CARL VON OSSIETZKY universität OLDENBURG

Bachelorarbeit

Determinanten von Sturm-Liouville Operatoren

Studiengang:	Fach-Bachelor Mathematik
Vorgelegt von:	Henning Alberts
	Kaspersweg 11a
	26131 Oldenburg
	henning.alberts@uni-oldenburg.de
Prüfer:	Prof. Dr. Daniel Grieser
Zweitprüfer:	Prof. Dr. Hannes Uecker

Oldenburg, den 28. Dezember 2016

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Der Begriff der Determinante taucht für die meisten angehenden Mathematiker in der linearen Algebra zum ersten Mal auf. Sie ist eine Funktion, die quadratischen Matrizen A, also Vektorraumendomorphismen von endlichdimensionalen $K-$Vektorräumen V, meist $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$, eine Zahl aus K zuordnet:

$$\det : \mathrm{End}(V) \to K \qquad A \mapsto \det A.$$

Diesen Begriff studierte bereits Leibniz Ende des 17. Jahrhunderts. Während Leibniz an einer expliziten Formel für die Determinante gearbeitet hat, ging Weierstraß den Weg über Axiome und definierte auf diese Weise die Determinante.
Mithilfe der Determinante kann man auf verschiedene Eigenschaften der zugrunde liegenden Matrix schließen. Ursprünglich wurde dem Begriff der Determinante nachgegangen, um zu prüfen, ob ein lineares Gleichungssystem eindeutig lösbar ist. Doch mit der aufgebauten Theorie lassen sich heute noch viele andere Eigenschaften aus der Determinante schließen.
Betrachten wir nur ausgewählte $n \times n$ Matrizen A, im Speziellen die reellen symmetrischen, lässt sich die Determinante über das Produkt ihrer Eigenwerte λ_n berechnen:

$$\det A = \prod_{n=1}^{k} \lambda_n \tag{1}$$

(vgl. [Fis81], historische Bemerkungen aus [Wikb]).

Es stellt sich nun in natürlicher Weise die Frage, ob die Determinante auch allgemein für lineare Operatoren definiert werden kann und ob für reelle, symmetrische, lineare Operatoren L eine ähnliche Formel wie in (1) gilt. Wir wollen also eine Definition der Determinante finden, in der Art

$$\text{„} \det L = \prod_{n=1}^{\infty} \lambda_n \text{“},$$

wobei der Operator L unendlich viele Eigenwerte λ_n besitzen kann. Dieses Produkt kann offenbar nur dann konvergieren, wenn die Eigenwerte gegen Eins streben. Da dies für die wenigsten Operatoren der Fall ist, widmen wir uns einem ähnlichen Produkt.
Ziel meiner Bachelorarbeit ist es, zu zeigen, dass für Sturm-Liouville Operatoren L_θ das Produkt

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n(\theta)}{\lambda_n(0)}$$

konvergiert und explizit ausgerechnet werden kann, wobei $\theta \in [0, 1]$ ein Parameter ist. Für genauere Informationen siehe Satz 4.1.1 im letztem Kapitel.
Dieses Problem wurde bereits im 20. Jahrhundert studiert und die gewonnenen Ergebnisse

festgehalten. Grundlage meiner Ausarbeitung sind eben diese Ergebnisse aus der Arbeit THEOREM ON INFINITE PRODUCTS OF EIGENVALUES OF STURM-LIOUVILLE TYPE OPERATORS, 1977 von S. LEVIT und U. SMILANSKI. Das Resultat ihrer Arbeit war für sie bei der Lösung von Pfadintegralen, wie sie in der Quantenfeldtheorie vorkommen, von Nutzen. Mit diesem Aspekt werde ich mich in dieser Arbeit allerdings nur sehr kurz befassen.
Im Vordergrund meiner Ausführung wird die Sturm-Liouville Theorie, deren Eigenwertproblematik und der Beweis dieses Theorems stehen. Abschließend werde ich noch kurz auf Anwendungen dieses Theorems eingehen.
Mein Vorgehen und die vorhandenen Aussagen und Beweise stützen sich maßgeblich auf die Werke [Wal00] und [AG08] sowie zum Teil auf das Skript [Wer02]. Werden anderweitig Aussagen oder Ideen anderer Werke genutzt, wird dies dementsprechend gekennzeichnet.

2 Sturm-Liouville Theorie

Die Sturm-Liouville Theorie wurde von *Jacques Charles François Sturm* (⋆29. September 1803 in Genf; †18. Dezember 1855 in Paris) und *Joseph Liouville* (⋆24. März 1809 in Saint-Omer; †8. September 1882 in Paris) begründet (vgl. [Wikc], [Wika]).
Wir widmen uns zunächst den Sturm-Liouville Operatoren und ihren Eigenschaften.

2.1 Sturm-Liouville Operatoren

2.1.1 Definition: Sturm-Liouville Operator

Sei $I = [a, b]$ ein Intervall, $p \in C^1(I),\ p > 0$ in I und $q \in C(I)$.

$$L : C^2(I) \to C(I) \qquad Lu := -\big(pu'\big)' + qu \tag{2}$$

ist ein Differentialoperator 2. Ordnung und heißt Sturm-Liouville Operator.

Bis auf Weiteres gelten alle Bezeichnungen und Eigenschaften wie in dieser Definition.

Bemerkung Für die Wohldefiniertheit des Operators würde $pu' \in C^1(I)$ genügen. Der Einfachheit halber und auch hinsichtlich späterer Aussagen wird allerdings die Voraussetzung $p \in C^1(I)$ genutzt. So weit wie möglich wird in den folgenden Beweisen nur $pu' \in C^1(I)$ verwendet.

Beispiel Im Folgenden werden wir einige Definitionen und Sätze anhand eines Beispiels verfolgen, um sie besser zu verstehen.
Sei dazu $I = [0, \pi], p \in C^1(I)$ mit $p = 1$ und $q \in C(I)$ mit $q = 0$. Dann ist L mit

$$Lu := -u''$$

ein Sturm-Liouville Operator.

Wir kommen nun zur ersten wichtigen Eigenschaft von Sturm-Liouville Operatoren:

2.1.2 Lemma: Lagrange-Identität

Seien $u, v \in C^2(I)$. Dann gilt

$$vLu - uLv = \big[p(uv' - u'v)\big]'.$$

Beweis. Seien $u, v \in C^2(I)$. Obige Aussage lässt sich leicht nachrechnen, denn es gilt

$$\begin{aligned} vLu - uLv &= -(pu')'v + quv + (pv')'u - quv \\ &= -(pu')'v + (pv')'u \\ &= (pv')'u + pu'v' - (pu'v' + (pu')'v) \\ &= (puv')' - (pu'v)' \\ &= \left[p(uv' - u'v)\right]'. \end{aligned}$$

$\square$

Die folgende Definition mit anschließendem Lemma ist nützlich, um die lineare Unabhängigkeit von zwei Lösungen u und v der homogenen Differentialgleichung $Lu = 0$ zu charakterisieren.

2.1.3 Definition: Wronski-Determinante

Seien $u, v \in C^2(I)$ Lösungen der Gleichung $Lu = 0$.

$$W(u,v)(t) := \det \begin{pmatrix} u(t) & v(t) \\ u'(t) & v'(t) \end{pmatrix} = u(t)v'(t) - u'(t)v(t)$$

heißt Wronski-Determinante der Lösungen u und v.

2.1.4 Lemma: Eigenschaft der Wronski-Determinante

Es gilt entweder $W(u,v) \equiv 0$ oder $W(u,v)(t) = \dfrac{C}{p(t)}$ mit $C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ für jedes $t \in I$.

Beweis. Um $W(u,v)(t) = \dfrac{C}{p(t)}$ mit $C \in \mathbb{R}$ zu beweisen, zeigen wir, dass für alle $t \in I$

$$[W(u,v)(t)p(t)]' = 0$$

gilt.
Da $u, v \in C^2(I)$ Lösungen von $Lu = 0$ sind, folgt mithilfe der Lagrange-Identität 2.1.2

$$0 = vLu - uLv = \left[p(uv' - u'v)\right]' = [pW(u,v)]'.$$

Also ist $pW(u,v) \equiv C \in \mathbb{R}$. Da $p > 0$ ist, ist entweder $W(u,v) \equiv 0$ für $C = 0$ oder $W(u,v)(t) = \dfrac{C}{p(t)}$ mit $C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ für jedes $t \in I$. $\square$

Mithilfe dieser Eigenschaft können wir, wie bereits angekündigt, die lineare Unabhängigkeit von Lösungen u und v von $Lu = 0$ über eine Eigenschaft der Wronski-Determinante begründen.

2.1.5 Lemma

Seien $u, v \in C^2(I)$ Lösungen von $Lu = 0$.
Dann gilt

$$u \text{ und } v \text{ sind linear unabhängig } \Leftrightarrow \forall t \in I : W(u,v)(t) \neq 0.$$

Beweis. Seien u und v linear unabhängige Lösungen von $Lu = 0$. Bekannt ist, dass für jedes $t_0 \in I$ der Raum aller Lösungen von $Lu = 0$ isomorph zu $\mathbb{R}^2$ mit dem Isomorphismus $u \mapsto \begin{pmatrix} u(t_0) \\ u'(t_0) \end{pmatrix}$ ist. Also sind u und v genau dann linear unabhängig, wenn $\begin{pmatrix} u(t_0) \\ u'(t_0) \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} v(t_0) \\ v'(t_0) \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^2$ linear unabhängig sind.
Angenommen es existiere ein $t_0 \in I$, sodass $W(u,v)(t_0) = 0$ gilt. Dann folgt mit Lemma 2.1.3, dass $W(u,v) = \det \begin{pmatrix} u & v \\ u' & v' \end{pmatrix} \equiv 0$ ist. Also sind $\begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v(t) \\ v'(t) \end{pmatrix}$ für alle $t \in I$ linear abhängig $\lightning$. Also gilt $W(u,v)(t) \neq 0$ für alle $t \in I$.

Sei $W(u,v)(t) \neq 0$ für alle $t \in I$. Angenommen u und v wären linear abhängig. Dann existiert ein $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, sodass für alle $t \in I$

$$u(t) = cv(t)$$

gilt. Dann folgt aber $W(u,v) = uv' - vu' = cvv' - vcv' = 0$ $\lightning$. Also sind u und v linear unabhängig. $\square$

Beispiel Wir führen unser Beispiel weiter und berechnen die Wronski-Determinante. Dazu benötigen wir zwei Lösungen $u, v \in C^2(I)$ der Gleichung $Lu = 0$, also

$$-u'' = 0 \quad \text{und} \quad -v'' = 0.$$

Wählen wir zum Beispiel $u(t) := t$ und $v(t) := t - \pi$. Dann ist

$$W(u,v)(t) = \det \begin{pmatrix} u & v \\ u' & v' \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} t & t-\pi \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = t - t + \pi = \pi$$

die Wronski-Determinante von u und v. Wie man hieran sieht ist die Wronski-Determinante, wie in Lemma 2.1.4 gezeigt, von der Form

$$W(u,v)(t) = \frac{C}{p(t)} = \frac{C}{1} = \pi \quad \text{mit } C = \pi.$$

Da u und v linear unabhängig sind, folgt nach Lemma 2.1.5, dass $W(u,v)(t) \neq 0$ für alle $t \in I$ ist, was in diesem Beispiel offenbar der Fall ist.

2.2 Die Sturmsche Randwertaufgabe

Entgegen der in der Analysis II üblichen Anfangswertprobleme betrachten wir in der Sturm-Liouville Theorie so genannte Randwertprobleme. Hierbei werden statt eines oder mehrerer Anfangswerte, die Randwerte vorgeben. Besonders ist dabei, dass Randwertprobleme im Gegensatz zu Anfangswertproblemen nicht notwendiger Weise eindeutige Lösungen liefern.
Dazu aber erst einmal folgende Definition:

2.2.1 Definition: Sturmsche Randwertaufgabe

Seien $f \in C(I)$ *und* $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$. *Die Randwertaufgabe*

$$Lu = f$$

unter den homogenen Randwertbedingungen

$$R_1 u := \alpha_1 u(a) + \alpha_2 p(a) u'(a) = 0 \quad |\alpha_1| + |\alpha_2| > 0 \tag{R1}$$
$$R_2 u := \beta_1 u(b) + \beta_2 p(b) u'(b) = 0 \quad |\beta_1| + |\beta_2| > 0 \tag{R2}$$

und den Voraussetzungen aus Definition (2) *heißt Sturmsche Randwertaufgabe.*

Bemerkung

a) R_1 und R_2 sind linear in u.

b) Die Faktoren $p(a)$ und $p(b)$ in den Randbedingungen rühren daher, dass bei der Überführung von (2) in ein System erster Ordnung der Faktor pu' auftritt:

$$v' = \frac{w}{p}, \quad w' = -qv + f \text{ mit } v = u, w = pu' \tag{3}$$

Mehr dazu in Kapitel 3.1.2.

2.2.2 Definition

Zur weiteren Übersicht definieren wir

$$C_R^2(I) := \{u \in C^2(I) | \, u \textit{ erfüllt die Randbedingungen } (\text{R1}) \textit{ und } (\text{R2})\}.$$

Wir kommen nun zur ersten Eigenschaft des Sturm-Liouville Operators, den wir in der Einleitung angesprochen haben, die Symmetrie von L.

2.2.3 Lemma

Seien $u, v \in C_R^2(I)$. Dann gilt

a) $\int_a^b v(t)Lu(t) - u(t)Lv(t)\,dt = 0$ *und*

b) L *ist symmetrisch in* $C_R^2(I)$, *also* $<Lu, v> = <u, Lv>$.

Beweis. a) Seien $u, v \in C_R^2(I)$. Im Folgenden wird der Übersicht halber auf das Argument verzichtet. Es gilt

$$\int\limits_a^b vLu - uLv\,dt \overset{2.1.2}{=} \int\limits_a^b \big(p(vu' - uv')\big)'\,dt$$
$$= \underbrace{p(b)\big(v(b)u'(b) - u(b)v'(b)\big)}_{=:B} - \underbrace{p(a)\big(v(a)u'(a) - u(a)v'(a)\big)}_{=:A}.$$

Da $u, v \in C_R^2(I)$ sind, gilt $R_1u = R_1v = 0$ und $R_2u = R_2v = 0$. Wir betrachten verschiedene Fälle:
Sei zunächst $\alpha_1 = 0$. Dann folgt $u'(a) = v'(a) = 0$ und damit ist $p(a)\,(v(a)u'(a) - u(a)v'(a)) = 0$. Analog für $\beta_1 = 0$.
Falls $\alpha_1 \neq 0$ gilt, ist

$$u(a) = -\frac{\alpha_2 p(a)u'(a)}{\alpha_1} \text{ und } v(a) = -\frac{\alpha_2 p(a)v'(a)}{\alpha_1}$$

und damit

$$p(a)\big(v(a)u'(a) - u(a)v'(a)\big) = p(a)\left(-\frac{\alpha_2 p(a)v'(a)u'(a)}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2 p(a)u'(a)v'(a)}{\alpha_1}\right) = 0.$$

Analog für $\beta_1 \neq 0$. Also sind die Summanden A und B jeweils Null für beliebige α_i, β_i mit $i = 1, 2$. Damit folgt die Behauptung.

b) Seien $u, v \in C_R^2(I)$. Da u und v reellwertig sind, gilt

$$<Lu, v> - <u, Lv> = \int_a^b vLu - uLv\,dx \overset{a)}{=} 0.$$

$\square$

Zu Beginn des Kapitels habe ich angesprochen, dass Randwertprobleme im Gegensatz zu Anfangswertproblemen im Allgemeinen keine eindeutige Lösung besitzen. Der nächste Satz zeigt unter welchen Bedingungen eine eindeutige Lösung für ein Randwertproblem existiert.

2.2.4 Satz: Eindeutige Lösbarkeit

Sei $\{u, v\}$ ein Fundamentalsystem der homogenen Differentialgleichung $Lu = 0$. Die Sturmsche Randwertaufgabe 2.2.1 ist für jedes $f \in C(I)$ genau dann eindeutig lösbar, wenn $Lu = 0$ unter (R1) *und* (R2) *nur $u \equiv 0$ als Lösung besitzt. Dies ist genau dann der Fall, wenn*

$$\det \begin{pmatrix} R_1u & R_1v \\ R_2u & R_2v \end{pmatrix} \neq 0 \tag{4}$$

gilt.

Beweis. Offenbar ist $Lu = f$ für jedes $f \in C(I)$ genau dann eindeutig lösbar, wenn L injektiv und surjektiv auf seinem Definitionsbereich $C_R^2(I)$ ist. Da L ein linearer Operator ist, ist die Injektivität von L äquivalent dazu, dass der Kern der Nullraum ist. Also wenn $Lu = 0$ nur $u \equiv 0$ als Lösung besitzt. Zudem ist L genau dann surjektiv, wenn L injektiv ist.
Es bleibt also nur noch zu zeigen, dass (4) genau dann gilt, wenn $u \equiv 0$ die einzige Lösung von $Lu = 0$ unter (R1) und (R2) ist.
Da $\{u, v\}$ ein Fundamentalsystem ist, lässt sich jede Lösung w der homogenen Differentialgleichung als $w = c_1u + c_2v$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ darstellen. Dann gilt offenbar

$$\begin{aligned}
& w = c_1u + c_2v = 0 \text{ ist unter } R_iw = c_1R_iu + c_2R_iv = 0,\ i = 1, 2 \text{ die einzige Lösung} \\
\Leftrightarrow & \left[\begin{pmatrix} R_1u & R_1v \\ R_2u & R_2v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\
\Leftrightarrow & \begin{pmatrix} R_1u & R_1v \\ R_2u & R_2v \end{pmatrix} \text{ invertierbar} \\
\Leftrightarrow & \det \begin{pmatrix} R_1u & R_1v \\ R_2u & R_2v \end{pmatrix} \neq 0.
\end{aligned}$$

Damit ist auch der zweite Teil des Satzes gezeigt. □

Für die weiteren Aussagen und Sätze ist es notwendig, dass L injektiv und surjektiv ist. Aus diesem Grund wird bis auf Weiteres angenommen, dass $Lu = 0$ unter (R1) und (R2) nur die triviale Lösung besitzt (A).

Wir wollen nun die Sturmsche Randwertaufgabe 2.2.1 lösen, also eine Lösung der Gleichung $Lu = f$ für beliebiges $f \in C(I)$ unter den Randbedingungen (R1) und (R2) finden. Eine der ersten Möglichkeiten, die einem dazu in den Sinn kommt, ist, wenn möglich, den inversen Operator von L zu finden. Dazu dient folgende Definition:

2.3 Die Greensche Funktion

2.3.1 Definition: Greensche Funktion

Eine Greensche Funktion für den Differentialoperator L unter den Randbedingungen (R1) *und* (R2) *ist eine stetige Funktion*

$$G : I \times I \to \mathbb{R} \qquad (t, \tau) \mapsto G(t, \tau),$$

sodass für den Integraloperator

$$T : C(I) \to C^2(I) \qquad Tf(t) = \int_a^b G(t, \tau) f(\tau)\, d\tau \tag{5}$$

gilt:

a) Für alle $f \in C(I)$ ist $Tf \in C^2(I)$ und $L(Tf) = f$,

b) Tf erfüllt (R1) *und* (R2) *und*

c) $T(Lu) = u$ für alle $u \in C^2_R(I)$.

Bemerkung

1. Die Greensche Funktion kann nur existieren, wenn L bijektiv ist. Aus diesem Grund wurde in 2.2.4 diese Annahme gemacht.
2. Da L nach Lemma 2.2.3 in $C^2_R(I)$ symmetrisch ist und Tf für $f \in C(I)$ in $C^2_R(I)$ liegt, gilt für alle $f, g \in C(I)$

$$\begin{aligned} < Tf, L(Tg) > &= < L(Tf), Tg > \\ \Rightarrow < Tf, g > &= < f, Tg > . \end{aligned}$$

   Damit ist T symmetrisch in $C(I)$.

Mithilfe der Symmetrie von T lässt sich zeigen, dass jede Greensche Funktion symmetrisch ist:

2.3.2 Lemma: Symmetrie der Greenschen Funktion

Für beliebige $f, g \in C(I)$ gilt

$$< Tf, g > = < f, Tg > \quad \Leftrightarrow \quad \forall t, \tau \in I : G(t, \tau) = G(t, \tau).$$

Beweis. Seien $f, g \in C(I)$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
0 &\overset{!}{=} <Tg, f> \; - \; <g, Tf> \\
&= \int f(t) \int G(t,\tau) g(\tau)\, d\tau\, dt - \int g(t) \int G(t,\tau) f(\tau)\, d\tau\, dt \\
&= \iint f(t) G(t,\tau) g(\tau)\, d\tau\, dt - \iint g(t) G(t,\tau) f(\tau)\, d\tau\, dt \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \iint f(t) G(t,\tau) g(\tau)\, dt\, d\tau - \iint g(t) G(t,\tau) f(\tau)\, d\tau\, dt \\
&\underset{\text{tausch}}{\overset{\text{Variablen-}}{=}} \iint f(t) G(t,\tau) g(\tau)\, dt\, d\tau - \iint g(\tau) G(\tau,t) f(t)\, dt\, d\tau \\
&= \iint f(t) g(\tau) \left[G(t,\tau) - G(\tau,t) \right]\, dt\, d\tau.
\end{aligned}
$$

Dies ist für beliebige stetige f und g genau dann erfüllt, wenn $G(t,\tau) = G(\tau,t)$ für alle $t, \tau \in I$ gilt.

□

Mit der Symmetrie von T ist also die Symmetrie jeder Greenschen Funktion gezeigt. Es bleibt nun die Frage offen, ob es zum Sturmschen Randwertproblem genau eine Greensche Funktion gibt. Folgender Satz gibt dabei Abhilfe:

2.3.3 Satz: Eindeutigkeit der Greenschen Funktion

Es existiert genau eine Greensche Funktion zum Differentialoperator L unter den Randbedingungen (R1) *und* (R2)*.*

Beweis. Seien G_1 und G_2 zwei Greensche Funktion zum obigen Problem. Definiere

$$
\begin{aligned}
T_1 f(t) &:= \int_a^b G_1(t,\tau) f(\tau)\, d\tau \text{ und} \\
T_2 f(t) &:= \int_a^b G_2(t,\tau) f(\tau)\, d\tau \text{ mit } f \in C(I).
\end{aligned}
$$

Wir wollen nun zeigen, dass $T_1 = T_2$ ist und damit auch $G_1 = G_2$. Es gilt mithilfe der Eigenschaften einer Greenschen Funktion 2.3.1 und der Tatsache, dass Kompositionen von Operatoren assoziativ ist,

$$T_1 f = T_1(LT_2 f) = (T_1 L) T_2 f = T_2 f \quad \text{für beliebige } f \in C(I)$$

und damit $T_1 = T_2$. Es gibt also nur eine Greensche Funktion zum Differentialoperator L unter den Randbedingungen (R1) und (R2).

□

Als Nächstes beweisen wir einen Satz, der zum Teil aus der Analysis II bekannt sein sollte. Da er aber meist nicht in dieser Form behandelt wird, wird er hier noch einmal gezeigt. Er dient uns lediglich als Hilfsmittel, um den darauffolgenden Satz beweisen zu können.

2.3.4 Satz

Sei $I = [a, b]$ und

$$f : I^2 \to \mathbb{R} \qquad (x, y) \mapsto f(x, y)$$

stetig in $(x, y) \in I^2$. Zudem sei $\partial_x f$ stetig auf I^2. Dann gilt für alle $x \in I$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(x,y)\,dy\right) &= f(x,x) + \int_a^x \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\,dy \qquad \text{und} \\
\frac{d}{dx}\left(\int_x^b f(x,y)\,dy\right) &= -f(x,x) + \int_x^b \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\,dy.
\end{aligned}$$

Beweis. Sei $f \in C(I^2)$ und stetig differenzierbar in $x \in I$. Um die Behauptung zu zeigen, benötigen wir eine Hilfsfunktion

$$H(\xi(x), \eta(x)) := \int_a^{\xi(x)} f(\eta(x), y)\,dy \qquad \text{mit } \xi(x) = \eta(x) = x.$$

Es ist offenbar $\xi, \eta \in C^1(I)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} H(\xi(x), \eta(x)) &= \frac{\partial}{\partial \xi} H(\xi(x), \eta(x)) \frac{d\xi(x)}{dx} + \frac{\partial}{\partial \eta} H(\xi(x), \eta(x)) \frac{d\eta(x)}{dx} \\
&\overset{\text{Ana II}}{=} f(\eta(x), \xi(x)) \frac{d\xi(x)}{dx} + \int_a^{\xi(x)} \frac{d}{d\eta} f(\eta(x), y)\,dy \frac{d\eta(x)}{dx} \\
&= f(x,x) + \int_a^x \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\,dy.
\end{aligned}$$

Analog lässt sich

$$\frac{d}{dx}\left(\int_x^b f(x,y)\,dy\right) = -f(x,x) + \int_x^b \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\,dy$$

zeigen. □

Unser nächstes Ziel ist es, die Greensche Funktion explizit auszurechnen. Dazu dient folgendes Lemma:

2.3.5 Lemma

Sei

$$G : I \times I \to \mathbb{R} \qquad (t,\tau) \mapsto G(t,\tau)$$

eine Funktion mit den Eigenschaften

1. $G \in C(I^2)$ *und sowohl* $\partial_t G$ *als auch* $\partial_t^2 G$ *existieren jeweils in* $a \leq \tau \leq t \leq b$ *und* $a \leq t \leq \tau \leq b$ *und sind dort stetig,*
2. *für festes* $\tau_0 \in I$ *ist* $L_t G(t,\tau_0) = 0$*, falls* $t \neq \tau_0$*,*
3. *auf der Geraden* $t = \tau$ *hat* $\partial_t G(t,\tau)$ *einen Sprung:* $\partial_t G(t^+,t) - \partial_t G(t^-,t) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \partial_t G(t+\epsilon,t) - \partial_t G(t-\epsilon,t) = -\dfrac{1}{p(t)}$
4. *und für jedes* $\tau_0 \in (a,b)$ *gilt* $R_1 G(t,\tau_0) = R_2 G(t,\tau_0) = 0$.

Dann ist G *eine Greensche Funktion zum Differentialoperator* L *unter den Randbedingungen* (R1) *und* (R2)*.*

Beweis. Wir zeigen die Eigenschaften a) - c) einer Greenschen Funktion aus Definition 2.3.1.

a) Zu zeigen ist: Für alle $f \in C(I)$ ist $Tf \in C^2(I)$ und $L(Tf) = f$. Sei also $f \in C(I)$ beliebig. Mithilfe von Satz 2.3.4 und den Voraussetzungen aus 1. gilt

$$\begin{aligned}
(Tf)'(t) &= \left(\int_a^b G(t,\tau) f(\tau)\, d\tau\right)' = \left(\int_a^t G(t,\tau) f(\tau)\, d\tau + \int_t^b G(t,\tau) f(\tau)\, d\tau\right)' \\
&= G(t,t)f(t) + \int_a^t \partial_t G(t,\tau) f(\tau)\, d\tau + \int_t^b \partial_t G(t,\tau) f(\tau)\, d\tau - G(t,t)f(t) \\
&= \int_a^b \partial_t G(t,\tau) f(\tau)\, d\tau
\end{aligned} \tag{6}$$

und

$$\begin{aligned}
(Tf)''(t) &= \left(\int_a^b \partial_t G(t,\tau) f(\tau)\, d\tau\right)' = \left(\int_a^t \partial_t G(t,\tau) f(\tau)\, d\tau + \int_t^b \partial_t G(t,\tau) f(\tau)\, d\tau\right)' \\
&= \partial_t G(t^+,t) f(t) + \int_a^t \partial_t^2 G(t,\tau) f(\tau)\, d\tau + \int_t^b \partial_t^2 G(t,\tau) f(\tau)\, d\tau - \partial_t G(t^-,t) f(t) \\
&= \partial_t G(t^+,t) f(t) - \partial_t G(t^-,t) f(t) + \int_a^b \partial_t^2 G(t,\tau) f(\tau)\, d\tau \\
&\overset{3.Eig.}{=} -\frac{f(t)}{p(t)} + \int_a^b \partial_t^2 G(t,\tau) f(\tau)\, d\tau.
\end{aligned} \tag{7}$$

Da (6) und (7) stetig sind, folgt $Tf \in C^2(I)$.
Es bleibt $LTf = f$ zu zeigen:

$$
\begin{aligned}
LTf(t) &= -p(t)(Tf)''(t) - p'(t)(Tf)'(t) + q(t)Tf(t) \\
&= -p(t)\left(\int_a^b \partial_t^2 G(t,\tau)f(\tau)\,d\tau - \frac{f(t)}{p(t)}\right) - p'(t)\int_a^b \partial_t G(t,\tau)f(\tau)\,d\tau \\
&\qquad + q(t)\int_a^b G(t,\tau)f(\tau)\,d\tau \\
&= \int_a^b -p(t)\partial_t^2 G(t,\tau)f(\tau) - p'(t)\partial_t G(t,\tau)f(\tau) + q(t)G(t,\tau)f(\tau)\,d\tau + f(t) \\
&= \int_a^b f(\tau)L_t G(t,\tau)\,d\tau + f(t) \overset{Vor.}{=} f(t).
\end{aligned}
$$

b) Zu zeigen ist, dass Tf die homogenen Randbedingungen (R1) und (R2) erfüllt.
Es gilt

$$
\begin{aligned}
R_1Tf &= \alpha_1 Tf(a) + \alpha_2 p(a)(Tf)'(a) \\
&= \alpha_1 \int_a^b G(a,\tau)f(\tau)\,d\tau + \alpha_2 p(a)\int_a^b \partial_t G(a,\tau)f(\tau)\,d\tau \\
&= \int_a^b \alpha_1 G(a,\tau)f(\tau) + \alpha_2 p(a)\partial_t G(a,\tau)f(\tau)\,d\tau \\
&= \int_a^b R_1 G(t,\tau)f(\tau)\,d\tau = 0.
\end{aligned}
$$

$R_2Tf = 0$ verläuft analog.

c) Seien $u, v \in C_R^2(I)$. Wir zeigen, dass $TLu = u$ gilt, indem wir

$$<TLu, Lv> = <u, Lv>$$

für beliebiges v zeigen.
Nach b) ist $TLu \in C_R^2(I)$. Damit folgt

$$<TLu, Lv> \overset{L \text{ symm}}{=} <LTLu, v> = <Lu, v> = <u, Lv>\ .$$

Da dies für jedes $v \in C_R^2(I)$ gilt und L nach a) ein Rechtsinverses besitzt, also surjektiv ist, gilt $TLu = u$ für alle $u \in C_R^2(I)$.

□

Mithilfe dieser Eigenschaften, lässt sich eine explizite Formel der Greenschen Funktion herleiten.
Sei $G(t,\tau)$ eine Greensche Funktion mit den Eigenschaften 1. - 4. aus Lemma 2.3.5. Zudem

seien $u \neq 0$ und $v \neq 0$ Lösungen von $Lu = 0$, wobei u (R1) und v (R2) erfüllt. Diese Lösungen sind linear unabhängig, da sie sonst jeweils beide Bedingungen erfüllten und so nach Annahme (A) $u = v \equiv 0$ gelte. Also ist $\{u, v\}$ ein Fundamentalsystem von $Lu = 0$.
Sei $\tau_0 \in I$ beliebig und $H(t) := G(t, \tau_0)$. Dann gilt $L_t H(t) = 0$ und $R_1 H = 0$ auf $[a, \tau_0)$. Da zudem $Lu = 0$ und $R_1 u = 0$ gilt, muss ein $\alpha_{\tau_0} \in \mathbb{R}$ existieren mit

$$H(t) = \alpha_{\tau_0} u(t) \text{ für alle } t \in [a, \tau_0).$$

Analog folgt für das Intervall $(\tau_0, b]$, dass ein $\beta_{\tau_0} \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$H(t) = \beta_{\tau_0} v(t) \text{ für alle } t \in (\tau_0, b].$$

Da G und somit H nach den obigen Eigenschaften stetig sind, gilt

$$\alpha_{\tau_0} u(\tau_0) = \beta_{\tau_0} v(\tau_0).$$

Da $Lu = Lv = 0$ gilt und u und v linear unabhängig sind, existiert kein $t \in I$, sodass $u(t) = v(t) = 0$ gilt. Sei also o.E. $u(\tau_0) \neq 0$.
Mithilfe der Sprungeigenschaft folgt für $t = \tau_0$

$$\begin{aligned}
& \lim_{\epsilon \to 0^+} H'(\tau_0 + \epsilon) - H'(\tau_0 - \epsilon) = \beta_{\tau_0} v'(\tau_0) - \alpha_{\tau_0} u'(\tau_0) = -\frac{1}{p(\tau_0)} \\
\Leftrightarrow \quad & -p(\tau_0)\big(\beta_{\tau_0} v'(\tau_0) - \alpha_{\tau_0} u'(\tau_0)\big) = 1 \\
\overset{u(\tau_0)\neq 0}{\Leftrightarrow} \quad & -p(\tau_0)\left(\beta_{\tau_0} v'(\tau_0) - \frac{v(\tau_0)\beta_{\tau_0}}{u(\tau_0)} u'(\tau_0)\right) = 1 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{-\beta_{\tau_0} p(\tau_0)}{u(\tau_0)}\big(u(\tau_0)v'(\tau_0) - u'(\tau_0)v(\tau_0)\big) = \frac{-\beta_{\tau_0}}{u(\tau_0)} p(\tau_0) W(u,v)(\tau_0) = 1 \\
\overset{2.1.5}{\Leftrightarrow} \quad & \beta_{\tau_0} = \frac{u(\tau_0)}{c} \text{ mit } c := -p(\tau_0) W(u,v)(\tau_0) \in \mathbb{R} \text{ nach 2.1.4} \\
\Rightarrow \quad & \alpha_{\tau_0} = \frac{v(\tau_0)}{c}.
\end{aligned}$$

Also ist nun für beliebiges $\tau_0 \in I$

$$H(t) = \frac{1}{c}\begin{cases} u(\tau_0)v(t) & \text{falls } a \leq \tau_0 \leq t \leq b \\ u(t)v(\tau_0) & \text{falls } a \leq t \leq \tau_0 \leq b \end{cases}.$$

Damit kommen wir zu folgender Definition:

2.3.6 Definition: Die Greensche Funktion

Die Greensche Funktion zum Differentialoperator L und den Randbedingungen R_1, R_2 ist definiert durch

$$\Gamma : I \times I \to \mathbb{R} \qquad\qquad \Gamma(t,\tau) := \frac{1}{c}\begin{cases} u(\tau)v(t) & \textit{falls } a \leq \tau \leq t \leq b \\ u(t)v(\tau) & \textit{falls } a \leq t \leq \tau \leq b \end{cases} \tag{8}$$

mit $c := -p(\tau)W(u,v)(\tau)$.

Beispiel Wir wollen nun anhand unseres Beispiels aus 2.1.1 die Greensche Funktion explizit ausrechnen. Auf dem Intervall $I = [0,\pi]$ war L definiert durch $Lu = -u''$. Für unser Beispiel betrachten wir die Randbedingungen

$$R_1 u = u(0) = 0 \quad \text{und} \quad R_2 u = u(\pi) = 0.$$

Wir benötigen nun zwei Lösungen $u, v \in C^2(I)$ des Problems $Lu = -u'' = 0$, wobei $R_1 u = 0$ und $R_2 v = 0$ gilt.
Offenbar ist $u(t) := t$ eine Lösung, die die erste Randbedingung erfüllt, und $v(t) := t - \pi$ eine Lösung, die die zweite Randbedingung erfüllt.
Wir können jetzt $c = -p(t)W(u,v)(t)$ berechnen. Es gilt

$$c = -p(t)W(u,v)(t) = -1\big(u(t)v'(t) - u'(t)v(t)\big) = t - \pi - t = -\pi.$$

Damit ist die Greensche Funktion Γ definiert durch

$$\Gamma(t,\tau) := -\frac{1}{\pi}\begin{cases} \tau(t-\pi) & \text{falls } 0 \leq \tau \leq t \leq \pi \\ t(\tau-\pi) & \text{falls } 0 \leq t \leq \tau \leq \pi \end{cases}.$$

3 Das Sturm-Liouvillesche Eigenwertproblem

Im Folgenden befassen wir uns weiter mit den Eigenschaften von L. Insbesondere untersuchen wir L hinsichtlich seiner Eigenwerte und Eigenfunktionen.

3.1 Das Sturm-Liouvillesche Eigenwertproblem

3.1.1 Definition: Sturm-Liouvillesches Eigenwertproblem

Seien weiterhin L und R_1, R_2 wie in (2) und (R1),(R2) definiert. Dann nennt man

$$Lu = \lambda u \quad \text{in } I = [a,b] \text{ mit } R_1 u = R_2 u = 0,\ \lambda \in \mathbb{R} \tag{9}$$

das Sturm-Liouvillesche Eigenwertproblem.
λ heißt Eigenwert des obigen Problems, falls zu diesem eine Lösung $u \neq 0$ für (9) existiert. Diese nicht-triviale Lösung wird Eigenfunktion genannt. Eine Eigenfunktion ist bis auf einen konstanten Faktor bestimmt. Zu jedem Eigenwert λ kann es mehrere linear unabhängige normierte Eigenfunktionen geben. λ heißt dann mehrfacher Eigenwert. Er heißt einfacher Eigenwert, falls es nur eine solche Eigenfunktion zu λ gibt.

Bemerkung Die Eigenwerte des Sturm-Liouvilleschen Eigenwertproblems (9) sind einfach.

Beweis. Seien u und v zwei Eigenfunktionen zum Eigenwert λ, die die Randbedingungen erfüllen.
Wegen $R_1 u = R_1 v = 0$ und $R_2 u = R_2 v = 0$ ist $W(u,v)(a) = 0$. Damit ist $W \equiv 0$ und nach 2.1.5 sind u und v linear abhängig.
Also gibt es keine zwei linear unabhängigen Eigenfunktionen zu einem Eigenwert. Es ist also jeder Eigenwert einfach. □

Bemerkung In 2.2.4 wurde angenommen, dass L bijektiv ist. In Anbetracht der Definition der Eigenwerte ist diese Aussage äquivalent dazu, dass L keinen Eigenwert $\lambda = 0$ besitzt.

Wir führen unser Beispiel fort:

Beispiel Betrachten wir für $\lambda \in \mathbb{R}$ das Eigenwertproblem

$$Lu = -u'' = \lambda u \qquad u(0) = u(\pi) = 0.$$

Für $\lambda = 0$ ist offenbar $u_0 = c_1 t + c_2$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ eine Lösung. Mithilfe der Randbedingungen folgt $u_0 \equiv 0$.
Für $\lambda < 0$ ist $u_- = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}t} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}t}$ eine Lösung. Mit $u(0) = u(\pi) = 0$ folgt wieder $u_- \equiv 0$.

Interessant wird die Lösung erst für $\lambda > 0$. Dann ist

$$u(t) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda} t) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda} t)$$

die allgemeine Lösung. λ ist genau dann ein Eigenwert, wenn $u \neq 0$ ist. Mithilfe der Randbedingungen folgt $c_1 = 0$ und $c_2 \sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0$. Damit $u \neq 0$ ist, muss $c_2 \neq 0$ sein. Also existieren genau abzählbar viele Eigenwerte $\lambda_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}$ mit den Eigenfunktionen $u_n(x) = c_2 \sin nx$.
Anhand des Beispiels kommen folgende Fragen auf: Unter welchen Voraussetzungen existieren Eigenwerte und sind es immer unendlich beziehungsweise abzählbar viele? Wenn ja, kann etwas über das asymptotische Verhalten gesagt werden? Zum Beispiel, dass $\lambda_n \sim n^2$ für $n \to \infty$ gilt? Gilt zudem immer $\lambda_n > 0$? Eine Antwort liefert folgender Satz:

3.1.2 Vorschau: Existenzsatz für Eigenwerte

Das Sturm-Liouvillesche Eigenwertproblem (9) *hat unendlich viele einfache und reelle Eigenwerte* λ_n *mit*

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots \quad \lambda_n \sim n^2 \ \textit{für} \ n \to \infty.$$

Die zugehörigen Eigenfunktion $u_n(t)$ *bilden ein vollständiges Orthonormalsystem in* $C(I)$*, falls* L *invertierbar ist.*

Es gibt verschiedene Methoden diesen Satz zu beweisen. Mein Beweis stützt sich auf die Beweismethode von H. Prüfer (1926), genauer auf die Prüfer-Transformation der Differentialgleichung. Dazu wird zunächst die Differentialgleichung zweiter Ordnung auf ein zweidimensionales System erster Ordnung zurückgeführt, welches dann in Polarkoordinaten untersucht wird. Im Fokus der Untersuchung steht dabei die so genannte Argumentfunktion.

Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ bis auf Weiteres ein beliebiger Parameter und $u \neq 0$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$Lu = -(pu')' + qu = \lambda u, \quad R_1 u = \alpha_1 u(a) + \alpha_2 p(a) u'(a) = 0.$$

Wir transformieren die Differentialgleichung zweiter Ordnung in ein zweidimensionales System erster Ordnung der Form

$$w' = (q - \lambda) v, \quad v' = \frac{w}{p} \ \text{ mit } \ w = pu',\ v = u. \tag{10}$$

Wir schreiben dies in Polarkoordinaten um. Seien also $w = r\cos(\phi)$ und $v = r\sin(\phi)$ mit

$r \geq 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
r' &= \frac{ww' + vv'}{r} = \frac{r\cos(\phi)(q-\lambda)r\sin(\phi) - r\sin(\phi)\frac{r\cos(\phi)}{p}}{r} \\
&= r\cos(\phi)\sin(\phi)\left(q - \lambda - \frac{1}{p}\right) \\
\phi' &= \frac{wv' - vw'}{r^2} = \frac{r\cos(\phi)\left(\frac{r\cos(\phi)}{p}\right) - r\sin(\phi)(q-\lambda)r\sin(\phi)}{r^2} \\
&= \frac{\cos^2(\phi)}{p} - \sin^2(\phi)(q-\lambda) = \frac{\cos^2(\phi)}{p} + \frac{\sin^2(\phi)}{p} - \frac{\sin^2(\phi)}{p} - \sin^2(\phi)(q-\lambda) \\
&= \frac{1}{p} + \left(\lambda - q - \frac{1}{p}\right)\sin^2(\phi).
\end{aligned}$$

Anzumerken ist, dass sogar $r > 0$ gilt, da, falls $r(t) = 0$ für ein t ist, $u(t) = u'(t) = 0$ gilt, und damit $u \equiv 0$ folgt.
Die Anfangsbedingung $R_1 u = 0$ lässt sich durch

$$\begin{aligned}
R_1 u &= \alpha_1 u(a) + \alpha_2 p(a) u'(a) = \alpha_1 v(a) + \alpha_2 p(a) v'(a) \\
&= \alpha_1 r(a)\sin\phi(a) + \alpha_2 p(a)\left(\frac{r(a)\cos\phi(a)}{p(a)}\right) \\
&= \alpha_1 r(a)\sin\phi(a) + \alpha_2 r(a)\cos\phi(a) = 0 \\
\overset{r \gneq 0}{\Leftrightarrow} \quad & \alpha_1 \sin\phi(a) + \alpha_2\cos\phi(a) = 0
\end{aligned}$$

ausdrücken. Sei $\phi_a := \phi(a) \in [0, \pi)$ eine Lösung obiger Gleichung. Dann lauten die Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned}
w(a) &= r(a)\cos\phi_a \\
v(a) &= r(a)\sin\phi_a.
\end{aligned}$$

Da $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ ist, lassen sich die Polarkoordinaten auch in komplexer Schreibweise, also in der Form $w + iv = re^{i\phi}$, notieren. Aus diesem Grund wird ϕ als *Argumentfunktion* bezeichnet.
Wir kommen nun zu einem bekannten Lemma, welches uns wichtige Eigenschaften von ϕ sichert. Ich zitiere dieses Lemma in einer abgeänderten Form aus dem Differentialgeometrie-Skript von Daniel Grieser ([Gri09], S. 15f).

3.1.3 Lifting Lemma

Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ eine Kurve und $\phi_a \in \arg\gamma(a)$.
Dann existiert genau eine stetige Funktion $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $\phi(a) = \phi_a$ und $\phi(t) \in \arg\gamma(t)$ für alle $t \in [a, b]$.
Falls γ stetig differenzierbar ist, so ist auch ϕ stetig differenzierbar.

Da die Länge von u irrelevant für die weiteren Betrachtungen ist, setzen wir ohne Einschränkung $r(a) = 1$.
Wir kommen nun zu einem Satz der zum Einen zeigt, dass die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} r' &= r\cos(\phi)\sin(\phi)\left(q - \lambda - \frac{1}{p}\right) & \qquad r(a) &= 1 \\ \phi' &= \frac{1}{p} + \left(\lambda - q - \frac{1}{p}\right)\sin^2(\phi) & \qquad \phi(a) &= \phi_a \end{aligned}$$

eindeutig ist und zum Anderen zeigt, dass diese Lösung u reell analytisch von λ abhängt. Da wir in einem späteren Kapitel einen weiteren Parameter einführen und ebenfalls die analytische Abhängigkeit von u in diesem Parameter benötigen, formulieren wir den Satz direkt für zwei Parameter.
Um dies zu zeigen, zitieren wir einen Satz aus ([Wal00], S. 155, Satz III). Aus ihm lässt sich die gewünschte Behauptung direkt folgern. Hierbei wird als bekannt vorausgesetzt, dass eine komplexwertige Funktion genau dann holomorph in einem Gebiet ist, wenn sie in diesem komplex analytisch ist.

3.1.4 Satz über die analytische Abhängigkeit vom Parameter

Sei $I = [a, b]$ ein Intervall und $K \subset \mathbb{C}^m$ kompakt.
Die Funktionen $g : I \times K \to \mathbb{C}^n, h : K \to I$ und $k : I^2 \times \mathbb{C}^n \times K \to \mathbb{C}^n$ seien stetig in ihren Definitionsbereichen und k genüge dort der Lipschitzbedingung

$$\|k(t, \tau, u, \theta) - k(t, \tau, v, \theta)\| \leq L\|u - v\| \text{ für } L > 0.$$

Dann hat

$$u(t, \theta) = g(t, \theta) + \int_{h(\theta)}^{t} k(t, \tau, u(\tau, \theta), \theta)\, d\tau$$

für jedes $\theta \in K$ genau eine Lösung $u(t, \theta)$.
Ist h konstant, $g(t, \cdot)$ für festes $t \in I$ holomorph bezüglich θ in $\overset{\circ}{K}$ und ist $k(t, \tau, \cdot, \cdot)$ für festes $(t, \tau) \in I^2$ holomorph bezüglich (y, θ) in $\mathbb{C}^n \times \overset{\circ}{K}$, so ist die Lösung u für festes $t \in I$ holomorph bezüglich θ in $\overset{\circ}{K}$.

Um diesen Satz auf unser Differentialgleichungsproblem anwenden zu können, müssen wir die Differentialgleichung zunächst in eine Integralgleichung umschreiben. Dazu transformieren wir die Differentialgleichung zweiter Ordnung wieder in ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung wie in (10).
Für unsere Zwecke benötigen wir nur Parameter aus $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{R}^2$. Sei also o.E. $(\lambda, \theta) \in K \subset$

$\mathbb{R}^2$ kompakt. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$L(\lambda,\theta)u = -(pu')' + \theta q u = \lambda u \qquad u(a) = \zeta_1 \in \mathbb{R}, u'(a) = \zeta_2 \in \mathbb{R}.$$

Wie in (10) lässt sich obiges Anfangswertproblem in ein System erster Ordnung umschreiben, sodass

$$\begin{pmatrix} w' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\theta q - \lambda)v \\ w/p \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} w(a) \\ v(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(a)u'(a) \\ u(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(a)\zeta_2 \\ \zeta_1 \end{pmatrix}$$

gilt. Wir schreiben nun die Differentialgleichung in eine Integralgleichung um

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} w(t) \\ v(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} p(a)\zeta_2 \\ \zeta_1 \end{pmatrix} + \int_a^t \begin{pmatrix} (\theta q(\tau) - \lambda)v(\tau) \\ w(\tau)/p(\tau) \end{pmatrix} d\tau \\ &=: A + \int_a^t k(t,\tau,(w,v),\theta)\, d\tau. \end{aligned} \tag{11}$$

Mit dieser Darstellung können wir nun aus obigem Satz folgern:

3.1.5 Korollar

Sei $(\lambda,\theta) \in \mathbb{R}^2$ ein beliebiger Parameter. Dann hat das Anfangswertproblem

$$L(\theta)u = -(pu')' + \theta q u = \lambda u, \qquad u(a) = \zeta_1 \in \mathbb{R}, u'(a) = \zeta_2 \in \mathbb{R}$$

eine eindeutige Lösung u. Diese ist für festes $t \in I$ reell analytisch in λ und θ.

Beweis. Sei $K \subset \mathbb{C}^2$ kompakt und zunächst $(\lambda,\theta) \in K$.
Als erstes zeigen wir die Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems mithilfe der Integralgleichung (11).
Da k linear in (w,v) ist und p und q stetig auf einer kompakten Menge sind, ist k lipschitzstetig in (w,v). Damit hat die Intgralgleichung (11) nach Satz 3.1.4 für jedes $(\lambda,\theta) \in K$ genau eine Lösung (w,v).
Kommen wir nun zur holomorphen Abhängigkeit der Lösung von den Parametern λ und θ.
Mit $A = g(t,(\lambda,\theta)) \in \mathbb{R}^2$ für alle $t \in I$ und $a = h(\lambda,\theta)$ sind g und h konstant und damit holomorph in λ und θ. Da k sowohl in λ als auch θ linear ist, ist auch k holomorph in λ und θ. Damit folgt nach 3.1.4, dass die Lösung (w,v) für festes $t \in I$ holomorph in $(\lambda,\theta) \in \mathring{K}$ ist.
Da sowohl die eindeutige Existenz als auch die Holomorphie für eine beliebige kompakte Menge $K \subset \mathbb{C}^2$ gilt, gilt dies auch für beliebige $(\lambda,\theta) \in \mathbb{C}^2$.
Jetzt zeigen wir die verbliebene Aussage. Hierzu sei $\theta \in \mathbb{R}$ fest. Dann ist die Lösung (w,v) auf ganz $\mathbb{C}$ bezüglich λ holomorph, also komplex analytisch, und lässt sich nach dem aus der Funktionentheorie bekannten Entwicklungssatz als Potenzreihe bezüglich λ darstellen. Schränken wir die Potenzreihe auf $\lambda \in \mathbb{R}$ ein, ist auch die reelle Analytizität in λ gegeben.

Analog für θ für festes λ. $\square$

Bemerkung Da für eine Lösung u von $Lu = \lambda u$ die Anfangsbedingungen

$$p(a)u'(a) = w(a) = r(a)\cos(\phi_a) = \cos(\phi_a) \text{ und}$$
$$u(a) = v(a) = r(a)\sin(\phi_a) = \sin(\phi_a)$$

gelten, folgt mit Korollar 3.1.5 zum Einen, dass u eindeutig ist, und zum Anderen, dass u reell analytisch in λ und θ ist. Damit ist auch ϕ reell analytisch in λ und θ.

Um letztendlich Satz 3.1.2 zu beweisen, benötigen wir noch weitere wichtige Eigenschaften der Argumentfunktion ϕ. Dazu dienen folgende Lemmata, für die wir in Teilen die stetige Differenzierbarkeit von ϕ in λ benötigen.
Sei weiterhin $u \neq 0$ die Lösung des Anfangswertproblems mit Argumentfunktion ϕ.

3.1.6 Lemma: Eigenschaften der Argumentfunktion I

Sei $t_0 \in I$. Dann gilt

$$u(t_0) = 0 \Leftrightarrow \phi(t_0) = k\pi \quad \textit{für ein } k \in \mathbb{Z}$$
$$u'(t_0) = 0 \Leftrightarrow \phi(t_0) = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad \textit{für ein } k \in \mathbb{Z}.$$

Beweis. Sei $k \in \mathbb{Z}$ und $t_0 \in I$. Zudem seien (w, v) wie in (10) gegeben.
Dann gilt

$$u(t_0) = v(t_0) = r(t_0)\sin(\phi(t_0)) = 0 \overset{r>0}{\Leftrightarrow} \phi(t_0) = k\pi$$
$$u'(t_0) = v'(t_0) = \frac{w(t_0)}{p(t_0)} = \frac{r(t_0)\cos(\phi(t_0))}{p(t_0)} = 0 \Leftrightarrow \phi(t_0) = k\pi + \frac{\pi}{2}.$$

$\square$

Im nächsten Satz charakterisieren wir die Nullstellen beziehungsweise die Anzahl der Nullstellen von u genauer.

3.1.7 Satz: Nullstellen von Lösungen

Sei $u \neq 0$ eine Lösung von $Lu = 0$. Dann hat u endlich viele Nullstellen. Diese sind zudem einfach.

Beweis. Sei $u \neq 0$ eine Lösung von $Lu = 0$. Alle Nullstellen sind einfach, da aus $u(t) = u'(t) = 0$ nach dem Eindeutigkeitssatz folgt, dass $u \equiv 0$ ist. Zu zeigen ist also nur, dass es endlich viele Nullstellen gibt.
Angenommen es gäbe unendlich viele Nullstellen t_j mit einer gewissen Indexmenge $j \in$

$J \subset \mathbb{R}$. Wir betrachten eine abzählbare Teilfolge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Da $I \subset \mathbb{R}$ beschränkt ist, hat die Folge $t_1, t_2, ...$ nach Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge (t_n) mit $t_n \to t_0$ für $t \to \infty$.
Da $u \in C^2(I)$ ist, ist mit $u(t_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ auch $u(t_0) = 0$. Nach obigem Argument ist aber $u'(t_0) \neq 0$. Damit existiert nach dem Satz über die Umkehrabbildung eine Umgebung U um t_0 und eine Umgebung $\tilde{U}$ um $u(t_0)$, sodass $u : U \to \tilde{U}$ ein Diffeomorphismus, also insbesondere bijektiv, ist. Damit ist $u(t) \neq 0$ für alle $t \in U \setminus \{t_0\}$ ↯. Also hat u nur endlich viele Nullstellen. □

Bemerkung Dieser Satz gilt i.A. für alle nichttrivialen Lösungen von Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Wir kommen nun zu einem Lemma, dass uns die wichtigsten Eigenschaften der Argumentfunktion liefert.

3.1.8 Lemma: Eigenschaften der Argumentfunktion II

a) Falls $\phi(t_0, \lambda_0) = k\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$ und $t_0 \in (a, b]$ gilt, so ist $\phi'(t_0, \lambda_0) > 0$. Weiterhin gilt $\phi(t, \lambda) > 0$ für alle $(t, \lambda) \in (a, b] \times \mathbb{R}$.

b) $\phi(t, \lambda)$ ist streng monoton wachsend in $\lambda \in \mathbb{R}$ für $a < x \leq b$.

c) Es gilt $\phi(b, \lambda) \to 0$ für $\lambda \to -\infty$.

d) Es gibt $S_u, S_o, \lambda_0 > 0$ mit

$$S_u\sqrt{\lambda} \leq \phi(b, \lambda) \leq S_o\sqrt{\lambda} \text{ für } \lambda \geq \lambda_0.$$

Beweis. a) Sei $t_0 \in (a, b]$ und $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ mit $\phi(t_0, \lambda_0) = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Da $\phi' = \frac{1}{p} + \left(\lambda - q - \frac{1}{p}\right)\sin^2(\phi)$ und $p > 0$ ist, ist

$$\begin{aligned}
\phi'(t_0, \lambda_0) &= \frac{1}{p(t_0)} + \left(\lambda_0 - q(t_0) - \frac{1}{p(t_0)}\right)\sin^2(\phi(t_0, \lambda_0)) \\
&= \frac{1}{p(t_0)} + \left(\lambda_0 - q(t_0) - \frac{1}{p(t_0)}\right)\sin^2(k\pi) = \frac{1}{p(t_0)} > 0.
\end{aligned}$$

Zum zweiten Teil der Aussage: Da $\phi(a) \geq 0$ und für $\phi(t) = 0$ nach der eben bewiesenen Aussage $\phi'(t) > 0$ gilt, ist $\phi(t, \lambda) > 0$ für alle $(t, \lambda) \in (a, b] \times \mathbb{R}$.

b) Um zu zeigen, dass $\phi(t, \lambda)$ streng monoton wachsend in λ ist, zeigen wir $\partial_\lambda\phi(t, \lambda) > 0$. Dazu wird $\psi(t) := \partial_\lambda\phi(t, \lambda)$ für festes λ definiert (nach Korollar 3.1.5 bzw. anschließender Bemerkung ist ϕ stetig differenzierbar in λ). Mit

$$f(t, \phi, \lambda) := \phi'(t, \lambda) = \frac{1}{p(t)} + \left(\lambda - q(t) - \frac{1}{p(t)}\right)\sin^2(\phi)$$

gilt dann

$$\begin{aligned}\psi'(t) &\overset{\text{Schwarz}}{=} \frac{\partial^2\phi(t,\lambda)}{\partial\lambda\partial t} = \frac{\partial f(t,\phi,\lambda)}{\partial\lambda} = \frac{\partial f(t,\phi,\lambda)}{\partial\phi}\frac{\partial\phi(t,\lambda)}{\partial\lambda} + \frac{\partial f(t,\phi,\lambda)}{\partial\lambda} \\ &= \underbrace{\left(\lambda - q(t) - \frac{1}{p(t)}\right)\sin(2\phi)}_{:=g(t)}\psi(t) + \underbrace{\sin^2(\phi)}_{:=h(t)}\end{aligned}$$

mit $\psi(a) = \partial_\lambda\phi(a,\lambda) = \partial_\lambda\phi_a = 0$.

ψ ist also als Lösung dieses Anfangswertproblems gegeben. Zu lösen ist dieses mithilfe der Methode der Variation der Konstanten und es gilt

$$\psi(t) = \int_a^t e^{G(t)-G(\tau)}h(\tau)\,d\tau \text{ mit } G(t) := \int_a^t g(\tau)\,d\tau,$$

was leicht nachzurechnen ist.
Offenbar gilt $h \geq 0$ und $h(t) = 0$ genau dann wenn $\phi(t)$ ein Vielfaches von π ist, was nach Lemma 3.1.6 genau dann der Fall, wenn $u(t) = 0$ gilt. Da u nach Lemma 3.1.7 nur endlich viele Nullstellen besitzt, ist $h > 0$ bis auf endlich viele Stellen. Damit ist dann $\psi(t) > 0$ für alle $t \in (a,b]$ und die Behauptung b) gezeigt.

c) Wir zeigen nun $\phi(b,\lambda) \to 0$ für $\lambda \to -\infty$. Da $\phi_a \in [0,\pi)$, ist das Intervall $(0, \pi - \phi_a)$ nicht leer. Sei also $\epsilon \in (0, \pi - \phi_a)$ beliebig. Setze für $t \in [a,b]$

$$h(t) := \frac{\epsilon(t-a) + (\pi-\epsilon)(b-t)}{b-a}.$$

Damit ist $\phi(a,\lambda) = \phi_a < \pi - \epsilon = h(a)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$.
Sei nun $\lambda_0 < 0$ so klein, dass für alle $t \in I$

$$\begin{aligned}\lambda_0 - q(t) - \frac{1}{p(t)} < 0 \qquad \text{und} \\ \frac{1}{p(t)} + \left(\lambda_0 - q(t) - \frac{1}{p(t)}\right)\sin^2(\epsilon) < \frac{2\epsilon - \pi}{b-a} = h'(t)\end{aligned} \tag{12}$$

gilt. Unter diesen Voraussetzung gilt nun für alle $\lambda < \lambda_0$ und $t \in [a, b]$

$$\begin{aligned}
f(t, h(t), \lambda) &= \frac{1}{p(t)} + \left(\lambda - q(t) - \frac{1}{p(t)}\right) \sin^2(h(t)) \\
&\leq \frac{1}{p(t)} + \underbrace{\left(\lambda_0 - q(t) - \frac{1}{p(t)}\right)}_{<0} \sin^2(h(t)) \quad (\text{beachte } h(t) \in (\epsilon, \pi - \epsilon)) \\
&\leq \frac{1}{p(t)} + \underbrace{\left(\lambda_0 - q(t) - \frac{1}{p(t)}\right)}_{<0} \sin^2(\epsilon), \quad \text{da } \min_{t \in I} \sin(h(t)) = \sin(\epsilon) \\
&\overset{(12)}{<} \frac{2\epsilon - \pi}{b - a} = h'(t).
\end{aligned} \tag{13}$$

Zu zeigen bleibt $\phi(b, \lambda) < h(b) = \epsilon$ für alle $\lambda < \lambda_0$ und damit die Behauptung c). Sei also $\lambda < \lambda_0$. Angenommen es existiert ein $t_0 \in (a, b]$ mit $\phi(t_0, \lambda) - h(t_0) = 0$ und $\phi(t, \lambda) < h(t)$ für alle $t \in [a, t_0)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
h'(t_0) &= \lim_{l \to 0^+} \frac{h(t_0) - h(t_0 - l)}{l} \\
&\leq \lim_{l \to 0^+} \frac{\phi(t_0, \lambda) - \phi(t_0 - l, \lambda)}{l} \\
&= \phi'(t_0, \lambda) = f(t_0, \phi(t_0, \lambda), \lambda) = f(t_0, h(t_0), \lambda) \quad \lightning \text{ zu (13).}
\end{aligned}$$

Also gilt

$$\forall t \in [a, b], \lambda < \lambda_0 : \quad \phi(t, \lambda) < h(t).$$

Damit folgt die Behauptung c).

d) Im Folgenden werden wir die beiden Ungleichungen

$$S_u \sqrt{\lambda} \leq \phi(b, \lambda) \text{ und } \phi(b, \lambda) \leq S_o \sqrt{\lambda}$$

für $\lambda \geq \lambda_0$ und positive Konstanten S_u, S_o separat zeigen. Der Beweis verläuft dabei analog.

Zunächst betrachten wir die Funktion p. Da I kompakt und $p > 0$ ist, existiert das Minimum und das Maximum von p, welches ebenfalls positiv ist. Sei nun $\lambda_0 > 0$ und positive Konstanten A_0, A, B_0, B derart, dass für alle $(t, \lambda) \in I \times [\lambda_0, \infty)$ gilt

$$\begin{aligned}
A_0 + \lambda B_0 \sin^2 \phi(t, \lambda) &\leq \frac{1}{p(t)} + \left(\lambda - q(t) - \frac{1}{p(t)}\right) \sin^2 \phi(t, \lambda) \\
&\leq A + \lambda B \sin^2 \phi(t, \lambda) \\
\Leftrightarrow \frac{\phi'(t, \lambda)}{A + \lambda B \sin^2 \phi(t, \lambda)} &\leq 1 \leq \frac{\phi'(t, \lambda)}{A_0 + \lambda B_0 \sin^2 \phi(t, \lambda)}.
\end{aligned}$$

Da jeder Ausdruck positiv ist, folgt für alle $\lambda > \lambda_0$ und $t \in [a, b]$

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \frac{\phi'(t,\lambda)}{A + \lambda B \sin^2 \phi(t,\lambda)}\, dt \le b - a \le \int_a^b \frac{\phi'(t,\lambda)}{A_0 + \lambda B_0 \sin^2 \phi(t,\lambda)}\, dt \\
\overset{s=\phi(t,\lambda)}{\Leftrightarrow}\ &\int_{\phi_a}^{\phi(b,\lambda)} \frac{ds}{A + \lambda B \sin^2 s} \le b - a \le \int_{\phi_a}^{\phi(b,\lambda)} \frac{ds}{A_0 + \lambda B_0 \sin^2 s}. \qquad (14)
\end{aligned}$$

Sei nun $\lambda > \lambda_0$ und $n \in \mathbb{N}$ so, dass $\phi(b, \lambda) \in [n\pi, (n + 1)\pi)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
b - a &\ge \int_{\phi_a}^{\phi(b,\lambda)} \underbrace{\frac{ds}{A + \lambda B \sin^2 s}}_{>0} \ge \int_{\pi}^{n\pi} \frac{ds}{A + \lambda B \sin^2 s} \\
&= (n-1) \int_0^{\pi} \frac{ds}{A + \lambda B \sin^2 s} \ge (n-1) \int_0^{\pi} \frac{ds}{A + \lambda B s^2} \\
&\overset{t=\sqrt{\lambda}s}{=} \frac{n-1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{\sqrt{\lambda}\pi} \frac{dt}{A + Bt^2} \ge \frac{D(n-1)}{\sqrt{\lambda}}
\end{aligned}$$

für eine Konstante $D > 0$. Mit $\phi(b, \lambda) \in [n\pi, (n + 1)\pi)$ gilt $\phi(b, \lambda) - 2\pi \le (n - 1)\pi$ und damit

$$\phi(b,\lambda) - 2\pi \le (n-1)\pi \le \frac{(b-a)\sqrt{\lambda}\pi}{D}$$

und damit

$$\phi(b,\lambda) \le S_o \sqrt{\lambda}$$

für $\lambda > \lambda_0$ mit einer geeigneten Konstante $S_o > 0$.
Der Beweis der zweiten Ungleichung verläuft ähnlich. Hierzu vergrößert man die rechte Seite der Ungleichungskette (14), indem man über das Intervall $[0, (n + 1)\pi]$ integriert:

$$b - a \le (n+1) \int_0^{\pi} \frac{ds}{A_0 + \lambda B_0 \sin^2 s} \le 2(n+1) \int_0^{\pi/2} \frac{ds}{A_0 + \lambda B_0 \sin^2 s}$$

Da $\frac{s}{2} \le \sin s$ auf $[0, \pi/2]$ gilt, ist mit $t = \sqrt{\lambda}s$

$$b - a \le 2(n+1) \int_0^{\pi/2} \frac{ds}{A_0 + \lambda B_0 s^2/4} \le \frac{2(n+1)}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{\infty} \frac{dt}{A_0 + \lambda B_0 t^2/4} = \frac{C(n+1)}{\sqrt{\lambda}}$$

mit $C > 0$. Mit $\phi(b, \lambda) \in [n\pi, (n + 1)\pi)$ gilt $(n + 1)\pi \le \phi(b, \lambda) + \pi$ und damit

$$\frac{(b-a)\sqrt{\lambda}\pi}{C} \le (n+1)\pi \le \phi(b,\lambda) + \pi$$

also

$$S_u \sqrt{\lambda} \le \phi(b,\lambda)$$

für $\lambda > \lambda_0$ mit einer geeigneten Konstante $S_u > 0$. Damit ist auch Aussage d) bewiesen und somit das gesamte Lemma.

□

3.2 Die Eigenwerte des Sturm-Liouvilleschen Eigenwertproblems

3.2.1 Existenz der Eigenwerte

Wir betrachten nun die zweite Randbedingung $R_2 u = 0$. Diese ist genau dann erfüllt, wenn, wie bereits für R_1 gezeigt,

$$\beta_1 \sin(\phi(b, \lambda)) + \beta_2 \cos(\phi(b, \lambda)) = 0$$

gilt. Mit $\phi(b, \lambda)$ ist offensichtlich auch $\phi(b, \lambda) + n\pi$ für $n \in \mathbb{Z}$ eine Lösung. Sei nun $\phi_b \in [0, \pi)$ eine Lösung von $\beta_1 \sin(\phi_b) + \beta_2 \cos(\phi_b)) = 0$. Dann ist $R_2 u = 0$ genau dann, wenn $\phi(b, \lambda) = \phi_b + n\pi$ gilt. Da nach Lemma 3.1.8 $\phi(b, \lambda)$ bezüglich λ den Wertebereich $(0, \infty)$ hat und zudem streng monoton wachsend ist, existiert zu jedem $n \geq 0$ genau ein $\lambda = \lambda_n$, sodass

$$\phi(b, \lambda_n) = \phi_b + n\pi \quad \text{gilt.} \tag{15}$$

Für $n < 0$ hat die Gleichung offenbar keine Lösung. Die Parameter λ_n sind damit die gesuchten *Eigenwerte* des Sturm-Liouvilleschen Eigenwertproblems (9). Die Lösungen $u_n(t) := u(t, \lambda_n)$ sind die zugehörigen *Eigenfunktionen*.
Wie bereits angekündigt, lässt sich nun mithilfe des Lemmas 3.1.8 das asymptotische Verhalten der Eigenwerte bestimmen:

3.2.2 Satz: Asymptotisches Verhalten der Eigenwerte

Für die Eigenwerte λ_n des Sturm-Liouville Problems (9) *gilt für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$*

$$cn^2 \leq \lambda_n \leq Cn^2.$$

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}$ hinreichend groß, sodass Lemma 3.1.8 für λ_n angewandt werden kann. Dann gilt für $\phi(b, \lambda_n) = \phi_b + n\pi$

$$\begin{aligned} &S_u \sqrt{\lambda_n} \leq \phi_b + n\pi \leq S_o \sqrt{\lambda_n} \\ \Leftrightarrow\ &S_u^2 \lambda_n \leq (\phi_b + n\pi)^2 \leq S_o^2 \lambda_n \\ \Leftrightarrow\ &cn^2 \leq \lambda_n \leq Cn^2 \end{aligned}$$

mit geeigneten Konstanten $c, C > 0$. □

In der zweiten Bemerkung in 3.1.1 wurde angesprochen, dass L genau dann bijektiv ist, wenn $\lambda = 0$ kein Eigenwert von L ist. Das nächste Lemma zeigt unter welchen Bedingungen dies der Fall ist.

3.2.3 Lemma

Sei v die Lösung des Anfangswertproblems $Lu = 0$ unter den Anfangsbedingungen $v(0) = 0$ und $v'(0) = 1$. Seien zudem λ_n die Eigenwerte des Eigenwertproblems $Lu = \lambda u$ unter den Randwerten $u(a) = u(b) = 0$. Dann gilt

$$v(b) = 0 \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : \lambda_n = 0.$$

Beweis. Sei $v(b) = 0$. Damit erfüllt v die Randbedingungen. Da nach Voraussetzung $v \neq 0$ ist und $Lv = \lambda v$ für $\lambda = 0$ erfüllt, ist $\lambda = 0$ ein Eigenwert mit Eigenfunktion v.
Ist $\lambda = 0$ ein Eigenwert existiert eine zugehörige Eigenfunktion $u \neq 0$, die die Randbedingung erfüllt. Diese normieren wir mit $u'(0) = 1$. Damit erfüllt u auch die Anfangswertbedingung und ist nach dem Eindeutigkeitssatz gleich v. Damit ist dann $v(b) = u(b) = 0$. □

Wir kommen zu einer weiteren wichtigen Eigenschaft der Eigenwerte.

3.2.4 Lemma: Positivität der Eigenwerte für nicht negatives q

Der Sturm-Liouville Operator L hat für $q \geq 0$ unter den Randbedingungen $u(0) = u(b) = 0$ nur positive Eigenwerte.

Beweis. Sei λ ein Eigenwert von L und $u \neq 0$ die zugehörige Eigenfunktion. Wir wenden auf die Gleichung $Lu = \lambda u$ das Skalarprodukt mit u an. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&Lu = -(pu')' + qu = \lambda u \\
&\Rightarrow <-(pu')', u> \; + <qu, u> = <\lambda u, u> = \lambda \parallel u \parallel^2 \\
&\Rightarrow \int_0^b -(p(t)u'(t))'u(t)\,dt + \int_0^b q(t)u^2(t)\,dt = \lambda \parallel u \parallel^2 \\
&\overset{\text{p.I.}}{\Rightarrow} [-p(t)u'(t)u(t)]_0^b + \int_0^b p(t)u'(t)u'(t)\,dt + \int_0^b q(t)u^2(t)\,dt \\
&\qquad \overset{\text{Vor.}}{=} 0 + \underbrace{\int_0^b p(t)(u'(t))^2\,dt}_{>0} + \underbrace{\int_0^b q(t)u^2(t)\,dt}_{\geq 0} = \lambda \parallel u \parallel^2 .
\end{aligned}$$

Da die linke Seite echt positiv ist, folgt $\lambda > 0$. □

Bemerkung Diese Randbedingungen werden Dirichlet-Randbedingungen genannt.

Mit all diesen Aussagen über die Eigenwerte von Sturm-Liouville Operatoren haben wir mehr als in der Vorschau 3.1.2 angedeutet bewiesen. Unbewiesen bleibt jedoch, dass die Eigenfunktionen ein Orthonormalsystem bilden. Dazu folgender Satz.

3.2.5 Satz: Orthonormalsystem von Eigenfunktionen

Die Eigenfunktionen des Sturm-Liouvilleschen Eigenwertproblems (9) *bilden ein vollständiges Orthonormalsystem in* $C(I)$.

Beweis. Sei zunächst $\lambda = 0$ kein Eigenwert von L. Dann existiert T aus 2.3.1. Da T offenbar linear, kompakt und selbstadjungiert ist, lässt sich der aus der Funktionalanalysis bekannte Spektralsatz von Hilbert-Schmidt für selbstadjungierte, kompakte Operatoren anwenden. Siehe dazu beispielsweise ([Wer11], S. 271 f, Theorem VI.3.2).
Zunächst ist es aber wichtig anzumerken, dass T und L die selben Eigenfunktionen besitzen, da

$$Lu = \lambda u \Leftrightarrow TLu = \lambda Tu \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda}u = Tu$$

gilt, wobei $\frac{1}{\lambda}$ genau dann ein Eigenwert von T ist, wenn λ ein Eigenwert von L ist. Also hat T wie auch L unendlich viele Eigenfunktionen. Zudem ist $\ker T = \{0\}$. Damit bilden nach dem Satz von Hilbert-Schmidt die Eigenfunktionen von T und damit die von L ein vollständiges Orthonormalsystem von $C(I)$.
Habe nun L einen Eigenwert $\lambda = 0$. Betrachte dann $L + C$ für genügend großes $C > 0$. Da die Eigenwerte von $L + C$ die Eigenwerte von L bis auf die Verschiebung um C sind, hat $L + C$ für großes C nur positive Eigenwerte. Damit gilt nach obigem Argument, dass die Eigenfunktionen von $L + C$ ein vollständiges Orthonormalsystem in $C(I)$ bilden. Da sich aber die Eigenfunktionen von L durch Verschiebung um C nicht ändern, bilden auch die Eigenfunktionen von L ein vollständiges Orthonormalsystem. □

4 Satz über das unendliche Produkt von Eigenwerten eines Sturm-Liouville Operators

4.1 Formulierung des Satzes und der notwendigen Hilfsaussagen

Mithilfe der Theorie, die wir erarbeitet haben, kann nun das Ziel meiner Arbeit formuliert werden. Sei dazu $I := [0, b]$ und für $\theta \in [0, 1]$ der Sturm-Liouville Operator $L(\theta)$ definiert durch

$$\begin{aligned} &L(\theta) : C^2(I) \to C(I) \\ &L(\theta)u := -\big(pu'\big)' + \theta q u, \end{aligned} \tag{16}$$

wobei wiederum $p \in C^1(I),\ p > 0$ in I und $q \in C(I)$ ist.
Zudem seien $\lambda_n = \lambda_n(\theta)$ die Eigenwerte für das Randwertproblem

$$L(\theta)u = \lambda u, \qquad u(0) = u(b) = 0 \tag{17}$$

Des Weiteren sei $v = v(\theta) \in C^2(I)$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$L(\theta)v = 0, \quad v(0) = 0, \quad v'(0) = 1 \tag{18}$$

Bemerkung Im Folgenden steht v' für die Ableitung nach $t \in I$ und $\dot{v}$ für die Ableitung nach $\theta \in [0, 1]$.

4.1.1 Satz über das unendliche Produkt von Eigenwerten eines Sturm-Liouville Operators

Unter den obigen Voraussetzungen gilt für alle $\theta \in [0, 1]$:

a) Es existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass das Produkt

$$\prod_{n=n_0}^{\infty} \frac{\lambda_n(\theta)}{\lambda_n(0)} \neq 0$$

gleichmäßig konvergiert.

b) Es gilt zudem

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n(\theta)}{\lambda_n(0)} = \frac{v(\theta, b)}{v(0, b)}. \tag{19}$$

Bemerkung Der Quotient $\dfrac{\lambda_n(\theta)}{\lambda_n(0)}$ existiert für alle n, da nach Lemma 3.2.4 für $\theta = 0$ der Fall $q = 0$ eintritt und alle Eigenwerte λ_n echt positiv sind.
Falls ein $\lambda_n(\theta) = 0$ ist und dementsprechend das Produkt aus (19) nicht konvergiert,

können wir mit Lemma 3.2.3 sicherstellen, dass die rechte Seite von (19) genau dann verschwindet, wenn die Linke verschwindet, da genau dann, wenn ein $\lambda_n(\theta) = 0$ ist, auch $v(\theta, b) = 0$ ist.

Bevor wir den Beweis dieses Satzes führen, benötigen wir noch einige weitere Aussagen unter den obigen Voraussetzungen.
Zunächst zeigen wir die analytische Abhängigkeit der Lösung v sowie der Eigenwerte λ_n und gewisser Eigenfunktionen u_n vom Parameter θ.

Wir wollen nun mithilfe des Satzes über implizite Funktionen folgern, dass λ an jeder Stelle lokal als analytische Funktion von θ dargestellt werden kann. Da der Satz über implizite Funktionen, den man in der Analysis in den ersten Semestern kennenlernt, zum Einen reell formuliert ist und zum Anderen nur stetige Differenzierbarkeit von $\lambda(\theta)$ liefert, zitiere ich den Satz über implizite Funktionen für holomorphe Funktionen aus ([Fre14], S. 321, Bem. 3.4).

4.1.2 Satz über implizite Funktionen, komplexe Version

Sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $(z, w) \mapsto f(z, w)$ holomorph auf einer offenen Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{C}^2$. Sei $(a, b) \in \Omega$ ein Punkt mit

$$f(a, b) = c \quad \textit{und} \quad \partial_w f(a, b) \neq 0.$$

Dann existiert eine offene Umgebung U von a, eine offene Umgebung U' von b und eine holomorphe Funktion $\psi : U \to U'$, sodass für alle $z \in U$, $w \in U'$

$$\psi(z) = w \Leftrightarrow f(z, w) = c \quad \textit{gilt.}$$

Die Formulierung des Satzes wurde etwas geändert und an die reelle Version des Satzes aus [Gri10] angepasst.

Da wir diesen Satz für reell analytische f verwenden möchten, formulieren wir folgendes Korollar:

4.1.3 Korollar

Sei $f : M \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$ reell analytisch auf einer offenen Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^2$. Sei $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ein Punkt mit

$$f(a, b) = c \quad \textit{und} \quad \partial_y f(a, b) \neq 0.$$

Dann existiert eine offene Umgebung U von a, eine offene Umgebung U' von b und eine reell analytische Funktion $\psi : U \to U'$, sodass für alle $x \in U$, $y \in U'$

$$\psi(x) = y \Leftrightarrow f(x, y) = c \quad \textit{gilt.}$$

Beweis. Sei $f : M \to \mathbb{R}^2$ reell analytisch auf einer offenen Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^2$. Sei (a, b) ein Punkt mit $f(a, b) = c$ und $\partial_y f(a, b) \neq 0$. Da f reell analytisch ist, existiert eine Umgebung $\Omega \subset \mathbb{C}^2$ auf die f holomorph fortsetzbar ist. Sei $\tilde{f}$ diese Fortsetzung.
Da $f(a, b) = c$ gilt, gilt auch $\tilde{f}(a, b) = c$. Zudem ist mit $\partial_y f(a, b) \neq 0$ auch $\partial_w \tilde{f}(a, b) \neq 0$. Damit existiert nach dem Satz über implizite Funktionen eine holomorphe Funktion $\tilde{\psi}$ in einer Umgebung U von a und eine Umgebung U' von b, sodass für alle $z \in U$, $w \in U'$

$$\tilde{\psi}(z) = w \Leftrightarrow \tilde{f}(z, w) = c \quad \text{gilt.} \tag{20}$$

Da $\tilde{\psi}$ holomorph ist, also komplex analytisch, lässt sich $\tilde{\psi}$ auf $I = U \cap \mathbb{R}$ einschränken, sodass $\psi := \tilde{\psi}|_I$ reell analytisch auf I ist.
Da unter obigen Voraussetzungen auch der Satz über implizite für reelles f, vgl. zum Beispiel ([Gri10], S. 141), erfüllt ist, existiert ein stetig differenzierbares ψ_1, welches auf einer gewissen reellen Umgebung I_2 um a definiert ist. Wir wählen I_2 so klein, dass $I_2 \subset U$ gilt. Zudem existiert eine weitere Umgebung $I_1 \subset U'$ um b, sodass für alle $x \in I_1$, $y \in I_2$

$$\psi_1(x) = y \Leftrightarrow f(x, y) = c \quad \text{gilt.} \tag{21}$$

Wegen der Äquivalenzen aus (20) und (21) muss $\tilde{\psi} = \psi = \psi_1$ auf $I_1 \subset I$ gelten. Insbesondere ist also $\psi(x) \in \mathbb{R}$ für $x \in I_2$.
Damit gilt dann für alle $x \in I_2$ und $y \in I_1$

$$\tilde{f}(x, y) = f(x, y) = c \Leftrightarrow \tilde{\psi}(x) = \psi(x) = y.$$

□

Hiermit haben wir nun alle Voraussetzungen geschaffen, um zu zeigen, dass die Eigenwerte und gewisse Eigenfunktionen unter den Dirichtlet-Randbedingungen analytisch von dem Parameter θ abhängen.

4.1.4 Satz: Analytizität der Eigenwerte und -funktionen

Sei $n \in \mathbb{N}$. Für jedes $\theta \in [0, 1]$ sei $\lambda_n = \lambda_n(\theta)$ der n-te Eigenwert des Sturm-Liouvilleschen Eigenwertproblems

$$L(\theta)u = \lambda u, \qquad u(0) = u(b) = 0$$

und $u_n(\cdot) = u_n(\theta, \cdot)$ die durch $u_n'(0) = 1$ normalisierte Eigenfunktion.
Dann sind λ_n und u_n analytische Funktionen von θ.

Beweis. Zunächst möchten wir anmerken, dass nach Korollar 3.1.5 das Anfangswertproblem

$$L(\theta)u_n = \lambda_n u_n \qquad u_n(0) = 0, u_n'(0) = 1$$

genau eine Lösung hat. Die Eigenfunktion u_n zum Eigenwert λ_n unter obigen Anfangsbedingungen ist also eindeutig bestimmt.

Sei zunächst für beliebige $\theta \in [0,1]$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$v(\cdot) = v(\theta, \lambda, \cdot)$$

die Lösung des Anfangswertproblems

$$L(\theta)v = \lambda v, \qquad v(0) = 0, v'(0) = 1.$$

Nach Korollar 3.1.5 ist v eine analytische Funktion in λ und θ.
Sei nun $\phi(\cdot, \theta, \lambda)$ eine Argumentfunktion zu v wie in Abschnitt 3.1.2. Dann gilt nach 3.2.1, dass der Eigenwert $\lambda_n(\theta)$ die eindeutige Lösung λ der Gleichung

$$\phi(b, \theta, \lambda) = \phi_b + n\pi \tag{22}$$

ist. In 3.2.1 haben wir gesehen, wie sich ϕ_b mithilfe der Randbedingungen bestimmen lässt. Im Fall der Dirichlet-Randbedingungen, also

$$R_1 u = u(0) = 0 \text{ und } R_2 u = u(b) = 0,$$

ist $\phi_b \in [0, \pi)$ eine Lösung der Gleichung

$$\sin(\phi_b) = 0.$$

Offenbar ist $\phi_b = 0 \in [0, \pi)$ eine Lösung. Damit erhalten wir aus (22)

$$\phi(b, \theta, \lambda_n) = n\pi. \tag{23}$$

Die Eigenwerte sind also als Funktion von θ implizit durch diese Gleichung gegeben.
Wir wollen nun Korollar 4.1.3 anwenden. Dazu prüfen wir alle Voraussetzungen.
Da v analytisch in θ und λ ist, ist auch die zugehörige Argumentfunktion ϕ analytisch in θ und λ. Zudem ist nach Lemma 3.1.8 $\partial_\lambda \phi \neq 0$ für alle (θ, λ).
Mithilfe von (23) lässt sich nun der Satz über implizite Funktionen anwenden. Damit existiert für alle θ eine reell analytische Funktion ψ_θ auf einer gewissen Umgebung U von θ und eine Umgebung U' von λ_n, sodass für alle $\theta \in U$ und $\lambda \in U'$ gilt:

$$\lambda_n = \psi_\theta(\theta) \Leftrightarrow \phi(b, \theta, \lambda_n) = n\pi.$$

Da für jedes $\theta \in [0,1]$ eine solche Funktion existiert und diese immer eindeutig ist, existiert eine Funktion ψ auf ganz $[0,1]$, sodass für alle $\theta \in [0,1]$ gilt:

$$\lambda_n = \psi(\theta) \Leftrightarrow \phi(b, \theta, \lambda_n) = n\pi.$$

Also hängt λ_n analytisch von θ ab.

Nach Lemma 3.1.6 ist (23) äquivalent dazu, dass $v(b, \theta, \lambda_n) = 0$ ist.
Damit ist $v(\cdot) = v(\theta, \lambda_n(\theta), \cdot)$ eine Eigenfunktion von $L(\theta)$ zum Eigenwert $\lambda_n(\theta)$. Da v zudem die Normalisierung $v'(0) = 1$ erfüllt, gilt nach der Eingangsbemerkung $v = u_n$. Da $v(\theta, \lambda_n(\theta), \cdot)$ analytisch in θ und $\lambda(\theta)$ analytisch in θ ist, ist auch u_n analytisch in θ. □

Der Vollständigkeit halber formulieren wir noch folgenden Satz:

4.1.5 Satz: Analytizität der Lösung des Anfangswertproblems

Die Lösung $v \in C^2(I)$ des Anfangswertproblems (18) *ist eindeutig und für festes $t \in I$ analytisch in θ.*

Beweis. Folgt direkt aus Korollar 3.1.5 mit $\theta_1 = 0$. □

Bemerkung Beachte: Im Folgenden wird die Notation $\dot{u} := \partial_\theta u$ genutzt.

4.1.6 Lemma: Darstellung der Ableitung der Eigenwerte

Sei $\lambda(\theta)$ ein Eigenwert des Sturm-Liouvilleschen Eigenwertproblems

$$L(\theta)u = \lambda u, \qquad u(0) = u(b) = 0$$

und $U(\cdot) = U(\theta, \cdot)$ eine durch $\| U(\theta) \|_{L^2} = 1$ normalisierte Eigenfunktion zu λ.
Dann existiert ein $M \in \mathbb{R}$, sodass für alle λ, θ und Eigenfunktionen U mit $\| U(\theta) \|_{L^2} = 1$

$$\dot{\lambda}(\theta) = < qU(\theta), U(\theta) >$$

und

$$\left| \dot{\lambda}(\theta) \right| \leq M$$

gilt.

Beweis. Sei $\lambda(\theta)$ ein Eigenwert des Sturm-Liouvilleschen Eigenwertproblems

$$L(\theta)u = \lambda u, \qquad u(0) = u(b) = 0$$

und $U(\cdot) = U(\theta, \cdot)$ eine durch $\| U(\theta) \|_{L^2} = 1$ normalisierte Eigenfunktion. Differenzieren wir $L(\theta)U = \lambda U$ nach θ, erhalten wir (zur Übersicht ohne Variablen)

$$\begin{aligned} \partial_\theta (LU) &= -\left(p\dot{U}'\right)' + \theta q \dot{U} + qU = \dot{\lambda} U + \lambda \dot{U} \\ \Leftrightarrow L\left(\dot{U}\right) + qU &= \dot{\lambda} U + \lambda \dot{U}. \end{aligned} \tag{24}$$

Wenden wir jetzt $< \cdot, U >$ bezüglich t an, erhalten wir

$$\begin{aligned}
&< L\dot{U}, U > + < qU, U > = < \dot{\lambda} U, U > + < \lambda \dot{U}, U > \\
\Leftrightarrow &< \dot{U}, LU > + < qU, U > = \dot{\lambda} < U, U > + \lambda < \dot{U}, U > \\
\Leftrightarrow &< \dot{U}, \lambda U > + < qU, U > = \dot{\lambda} + \lambda < \dot{U}, U > \\
\overset{\lambda \text{ reell}}{\Leftrightarrow} &\lambda < \dot{U}, U > + < qU, U > = \dot{\lambda} + \lambda < \dot{U}, U > \\
\Leftrightarrow &< qU, U > = \dot{\lambda}.
\end{aligned}$$

Also gilt für alle $\theta \in [0, 1]$

$$\dot{\lambda}(\theta) = < qU(\theta), U(\theta) > .$$

Kommen wir nun zur Abschätzung für $|\dot{\lambda}(\theta)|$. Da q stetig auf $[0, b]$ ist, existiert ein $M \in \mathbb{R}$ mit $|q(t)| \leq M$ für alle t. Damit gilt

$$|\dot{\lambda}(\theta)| = \left| \int_0^b q(t) U_n^2(\theta, t)\, dt \right| \leq M \int_0^b U_n^2(\theta, t)\, dt = M.$$

□

Es folgt nun eine wichtige Abschätzung, um die gleichmäßige Konvergenz des Produktes

$$\prod_{n=n_0}^{\infty} \frac{\lambda_n(\theta)}{\lambda_n(0)}$$

zu gewährleisten.

4.1.7 Lemma: Abschätzung der Eigenwerte

Es gilt

$$\exists M \in \mathbb{N} \forall n \forall \theta \in [0, 1] : |\lambda_n(\theta) - \lambda_n(0)| \leq \theta M.$$

Beweis. Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$|\lambda_n(\theta) - \lambda_n(0)| = \left| \int_0^\theta \dot{\lambda}_n(\theta)\, d\theta \right| \leq \int_0^\theta |\dot{\lambda}_n(\theta)|\, d\theta \overset{4.1.6}{\leq} \theta M.$$

□

Kommen wir jetzt zur gleichmäßigen Konvergenz des Produktes.

4.1.8 Lemma: Gleichmäßige Konvergenz

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\lambda_n(\theta)$ der Eigenwert von $L(\theta)$. Dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass gilt:

a) $\prod_{n=n_0}^{\infty} \dfrac{\lambda_n(\theta)}{\lambda_n(0)}$ *konvergiert gleichmäßig und*

b) $\sum_{n=n_0}^{\infty} \dfrac{\dot{\lambda}_n(\theta)}{\lambda_n(\theta)}$ *konvergiert gleichmäßig.*

Beweis. a) Da λ_n analytisch in θ ist, existieren für festes n nur endlich viele θ mit $\lambda_n(\theta) = 0$. Zudem wissen wir, dass $\lambda_n(\theta) \to \infty$ für $n \to \infty$. Also existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $\lambda_n(\theta) \neq 0$ für alle θ und $n \geq n_0$.
Nach Lemma 4.1.7 existiert ein $M \in \mathbb{R}$, sodass für alle n und $\theta \in [0,1]$

$$|\lambda_n(\theta) - \lambda_n(0)| \leq \theta M$$

gilt. Bekannt ist, dass ein unendliches Produkt $\prod_{n \geq n_0}(1 + a_n(\theta))$ von analytischen Funktionen $a_n(\theta)$ gleichmäßig gegen eine analytische Funktion konvergiert, falls $\sum_{n \geq n_0} a_n(\theta)$ absolut und gleichmäßig konvergiert.
Da

$$\frac{\lambda_n(\theta)}{\lambda_n(0)} = 1 + \frac{\lambda_n(\theta) - \lambda_n(0)}{\lambda_n(0)}$$

ist, lässt sich die gleichmäßige Konvergenz des Produktes zeigen, indem wir zeigen, dass $\sum_{n \geq n_0} \left| \dfrac{\lambda_n(\theta) - \lambda_n(0)}{\lambda_n(0)} \right|$ gleichmäßig konvergiert. Mithilfe obiger Abschätzung und Satz 3.2.2 gilt für alle $\theta \in [0,1]$ und genügend große n

$$\left| \frac{\lambda_n(\theta) - \lambda_n(0)}{\lambda_n(0)} \right| \leq \frac{\theta M}{\lambda_n(0)} \leq \frac{M}{cn^2}.$$

Da $\sum \dfrac{M}{cn^2}$ konvergiert, konvergiert $\sum_{n \geq n_0} \dfrac{\lambda_n(\theta) - \lambda_n(0)}{\lambda_n(0)}$ gleichmäßig und absolut nach dem Weierstraß-Kriterium und damit konvergiert auch $\prod_{n=n_0}^{\infty} \dfrac{\lambda_n(\theta)}{\lambda_n(0)}$ gleichmäßig.

b) Auch hier zeigen wir mithilfe des Weierstraßschen Konvergenzkriteriums, dass

$$\sum_{n \geq n_0} \frac{\dot{\lambda}_n(\theta)}{\lambda_n(\theta)}$$

gleichmäßig konvergiert.
Es gilt nach Lemma 4.1.6 für alle n und θ

$$|\dot{\lambda}_n(\theta)| \leq M.$$

Damit folgt für genügend große n

$$\left|\frac{\dot{\lambda}_n(\theta)}{\lambda_n(\theta)}\right| \overset{3.2.2}{\leq} \frac{M}{cn^2}.$$

Wie auch schon in a) gilt damit, dass $\sum_{n \geq n_0} \dfrac{\dot{\lambda}_n(\theta)}{\lambda_n(\theta)}$ gleichmäßig konvergiert.

□

Damit haben wir bereits Teil a) des Satzes 4.1.1 bewiesen. Um den restlichen Beweis führen zu können, benötigen wir noch zwei wichtige und bekannte Sätze. Diese möchte ich hier zitieren:

4.1.9 Identitätssatz für analytische Funktionen

Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und f und g analytische Funktionen auf U. Gilt $f(z) = g(z)$ für alle z aus einer Menge mit Häufungspunkt in U, so ist $f = g$.

Vergleiche zum Beispiel ([Bor13], S. 36, Korollar 13.3). Des Weiteren benötigen wir noch eine Aussage über die Greensche Funktion. In 2.3.6 haben wir gesehen, wie die Greensche Funktion dargestellt werden kann. Es gibt aber noch einen weiteren Ansatz über die Eigenwerte und Eigenfunktionen des Sturm-Liouville Operators. Ich verwende hierbei eine Formulierung wie sie in ([Oev03], S. 109, Satz 2.25) zu finden ist.

4.1.10 Satz: Darstellung der Greenschen Funktion über Eigenfunktionen

Sei L ein Sturm-Liouville Operator. Falls dieser invertierbar ist, lässt sich die zugehörige Greensche Funktion G darstellen als

$$G(t,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(t)u_n(\tau)}{\lambda_n},$$

wobei u_n Eigenfunktionen von L unter den Randbedingungen $u_n(0) = u_n(b) = 0$ mit $\| u_n \|_{L^2} = 1$ sind.

Wir kommen nun zum Beweis von b) des Satzes 4.1.1.

4.2 Beweis des Satzes 4.1.1 und Anwendungen

4.2.1 Formaler Beweis

Beweis. Seien λ_n die Eigenwerte für das Randwertproblem

$$L(\theta)u = \lambda_n u, \qquad u(0) = u(b) = 0.$$

Des Weiteren sei $v \in C^2(I)$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$L(\theta)v = 0, \quad v(0) = 0, \quad v'(0) = 1.$$

Wir definieren

$$f(\theta) := \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n(\theta)}{\lambda_n(0)} \quad \text{und} \tag{25}$$

$$g(\theta) := \frac{v(\theta, T)}{v(0, T)}. \tag{26}$$

Zu zeigen ist nun

$$f(\theta) = g(\theta) \text{ für alle } \theta \in [0, 1].$$

Nach Lemma 3.2.3 gilt $f(\theta) = 0$ genau dann, wenn $g(\theta) = 0$ gilt. Zudem ist nach Konstruktion $f(0) = g(0) = 1$.
Unser Ziel ist zunächst zu zeigen, dass für alle θ mit $f(\theta) \neq 0$

$$(\log \dot{f}(\theta)) = \frac{\dot{f}(\theta)}{f(\theta)} = \frac{\dot{g}(\theta)}{g(\theta)} = (\log \dot{g}(\theta))$$

gilt. Daraus lässt sich dann die gewünschte Behauptung folgern.

Betrachte im Folgenden also nur alle θ mit $f(\theta) \neq 0$. Soweit möglich, wird in Rechnungen und Umformungen der Übersicht halber auf θ verzichtet.
Da nach Lemma 4.1.8 $f(\theta) = \prod_{n\in\mathbb{N}} \frac{\lambda_n(\theta)}{\lambda_n(0)}$ gleichmäßig konvergiert, ist auch $\log f(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \log \frac{\lambda_n(\theta)}{\lambda_n(0)}$ gleichmäßig konvergent. Dann gilt (zur Übersicht wird für Summen auf den Laufindex verzichtet)

$$\frac{\dot{f}}{f} = (\log \dot{f}) = \left(\sum \log \frac{\lambda_n}{\lambda_n(0)}\right)^{\boldsymbol{\cdot}} = \sum \frac{\dot{\lambda}_n}{\lambda_n},$$

da $\sum \frac{\dot{\lambda}_n}{\lambda_n}$ nach Lemma 4.1.8 gleichmäßig konvergiert.

Nach Lemma 4.1.6 ist $\dot{\lambda}_n = < qU_n, U_n >$, wobei U_n eine Eigenfunktion zu λ_n mit $\| U_n \|_{L^2}= 1$ ist. Dann gilt

$$\begin{aligned}\frac{\dot{f}}{f} &= \sum \frac{\dot{\lambda}_n}{\lambda_n} = \sum \frac{< qU_n, U_n >}{\lambda_n} \\ &= \sum \frac{1}{\lambda_n} \int U_n^2(t) q(t)\, dt \\ &= \int \sum \frac{1}{\lambda_n} U_n^2(t) q(t)\, dt \\ &\overset{4.1.10}{=} \int G(t,t) q(t)\, dt.\end{aligned}$$

Integral und Reihe dürfen nach dem Satz von Beppo Levi vertauscht werden, da nur endlich viele Summanden negativ sind. Dies ist der Fall, da $\lambda_n(\theta) \to \infty$ für jedes θ. Man kann also die endliche Summe raus ziehen und den Satz von Beppo Levi auf die restliche Reihe anwenden.
Also gilt

$$\frac{\dot{f}(\theta)}{f(\theta)} = \int G(\theta, t, t) q(t)\, dt. \tag{27}$$

Der nächste Schritt ist es, auch

$$\frac{\dot{g}(\theta)}{g(\theta)} = \int G(\theta, t, t) q(t)\, dt$$

zu zeigen.
Dazu definieren wir uns $z(\theta, t) := \dot{v}(\theta, t)$. Da v die Lösung des Anfangswertproblems ist, gilt

$$L(\theta) v(t) = 0, \quad v(0) = 0, \quad v'(0) = 1.$$

Differenzieren wir diese Gleichung nach θ, erhalten wir wie in (24) mit $\lambda_n = 0$

$$L(\theta)\dot{v}(t) = -q(t) v(t).$$

Damit ergibt sich ein Anfangswertproblem für z:

$$L(\theta) z(t) = -q(t) v(t), \quad z(0) = 0, \quad z'(0) = 0. \tag{28}$$

Weiter benötigen wir die Lösung des Anfangswertproblems

$$L(\theta)\tilde{v}(t) = 0, \quad \tilde{v}(b) = 0, \quad \tilde{v}'(b) = 1$$

bei $t = b$, um damit wie in 2.3.6 die Greensche Funktion Γ definieren können. Jetzt lässt sich (28) lösen und es gilt

$$z(\theta,t) = C_1 v(\theta,t) + C_2\tilde{v}(\theta,t) + T(-qv(\theta))(t)$$

mit $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ und T wie in 2.3.1, weil $-T(qv) = w$ eine spezielle Lösung der Differentialgleichung $Lw = -qv$ ist.
Wir bestimmen nun C_1 und C_2 mithilfe der Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned}
z(0) = 0 &\Rightarrow 0 = C_1 v(0) + C_2\tilde{v}(0) - T(qv)(0) = C_2\tilde{v}(0)\\
&\Rightarrow C_2 = 0\\
z'(0) = 0 &\Rightarrow 0 = C_1 v'(0) - (T(qv)(t))'\,|_{t=0}\\
&\Rightarrow C_1 = (T(qv)(t))'\,|_{t=0}.
\end{aligned}$$

Also

$$z(\theta,t) = (T(qv)(t))'\,|_{t=0} v(\theta,t) - T(qv)(t).$$

Wir bestimmen nun $(T(qv)(t))'\,|_{t=0}$:

$$\begin{aligned}
(T(qv)(t))'\,|_{t=0} &\overset{2.3.4}{=} \int_0^b \partial_t\Gamma(0,\tau)q(\tau)v(\tau)\,d\tau\\
&\overset{2.3.6}{=} v'(0)\int_0^b \frac{\tilde{v}(\tau)v(\tau)}{c}q(\tau)\,d\tau = \int_0^b \Gamma(t,t)q(t)\,dt.
\end{aligned}$$

Damit lässt sich $z(\theta,b)$ bestimmen und es gilt

$$\begin{aligned}
z(\theta,b) &= v(\theta,b)\int_0^b \Gamma(\theta,t,t)q(t)\,dt - T(qv)(b)\\
&= v(\theta,b)\int_0^b \Gamma(\theta,t,t)q(t)\,dt.
\end{aligned}$$

Also ist

$$\frac{\dot{g}(\theta)}{g(\theta)} = \frac{\dot{v}(\theta,b)}{v(\theta,b)} = \frac{z(\theta,b)}{v(\theta,b)} = \int_0^b \Gamma(\theta,t,t)q(t)\,dt.$$

Da nach Satz 2.3.3 die Greensche Funktion eindeutig ist, gilt $\Gamma = G$ und mit (27) folgt für alle $\theta \in [0,1]$ mit $f(\theta) \neq 0$

$$(\log \dot{f}(\theta)) = \frac{\dot{f}(\theta)}{f(\theta)} = \frac{\dot{g}(\theta)}{g(\theta)} = (\log \dot{g}(\theta)). \tag{29}$$

Es bleibt also noch zu zeigen, dass $f = g$ auf $[0,1]$ gilt. Das wäre trivial, wenn f keine Nullstellen besitzen würde oder f analytisch ist. Die Analytizität von f ist jedoch nicht offensichtlich, da zwar die $\lambda_n(\theta)$ für jedes n analytisch sind, aber die Umgebungen, auf denen die Eigenwerte holomorph fortgesetzt werden können, für $n \to \infty$ beliebig klein werden könnten, was a priori nicht ausgeschlossen werden kann. Aus diesem Grund werden wir die Analytizität von f auf einem etwas komplizierterem Weg zeigen.

Da $v(\theta, b)$ reell analytisch ist, ist auch g reell analytisch. Da $g \neq 0$ ist, kann g also nur endlich viele Nullstellen $\theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_k$ mit $k \in \mathbb{N}$ besitzen. Da $f(\theta) = 0$ genau dann, wenn $g(\theta) = 0$ gilt, hat auch f eben diese endlich vielen Nullstellen.
Da $\lambda_n(\theta) \to \infty$ für $n \to \infty$, gibt es für jedes θ nur endlich viele n mit $\lambda_n(\theta) = 0$.
Wir definieren so die endliche Menge $N := \{n \in \mathbb{N} : \exists \theta \in [0, 1] \text{ mit } \lambda_n(\theta) = 0\}$ und damit

$$\tilde{f}(\theta) := \prod_{n \in N} \frac{\lambda_n(\theta)}{\lambda_n(0)}.$$

$\tilde{f}$ ist analytisch, da das Produkt endlich ist und alle $\lambda_n(\theta)$ analytisch sind. Wir können damit f ausdrücken als

$$f(\theta) = \tilde{f}(\theta) h(\theta),$$

wobei $h(\theta)$ der Rest des Produktes ist. Offenbar ist dann $h(\theta) \neq 0$ für $\theta \in [0, 1]$ ist. Im ersten Teil des Beweises wurde gezeigt, dass $\log h$ stetig differenzierbar ist. Somit ist auch h stetig differenzierbar.

Nach (29) gilt $(\dot{\log f}) = (\dot{\log g})$ auf $[0, \theta_1)$ und $f(0) = g(0) = 1$. Damit ist $\log f = \log g$ auf $[0, \theta_1)$. Daraus ergibt sich

$$f(\theta) = g(\theta) \text{ für alle } \theta \in [0, \theta_1). \tag{30}$$

Wir betrachten folgende Gleichung für $\theta \neq \theta_1$ nahe θ_1 in $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\tilde{f}}}{\tilde{f}} + \frac{\dot{h}}{h} &= \frac{\dot{f}}{f} = \frac{\dot{g}}{g} \\ \Rightarrow \frac{\dot{h}}{h} &= \frac{\dot{g}}{g} - \frac{\dot{\tilde{f}}}{\tilde{f}}. \end{aligned} \tag{31}$$

Da g holomorph fortsetzbar ist und nur endlich viele Nullstellen besitzt, ist $\dfrac{\dot{g}}{g}$ meromorph mit Polen 1. Ordnung in $\theta_1, \ldots, \theta_k$ fortsetzbar. Das gleiche gilt für $\tilde{f}$. Somit ist die gesamte rechte Seite meromorph auf Ω mit $[0, 1] \subset \Omega \subset \mathbb{C}$ fortsetzbar.
Da die linke Seite stetig in $\theta_1, \ldots, \theta_k$ ist, lässt sich die rechte Seite sogar holomorph auf Ω fortsetzen. Damit ist auch $(\dot{\log h}) = \dfrac{\dot{h}}{h}$ nach Ω fortsetzbar.
Es stellt sich nun die Frage, ob auch $\log h$ holomorph nach Ω fortsetzbar ist. Wähle dazu

$\theta_0 \in [0,1]$. Dann ist

$$\log h(\theta_0) + \int_\gamma (\log \dot{h}(\Theta))\, d\Theta, \quad \gamma\ C^1\text{-Kurve von } \theta_0 \text{ nach } \Theta \text{ in } \Omega$$

die holomorphe Fortsetzung von $\log h$, da für $\theta \in \mathbb{R}$ wegen des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung

$$\log h(\theta) = \log h(\theta_0) + \int_{\theta_0}^{\theta} (\log \dot{h}(\Theta))\, d\Theta$$

gilt.
Mit $\log h$ ist auch h holomorph auf Ω fortsetzbar und damit nun auch $f = \tilde{f}h$.
Da nach (30) $f(\theta) = g(\theta)$ für alle $0 \leq \theta < \theta_1$ gilt, gibt es ein reelles Intervall $I \subset \Omega$, auf dem $f = g$ gilt. Da dieses Intervall einen Häufungspunkt besitzt, gilt nach Satz 4.1.9, dass die holomorphen Fortsetzungen von f und g auf Ω identisch sein müssen. Damit gilt dann auch $f = g$ auf $[0,1]$.

□

Damit ist das Ziel dieser Arbeit bewiesen.
Ich möchte nun kurz darauf eingehen, wie, abgesehen vom formalen Beweis, die Idee aufgekommen sein könnte, dass die Gleichung

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n(\theta)}{\lambda_n(0)} = \frac{v(\theta,T)}{v(0,T)} \tag{32}$$

beziehungsweise

$$\log \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n(\theta)}{\lambda_n(0)} = \log \frac{v(\theta,T)}{v(0,T)}$$

gilt. Diese Herleitung soll nicht formal korrekt geführt werden, sondern nur einen Ideengang widerspiegeln. Auch werden Konvergenzen und Ähnliches außer Acht gelassen.

4.2.2 Informelle Herleitung des Satzes

Zunächst definieren wir, wie bereits in der Einleitung dieser Arbeit, die Determinante eines Sturm-Liouville Operators $L(\theta)$:

$$\det L := \prod_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n.$$

Wie auch im Beweis 4.1.1, betrachten wir den Logarithmus der rechten und linken Seite von (32) beziehungsweise die Ableitung des Logarithmus nach θ.
Untersucht wird zunächst die rechte Seite. Wie wir im Beweis gezeigt haben, ist

$$\dot{\log} v = \int Gq\, dt.$$

Mit Kenntnis über die Spur von Operatoren erhalten wir

$$\dot{\log} v = \int Gq\,dt = \operatorname{tr}(L^{-1} \cdot M_q),$$

wobei L^{-1} der inverse Operator von L und M_q der Multiplikationsoperator mit q ist.
Wir betrachten nun die linke Seite. Auch hier ist zu erkennen, dass sich ebenfalls die Spur ergibt. Dazu setze ich die Kenntnis folgender Gleichheit voraus:

$$\frac{d}{d\theta} \det L = \det L \cdot \operatorname{tr}(L^{-1} \cdot \dot{L}).$$

Also ist

$$\frac{d}{d\theta} \log \det L = \frac{\dot{\det} L}{\det L} = \operatorname{tr}(L^{-1} \cdot \dot{L}) = \operatorname{tr}(L^{-1} \cdot M_q).$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} & \dot{\log} v = \log \dot{\det} L \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{\dot{v}}{v} = \frac{\dot{\det} L}{\det L} = \prod_{n\in\mathbb{N}} \frac{\dot{\lambda}_n}{\lambda_n}. \end{aligned}$$

Dies ist ein möglicher Weg, um auf die Aussage des Satzes zu stoßen.
Abschließend wollen wir uns noch zwei Anwendungen dieses Satzes widmen.

4.2.3 Korollar

Sei $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann gilt

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^2 + k^2}{n^2} = \frac{\sinh(k\pi)}{k\pi}.$$

Beweis. Sei $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $I = [0, \pi]$. Definiere

$$L(\theta)u := -u'' + \theta k^2 u$$

für $\theta \in [0, 1]$. L ist offenbar ein Sturm-Liouville Operator wie in 4.1.1. Um Satz 4.1.1 anwenden zu können, benötigen wir die Lösung $v(\theta, \cdot)$ des Anfangswertproblems

$$Lv = 0 \qquad v(\theta, 0) = 0, v'(\theta, 0) = 1.$$

Da wir Satz 4.1.1 nur für $\theta = 0$ beziehungsweise $\theta = 1$ anwenden, suchen wir nur eben diese Lösungen.
Da $L(0)u = -u''$ ist, ist $v(0, t) = c_1 t + c_2$, wobei mittels der Anfangsbedingungen

$$v(0, t) = t$$

folgt. Die Lösung von $L(1)u = -u'' + k^2u = 0$ ist $v(1,t) = C_1 \sinh(kt) + C_2 \cosh(kt)$. Mit den Anfangsbedingungen folgt

$$v(1,t) = \frac{\sinh(kt)}{k}.$$

Zu bestimmen sind noch die Eigenwerte $\lambda(\theta)$ von $L(\theta)$ beziehungsweise genauer $\lambda(0)$ und $\lambda(1)$.
Sei $n \in \mathbb{N}$. Für den Eigenwert $\lambda_n(0)$ gilt, wie im Beispiel in Kapitel 3.1.1 gezeigt,

$$\lambda_n(0) = n^2.$$

Hier haben wir auch gesehen, dass $-u'' = (\lambda_n(1) - k^2)u$ nur Eigenfunktionen $u \neq 0$ unter den Randbedingungen $u(0) = u(\pi) = 0$ haben kann, wenn $\lambda_n(1) - k^2 = n^2$ ist. Also sind die gesuchten Eigenwerte

$$\lambda_n(1) = n^2 + k^2.$$

Damit folgt nun mit 4.1.1

$$\prod_{n \in \mathbb{N}} \frac{n^2 + k^2}{n^2} = \frac{\sinh(k\pi)}{k\pi}.$$

□

Abschließend möchte ich noch kurz auf eine physikalische Anwendung des Satzes 4.1.1 eingehen.

4.2.4 Physikalische Anwendung

Aus der Analysis sollte das folgende Integral bekannt sein:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}.$$

Erweitern wir dieses auf $x \in \mathbb{R}^n$, folgt

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2}\, dx = \pi^{n/2}.$$

Sei nun $a > 0$ ein Parameter. Dann lässt sich leicht nachrechnen, dass

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}$$

gilt. Erweitern wir dies wieder auf $x \in \mathbb{R}^n$ und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $A > 0$ eine Diagonalmatrix, ergibt sich

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-<x,Ax>}\, dx = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det A}}.$$

Selbiges gilt auch für symmetrisch positiv definite Matrizen A, da für diese eine orthogonale Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $D = Q^{-1}AQ$ existiert. Mit

der Variablentransformation $y = Qx$ folgt dann die Behauptung.
Wir gehen nun einen Schritt weiter und betrachten zum Beispiel Integrale auf dem Hilbertraum $H = C^2(I)$ mit $I = [0, 1]$ und einem gewissen Maß μ auf H, also

$$\int_H e^{-<u,Lu>} \, d\mu(u)$$

mit einem reellen symmetrischen Operator L.
Um Integrale dieser Art für Sturm-Liouville Operatoren L lösen zu können, ist das Resultat dieser Arbeit nützlich. Solche Integrale tauchen beispielsweise in der Quantenfeldtheorie auf, wie ich bereits in der Einleitung angesprochen habe.

Literatur

[AG08] Mohammed Al-Gwaiz. *Sturm-Liouville Theory and its Applications*. Springer-Verlag London, 1 edition, 2008.

[Bor13] Bornemann. *Funktionentheorie*. Birkhäuser Basel, 2013.

[Fis81] Gerd Fischer. *Lineare Algebra*. Grundkurs Mathematik. Vieweg Verlag, Braunschweig, 7 edition, September 1981.

[Fre14] Eberhard Freitag. *Funktionentheorie 2*. Springer, 2 edition, 2014.

[Gri09] Daniel Grieser. Differentialgeometrie. Skript, Online zu finden unter `http://www.staff.uni-oldenburg.de/daniel.grieser/wwwlehre/Eigene_Skripten/grieser-skript-differentialgeometrie2013.pdf`, aufgerufen am 02.10.2016, 11:10, 2008/2009.

[Gri10] Daniel Grieser. Analysis 2. Skript, Online zu finden unter `http://www.staff.uni-oldenburg.de/daniel.grieser/wwwlehre/Eigene_Skripten/grieser-analysis2-r907.pdf`, aufgerufen am 01.10.2016, 18:01, 2010.

[Oev03] Walter Oevel. Mathematik für physiker 3. Skript, Online zu finden unter `http://math-www.uni-paderborn.de/~walter/teachingWS02_03/Skript.pdf`, aufgerufen am 01.10.2016, 20:10, 2002/2003.

[SL77] U. Smilansky S. Levit. A theorem on infinite products of eigenvalues of sturm-liouville type operators. In *American Mathematical Society*, volume 65, August 1977.

[Wal00] Walter. *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Springer-Verlag, 7 edition, 2000.

[Wer02] Jochen Werner. Gewöhnliche differentialgleichungen und ihre numerische behandlung. Skript, Online zu finden unter `http://num.math.uni-goettingen.de/werner/ode.pdf`, aufgerufen am 02.10.2016, 11:14, 2001/2002.

[Wer11] Dirk Werner. *Funktionalanalysis*. Springer, 7 edition, 2011.

[Wika] Wikipedia. Charles-francois sturm. Artikel, Online zu finden unter `https://de.wikipedia.org/wiki/Charles-Fran%C3%A7ois_Sturm`, aufgerufen am 14.10.2016, 15:37.

[Wikb] Wikipedia. Determinante. Artikel, Online zu finden unter `https://de.wikipedia.org/wiki/Determinante`, aufgerufen am 01.10.2016, 18:07.

[Wikc] Wikipedia. Joseph liouville. Artikel, Online zu finden unter `https://de.wikipedia.org/wiki/Joseph_Liouville`, aufgerufen am 14.10.2016, 15:36.

Abschließende Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich meine Bachelorarbeit *Determinanten von Sturm-Liouville Operatoren* selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe. Außerdem versichere ich, dass ich die allgemeinen Prinzipien wissenschaftlicher Arbeit und Veröffentlichung, wie sie in den Leitlinien guter wissenschaftlicher Praxis der Carl von Ossietzky Universität Oldenburg festgelegt sind, befolgt habe.

Oldenburg, den 28. Dezember 2016
Ort, Datum

Alberts, Henning