.099	27.099
2005	25.118	25.470	25.486	25.491	25.492	25.493	25.493	25.493	25.493	25.493	25.493	25.493	25.493	25.493	25.493
2006	27.277	27.660	27.677	27.683	27.684	27.685	27.685	27.685	27.685	27.685	27.685	27.685	27.685	27.685	27.685
2007	26.956	27.334	27.352	27.357	27.358	27.359	27.359	27.359	27.359	27.359	27.359	27.359	27.359	27.359	27.359
2008	26.811	27.188	27.205	27.210	27.211	27.212	27.212	27.212	27.212	27.212	27.212	27.212	27.212	27.212	27.212
2009	27.048	27.427	27.445	27.450	27.451	27.452	27.452	27.452	27.452	27.452	27.452	27.452	27.452	27.452	27.452
2010	25.486	25.844	25.860	25.865	25.866	25.867	25.867	25.867	25.867	25.867	25.867	25.867	25.867	25.867	25.867
2011	26.449	26.820	26.837	26.842	26.843	26.844	26.844	26.844	26.844	26.844	26.844	26.844	26.844	26.844	26.844
2012	25.224	25.578	25.594	25.599	25.600	25.600	25.600	25.600	25.600	25.600	25.600	25.600	25.600	25.600	25.600
2013	24.596	24.941	24.957	24.962	24.962	24.962	24.962	24.962	24.962	24.962	24.962	24.962	24.962	24.962	24.962
2014	25.323	25.678	25.694	25.694	25.694	25.694	25.694	25.694	25.694	25.694	25.694	25.694	25.694	25.694	25.694
2015	24.020	24.357	24.357	24.357	24.357	24.357	24.357	24.357	24.357	24.357	24.357	24.357	24.357	24.357	24.357
2016	24.700	24.700	24.700	24.700	24.700	24.700	24.700	24.700	24.700	24.700	24.700	24.700	24.700	24.700	24.700

Tabelle C.15.: KH-Dreieck der Basisschadenanzahlen

Anfalljahr	Abwicklungsjahr														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2002	47.848	61.902	65.625	67.509	68.823	70.015	70.800	71.388	72.094	72.443	72.536	72.719	72.765	72.828	72.844
2003	46.899	61.154	64.959	66.763	68.330	69.238	70.233	70.814	71.293	71.339	71.366	71.366	71.385	71.385	71.385
2004	46.390	60.030	63.494	65.393	66.732	67.817	68.641	69.137	69.809	70.143	70.283	70.518	70.578	70.578	70.578
2005	44.138	58.019	61.480	63.386	64.990	66.249	66.919	67.017	67.062	67.102	67.114	67.114	67.114	67.114	67.114
2006	47.459	61.716	64.104	65.773	67.465	68.609	69.428	70.388	70.704	71.422	72.056	72.056	72.056	72.056	72.056
2007	47.695	60.834	64.651	66.917	68.190	69.561	70.915	71.897	72.162	72.229	72.229	72.229	72.229	72.229	72.229
2008	47.322	62.483	66.721	68.321	69.578	70.695	71.013	71.223	71.401	71.401	71.401	71.401	71.401	71.401	71.401
2009	45.596	60.485	64.248	65.989	67.161	67.850	68.143	68.426	68.426	68.426	68.426	68.426	68.426	68.426	68.426
2010	43.621	57.229	61.228	62.875	64.102	64.548	64.973	64.973	64.973	64.973	64.973	64.973	64.973	64.973	64.973
2011	44.869	58.746	62.580	64.062	65.454	66.134	66.134	66.134	66.134	66.134	66.134	66.134	66.134	66.134	66.134
2012	43.416	56.560	60.447	62.072	63.063	63.063	63.063	63.063	63.063	63.063	63.063	63.063	63.063	63.063	63.063
2013	41.465	53.685	57.005	59.011	59.011	59.011	59.011	59.011	59.011	59.011	59.011	59.011	59.011	59.011	59.011
2014	42.903	56.502	59.369	59.369	59.369	59.369	59.369	59.369	59.369	59.369	59.369	59.369	59.369	59.369	59.369
2015	41.373	53.985	53.985	53.985	53.985	53.985	53.985	53.985	53.985	53.985	53.985	53.985	53.985	53.985	53.985
2016	41.720	41.720	41.720	41.720	41.720	41.720	41.720	41.720	41.720	41.720	41.720	41.720	41.720	41.720	41.720

Tabelle C.16.: KH-Paid-Dreieck der kumulierten Brutto-Basisschadenzahlungen (in TEUR)

Anfalljahr	Abwicklungsjahr														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2002	78.789	80.396	79.720	78.419	78.382	77.583	77.284	77.210	76.429	76.363	76.276	75.916	75.694	75.556	75.517
2003	77.885	79.437	78.753	77.867	76.996	76.298	76.008	75.343	75.174	75.151	74.744	74.710	74.689	74.689	74.689
2004	77.924	79.333	78.417	77.364	76.731	76.306	75.876	75.446	75.289	74.999	74.846	74.808	74.796	74.796	74.796
2005	75.634	76.951	76.330	75.120	74.360	73.712	73.594	72.930	72.804	72.728	72.680	72.680	72.680	72.680	72.680
2006	81.174	82.646	81.873	80.735	80.091	79.767	79.364	79.115	78.745	78.116	78.116	78.116	78.116	78.116	78.116
2007	83.004	84.593	83.924	82.512	81.906	81.393	80.767	80.327	80.246	80.025	80.025	80.025	80.025	80.025	80.025
2008	85.157	86.884	86.105	84.250	83.269	82.832	82.426	82.334	82.334	82.334	82.334	82.334	82.334	82.334	82.334
2009	83.528	85.152	84.357	82.544	81.965	81.528	81.337	81.011	81.011	81.011	81.011	81.011	81.011	81.011	81.011
2010	80.528	82.160	81.358	80.518	79.833	79.454	78.469	78.469	78.469	78.469	78.469	78.469	78.469	78.469	78.469
2011	86.264	88.009	87.305	86.011	85.109	84.506	84.506	84.506	84.506	84.506	84.506	84.506	84.506	84.506	84.506
2012	83.460	85.070	84.056	82.518	82.301	82.301	82.301	82.301	82.301	82.301	82.301	82.301	82.301	82.301	82.301
2013	83.013	84.862	84.147	82.503	82.503	82.503	82.503	82.503	82.503	82.503	82.503	82.503	82.503	82.503	82.503
2014	82.207	83.968	83.048	83.048	83.048	83.048	83.048	83.048	83.048	83.048	83.048	83.048	83.048	83.048	83.048
2015	82.681	84.312	84.312	84.312	84.312	84.312	84.312	84.312	84.312	84.312	84.312	84.312	84.312	84.312	84.312
2016	77.411	77.411	77.411	77.411	77.411	77.411	77.411	77.411	77.411	77.411	77.411	77.411	77.411	77.411	77.411

Tabelle C.17.: KH-Incurred-Dreieck der Brutto-Basisschadenaufwendungen (in TEUR)

## Literatur

- [AAA16] American Academy of Actuaries Property und Casualty Risk-Based Capital Committee. *Report to National Association of Insurance Commissioners Property/Casualty Risk-Based Capital (E) Working Group: 2016 Update to Property and Casualty Risk-Based Capital Underwriting Factors*. Techn. Ber. American Academy of Actuaries, Okt. 2016.
- [ACH15] Alexandru V. Asimit, Yichun Chi und Junlei Hu. „Optimal non-life reinsurance under Solvency II Regime“. In: *Insurance: Mathematics and Economics* 65 (2015), S. 227–237.
- [AD52] Theodore W. Anderson und Donald A. Darling. „Asymptotic Theory of Certain 'Goodness of Fit' Criteria Based on Stochastic Processes“. In: *The Annals of Mathematical Statistics* 23.2 (1952), S. 193–212.
- [Ah112] Filip Ahlin. „Internal model for spread risk under Solvency II“. Magisterarb. KTH, Mathematical Statistics, 2012.
- [Alb92] Peter Albrecht. *Zur Risikotransformationstheorie der Versicherung: Grundlagen und ökonomische Konsequenzen*. Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe, 1992.
- [Alm15] Jonas Alm. „A simulation model for calculating solvency capital requirements for non-life insurance risk“. In: *Scandinavian Actuarial Journal* 2015.2 (2015), S. 107–123.
- [Art+99] Philippe Artzner, Freddy Delbaen, Jean-Marc Eber und David Heath. „Coherent measures of risk“. In: *Mathematical Finance* 9.3 (Juli 1999), S. 203–228.
- [AVO] *Verordnung über die Beaufsichtigung von privaten Versicherungsunternehmen (Aufsichtsverordnung, AVO) vom 9. November 2005 (Stand am 1. Januar 2016)*. SR 961.11. 2005.
- [AW99] Sebastian Aschenbrenner und Susanne Wähling. „Die Auswirkungen des gemeinsamen Binnenmarktes auf die Privatversicherung“. In: *Zeitung für Sozialreform* (1999), S. 526–540.
- [BaFin16] Bundesanstalt für Finanzdienstleistungsaufsicht. *Geschichte der Versicherungsaufsicht*. März 2016. URL: <https://www.bafin.de/dok/7845858> (besucht am 12.05.2018).
- [BdH74] August Aimé Balkema und Laurens de Haan. „Residual life time at great age“. In: *The Annals of Probability* 2.5 (1974), S. 792–804.

- [Bei+04] Jan Beirlant, Yuri Goegebeur, Johan Segers, Jozef L. Teugels und Daniel De Waal. *Statistics of extremes: theory and applications*. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 2004.
- [Bel+03] Clare Bellis, Richard Lyon, Stuart Klugman und John Shepherd. „Understanding Actuarial Management: the actuarial control cycle“. In: *The Institute of Actuaries of Australia* 20.1 (2003), S. 153–171.
- [BFG13] Lluís Bermúdez, Antoni Ferri und Montserrat Guillén. „A Correlation Sensitivity Analysis of Non-Life Underwriting Risk in Solvency Capital Requirement Estimation“. In: *ASTIN Bulletin* 43.1 (2013), S. 21–37.
- [BFG14] Lluís Bermúdez, Antoni Ferri und Montserrat Guillén. „On the use of risk measures in solvency capital estimation“. In: *International Journal of Business Continuity and Risk Management* 5.1 (2014), S. 4–13.
- [BFR17] Jan Beirlant, Isabel Fraga Alves und Tom Reynkens. „Fitting tails affected by truncation“. In: *Electronic Journal of Statistics* 11.1 (2017), S. 2026–2065.
- [BG05] Hans Bühlmann und Alois Gisler. *A Course in Credibility Theory and its Applications*. Springer, Berlin, 2005.
- [BG17] Erik Bølviken und Montserrat Guillén. „Risk aggregation in Solvency II through recursive log-normals“. In: *Insurance: Mathematics and Economics* 73 (2017), S. 20–26.
- [BK14] Mario Brandtner und Wolfgang Kürsten. „Solvency II, regulatory capital, and optimal reinsurance: How good are Conditional Value-at-Risk and spectral risk measures?“ In: *Insurance: Mathematics and Economics* 59 (2014), S. 156–167.
- [Boo17] Tim J. Boonen. „Solvency II solvency capital requirement for life insurance companies based on expected shortfall“. In: *European Actuarial Journal* 7.2 (2017), S. 405–434.
- [BPV06] Bundesamt für Privatversicherungen. *Technisches Dokument zum Swiss Solvency Test*. Techn. Ber. Schweizerische Eidgenossenschaft, 2006.
- [BSS15] Alexander Braun, Hato Schmeiser und Florian Schreiber. „Portfolio Optimization Under Solvency II: Implicit Constraints Imposed by the Market Risk Standard Formula“. In: *Journal of Risk and Insurance* 84.1 (2015), S. 177–207.
- [CEA06] The European Insurance und Reinsurance Federation. *CEA Working Paper on the risk measures VaR and TailVaR*. Techn. Ber. Nov. 2006.
- [CHN94] J. David Cummins, Scott Harrington und Greg Niehaus. „An Economic Overview of Risk-Based Capital Requirements for the Property-Liability Insurance Industry“. In: *Journal of Insurance Regulation* 11.4 (1994), S. 427–447.
- [Cle18] Gian Paolo Clemente. „The Effect of Non-Proportional Reinsurance: A Revision of Solvency II Standard Formula“. In: *Risks* 6.2 (Okt. 2018), S. 1–13.
- [CLV04] Umberto Cherubini, Elisa Luciano und Walter Vecchiato. *Copula Methods in Finance*. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 2004.

- 
- [CN14] Marcus C. Christiansen und Andreas Niemeyer. „The fundamental definition of the Solvency Capital Requirement in Solvency II“. In: *ASTIN Bulletin* 44.3 (2014), S. 501–533.
- [CS01] Vartan Choulakian und Michael A. Stephens. „Goodness-of-Fit Tests for the Generalized Pareto Distribution“. In: *Technometrics* 643.4 (2001), S. 478–484.
- [CS13] Gian Paolo Clemente und Nino Savelli. „Internal model techniques of premium and reserve risk for non-life insurers“. In: *Mathematical Models in Economics and Finance* 8.1 (2013), S. 21–33.
- [CS17] Gian Paolo Clemente und Nino Savelli. „Actuarial Improvements of Standard Formula for Non-life Underwriting Risk“. In: *Insurance Regulation in the European Union: Solvency II and Beyond*. Springer International Publishing, 2017, S. 223–243.
- [CSZ14] Gian Paolo Clemente, Nino Savelli und Diego Zappa. „Modelling Premium Risk for Solvency II: from Empirical Data to Risk Capital Evaluation“. In: *30th International Congress of Actuaries, Washington D.C.*. 2014.
- [deH84] Laurens de Haan. „Slow variation and the characterization of domains of attraction“. In: Hrsg. von J. Tiago de Oliveira. Springer, Netherlands, 1984, S. 31–48.
- [DEL13] Dorothea Diers, Martin Eling und Marc Linde. „Modeling parameter risk in premium risk in multi-year internal models“. In: *The Journal of Risk Finance* 14.3 (2013), S. 234–250.
- [Destatis17] Statistisches Bundesamt (Destatis). *Verdienste und Arbeitskosten - Verdienstindizes für Erbbauzinsberechnungen*. Techn. Ber. Statistisches Bundesamt (Destatis), März 2017.
- [DGVFM08] Deutsche Gesellschaft für Versicherungs- und Finanzmathematik e.V. – Herausgeber: DAV-Arbeitsgruppe Interne Risikomodelle. *Interne Modelle in der Schaden-/Unfallversicherung*. Bd. 35. Schriftenreihe Versicherungs- und Finanzmathematik. Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe, 2008.
- [Die07a] Dorothea Diers. *Das Parameterrisiko - Ein häufig vernachlässigtes Risiko in Internen Modellen von Schaden- und Unfallversicherern*. Techn. Ber. Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften, Universität Ulm, 2007.
- [Die07b] Dorothea Diers. *Interne Unternehmensmodelle in der Schaden- und Unfallversicherung - Entwicklung eines stochastischen internen Modells für die wert- und risikoorientierte Unternehmenssteuerung und für die Anwendung im Rahmen von Solvency II*. Institut für Finanz- und Aktuarwissenschaften, Ulm, 2007.
- [Die09] Dorothea Diers. „Stochastic modelling of catastrophe risks in DFA models“. In: *German Risk and Insurance Review* 5 (2009), S. 53–79.
- [DL09] Laurent Devineau und Stéphane Loisel. „Risk aggregation in Solvency II: How to converge the approaches of the internal models and those of the standard formula?“ In: *Bulletin Français d’Actuariat* 9.18 (2009), S. 107–145.

- [Dof08] René Doff. „A Critical Analysis of the Solvency II Proposals“. In: *The Geneva Papers on Risk and Insurance - Issues and Practice* 22.2 (2008), S. 193–206.
- [Dof16] René Doff. „The Final Solvency II Framework: Will It Be Effective?“. In: *The Geneva Papers on Risk and Insurance - Issues and Practice* 41.4 (2016), S. 587–607.
- [Dri+12] Damien Drieskens, Marc Henry, Jean-François Walhin und Jürgen Wielandts. „Stochastic projection for large individual losses“. In: *Scandinavian Actuarial Journal* 2012.1 (2012), S. 1–39.
- [DS86] Ralph B. D’Agostino und Michael A. Stephens. *Goodness-of-Fit-Techniques*. Marcel Dekker Inc., New York, 1986.
- [DuM83] William H. DuMouchel. „Estimating the stable index  $\alpha$  in order to measure tail thickness: A critique“. In: *The Annals of Statistics* 11.4 (1983), S. 1019–1031.
- [DVO] *Delegierte Verordnung (EU) 2015/35 der Kommission vom 10. Oktober 2014 zur Ergänzung der Richtlinie 2009/138/EG des Europäischen Parlaments und des Rates betreffend die Aufnahme und Ausübung der Versicherungs- und der Rückversicherungstätigkeit (Solvabilität II)*. 2015.
- [Efr79] Bradley Efron. „Bootstrap methods: another look at the jackknife“. In: *The Annals of Statistics* 7.1 (1979), S. 1–26.
- [EIOPA11] Joint Working Group on Non-Life und Health NSLT Calibration. *Calibration of the Premium and Reserve Risk Factors in the Standard Formula of Solvency II*. Techn. Ber. European Insurance und Occupational Pensions Authority, Dez. 2011.
- [EIOPA14] European Insurance und Occupational Pensions Authority. *The underlying assumptions in the standard formula for the Solvency Capital Requirement calculation*. Techn. Ber. European Insurance und Occupational Pensions Authority, Juli 2014.
- [EIOPA15] European Insurance und Occupational Pensions Authority. *Leitlinien zur Bewertung von versicherungstechnischen Rückstellungen*. Techn. Ber. European Insurance und Occupational Pensions Authority, Apr. 2015.
- [EIOPA17] European Insurance und Occupational Pensions Authority. *Risk-Free Interest Rate Term Structures - Monthly Technical Information - 2017*. Jan. 2017. URL: <https://eiopa.europa.eu/regulation-supervision/insurance/solvency-ii-technical-information/risk-free-interest-rate-term-structures> (besucht am 01.10.2017).
- [EKM97] Paul Embrechts, Claudia Klüppelberg und Thomas Mikosch. *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*. Springer-Verlag, Heidelberg, 1997.
- [ET93] Bradley Efron und Robert J. Tibshirani. *An Introduction to the Bootstrap*. Chapman & Hall Inc., New York, 1993.
- [Fac13] Michael Fackler. „Reinventing Pareto: Fits for both small and large losses“. In: *International ASTIN Colloquium, Den Haag*. 2013.

- 
- [Fac17] Michael Fackler. „Experience rating of (re)insurance premiums under uncertainty about past inflation“. Diss. Carl von Ossietzky Universität Oldenburg, 2017.
- [Fah+13] Ludwig Fahrmeir, Thomas Kneib, Stefan Lang und Brian Marx. *Regression: Models, Methods and Applications*. Springer-Verlag, Berlin, 2013.
- [FHP03] Ana Ferreira, Laurens de Haan und Liang Peng. „On optimising the estimation of high quantiles of a probability distribution“. In: *Statistics* 37.5 (2003), S. 401–434.
- [FR02] Marco Frittelli und Emanuela Rosazza Gianin. „Putting order in risk measures“. In: *Journal of Banking and Finance* 26.7 (Juli 2002), S. 1473–1486.
- [Fre81] David A. Freedman. „Bootstrapping Regression Models“. In: *The Annals of Statistics* 9.6 (1981), S. 1218–1228.
- [FS02] Hans Föllmer und Alexander Schied. „Convex measures of risk and trading constraints“. In: *Finance and Stochastics* 6.4 (Okt. 2002), S. 429–447.
- [FS04] Hans Föllmer und Alexander Schied. *Stochastic Finance: An Introduction in Discrete Time*. Walter de Gruyter-Verlag, Berlin, 2004.
- [FS12] Damir Filipovic und Gregor Svindland. „The canonical model space for law-invariant convex risk measures is  $L^1$ “. In: *Mathematical Finance* 22.3 (Juli 2012), S. 585–589.
- [FT28] Ronald A. Fisher und Leonard H. C. Tippett. „Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample“. In: *Proceedings of the Cambridge Philisophical Society* 24 (1928), S. 180–190.
- [FW17] Andreas Fröhlich und Annegret Weng. „Parameter uncertainty and reserve risk under Solvency II“. In: *Insurance: Mathematics and Economics* (2017).
- [GDV93] Gesamtverband der Deutschen Versicherungswirtschaft e.V. *Die deutsche Versicherungswirtschaft im EG-Binnenmarkt: Ausgangslage, Strategien, Perspektiven*. Bd. 15. Schriftenreihe des Ausschusses Volkswirtschaft des GDV e.V. Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe, 1993.
- [Gis09] Alois Gisler. „The Insurance Risk in the SST and in Solvency II: Modelling and Parameter Estimation“. In: *39th International ASTIN Colloquium, Helsinki* (Juni 2009).
- [GM12] Nadine Gatzert und Michael Martin. „Quantifying credit and market risk under Solvency II: Standard approach versus internal model“. In: *Insurance: Mathematics and Economics* 51.3 (2012), S. 649–666.
- [Gne43] Boris W. Gnedenko. „Sur la distribution limité du terme d’une série aléatoire“. In: *Annals of Mathematics* 44.3 (Juli 1943), S. 423–453.
- [Goe+16] Heinz-Willi Goelden, Klaus Th. Hess, Martin Morlock, Klaus D. Schmidt und Klaus J. Schröter. *Schadenversicherungsmathematik*. Springer-Verlag, Berlin, 2016.

- [Gof85] Jeremy Goford. „The control cycle: financial control of a life assurance company“. In: *Journal of the Student Society* 28 (1985), S. 99–114.
- [Gum58] Emil J. Gumbel. *Statistics of extremes*. Columbia University Press, New York, 1958.
- [Hal92] Peter Hall. *The Bootstrap and Edgeworth Expansion*. Springer-Verlag, New York, 1992.
- [HM90] Christian Hipp und Reinhard Michel. *Risikotheorie: Stochastische Modelle und Statistische Methoden*. Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe, 1990.
- [Hol09] Ines Holzmüller. „The United States RBC Standards, Solvency II and the Swiss Solvency Test: A Comparative Assessment“. In: *The Geneva Papers on Risk and Insurance - Issues and Practice* 34.1 (2009), S. 56–77.
- [Höp10] Malte Höppener. „Kapitaladäquanz und Kapitalallokation im Kompositversicherungsunternehmen auf Basis eines 'internen Modells' vor dem Hintergrund aufsichtsrechtlicher Anforderungen und interner Steuerungszwecke“. Diss. Universität Leipzig, 2010.
- [Hüb13] Markus Hübel. *Aufsichtsrechtliche Eigenmittelanforderungen an Kompositversicherungsunternehmen unter Solvency II nach dem Standardmodell: kritische Würdigung für den Zweck der Verwendung zur wertorientierten Unternehmenssteuerung*. Bd. 17. Leipziger Schriften zur Versicherungswissenschaft, 2013.
- [Hür10] Werner Hürlimann. „Modelling non-life insurance risk for Solvency II in a reinsurance context“. In: *Life & Pensions Magazine* 2010 (Jan. 2010), S. 35–40.
- [KE09] Pieter Klaasen und Idzard van Eeghen. *Economic Capital: How It Works, and What Every Manager Needs to Know*. Elsevier Science, Amsterdam, 2009.
- [Kle13a] Heinz-Jürgen Klemmt. „Modellierung von Großschäden in der Kraftfahrzeug-Haftpflichtversicherung“. In: *Assets & Liabilities*. Bd. 01. General Reinsurance AG (Gen Re), 2013, S. 14–21.
- [Kle13b] Achim Klenke. *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Springer Spektrum, Berlin, 2013.
- [KPW12] Stuart A. Klugman, Harry H. Panjer und Gordon E. Willmot. *Loss Models: From Data to Decisions*. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, 2012.
- [Lea91] M. R. Leadbetter. „On a basis for 'peaks over threshold' modeling“. In: *Statistics & Probability Letters* 12.4 (1991), S. 357–362.
- [Lie06] Peter Liebowein. „Risk Models for Capital Adequacy: Applications in the Context of Solvency II and Beyond“. In: *The Geneva Papers on Risk and Insurance - Issues and Practice* 31.3 (Juli 2006), S. 528–550.
- [Lie09] Peter Liebowein. *Klassische und moderne Formen der Rückversicherung*. Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe, 2009.
- [Lil67] Hubert W. Lilliefors. „On the Kolmogorov-Smirnov Test for Normality with Mean and Variance Unknown“. In: *Journal of the American Statistical Association* 62.318 (1967), S. 399–402.

- 
- [Lil69] Hubert W. Lilliefors. „On the Kolmogorov-Smirnov Test for the Exponential Distribution with Mean Unknown“. In: *Journal of the American Statistical Association* 64.325 (1969), S. 387–389.
- [LP94] Mico Loretan und Peter C. B. Phillips. „Testing the covariance stationarity of heavy-tailed time series: An overview of the theory with applications to several financial datasets“. In: *Journal of Empirical Finance* 1.2 (1994), S. 211–248.
- [LSF86] J.R. Leslie, M.A. Stephens und S. Fotopoulos. „Asymptotic Distribution of the Shapiro-Wilk W for Testing for Normality“. In: *The Annals of Statistics* 14.4 (1986), S. 1497–1506.
- [Mac02] Thomas Mack. *Schadenversicherungsmathematik*. Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe, 2002.
- [MFE05] Alexander J. McNeil, Rüdiger Frey und Paul Embrechts. *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools*. Princeton University Press, Princeton, 2005.
- [MR96] Eberhard Müller und Michael Reischel. „The Theoretical Considerations Underlying the Risk Reserve Process and the Practical Assessment and Control of the Capital Required (Risk-Based Capital)“. In: *Risk and Insurance* 21.78 (Jan. 1996), S. 50–76.
- [NAIC13] Solvency Modernization Initiative (E) Task Force. *The U.S. National State-Based System of Insurance and the Solvency Modernization Initiative*. Techn. Ber. National Association of Insurance Commissioners, Aug. 2013.
- [NAIC16a] Statutory Accounting Principles Working Group. *Accounting Practices and Procedures Manual (AP & P Manual)*. Techn. Ber. National Association of Insurance Commissioners, Sep. 2016.
- [NAIC16b] National Association of Insurance Commissioners. „NAIC Property and Casualty Risk-Based Newsletter“. In: *Property and Casualty Risk-Based Capital Newsletter* 20.1 (Aug. 2016).
- [NAIC94] Bernard L. Webb und Claude C. Lilly. *Raising the Safety Net - Risk-Based Capital for Life Insurance Companies*. Techn. Ber. National Association of Insurance Commissioners, 1994.
- [Nel99] Roger B. Nelsen. *An Introduction to Copulas*. Springer-Verlag, New York, 1999.
- [OL09] Esbjörn Ohlsson und Jan Lauzeningsks. „The one-year non-life insurance risk“. In: *Insurance: Mathematics and Economics* 45.2 (2009), S. 203–208.
- [Pfe16] Dietmar Pfeifer. „Hält das Standardmodell unter Solvency II, was es verspricht?“ In: *Der Forschung - der Lehre - der Bildung: 100 Jahre Hamburger Seminar für Versicherungswissenschaft und Versicherungswissenschaftlicher Verein in Hamburg e. V.* Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe, 2016.
- [PG10] María Pérez-Fructuoso und Almudena García Pérez. „Analyzing solvency with extreme value theory: an application to the Spanish motor liability insurance market“. In: *Innovar* 20 (2010), S. 35–48.

- [Pic75] James Pickands. „Statistical inference using extreme order statistics“. In: *The Annals of Statistics* 3.1 (1975), S. 119–131.
- [Pru00] Helmut Pruscha. *Vorlesungen über Mathematische Statistik*. B.G. Teubner, Stuttgart, 2000.
- [PS08] Dietmar Pfeifer und Doreen Strassburger. „Solvency II: stability problems with the SCR aggregation formula“. In: *Scandinavian Actuarial Journal* 2008.1 (2008), S. 61–77.
- [PSP09] Dietmar Pfeifer, Doreen Strassburger und Jörg Philipps. „Modelling and simulation of dependence structures in nonlife insurance with Bernstein copulas“. In: *International ASTIN Colloquium, Helsinki*. 2009.
- [Res87] Sidney I. Resnick. *Extreme Values, Regular Variation and Point Processes*. Springer, New York, 1987.
- [Roc+07] Werner Rockel, Elmar Helten, Herbert Loy, Peter Ott und Roman Sauer. *Versicherungsbilanzen: Rechnungslegung nach HGB, US-GAAP und IFRS*. 2. Auflage. Schäffer-Poeschel Verlag, Stuttgart, 2007.
- [Rol+98] Tomasz Rolski, Hanspeter Schmidli, Volker Schmidt und Jozef Teugels. *Stochastic Processes for Insurance and Finance*. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 1998.
- [RRL] *Richtlinie 2009/138/EG des europäischen Parlaments und des Rates vom 25. November 2009 betreffend die Aufnahme und Ausübung der Versicherungs- und der Rückversicherungstätigkeit (Solvabilität II) (ABl. L 335 vom 17.12.2009, S. 1)*. Zuletzt geändert durch Richtlinie 2014/51/EU (ABl. L 153 vom 22.5.2014, S. 1) des Europäischen Parlaments und des Rates vom 16. April 2014. 2014.
- [RT07] Rolf-Dieter Reiss und Michael Thomas. *Statistical analysis of extreme values with applications to insurance, finance, hydrology and other fields*. Birkhäuser Verlag AG, Basel, 2007.
- [RVB17] Tom Reynkens, Roel Verbelen und Jan Beirlant. „Modelling censored losses using splicing: A global fit strategy with mixed Erlang and extreme value distributions“. In: *Insurance: Mathematics and Economics* 77 (2017), S. 65–77.
- [Sch01] Andreas Schwepcke. *Rückversicherung: Grundlagen und aktuelles Wissen; ein Leitfaden zum Selbststudium*. Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe, 2001.
- [Sch97] Heinrich R. Schradin. „Solvenzaufsicht in den Vereinigten Staaten von Amerika: Zur Konzeption des Risk Based Capital“. In: *Zeitschrift für die gesamte Versicherungswirtschaft* 86 (1997), S. 269–294.
- [SHS10] Ishmael Sharara, Mary Hardy und David Saunders. „Regulatory Capital Standards for Property and Casualty Insurers under the U.S., Canadian and Proposed Solvency II (Standard) Formulas“. In: *Society of Actuaries* (Okt. 2010).

- 
- [SSW12] Hato Schmeiser, Caroline Siegel und Joël Wagner. „The risk of model misspecification and its impact on solvency measurement in the insurance sector“. In: *The Journal of Risk Finance* 13.4 (2012), S. 285–308.
- [Ste74] Michael A. Stephens. „EDF Statistics for Goodness of Fit and Some Comparisons“. In: *Journal of the American Statistical Association* 69.347 (1974), S. 730–737.
- [SW65] Samuel Shapiro und Martin Wilk. „An analysis of variance test for normality“. In: *Biometrika* 52.3 and 4 (1965), S. 591–611.
- [Val17] Jiří Valecký. „Calculation of Solvency Capital Requirements for Non-life Underwriting Risk Using Generalized Linear Models“. In: *Prague Economic Papers* 2017.4 (2017), S. 450–466.
- [Zec12] Nicolas Zec. *Use of an Internal Model in a General Insurance Company: Focus on Economic Capital Allocation*. Verfügbar bei SSRN: <https://ssrn.com/abstract=2161308>. 2012. (Besucht am 12.05.2018).



# Nomenklatur

AAD	Annual Aggregate Deductible
AAL	Annual Aggregate Limit
AC	Attritional Claims
ACL	Authorized Control Level
ALR	Average Loss Ratio
AOF	Ancillary Own Funds
ASM	Available Solvency Margin
AVO	Aufsichtsverordnung
AvOF	Available Own Funds
BaFin	Bundesanstalt für Finanzdienstleistungsaufsicht
BAV	Bundesaufsichtsamt für das Versicherungs- und Bausparwesen
BE	Best Estimate
BLUE	Best Linear Unbiased Estimator
BOF	Basic Own Funds
BSCR	Basic Solvency Capital Requirement
CAL	Company Action Level
CDR	Claims Development Result
CEIOPS	Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors
CHF	Schweizer Franken
CR	Combined Ratio
CY	Current Year
e.e.	Estimation Error
EAL	Excess Assets over Liabilities
EIOPA	European Insurance and Occupational Pensions Authority
EOF	Eligible Own Funds
ER	Expense Ratio
ES	Expected Shortfall
ESS	Explained Sum of Squared
EUR	Euro
EVU	Erstversicherungsunternehmen

---

FIC	Full Index Clause
FINMA	Eidgenössische Finanzmarktaufsicht
GEV	Generalized Extreme Value Distribution
GPD	Generalized Pareto Distribution
HGB	Handelsgesetzbuch
i.i.d.	independent identically distributed
IFRS	International Financial Reporting Standards
KH	Kraftfahrt-Haftpflichtversicherung
L&G-Index	Lohn- und Gehaltsindex
LAE	Loss Adjusted Expenses
LC	Large Claims
LER	Loss Elimination Ratio
LoB	Line of Business
LR	Loss Ratio
LTGA	Long-Term Guarantees Assessment
MCL	Mandatory Control Level
MCR	Minimum Capital Requirement
MDA	Maximum Domain of Attraction
Mio.	Million
MSE	Mean Squared Error
MVM	Market Value Margin
NAIC	National Association of Insurance Commissioners
NAV	Net Asset Value
OF	Own Funds
ORSA	Own Risk and Solvency Assessment
PV	Present Value
PY	Previous Year
QIS	Quantitative Impact Studies
QQ	Quantil-Quantil

---

QRT	Quantitative Reporting Template
r.e.	Random Error
RAL	Regulatory Action Level
RBC	Risk-Based Capital
RFR	Risk-free interest rate
RMSE	Root Mean Squared Error
RSS	Residual Sum of Squared
RTK	risikotragendes Kapital
RU	Referenzunternehmen
RVU	Rückversicherungsunternehmen
SAP	Statutory Accounting Principles
SCR	Solvency Capital Requirement
SIC	Severe Inflation Clause
SL	Stop Loss
SMI	Solvency Modernization Initiative
SST	Swiss Solvency Test
T1	Tier 1
T1r	Tier 1 restricted
T2	Tier 2
T3	Tier 3
TAC	Total Adjusted Capital
TE	technisches Ergebnis
TEUR	Tausend Euro
TRBC	Total Risk-Based Capital
TSS	Total Sum of Squared
TVaR	Tail Value at Risk
ULAE	Unallocated Loss Adjustment Expense
US-GAAP	United States - General Accepted Accounting Principle
UU	Ursprungsunternehmen
VAG	Versicherungsaufsichtsgesetz
VaR	Value at Risk
vt.	versicherungstechnisch
VU	(Rück-)Versicherungsunternehmen
XL	Excess of Loss

xs Exzess

ZK Zielkapital

# Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die eingereichte Dissertation selbstständig verfasst und nur die angegebenen Hilfsmittel benutzt habe. Alle wörtlich oder dem Sinne nach übernommenen Stellen sind als solche gekennzeichnet.

Die Dissertation wurde weder in Teilen noch in Gänze veröffentlicht.

Zusätzliche versichere ich, dass die Dissertation weder in ihrer Gesamtheit noch in Teilen einer anderen wissenschaftlichen Hochschule zur Begutachtung in einem Promotionsverfahren vorliegt oder vorgelegen hat.

Waldfeucht, 31. Dezember 2018

Marcel Thevißen



# Curriculum Vitae

---

## Persönliche Angaben

Name Thevißen  
Vorname Marcel  
Geburtsdatum 01.09.1982  
Geburtsort Heinsberg  
Nationalität deutsch

---

## Akademische Ausbildung

01/2016 – 12/2018 **Promotionsstudium (extern) am Institut für Mathematik, Carl von Ossietzky Universität Oldenburg.**  
10/2003 – 08/2008 **Diplomstudium der Mathematik mit Nebenfach Wirtschaftswissenschaften, Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule (RWTH) Aachen.**

---

## Weiterbildung

seit 01/2015 **Aktuar DAV, Deutsche Aktuarvereinigung e.V..**

---

## Schulbildung

08/1993 – 06/2002 **Allgemeine Hochschulreife, Kreisgymnasium Heinsberg.**