

Unter dem Titel

# Markowanalysen stochastisch fluktuierender Zeitserien

vom Fachbereich Physik der  
Carl von Ossietzky Universität Oldenburg  
zur Erlangung des Grades eines

DOKTOR DER NATURWISSENSCHAFTEN  
(DR. RER. NAT.)

genehmigte Dissertation.

Vorgelegt von  
Christoph Renner  
geb. 24.10.1970 in Marktoberdorf

Erstgutachter: Prof. Dr. J. Peinke  
Zweitgutachter: Prof. Dr. A. Rauh  
Tag der Disputation: 31. Januar 2002

Unter dem Titel

# Markowanalysen stochastisch fluktuierender Zeitserien

vom Fachbereich Physik der  
Carl von Ossietzky Universität Oldenburg  
zur Erlangung des Grades eines

DOKTOR DER NATURWISSENSCHAFTEN  
(DR. RER. NAT.)

genehmigte Dissertation.

Vorgelegt von  
Christoph Renner  
geb. 24.10.1970 in Marktoberdorf

Erstgutachter: Prof. Dr. J. Peinke  
Zweitgutachter: Prof. Dr. A. Rauh  
Tag der Disputation: 31. Januar 2002



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>5</b>
<b>I</b>	<b>Markowanalyse der vollentwickelten Turbulenz</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>Problemstellungen der Turbulenz</b>	<b>11</b>
<b>3</b>	<b>Theoretische Grundlagen</b>	<b>15</b>
3.1	Vorbemerkung . . . . .	15
3.2	Grundlagen statistischer Turbulenzmodelle . . . . .	15
3.2.1	Grundlegende Definitionen der Wahrscheinlichkeitsrechnung . . . . .	15
3.2.2	Stationarität, Homogenität und Isotropie . . . . .	18
3.2.3	Das Geschwindigkeitsinkrement . . . . .	20
3.3	Das Kaskadenmodell nach Richardson . . . . .	21
3.4	Skalierungsanalysen . . . . .	24
3.4.1	Kolmogorov 1941 . . . . .	24
3.4.2	Das Lognormal-Modell (Kolmogorov 1962) . . . . .	24
3.4.3	Extended Self-Similarity . . . . .	26
3.5	Die multiplikative Kaskade nach Castaing . . . . .	27
3.6	Weiterführende Ansätze . . . . .	30
<b>4</b>	<b>Die Mathematik der Markowprozesse</b>	<b>33</b>
4.1	Motivation . . . . .	33
4.2	Eindimensionale Markowprozesse . . . . .	34
4.2.1	Die Fokker-Planck-Gleichung . . . . .	34
4.2.2	Die Langevin-Gleichung . . . . .	37
4.3	Prozesse in mehreren Dimensionen . . . . .	38
<b>5</b>	<b>Das experimentelle System</b>	<b>41</b>
5.1	Versuchsaufbau . . . . .	41
5.2	Messtechnik . . . . .	44
5.3	Interpretation gemessener Zeitserien -Die Taylorhypothese . . . . .	47
5.4	Charakterisierungsmessungen . . . . .	48

<b>6</b>	<b>Markowanalyse experimenteller Daten</b>	<b>53</b>
6.1	Vorbemerkungen . . . . .	53
6.2	Test der Markoweigenschaften . . . . .	54
6.3	Die Kramers-Moyal Koeffizienten . . . . .	61
6.4	Der Koeffizient vierter Ordnung . . . . .	69
6.5	Die Lösungen der Fokker-Planck-Gleichung . . . . .	70
6.6	Zusammenfassung und Diskussion . . . . .	75
6.6.1	Zusammenfassung . . . . .	75
6.6.2	Skalierungseigenschaften und $K62$ . . . . .	76
6.6.3	Die ESS . . . . .	80
6.6.4	Betragsmomente . . . . .	83
6.6.5	Multiplikative Kaskadenmodelle . . . . .	84
6.6.6	Weiterführende Ansätze . . . . .	86
<b>7</b>	<b>Der Übergang zu hohen Reynoldszahlen</b>	<b>91</b>
7.1	Motivation . . . . .	91
7.2	Verwendete Daten . . . . .	92
7.3	Die Markowlänge . . . . .	95
7.4	Drift- und Diffusionskoeffizient . . . . .	97
7.5	Zusammenfassung und Diskussion . . . . .	104
<b>8</b>	<b>Zweidimensionale Analyse der turbulenten Kaskade</b>	<b>109</b>
8.1	Motivation . . . . .	109
8.2	Experimentelle Ergebnisse . . . . .	111
8.3	Diskussion . . . . .	122
<b>9</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>127</b>
<b>II</b>	<b>Markowanalyse hochfrequenter Wechselkursdaten</b>	<b>131</b>
<b>10</b>	<b>Eine kurze Einführung in die Finanzdatenanalyse</b>	<b>133</b>
<b>11</b>	<b>Markowanalyse der Daten</b>	<b>137</b>
11.1	Vorbereitende Analysen . . . . .	137
11.2	Markoweigenschaften . . . . .	141
11.3	Die Kramers-Moyal Koeffizienten . . . . .	142
11.4	Der Koeffizient vierter Ordnung . . . . .	145
11.5	Ein alternativer Ansatz zur Bestimmung der Koeffizienten . . . . .	146
11.6	Die Lösungen der Fokker-Planck Gleichung . . . . .	150
11.7	Zusammenfassung und Diskussion . . . . .	151
<b>12</b>	<b>Die Umkehrung der Prozessrichtung</b>	<b>155</b>
<b>13</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>163</b>

# Kapitel 1

## Einleitung

Im allgemeinen ist es das Bestreben der Physik, die Beschreibung realer Systeme auf einige wenige und im physikalischen Sinn einfache Gesetzmässigkeiten zu reduzieren. Der Höhepunkt dieser Bemühungen wäre zweifellos die Entdeckung der sog. Weltformel, also der einheitlichen Beschreibung aller vier in der Natur auftretenden fundamentalen Kräfte.

Zur Beschreibung der meisten in der Natur real existierenden Systeme wäre die Weltformel allerdings völlig nutzlos. Die entsprechenden Gleichungen würden im konkreten Fall derart komplizierte Formen annehmen, dass man nicht hoffen könnte, sie jemals zu lösen. Man beobachtet dies bereits im Fall der klassischen Mechanik und der Quantenmechanik, denen jeweils vergleichsweise einfache Gesetzmässigkeiten zugrunde liegen, die jedoch bereits für Systeme mit drei Teilchen allenfalls noch näherungsweise gelöst werden können.

Zu noch komplexeren Systemen muss man daher einen anderen Zugang wählen. Mit dem Zweig der statistischen Physik wurde eine erfolgreiche und adäquate Methode zur Beschreibung solcher komplexer, insbesondere thermodynamischer, Systeme entwickelt. Auch die Turbulenzforschung, welcher der größte Teil der vorliegenden Arbeit gewidmet ist, macht im wesentlichen Aussagen über statistische Größen.

Neben diesen „klassischen“ Anwendungsgebieten der Statistik in der Physik etabliert sich aber zunehmend auch eine Forschungsrichtung, die bestrebt ist, Methoden und Konzepte der statistischen Physik auf komplexe Systeme anzuwenden, deren einzelne Komponenten für sich genommen nicht Gegenstand physikalischer Untersuchungen sein können. Beispiele hierfür sind soziologische oder auch ökonomische Systeme. Die Hoffnung ist, dass ein System, das sich aus vielen miteinander wechselwirkenden Elementen bzw. Individuen zusammensetzt, auf der Ebene des Gesamtsystems ein Verhalten zeigt, das hauptsächlich durch die (eventuell auch beobachtbaren) Wechselwirkungen zwischen den Elementen bestimmt ist und in das die individuellen Eigenschaften der einzelnen Elemente allenfalls statistisch eingehen.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit statistischen Eigenschaften sowohl eines „klassischen“ physikalischen Systems, der voll entwickelten Turbulenz, als auch der dem Zweig der sog. Ökonophysik zuzuordnenden Untersuchung von Finanzmärkten. Beide Systeme zeichnen sich durch komplexe statistische Eigenschaften aus, die sich bislang einer auf *first principles* basierenden Modellierung entziehen. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich aus diesem Grund nicht mit der Modellierung dieser

Systeme oder der Validierung der verschiedenen Modelle durch einen Vergleich ihrer Vorhersagen mit experimentellen Ergebnissen. Vielmehr wird der Ansatz verfolgt, aus einer statistischen Analyse empirischer Daten möglichst weit reichende Aussagen über den den Daten zugrunde liegenden stochastischen Prozess zu gewinnen. In einem zweiten Schritt soll dann versucht werden, aus den gewonnenen Ergebnissen Rückschlüsse auf die verschiedenen Modelle für die beiden Systeme zu ziehen.

Die in dieser Arbeit verwendete Methode ist die der Markowanalyse. Ihre Grundidee ist es, einen stochastischen Prozess durch eine ausschließlich auf beweisbaren mathematischen Zusammenhängen basierende Datenanalyse zu spezifizieren und dadurch schließlich die stochastische Differentialgleichung zu finden, der die analysierten Daten gehorchen. Diese Gleichung wird im Fall der stochastischen Markowschen Prozesse die Fokker-Planck- bzw. Langevin-Gleichung sein.

Das bekannteste Beispiel für einen solchen Markowprozess ist die Brownsche Bewegung. Die Diffusionsgleichung, die diesen Prozess beschreibt, ist zugleich der einfachste Spezialfall der Fokker-Planck-Gleichung. Salopp gesagt besteht die Vorgehensweise bei der Markowanalyse darin, zu klären, ob für gegebene Daten die Beschreibung durch einen Diffusionsprozess zulässig ist und, falls dies der Fall ist, den (bzw. die) Diffusionskoeffizienten zu messen.

Die Markowanalyse hat zwei wichtige Eigenschaften. Zum einen können, wie bereits erwähnt, mit ihrer Hilfe Aussagen über stochastische Prozesse gemacht werden ohne dass man auf Annahmen über das betrachtete System zurückgreifen muss: Man kann sowohl die Voraussetzungen, unter denen ein Prozess als Markowprozess beschrieben werden kann, mathematisch formulieren und anhand der Daten überprüfen, als auch die (Diffusions-) Koeffizienten der Fokker-Planck-Gleichung gemäß ihrer mathematischen Definition aus den Daten bestimmen. Die Beschreibung des Prozesses, die man auf diese Weise erhält, ist aber zudem auch vollständig: Die Kenntnis der Entwicklungsgleichungen (Fokker-Planck- bzw. Langevin-Gleichung) erlaubt es nicht nur, die Wahrscheinlichkeitsverteilung der untersuchten Zufallsvariablen zu einem gegebenen Wert des Prozessparameters zu berechnen, sondern ermöglicht auch Aussagen über die Dynamik eines stochastischen Prozesses. Im oben angesprochenen Beispiel der Brownschen Bewegung etwa ermöglicht die Mathematik der Markowprozesse nicht nur die Berechnung der Aufenthaltswahrscheinlichkeit eines Teilchens zu einem gegebenen Zeitpunkt, sondern auch Aussagen über die Wahrscheinlichkeit, mit der sich ein diffundierendes Teilchen in einer Folge von Zeitpunkten jeweils an bestimmten Orten aufhält. Man erhält eine im stochastischen Sinn vollständige Beschreibung der Dynamik des Teilchens.

Das Hauptaugenmerk dieser Arbeit liegt auf den statistischen Eigenschaften voll entwickelter turbulenter Strömungen, denen dementsprechend auch der größere erste Teil der Arbeit gewidmet ist. Hier findet sich in Kapitel 2 zunächst eine kurze Einführung in die Problemstellung der Turbulenz sowie, im folgenden Kapitel 3, auch eine Einführung in die wichtigsten Konzepte und theoretischen Ansätze zur Behandlung des Spezialfalls der voll entwickelten, homogenen, stationären und isotropen Turbulenz. In Kapitel 4 werden die wichtigsten mathematischen Definitionen und Sätze zu Markowprozessen vorgestellt und im Hinblick auf ihre Anwendung in der Analyse experimenteller Daten diskutiert. Nach einer kurzen Beschreibung des

verwendeten experimentellen Systems (Kapitel 5) wird dann in Kapitel 6 die konkrete Anwendung des mathematischen Formalismus der Markowschen Prozesse zur Analyse gemessener turbulenter Daten anhand eines exemplarischen Datensatzes diskutiert. In Kapitel 7 finden sich die Ergebnisse der Markowanalyse für Datensätze unterschiedlicher Reynoldszahlen, und in Kapitel 8 wird eine Erweiterung der Methode auf zweidimensionale stochastische Variablen vorgestellt, die es erlaubt, die gemeinsamen statistischen Eigenschaften des Geschwindigkeits- und Energiedissipationfeldes zu untersuchen. Eine Zusammenfassung der Ergebnisse für die Turbulenz sowie deren Diskussion schließt den ersten Teil ab.

Der zweite Teil widmet sich der empirischen Analyse von hochfrequenten Wechselkursdaten. Nach einer kurzen Einführung in das Themengebiet in Kapitel 10 werden in Kapitel 11 die Ergebnisse der Markowanalyse des Wechselkurses des US-Dollar gegenüber der deutschen Mark vorgestellt und diskutiert. Daran anschließend wird in Kapitel 12 die vor allem für die Finanzdatenanalyse interessante Frage der Richtungsumkehrung stochastischer Prozesse behandelt. Eine kurze Zusammenfassung und Diskussion werden auch den zweiten Teil der Arbeit abschließen.



# Teil I

## Markowanalyse der vollentwickelten Turbulenz



# Kapitel 2

## Problemstellungen der Turbulenz

Bei weitem die meisten der in der Natur und auch der Technik auftretenden Strömungen zeigen, mehr oder minder stark, turbulentes Verhalten. Das Geschwindigkeitsfeld weist irreguläre, zeitlich schnell veränderliche Fluktuationen auf, und auch die in solchen Strömungen eventuell noch vorhandenen regulären Strukturen (Wirbel) treten zu unregelmäßigen Zeiten in unvorhersagbarer Grösse und Richtung auf. Neben der grundsätzlichen physikalischen Herausforderung, ein solch ungeordnetes Feld zu beschreiben, haben die lokalen turbulenten Geschwindigkeitsfluktuationen aber auch für die quantitative Beschreibung der globalen Eigenschaften der Strömung eine wichtige Bedeutung, wie die im Folgenden kurz skizzierten Überlegungen zeigen.

Ausgangspunkt dieser Überlegungen sind die Navier-Stokes-Gleichungen für das Geschwindigkeitsfeld  $\vec{w}(\vec{x}, t)$ <sup>1</sup>. Im einfachsten Fall, d.h. für inkompressible Fluide deren Materialeigenschaften isotrop sind und weder vom Druck noch von der Temperatur oder der Geschwindigkeit abhängen, nehmen die Bewegungsgleichungen für das Geschwindigkeitsfeld  $\vec{w}(\vec{x}, t)$  die folgende Form an:

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{w}(\vec{x}, t) + (\vec{w}(\vec{x}, t) \cdot \nabla) \vec{w}(\vec{x}, t) = -\frac{1}{\rho} \nabla p(\vec{x}, t) + \nu \nabla^2 \vec{w}(\vec{x}, t) + \vec{f}. \quad (2.1)$$

Die Navier–Stokes–Gleichungen (2.1) sind, anschaulich gesprochen, nichts anderes als die Newtonschen Bewegungsgleichungen für ein sich im Geschwindigkeitsfeld  $\vec{w}(\vec{x}, t)$  bewegendes infinitesimal kleines Flüssigkeitsvolumen  $dV$ . Die linke Seite entspricht der totalen Zeitableitung dieses Geschwindigkeitsfeldes, die Terme der rechten Seite beschreiben die auf das Volumenelement wirkenden Kräfte: Der Term  $\frac{1}{\rho} \nabla p(\vec{x}, t)$  gibt die Kräfte des Druckfeldes wieder, der sog. Viskositätsterm  $\nu \nabla^2 \vec{w}(\vec{x}, t)$  beschreibt den Einfluss der molekularen Reibung und  $\vec{f}$  schließlich subsummiert die von außen auf die Strömung wirkenden Kräfte.

Die Navier-Stokes-Gleichungen werden durch die Kontinuitätsgleichung komplettiert. Sie lauten für den Fall inkompressibler Fluide (d.h.  $\rho = \text{const}$ ) :

$$\nabla \cdot \vec{w}(\vec{x}, t) = 0. \quad (2.2)$$

---

<sup>1</sup>Die ungewöhnliche Bezeichnung des Geschwindigkeitsfeldes mit  $\vec{w}$  wurde gewählt, da für die im folgenden diskutierten Fluktuationen der Geschwindigkeit und der sog. Geschwindigkeitsinkremente die Buchstaben  $v$  bzw.  $u$  verwendet wurden.

Das komplexe Verhalten turbulenter Strömungen rührt wesentlich vom zweiten Term der linken Seite der Navier–Stokes–Gleichung, dem sogenannten Advektionsterm  $(\vec{w}(\vec{x}, t) \cdot \nabla) \vec{w}(\vec{x}, t)$ , her. Er koppelt die Gleichung einer bestimmten Komponente des Geschwindigkeitsfelds nichtlinear an die Gleichungen für die anderen beiden Komponenten an und macht eine analytische Behandlung der Navier–Stokes–Gleichung praktisch unmöglich.

Der Einfluss des Advektionsterms ist allerdings nicht in allen Fällen gleich groß. Sehr zähe Fluide bzw. Strömungen bei sehr kleinen Geschwindigkeiten werden vom Dissipationsterm dominiert, der eine glättende Wirkung hat und dafür sorgt, dass die Strömung laminar bleibt. Eine erste Charakterisierung einer Strömung hinsichtlich ihres Verhaltens (turbulent bzw. laminar) ist durch die sog. Reynoldszahl  $Re$  möglich. Man erhält sie, indem man die Navier–Stokes– und die Kontinuitätsgleichung in eine dimensionslose Form überführt. Dazu werden neben der Viskosität  $\nu$  (ihre SI-Einheit ist  $m^2/s$ ) eine typische Längenskala  $L$  sowie eine typische Geschwindigkeitsskala  $W$  benötigt. Beide sind im Prinzip frei wählbar, also beliebig. Das jeweils betrachtete konkrete System legt aber meist eine bestimmte Wahl nahe, für das in dieser Arbeit betrachtete Freistrahlexperiment etwa ist es üblich, den Düsendurchmesser und die Austrittsgeschwindigkeit des Strahls aus der Düse zu verwenden, siehe auch Kapitel 5 (diese beiden Größen legen die Randbedingungen dieser Strömung eindeutig fest).

Die mit Hilfe von  $\nu$ ,  $L$  und  $W$  in dimensionslose Form überführte Navier–Stokes–Gleichung enthält als einzigen Parameter die Reynoldszahl

$$Re = \frac{W L}{\nu}, \quad (2.3)$$

deren Kehrwert als Vorfaktor des Dissipationsterms in die Gleichung eingeht. Je grösser die Reynoldszahl wird, desto geringer wird daher der Einfluss des Dissipationsterms und desto turbulenter wird die Strömung. Der Übergang in turbulentes Verhalten findet, abhängig vom konkreten Strömungstyp, typischerweise bei Reynoldszahlen von einigen hundert statt [86].

Die bei großen Reynoldszahlen auftretenden turbulenten Geschwindigkeitsfluktuationen haben einen entscheidenden Einfluss auf die globalen Eigenschaften der Strömung. Dies wird deutlich, wenn man die aus der Navier–Stokes–Gleichung resultierende Gleichung für die Mittelwerte der Geschwindigkeit betrachtet, die sog. Reynoldsgleichung. Man zerlegt dazu das Geschwindigkeitsfeld  $\vec{w}(\vec{x}, t)$  in seinen zeitunabhängigen Mittelwert  $\vec{W}(\vec{x}) = \langle \vec{w}(\vec{x}, t) \rangle$  und die zeitabhängigen Fluktuationen  $\vec{v}(\vec{x}, t)$  (mit  $\langle \vec{v}(\vec{x}, t) \rangle = 0$ ) um diesen Mittelwert:

$$\vec{w}(\vec{x}, t) = \vec{W}(\vec{x}) + \vec{v}(\vec{x}, t). \quad (2.4)$$

(Der Mittelwert  $\langle \dots \rangle$  ist hierbei das Ergebniss einer Ensemblemittelung.) Eine analoge Zerlegung wird für den Druck  $p(\vec{x}, t)$  vorgenommen. Man erhält damit aus der Navier–Stokes–Gleichung die folgende Gleichung für  $\vec{W}(\vec{x})$ :

$$(\vec{W} \cdot \nabla) \vec{W} = -\frac{1}{\rho} \nabla \langle p \rangle + \nu \nabla^2 \vec{W} + \langle \vec{f} \rangle + \frac{1}{\rho} \nabla \tau, \quad (2.5)$$

wobei die Komponenten des Tensors  $\tau$  sich aus den Korrelationen der Geschwindigkeitsfluktuationen zusammensetzen:  $\tau_{ij} = \rho \langle u_i u_j \rangle$ .

Die Reynoldsgleichungen (2.5) nehmen für viele praktische Probleme eine sehr viel einfachere Form an als die volle Navier-Stokes-Gleichung (eine Diskussion der Gleichung für den Freistrahler etwa findet sich in [88] und [90]), weisen aber einen entscheidenden Nachteil auf: Die im sog. Reynoldschen Spannungstensor  $\tau$  enthaltenen Korrelationen der Geschwindigkeitsfluktuationen müssen als unabhängige unbekannte Variablen behandelt werden. Das Gleichungssystem ist daher unterbestimmt. Ähnliche Schwierigkeiten ergeben sich, wenn man aus der Navier-Stokes-Gleichung eine Gleichung für die Zweipunktkorrelationen  $\langle u_i u_j \rangle$  ableitet. Auch diese Gleichungen sind nicht geschlossen, sondern enthalten ihrerseits Korrelationen der Form  $\langle u_i u_j u_k \rangle$ . Im allgemeinen ist die Gleichung für die Korrelation von  $N$  Komponenten der Geschwindigkeitsfluktuationen von den sog.  $N + 1$ -Punkt-Korrelationen abhängig. Dieses Problem ist als das *Schliessungsproblem* der Fluidodynamik bekannt.

Ein ähnliches Problem tritt bei dynamischen numerischen Simulationsverfahren auf, wobei hier insbesondere die Methode der large eddy simulation (LES) zu nennen ist [61]. Diese Methode wird vorzugsweise dann eingesetzt, wenn man zwar die zeitliche Entwicklung der globalen Strömung berücksichtigen muss, nach wie vor aber nicht an den kleinskaligen turbulenten Fluktuationen interessiert ist. In diesen Fällen wendet man einen räumlichen Tiefpassfilter einer gewählten Breite  $\Delta$  auf das Geschwindigkeitsfeld  $\vec{w}(\vec{x}, t)$  an und erhält aus der Navier-Stokes-Gleichung so eine Gleichung für das gefilterte Geschwindigkeitsfeld  $\tilde{w}$ . Der Vorteil dieses Verfahrens besteht darin, dass das gefilterte Geschwindigkeitsfeld auf Skalen kleiner als der Filterbreite  $\Delta$  glatt ist und daher mit sehr viel geringerem numerischen Aufwand simuliert werden kann als das ungefilterte Feld  $\vec{w}$ . Diese Vereinfachungen werden allerdings zu dem Preis erkauft, dass die resultierende Gleichung für das gefilterte Geschwindigkeitsfeld Terme enthält, die den Einfluss der kleinskaligen Fluktuationen auf das gefilterte Feld beschreiben und keinesfalls vernachlässigt werden können.

Theoretische und auch experimentelle Untersuchungen zu den kleinskaligen Eigenschaften turbulenter Strömungen folgen der in der Physik üblichen Vorgehensweise, das zu untersuchende System zunächst möglichst weit zu vereinfachen, die grundlegenden physikalischen Gesetzmäßigkeiten anhand dieses vereinfachten Problems zu klären, und anschließend mögliche Anwendungen auf komplexere (und damit realistischere) Systeme zu untersuchen. In diesem Sinne beschränken sich die in den folgenden Kapiteln besprochenen Turbulenzmodelle auf den stark vereinfachten Spezialfall der stationären, homogenen und isotropen Turbulenz.

Erste Modelle zur voll entwickelten Turbulenz wurden bereits in den vierziger Jahren des vorigen Jahrhunderts entwickelt [58]. Dass es heutzutage, nach mittlerweile sechzig Jahren, selbst für diesen so stark vereinfachten Spezialfall noch keine allgemein akzeptierte Theorie gibt, mag die Komplexität des Themas verdeutlichen. Insbesondere existiert immer noch kein auf der Navier-Stokes-Gleichung basierendes Modell, das alle experimentell beobachteten Aspekte der voll entwickelten Turbulenz zu erklären vermag. Vor diesem Hintergrund wurde die Methode der Markowanalyse entwickelt [37, 38], die ausschliesslich auf beweisbaren mathematischen Zusammenhängen basiert und daher von Modellannahmen unabhängige

Aussagen über die kleinskalige Turbulenz erlaubt.

# Kapitel 3

## Theoretische Grundlagen

### 3.1 Vorbemerkung

Das folgende Kapitel fasst in kurzer Form die wichtigsten grundlegenden Konzepte der Stochastik sowie der gängigsten Turbulenzmodelle zusammen und erhebt keinesfalls Anspruch auf Vollständigkeit. Detaillierte Diskussionen der angeführten Definitionen und Sätze der Stochastik finden sich in den Standardwerken der Stochastik wie etwa in [20]. Als einführende Lektüre in die Theorie und Modellierung der voll entwickelten Turbulenz seien die Lehrbücher von Frisch [41] und Pope [85] empfohlen.

### 3.2 Grundlagen statistischer Turbulenzmodelle

#### 3.2.1 Grundlegende Definitionen der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Unter einer *Zufallsvariablen* soll im folgenden eine reelle Variable  $U$  verstanden werden, die je nach (zufälligem) Ausgang eines Versuchs verschiedene Werte  $u$  annehmen kann. Die *Verteilungsfunktion*  $F(u)$  der Zufallsvariablen  $U$  ist definiert als die Wahrscheinlichkeit  $W$  dafür, daß die Zufallsgröße  $U$  einen Wert kleiner als  $u$  annimmt:

$$F(u) = W(U < u). \quad (3.1)$$

Ist der Wertebereich der Zufallsvariablen kontinuierlich, läßt sich die Verteilungsfunktion als Integral über die *Wahrscheinlichkeitsdichte*  $p(u)$  darstellen:

$$F(u) = W(U < u) = \int_{-\infty}^u p(u') du'. \quad (3.2)$$

Im folgenden werden für  $p$  auch die Bezeichnungen *Dichte* oder *pdf* (von engl. **probability density function**) verwendet. Einem mit Sicherheit eintretenden Ereignis wird die Wahrscheinlichkeit 1 zugeordnet. Daraus folgt die Normierungsbedingung

für die Wahrscheinlichkeitsdichten:

$$1 = \lim_{u \rightarrow +\infty} W(U < u) = \lim_{u \rightarrow +\infty} F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(u) du. \quad (3.3)$$

Das  $n$ -te Moment  $\langle u^n \rangle$  von  $U$  ist definiert als:

$$\langle u^n \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} u^n p(u) du. \quad (3.4)$$

Das erste Moment wird auch *Erwartungswert* von  $U$  genannt und oft mit  $E(U)$  bezeichnet. Die Größe  $\mu_n$ ,

$$\mu_n = \int_{-\infty}^{+\infty} (u - E(U))^n p(u) du, \quad (3.5)$$

heißt  $n$ -tes zentrales Moment von  $U$ . Das erste zentrale Moment ist per Definition Null, das zweite wird als *Varianz* von  $U$  bezeichnet. Die Wurzel der Varianz ist die *Standardabweichung*  $\sigma$  der Zufallsvariablen.

Es lässt sich zeigen, dass die Kenntnis aller Momente  $\langle u^n \rangle$  äquivalent ist zur Kenntnis der Wahrscheinlichkeitsdichte  $p(u)$ . Man definiert hierzu die Fouriertransformierte der Dichte  $p(u)$ , die sogenannte *charakteristische Funktion*  $f(t)$ :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(u) e^{iut} du. \quad (3.6)$$

Die Existenz des  $n$ -ten Moments vorausgesetzt gilt für die  $n$ -te Ableitung der charakteristischen Funktion:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n}{\partial t^n} f(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} p(u) \frac{\partial}{\partial t^n} e^{iut} du \\ &= i^n \int_{-\infty}^{+\infty} u^n p(u) e^{iut} du. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Dieser Ausdruck kann an der Stelle  $t = 0$  leicht berechnet werden:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^n}{\partial t^n} f(t) \right|_{t=0} &= i^n \int_{-\infty}^{+\infty} u^n p(u) 1 du \\ &= i^n \langle u^n \rangle. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Bei Kenntnis aller Momente einer Zufallsvariablen  $U$  ist es daher möglich, die charakteristische Funktion  $f(t)$  in einer Taylor-Reihe um  $t = 0$  zu entwickeln. Aus  $f(t)$  wiederum lässt sich über eine Fouriertransformation die Dichte  $p(u)$  berechnen.

Die wohl bekannteste Wahrscheinlichkeitsdichte ist die Gauß- oder Normalverteilung

$$p(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(u-a)^2}{2\sigma^2}\right). \quad (3.9)$$

Sie ist durch ihren Erwartungswert  $a$  und ihre Standardabweichung  $\sigma$  vollständig charakterisiert. Ihre besondere Bedeutung erhält die Normalverteilung aus dem *zentralen Grenzwertsatz*. Dieser besagt insbesondere, dass die Summe  $U_n$  von  $n$  unabhängigen Zufallsgrößen  $X_n$  im Limes großer  $n$  normalverteilt ist, vorausgesetzt alle  $X_n$  haben dieselbe (beliebige) Verteilung sowie endliche erste und zweite Momente [20] (siehe Gleichung (3.16) zur Definition der statistischen Unabhängigkeit).

Besteht zwischen zwei Zufallsvariablen  $U$  und  $X$  ein eindeutiger funktionaler Zusammenhang, so kann aus der Wahrscheinlichkeitsdichte  $p(u)$  gemäß

$$p(x) = p(u(x)) \frac{du}{dx} \quad (3.10)$$

die Dichte  $p(x)$  der Zufallsvariablen  $X$  berechnet werden. Dieser Zusammenhang kann recht einfach mit Hilfe der Normierungsbedingung (3.3) verstanden werden:

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} p(u) du = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{p(u(x)) \frac{du}{dx}}_{p(x)} dx. \quad (3.11)$$

Mehrere Zufallsvariablen  $U_1, U_2, \dots, U_N$  können durch eine gemeinsame Verteilungsfunktion  $F(u_1, u_2, \dots, u_N)$  beschrieben werden:

$$F(u_1, u_2, \dots, u_N) = W(U_1 < u_1, U_2 < u_2, \dots, U_N < u_N). \quad (3.12)$$

Analog zu (3.2) kann eine  $N$ -dimensionale Wahrscheinlichkeitsdichte  $p(u_1, u_2, \dots, u_N)$  definiert werden:

$$F(u_1, u_2, \dots, u_N) = \int_{-\infty}^{u_1} \int_{-\infty}^{u_2} \dots \int_{-\infty}^{u_N} p(u'_1, u'_2, \dots, u'_N) du'_1 du'_2 \dots du'_N. \quad (3.13)$$

Die Normierungsbedingung lautet in diesem Fall

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} p(u_1, u_2, \dots, u_N) du_1 du_2 \dots du_N. \quad (3.14)$$

Die Dichte einer der Zufallsvariablen lässt sich aus der  $N$ -dimensionalen Dichte durch einfache Integration über die restlichen  $N - 1$  Variablen berechnen. So gilt z.B. für  $p(u_1)$ :

$$p(u_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} p(u_1, u_2, \dots, u_N) du_2 \dots du_N. \quad (3.15)$$

Die Zufallsvariablen  $U_1, U_2, \dots, U_N$  heißen *statistisch unabhängig*, wenn ihre gemeinsame Dichte faktorisiert:

$$p(u_1, u_2, \dots, u_N) = p(u_1) p(u_2) \dots p(u_N). \quad (3.16)$$

Ein ebenfalls häufig verwendeter Begriff zur Charakterisierung der gegenseitigen Abhängigkeiten zweier Zufallsvariablen  $U_i$  und  $U_j$  ist ihre *Kovarianz* oder *Korrelation*  $R_{ij}$ :

$$R_{ij} = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} (u_i - E(U_j)) (u_j - E(U_j)) p(u_1, u_2, \dots, u_N) du_1 du_2 \dots du_N. \quad (3.17)$$

$U_i$  und  $U_j$  heißen *unkorreliert*, wenn ihre Kovarianz Null ist. Aus der statistischen Unabhängigkeit zweier Zufallsgrößen folgt Unkorreliertheit, der Umkehrschluß gilt aber im allgemeinen nicht.

Aus der gemeinsamen Dichte zweier Zufallsvariablen kann die *bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte* definiert werden:

$$p(u_1|u_2) = \frac{p(u_1, u_2)}{p(u_2)}. \quad (3.18)$$

Die bedingte Dichte  $p(u_1|u_2)$  misst die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Zufallsvariable  $U_1$  einen bestimmten Wert annimmt, unter der Voraussetzung, dass der Wert  $u_2$  für die Größe  $U_2$  bekannt ist. Sind  $U_1$  und  $U_2$  unabhängig, so faktorisiert  $p(u_1, u_2)$ , und die bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte  $p(u_1|u_2)$  ist gleich der eindimensionalen Dichte  $p(u_1)$ .

Im streng mathematischen Sinn muss zwischen einer Zufallsvariablen  $U$  und den Werten  $u$ , die sie annehmen kann, unterschieden werden. Diese Trennung wird im folgenden allerdings nicht aufrecht erhalten werden; so werden z.B. die Dichten der turbulent fluktuierenden Geschwindigkeit  $\vec{v}$  vereinfachend mit  $p(\vec{v})$  bezeichnet.

### 3.2.2 Stationarität, Homogenität und Isotropie

Alle in den folgenden Kapiteln besprochenen Turbulenzmodelle behandeln den Spezialfall stationärer, homogener und isotroper Strömungen. Die mit diesen Einschränkungen einhergehenden Vereinfachungen sollen hier kurz dargestellt werden.

Aufgrund der angenommenen Stationarität des Geschwindigkeitsfeld  $\vec{w}(\vec{x}, t)$  hängt der Mittelwert  $\vec{W}(\vec{x}) = \langle \vec{w}(\vec{x}, t) \rangle$  nicht von der Zeit ab (der Mittelwert  $\langle \dots \rangle$  ist hierbei das Ergebniss einer Ensemblemittelung). Für die hier untersuchten statistischen Eigenschaften turbulenter Geschwindigkeitsfluktuationen bedeutet es daher keine Einschränkung, wenn man anstelle des Geschwindigkeitsvektors  $\vec{w}$  nur seinen fluktuierenden Anteil  $\vec{v}(\vec{x}, t)$  betrachtet:

$$\vec{v}(\vec{x}, t) = \vec{w}(\vec{x}, t) - \vec{W}(\vec{x}). \quad (3.19)$$

Aus der Definition (3.19) der Geschwindigkeitsfluktuationen folgt sofort, dass der Mittelwert von  $\vec{v}(\vec{x}, t)$  verschwindet.

Die Statistik des Geschwindigkeitsfeldes  $\vec{v}(\vec{x}, t)$  kann als vollständig erfasst gelten, wenn eine allgemein gültige Beschreibung für den Korrelationstensor von  $N$  Komponenten des Geschwindigkeitsvektors an  $M$  verschiedenen Orten, die sogenannte  $M$ -Punkt-Korrelation  $N$ -ter Stufe, gefunden ist [11, 74]. Der erste Schritt

in diese Richtung besteht darin, eine Beschreibung der Korrelation zwischen jeweils einer Komponente der Geschwindigkeit an zwei verschiedenen Orten zu finden. Die Elemente  $R_{ij}$  dieses Zweipunktkorrelationstensors zweiter Stufe sind im allgemeinen Fall definiert als

$$R_{ij}(\vec{x}, \vec{r}, t, \tau) = \langle v_i(\vec{x}, t) v_j(\vec{x} + \vec{r}, t + \tau) \rangle. \quad (3.20)$$

Da das Geschwindigkeitsfeld  $\vec{v}(\vec{x}, t)$  stationär sein soll, hängt  $\mathbf{R}$  nicht von der Zeit ab. Homogenität bedeutet, dass  $\mathbf{R}$  invariant gegen Translation im Raum ist, d.h. unabhängig von der Wahl des Ortsvektors  $\vec{x}$ . Aufgrund der angenommenen Isotropie schließlich ist  $\mathbf{R}$  auch unabhängig von der räumlichen Lage des Verschiebungsvektors  $\vec{r}$ , also lediglich eine Funktion des Betrages  $r$  von  $\vec{r}$ :

$$R_{ij}(\vec{x}, \vec{r}, t, \tau) = R_{ij}(r, \tau). \quad (3.21)$$

Man beschränkt sich zudem meist auf räumliche Korrelationen, setzt die zeitliche Verschiebung  $\tau$  also konstant gleich Null:

$$R_{ij}(r) = R_{ij}(r, \tau = 0). \quad (3.22)$$

Legt man das Koordinatensystem so, dass  $x_1$  in Richtung des Verschiebungsvektors  $\vec{r}$  zeigt, so diagonalisiert  $\mathbf{R}$ :  $R_{ij, i \neq j} = 0$  [60]. Die Diagonalelemente  $R_{ii}$  werden auch als Autokorrelationsfunktionen der entsprechenden Geschwindigkeitskomponente bezeichnet. Man unterscheidet zwischen der Autokorrelation  $R_{ll}$  der Geschwindigkeitskomponente in Richtung von  $\vec{r}$  (longitudinale Komponente) und den Autokorrelationen  $R_{tt}$  der beiden Komponenten senkrecht zu  $\vec{r}$  (transversale Komponenten). Aufgrund der Isotropie sind die Autokorrelationen der beiden transversalen Komponenten identisch.

Aus der Kontinuitätsgleichung (2.2) kann überdies eine Beziehung zwischen den Autokorrelationsfunktionen der longitudinalen und transversalen Geschwindigkeitskomponente hergeleitet werden [60]:

$$R_{tt}(r) = R_{ll}(r) + \frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial r} R_{ll}(r). \quad (3.23)$$

Der erste Schritt bei Untersuchungen zur voll entwickelten Turbulenz wird also darin bestehen, eine Beschreibung für die Autokorrelationsfunktionen zu finden. Gleichung (3.23) sagt aus, dass es dabei genügt, eine der beiden Komponenten (longitudinal oder transversal) zu betrachten. Sowohl aus theoretischen (siehe Kapitel 3.2.3) als auch aus experimentellen Gründen (siehe Kapitel 5) wählt man üblicherweise die longitudinale Komponente. Es sei aber ausdrücklich darauf hingewiesen, dass diese Vereinfachung nur bei der Diskussion der Autokorrelationsfunktionen zulässig ist; für Zweipunktkorrelationen höherer Ordnung sowie N-Punkt-Korrelationsfunktionen gibt es keinen allgemeinen Zusammenhang der Form (3.23), und es müssen sowohl die transversalen als auch die longitudinalen Komponenten berücksichtigt werden.

Im Folgenden soll die longitudinale Komponente der Geschwindigkeitsfluktuationen  $\vec{v}(\vec{x}, t)$  mit  $v_l(\vec{x}, t)$  bezeichnet werden, ihre Autokorrelationsfunktion mit  $R(r)$ . Es ist zudem üblich, die Korrelationen zu normieren:

$$R(r) = \frac{\langle v_l(\vec{x}, t) v_l(\vec{x} + \vec{r}, t) \rangle}{\langle v_l^2(\vec{x}, t) \rangle}. \quad (3.24)$$

Mit dieser Normierung gilt  $-1 \leq R(r) \leq 1$ . Bei  $R = 1$  spricht man von totaler Korrelation, den Fall  $R = -1$  bezeichnet man als totale Antikorrelation und bei  $R = 0$  spricht man von Unkorreliertheit der beiden Größen  $v_l(\vec{x}, t)$  und  $v_l(\vec{x} + \vec{r}, t)$ . Für  $r = 0$  folgt aus der Definition (3.24) unmittelbar  $R(0) = 1$ , im Grenzfall sehr großer Skalen  $r$  geht die Autokorrelation turbulenter Geschwindigkeitsfelder dagegen gegen Null.

Eine ebenfalls häufig verwendete Größe zur Charakterisierung des turbulenten Geschwindigkeitsfeldes  $\vec{v}(\vec{x}, t)$  ist das Wellenzahlspektrum  $E(k)$ , d.h. das Betragsquadrat der räumlichen Fouriertransformierten von  $\vec{v}(\vec{x}, t)$ .  $E(k)$  seinerseits hängt mit der Aurokorrelationsfunktion  $R(r)$  wiederum über eine Fouriertransformation zusammen [85]. Die Korrelationsanalyse ist also äquivalent zur Analyse des Wellenzahlspektrums.

### 3.2.3 Das Geschwindigkeitsinkrement

Anstelle der Korrelationsfunktionen wird in der Turbulenz meist das longitudinale Geschwindigkeitsinkrements  $u(r)$  untersucht:

$$\begin{aligned} u(r) &= \vec{e}_{\vec{r}} \cdot (\vec{v}(\vec{x} + \vec{r}, t) - \vec{v}(\vec{x}, t)) \\ &= v_l(\vec{x} + \vec{r}, t) - v_l(\vec{x}, t). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Aufgrund der Homogenität, der Isotropie und der Stationarität des Geschwindigkeitsfeldes hängt die Statistik des Inkrements  $u$  nur vom Betrag  $r$  des Verschiebungsvektors  $\vec{r}$  ab und ist unabhängig von der Wahl des Referenzpunktes  $\vec{x}$ , der Richtung  $\vec{e}_{\vec{r}}$  des Verschiebungsvektors  $\vec{r}$  sowie der Zeit  $t$ .

Der klassische Ansatz zur Charakterisierung der Statistik des Geschwindigkeitssinkrements [58, 59] besteht in der Analyse seiner Momente  $\langle u(r)^n \rangle$ , die auch als Strukturfunktionen  $n$ -ter Ordnung bezeichnet werden:

$$S_u^n(r) = \langle u(r)^n \rangle = \langle (v_l(\vec{x} + \vec{r}, t) - v_l(\vec{x}, t))^n \rangle. \quad (3.26)$$

Die Beschreibung des turbulenten Feldes durch Strukturfunktionen  $S_u^n(r)$  ist äquivalent zum Korrelationsansatz. Am Beispiel der Strukturfunktion zweiten Grades, die in einfachem Zusammenhang zur Autokorrelation steht, ist dies leicht zu sehen:

$$\begin{aligned} S_u^2(r) &= \langle (v_l(\vec{x} + \vec{r}, t) - v_l(\vec{x}, t))^2 \rangle \\ &= \langle v_l^2(\vec{x} + \vec{r}, t) \rangle - 2 \langle v_l(\vec{x} + \vec{r}, t) v_l(\vec{x}, t) \rangle + \langle v_l^2(\vec{x}, t) \rangle \\ &= 2 \langle v_l^2 \rangle - 2 \langle v_l(\vec{x} + \vec{r}, t) v_l(\vec{x}, t) \rangle \\ &= 2 \langle v_l^2 \rangle (1 - R(r)). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Analog lassen sich Strukturfunktionen höherer Ordnung in Zweipunktkorrelationen höherer Stufe umrechnen.

Eine Sonderstellung kommt der Strukturfunktion dritten Grades zu. Für sie kann aus der Navier–Stokes–Gleichung eine exakte Beziehung abgeleitet werden, die sogenannte Kolmogorov–Karman–Howarth–Gleichung, oder kurz Kolmogorovsches 4/5-Gesetz. Es lautet (in homogener, isotroper und stationärer Turbulenz) [60]:

$$S_u^3(r) = -\frac{4}{5} \bar{\epsilon} r + 6\nu \frac{\partial}{\partial r} S_u^2(r). \quad (3.28)$$

$\bar{\epsilon}$  ist hierbei die mittlere Rate, mit der die kinetische Energie des Geschwindigkeitsfeldes dissipiert wird (siehe dazu auch das folgenden Kapitel 3.3).

Neben der Beziehung zwischen den Autokorrelationen der longitudinalen und transversalen Geschwindigkeitskomponente (3.23) ist das 4/5-Gesetz das (bisher) einzige exakte, d.h. aus der Navier-Stokes-Gleichung abgeleitete, Ergebnis für die Strukturfunktionen. Für große Skalen  $r$  dominiert der erste Term auf der rechten Seite von Gleichung (3.28), und die Strukturfunktion dritter Ordnung wird näherungsweise linear in  $r$ :

$$S_u^3(r) \approx -\frac{4}{5}\bar{\epsilon}r. \quad (3.29)$$

Die Statistik des Geschwindigkeitsinkrements  $u(r)$  kann anstatt über die Strukturfunktionen auch über seine Wahrscheinlichkeitsdichte beschrieben werden. Die Dichte des Inkrements  $u(r)$  wird im folgenden mit  $p(u, r)$  bezeichnet werden, was streng genommen nicht korrekt ist. Die Längenskala  $r$  ist selbstverständlich keine Zufallsvariable, sondern ein Parameter, und dürfte dementsprechend nicht als Argument einer Wahrscheinlichkeitsdichte auftauchen. Andererseits hängt die Dichte von  $u(r)$  entscheidend vom Wert von  $r$  ab (siehe Abbildung 5.6), ist also eine Funktion von  $r$ . Genau diesem Umstand soll durch die Schreibweise  $p(u, r)$  Rechnung getragen werden.

### 3.3 Das Kaskadenmodell nach Richardson

Den weitaus meisten Theorien zur Turbulenz liegt das Kaskadenmodell von L.F. Richardson (1922) zugrunde [94]. Es basiert auf der Annahme, dass sich eine turbulente Strömung aus Elementen (Wirbeln) verschiedener Größenordnungen zusammengesetzt denken lässt, die aufgrund der Nichtlinearität der Navier-Stokes-Gleichung instabil sind und zerfallen. Beim Zerfall eines solchen Wirbels oder Turbulenzelements geht die in ihm enthaltene kinetische Energie an die entstehenden Tochterwirbel über. Die Reynoldszahl sei dabei so hoch, dass der Einfluss des Dissipationsterms zunächst vernachlässigt werden kann. Die Energie des zerfallenden Wirbels geht dann komplett auf die entstehenden Wirbel über. Diese sind nun ebenfalls instabil und zerfallen ihrerseits in noch kleinere Strukturen. Dieser Prozess setzt sich fort bis hin zu einer charakteristischen kleinsten Länge, der sog. Kolmogorovschen Dissipationslänge  $\eta$ , auf der die Reibung dominiert und die kinetische Energie dissipiert wird.

Angetrieben wird die sog. turbulente Kaskade von den externen Kräften  $\vec{f}$  in der Navier-Stokes-Gleichung (2.1). Diese verursachen großräumige Strukturen einer typischen Skala  $L$  und führen dem System auf diese Weise kinetische Energie zu. Die daraufhin einsetzende Kaskade transportiert diese Energie zu kleineren Strukturen hin ab und sorgt so für ein Fließgleichgewicht zwischen der auf der grössten Skala  $L$  zugeführten und der auf der kleinsten Skala  $\eta$  dissipierten Energie. Die Rate, mit der ein zerfallender Wirbel seine Energie an die Tochterwirbel weitergibt, ist also gleich der Rate  $\epsilon(\vec{x}, t)$ , mit der auf der Skala  $\eta$  Energie dissipiert wird. Dementsprechend wird zwischen den beiden Raten nicht unterschieden, für beide ist die Bezeichnung *Energiedissipationsrate* gebräuchlich.

Die aus der Navier–Stokes–Gleichung folgende Gleichung für die Energiebilanz des Strömungsfeldes liefert für die Energiedissipationsrate den folgenden Ausdruck [60, 74, 85]:

$$\epsilon(\vec{x}, t) = \frac{\nu}{2} \sum_{i,j=1}^3 \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)^2. \quad (3.30)$$

Um die Energiedissipationsrate gemäß ihrer Definition (3.30) berechnen zu können, müssen die Ableitungen aller Komponenten des Geschwindigkeitsfeldes nach allen Raumrichtungen bekannt sein. Eine experimentelle Bestimmung aller neun Ableitungen  $\partial_i u_j$  des Geschwindigkeitsfeldes ist aber nur mit sehr hohem Aufwand möglich [56, 44].

In homogenen und isotropen Geschwindigkeitsfeldern kann die Energiedissipationsrate näherungsweise aber auch aus einem eindimensionalen Schnitt durch dieses Feld berechnet werden. Dieses in der Literatur oft auch „Energiesurrogat“ genanntes Dissipationsfeld berechnet sich zu [85]:

$$\epsilon(x, r) = 15 \nu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right)^2, \quad (3.31)$$

wobei die Wahl der Komponenten  $i$  in isotroper Turbulenz beliebig ist. Die Verwendung des Surrogats hat sich in der Literatur weitgehend durchgesetzt und wird allgemein akzeptiert (siehe z.B. [78, 77, 72]). Es sei aber auch erwähnt, dass Untersuchungen an Daten aus direkten numerischen Simulationen signifikante Unterschiede zwischen der nach (3.30) definierten Dissipationsrate und ihrem gemäß (3.31) bestimmten Surrogat ergeben [52]. Andererseits wurde auch argumentiert [106], dass die in [52] beobachteten Abweichungen zwischen beiden Raten klein sind gegen die im Experiment üblicherweise auftretenden Messfehler.

Das Bild der turbulenten Kaskade motiviert die Wahl einiger charakteristischer Längenskalen, die den Gültigkeitsbereich des Modells eingrenzen. Die obere Grenze für den Bereich relevanter Längenskalen ist durch die Korrelationslänge oder *integrale Längenskala*  $L$  gegeben:

$$L = \int_0^{+\infty} R(r) dr. \quad (3.32)$$

$L$  ist ein Maß dafür, wie schnell die Autokorrelation mit wachsender Skala  $r$  auf Null abfällt (für exponentiell abfallende Autokorrelationsfunktionen etwa gilt  $R(L) = 1/e$ ).  $L$  kann daher anschaulich als die typische Abmessung des größten einheitlich bewegten Flüssigkeitsvolumens, also des größten Wirbels, interpretiert werden. Tatsächlich zeigt sich im Experiment, dass die Größenordnung der nach Gleichung (3.32) definierten integralen Länge mit der Skala der die Kaskade treibenden externen Kräfte übereinstimmt [64, 90, 41].

Die Kolmogorovsche Dissipationslänge  $\eta$  kann durch eine Dimensionsanalyse abgeschätzt werden. In diese Analyse geht neben der mittleren Energiedissipationsrate  $\bar{\epsilon}$  nur noch die kinematische Viskosität  $\nu$  ein, da der Mechanismus der Dissipation dem Modell zufolge nicht vom Antrieb der Kaskade auf großer Skala abhängt. Die

SI-Einheit Energiedissipationsrate  $\epsilon$  ist  $m^2/s^3$ , die der kinematischen Viskosität  $\nu$  ist  $m^2/s$ . Für  $\eta = \eta(\bar{\epsilon}, \nu)$  ergibt sich daher:

$$\eta = \left( \frac{\nu^3}{\bar{\epsilon}} \right)^{1/4}. \quad (3.33)$$

Die Dissipation hat allerdings bereits auf größeren Skalen als der Kolmogorovschen einen merklichen Einfluss auf die Statistik des Geschwindigkeitsinkrements. Dieser Einfluss zeigt sich unter anderem auch in der Autokorrelationsfunktion  $R(r)$ , die auch auf Skalen grösser als der Dissipationslänge  $\eta$  eine negative Krümmung aufweist. Diese negative Krümmung wird durch die gängigen (in Kapitel 3.4 diskutierten) Kaskadenmodelle nicht erklärt und kann dem Einfluss der Dissipation zugerechnet werden [41, 85].

Um ein Maß dafür zu erhalten, wie weit der Einfluss der Dissipation reicht, entwickelt man  $R(r)$  in einer Taylorreihe um  $r = 0$  und definiert so die *Taylorlänge*  $\lambda$ :

$$R(r) \approx 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{r}{\lambda} \right)^2. \quad (3.34)$$

(Der lineare Term der Taylorentwicklung verschwindet wegen  $R(-r) = R(r)$ .) Die drei charakteristischen Längenskalen  $\eta$ ,  $\lambda$  und  $L$  teilen den Bereich von Skalen  $r$  in deutlich voneinander verschiedene Bereiche ein.

Taylor skala  $\lambda$  und integrale Länge  $L$  bilden die Grenzen des sogenannten *Inertialbereichs*. Innerhalb dieses Bereichs sollten dem Kaskadenmodell zufolge sowohl die Einflüsse der externen, die Kaskade antreibenden Kräfte als auch der Einfluss der molekularen Dissipation vernachlässigt werden können. Das Geschwindigkeitsfeld sollte daher auf Skalen innerhalb des Inertialbereichs ausschliesslich vom Mechanismus des Energietransfers zwischen Wirbeln verschiedener Längenskalen bestimmt sein. Hin zu kleineren Skalen schließt sich, im Intervall  $\eta \leq r \leq \lambda$ , der sogenannte *Dissipationsbereich* an. Hier dominiert der Einfluss der Dissipation, was sich u. a. in einer im Vergleich zum Inertialbereich deutlich unterschiedlichen Abhängigkeit der Strukturfunktionen von der Skala  $r$  bemerkbar macht (vergleiche Abbildung 5.5).

Die Taylorsche Längenskala  $\lambda$  wird auch zur Definition der sog. Taylor-Reynoldszahl  $R_\lambda$  verwendet. In diese gehen neben  $\lambda$  noch die Standardabweichung  $\sigma$  der Geschwindigkeitsfluktationen und die Viskosität  $\nu$  ein:

$$R_\lambda = \frac{\lambda \sigma}{\nu}. \quad (3.35)$$

Der Vorteil der Definition (3.35) ist, dass sie ausschliesslich auf intrinsischen Größen der betrachteten Strömung basiert und nicht von der Wahl einer durch die äusseren Randbedingungen gegebenen (und damit nicht universellen) Längen- bzw. Geschwindigkeitsskala abhängt. Ergebnisse aus unterschiedlichen Turbulenzexperimenten (wie etwa Freistrah, Zylinder- oder Gitternachlauf) werden daher meist mithilfe der Taylor-Reynoldszahl verglichen. In allen genannten Experimenten findet man einen Zusammenhang der Form

$$R_\lambda \propto \sqrt{Re}, \quad (3.36)$$

wobei die Proportionalitätskonstante jeweils in der Größenordnung von eins ist [64, 85, 90].

## 3.4 Skalierungsanalysen

### 3.4.1 Kolmogorov 1941

Die erste Theorie zur Statistik der vollentwickelten, homogenen, isotropen und stationären Turbulenz stammt von A. N. Kolmogorov aus dem Jahr 1941 [58]. Ausgehend vom Bild der Kaskade nahm er an, dass die Statistik des Geschwindigkeitsinkrements für Skalen  $r$  kleiner als der integralen Länge  $L$  außer von der Skala  $r$  selbst nur noch von der Energietransferrate  $\epsilon$  und der kinematischen Viskosität  $\nu$  abhängen (erste lokale Ähnlichkeitshypothesen):

$$S_u^n(r) = f(r, \epsilon, \nu). \quad (3.37)$$

Für Skalen  $r$ , die darüberhinaus auch groß sind im Vergleich zur Kolmogorovschen Dissipationslänge  $\eta$ , also für Skalen im Bereich  $\eta \ll r < L$ , kann überdies der Einfluss der Dissipation vernachlässigt werden (zweite lokale Ähnlichkeitshypothese). Es kann dann angenommen werden, dass die Strukturfunktionen nicht mehr von der Viskosität abhängen:

$$S_u^n(r) = f(r, \epsilon). \quad (3.38)$$

Aus einer einfachen Dimensionsanalyse folgt damit unter der Annahme einer konstanten Energietransferrate sofort

$$S_u^n(r) \sim \langle (\bar{\epsilon} r)^{\frac{n}{3}} \rangle \propto r^{\frac{n}{3}}. \quad (3.39)$$

In Übereinstimmung mit dem Kolmogorovschen 4/5-Gesetz (3.29) ergibt sich auch aus Gleichung (3.39) eine lineare Abhängigkeit der Strukturfunktion dritten Grades von  $r$ . Mit der Vorhersage für die  $r$ -Abhängigkeit der Strukturfunktion zweiten Grades folgt aus (3.27) für die Autokorrelationsfunktion der Zusammenhang:  $R(r) = 1 - cr^{2/3}$  (und damit zu der oben erwähnten positiven Krümmung für  $R(r)$ ). Für das Leistungsspektrum  $E(k)$ , das nichts anderes ist als die Fouriertransformierte der Autokorrelation, folgt [41, 85]:

$$E(k) \propto k^{-5/3} \quad (3.40)$$

Der Vergleich experimenteller Daten mit der Vorhersage (3.40) dient allgemein als erste Charakterisierung eines gemessenen turbulenten Datensatzes, siehe Abbildung 5.5.

### 3.4.2 Das Lognormal-Modell (Kolmogorov 1962)

Die einfache Vorhersage (3.39) des Kolmogorovschen Modells hält einer experimentellen Überprüfung nicht stand [2, 3, 41, 85]. Innerhalb des Inertialbereichs

$\lambda \leq r \leq L$  lassen sich die Strukturfunktionen  $S_u^n(r)$  zwar tatsächlich näherungsweise durch Potenzgesetze der Form

$$S_u^n(r) \propto r^{\zeta_n} \quad (3.41)$$

beschreiben, die experimentell bestimmten sog. *Skalensexponenten*  $\zeta_n$  stimmen jedoch nicht mit der Vorhersage  $\zeta_n = \frac{n}{3}$  nach Gleichung (3.39) überein.

Aber auch von theoretischer Seite ist Kolmogorovs Argumentation angreifbar [60, 79]. Die Kritik zielt insbesondere auf die Annahme einer konstanten Energietransferrate  $\epsilon$ . Ins Bild der turbulenten Kaskade übersetzt bedeutet dies, dass ein zerfallender Wirbel die in ihm enthaltene Energie zu gleichen Teilen an die entstehenden Tochterwirbel weitergibt. Sehr viel naheliegender ist dagegen die Annahme, dass ein zerfallender Wirbel seine Energie ungleichmäßig verteilt an die entstehenden kleinskaligen Turbulenzelemente weitergibt. Die Energiedissipationsrate  $\epsilon(\vec{x}, t)$  muss daher als räumlich variierende statistische Größe betrachtet werden.

Um den Einfluss der räumlichen Fluktuationen von  $\epsilon$  zu berücksichtigen, betrachtet man die über eine Kugel an der Stelle  $\vec{x}$  mit Radius  $r$  gemittelte Energiedissipationsrate  $\epsilon_r$ :

$$\epsilon_r(\vec{x}, t) = \frac{1}{V(r)} \int_{V(r)} \epsilon(\vec{x}, t) dV. \quad (3.42)$$

Eine analoge Dimensionsanalyse, wie sie auch zu Gleichung (3.39) führt, kann nun für die Strukturfunktion  $n$ -ten Grades durchgeführt werden:

$$S_u^n(r) \sim \left\langle (\epsilon_r r)^{\frac{n}{3}} \right\rangle \sim \left\langle \epsilon_r^{\frac{n}{3}} \right\rangle r^{\frac{n}{3}}. \quad (3.43)$$

Im allgemeinen gilt  $\left\langle \epsilon_r^{n/3} \right\rangle \neq \langle \epsilon_r \rangle^{n/3}$ , was die beobachtete Abweichung von dem nach K41 zu erwartenden linearen Verlauf der  $\zeta_n$  erklärt. Für  $n = 3$  allerdings gilt  $\left\langle \epsilon_r^{3/3} \right\rangle = \langle \epsilon_r \rangle = \bar{\epsilon} = \text{const}$  und man erhält die direkte Proportionalität von  $S_u^3$  zu  $r$ , wie sie vom Kolmogorovschen 4/5-Gesetz (3.29) gefordert wird.

Um den Erwartungswert  $\left\langle \epsilon_r^{n/3} \right\rangle$  berechnen zu können, muss die Wahrscheinlichkeitsdichte  $p(\epsilon_r)$  der gemittelten Energiedissipationsrate bekannt sein. Im Bild der turbulenten Kaskade kann man sich einen Wirbel der Größe  $r$  als das Ergebnis eines wiederholten Zerfalls größerer Wirbel denken, wobei der Bruchteil der an einen Tochterwirbel weitergegebenen Energie eine Zufallsvariable ist. Der Energieinhalt eines Wirbels der Größe  $r$ , der nach  $N$  Zerfällen aus einem Wirbel der Größe  $L$  entstanden ist, ergibt sich demnach als Produkt der Energie des ursprünglichen Wirbels und  $N$  unabhängiger Multiplikatoren. Der Logarithmus des Energieinhalts eines solchen Wirbels läßt sich dann als Summe der Logarithmen der ursprünglichen Energie und der  $N$  unabhängigen Zufallsvariablen darstellen. Diese Summe sollte nach dem zentralen Grenzwertsatz Gaußverteilt sein.

Diese Überlegungen motivieren die Annahme einer sog. Lognormalverteilung für die gemittelte Energiedissipationsrate  $\epsilon_r$  auf der Skala  $r$ :

$$p(\epsilon_r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \Lambda(r) \epsilon_r} \exp \left( - \frac{\left( \ln \left( \frac{\epsilon_r}{\bar{\epsilon}} \right) + \frac{\Lambda^2(r)}{2} \right)^2}{2 \Lambda^2(r)} \right). \quad (3.44)$$

$\Lambda(r)$  ist die skalenabhängige Standardabweichung der über  $r$  gemittelten Energiedissipationsrate,  $\bar{\epsilon} = \langle \epsilon_r \rangle$  ihr (konstanter) Mittelwert.

Für die  $r$ -Abhängigkeit von  $\Lambda(r)$  nahm Kolmogorov den folgenden Zusammenhang an [59]:

$$\Lambda(r)^2 \propto -\mu \ln(r). \quad (3.45)$$

Für den sogenannten *Intermittenzfaktor*  $\mu$  macht das Modell keine Vorhersage, sein Wert muss experimentell bestimmt werden. Aus (3.44) und (3.45) kann nun der Erwartungswert  $\langle \epsilon_r^{n/3} \rangle$  berechnet werden. Man erhält:

$$\langle \epsilon_r^{n/3} \rangle \propto r^{-\frac{\mu}{18}n(n-3)}. \quad (3.46)$$

Damit folgt aus (3.43) für die Strukturfunktionen

$$\begin{aligned} S_u^n(r) &\propto r^{\zeta_n} \\ \text{mit : } \quad \zeta_n &= \frac{n}{3} - \frac{\mu}{18}n(n-3). \end{aligned} \quad (3.47)$$

Fits der gemessenen Skalenexponenten  $\zeta_n$  gemäss dieser Gleichung beschreiben die experimentellen Ergebnisse in guter Näherung (vergleiche Kapitel 5.4) und ergeben für den Intermittenzfaktor  $\mu$  einen von der Reynoldszahl und dem konkreten experimentellen Aufbau unabhängigen Wert von etwa 0,26 [6]. Anstelle von  $\mu$  wird zur Charakterisierung der Intermittenz auch oft der Skalenexponent sechster Ordnung verwendet. Aus Gleichung (3.47) folgt für den Zusammenhang zwischen  $\zeta_6$  und dem Intermittenzfaktor:  $\zeta_6 = 2 - \mu$ .

Ein Problem bei der Untersuchung der Skalenexponenten ist allerdings, dass sie nur bis zur achten Ordnung zuverlässig bestimmt werden können. Momente höherer Ordnung werden von extrem grossen Werten von  $|u(r)|$  bestimmt, die bei den derzeit handhabbaren Datenmengen zu selten gemessen werden als dass sie eine sichere Aussagen über ihre Statistik erlaubten. In [82, 83, 92] wurde gezeigt, dass die Strukturfunktionen aus diesem Grund höchstens bis zur achten Ordnung bestimmt werden können.

Der überhaupt analysierbare Wertebereich von  $n$  ist also stark beschränkt. Es ist daher experimentell kaum zu entscheiden, ob das Lognormalmodell Kolmogorovs konkurrierenden Modellen wie etwa dem Log-Poisson-Modell von She und Leveque [99] vorzuziehen ist. Ein Hinweis darauf, dass K62 nicht streng gültig sein kann, ist die Tatsache, dass die Skalenexponenten  $\zeta_n$  für grosse  $n$  wieder abnehmen und schliesslich sogar negativ werden, was allgemein als unphysikalisch angesehen wird [41, 85, 67].

### 3.4.3 Extended Self-Similarity

Die direkte Bestimmung der Skalenexponenten  $\zeta_n$  aus den gemessenen Strukturfunktionen  $S_u^n(r)$  erweist sich in der Praxis als schwierig. Hierfür gibt es im Wesentlichen zwei Gründe: Zum einen erstreckt sich der Bereich von Skalen, in dem sich die Strukturfunktionen als Potenzgesetze in  $r$  beschreiben lassen, in typischen Laborexperimenten (d.h. bei Reynoldszahlen bis maximal  $10^6$ ) über kaum mehr als eine

Größenordnung, zum anderen finden sich selbst in diesem Bereich noch Abweichungen vom Skalenverhalten [90, 6].

Diese Schwierigkeiten umgeht das Verfahren der *extended self-similarity*, kurz ESS, nach Benzi [13]. Ausgangspunkt der folgenden Überlegungen ist das 4/5-Gesetz, demzufolge die Strukturfunktion dritter Ordnung linear in  $r$  sein sollte. Der Skalenexponent dritter Ordnung  $\zeta_3$  müsste demnach exakt gleich eins sein.

Die im realen Experiment beobachteten Abweichungen vom linearen Verhalten von  $S_u^3(r)$  kann man durch einen Korrekturterm  $f(r)$  beschreiben:

$$S_u^3(r) \propto (rf(r))^{\zeta_3} = (rf(r))^1. \quad (3.48)$$

Die zentrale Annahme der ESS ist nun, dass diese Abweichungen aufgrund experimenteller Unzulänglichkeiten bei allen Strukturfunktionen in ähnlicher Weise auftreten. Man postuliert einen Zusammenhang der Form

$$S_u^n(r) = c_n (rf(r))^{\zeta_n}. \quad (3.49)$$

Aus (3.49) folgt für zwei Strukturfunktionen der Ordnung  $n$  bzw.  $p$  sofort der Zusammenhang

$$S_u^n \propto (S_u^p)^{\frac{\zeta_n}{\zeta_p}}. \quad (3.50)$$

Die Logarithmen der Strukturfunktionen sollten demnach in linearem Zusammenhang stehen:

$$\ln(S_u^n) = \frac{\zeta_n}{\zeta_p} \ln(S_u^p) + const. \quad (3.51)$$

Dieser Zusammenhang ist experimentell gut erfüllt [6] und erlaubt eine exakte Bestimmung der relativen Skalenexponenten  $\zeta_n/\zeta_p$ . In der Praxis wählt man meist die Strukturfunktion dritten Grades als Bezugsgröße, bestimmt also die Skalenexponenten relativ zu  $p = 3$ , und erhält so wegen  $\zeta_3 = 1$  direkt die Skalenexponenten  $\zeta_n$ .

Problematisch ist hierbei allerdings, dass Strukturfunktionen ungerader Ordnung aus Datensätzen endlicher Länge nur sehr ungenau bestimmt werden können, da sich Beiträge positiver und negativer Fluktuationen teilweise gegenseitig aufheben und damit effektiv nur wenige Messpunkte zur Bestimmung der Momente beitragen. Es ist daher ein weit verbreitetes Vorgehen, anstelle der Strukturfunktionen ungerader Ordnung die Momente  $T_u^n(r) = \langle |u(r)|^n \rangle$  des Absolutbetrags der Geschwindigkeit sinkremente zu verwenden. Damit setzt man implizit voraus, dass die Momente des Absolutbetrags bis auf einen konstanten Faktor mit den Strukturfunktionen identisch sind [6, 13]. Das ist zwar über einen gewissen Bereich von Skalen in etwa tatsächlich erfüllt [68, 14], eine theoretische Motivation oder Begründung für diesen Zusammenhangs steht bislang aber noch aus [108]. Die in Kapitel 6.6.4 der vorliegenden Arbeit vorgestellten Ergebnisse belegen zudem, dass diese Übereinstimmung allenfalls näherungsweise gelten kann.

### 3.5 Die multiplikative Kaskade nach Castaing

Die in den vorhergehenden Kapitel vorgestellten Überlegungen können auf die Beschreibung der Wahrscheinlichkeitsdichten  $p(u, r)$  übertragen werden [23]. Das ein-

fache Skalenverhalten nach Kolmogorovs Theorie von 1941 entspricht dem Fall, dass die Inkremente  $u$  einer Gaußverteilung gehorchen, deren Standardabweichung  $\sigma$  mit  $r^{1/3}$  skaliert:  $\sigma(r) \propto r^{1/3}$ . Man verifiziert leicht, dass die Momente  $\langle u(r)^n \rangle$  in diesem Fall proportional zu  $r^{n/3}$  sind.

Da die Strukturfunktionen dieser einfachen Vorhersage nicht folgen, ist auch nicht zu erwarten, dass sich die Wahrscheinlichkeitsdichten  $p(u, r)$  durch Gaußverteilungen beschreiben lassen. In der Tat weisen die gemessenen Dichten mit kleiner werdender Skala  $r$  immer stärkere Abweichungen von der Gaußschen Form auf (siehe Abbildung 5.6). Das herausragendste Charakteristikum dieser Dichten sind ihre ausgeprägten Flügel, die eine im Vergleich zur Gaußverteilung sehr hohe Wahrscheinlichkeit für große Fluktuationen ausdrücken, ein Effekt, der in der Turbulenzforschung *Intermittenz* genannt wird.

Die Intermittenz hat, ebenso wie die nichtlineare Abhängigkeit der Skalenexponenten  $\zeta_n$  von  $n$ , ihren Ursprung in den Fluktuationen der Energiedissipationsrate. Deren Einfluss auf die Statistik von  $u(r)$  kann man berücksichtigen, indem man die Dichte  $p(u, r)$  unter Verwendung der bedingten Wahrscheinlichkeitsdichte  $p(u, r|\epsilon_r)$  darstellt:

$$p(u, r) = \int_0^{+\infty} p(u, \epsilon_r, r) d\epsilon_r = \int_0^{+\infty} p(u, r|\epsilon_r) p(\epsilon_r, r) d\epsilon_r. \quad (3.52)$$

Die grundlegende physikalische Aussage des Intermittenzmodells von B. Castaing besteht in der Annahme, dass die bedingten Dichten  $p(u, r|\epsilon_r)$  Gaußverteilungen sind, wobei die Standardabweichung  $s$  von der gemittelten Energiedissipationsrate  $\epsilon_r$  abhängt [23]:

$$p(u, r|\epsilon_r, r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} s(\epsilon_r)} \exp\left(-\frac{u^2}{2 s^2(\epsilon_r)}\right). \quad (3.53)$$

Diese Annahme ist im Rahmen der Kolmogorovschen Theorien naheliegend und konnte auch experimentell verifiziert werden [78]. Die gemittelten Energiedissipationsraten  $\epsilon_r$  werden, ebenfalls in Anlehnung an K62, als lognormalverteilt angenommen (vergl. Gleichung (3.44)). Für den Zusammenhang zwischen der Standardabweichung  $s$  der bedingten Dichten und der gemittelten Energiedissipationsrate  $\epsilon_r$  findet man experimentell ein Potenzgesetz [78]:

$$s(\epsilon_r) \propto \epsilon_r^\alpha. \quad (3.54)$$

Wegen  $\ln(s) \propto \alpha \ln(\epsilon_r)$  ist damit auch  $s$  lognormalverteilt. Aus den Gleichungen (3.44), (3.52), (3.53) und (3.54) folgt für die Wahrscheinlichkeitsdichte  $p(u, r)$ :

$$p(u, r) = \frac{1}{2\pi\lambda(r)} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\ln^2(s/s_0(r))}{2\lambda^2(r)}\right) \exp\left(-\frac{u^2}{2s^2}\right) \frac{d \ln s}{s}. \quad (3.55)$$

Die Dichte  $p(u, r)$  wird durch die zwei Parameter  $s_0(r)$  und  $\lambda^2(r)$  vollständig beschrieben.  $s_0(r)$  ist das Maximum der Dichte von  $s$  und bestimmt im wesentlichen

die Standardabweichung von  $p(u, r)$ . Die Varianz  $\lambda^2(r)$  der Lognormalverteilung für  $s$  wird auch *Formparameter* genannt und bestimmt die Form der Dichte  $p(u, r)$ . Die Bedeutung des Formparameters erschließt sich aus dem Grenzfall  $\lambda^2(r) \rightarrow 0$ . In diesem Fall geht die Lognormalverteilung in die  $\delta$ -Funktion über und das Integral in (3.55) liefert eine Gaußverteilung für  $p(u, r)$ . Dieser Fall wird für Skalen  $r$  oberhalb der integralen Länge  $L$  tatsächlich beobachtet (siehe Abbildung 5.6).

Auf kleineren Skalen hat  $\lambda^2$  Werte ungleich Null und  $p(u, r)$  stellt sich gemäß der Castaing-Formel (3.55) als Überlagerung von Gaußverteilungen unterschiedlicher Standardabweichungen dar. Diese Überlagerungen weisen die für die Turbulenz typische intermittente Form auf (siehe Abbildung 5.6).

Obwohl die Überlegungen zu ihrer Herleitung stark an Kolmogorov angelehnt sind, hat die Castaing-Formel den Vorteil, im Gegensatz zu den Theorien Kolmogorovs kein Skalenverhalten der Strukturfunktionen vorauszusetzen. Es ist vielmehr möglich, durch Fits der gemessenen  $p(u, r)$  den Formparameter  $\lambda^2(r)$  und damit, über (3.54), auch die Standardabweichung  $\Lambda(r)$  von  $\epsilon_r$  zu bestimmen. Man findet (siehe Abbildung 5.6), dass sich die so bestimmten Formparameter  $\lambda^2(r)$  innerhalb des Inertialbereichs sehr viel besser durch Potenzgesetze in  $r$  als durch die von Kolmogorov geforderte logarithmische Abhängigkeit darstellen lassen. Damit stehen die Ergebnisse der Castaing-Analyse im Widerspruch zum postulierten Skalenverhalten der Strukturfunktionen, denn die Annahme eines linearen Zusammenhangs zwischen  $\Lambda^2(r)$  und dem Logarithmus der Skala  $r$  ist (siehe Kapitel 3.4.2) eine wesentliche Voraussetzung dafür, trotz der Intermittenzkorrekturen ein Skalenverhalten der Strukturfunktionen zu erhalten.

Die Castaing-Formel weist allerdings den gravierenden Nachteil auf, in ihrem Argument  $u$  symmetrisch zu sein:  $p(u, r) = p(-u, r)$ . Alle ungeraden Momente dieser Verteilung sind daher gleich Null, was im Widerspruch sowohl zum 4/5-Gesetz als auch zu den experimentellen Beobachtungen steht. In [23] wurde ein zusätzlicher empirischer Term eingeführt der es erlaubt, auch asymmetrische Verteilungen korrekt zu beschreiben. Eine theoretische Herleitung des sog. Asymmetrieterms existiert allerdings bislang nicht.

Auf einer abstrakteren Ebene kann der Ansatz Castaings als multiplikatives Kaskadenmodell interpretiert werden, bei dem das Geschwindigkeitsinkrement  $u_1$  auf der (kleinen) Skala  $r_1$  über einen zufälligen Multiplikator  $\alpha_{12}$  mit dem Inkrement  $u_2$  auf der größeren Skala  $r_2$  verbunden ist:

$$u_1 = \alpha_{12} u_2. \quad (3.56)$$

Die Multiplikatoren  $\alpha_{12}$  werden als statistisch unabhängig von den Inkrementen angenommen. Für die Dichte  $p(u_1, r_1)$  gilt dann [24]

$$p(u_1, r_1) = \int_{-\infty}^{\infty} G_{12}(\ln \alpha) p\left(\frac{u_1}{\alpha}, r_2\right) \frac{d \ln \alpha}{\alpha}, \quad (3.57)$$

wobei  $G_{12}$  die Dichte der Multiplikatoren  $a_{12}$  ist. Auf der integralen Skala  $L$  sind die Geschwindigkeitsinkremente näherungsweise normalverteilt (s.o.) und (3.57) beschreibt für  $r_2 = L$ , ähnlich wie (3.55), eine Überlagerung verschieden breiter Gauß-

verteilungen. Die Formulierung (3.56) hat aber den Vorteil, über

$$\langle \alpha_{12}^p \rangle = \left\langle \left( \frac{u_1}{u_2} \right)^p \right\rangle \quad (3.58)$$

eine direkte Untersuchung der Momente der Dichte  $G_{12}$  zu ermöglichen. Entsprechende experimentelle Untersuchungen des dritten Moments von  $G_{12}$  haben signifikante Abweichungen von der Lognormalverteilung [68] ergeben.

### 3.6 Weiterführende Ansätze

Ein vor allem im Zusammenhang mit der in den folgenden Kapiteln diskutierten Markowanalyse interessanter theoretischer Ansatz zur voll entwickelten Turbulenz ist der von A. M. Polykov verfolgte feldtheoretische Zugang [84]. In der zitierten Arbeit wurde ein Verfahren vorgeschlagen, wie ausgehend von der eindimensionalen drucklosen Navier–Stokes–Gleichung (der sog. Burgers–Gleichung) Differentialgleichungen für die Evolution der Mehrpunktkorrelationsfunktionen des Geschwindigkeitsinkrements abgeleitet werden können. Die resultierenden Gleichungen sind aufgrund der Beiträge des Dissipationsterms nicht geschlossen (interessanterweise erweist sich die Behandlung des Advektionsterms als unproblematisch). Um die vom Dissipationsterm verursachten Probleme zu umgehen, betrachtet man nun wiederum den Grenzfall unendlich hoher Reynoldszahlen bzw. verschwindender Viskosität. Hierbei kann der Dissipationsterm allerdings nicht einfach vernachlässigt werden, da er Singularitäten aufweist, die selbst nach der Multiplikation mit der verschwindenden Viskosität zu endlichen Beiträgen führen.

In [84] konnten die führenden Singularitäten des Dissipationsterms mit Hilfe der sog. *operator product expansion* abgeschätzt und die Gleichungen somit geschlossen werden. Dieser Ansatz wurde von V. Yakhot zur Bestimmung der Gleichung für die Dichten  $p(u, r)$  des longitudinalen Geschwindigkeitsinkrements aus der kompletten dreidimensionalen Navier–Stokes–Gleichung verallgemeinert [113]. Eine wesentliche Grundlage dieses Ansatzes ist die Annahme, dass für die Dichten des longitudinalen Geschwindigkeitsinkrements auch in dreidimensionaler Turbulenz eine geschlossene, d.h. vom transversalen Inkrement in erster Näherung unabhängige Gleichung existiert. Es zeigt sich, dass die von den äußeren Kräften bzw. der Dissipation stammenden Terme unter dieser Voraussetzung erfolgreich mit den in [84] entwickelten Methoden behandelt werden können. Allerdings ergeben sich durch den Druckterm zusätzliche Schwierigkeiten. Umgeht man diese, indem man annimmt, dass sich durch den Druckterm keine neuen Beiträge in der Gleichung für  $p(u, r)$  ergeben, sondern sich lediglich die Vorfaktoren der ohnehin bereits vorhandenen Terme ändern, so erhält man die folgende Gleichung für die Wahrscheinlichkeitsdichte des Geschwindigkeitsinkrements [113]:

$$-\frac{\partial}{\partial U} U \frac{\partial p(U, r)}{\partial r} + B \frac{\partial p(U, r)}{\partial r} = -\frac{A}{r} \frac{\partial}{\partial U} (U p(U, r)) + \frac{\sigma}{L} \frac{\partial^2}{\partial U^2} (U p(U, r)). \quad (3.59)$$

Hierbei ist  $U$  das dimensionsbehaftete, also nicht durch  $\sigma_\infty$  dividierte, Geschwindigkeitsinkrement. Dieses Modell weist die interessante Eigenschaft auf, als Parameter

die integrale Längenskala  $L$  und die Standardabweichung  $\sigma$  der (einpunkt-) Geschwindigkeitsfluktuationen  $v$  zu enthalten und damit Eigenschaften der die Kaskade treibenden äußeren Kräfte zu berücksichtigen. Während üblicherweise angenommen wird, dass  $\sigma$  lediglich die Skala der Geschwindigkeitsinkremente definiert, erhalten die äusseren Kräfte hier einen direkten Einfluss auf die Modellgleichung und damit natürlich auch auf die Form der Wahrscheinlichkeitsdichten  $p(U, r)$ .

Aus dem Kolmogorovschen 4/5-Gesetz folgt für die Koeffizienten  $A$  und  $B$  in (3.59) der Zusammenhang  $A = (3 + B)/3$ . In erster Näherung, d.h. unter Vernachlässigung des letzten Termes in Gleichung (3.59), folgt damit für die Skalenexponenten

$$\zeta_n = \frac{(3 + B)n}{3(n + B)}, \quad (3.60)$$

was mit  $B \approx 20$  mit den experimentellen Werten gut übereinstimmt. Auch die (numerischen) Lösungen der (vollständigen) Gleichung (3.59) finden sich in guter Übereinstimmung mit experimentellen Ergebnissen und zeigen die typischen Intermittenzeffekte auf kleinen Skalen [113].

Ein weiterer aktuell diskutierter Ansatz sind die von V. L'vov und I. Procaccia betriebenen Untersuchungen sogenannter *fusion rules* [65, 67]. Man betrachtet hierbei das Verhalten der Mehrpunktkorrelationsfunktionen

$$\mathbf{F}(\vec{x}_1, \vec{x}'_1; \vec{x}_2, \vec{x}'_2; \dots; \vec{x}_N, \vec{x}'_N) = \langle \vec{u}(\vec{x}_1, \vec{x}'_1) \vec{u}(\vec{x}_2, \vec{x}'_2) \dots \vec{u}(\vec{x}_N, \vec{x}'_N) \rangle \quad (3.61)$$

für den Fall, dass zwei oder mehrere Paare  $\vec{x}_i, \vec{x}'_i$  der Ortskoordinaten sich einander annähern (die Inkremente  $\vec{u}$  in Gleichung (3.61) sind als  $\vec{u}(\vec{x}_1, \vec{x}'_1) = \vec{v}(\vec{x}) - \vec{v}(\vec{x}')$  definiert).

In diese Betrachtungen gehen die Annahmen ein, dass  $\mathbf{F}$  für Skalen  $r_i = |\vec{x}_i - \vec{x}'_i|$  innerhalb des Inertialbereichs eine universelle funktionale Abhängigkeit von den  $r_i$  hat und außerdem eine homogene Funktion der Skalen  $r_i$  ist. In diesem Fall können für Systeme, in denen ein Fließgleichgewicht von Energie herrscht, weit reichende Aussagen über das Verhalten der Mehrpunktkorrelationen gemacht werden, die in manchen Fällen sogar eine Bestimmung der Skalenexponenten  $\zeta_n$  erlauben [65]. Für den konkreten Fall der Turbulenz wurde so eine Theorie entwickelt, mit der die Skalenexponenten  $\zeta_n$  in einem Parameter  $\delta$  entwickelt werden können [67]. Dieser Parameter ist von der Größenordnung der Anomalie des Skalenexponenten zweiter Ordnung, d.h.  $\delta \approx \zeta_2 - 2/3 \approx 0.03$ , ist also klein. Es konnte gezeigt werden, dass sich im Rahmen dieser Theorie als Näherung nullter Ordnung Skalenverhalten nach K41 ergibt und die Näherung erster Ordnung dem Lognormalmodell K62 entspricht. Die in [67] diskutierte Näherung zweiter Ordnung lautet

$$\zeta_n = \frac{n}{3} - \frac{n(n-3)}{2} \delta [1 + 2\delta(n-2)b], \quad (3.62)$$

wobei  $b$  negativ und betragsmäßig von der Größenordnung eins ist. Die Skalenexponenten nach Gleichung (3.62) weichen zwar erst für  $n \geq 8$  merklich von K62 ab [67], was die beiden Modelle experimentell fast ununterscheidbar macht (siehe Kapitel 3.4.2), haben aber den Vorteil, für große  $n$  nicht negativ zu werden.

Abschließend sei noch ein in jüngster Zeit verfolgter thermodynamischer Ansatz erwähnt, der auf dem Formalismus der nicht-extensiven statistischen Mechanik aufbaut [5, 12]. Ausgangspunkt dieser Überlegungen ist die von C. Tsallis vorgeschlagene verallgemeinerte Entropie  $S_q$  [110]

$$S_q = \frac{1}{q-1} \left( 1 - \sum p_i^q \right). \quad (3.63)$$

Hierbei ist  $q$  ein zunächst beliebiger reeller Parameter und  $p_i$  die Wahrscheinlichkeit für den durch sein Energielevel  $e_i$  charakterisierten Zustand  $i$  ist. Für  $q \rightarrow 0$  geht die nach (3.63) definierte Entropie in die gewöhnliche Gibbssche Entropie über.

Der einfachste Ansatz für ein solches Energielevel in der Turbulenz ist,  $e_i$  einfach mit der kinetischen Energie eines Wirbels der Längenskala  $r$  zu identifizieren und durch  $e_i = \frac{1}{2}u(r)^2$  abzuschätzen. Maximiert man die Entropie (3.63) mit diesen Energielevels unter der Randbedingung  $\sum p_i e_i = E$ , so erhält man den folgenden Ausdruck für  $p(u)$  [12]:

$$p(u) = \frac{1}{Z_q} \left( 1 + \frac{q-1}{2} \beta u^2 \right)^{\frac{-1}{q-1}}. \quad (3.64)$$

Die Zustandssumme  $Z_q$  ist für  $1 \leq q < 3$  definiert und kann explizit berechnet werden. Die inverse Temperatur  $\beta$  definiert die Geschwindigkeitsskala, d.h. die Standardabweichung von  $u(r)$ .

Diese Wahrscheinlichkeitsdichten zeigen einen Übergang von Gaußverteilungen für  $q \rightarrow 1$  hin zu intermittenten Verteilungen bei größeren Werten von  $q$ . Wählt man den Parameter  $q$  gemäß

$$k = \frac{1}{q-1} = 1 + \log_2 \frac{r}{\eta}, \quad (3.65)$$

so finden sich die resultierenden Dichten  $p$  in guter Übereinstimmung mit experimentell bestimmten Verteilungen;  $k$  kann daher als der Index einer binären Kaskade aufgefaßt werden, die bei  $r = \eta$  beginnt und bei der  $r$  in jedem Schritt verdoppelt wird [12].

# Kapitel 4

## Die Mathematik der Markowprozesse

### 4.1 Motivation

Aufgrund der Komplexität des Problems sind alle Modelle und Theorien zur voll entwickelten Turbulenz auf Annahmen angewiesen, die aus der Navier–Stokes–Gleichung allenfalls motiviert, nicht jedoch streng abgeleitet werden können. Das betrifft sowohl die auf dem Kaskadenmodell basierenden Modelle wie die von Kolmogorov oder Castaing als auch die in Kapitel 3.6 diskutierten, auf eine direkte Behandlung der Navier–Stokes–Gleichung zielenden Ansätze

Eine Möglichkeit, dieses Problem zu umgehen, ergibt sich aus der von R. Friedrich und J. Peinke in [37, 38] vorgeschlagenen Methode der Markowanalyse. Wie in diesen Artikeln gezeigt wurde, lässt sich mit Hilfe der Markowanalyse eine stochastische Modellierung experimenteller Daten ableiten, wobei die gewonnenen Ergebnisse ausschließlich auf mathematischen Aussagen beruhen, deren Gültigkeit empirisch überprüft werden kann. Das Geschwindigkeitsinkrement  $u$  wird dabei als eine stochastische Variable aufgefasst, die eine Entwicklung in der Skala  $r$  durchläuft. Gelingt es, den experimentellen Nachweis zu erbringen, dass dieser Prozess den mathematischen Voraussetzungen eines Markowprozesses genügt, so ist es möglich, die Entwicklung des Inkrements  $u$  in der Skala  $r$  durch eine partielle Differentialgleichung für die Wahrscheinlichkeitsdichte  $p(u, r)$  zu beschreiben. Es ist dann außerdem möglich, sämtliche in dieser Gleichung auftretenden Koeffizienten experimentell zu bestimmen. Sowohl die Bestimmung dieser Koeffizienten als auch der Nachweis der Markoweigenschaften selbst können ohne jede Annahme über die physikalische Natur des untersuchten Systems vorgenommen werden.

Aus der Mathematik der stochastischen Prozesse folgt außerdem, dass die so gewonnene Beschreibung des Prozesses vollständig ist, d.h. sie liefert nicht nur Informationen über die Statistik des Geschwindigkeitsinkrements auf nur einer Skala, sondern auch die vollständige Information über die gemeinsame Dichte von  $N$  Inkrementen auf  $N$  verschiedenen Skalen.

Die folgenden Kapitel geben eine kurze Zusammenfassung der mathematischen Konzepte und Sätze, die im Zusammenhang mit kontinuierlichen Markowprozessen

sen und insbesondere ihrer experimentellen Anwendung von Bedeutung sind. Weiterführende Beschreibungen sowie ausführliche Beweise der angeführten Sätze finden sich z.B. in [95, 47] und [49]. Bemerkenswerterweise stammt eine der frühesten Arbeiten zur Mathematik der kontinuierlichen Markowprozesse von A. N. Kolmogorow, dem Begründer der statistischen Turbulenzforschung, selbst [57].

## 4.2 Eindimensionale Markowprozesse

### 4.2.1 Die Fokker–Planck–Gleichung

Von zentraler Bedeutung für den folgenden mathematischen Formalismus ist das Konzept der mehrfach bedingten Wahrscheinlichkeit. Ausgangspunkt für deren Definition ist die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte  $p(u_1, r_1; u_2, r_2; \dots; u_N, r_N)$  der Inkremente  $u_1 = u(r_1), \dots, u_N = u(r_N)$  auf den Skalen  $r_1$  bis  $r_N$ . Hier, wie auch im folgenden, soll die Konvention  $r_i < r_{i+1}$  gelten. Es sei darauf hingewiesen, dass die  $N$  Geschwindigkeitsinkremente  $u_i$  hierbei zwar auf unterschiedlichen Skalen  $r_i$ , jedoch am selben Referenzpunkt  $\vec{x}$  berechnet werden (vergleiche Gleichung (3.25)).

Die mehrfach bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte des Inkrements kann in Analogie zur einfach bedingten Dichte (3.18) definiert werden:

$$p(u_1, r_1 | u_2, r_2; \dots; u_N, r_N) = \frac{p(u_1, r_1; u_2, r_2; \dots; u_N, r_N)}{p(u_2, r_2; \dots; u_N, r_N)}. \quad (4.1)$$

$p(u_1, r_1 | u_2, r_2; \dots; u_N, r_N)$  misst die Wahrscheinlichkeit dafür, auf der Skala  $r_1$  das Inkrement  $u_1$  zu messen unter der Voraussetzung, dass auf den größeren Skala  $r_2, \dots, r_N$  die Inkremente  $u_2, \dots, u_n$  beobachtet werden.

Der stochastische Prozess, der die Evolution der Zufallsgröße  $u$  in der Variablen  $r$  beschreibt, ist ein Markowprozess, wenn die bedingten Wahrscheinlichkeitsdichten die folgende Bedingung erfüllen:

$$p(u_1, r_1 | u_2, r_2; u_3, r_3; \dots; u_N, r_N) = p(u_1, r_1 | u_2, r_2). \quad (4.2)$$

Die Definition (4.1) der bedingten Wahrscheinlichkeitsdichten mit  $r_i < r_{i+1}$  legt die Richtung des stochastischen Prozesses eindeutig fest: Man betrachtet den Übergang von der großen Skala  $r_2$  auf die kleine Skala  $r_1$ , läßt den Prozess in  $r$  also in negativer Richtung laufen. Für diese spezielle Wahl der Prozessrichtung gibt es keinen mathematischen Grund, das Kaskadenmodell der Turbulenz jedoch, das einen stetigen Energiefluss von großen hin zu kleinen Skalen annimmt (siehe Kapitel 3), legt diese Wahl nahe. Die Analyse kann aber ebenso in der entgegengesetzten Richtung durchgeführt werden (siehe dazu Kapitel 12).

Eine direkte Folge der Bedingung (4.2) ist die folgende Beziehung für die gemeinsame  $N$ -Punkt-Verteilung der Inkremente  $u_1, u_2, \dots, u_N$  auf den Skalen  $r_1, r_2, \dots, r_N$ :

$$\begin{aligned} p(u_1, r_1; \dots; u_N, r_N) &= p(u_1, r_1 | u_2, r_2) p(u_2, r_2 | u_3, r_3) \times \dots \\ &\dots \times p(u_{N-1}, r_{N-1} | u_N, r_N) p(u_N, r_N). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Gleichung (4.3) verdeutlicht die große Bedeutung, die der bedingten Wahrscheinlichkeit für Markowprozesse zukommt: Bereits die Kenntnis der einfach bedingten

Wahrscheinlichkeitsdichte  $p(u, r|u_0, r_0)$  (für beliebige Skalen  $r$  und  $r_0$  mit  $r < r_0$ ) ist ausreichend, um die komplette Information über den stochastischen Prozess zu erhalten.

Desweiteren kann die bedingte Verteilung, vorausgesetzt Gleichung (4.2) ist erfüllt, in einer Reihe entwickelt werden, der sogenannten Kramers-Moyal-Entwicklung:

$$-r \frac{\partial}{\partial r} p(u, r|u_0, r_0) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( -\frac{\partial}{\partial u} \right)^k \left( D^{(k)}(u, r) p(u, r|u_0, r_0) \right), \quad (4.4)$$

wobei wiederum  $r < r_0$ . Die sog. Kramers-Moyal-Koeffizienten  $D^{(k)}(u, r)$  sind als Grenzwert der bedingten Momente  $M^{(k)}(u, r, \Delta r)$  definiert:

$$D^{(k)}(u, r) = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} M^{(k)}(u, r, \Delta r), \quad (4.5)$$

$$M^{(k)}(u, r, \Delta r) = \frac{r}{k! \Delta r} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} (u' - u)^k p(u', r - \Delta r|u, r) du'}_{m^{(k)}(u, r, \Delta r)}. \quad (4.6)$$

Das negative Vorzeichen der linken Seite von Gleichung (4.4) folgt aus der Festlegung der Prozessrichtung von großen hin zu kleinen Skalen  $r$ . Es sei auch darauf hingewiesen, dass hier im Gegensatz zur allgemein üblichen Notation (wie etwa in [95]) beide Seiten der Kramers-Moyal-Entwicklung mit  $r$  multipliziert wurden. Der Faktor  $r$  auf der linken Seite von Gleichung (4.4) findet sich in der Definition (4.6) der bedingten Momente  $M^{(k)}$  wieder.

Von entscheidender Bedeutung für die experimentelle Anwendung ist die Tatsache, dass die bedingten Dichten  $p(u', r - \Delta r|u, r)$  und damit auch die bedingten Momente  $M^{(k)}(u, r, \Delta r)$  aus Messdaten bestimmt werden können. Die Koeffizienten  $M^{(k)}(u, r, \Delta r)$  sind daher *messbare* Grössen und es besteht die Hoffnung, dass über eine Extrapolation gegen  $\Delta r = 0$  auch die Kramers-Moyal-Koeffizienten  $D^{(k)}(u, r)$  abgeschätzt werden können.

Im allgemeinen sind alle Kramers-Moyal-Koeffizienten ungleich Null. Verschwindet jedoch der Koeffizient vierter Ordnung, so sind dem Satz von Pawula zufolge auch alle Koeffizienten  $D^{(k)}$  mit  $k \geq 3$  gleich Null [95]. In diesem Fall ergibt sich aus der Kramers-Moyal-Entwicklung die Fokker-Planck-Gleichung:

$$-r \frac{\partial}{\partial r} p(u, r|u_0, r_0) = \left\{ -\frac{\partial}{\partial u} D^{(1)}(u, r) + \frac{\partial^2}{\partial u^2} D^{(2)}(u, r) \right\} p(u, r|u_0, r_0). \quad (4.7)$$

Die Klammer  $\{ \dots \}$  ist dabei als Differentialoperator aufzufassen, der auf  $p(u, r|u_0, r_0)$  wirkt. Der Koeffizient  $D^{(1)}$  wird als Driftterm,  $D^{(2)}$  als Diffusionskoeffizient bezeichnet. Durch Multiplikation der Gleichung (4.7) mit  $p(u_0, r_0)$  und Integration nach  $u_0$  lässt sich leicht zeigen, dass auch die Wahrscheinlichkeitsdichte  $p(u, r)$  derselben Gleichung gehorchen muss:

$$-r \frac{\partial}{\partial r} p(u, r) = \left\{ -\frac{\partial}{\partial u} D^{(1)}(u, r) + \frac{\partial^2}{\partial u^2} D^{(2)}(u, r) \right\} p(u, r). \quad (4.8)$$

Durch Multiplikation mit  $u^n$  und anschließender Integration nach  $u$  lässt sich aus der Fokker-Planck-Gleichung (4.8) für die Dichten  $p(u, r)$  eine Gleichung für die Strukturfunktionen  $S_u^n(r)$  herleiten:

$$\begin{aligned}
-r \frac{\partial}{\partial r} S_u^n(r) &= -r \frac{\partial}{\partial r} \int_{-\infty}^{+\infty} u^n p(u, r) du \\
&= - \int_{-\infty}^{+\infty} u^n \left\{ \frac{\partial}{\partial u} (D^{(1)} p) + \frac{\partial^2}{\partial u^2} (D^{(2)} p) \right\} du \\
&= n \int_{-\infty}^{+\infty} u^{n-1} D^{(1)}(u, r) p(u, r) du \\
&\quad + n(n-1) \int_{-\infty}^{+\infty} u^{n-2} D^{(2)}(u, r) p(u, r) du. \tag{4.9}
\end{aligned}$$

Für den Fall, dass sich die Koeffizienten  $D^{(k)}$  als Polynome in  $u$  der Ordnung  $k$  darstellen lassen, können die Integrale auf der rechten Seite leicht berechnet werden. Man erhält dann geschlossene Gleichungen für die Strukturfunktionen, d.h. in der Gleichung für  $S_u^n(r)$  treten nur Strukturfunktionen der Ordnungen  $n$  und kleiner auf (siehe Kapitel 6.6.2).

Durch die Transformation  $l = \ln(L/r)$  (mit beliebiger Referenzskala  $L$ ) kann die Fokker-Planck-Gleichung (4.7) in die folgende Form überführt werden:

$$\frac{\partial}{\partial l'} p(u', l' | u, l) = \left\{ -\frac{\partial}{\partial u'} D^{(1)}(u', l') + \frac{\partial^2}{\partial u'^2} D^{(2)}(u', l') \right\} p(u', l' | u, l). \tag{4.10}$$

(Wegen  $l = \ln(L/r)$  gilt hierbei  $l' > l$ .) Für kleine Schrittweiten  $\Delta l = l' - l$  kann eine Näherungslösung für diese Gleichung angegeben werden [95]:

$$p(u', l + \Delta l | u, l) = \frac{1}{2\sqrt{\pi D^{(2)}(u, l) \Delta l}} \exp \left( -\frac{(u' - u - D^{(1)}(u, l) \Delta l)^2}{4D^{(2)}(u, l) \Delta l} \right). \tag{4.11}$$

Die bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte ist für kleine  $\Delta l$  also einfach durch eine Gaußverteilung in  $u'$  mit dem Mittelwert  $u - D^{(1)}(u, l) \Delta l$  und der Standardabweichung  $2D^{(2)}(u, l) \Delta l$  gegeben. Der Driftkoeffizient  $D^{(1)}$  beschreibt demnach die deterministische Entwicklung des Systems, während der Diffusionskoeffizient  $D^{(2)}$  die Wirkung stochastischer Einflüsse beschreibt (dies wird auch an der im folgenden Kapitel besprochene Langevin-Gleichung deutlich).

Die einfache Form der Näherungslösung (4.11) erlaubt es auch, die zentrierten Momente  $m^{(k)}(u, l, \Delta l)$  der bedingten Dichten  $p(u', l + \Delta l | u, l)$  zu berechnen. Man erhält [95]:

$$\begin{aligned}
m^{(k)}(u, l, \Delta l) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (u' - u)^k p(u', l + \Delta l | u, l) du' \\
&= \left( -i\sqrt{D^{(2)}(u, l) \Delta l} \right)^k H_k \left( \frac{i}{2} D^{(1)}(u, l) \sqrt{\frac{\Delta l}{D^{(2)}(u, l)}} \right), \tag{4.12}
\end{aligned}$$

wobei  $H_k(x)$  das Hermitsche Polynom  $k$ -ter Ordnung bezeichnet ( $H_1(x) = 2x$ ,  $H_2(x) = 4x^2 - 2$ , ...).

Durch Gleichung (4.12) sind die führenden Terme einer Taylorentwicklung der bedingten Momente  $m^{(k)}$  in  $\Delta l$  gegeben. Die expliziten Ausdrücke für die Koeffizienten  $M^{(k)} = \frac{1}{\Delta l k!} m^{(k)}$  lauten für  $k = 1, 2$ :

$$\begin{aligned} M^{(1)}(u, l, \Delta l) &= D^{(1)}(u, l) + \mathcal{O}(\Delta l), \\ M^{(2)}(u, l, \Delta l) &= D^{(2)}(u, l) + \frac{\Delta l}{2} D^{(1)^2} + \mathcal{O}(\Delta l^2). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Die Entwicklungsgleichungen (4.13) können wegen

$$\begin{aligned} \Delta l &= \ln\left(\frac{L}{r'}\right) - \ln\left(\frac{L}{r}\right) = \ln\left(\frac{L}{r - \Delta r}\right) - \ln\left(\frac{L}{r}\right) \\ &= -\ln\left(1 - \frac{\Delta r}{r}\right) = \frac{\Delta r}{r} + \mathcal{O}(\Delta r^2) \end{aligned} \quad (4.14)$$

in dieser Form auch für die Koeffizienten  $M^{(k)}(u, r, \Delta r)$  in der linearen Skala  $\Delta r$  formuliert werden. Dieser Zusammenhang erweist sich bei der Bestimmung der Kramers-Moyal-Koeffizienten  $D^{(k)}$  aus den (experimentell zugänglichen) Momenten  $M^{(k)}$  als nützlich (siehe Kapitel (6.3) und (11.3)).

### 4.2.2 Die Langevin-Gleichung

Alternativ kann ein stochastischer Prozess auch durch eine gewöhnliche Differentialgleichung für die Entwicklung der Zustandsvariablen  $u$  beschrieben werden, der sogenannten Langevin-Gleichung

$$-\frac{\partial}{\partial r} u(r) = f(u, r) + g(u, r)\Gamma(r). \quad (4.15)$$

Die Lösungen der Langevin-Gleichung beschreiben einzelne Entwicklungspfade der Zufallsvariablen  $u$  in  $r$ , liefern also konkrete Realisierungen des Zufallsprozesses. Die Funktion  $f(u, r)$  beschreibt dabei die deterministische Entwicklung von  $u$  in  $r$ , während der zweite Term der Gleichung stochastische Einflüsse auf die Dynamik von  $u(r)$  modelliert.  $\Gamma(r)$  ist eine auf Mittelwert Null und Standardabweichung eins normierte fluktuierende Rauschkraft. Somit liefert die Funktion  $g(u, r)$  ein direktes Maß dafür, wie stark die Dynamik von  $u(r)$  an diese Rauschkraft anknüpft.

Man kann nun zeigen, dass  $u(r)$  genau dann Markoweigenschaften besitzt, wenn  $\Gamma(r)$   $\delta$ -korreliertes Rauschen ist:  $\langle \Gamma(r)\Gamma(r') \rangle = \delta(r - r')$ . Die Wahrscheinlichkeitsdichte  $p(u, r)$  der durch Gleichung (4.15) beschriebenen Zufallsvariablen  $u(r)$  gehorcht in diesem Fall der Kramers-Moyal-Entwicklung (4.4). Desweiteren kann gezeigt werden, dass sich die Kramers-Moyal-Entwicklung genau dann zur Fokker-Planck-Gleichung reduziert, wenn  $\Gamma(r)$  überdies auch noch Gaußverteilt ist. In diesem Fall hat sich für  $\Gamma(r)$  auch die Bezeichnung *Langevin-Kraft* eingebürgert.

Ist  $\Gamma(r)$  Gaußverteilt,  $\delta$ -korreliertes (weisses) Rauschen, so sind Fokker-Planck- (4.7) und Langevin-Gleichung (4.15) äquivalent und die Funktionen  $f(u, r)$  und  $g(u, r)$  lassen sich durch die Kramers-Moyal-Koeffizienten  $D^{(1)}$  und  $D^{(2)}$  ausdrücken.

Dieser Zusammenhang ist allerdings nicht eindeutig, da sich bei der mathematischen Behandlung der Langevin-Gleichung Probleme ergeben. Das Konzept der  $\delta$ -korrelierten, also nirgendwo stetigen, Langevin-Kraft  $\Gamma(r)$  erfordert eine Erweiterung der herkömmlichen Formalismen der Integral- und Differentialrechnung. Dies ist auf zwei verschiedene Weisen – nach Itô bzw. Stratonovich – möglich, was zu der erwähnten Uneindeutigkeit führt. Zu Details der mathematischen Behandlung der Langevin-Gleichung sei neben den bereits in der Einführung erwähnten Literaturstellen hier auch auf die Arbeit von M. Siefert [101] verwiesen.

Abschließend seien die Zusammenhänge zwischen den Kramers-Moyal-Koeffizienten und den Funktionen  $f(u, r)$  und  $g(u, r)$  angegeben. In der Definition nach Itô ergibt sich

$$\begin{aligned} f(u, r) &= \frac{1}{r} D^{(1)}(u, r), \\ g(u, r) &= \sqrt{\frac{1}{r} D^{(2)}(u, r)}, \end{aligned} \quad (4.16)$$

während im Formalismus nach Stratonovich gilt:

$$\begin{aligned} f(u, r) &= \frac{1}{r} D^{(1)}(u, r) + g(u, r) \frac{\partial}{\partial u} g(u, r), \\ g(u, r) &= \sqrt{\frac{1}{r} D^{(2)}(u, r)}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Erwähnenswert ist, dass im Falle eines in  $u$  konstanten Diffusionsterms beide Formalismen dasselbe Ergebnis liefern.

### 4.3 Prozesse in mehreren Dimensionen

Der mathematische Formalismus der Markowprozesse kann auf höherdimensionale Zufallsvariablen  $\vec{\xi}(r) = (\xi_1(r), \xi_2(r), \dots, \xi_m(r))$  verallgemeinert werden. Die Bedingung für einen Markowprozess lautet analog zum eindimensionalen Fall

$$p(\vec{\xi}_1, r_1 | \vec{\xi}_2, r_2; \vec{\xi}_3, r_3; \dots; \vec{\xi}_N, r_N) = p(\vec{\xi}_1, r_1 | \vec{\xi}_2, r_2). \quad (4.18)$$

Auf die allgemeine Formulierung der Kramers-Moyal-Entwicklung sei hier der Einfachheit halber verzichtet. Die Fokker-Planck-Gleichung in  $m$  Dimensionen lautet:

$$\begin{aligned} -r \frac{\partial}{\partial r} p(\vec{\xi}, r | \vec{\xi}_0, r_0) &= - \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial \xi_i} (D_i^{(1)}(\vec{\xi}, r) p(\vec{\xi}, r | \vec{\xi}_0, r_0)) \\ &+ \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2}{\partial \xi_i \partial \xi_j} (D_{ij}^{(2)}(\vec{\xi}, r) p(\vec{\xi}, r | \vec{\xi}_0, r_0)), \end{aligned} \quad (4.19)$$

wobei  $\xi_i$  die  $i$ -te Komponente des Vektors  $\vec{\xi}$  bezeichnet und die Komponenten des Driftvektors und der Diffusionsmatrix wie folgt definiert sind:

$$\begin{aligned} D_i^{(1)}(\vec{\xi}, r) &= \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{r}{\Delta r} \langle (\xi'_i(r-\Delta r) - \xi_i(r)) | \vec{\xi}(r) \rangle, \\ D_{ij}^{(2)}(\vec{\xi}, r) &= \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{r}{2\Delta r} \langle (\xi'_i(r-\Delta r) - \xi_i(r)) (\xi'_j(r-\Delta r) - \xi_j(r)) | \vec{\xi}(r) \rangle. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Auch die Funktionen  $h$  und  $g$  der eindimensionalen Langevingleichung werden im mehrdimensionalen Fall zu Vektoren bzw. Matrizen:

$$-r \frac{\partial}{\partial r} \xi_i(r) = h_i(\vec{\xi}, r) + \sum_{j=1}^m g_{ij}(\vec{\xi}, r) \Gamma_j(r). \quad (4.21)$$

Die  $\Gamma_j(r)$  sind voneinander unabhängige Langevin-Kräfte. In der Integraldefinition nach Itô gilt für den Zusammenhang zwischen den Koeffizienten der Fokker-Planck- und der Langevin-Gleichung:

$$\begin{aligned} h_i(\vec{\xi}, r) &= \frac{1}{r} D_i^{(1)}(\vec{\xi}, r) \\ g_{ij}(\vec{\xi}, r) &= \left( \sqrt{\frac{1}{r} \mathbf{D}^{(2)}} \right)_{ij}, \end{aligned} \quad (4.22)$$

wobei die Wurzel  $\sqrt{\mathbf{D}^{(2)}}$  aus der Diffusionsmatrix  $\mathbf{D}^{(2)}$  berechnet wird, indem man die Matrix diagonalisiert, die Wurzel der Eigenwerte berechnet und das Ergebnis anschließend in das ursprüngliche Koordinatensystem rücktransformiert.

Nach Stratonovich gilt analog zum eindimensionalen Fall

$$\begin{aligned} h_i(\vec{\xi}, r) &= \frac{1}{r} D_i^{(1)}(\vec{\xi}, r) + \sum_{j,k=1}^m g_{kj}(\vec{\xi}, r) \frac{\partial}{\partial \xi_k} g_{ij}(\vec{\xi}, r) \\ g_{ij}(\vec{\xi}, r) &= \left( \sqrt{\frac{1}{r} \mathbf{D}^{(2)}} \right)_{ij}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Insbesondere für mehrdimensionale stochastische Variablen bietet die Langevin-Gleichung eine Alternative zur Überprüfung der Markoweigenschaften bzw. der Gültigkeit der Fokker-Planck-Gleichung. Bei dem erstmals in [102] vorgeschlagenen Verfahren versucht man zunächst, über die Gleichungen (4.20) Schätzwerte für Driftvektor und Diffusionsmatrix zu erhalten. Mit diesen und den aus den Daten bestimmten Realisierungen der Zufallsvariablen  $\vec{\xi}(r)$  bzw. deren Ableitungen ist es dann möglich, aus der Langevin-Gleichung (4.21) konkrete Realisierungen der Rauschkkräfte  $\Gamma_j$  zu bestimmen.

Sind die so bestimmten Werte von  $\Gamma_j$   $\delta$ -korreliert, gehorcht die Zufallsvariable  $\vec{\xi}(r)$  einem Markowprozess. Sind diese Werte zudem noch Gaußverteilt, ist auch die Beschreibung durch eine Fokker-Planck- bzw. Langevin-Gleichung zulässig. Diese Methode ist, gerade bei mehrdimensionalen Variablen, der direkten Analyse der Fokker-Planck-Gleichung vorzuziehen: Der numerische Aufwand, der notwendig ist, um den Kramers-Moyal-Koeffizienten  $k$ -ter Ordnung einer  $m$ -dimensionalen Zufallsvariablen zu berechnen, wächst mit  $m^k$ . Es ist daher bereits für zweidimensionale Variablen kaum mehr möglich, den Koeffizienten vierter Ordnung zu berechnen und zu entscheiden, ob er vernachlässigt werden kann und sich die Kramers-Moyal-Entwicklung zur Fokker-Planck-Gleichung reduziert. Auch der Aufwand zur Überprüfung der Markowbedingung (4.18) wächst mit der Dimension der Zufallsvariablen stark an.



# Kapitel 5

## Das experimentelle System

### 5.1 Versuchsaufbau

Eines der Standardexperimente zur vollentwickelten Turbulenz ist der sogenannte Freistrah. Ein solcher Freistrah entsteht, wenn ein Fluid mit konstanter Geschwindigkeit aus einer Düse austritt und sich im weiteren in einer mit demselben Fluid gefüllten Experimentierkammer ungestört ausbreiten kann. Ungestört bedeutet in diesem Zusammenhang insbesondere, dass der Strahl nicht mit den Wänden der Kammer wechselwirken darf. Zwischen dem Freistrah und dem (ursprünglich ruhenden) Medium in der Experimentierkammer treten Scherkräfte auf, die zu Störungen der anfangs laminaren Strömung führen. Diese Störungen wachsen mit zunehmendem Abstand von der Düse stark an und führen schließlich zu einem turbulent fluktuierenden Geschwindigkeitsfeld. In hinreichend großer Entfernung von der Düse kann dieses turbulente Feld im Zentrum des Strahls lokal als homogen und isotrop angenommen werden. In der Praxis wird hierfür ein Abstand von 30–40 Düsendurchmessern  $D$  als ausreichend akzeptiert [88, 50, 2, 27].

Die in dieser Arbeit analysierten Daten stammen (sofern nichts gegenteiliges erwähnt ist) aus dem in der Arbeitsgruppe Hydrodynamik an der Universität Oldenburg betriebenen Freistrah, wobei als Fluid Luft verwendet wurde. Das Experiment besteht im wesentlichen aus vier Komponenten (siehe Abbildung 5.1): einem Druckluftreservoir, der Regeleinheit für den Durchfluss, der Düseneinheit und der eigentlichen Experimentierkammer.

Das Druckluftreservoir besteht aus zehn 50l-Druckluftflaschen mit einem Maximaldruck von 200bar, die über einen Atemluftkompressor (Bauer Utilus) gefüllt werden können.

Die Regeleinheit für den Durchfluss setzt sich aus insgesamt vier Durchflussmessern mit nachgeschalteten Regelventilen (Bronkhorst EL-FLOW) zusammen. Die Maximaldurchflüsse der vier Regler sind 150 ml/min, 1,5 l/min, 15 l/min sowie 130 l/min bei einer Genauigkeit von jeweils 1% des Maximalwerts. Diese Anordnung erlaubt es, die Reynoldszahl über einen Bereich von fünf Größenordnungen zu variieren.

Die Düseneinheit besteht aus einer Beruhigungszone und der Düse selbst. In der Beruhigungszone sorgen mehrere Gitter unterschiedlicher Maschenweiten dafür, dass

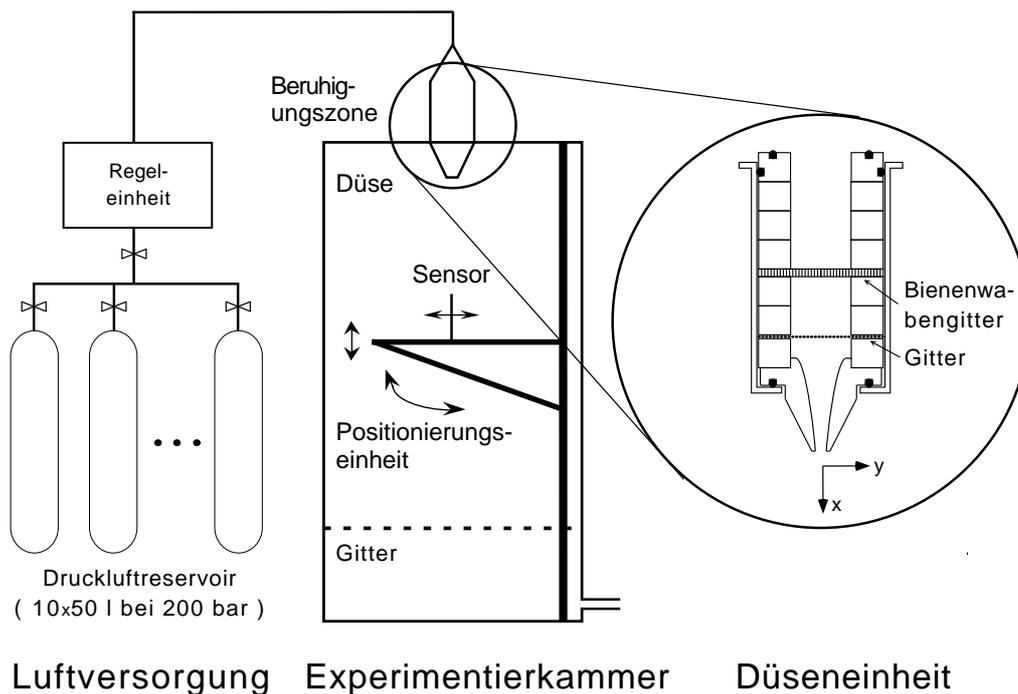


Abbildung 5.1: Der experimentelle Aufbau. Die Abmessungen der Experimentierkammer sind  $2,5 \times 1 \times 1 \text{ m}^3$ , weitere Details zu den einzelnen Komponenten finden sich im Text.

in der Zuleitung entstandene Turbulenzen geglättet werden (siehe dazu auch Abbildung (5.2)). Die Düse hat, einer Empfehlung von H.E. Fiedler und B. Blümel vom Hermann-Föttinger-Institut Berlin folgend, ein konvexes Innenprofil. Eine detaillierte Beschreibung des Profils findet sich in [55]. Es stehen zwei verschiedene Düsen zur Verfügung, deren Austrittsöffnungen Durchmesser von 2 bzw. 8mm haben. In dieser Arbeit wurde die Düse mit 8mm Durchmesser verwendet. Beim maximalen Durchfluss von  $130 \text{ l/min}$  (siehe oben) beträgt die Geschwindigkeit des Strahls am Austritt von der Düse etwa  $45 \text{ m/s}$ . Die maximal erreichbare Reynoldszahl beträgt damit  $Re_{max} \approx 3 \cdot 10^4$  (als typische Längenskala wurde der Durchmesser  $D$  der Düse verwendet).

Die Experimentierkammer schließlich hat eine Höhe von  $2,5 \text{ m}$  bei einer Querschnittsfläche von  $1 \text{ m}^2$ . Die Abmessungen gewährleisten, dass der Strahl bis zu einer Entfernung von  $1,5 \text{ m}$  von der Düse nicht mit den Wänden wechselwirkt [90]. Ein im Abstand von  $x = 1,5 \text{ m}$  von der Düse angebrachtes Gitter glättet die noch vorhandenen Turbulenzen und sorgt somit dafür, dass der Strahl im weiteren Verlauf nicht noch in Kontakt mit den Wänden kommt. Eine in allen drei Raumrichtungen verstellbare Positionierungseinheit erlaubt Messungen an jedem beliebigen Punkt unterhalb der Düse. Weiterführende Details des Versuchsaufbaus und seiner einzelnen Komponenten finden sich in [97, 55, 90]

Um die Güte des Freistrahls zu charakterisieren, wurden in verschiedenen Ab-

ständen  $x$  von der Düse die radialen Geschwindigkeitsprofile  $w_x(y)$  vermessen (die Koordinaten sind in Abbildung 5.1 definiert). Am Austritt des Strahls aus der Düse, im sogenannten Nahfeld, sollte das Profil des Strahls idealerweise kastenförmig sein [88], d.h. die Geschwindigkeit sollte außerhalb des Strahls Null sein und unterhalb der Düse einen konstanten Wert annehmen. Abbildung 5.2(a) zeigt das in einem Abstand von  $x = 2\text{mm}$  gemessene Profil. Tatsächlich steigt die Geschwindigkeit von einem Wert nahe Null außerhalb des Strahls rasch auf einen konstanten Wert an. Der Anstieg der Geschwindigkeit erfolgt über eine Strecke von  $2\text{mm}$ , was in der Größenordnung der räumlichen Auflösung des verwendeten Geschwindigkeitssensors liegt (siehe Kapitel 5.2).

Aus theoretischen Betrachtungen [88, 90] erwartet man im Fernfeld Profile, die bei geeigneter Normierung eine universelle Form aufweisen. In Abbildung 5.2(b) sind die radialen Profile in den Abständen  $x = 10D$ ,  $x = 50D$ ,  $x = 100D$  und  $x = 150D$  dargestellt. Die Profile wurden auf ihre jeweiligen Halbwertsbreiten  $b(x)$  und ihre jeweiligen Maximalgeschwindigkeiten normiert. Tatsächlich erweist sich die Form der so normierten Profile im Fernfeld als universell. Bemerkenswerterweise liegen die Maxima aller Profile bei  $y = 0$ , d.h. im Zentrum des Freistrahls. Dieses Ergebnis kann als Beleg für die Stabilität des Strahls gewertet werden, insbesondere dafür, dass die Strömung nicht mit den Wänden der Experimentierkammer wechselwirkt. In diesem Fall wäre zu erwarten, dass der Strahl sich aufgrund des sog. Coanda-Effekts [86] an eine der Wände ansaugt. Die radialen Geschwindigkeitsprofile müssten in diesem Fall deutlich von der Radialsymmetrie um  $y = 0$  abweichen.

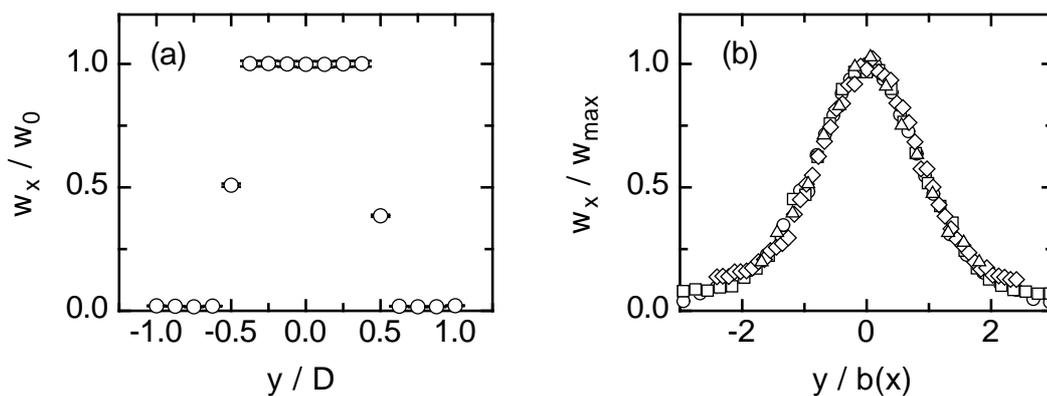


Abbildung 5.2: Radiale Geschwindigkeitsprofile des Freistrahls in unterschiedlichen Entfernungen  $x$  von der Düse. (a): Profil bei  $x = 2\text{mm}$ . (b): Mehrere Profile im Fernfeld. Kreise:  $x = 10D$ , Quadrate:  $x = 50D$ , Rauten:  $x = 100D$ , Dreiecke:  $x = 150D$ . Die Profile wurden auf ihre jeweiligen Halbwertsbreiten und Maxima normiert, jedoch nicht in  $y$ -Richtung verschoben.

## 5.2 Messtechnik

Zur Untersuchung der kleinskaligen Eigenschaften turbulenter Strömungen wird ein Messverfahren benötigt, das zeitlich und räumlich hochaufgelöste Daten in ausreichender Menge liefert. Die Wahl fiel auf die Hitzdrahtanemometrie, deren Messprinzip in diesem Abschnitt kurz erläutert werden soll. Der Einsatz optischer Messmethoden wie der Laser-Doppler-Anemometrie (LDA) oder der Particle Image Velocimetry (PIV) wurde verworfen, obwohl sie im Gegensatz zur Hitzdrahtanemometrie berührungslose Messverfahren sind, bei denen die Strömung nicht durch einen Sensor gestört wird. Diesem Vorteil der optischen Methoden stehen jedoch gravierende Nachteile bei der Qualität der gemessenen Daten gegenüber. So ist bei der LDA das Signal/Rausch-Verhältnis wesentlich schlechter als bei der Hitzdrahtanemometrie [10, 96], während die PIV ein für statistische Analysen zu kleines Datenvolumen liefert [44]. Bei beiden Verfahren ist überdies die zeitliche Auflösung wesentlich geringer als bei der Hitzdrahtanemometrie [10, 34, 44].

Die Hitzdrahtanemometrie beruht auf einem recht einfachen Prinzip: Ein kurzer, dünner Draht (typische Abmessungen sind  $1\text{mm}$  für die Länge und  $5\mu\text{m}$  für den Durchmesser) wird durch einen elektrischen Strom stark aufgeheizt, wodurch sich auch das Fluid in der unmittelbaren Umgebung des Drahts erwärmt. Die Strömung um den Draht sorgt nun für einen Abtransport des erwärmten Volumens und damit für einen Abtransport von Wärme. Mit welcher Rate der Umgebung des Drahts, und damit letztlich dem Draht selbst, Wärmeenergie entzogen wird, hängt über die Massenstromdichte des bewegten warmen Fluids von der Geschwindigkeit der Strömung ab.

Dieser Effekt kann auf zwei verschiedene Weisen zur Messung der Geschwindigkeit am Ort des Sensors genutzt werden. Bei der Konstanttemperaturmethode wird der Hitzdraht in eine Wheatstonsche Brücke eingebaut und so angesteuert, dass sein Widerstand konstant bleibt. Einen eindeutigen Zusammenhang zwischen Widerstand und Temperatur vorausgesetzt bedeutet dies, dass auch seine Temperatur konstant bleibt. Gemessen wird in diesem Fall die über dem Hitzdraht abfallende Spannung. Aus dieser Spannung und dem (konstant gehaltenen) Widerstand des Drahts ergibt sich die elektrische Leistung mit der der Draht geheizt werden muss, um die Temperatur konstant zu halten. Diese Leistung hängt direkt von der Stärke des Wärmetransports durch die Strömung ab und liefert somit ein Maß für die Geschwindigkeit des Fluids am Ort des Sensors. Alternativ kann auch die sog. Konstantstrommethode benutzt werden, bei der der Strom durch den Hitzdraht konstant gehalten und sein Widerstand gemessen wird. Der Widerstand des Drahts hängt von seiner Temperatur ab, welche ihrerseits davon abhängt, mit welcher Rate der Abtransport von Wärmeenergie durch die Strömung erfolgt.

Die in dieser Arbeit analysierten Daten wurden mit einem kommerziellen Anemometer der Firma Dantec-Invent aufgenommen. Die verwendete Messbrücke des Typs Streamline 90N10 arbeitet mit der Konstanttemperaturmethode, wobei die Temperatur des Drahts bei Messungen in Luft typischerweise bei ca.  $200^\circ\text{C}$  liegt. Der verwendete Hitzdraht (Typbezeichnung 55P01) hat eine sensitive Länge von  $1,25\text{mm}$  und einen Durchmesser von  $5\mu\text{m}$ . Die über dem Hitzdraht abfallende Spannung kann in der im Anemometer integrierten Signal-Konditioniereinheit verstärkt, ge-

filtert und am Ausgang der Messbrücke abgegriffen werden. Das Signal wird dann schließlich über eine AD-Wandlerkarte mit einer Auflösung von 12 Bit und einer maximalen Summenwandlungsrate von  $1\text{MHz}$  in einen handelsüblichen PC eingelesen und ausgewertet.

Um die an der Messbrücke ausgegebene Spannung in die Geschwindigkeit am Ort des Sensors umrechnen zu können, wurde zu Beginn der Messung eine Geschwindigkeitskalibrierung vorgenommen. Nach King [34] gilt für den Zusammenhang zwischen dem Betrag  $w$  der Geschwindigkeit und der Spannung  $E$  der Zusammenhang

$$w = c(E - E_0)^n. \quad (5.1)$$

Um die Parameter  $c$ ,  $E_0$  und  $n$  zu bestimmen, wird an mehrere gemessenen Wertepaare  $(w, E)$  ein Fit der Form (5.1) angepasst. Der Hitzdraht wird dazu unmittelbar unterhalb der Düse in der Mitte des Freistrahls positioniert. An dieser Stelle ist das Geschwindigkeitsprofil des Strahls konstant (siehe Abbildung 5.2(a)) und die Strömung laminar. Die Geschwindigkeit  $w$  der Strömung am Ort des Sensors ist also wohldefiniert und einfach durch den Quotienten des (vorgegebenen) Durchflusses und der Querschnittsfläche der Düse gegeben. Abbildung 5.3 zeigt das Ergebnis einer solchen Kalibrierungsmessung.

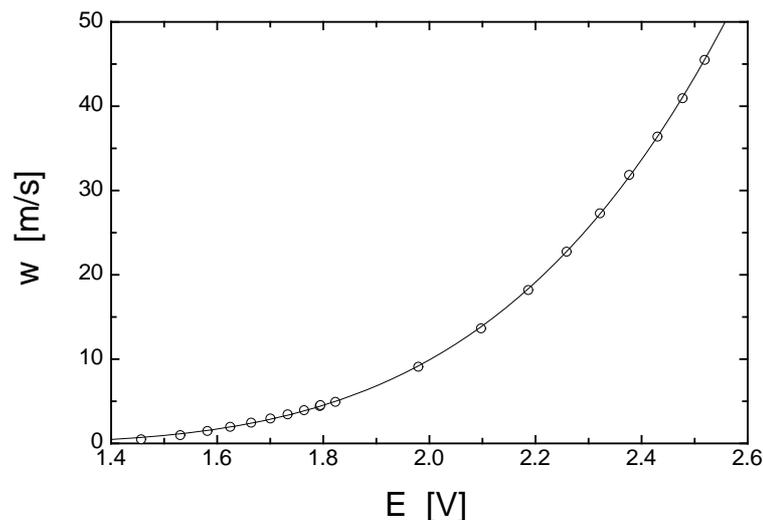


Abbildung 5.3: *Typische Eichkurve des im Rahmen dieser Arbeit verwendeten Hitzdrahts. Die Symbole sind die Ergebnisse des im Text beschriebenen Kalibrierungsverfahrens, die Linie ist ein Fit an diese Daten gemäß dem Gesetz von King (5.1).*

Den Vorteilen bei Datenmenge und zeitlicher sowie räumlicher Auflösung stehen bei der Hitzdrahtanemometrie zwei wesentliche Nachteile gegenüber. Zum einen ist, wie bereits erwähnt, die Hitzdrahtanemometrie keine berührungslose Messmethode. Die Sonde muss direkt in die Strömung eingebracht werden, was natürlich Störungen verursacht. Dabei stammt der stärkste Einfluss nicht vom Draht selbst (wie mit einer einfachen Abschätzung gezeigt werden kann [64]), wird ein Draht der Dicke  $10\mu\text{m}$  bei den im Labor üblichen Geschwindigkeiten laminar umströmt und stört

die Strömung im weiteren nicht), sondern von seiner Halterung und der Positionierungseinheit. Dies ist einer der Gründe, warum die Hitzdrahtanemometrie nur in Experimenten mit einer ausgezeichneten Hauptströmungsrichtung eingesetzt werden kann: Die Halterung des Drahts kann in diesem Fall so aufgebaut werden, dass sie sich, in Strömungsrichtung gesehen, hinter dem Sensor befindet. An der Halterung entstehende Wirbel werden dann von der Strömung vom Sensor weg transportiert und stören die eigentliche Messung somit nicht [10].

Gravierender ist dagegen das Problem der Richtungsauflösung. Als Beispiel sei hierzu ein in  $z$ -Richtung orientierte Hitzdraht in einem Geschwindigkeitsfeld  $\vec{w}$  betrachtet, dessen Hauptströmungsrichtung die  $x$ -Richtung sei:  $\vec{w} = (\langle w_x \rangle + v_x, v_y, v_z)$ . Die  $v_i$  seien die Geschwindigkeitsfluktuationen um den Mittelwert mit  $\langle v_i \rangle = 0$  und  $\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle = \sigma^2$ .

Für einen unendlich langen Draht kann gezeigt werden, dass die Komponente der Geschwindigkeit in Längsrichtung zum Draht, in diesem Fall also  $v_z$ , keinen Beitrag zur Kühlung des Drahts liefert [34]. Bei handelsüblichen Hitzdrähten wie dem in dieser Arbeit verwendeten ist das Verhältnis von Länge  $l$  zu Durchmesser  $d$  typischerweise  $l/d \approx 200$ , so dass  $v_z$  in guter Näherung vernachlässigt werden kann [34]. Die beiden Komponenten senkrecht zum Draht tragen jedoch beide zur Kühlung bei. Da der Kühleffekt von der Richtung der Geschwindigkeit unabhängig ist, berechnet sich die effektiv zur Kühlung beitragende Geschwindigkeit  $w_{eff}$  zu:

$$w_{eff} = \sqrt{(\langle w_x \rangle + v_x)^2 + v_y^2}. \quad (5.2)$$

Ist die mittlere Geschwindigkeit  $\langle w_x \rangle$  gross gegen die Fluktuationen  $v_i$ , kann die Wurzel entwickelt werden:

$$\begin{aligned} w_{eff} &\approx |\langle w_x \rangle + v_x| \sqrt{1 + \left(\frac{v_y}{\langle w_x \rangle}\right)^2} \\ &\approx |\langle w_x \rangle + v_x| \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v_y}{\langle w_x \rangle}\right)^2\right). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Die typische Größenordnung der Geschwindigkeitsfluktuationen  $v_y$  ist durch ihre Standardabweichung  $\sigma$  gegeben.  $w_{eff}$  lässt sich daher abschätzen zu:

$$w_{eff} \approx |\langle w_x \rangle + v_x| \left(1 + \frac{1}{2} t^2\right), \quad (5.4)$$

wobei der sog. Turbulenzgrad  $t$  als das Verhältnis der Standardabweichung  $\sigma$  der turbulenten Geschwindigkeitsfluktuationen zur mittleren Geschwindigkeit  $\langle w_x \rangle$  definiert ist:  $t = \sigma / \langle w_x \rangle$ .

In Strömungen mit kleinem Turbulenzgrad  $t$  wird das Signal eines Hitzdrahts demnach überwiegend von der Geschwindigkeitskomponente in Hauptströmungsrichtung dominiert, die Beiträge der Querkomponente sind von der Größenordnung  $t^2$ . Im Freistrahel misst man in der Nähe der Düse (in einem Abstand von  $x \approx 30D$ ) einen Turbulenzgrad von ca. 0,25, mit zunehmender Entfernung von der Düse fällt

er auf unter 0,2. Im letzten Fall liegen die Korrekturen aufgrund der Querkomponente im Bereich einiger Prozent des Meßsignals und können in erster Näherung vernachlässigt werden. In Strömungen, deren mittlere Geschwindigkeit sehr viel größer sind als die turbulenten Fluktuationen, ist auch das Vorzeichen der gemessenen Geschwindigkeit eindeutig festgelegt: Es richtet sich nach der Hauptströmung.

### 5.3 Interpretation gemessener Zeitserien - Die Taylorhypothese

Bei der Interpretation der mit einem Hitzdraht im Freistrahл gemessenen Daten ergibt sich ein grundsätzliches Problem: Im Experiment werden an bestimmten Position in der Strömung *Zeitreihe* der Geschwindigkeit gemessen, die gängigen Turbulenzmodelle arbeiten jedoch im *Ortsraum* (siehe Kapitel 3). Man bedient sich daher der sog. Taylorhypothese. Sie besagt, dass sich ein zeitlicher Abstand  $\Delta t$  über die mittlere Geschwindigkeit  $\langle \vec{w} \rangle$  der Strömung in eine räumliche Verschiebung  $\vec{r}$  umrechnen lässt:

$$\vec{r} = \langle \vec{w} \rangle \Delta t. \quad (5.5)$$

Der Taylorhypothese liegt die Annahme zugrunde, dass sich eine turbulente Struktur der Größe  $r$  in der Zeit, in der sie von der mittleren Strömung am Sensor vorbeigetragen wird, nicht wesentlich verändert. Salopp gesagt: Anstatt einen Wirbel der Länge nach gleichzeitig an verschiedenen Punkten zu vermessen, kann man auch warten, bis er über den Sensor hinweggezogen ist.

Selbstverständlich ändert sich ein turbulentes Geschwindigkeitsfeld in der Zeit, in der es den Sensor passiert. Erwartungsgemäß hält die Taylorhypothese daher einer strengen Überprüfung nicht stand. Mehrere experimentelle Untersuchungen zeigen jedoch, dass sie, insbesondere für kleine Skalen  $r$ , eine durchaus gute erste Näherung ist [10, 51, 48]. Insbesondere der Intermittenzeffekt der kleinskaligen Turbulenz wird korrekt erfasst [10].

Mit Hilfe der Taylorhypothese können nun die in einem Freistrahл mittels Hitzdrahtanemometrie gemessene Zeitserien in Verbindung zu den Modellen für die Skalenabhängigkeit der Geschwindigkeitsinkremente gesetzt werden. Die in den vorhergehenden Kapiteln besprochenen Schritte seien hier noch einmal kurz zusammengefasst:

Im Freistrahл läßt sich das Geschwindigkeitsfeld  $\vec{w}(\vec{x}, t)$  als Summe der mittleren (zeitunabhängigen) Geschwindigkeit  $\langle \vec{w} \rangle$  und der Fluktuationen  $v_i(\vec{x}, t)$  darstellen. Legt man die  $x$ -Koordinate in Hauptströmungsrichtung (vergleiche Abb. 5.1), so gilt:

$$\vec{w}(\vec{x}, t) = (\langle w_x \rangle + v_x(\vec{x}, t), v_y(\vec{x}, t), v_z(\vec{x}, t)). \quad (5.6)$$

In hinreichend großer Entfernung von der Düse (ab etwa  $30D$ ) kann das Geschwindigkeitsfeld als lokal homogen, isotrop und stationär angenommen werden. Turbulenzgrade von 25 – 20% erlauben den Einsatz der Hitzdrahtanemometrie um die  $x$ -Komponente des Geschwindigkeitsfelds an einem Ort im Strahl zu messen. Da nur die  $x$ -Komponente der mittleren Geschwindigkeit von Null verschieden ist, entspricht nach der Taylorhypothese (5.5) eine zeitliche Differenz  $\Delta t$  einer räumlichen

Verschiebung  $\vec{r}$  in  $x$ -Richtung. Man misst also die Geschwindigkeitskomponente parallel zum Verschiebungsvektor und kann daher aus der gemessenen Zeitserie das nach Gl. (3.25) definierte longitudinale Geschwindigkeitsinkrement  $u(r)$  bestimmen.

## 5.4 Charakterisierungsmessungen

In Kapitel 6 werden Daten aus dem Freistrahlexperiment hinsichtlich ihrer Markoweigenschaften untersucht. Um sicherzustellen, dass der verwendete Datensatz die typischen Merkmale voll entwickelter Turbulenz aufweist, soll er im Folgenden auf dem Hintergrund gängiger Turbulenzmodelle einer charakterisierenden Analyse unterzogen werden.

Der Datensatz besteht aus  $1,25 \times 10^7$  Messwerten der Geschwindigkeit, die im Zentrum des Freistrahls in einer Entfernung von  $x = 1m = 125D$  aufgenommen wurden. Die Geschwindigkeit des Strahls bei Austritt aus der Düse betrug  $45,5m/s$ , was, wenn man den Düsendurchmesser  $D = 8mm$  als typische Längenskala zugrunde legt, einer Reynoldszahl von etwa 27000 entspricht. Am Ort der Messung war die mittlere Geschwindigkeit auf  $2,25m/s$  abgefallen, der Turbulenzgrad betrug etwa 17%. Die Daten wurden mit einer Samplefrequenz von  $8kHz$  aufgenommen, der vorgeschaltete Tiefpass (Stanford SR640) mit einer Flankensteilheit von  $114dB/Oktave$  war auf eine Filterfrequenz von  $20kHz$  eingestellt (dem Gerät der Firma Stanford wurde in diesem Fall wegen der erheblich besseren Flankensteilheit der Vorzug vor dem in der Messbrücke integrierten Tiefpassfilter gegeben). Der Taylorhypothese zufolge entspricht die zeitliche Auflösung der Messung einer räumlichen Auflösung von  $0.28mm$ .

Für die nach Gleichung (3.32) definierte integrale Längenskala  $L$  ergibt sich ein Wert von  $6,7cm$ . Die Bestimmung der Taylorklänge  $\lambda$  dagegen erfolgte nicht gemäß ihrer Definition (3.34), da dieses Verfahren je nach der Auflösung der Messung und der für den Fit verwendeten Datenpunkte sehr unterschiedliche Ergebnisse liefert [90]. Zur Verwendung kam vielmehr das von D. Aronson und L. Löfdahl vorgeschlagenen Verfahren [8], das den für isotrope Strömungen gültigen Zusammenhang

$$\lambda^2 = \frac{\langle v_x^2 \rangle}{\left\langle \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 \right\rangle} \quad (5.7)$$

ausnutzt. Gleichung (5.7) kann unter der Annahme der Isotropie direkt aus der Definition (3.34) der Taylorschen Längenskala hergeleitet werden (siehe etwa [90]). Problematisch ist allerdings die Frage nach der korrekten Bestimmung des Gradienten der Geschwindigkeit: Aufgrund der endlichen räumlichen Auflösung des Sensors und des den Daten überlagerten Messrauschens (siehe dazu auch Kapitel 8 und Ref. [90]) liefert eine einfache Abschätzung des Gradienten über einen Differenzenquotienten auf der kleinsten zugänglichen Längenskalen meist sehr unzuverlässige Ergebnisse. Um dieses Problem zu umgehen, wird die partielle Ableitung des Geschwindigkeitsfelds nach  $x$  durch Differenzenquotienten über die variable Distanz  $r$  genähert:

$$\lambda^2 = \lim_{r \rightarrow 0} l^2(r),$$

$$l^2(r) = \frac{\langle v_x(x)^2 \rangle r^2}{\langle (v_x(x+r) - v_x(x))^2 \rangle}. \quad (5.8)$$

Um den Grenzübergang  $r \rightarrow 0$  zu vollziehen, fittet man ein Polynom zweiten Grades an die gemessenen Werte  $l^2(r)$ , wobei man Werte von  $r$ , die kleiner sind als die räumliche Auflösung des Sensors, vernachlässigt (siehe Abbildung 5.4). Dieses Verfahren liefert für die Taylorlänge einen Wert von  $\lambda = 6,6\text{mm}$ . Zum Vergleich: Die gemäß der Definition (3.34) aus der Autokorrelationsfunktion berechnete Taylorlänge beträgt  $8,3\text{mm}$  [90].

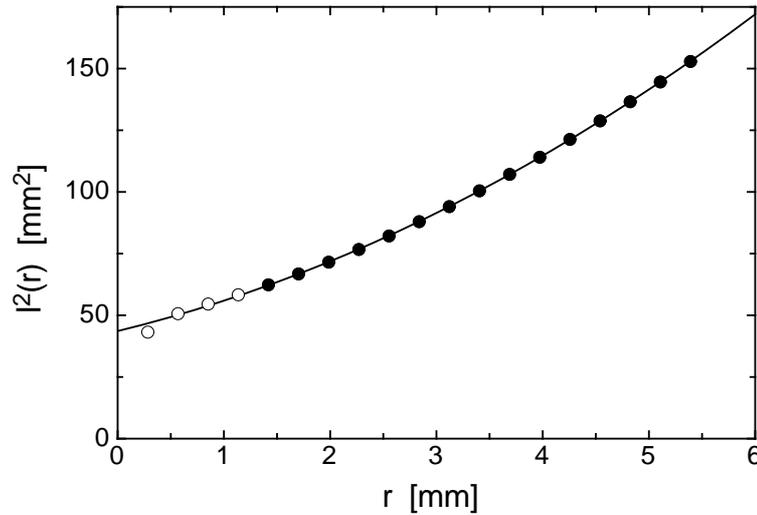


Abbildung 5.4: Der in Gleichung (5.8) definierte Differenzenquotient  $l^2$  als Funktion der Skala  $r$  (Kreise). Für Skalen grösser als die räumliche Auflösung des Sensors (volle Kreise) wurde zur Extrapolation gegen  $r = 0$  ein Polynom zweiten Grades angefügt (durchgezogene Linie). Dieses Verfahren liefert für die Taylorlänge  $\lambda$  einen Wert von  $6,6\text{mm}$ .

Zur Bestimmung der Kolmogorovschen Dissipationslänge  $\eta$  gemäß ihrer Definition (3.33) muss die mittlere Energiedissipationsrate  $\bar{\epsilon}$  abgeschätzt werden. Der in homogener und isotroper Strömung geltenden Näherung (3.31) zufolge wurde  $\bar{\epsilon}$  durch folgenden Ausdruck genähert:

$$\bar{\epsilon} = 15\nu \left\langle \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 \right\rangle. \quad (5.9)$$

Der Erwartungswert des quadrierten Gradienten kann nach Gleichung (5.7) aus der Taylorlänge  $\lambda$  berechnet werden. Für  $\eta$  ergibt sich damit ein Wert von  $\eta = 0,3\text{mm}$ . Eine Zusammenfassung der wichtigsten Daten der hier verwendeten Messung findet sich in Tabelle 5.1.

Re	$R_\lambda$	$W$	$\sqrt{v^2}$	$L$	$\lambda$	$\eta$
$2,7 \cdot 10^4$	190	2,26 m/s	0,38 m/s	67 mm	6,6 mm	0,25 mm

Tabelle 5.1: Die wichtigsten Daten der in Kap. 5 und 6 untersuchten Messung.

Abbildung 5.5(a) zeigt das Wellenzahlenspektrum  $E(k)$  des Datensatzes. Im Inertialbereich folgt das Spektrum näherungsweise dem nach Kolmogorov 1941 zu erwartenden Verlauf  $E(k) \propto k^{-5/3}$ . Abweichungen von der K41-Theorie zeigen sich für höhere Ordnungen  $n$  der Strukturfunktionen  $S_u^n$ . Die Skalenexponenten  $\zeta_n$  wurden mit der Methode der extended self-similarity (ESS) nach Benzi ermittelt [13]. Das Ergebnis ist in Abbildung 5.5(b) dargestellt und zeigt für  $n > 4$  deutliche Abweichungen von der Vorhersage des K41-Modells. Ein Fit der Daten nach Kolmogorov 1962 (Gleichung (3.47)) ergibt für den Intermittenzfaktor  $\mu$  einen Wert von 0,23, was mit dem in [6] angegebenen Wert von  $0,26 \pm 0,04$  gut übereinstimmt.

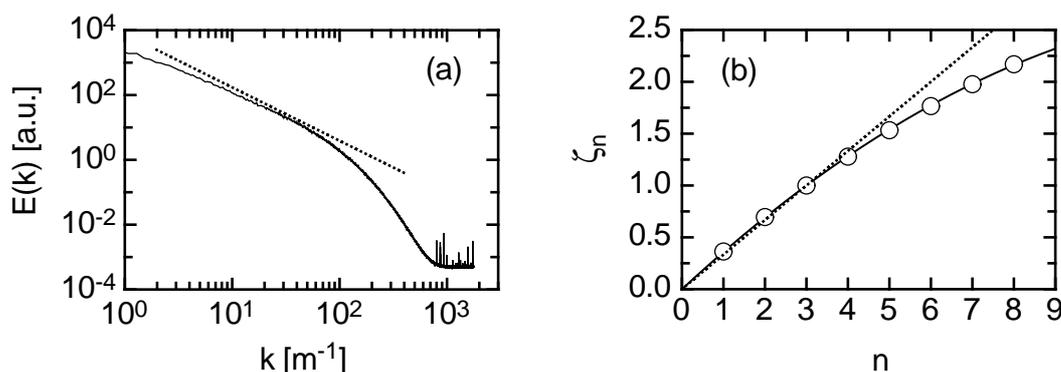


Abbildung 5.5: (a): Wellenzahlenspektrum des untersuchten Datensatzes. Die durchbrochene Linie entspricht dem von Kolmogorov 1941 vorhergesagten Verhalten  $E(k) \propto k^{-5/3}$ .

(b): Die mit Hilfe der ESS bestimmten Skalenexponenten  $\zeta_n$  als Funktion der Ordnung  $n$ . Für den Exponenten sechster Ordnung liefert der Datensatz einen Wert von 1,77, was innerhalb des Fehlers mit dem in [6] angegebenen Wert von  $1,74 \pm 0,04$  übereinstimmt. Die gepunktete Linie entspricht dem linearen Verlauf nach K41,  $\zeta_n = n/3$ , die durchgezogene Linie dem nach K62 zu erwartenden Verlauf  $\zeta_n = n/3 - \frac{\mu}{18}n(n-3)$ .

Auch die Analyse der Wahrscheinlichkeitsdichten  $p(u, r)$  des longitudinalen Geschwindigkeitsinkrements zeigt gute Übereinstimmung mit älteren Ergebnisse. Auf großen Skalen  $r \approx L$  sind die Dichten Gaußverteilt, hin zu kleineren Skalen zeigen sie zunehmend intermittente Formen, siehe Abbildung 5.6(a). Auf allen Skalen können die Dichten durch den Castaing-Fit (3.55) beschrieben werden, der angefittete Formparameter  $\lambda^2(r)$  findet sich in guter Übereinstimmung mit den in der Literatur angegebenen Werten (Abbildung 5.6(b)). Hinsichtlich der „klassischen“ Intermittenzanalysen weist der hier untersuchte Datensatz also die nach

dem bisherigen Stand der Turbulenzforschung zu erwartenden Merkmale der voll entwickelten Turbulenz auf (siehe dazu auch [90] und [92]). Die mit diesen Daten gewonnenen Ergebnisse, insbesondere auch die der im folgenden Kapitel vorgestellten Markowanalyse, dürfen also als typisch für experimentelle turbulente Daten gelten.

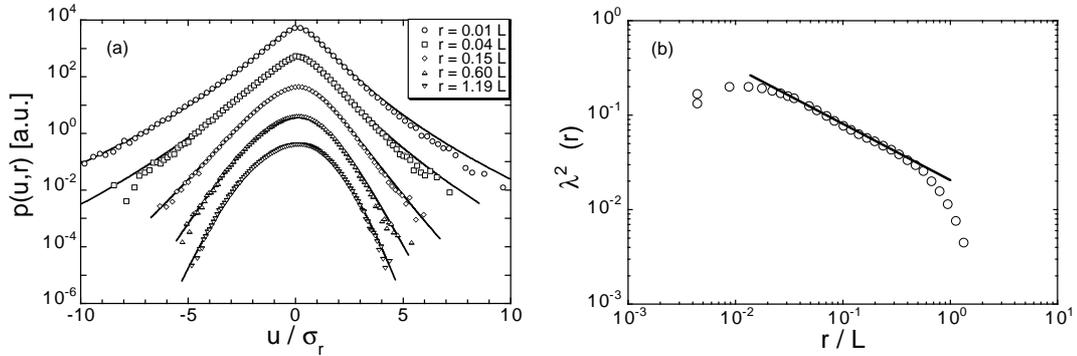


Abbildung 5.6: (a): Die Wahrscheinlichkeitsdichten  $p(u,r)$  des Geschwindigkeitsinkrements  $u(r)$  (offene Symbole) für die Skalen (von oben nach unten):  $r = 0,01L \approx 3\eta$ ,  $r = 0,04L$ ,  $r = 0,15L$ ,  $r = 0,6L$  und  $r = 1,2L$ . Die durchgezogenen Linien sind Fits an die Daten nach der Formel (3.55) von Castaing. Die Dichten wurden auf ihre jeweiligen Standardabweichungen  $\sigma_r$  normiert und der Übersichtlichkeit halber in vertikaler Richtung gegeneinander verschoben.

(b): Der durch Castaing-Fits auf mehreren Skalen  $r$  bestimmte Formparameter  $\lambda^2$  als Funktion der Längenskala  $r$ . Im Bereich  $0,01L \leq r \leq L$  lässt sich  $\lambda^2$  in guter Näherung durch ein Potenzgesetz beschreiben:  $\lambda^2 \propto r^\beta$ . Der entsprechende Fit (durchgezogene Linie) ergibt einen Wert von  $\beta = 0,59$ , in Übereinstimmung mit den in [26] angegebenen Werten.



# Kapitel 6

## Markowanalyse experimenteller Daten

### 6.1 Vorbemerkungen

Die Vorgehensweise einer Analyse experimenteller Daten auf dem Hintergrund der Markowprozesse ist durch die Mathematik bereits im wesentlichen vorgegeben: Zunächst muss anhand der Daten überprüft werden, ob die bedingten Wahrscheinlichkeitsdichten  $p(u_1, r_1 | u_2, r_2; \dots; u_N, r_N)$  die Bedingung (4.2) für einen Markowprozess erfüllen. Ist das der Fall, können ausgehend von den Definitionen (4.6) und (4.5) die Kramers–Moyal–Koeffizienten  $D^{(k)}(u, r)$  aus den bedingten Momenten  $M^{(k)}(u, r, \Delta r)$  abgeschätzt werden. Letztere sind leicht messbare Größen. Gelingt es ausserdem zu zeigen, dass der Koeffizient vierter Ordnung verschwindet bzw. keinen messbaren Einfluss auf die Statistik des Geschwindigkeitsinkrements hat, so wird die Evolution der Wahrscheinlichkeitsdichten  $p(u, r)$  und  $p(u, r | u_0, r_0)$  durch die Fokker–Planck–Gleichung beschrieben. Um dieses Ergebnis zu verifizieren, werden die Lösungen der so erhaltenen Fokker–Planck–Gleichung abschliessend mit den empirisch bestimmten Dichten verglichen.

Zur Vereinfachung der Notation werden Geschwindigkeiten und Geschwindigkeitsinkremente im folgenden dimensionslos in Einheiten der Grösse  $\sigma_\infty$  angegeben. Sie ist definiert als:

$$\sigma_\infty^2 = 2 \langle v_x^2 \rangle. \quad (6.1)$$

Diese Wahl motiviert sich aus der Tatsache, dass  $\sigma_\infty^2$  der Grenzwert der Strukturfunktion  $S_u^2(r)$  zweiten Grades für große Skalen  $r$  ist. Dies folgt direkt aus dem Zusammenhang (3.27) zwischen  $S_u^2(r)$  und der Autokorrelationsfunktion  $R(r)$  der Geschwindigkeitsfluktuationen  $v_x$  und der Tatsache, dass  $R(r)$  für große  $r$  gegen Null geht:

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} S_u^2(r) &= \lim_{r \rightarrow \infty} 2 \langle v_x^2 \rangle (1 - R(r)) \\ &= 2 \langle v_x^2 \rangle = \sigma_\infty^2. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Für den hier untersuchten Datensatz beträgt  $\sigma_\infty$  etwa  $0,54m/s$ .

## 6.2 Test der Markoweigenschaften

Um in einem streng mathematischen Sinn zu beweisen, dass das Geschwindigkeitssinkrement  $u_r$  einem Markowprozess gehorcht, müsste die Bedingung (4.2) für alle positiven Werte von  $N \geq 3$  und jede mögliche Kombination von Skalen  $r_1, \dots, r_N$  überprüft werden. Das ist offensichtlich unmöglich. Im Experiment kann Gleichung (4.2) nur für den Fall  $N = 3$  überprüft werden:

$$p(u_1, r_1 | u_2, r_2; u_3, r_3) = p(u_1, r_1 | u_2, r_2). \quad (6.3)$$

Die Beschränkung auf den Fall  $N = 3$  liegt in der endlichen Anzahl von Messwerten für die Geschwindigkeit  $v_x$  begründet. Numerisch wird die zweifach bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte  $p(u_1, r_1 | u_2, r_2; u_3, r_3)$  durch einen Tensor dritter Stufe repräsentiert. Teilt man den Wertebereich der Geschwindigkeitsinkremente  $u_i$  in 100 Klassen ein (was eine eher grobe Auflösung ist), so hat dieser Tensor  $100 \times 100 \times 100 = 10^6$  Komponenten. Mit vertretbarem Aufwand kann man experimentell Zeitserien mit typischerweise  $10^7$  Werten gewinnen. In diesem Fall sind die Komponenten des Tensors von durchschnittlich je 10 Werten bestimmt. Die Tatsache, dass die gemessenen Ereignisse um  $u_i = 0$  zentriert liegen (vergleiche Abb. 5.6) ermöglicht zwar quantitative Aussagen für die zweifach bedingten Dichten  $p(u_1, r_1 | u_2, r_2; u_3, r_3)$ , Verteilungen höherer Ordnung sind experimentell jedoch nicht zugänglich.

Die im folgenden diskutierten Ergebnisse für die bedingten Wahrscheinlichkeitsdichten wurden mit einer Einteilung von 201 Klassen für die Geschwindigkeitsinkremente gewonnen. In der Praxis werden die Inkremente  $u_i$  dazu auf ganzzahlige Werte zwischen  $-100$  und  $+100$  abgebildet:  $-100 \leq u_i \leq +100$ . Durch einfaches Abzählen erhält man die Anzahl  $N(u_1, u_2, u_3)$  von Ereignissen, bei denen die Inkremente  $u_1, u_2$  und  $u_3$  gemeinsam aufgetreten sind. Normiert mit der Anzahl  $N$  aller überhaupt gemessener Ereignisse erhält man aus  $N(u_1, u_2, u_3)$  eine Schätzung für die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte  $p(u_1, r_1; u_2, r_2; u_3, r_3)$ . Durch Integration gemäß Gleichung (3.15) lässt sich aus ihr die Dichte  $p(u_2, r_2; u_3, r_3)$  bestimmen. Mit Kenntnis dieser beiden Verteilungen kann, nach Gleichung (4.1), die bedingte Dichte  $p(u_1, r_1 | u_2, r_2; u_3, r_3)$  berechnet werden. Die Bestimmung der einfach bedingten Dichte  $p(u_1, r_1 | u_2, r_2)$  erfolgt analog.

Abbildung 6.1 zeigt den Vergleich zwischen einer einfach und einer zweifach bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte. Die Inkremente wurden in diesem Fall auf den Skalen  $r_1 = \lambda$ ,  $r_2 = L/2$  und  $r_3 = L$  berechnet ( $L$  ist die integrale Längenskala,  $\lambda$  die Taylurlänge). Die gute Übereinstimmung entsprechender Konturlinien in Abbildung 6.1(a) sowie die Schnitte durch die zweidimensionale Darstellung in 6.1(b) zeigen, dass die zweifach bedingte Dichte  $p(u_1, r_1 | u_2, r_2; u_3 = 0, r_3)$  in diesem Fall tatsächlich gleich der einfach bedingten Dichte  $p(u_1, r_1 | u_2, r_2)$  ist. Ein ähnliches Ergebnis findet sich auch, wenn man für das Inkrement  $u_3$  auf der grössten Skala  $r_3$  den Wert  $u_3 = -\sigma_\infty$  wählt, siehe Abbildung 6.2. Für diese spezielle Wahl der Skalen  $r_i$  ist Gleichung (6.3) also in der Tat erfüllt.

Ein anderes Bild ergibt sich allerdings, wenn man den Abstand zwischen den Skalen  $r_i$  kleiner wählt. Für Abbildung 6.3 wurde  $r_1 = L/2 - \lambda/4$ ,  $r_2 = L/2$  und  $r_3 = L/2 + \lambda/4$  verwendet. In diesem Fall weichen die Konturlinien von  $p(u_1, r_1 | u_2, r_2; u_3 =$

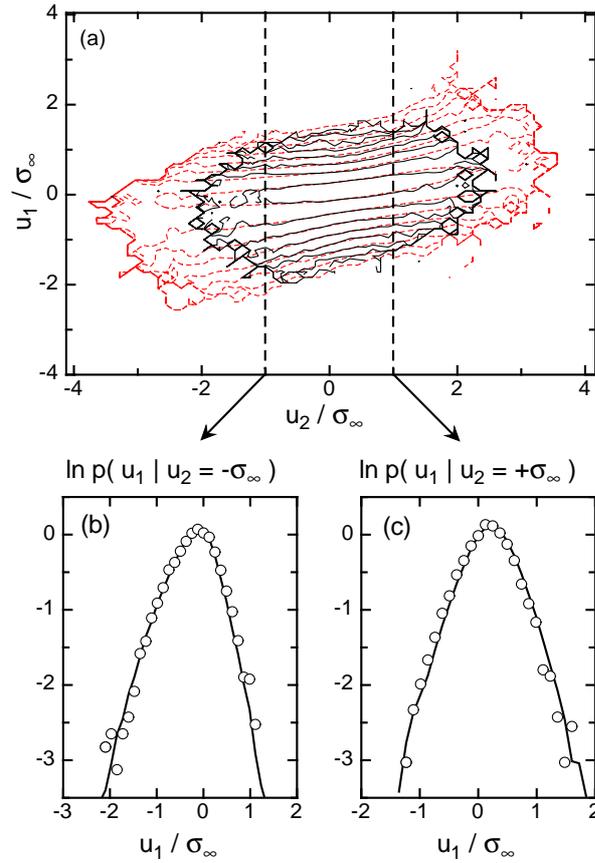


Abbildung 6.1: (a) Konturliniendarstellung der bedingten Dichten  $p(u_1, r_1 | u_2, r_2)$  (durchbrochene Linien) und der zweifach bedingten Dichte  $p(u_1, r_1 | u_2, r_2; u_3 = 0, r_3)$  (durchgezogene Linien) für  $r_1 = \lambda$ ,  $r_2 = L/2$  und  $r_3 = L$ . (b) und (c): Schnitte durch die bedingten Dichten für  $u_2 = \pm\sigma_\infty$ . Offene Kreise:  $p(u_1, r_1 | u_2, r_2; u_3 = 0, r_3)$ , durchgezogene Linien:  $p(u_1, r_1 | u_2, r_2)$ .

$0, r_3)$  und  $p(u_1, r_1 | u_2, r_2)$  deutlich voneinander ab, die notwendige Bedingung (6.3) ist in diesem Fall nicht erfüllt.

Die bisher diskutierten Ergebnisse deuten darauf hin, dass Gleichung (6.3) erfüllt ist, wenn die Skalen  $r_i$  und die Differenzen  $r_{i+1} - r_i$  zwischen ihnen groß sind, wohingegen sie verletzt ist, wenn die Abstände zwischen den Skalen zu klein werden. Es scheint also eine endliche Schrittweite  $l_{mar}$  zu geben, oberhalb derer das Geschwindigkeitsinkrement Markoweigenschaften besitzt. Eine solche Grenze existiert für alle realen physikalischen Prozesse, die durch stochastische Gleichungen beschrieben werden. So kann z.B. die Brownsche Bewegung erst auf Skalen, die groß sind im Vergleich zur mittleren freien Weglänge der Moleküle, als stochastischer Prozess beschrieben werden.

Um die Schrittweite  $l_{mar}$  zu bestimmen, wurde ein statistisches Testverfahren angewandt, der sogenannte Wilcoxon-Test. Dieser soll im folgenden kurz beschrieben werden, eine ausführliche Beschreibung dieses Testverfahrens findet sich z.B. in [22]. Man betrachtet zwei stochastische Variablen  $x$  und  $y$ .  $x$  bezeichnet in diesem

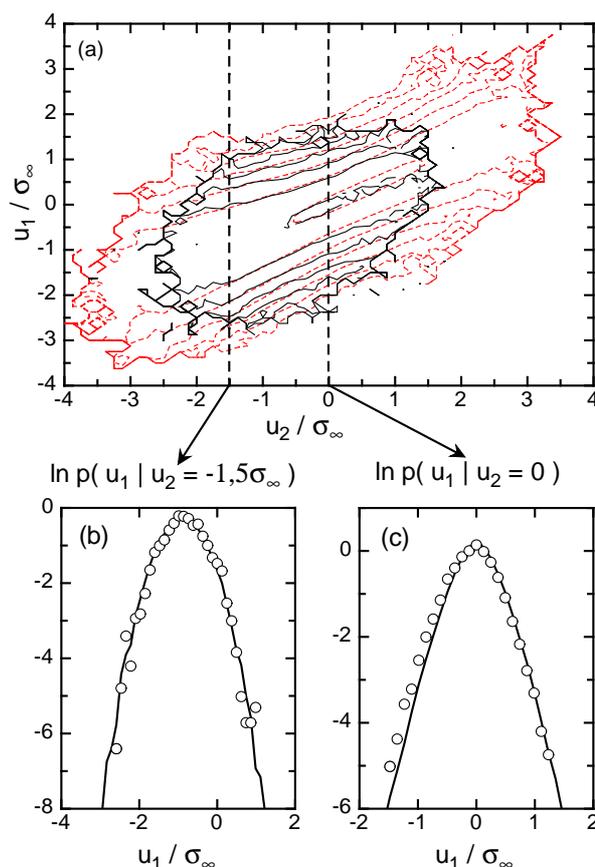


Abbildung 6.2: (a) Konturliniendarstellung der bedingten Dichten  $p(u_1, r_1 | u_2, r_2)$  (durchbrochene Linien) und der zweifach bedingten Dichte  $p(u_1, r_1 | u_2, r_2; u_3 = -\sigma_\infty, r_3)$  (durchgezogene Linien) für  $r_1 = \lambda$ ,  $r_2 = L/2$  und  $r_3 = L$ . (b) und (c): Schnitte durch die bedingten Dichten für  $u_2 = -1,5\sigma_\infty$  und  $u_2 = 0$ . Kreise:  $p(u_1, r_1 | u_2, r_2; u_3 = 0, r_3)$ , durchgezogene Linien:  $p(u_1, r_1 | u_2, r_2)$ .

Fall das Geschwindigkeitsinkrement  $u_1$ , das auf Skala  $r_1$  gemessen wurde unter der Voraussetzung, dass auf Skala  $r_2$  das Inkrement  $u_2$  aufgetreten ist. Entsprechend ist  $y$  das auf  $u_2$  und  $u_3$  bedingte Inkrement  $u_1$ :

$$\begin{aligned} x &= x(u_2, r_1, r_2) = u_1(r_1)|_{u_2(r_2)}, \\ y &= y(u_2, u_3, r_1, r_2, r_3) = u_1(r_1)|_{u_2(r_2), u_3(r_3)}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Die Hypothese, die zu testen ist, lautet somit

$$p(x) = \tilde{p}(y), \quad (6.5)$$

wobei die beiden Wahrscheinlichkeitsdichten  $p$  und  $\tilde{p}$  beide unbekannt sind. Es werden nun zwei Stichproben  $x_1, \dots, x_n$  und  $y_1, \dots, y_m$  von *unabhängigen* Realisierungen von  $x$  und  $y$  gemessen. Die Bedingung der Unabhängigkeit der Stichproben bedeutet, dass die räumlichen Intervalle, in denen die einzelnen  $x_i$  und  $y_j$  gemessen werden,

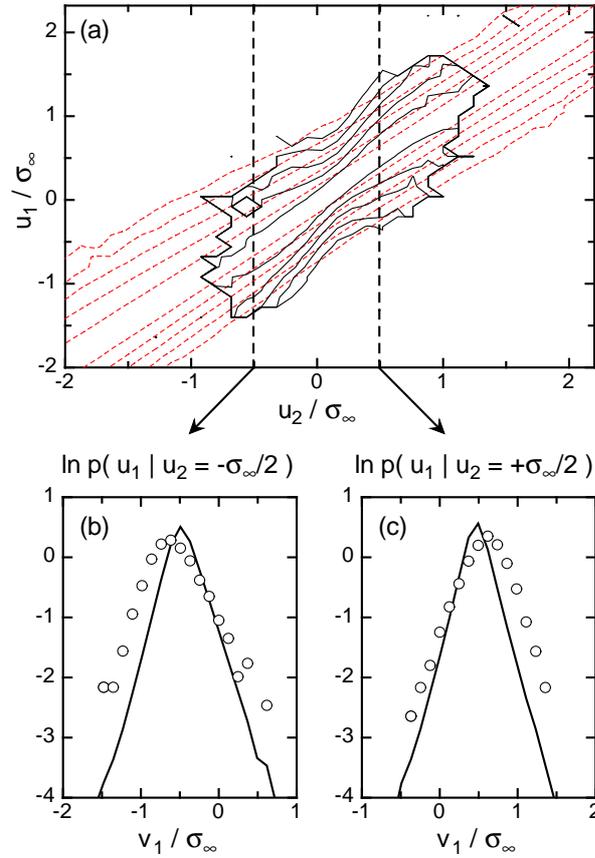


Abbildung 6.3: (a) Konturliniendarstellung der bedingten Dichten  $p(u_1, r_1 | u_2, r_2)$  (durchbrochene Linien) und der zweifach bedingten Dichte  $p(u_1, r_1 | u_2, r_2; u_3 = 0, r_3)$  (durchgezogene Linien) für  $r_1 = L/2 - \lambda/4$ ,  $r_2 = L/2$  und  $r_3 = L/2 + \lambda/4$ . (b) und (c): Schnitte durch die bedingten Dichten für  $u_2 = \pm\sigma_\infty$ . Offene Kreise:  $p(u_1, r_1 | u_2, r_2; u_3 = 0, r_3)$ , durchgezogene Linien:  $p(u_1, r_1 | u_2, r_2)$ .

sich (i) nicht überlappen dürfen und (ii) einen Abstand von mindestens der Korrelationslänge  $L$  haben müssen (siehe dazu auch [111]). Diese beiden Bedingungen führen bei der hier betrachteten Messung dazu, dass nur etwa 0,5% der ursprünglich  $10^7$  Daten für den Test verwendet werden kann. Dies ist ein weiterer Grund dafür, weshalb die Markowbedingung (4.2) nur für den Spezialfall  $N = 3$  überprüft werden kann.

Die gemessenen Stichproben von  $x$  und  $y$  werden zusammen in aufsteigender Reihenfolge sortiert. Man erhält eine Serie der Art

$$x_1 < x_2 < y_1 < x_3 < y_2 < y_3 < x_4 < \dots \quad (6.6)$$

Um die Hypothese  $p(x) = \tilde{p}(y)$  zu testen, bestimmt man die Anzahl der Inversionen. Die Anzahl der Inversionen für ein  $y_i$  ist einfach die Anzahl der  $x_j$ , die kleiner sind als  $y_i$ . Im obigen Beispiel bildet  $y_1$  zwei Inversionen (mit  $x_1$  und  $x_2$ ), für  $y_2$  sind es drei (mit  $x_1$ ,  $x_2$  und  $x_3$ ).

Mit  $Q$  sei die Gesamtzahl aller Inversionen bezeichnet, die man durch Summation über alle  $y_i$  erhält. Falls die Hypothese  $p = \tilde{p}$  gilt, so ist  $Q$  eine Gaußverteilte Zufallsvariable [22]. Ihr Mittelwert ist durch

$$\langle Q \rangle_{p=\tilde{p}} = \frac{m n}{2} \quad (6.7)$$

gegeben. Betragen die Längen  $m$  bzw.  $n$  der Stichproben  $\{x_i\}$  und  $\{y_i\}$  jeweils mindestens 25 Werte, kann die Standardabweichung  $\sigma$  näherungsweise zu

$$\sigma(m, n)_{p=\tilde{p}} = \sqrt{\frac{nm(n+m+1)}{12}}. \quad (6.8)$$

berechnet werden.

Abweichungen vom Erwartungswert (6.7) misst man üblicherweise durch den Absolutwert  $q$  der Differenz zwischen der experimentell bestimmten Anzahl von Inversionen  $Q$  und dem unter der Annahme  $p = \tilde{p}$  theoretisch bestimmten Wert  $\langle Q \rangle_{p=\tilde{p}}$ :

$$q = \left| Q - \langle Q \rangle_{p=\tilde{p}} \right| = q(u_2, u_3, r_1, r_2, r_3). \quad (6.9)$$

Die Hypothese wird nur dann akzeptiert, wenn der gemessene Wert von  $q$  unterhalb eines gewissen, zum Signifikanzniveau gehörigen, Grenzwerts  $q_\alpha$  liegt.  $q_\alpha$  wird so bestimmt, dass die Wahrscheinlichkeit, bei  $p = \tilde{p}$  einen Wert von  $q$  grösser als  $q_\alpha$  zu messen, gleich  $\alpha$  ist:

$$\alpha = W(q > q_\alpha | p = \tilde{p}). \quad (6.10)$$

Da  $Q$  Gaußverteilt ist (siehe oben), kann  $q_\alpha$  in Abhängigkeit von den Längen  $n$  und  $m$  der Stichproben mit Hilfe der inversen Fehlerfunktion berechnet werden [22]. Lehnt man die Hypothese aufgrund eines Testresultats  $q > q_\alpha$  ab, so tut man dies nach (6.10) mit einer Wahrscheinlichkeit von  $\alpha$  zu unrecht. Man wählt  $\alpha$  daher üblicherweise sehr klein, ein typischer Wert ist 5%. Anders formuliert: Bei einem Signifikanzniveau von fünf Prozent kann man bei einem negativen Ausgang des Tests (d.h.  $q > q_\alpha$ ) die Hypothese mit 95%-iger Sicherheit als falsch ablehnen.

Nach der Definition (6.4) von  $x$  und  $y$  ist  $q$  eine Funktion von der Geschwindigkeitsinkremente  $u_2$  und  $u_3$  sowie der Skalen  $r_1$ ,  $r_2$  und  $r_3$ . Um die Anzahl der Parameter zu reduzieren, wurde  $u_3 = 0$  gesetzt und die Abstand zwischen den Skalen  $r_{i+1}$  und  $r_i$  für alle  $i$  gleich gewählt:  $\Delta r = r_3 - r_2 = r_2 - r_1$ .  $q$  ist dann nur noch eine Funktion der Basislänge  $r_1$ , der Schrittweite  $\Delta r$  und des Geschwindigkeitsinkrements  $u_2$ .

Abbildung 6.4(a) zeigt das Ergebnis des Test für die Basislänge  $r_1 = L/2$  und eine Schrittweite von  $\Delta r = 2\lambda$  für alle Werte von  $u_2$ . Das Signifikanzniveau lag in diesem Fall bei fünf Prozent. Damit die Hypothese akzeptiert werden kann, dürfen demnach nur fünf Prozent der Testergebnisse negativ ausfallen. In der Tat sind nur 8 der insgesamt 163 Testergebnisse (d.h. 4,9%) negativ. Der Test liefert in diesem Fall also keinen Grund dafür, die Hypothese als falsch abzulehnen.

Wählt man die Schrittweite  $\Delta r$  kleiner, so erhält man ein völlig anderes Bild. In Abbildung 6.4(b) wurde eine Schrittweite von  $\Delta r = \lambda/4$  gewählt, die übrigen

Parameter wurden beibehalten. Bis auf drei Werte (von in diesem Fall etwa 80) fällt das Ergebnis des Tests negativ aus, die Hypothese muss in diesem Fall eindeutig als falsch verworfen werden.

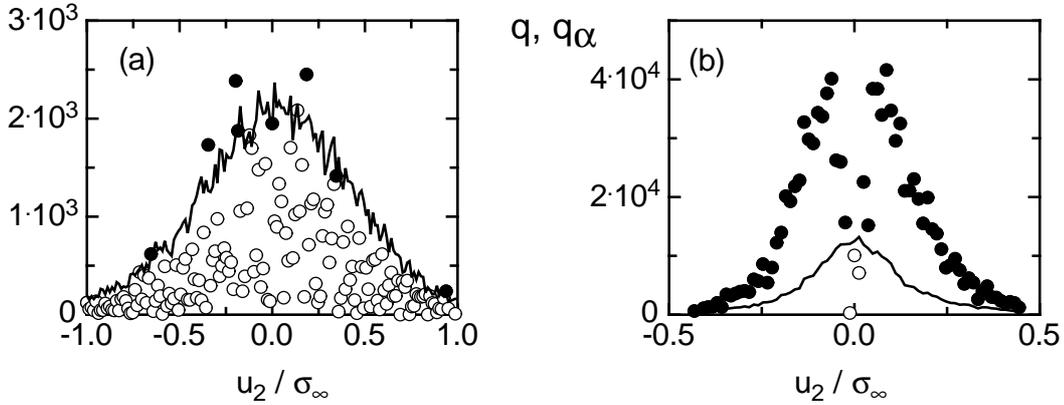


Abbildung 6.4:  $q$  (Kreise) und  $q_{\alpha=0,05}$  (durchgezogene Linien) als Funktion des Inkrements  $u_2$  für zwei verschiedene Kombinationen von Skalen. Die vollen Kreise markieren Werte von  $q$  mit  $q > q_{\alpha}$ .

(a):  $r_1 = L/2$  und  $\Delta r = r_2 - r_1 = r_3 - r_2 = 2\lambda$ .

(b):  $r_1 = L/2$  und  $\Delta r = r_2 - r_1 = r_3 - r_2 = \lambda/4$ .

Um dieses Verhalten zu quantifizieren, wird im folgenden der Absolutbetrag  $t$  der auf Mittelwert Null und Standardabweichung eins normierten Anzahl von Inversionen betrachtet:

$$t := \frac{q}{\sigma(m, n)_{p=\tilde{p}}} = \frac{|Q - \langle Q \rangle_{p=\tilde{p}}|}{\sigma(m, n)_{p=\tilde{p}}} = t(r, \Delta r). \quad (6.11)$$

Falls die Hypothese  $p = \tilde{p}$  wahr ist, ist  $t$  der Absolutwert einer Gaußverteilten Zufallsvariablen mit Mittelwert Null und Standardabweichung eins. Der Erwartungswert  $\langle t \rangle$  (wobei die Mittelung über  $u_2$  erfolgt) kann für diesen Fall leicht berechnet werden und ergibt sich zu  $\sqrt{2/\pi} \approx 0,8$ . Liegt der gemessene Wert von  $\langle t \rangle$  über diesem Wert, muss die Hypothese verworfen werden, Gleichung (6.3) gilt dann nicht.

In Abbildung 6.5 ist der Erwartungswert  $\langle t \rangle$  für die Basislängen  $r_1 = \lambda, L/2, L$  jeweils als Funktion der Schrittweite  $\Delta r$  aufgetragen. Für große Werte von  $\Delta r$  liefert der Test keinen Grund, die Hypothese  $p = \tilde{p}$  abzulehnen. Bei kleineren Schrittweiten ist die Gleichheit der Verteilungen  $p$  und  $\tilde{p}$  dagegen erwartungsgemäß nicht gegeben. Die Skala, ab der die Markowbedingung nicht mehr erfüllt ist, ist von der Größenordnung der Taylorlänge  $\lambda$  und zeigt keine starke Abhängigkeit von der Wahl der Basislänge  $r_1$ . Dieses Ergebnis findet sich in guter Übereinstimmung mit den in [39] beschriebenen Ergebnissen eines  $\chi^2$ -Tests für die Mehrpunktstatistik des turbulenten Geschwindigkeitsinkrements.

Um die sog. Markowlänge  $l_{mar}$  abzuschätzen, wurden drei verschiedene Verfahren angewandt. Abbildung 6.5 lässt erkennen, dass  $\langle t \rangle$  für kleine Werte von  $\Delta r$  (bis etwa

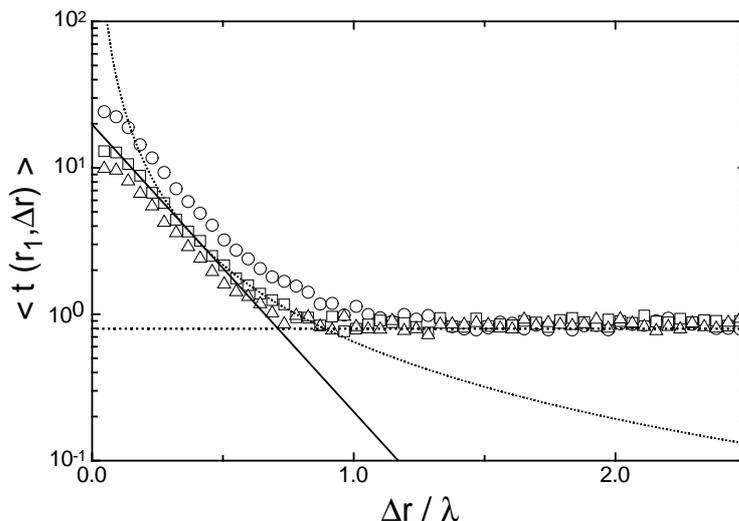


Abbildung 6.5: Der Erwartungswert  $\langle t \rangle$  als Funktion von  $\Delta r$  für die Basislängen  $r_1 = \lambda$  (Kreise),  $r_1 = L/2$  (Quadrate) und  $r_1 = L$  (Dreiecke). Um einen Schätzwert für die Markowlänge zu erhalten, wurde an die Daten für  $r_1 = L/2$  im Bereich  $0 < \Delta r \leq \lambda/2$  eine Exponentialfunktion angefitet (durchgezogene Linie), im Intervall  $\lambda/2 \leq \Delta r \leq \lambda$  wurde eine Potenzfunktion angepasst (durchbrochene Linie).

$\Delta r = \lambda/2$ ) durch einen exponentiellen Abfall beschrieben werden kann. Eines der Verfahren zur Bestimmung der Markowlänge besteht daher darin, im Intervall  $0 < \Delta r \leq \lambda/2$  eine Exponentialfunktion anzupassen und den Wert von  $\Delta r$  zu bestimmen, bei dem dieser Fit den Wert  $\sqrt{2/\pi} \approx 0,8$  annimmt. Für etwas größere Werte von  $\Delta r$ , in etwa im Intervall  $\lambda/2 \leq \Delta r \leq \lambda$  wird der Abfall von  $\langle t \rangle$  dagegen besser durch ein Potenzgesetz beschrieben. Dementsprechend besteht die zweite Methode darin, in diesem Intervall eine Potenzfunktion an die Daten anzupassen und wiederum den Schnittpunkt mit  $\langle t \rangle = \sqrt{2/\pi}$  zu bestimmen. Desweiteren wurde das in [64] vorgeschlagene Verfahren verwendet, nach dem die Markowlänge einfach durch den Wert von  $\Delta r$  abgeschätzt wird, bei dem der gemessene Erwartungswert  $\langle t \rangle$  zum ersten Mal um nicht mehr als zehn Prozent vom Idealwert  $\sqrt{2/\pi}$  abweicht.

Diese drei Methoden wurden jeweils für alle drei Basislängen durchgeführt. Der Mittelwert der so erhaltenen neun Werte liefert einen Schätzwert für  $l_{mar}$ , die Extrema der Werte eine Abschätzung des Fehlers. Das Ergebnis für den hier untersuchten Datensatz ist:  $l_{mar} = (0,9 \pm 0,2) \lambda$ . Innerhalb des Fehlers von  $l_{mar}$  stimmen beide Skalen also gut überein. Auch wenn kaum davon auszugehen ist, dass die hier gefundene Übereinstimmung zwischen beiden Skalen rein zufällig ist, kann doch aus diesem Ergebniss allein noch keine allgemein gültige Aussage darüber getroffen werden, ob Markow- und Taylorlänge in der Turbulenz übereinstimmen; eine solche Aussagen erfordert eine eingehende Analyse der Reynoldszahlabhängigkeit von  $l_{mar}$  in unterschiedlichen experimentellen Systemen (siehe dazu auch Kapitel 7). Aus diesem Grund werden im folgenden alle Längenskalen und Differenzen von Skalen in Einheiten der Markowlänge  $l_{mar} = 0,9\lambda$  und nicht der Taylorlänge  $\lambda$  angegeben.

### 6.3 Die Kramers-Moyal Koeffizienten

Nach Gleichungen (4.6) können die bedingten Momente  $M^k(u, r, \Delta r)$  aus den bedingten Dichten  $p(\tilde{u}, r - \Delta r | u, r)$  berechnet werden. Diese wiederum können nach der im vorhergehenden Kapitel besprochenen Methode einfach durch auszählen der Anzahl  $N(\tilde{u}, u)$  der Ereignisse  $(\tilde{u}, u)$  bestimmt werden. Nimmt man an, dass der Fehler von  $N(\tilde{u}, u)$  durch  $\sqrt{N(\tilde{u}, u)}$  gegeben ist, so kann man über eine einfache Fehlerrechnung auch die Fehler der Koeffizienten  $M^k(u, r, \Delta r)$  bestimmen.

Um Schätzwerte für die Koeffizienten  $D_k(u, r)$  zu erhalten, müssen die bedingten Momente  $M^k(u, r, \Delta r)$  schließlich nach Gleichung (4.5) gegen  $\Delta r = 0$  extrapoliert werden. Abbildung 6.6 zeigt den Koeffizienten erster Ordnung  $M^1(u, r, \Delta r)$  für exemplarisch gewählte feste Werte von  $u$  und  $r$  als Funktion von  $\Delta r$ . Es sind zwei deutlich voneinander verschiedene Bereiche zu erkennen: Für  $\Delta r > l_{mar}$  zeigt  $M^1$  eine in erster Näherung lineare Abhängigkeit von  $\Delta r$ , auf kleineren Skalen, bei denen die Markoweigenschaften nicht mehr erfüllt sind, zeigt sich ein davon stark abweichendes Verhalten.

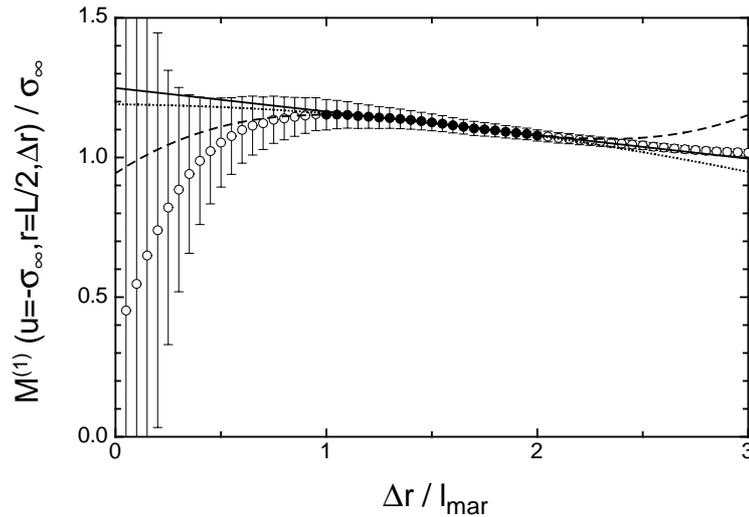


Abbildung 6.6: Der Koeffizient  $M^{(1)}(u, r, \Delta r)$  als Funktion von  $\Delta r$  für  $u = -\sigma_\infty$  und  $r = L/2$  (offene Kreise). Für  $\Delta r > l_{mar}$ , also in dem Bereich von Skalen, in dem die Markoweigenschaft als erfüllt betrachtet werden können, ist  $M^{(1)}$  in erster Näherung linear in  $\Delta r$ . Um  $M^{(1)}$  gegen  $\Delta r = 0$  zu extrapolieren, wurden die gemessenen Werte im Intervall  $l_{mar} \leq \Delta r \leq 2l_{mar}$  (volle Kreise) durch Polynome erster (volle Linie), zweiter (gepunktete Linie) und dritter Ordnung (durchbrochene Linie) angefitet.

Den Entwicklungsgleichungen (4.13) der Koeffizienten  $M^{(k)}$  zufolge sollte  $M^{(1)}$  für kleine Werte von  $\Delta r$  näherungsweise konstant sein. Aus Abbildung 6.6 wird jedoch ersichtlich, dass diese Näherung in dem Bereich, in dem die Markoweigenschaften erfüllt sind, allenfalls noch in erster Näherung gilt. Der Einfluss höherer Potenzen von  $\Delta r$  in der Entwicklung von  $M^{(1)}$  kann hier also bereits nicht mehr vernachlässigt werden.

Es ist jedoch nicht von vornherein möglich, eine Aussage darüber zu machen, bis zu welcher Ordnung die Entwicklungsterme berücksichtigt werden müssen. Aus diesem Grund wurden, um die Extrapolation gegen  $\Delta r = 0$  durchzuführen, an die gemessenen Daten Polynome unterschiedlicher Ordnungen angepasst. Abbildung 6.6 zeigt die Ergebnisse dieser Fits im Intervall  $l_{mar} \leq \Delta r \leq 2l_{mar}$  für Polynome der Ordnung eins, zwei und drei. Die Fits erster und zweiter Ordnung in  $\Delta r$  liefern extrapolierte Werte für  $D^{(1)}$ , die um weniger als fünf Prozent voneinander abweichen (1,25 bzw. 1,19), das Ausgleichspolynom dritter Ordnung dagegen einen deutlich kleineren Wert (0,94).

Bei der Beurteilung der Frage, welche der Extrapolationsmethoden das verlässlichste Ergebniss liefert, ist es lohnend, einen Blick auf den Verlauf der gefitteten Funktionen für  $\Delta r > 2l_{mar}$  zu werfen. Es zeigt sich (siehe Abbildung 6.6), dass in diesem Bereich die gemessenen Werte von  $M^{(1)}(\Delta r)$  am besten von der linearen Ausgleichsgeraden beschrieben wird, die Polynome höherer Ordnung, insbesondere das der dritten Ordnung, von den tatsächlichen Werten dagegen stark abweichen. Die Ergebnisse der fehlergewichteten least-square fits (nach [87]) bestätigen den Eindruck, dass das Polynom dritten Grades nicht sinnvollerweise zur Extrapolation verwendet werden kann: Die Koeffizienten des Ausgleichspolynoms dritten Grades haben Fehler, die durchweg größer sind als die Werte der Koeffizienten selbst. Das Polynom dritten Grades ist numerisch also nicht eindeutig bestimmt, für  $D^{(1)}$  etwa liefert diese Methode für den in Abbildung 6.6 dargestellten Fall einen Wert von  $0,9 \pm 1,1$ .

Aus diesen Gründen werden im folgenden zur Extrapolation von  $M^{(1)}$  gegen  $\Delta r = 0$  nur Polynome erster und zweiter Ordnung verwendet. Der Mittelwert der Ergebnisse beider Methoden liefert eine Abschätzung für  $D^{(1)}$ , die Abweichung zwischen den Ergebnissen eine untere Grenze für den Fehler des Driftkoeffizienten.

Abbildung 6.7 schließlich zeigt den Koeffizienten  $M^{(1)}$  für einige weitere ausgewählte Werte von  $u$  und  $r$  jeweils als Funktion von  $\Delta r$ . In allen Fällen können die gemessenen Werte durch Geraden bzw. Polynome zweiten Grades extrapoliert werden.

Die oben beschriebene Extrapolationsmethode führt zu einer erwähnenswerten Einschränkung für die kleinste Skala  $r$ , auf der die Koeffizienten  $D^k(u, r)$  noch bestimmt werden können. Um etwa den Driftkoeffizienten  $D^{(1)}(u, r)$  abzuschätzen, müssen die bedingten Momente  $M^{(1)}(u, r, \Delta r)$  im Intervall  $l_{mar} \leq \Delta r \leq 2l_{mar}$  berechnet werden. Es ist also notwendig, das Moment der bedingten Dichte  $p(u', r - 2l_{mar} | u, r)$  zu berechnen. Aus der Forderung, dass alle Skalen im Gültigkeitsbereich des Markowprozesses liegen müssen, folgt dann unmittelbar die Bedingung  $r - 2l_{mar} \geq l_{mar}$  bzw.  $r \geq 3l_{mar}$ . Unterhalb von  $r = 3l_{mar}$  können die Kramers-Moyal-Koeffizienten also prinzipiell nicht bestimmt werden.

Trägt man die extrapolierten Werte von  $D^{(1)}(u, r)$  zu festen Werten von  $r$  als Funktion des Geschwindigkeitsinkrements  $u$  auf, ergibt sich eine einfache funktionale Abhängigkeit des Driftkoeffizienten von  $u$ : Wie aus Abbildung 6.8 ersichtlich wird, kann  $D^{(1)}$  im Intervall  $3l_{mar} \leq r \leq L$  in guter Näherung durch eine Ursprungsgerade in  $u$  mit kleinen Korrekturen zweiter und dritter Ordnung beschrieben werden:

$$D^{(1)}(u, r) = -\gamma(r)u + \kappa u^2 - \epsilon(r)u^3. \quad (6.12)$$

Die Terme zweiter und dritter Ordnung in (6.12) sind klein in dem Sinn, dass auf

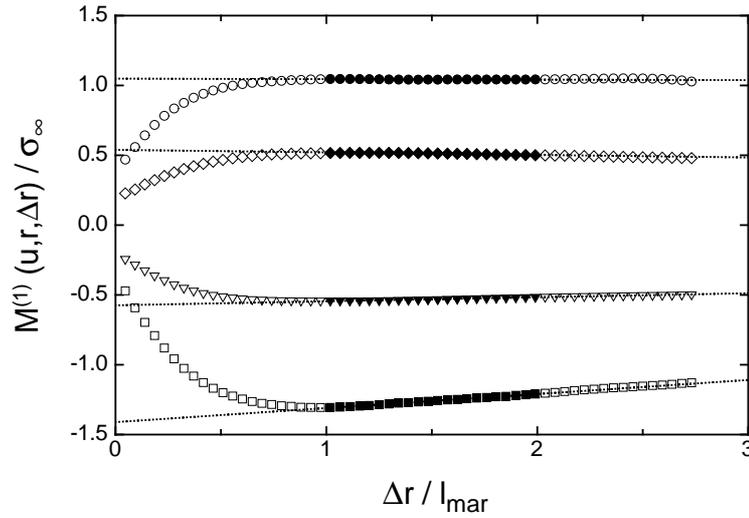


Abbildung 6.7: Der Koeffizient  $M^{(1)}(u, r, \Delta r)$  als Funktion von  $\Delta r$  für verschiedene Werte von  $u$  und  $r$ . Kreise:  $r = 3l_{\text{mar}}$ ,  $u = -\sigma_{\infty}$ . Rauten:  $r = L/2$ ,  $u = -0,5\sigma_{\infty}$ . Dreiecke:  $r = L/2$ ,  $u = +\sigma_{\infty}$ . Quadrate:  $r = L$ ,  $u = +\sigma_{\infty}$

den meisten Skalen  $r$  die Abweichungen zwischen einem rein linearen Fit und den experimentellen Werten in der Größenordnung der Fehler von  $D^{(1)}$  liegen (in Abb. 6.8 der Übersichtlichkeit halber nicht gezeigt). Bei größeren Skalen allerdings (in etwa ab  $r \geq L/2$ ) sind dieser Terme signifikant von Null verschieden: Auf der integralen Längenskala  $r = L$  weicht ein rein linearer Fit bei  $u = -2\sigma_{\infty}$  um etwa dreizehn Prozent von den experimentellen Daten ab. Diese Abweichung liegt deutlich über dem relativen Fehler von lediglich 3,3 Prozent an dieser Stelle. Im Vorgriff auf Kapitel 7 sei bemerkt, dass die Korrekturterme  $\kappa$  und  $\epsilon$  mit steigender Reynoldszahl verschwinden; es handelt sich hier allem Anschein nach um einen Effekt der vergleichsweise niedrigen Reynoldszahl von  $R_{\lambda} = 190$  dieser Messung.

Least-Square Fits an die extrapolierten Daten nach Gleichung (6.12) liefern Schätzungen für die Koeffizienten  $\gamma(r)$ ,  $\kappa(r)$  und  $\epsilon(r)$  sowie deren Fehler (hierbei werden, wie auch schon bei der Extrapolation von  $M^{(1)}$ , die gefitteten Daten mit ihrem Inversen Fehler gewichtet; Details zu diesem Verfahren finden sich in [87]). Abbildung 6.9 zeigt den linearen Koeffizienten  $\gamma$  als Funktion der Längenskala  $r$  sowohl für die lineare als auch für die quadratische Extrapolationsmethode. Die Ergebnisse beider Extrapolationsmethoden zeigen einen näherungsweise linearen Anstieg von Werten um eins am unteren Ende des Inertialbereichs auf Werte um 1,4 (für die lineare Methode) bzw. 1,3 (quadratische Extrapolation) am oberen Ende. Die größte auftretende relative Abweichung zwischen den verschiedenen Werten von  $\gamma$  beträgt acht Prozent.

Die Koeffizienten  $\kappa(r)$  und  $\epsilon(r)$  des quadratischen bzw. kubischen Terms in (6.12) können beide durch Ursprungsgeraden in  $r$  dargestellt werden, siehe Abbildung 6.10. Die Abweichungen zwischen den Ergebnissen der beiden Extrapolationsmethoden ist für diese Koeffizienten zwar deutlich größer ist als für den linearen, innerhalb ihrer jeweiligen Fehler stimmen beide jedoch gut überein.

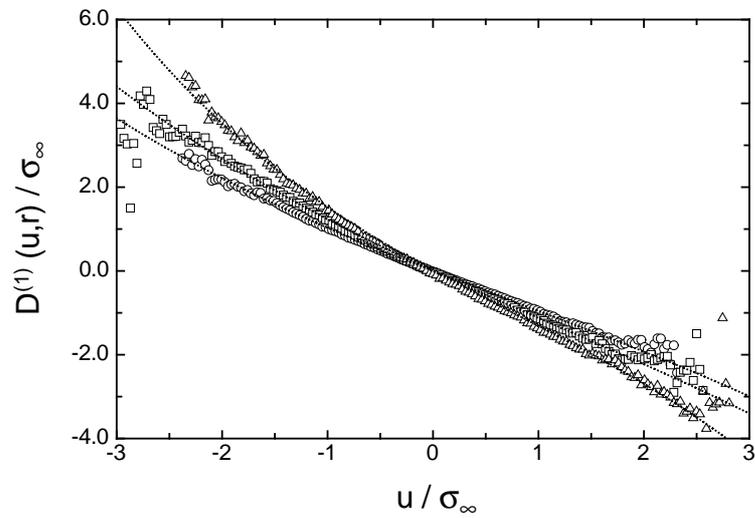


Abbildung 6.8: Der durch die lineare Extrapolationsmethode ermittelte Diffusionskoeffizient  $D^{(1)}(u,r)$  als Funktion des Geschwindigkeitsinkrements  $u$  für  $r = 3l_{\text{mar}}$  (Kreise),  $r = L/2$  (Quadrate) und  $r = L$  (Dreiecke). Die Linien sind Fits an die Daten gemäß Gleichung (6.12).

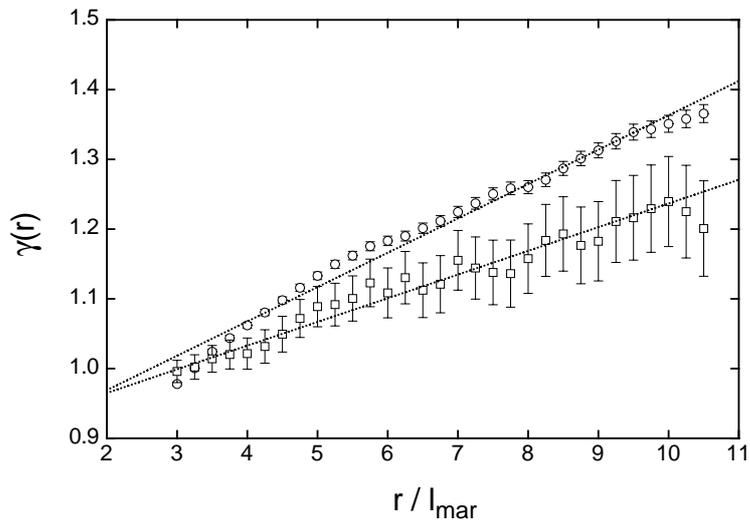


Abbildung 6.9: Die Steigung  $\gamma(r)$  des Diffusionskoeffizienten  $D^{(1)}(u,r)$  als Funktion der Skala  $r$  für die lineare (Kreise) und die quadratische Extrapolationsmethode (Quadrate).

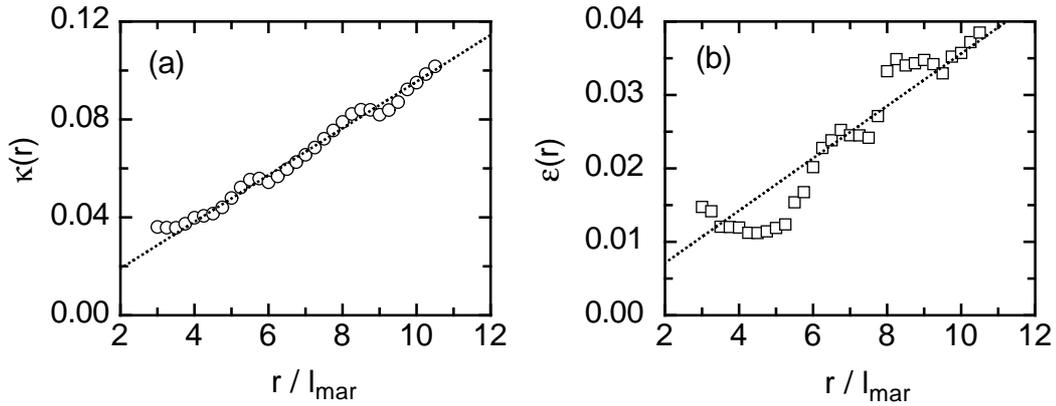


Abbildung 6.10: Quadratischer (offene Kreise, linke Skala) und kubischer (voll Equadrate, rechte Skala) Term in  $D^{(1)}$  als Funktion der Skala  $r$  für lineare Extrapolation. Beide Koeffizienten können als Ursprungsgeraden in  $r$  beschrieben werden (durchgezogene Linien). Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden hier die Ergebnisse der quadratischen Extrapolation nicht gezeigt. Auf die näherungsweise lineare Abhängigkeit der beiden Koeffizienten von der Skala  $r$  hat die Wahl der Extrapolationsmethode keinen Einfluss.

Auch für die Bestimmung des Diffusionskoeffizienten  $D^{(2)}$  erweist sich die Entwicklungsgleichung (4.13) als nützlich. Sie lautet für den Koeffizienten zweiter Ordnung:

$$M^{(2)}(\Delta r) = D^{(2)} + \frac{1}{2} \left( D^{(1)} \right)^2 \Delta r + \mathcal{O}(\Delta r^2). \quad (6.13)$$

Der lineare Term in der Entwicklung von  $M^{(2)}$  kann demnach eliminiert werden, wenn man den korrigierten Koeffizienten  $M_{\text{korrr}}^{(2)}$  betrachtet, der wie folgt definiert ist:

$$\begin{aligned} M_{\text{korrr}}^{(2)}(\Delta r) &= M^{(2)}(\Delta r) - \frac{1}{2} \left( M^{(1)} \right)^2 \Delta r \\ &= D^{(2)} + \mathcal{O}(\Delta r^2). \end{aligned} \quad (6.14)$$

Hierbei wurde verwendet, dass nach der Entwicklungsgleichung (4.13) der Zusammenhang  $M^{(1)} = D^{(1)} + \mathcal{O}(\Delta r)$  gilt.

Abbildung 6.11 zeigt den korrigierten Koeffizienten  $M_{\text{korrr}}^{(2)}$  als Funktion von  $\Delta r$ , wobei für die Skala  $r$  und das Inkrement  $u$  wiederum die Werte  $r = L/2$  und  $u = -\sigma_\infty$  gewählt wurden. Es ist deutlich zu erkennen, dass in dem Bereich, in dem die Markoweigenschaften erfüllt sind, die Entwicklungsterme der Ordnungen zwei und höher in Gleichung (6.14) nicht zu vernachlässigen sind. Wie auch schon im Fall der Koeffizienten  $M^{(1)}$  wurden daher an die gemessenen Werte Polynome unterschiedlicher Ordnungen angepasst, nämlich zweiter, dritter und vierter Ordnung. Da nach Gleichung (6.14) der lineare Entwicklungsterm des korrigierten Koeffizienten  $M_{\text{korrr}}^{(2)}$  verschwinden sollte, wurden die linearen Terme der Polynome auf Null gesetzt.

Es zeigt sich (siehe Abbildung 6.11), dass der tatsächliche Verlauf von  $M_{korr}^{(2)}$  in  $\Delta r$  durch ein Polynom zweiten Grades nur sehr unzureichend wiedergegeben wird. Dies gilt insbesondere für den Bereich  $\Delta r > 2\lambda$ , der durch die Polynome dritter und vor allem vierter Ordnung wesentlich besser approximiert wird. Bemerkenswert ist ausserdem, dass die extrapolierten Werte für die Polynome dritter und vierter Ordnung innerhalb ihrer Fehler übereinstimmen. Diese Ergebnisse sprechen dafür, dass im Fall des Diffusionskoeffizienten  $D^{(2)}$  Polynome dritter und vierter Ordnung die verlässlicheren Ergebnisse liefern. Aus diesem Grund werden im folgenden ausschließlich diese beiden Extrapolationsmethode zur Bestimmung von  $D^{(2)}$  verwendet werden.

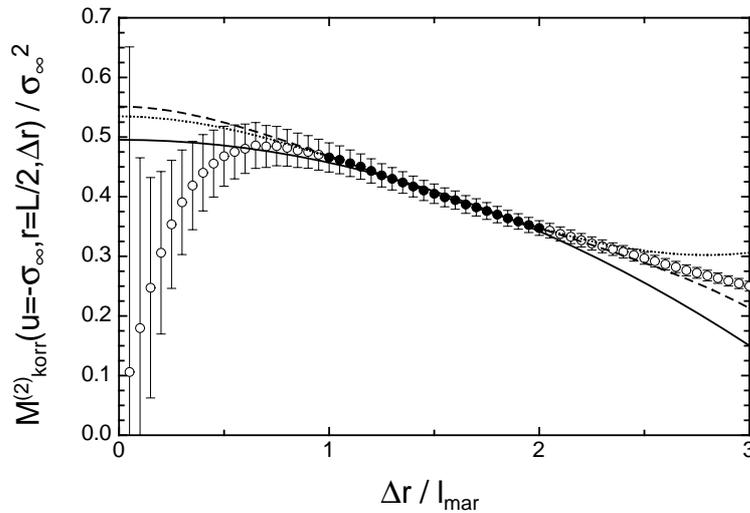


Abbildung 6.11: Der korrigierte Koeffizient  $M_{korr}^{(2)}(u, r, \Delta r)$  zweiter Ordnung als Funktion von  $\Delta r$  für  $r = L/2$  und  $u = -\sigma_{\infty}$ . Im Intervall  $l_{mar} \leq \Delta r \leq 2l_{mar}$  wurden Polynome zweiter (durchgezogene Linie), dritter (gepunktete Linie) und vierter Ordnung (durchbrochene Linie) angepasst, deren linearer Term jeweils Null ist.

Die Extrapolierten Diffusionskoeffizienten  $D^{(2)}(u, r)$  zeigen für alle Skalen  $r$  innerhalb des Inertialbereichs eine quadratische Abhängigkeit vom Geschwindigkeitssinkrement  $u$ , siehe Abbildung 6.12:

$$D^{(2)}(u, r) = \alpha(r) - \delta(r)u + \beta(r)u^2. \quad (6.15)$$

Wiederum wurden die Koeffizienten  $\alpha(r)$ ,  $\delta(r)$  und  $\beta(r)$  durch fehlergewichtete least-square fits an die extrapolierten Daten bestimmt. Die Abbildungen 6.13 und 6.14 zeigen die Ergebnisse dieser Fits für die  $r$ -Abhängigkeiten der Koeffizienten  $\alpha(r)$ ,  $\delta(r)$  bzw.  $\beta(r)$ . Die Koeffizienten nullter und erster Ordnung,  $\alpha$  und  $\delta$ , sind linear in der Skala  $r$ . Während  $\delta$  jedoch durch eine Ursprungsgerade beschrieben werden kann, weist  $\alpha$  einen von Null verschiedenen negativen Achsenabschnitt auf<sup>1</sup>. Der

<sup>1</sup> $D^{(2)}$  ist per Definition eine positive Grösse. Der negative Achsenabschnitt von  $\alpha(r)$  führt allerdings dazu, dass  $D^{(2)}$  auf kleinen Skalen für bestimmte Werte von  $u$  negativ wird. Da jedoch unterhalb von  $r = l_{mar}$  der stochastische Prozess ohnehin nicht als Markowsch betrachtet werden kann, führt dies zu keinem Widerspruch.

quadratische Term  $\beta$  weist keine systematische Abhängigkeit von der Skala  $r$  auf und kann näherungsweise als konstant angenommen werden.

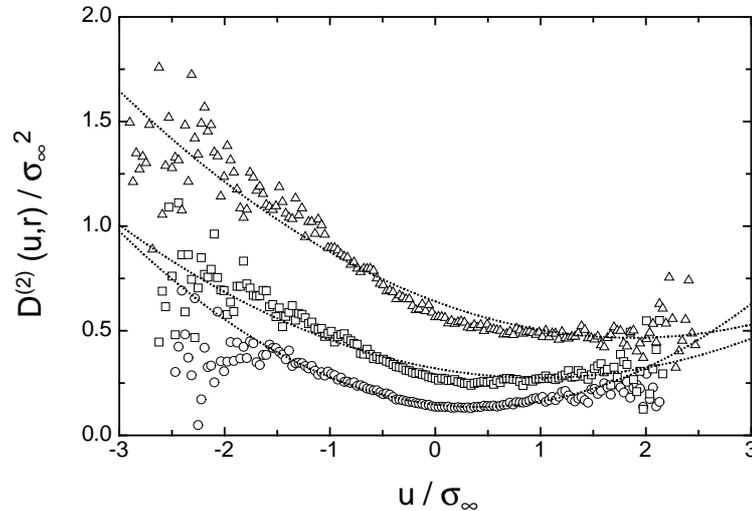


Abbildung 6.12: Der Driftkoeffizient  $D^{(2)}(u, r)$  als Funktion des Geschwindigkeitssinkrements  $u$  für  $r = 3l_{\text{mar}}$  (Kreise),  $r = L/2$  (Quadrate) und  $r = L$  (Dreiecke) (zur Extrapolation wurde hier ein Polynom vierten Grades verwendet). Die Linien sind Fits an die Daten gemäß Gleichung (6.15).

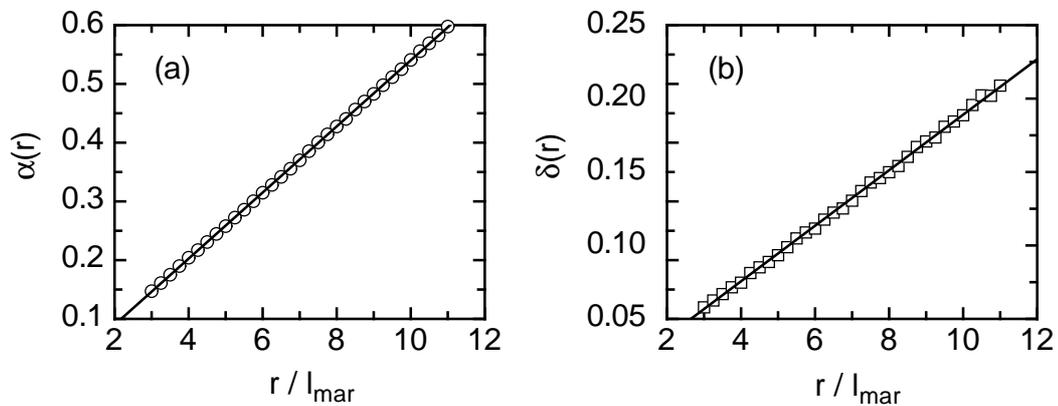


Abbildung 6.13: Konstanter (offene Kreise, linke Skala) und linearer (volle Quadrate, rechte Skala) Term in  $D^{(2)}$  als Funktion der Skala  $r$ . Beide Koeffizienten sind lineare Funktionen von  $r$  (durchgezogene Linien). Zur Extrapolation wurden in diesem Fall Polynome vierter Ordnung verwendet; auf die lineare Abhängigkeit der beiden Koeffizienten von der Skala  $r$  hat die Wahl der Extrapolationsmethode keinen Einfluss (die Ergebnisse der Extrapolation mit Polynomen dritter Ordnung sind hier aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht gezeigt).

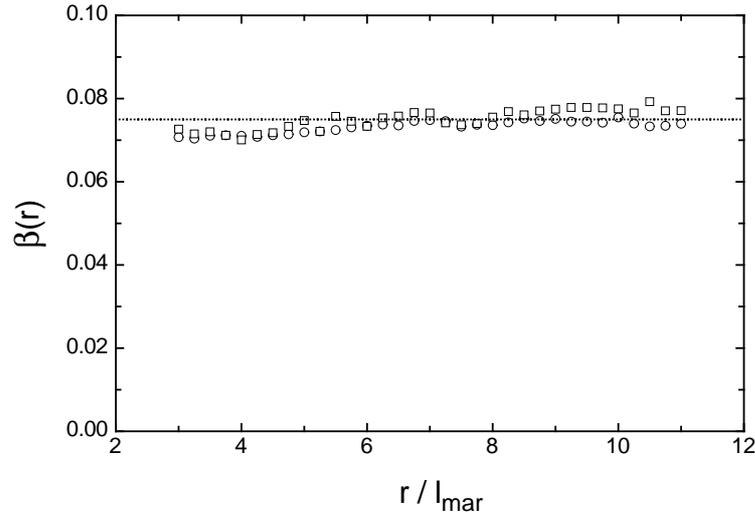


Abbildung 6.14: Der quadratische Term  $\beta$  in  $D^{(2)}$  als Funktion von  $r$ . Zur Extrapolation wurden Polynome dritter (Kreise) und vierter (Quadrate) Ordnung verwendet.

Zusammengefasst lauten die Ergebnisse für Drift- und Diffusionskoeffizient (mit  $\rho = r/l_{\text{mar}}$ ):

$$\begin{aligned}
 D^{(1)}(u, r) &= -\gamma(r)u + \kappa(r)u^2 - \epsilon(r)u^3, \\
 \gamma(r) &= \gamma_0 + \gamma_1\rho, \\
 \kappa(r) &= \kappa_0\rho \\
 \epsilon(r) &= \epsilon_0\rho, \\
 D^{(2)}(u, r) &= \alpha(r) - \delta(r)u + \beta(r)u^2, \\
 \alpha(r) &= \alpha_0(\rho - \rho_0), \\
 \delta(r) &= \delta_0\rho, \\
 \beta(r) &= \beta = \text{const.}
 \end{aligned} \tag{6.16}$$

Abschätzungen für die numerischen Werte der einzelnen Koeffizienten in (6.16) und ihre Fehler ergeben sich aus den Mittelwerten der Ergebnisse der verschiedenen Extrapolationsmethoden und deren Abweichungen voneinander zu:

$$\begin{aligned}
 \gamma_0 &= 0,93 \pm 0,02, \\
 \gamma_1 &= 0,03 \pm 0,01, \\
 \kappa_0 &= 0,011 \pm 0,004, \\
 \epsilon_0 &= 0,005 \pm 0,002, \\
 \alpha_0 &= 0,058 \pm 0,002, \\
 \rho_0 &= 0,5 \pm 0,1, \\
 \delta_0 &= 0,017 \pm 0,002, \\
 \beta &= 0,075 \pm 0,005.
 \end{aligned} \tag{6.17}$$

## 6.4 Der Koeffizient vierter Ordnung

Dem Satz von Pawula zufolge spielt dem Koeffizienten vierter Ordnung,  $D^{(4)}(u, r)$ , eine entscheidene Rolle: Verschwindet er, so verschwinden alle Koeffizienten  $D^{(n)}$  mit  $n \geq 3$  und die Kramers-Moyal- Entwicklung reduziert sich zur Fokker-Planck- Gleichung.

Abbildung 6.15 zeigt den Koeffizienten  $M^{(4)}(u, r, \Delta r)$  als Funktion von  $\Delta r$ , wiederum für  $u = -\sigma_\infty$  und  $r = L/2$ . In der Abhängigkeit des Koeffizienten  $M^{(4)}$  von  $\Delta r$  zeigt sich ein deutlicher Unterschied zu den Koeffizienten erster und zweiter Ordnung: Während sowohl  $M^{(1)}$  als auch  $M^{(2)}$  bei Annäherung an  $\Delta r = 0$  ansteigen (vergleiche Abbildungen 6.6 und 6.11), fällt  $M^{(4)}$  mit kleiner werdendem  $\Delta r$  streng monoton. Dem Augenschein nach scheint  $M^{(4)}$  im Limes  $\Delta r \rightarrow 0$  zu verschwinden.

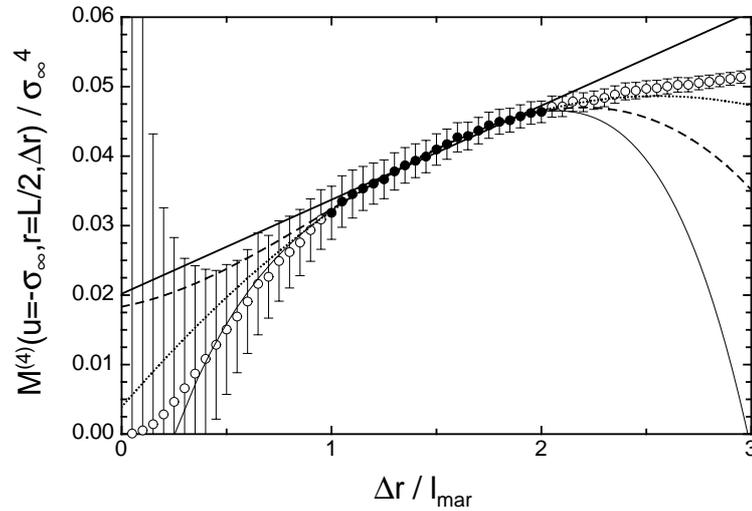


Abbildung 6.15: Der Koeffizient  $M^{(4)}(u, r, \Delta r)$  als Funktion von  $\Delta r$  für  $u = -\sigma_\infty$  und  $r = L/2$ . Zur Extrapolation wurden Polynome erster (fett durchgezogene Linie), zweiter (gepunktete Linie), dritter (durchbrochene Linie) und vierter Ordnung (dünn durchgezogene Linie) verwendet. Für alle Fitpolynome der Ordnung zwei und höher erhält man Werte, die innerhalb ihrer Fehler Null sind. Das Fitpolynom zweiten Grades etwa liefert einen Wert von  $D^{(4)}(u = -\sigma_\infty, r = L/2) = (0,4 \pm 1,5)10^{-2}$ .

Der Augenschein allein liefert allerdings noch kein gültiges Kriterium für das Verhalten des bedingten Moments  $M^{(4)}$  im Grenzübergang  $\Delta r \rightarrow 0$ . Deshalb wurden an die Koeffizienten  $M^{(4)}$  im Intervall  $l_{mar} \leq \Delta r \leq 2l_{mar}$  wiederum Polynome unterschiedlicher Ordnung angepasst um die gemessenen Wert des Koeffizienten  $M^{(4)}$  gegen  $\Delta r = 0$  zu extrapolieren <sup>2</sup>.

<sup>2</sup>Hierbei wurde das bedingte vierte Moment  $M^{(4)}$  gemäss seiner Definition (4.6) verwendet und nicht das nach der Entwicklungsgleichung (4.12) korrigierte. Eine solche Korrektur nach dieser Entwicklungsgleichung ist für den Koeffizienten vierter Ordnung nicht zulässig, da ja durch seine Untersuchung erst festgestellt werden muss, ob die Koeffizienten der Ordnung  $k > 2$  Null sind. Das wiederum ist aber eine der Voraussetzungen, unter denen die Entwicklungsgleichung (4.12) überhaupt nur gültig ist.

Von allen verwendeten Extrapolationsmethoden führt einzig ein linearer Fit zu einem signifikant von Null verschiedenen Ergebniss (siehe Abb. 6.15). Allerdings wird sowohl durch die deutlich von Null verschiedene Krümmung des Koeffizienten  $M^{(4)}(u, r, \Delta r)$  im Intervall  $l_{mar} \leq \Delta r \leq 2l_{mar}$  als auch durch seinen weiteren Verlauf für  $\Delta r > 2l_{mar}$  deutlich, dass ein linearer Fit die Abhängigkeit des Koeffizienten  $M^{(4)}$  von  $\Delta r$  nicht korrekt beschreibt.

Extrapoliert man  $M^{(4)}$  mit quadratischen Fits, so erhält man sowohl positive als auch negative Werte für  $D^{(4)}(u, r)$ , die in allen Fällen betragsmäßig kleiner sind als ihre jeweiligen Fehler. (siehe Abbildung 6.16). Dies ein starker Hinweis darauf, dass  $D^{(4)}$  verschwindet, da  $D^{(4)}$  nach Definition eine positive Grösse ist

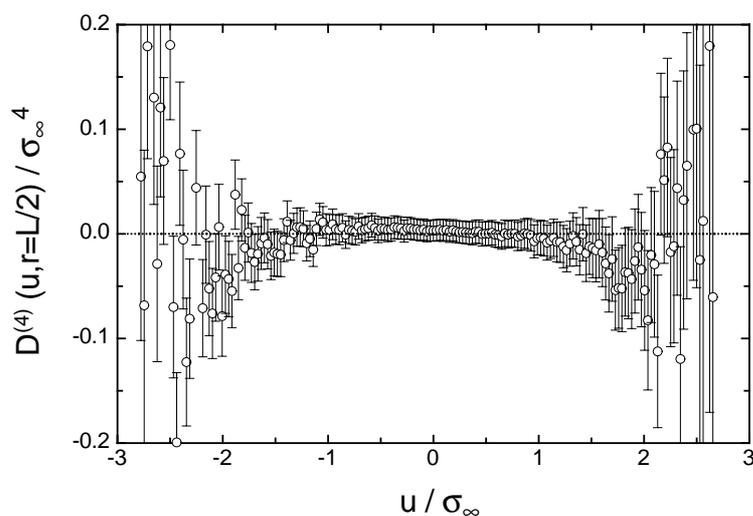


Abbildung 6.16: Das Ergebnis der quadratischen Extrapolation für  $D^{(4)}(u, r)$  als Funktion des Geschwindigkeitsinkrements  $u$  auf der Skala  $r = L/2$ . Die extrapolierten Werte sind betragsmäßig durchwegs kleiner als ihre jeweiligen Fehler, zum Teil erhält man sogar negative Werte für  $D^{(4)}$ .

Aufgrund dieser Ergebnisse wird im folgenden davon ausgegangen werden, dass der Koeffizient  $D^{(4)}$  vierter Ordnung verschwindet und sich die Kramers–Moyal–Entwicklung nach dem Satz von Pawula auf die Fokker–Planck–Gleichung reduziert.

## 6.5 Die Lösungen der Fokker–Planck–Gleichung

Die in den vorhergehenden Kapiteln vorgestellten Ergebnisse führen zu Fokker–Planck–Gleichungen für die Wahrscheinlichkeitsdichte  $p(u, r)$  des Geschwindigkeitsinkrements auf der Skala  $r$  und für die bedingte Dichte  $p(u, r|u_0, r_0)$ . Der Drift– und der Diffusionskoeffizient der Gleichung können aus den Messdaten geschätzt werden und zeigen einfache funktionale Abhängigkeiten vom Geschwindigkeitsinkrement  $u$ .

In die Herleitung dieser Ergebnisse gehen mehrere Annahmen ein, die zwar anhand der experimentellen Daten nicht widerlegt, im streng mathematischen Sinn andererseits aber auch nicht bewiesen werden können. Das betrifft insbesondere die

Gültigkeit der Markoweigenschaften nach Gleichung (4.2) für Skalen oberhalb der Markowlänge und die Annahme, dass nach dem Satz von Pawula die Koeffizienten der Ordnungen drei und höher verschwinden.

Um nun diese Annahmen sowie die experimentellen Ergebnisse für Drift- und Diffusionskoeffizient zu verifizieren, wurden die numerischen Lösungen der resultierenden Fokker-Planck-Gleichungen mit den aus den Daten bestimmten Wahrscheinlichkeitsdichten verglichen. Beschreibt die Fokker-Planck-Gleichung die gemessenen Dichten korrekt, so ist eine im Rahmen der experimentellen Genauigkeit nicht zu widerlegende selbstkonsistente Beschreibung des stochastischen Prozesses gefunden. Es gäbe in diesem Fall keinen Grund, aufgrund des experimentellen Befundes die Hypothese, dass die Statistik des Geschwindigkeitsinkrements einem Markowprozess gehorcht und durch die Fokker-Planck-Gleichung beschrieben werden kann, abzulehnen.

Der Algorithmus zur Berechnung der numerischen Lösung basiert auf der Näherungslösung (4.11) der Fokker-Planck-Gleichung für kleine Schrittweiten  $\Delta r$ , die einen expliziten Ausdruck für die bedingten Dichten  $p(u_1, r_0 - \Delta r | u_0, r_0)$  und auch  $p(u_2, r_0 - 2\Delta r | u_1, r_0 - \Delta r)$  liefert. Aus diesen kann gemäß der Chapman-Kolmogorov-Gleichung die bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte für die Schrittweite  $2\Delta r$  berechnet werden:

$$p(u_2, r_0 - 2\Delta r | u_0, r_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(u_2, r_0 - 2\Delta r | u_1, r_0 - \Delta r) p(u_1, r_0 - \Delta r | u_0, r_0) du_1. \quad (6.18)$$

Die Chapman-Kolmogorov-Gleichung (6.18) folgt direkt aus den Markoweigenschaften (4.2) [95]. Durch  $n$ -fache Iteration dieses Verfahrens erhält man die bedingte Dichte  $p(u, r_0 - n\Delta r | u_0, r_0)$ . Multiplikation mit  $p(u_0, r_0)$  und anschließende Integration nach  $u_0$  liefert schließlich auch die Wahrscheinlichkeitsdichte  $p(u, r_0 - n\Delta r)$ .

Der in Abbildung 6.17 gezeigte Vergleich zwischen den numerischen Lösungen der Fokker-Planck-Gleichung für die Wahrscheinlichkeitsdichte  $p(u, r)$  und den experimentellen Daten belegt, dass die Fokker-Planck-Gleichung die Entwicklung von  $p(u, r)$  in  $r$  in der Tat korrekt beschreibt. Das gilt auch für die bedingten Verteilungen  $p(u, r | u_0, r_0)$ , wie der Vergleich zwischen der numerischen Lösung der Fokker-Planck-Gleichung (4.7) und der empirisch bestimmte Dichte für  $r = L/2$  und  $r_0 = L$  in Abbildung 6.18 zeigt.

Um die in den Abbildungen 6.17 und 6.18 gezeigte Übereinstimmung zwischen den Lösungen der Fokker-Planck-Gleichung und den experimentell bestimmten Dichten zu erreichen, mussten allerdings der lineare und quadratische Term in  $D^{(2)}$  modifiziert werden. Die letztendlich für die numerische Integration verwendeten Werte sind:

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= 0,93, \\ \gamma_1 &= 0,03, \\ \kappa_0 &= 0,011, \\ \epsilon_0 &= 0,005, \\ \alpha_0 &= 0,058, \end{aligned}$$

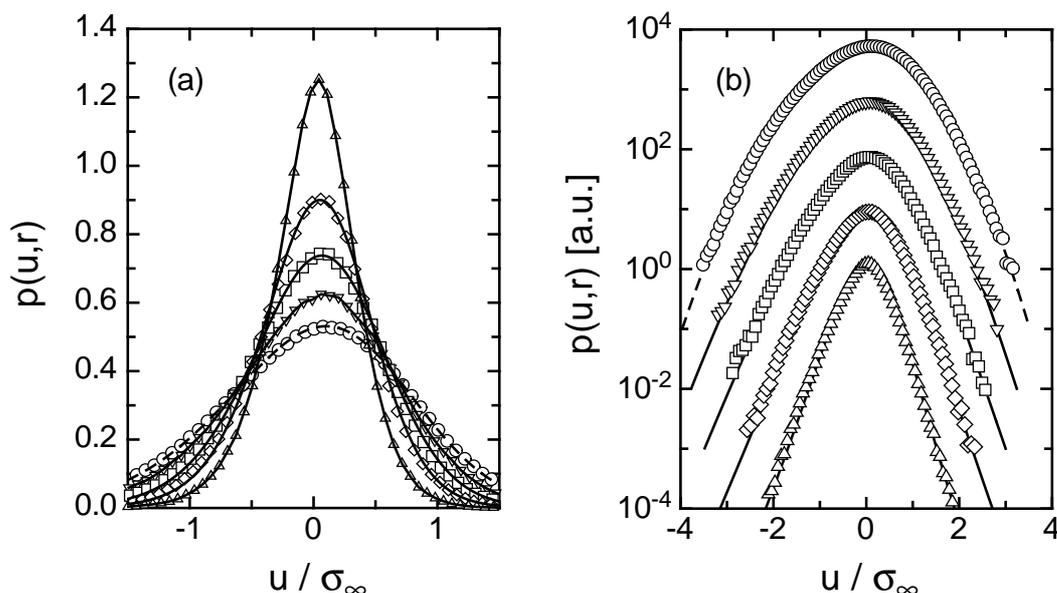


Abbildung 6.17: Vergleich der numerischen Lösung der Fokker-Planck-Gleichung (durchgezogene Linien) mit den aus den experimentellen Daten bestimmten Wahrscheinlichkeitsdichten  $p(u, r)$  für das Geschwindigkeitsinkrement  $u(r)$  (offene Symbole) in linearer (a) und semilogarithmischer (b) Darstellung. Die Skalen  $r$  sind (in (b) von oben nach unten):  $r = L$ ,  $r = 0,6L$ ,  $r = 0,35L$ ,  $r = 0,2L$  und  $r = 0,1L \approx \lambda$ . Die Dichte auf der grössten Skala  $L$  wurde parametrisiert (durchbrochene Linie) und als Anfangsbedingung für die Integration verwendet. Die Kurven in (b) wurden der Übersichtlichkeit halber in vertikaler Richtung gegeneinander verschoben.

$$\begin{aligned}
 \rho_0 &= 0,5, \\
 \delta_0 &= 0,014, \\
 \beta &= 0,06.
 \end{aligned}
 \tag{6.19}$$

Bis auf  $\delta_0$  und  $\beta$  sind diese Koeffizienten identisch mit den direkt aus den Daten bestimmten (vergleiche (6.17)). Sowohl der Driftkoeffizient  $D^{(1)}$  als auch der konstante Term  $\alpha(r)$  in  $D^{(2)}$  können also aus experimentellen Daten korrekt bestimmt werden. Die Terme höherer Ordnung in  $D^{(2)}$ ,  $\delta_0$  bzw.  $\beta$ , werden allerdings stark überschätzt:  $\delta_0$  um etwa 17,  $\beta$  um 20 Prozent.

Es stellt sich nun die Frage, ob diese Abweichungen durch die Unzulänglichkeiten der zur Bestimmung der Koeffizienten  $D^{(k)}$  verwendeten Methode erklärt werden können, oder ob sie nicht doch ein Anzeichen dafür sind, dass die Annahme einer Fokker-Planck-Gleichung unzulässig ist. Denkbar ist insbesondere, dass der Koeffizient vierter Ordnung  $D^{(4)}$  einen von Null verschiedenen Wert hat und die höheren Terme der Kramers-Moyal-Entwicklung nicht verschwinden. In diesem Fall wird es notwendig sein, die Koeffizienten  $D^{(1)}$  und  $D^{(2)}$  zu modifizieren, um die Statistik des Geschwindigkeitsinkrements trotz nichtverschwindender Terme höherer Ordnung noch durch eine (effektive) Fokker-Planck-Gleichung beschreiben zu können.

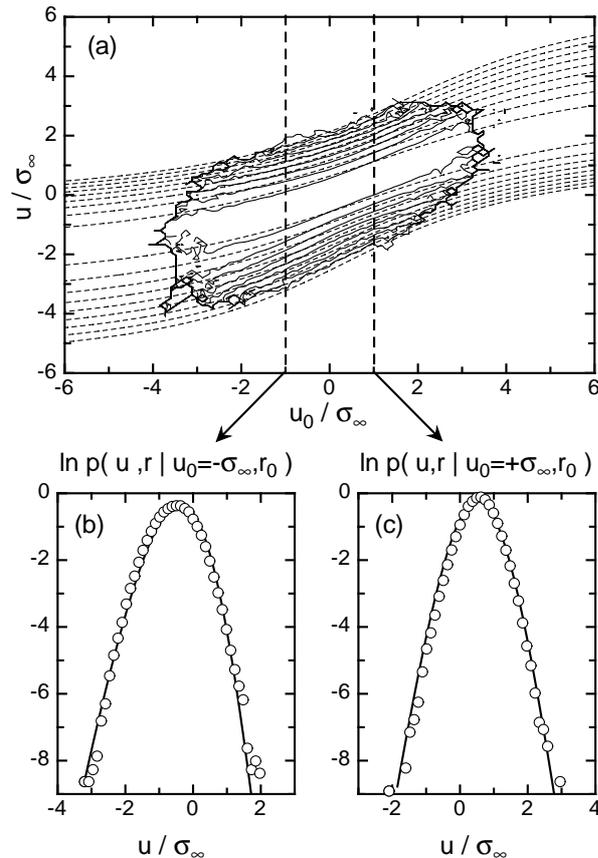


Abbildung 6.18: Vergleich der numerischen Lösung der Fokker-Planck-Gleichung für die bedingten Dichten  $p(u, r | u_0, r_0)$  mit den experimentellen Daten.

(a): Konturliniendarstellung von  $p(u, r | u_0, r_0)$  für  $r_0 = L$  und  $r = L/2$ . Durchbrochene Linien: numerische Lösung der Fokker-Planck-Gleichung, durchgezogene Linien: experimentelle Daten.

(b) und (c): Schnitte durch  $p(u, r | u_0, r_0)$  für  $u = \pm\sigma_\infty$ . Offene Symbole: experimentelle Daten, durchgezogene Linien: numerische Lösungen der Fokker-Planck-Gleichung.

Die zwischen den experimentell bestimmten und für die Numerik verwendeten Koeffizienten beobachteten Abweichungen lassen sich allerdings zwanglos mit experimentellen Fehlern erklären. Abbildung 6.19 zeigt einen Vergleich des aus den Daten bestimmten Diffusionskoeffizienten mit dem daran angefitzten Polynom zweiten Grades nach (6.17) und dem für die numerische Iteration verwendeten Koeffizienten. Für alle Geschwindigkeitsinkremente  $u$  sind die Abweichungen zwischen dem Fit an die Daten und dem nach (6.19) berechneten Diffusionskoeffizienten klein im Vergleich zu den Fehlern der experimentellen Werte. Zudem stimmt, bis auf einen kleinen Bereich um  $u = -\sigma_\infty$ , der nach (6.19) berechnete Koeffizient innerhalb der Fehler mit den experimentellen Daten überein. Für sehr große Inkremente ( $|u| > 2\sigma_\infty$ ) gibt der nach (6.19) korrigierte Koeffizient die Messdaten sogar etwas besser wieder als der Fit. Dieser Bereich enthält also trotz der großen Fehler noch Information über

denn stochastischen Prozess, die durch den fehlergewichteten Least-Square-Fit nicht vollständig erfasst wird.

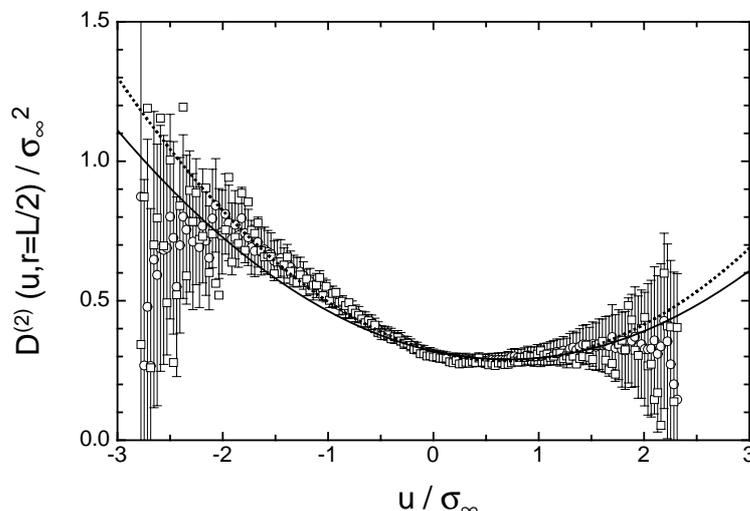


Abbildung 6.19: Der Diffusionskoeffizient  $D(2)(u, r)$  auf der Skala  $r = L/2$ . Die Extrapolation der experimentellen Daten wurde mit Polynomen dritter (Kreise) und vierter Ordnung (Quadrate) durchgeführt, die gepunktete Linie entspricht dem Mittelwert der fehlergewichteten Least-Square-Fits nach (6.17). Als durchgezogene Linie ist der nach (6.19) berechnete Diffusionskoeffizient mit eingezeichnet. Die gezeigten Fehler sind das Ergebnis der Extrapolation mit Polynomen dritten Grades; Polynome vierten Grades liefern einen etwa um den Faktor vier grösseren Fehler.

Bei jeder numerischen Berechnung stellt sich die Frage nach der Zuverlässigkeit des verwendeten Algorithmus und der mit ihm erhaltenen Ergebnisse. Um die Zuverlässigkeit der hier verwendeten Methode zu testen, wurden die numerischen Lösungen der Fokker-Planck-Gleichung in zwei Spezialfällen mit analytischen Lösungen verglichen.

Diesen beiden Spezialfällen ist gemeinsam, dass der Driftkoeffizient  $D^{(1)}(u, r)$  durch eine rein lineare Funktion in  $u$  approximiert werden muss:  $D^{(1)}(u, r) = -\gamma(r)u$ . Unter dieser Voraussetzung kann die Fokker-Planck-Gleichung zum einen für den Fall eines in  $u$  konstanten Diffusionskoeffizienten gelöst werden, also für  $D^{(2)}(u, r) = \alpha(r)$ , zum anderen aber auch für den Fall eines in  $u$  quadratischen Koeffizienten  $D^{(2)}(u, r) = \beta(r)u^2$ .

Im Fall eines in  $u$  konstanten Diffusionskoeffizienten wird, wie man sich durch einsetzen leicht überzeugt, die Fokker-Planck-Gleichung durch eine Gaußverteilung mit skalenabhängiger Standardabweichung  $\sigma(r)$  gelöst. Für den komplizierteren Fall eines rein quadratischen Diffusionskoeffizienten wurde in [32] die folgende Lösung angegeben (mit  $l = \ln(L/r)$ ):

$$p(u, l) = \frac{e^{f(l)}}{\sqrt{4\pi h(l)}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(\ln u + g(l) - y)^2}{4h(l)}\right) \phi(e^y) dy, \quad (6.20)$$

wobei  $\phi$  die als Anfangsbedingung dienende Wahrscheinlichkeitsdichte des Geschwindigkeitsinkrements auf der größten Skala  $L$  ist und die Funktionen  $f(l)$ ,  $g(l)$  und  $h(l)$  wie folgt definiert sind:

$$\begin{aligned} f(l) &= \int_0^l \gamma(l') + 2\beta(l') dl', \\ g(l) &= \int_0^l \gamma(l') + 3\beta(l') dl', \\ h(l) &= \int_0^l \beta(l') dl'. \end{aligned} \tag{6.21}$$

Gleichung (6.20) ist nichts anderes als die Castaing-Formel (3.57) mit lognormalverteiltem Multiplikator (siehe Kapitel 6.6.5).

Um die analytischen Lösungen der Fokker-Planck-Gleichung in diesen beiden Fällen mit der numerischen Lösung vergleichen zu können, wurde die Wahrscheinlichkeitsdichte  $\phi(u, r = L)$  auf der integralen Längenskala durch eine Gaußverteilung gefittet. Für beide Spezialfälle wurde dann die Iteration bis hin zur Skala  $r = \lambda$  durchgeführt, wobei die verwendeten Koeffizienten  $\gamma(r)$ ,  $\alpha(r)$  und  $\beta(r)$  nach (6.16) und (6.19) gewählt wurden. In Abbildung 6.20 ist der Vergleich zwischen den analytischen und numerischen Lösungen der Fokker-Planck-Gleichung in beiden Fällen für  $p(u, r = \lambda)$  gezeigt. Numerische und analytische Lösung der Fokker-Planck-Gleichung stimmen jeweils gut überein. Dies belegt die Güte des hier zur numerischen Lösung der Fokker-Planck-Gleichung verwendeten Verfahrens.

## 6.6 Zusammenfassung und Diskussion

### 6.6.1 Zusammenfassung

In den vorhergehenden Kapiteln konnte gezeigt werden, dass der mathematische Formalismus der Markowprozesse erfolgreich auf die Analyse experimenteller Daten angewandt werden kann. Innerhalb der experimentellen Genauigkeit konnten die Markoweigenschaften für Skalen und Differenzen von Skalen größer als einer elementaren Schrittweite  $l_{mar}$  verifiziert werden. Die sog. Markowlänge  $l_{mar}$  ist für den betrachteten Datensatz von der Größenordnung der Taylorlänge  $\lambda$ . Es ist darüber hinaus möglich, den Driftterm  $D^{(1)}$  sowie den Diffusionskoeffizienten  $D^{(2)}$  aus den Daten abzuschätzen. Der Driftterm  $D^{(1)}$  ist linear in  $u$ ,  $D^{(2)}$  quadratisch. Die Ergebnisse für den Koeffizienten vierter Ordnung deuten darauf hin, dass er verschwindet und sich die Kramers-Moyal-Entwicklung zur Fokker-Planck-Gleichung reduziert. Der Vergleich zwischen den (numerischen) Lösungen der Fokker-Planck-Gleichungen und den aus den Daten bestimmten Wahrscheinlichkeitsdichten bestätigt die Richtigkeit dieser Ergebnisse. Die Annahme, dass das Geschwindigkeitsinkrements einem Markowprozess gehorcht, führt aus experimenteller Sicht zu einer widerspruchsfreien und selbstkonsistenten Beschreibung der Statistik von  $u(r)$ . Diese Beschreibung ist

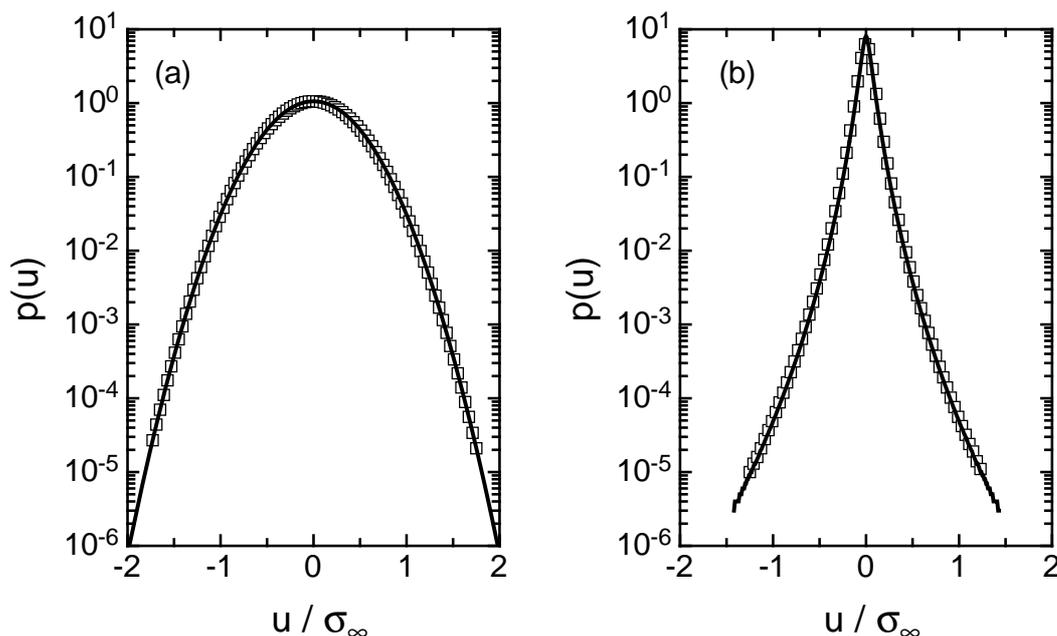


Abbildung 6.20: Vergleich zwischen numerischen (offene Symbole) und analytischen (durchgezogene Linien) Lösungen der Fokker-Planck-Gleichung für die Spezialfälle  $D^{(2)}(u, r) = \alpha(r)$  (a) und  $D^{(2)}(u, r) = \beta(r)u^2$  (b). In beiden Fällen wurde die Dichte auf der Skala  $r = L$  durch eine Gaußverteilung angenähert und die numerische Iteration bis zu den hier dargestellten Dichten auf der Skala  $r = \lambda$  durchgeführt. Der Driftkoeffizient ist in beiden Fällen linear:  $D^{(1)}(u, r) = -\gamma(r)u$ .

überdies vollständig: Aufgrund der Markoweigenschaften kann nach Gleichung (4.3) jede beliebige  $N$ -Punkt Verteilung von  $u$  als Produkt der einfach bedingten Dichten  $p(u, r|u_0, r_0)$  bestimmt werden.

Eine weitere wichtige Eigenschaft der Markowanalyse ist, dass sie es erlaubt, die den stoachastischen Prozess beschreibenden Differentialgleichungen (Fokker-Planck- bzw. Langevin-Gleichung) zu messen, ohne dass Modelle oder Annahmen über die Physik des betrachteten Systems gemacht werden müssten. Die Ergebnisse der Markowanalyse sind daher von hoher Aussagekraft für die theoretische Behandlung und Modellierung der voll entwickelten Turbulenz, vorausgesetzt es gelingt, sie mit Vorhersagen gängiger Turbulenzmodelle in Verbindung zu setzen,

## 6.6.2 Skalierungseigenschaften und K62

Eine große Bedeutung kommt bei der Modellbildung nach wie vor den vermuteten Skalierungseigenschaften der Strukturfunktionen zu, insbesondere der Theorie Kolmogorovs aus dem Jahr 1962 (siehe Kapitel 3.4). Die wichtigsten Ergebnisse dieses Modells seien hier der Übersichtlichkeit halber nochmals zusammengefasst. Der Skalierungshypothese zufolge sollten die Geschwindigkeitsstrukturfunktionen  $S_u^n(r)$  mit

$r$  skalieren:

$$S_u^n(r) = \langle u(r)^n \rangle \propto r^{\zeta_n}, \quad (6.22)$$

wobei die sog. Skalenexponenten  $\zeta_n$  aufgrund der Intermittenzeffekte nichtlineare Funktionen ihres Arguments  $n$  sind. Die Vorhersage des Lognormal-Modells von Kolmogorovs (K62) für die Skalenexponenten ist:

$$\zeta_n = \frac{n}{3} - \frac{\mu}{18}n(n-3). \quad (6.23)$$

Der Intermittenzfaktor  $\mu$ , für den das Modell keine Vorhersage macht, ergibt sich aus Fits gemäß (6.23) an gemessene Werte von  $\zeta_n$  zu  $\mu = 0,26 \pm 0,04$  [6].

Die Annahme eines Skalenverhaltens nach Kolmogorov 1962 impliziert Bedingungen an die Koeffizienten  $D^{(1)}$  und  $D^{(2)}$  der Fokker-Planck-Gleichung [37, 38]. Es stellt sich heraus, dass das Lognormalmodell dem Fall entspricht, dass  $D^{(1)}$  eine lineare und  $D^{(2)}$  eine rein quadratische Funktion des Inkrements  $u$  ist, wobei beide nicht von der Skala  $r$  abhängen:

$$\begin{aligned} D^{(1)}(u) &= -\gamma u \\ D^{(2)}(u) &= \beta u^2. \end{aligned} \quad (6.24)$$

In diesem (hypothetischen) Spezialfall reduziert sich die Gleichung (4.9) der Strukturfunktionen auf

$$\begin{aligned} r \frac{\partial}{\partial r} S_u^n(r) &= n\gamma \int_{-\infty}^{+\infty} u^n p(u, r) du - n(n-1)\beta \int_{-\infty}^{+\infty} u^n p(u, r) du \\ &= n(\gamma - (n-1)\beta) S_u^n(r). \end{aligned} \quad (6.25)$$

Man überzeugt sich leicht, dass die Lösungen dieser Gleichung einfach Potenzgesetze der Form  $S_u^n(r) \propto r^{\zeta_n}$  sind, wobei für die Skalenexponenten  $\zeta_n$  gilt:

$$\zeta_n = n(\gamma - (n-1)\beta). \quad (6.26)$$

Die Skalenexponenten sind in diesem Fall also linear in  $n$  mit quadratischen Intermittenzkorrekturen, in Übereinstimmung mit dem Lognormalmodell Kolmogorovs. Ein Vergleich zwischen (6.26) und (6.23) lässt für  $\gamma$  und  $\beta$  die folgenden Zusammenhänge erwarten:

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{\mu}{18} \approx 0,014 \\ \gamma &= \frac{1}{3} + 2\beta \approx 0,362. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Im Rahmen dieser Überlegungen ergibt sich eine recht plausible Deutung der Fokker-Planck-Gleichung: Sie beschreibt einen stochastischen Prozess, dessen deterministischer Anteil durch das K41-Modell erklärt wird. Die auf den Prozess wirkenden stochastischen Einflüsse führen zu Korrekturen am einfachen Skalenverhalten nach K41 und können direkt mit dem Intermittenzparameter  $\mu$  in Verbindung gebracht werden.

Die in den vorhergehenden Kapiteln beschriebenen Ergebnisse der Markowanalyse stehen allerdings in Widerspruch zu diesem Bild, vergleiche Glg. (6.16) und (6.17). Man findet experimentell sehr viel größere Werte für  $\gamma$  und  $\beta$  und im Fall des Koeffizienten  $\gamma$  sogar einen zwar schwachen, aber dennoch signifikanten Anstieg mit  $r$ . Es zeigt sich überdies, dass die tatsächliche Abhängigkeit des Diffusionskoeffizienten  $D^{(2)}$  von  $u$  durch ein rein quadratisches Gesetz der Form  $D^{(2)} = \beta u^2$  nicht korrekt beschrieben wird, siehe Abbildung (6.12).

Die durch (6.16) gegebenen Ausdrücke für Drift- und Diffusionskoeffizient führen zu Gleichungen für die Strukturfunktionen, die, wie man leicht nachrechnet, durch einfache Potenzansätze nicht mehr gelöst werden. Hier besteht also ein eklatanter Widerspruch zum Lognormalmodell Kolmogorovs, der wohl etabliertesten Theorie zur voll entwickelten Turbulenz. Es stellt sich daher die Frage nach der Verlässlichkeit der hier vorgestellten Methode und der Signifikanz ihrer Ergebnisse.

Es ist in diesem Zusammenhang interessant, an die Ergebnisse früherer Arbeiten zu den Markoweigenschaften der turbulenten Kasakde zu erinnern. Die Vorhersage (6.27) für  $\gamma$  und  $\beta$  wurden erstmals in [37] hergeleitet und in darauf folgenden Arbeiten auch experimentell bestätigt [38, 72, 91, 90]. Zwar wurden auch in diesen Arbeiten konstante und lineare Terme in  $D^{(2)}$  gefunden, diese wurden jedoch als kleine Korrekturen des „idealen“ Verhaltens gedeutet.

Allen genannten früheren Arbeiten zur Markowanalyse ist gemeinsam, dass sie die Existenz einer endlichen, von Null verschiedenen Schrittweite des stochastischen Prozesses vernachlässigten. Die Existenz einer endlichen Schrittweite der Kasakde wurde zwar bereits in [114] erstmals entdeckt, ihre Bedeutung für die Bestimmung der Koeffizienten  $D^{(k)}(u, r)$  wurde jedoch nicht erkannt. Stattdessen wurden die Kramers–Moyal–Koeffizienten  $D^{(k)}(u, r)$  entweder einfach durch  $M^{(k)}(u, r, \Delta r_s)$  abgeschätzt, wobei  $\Delta r_s$  die kleinste experimentell zugängliche Skalendifferenz ist, oder durch Extrapolation der bedingten Momente auf Skalen  $\Delta r < l_{mar}$  bestimmt (Abbildung 6.6 lässt erkennen, dass eine Extrapolation in diesem Bereich tatsächlich auf einen Wert von  $\gamma \approx 1/3$  führt).

In [90] konnte gezeigt werden, dass die Lösungen der Fokker-Planck-Gleichung mit den Koeffizienten (6.27) (mit kleinen Korrekturen durch  $\alpha$  und  $\delta$ ) die gemessenen Dichten  $p(u, r)$  richtig wiedergeben (es wurde dabei derselbe Datensatz verwendet, der auch hier untersucht wird). Die Frage nach der korrekten Bestimmung von  $D^{(1)}$  und  $D^{(2)}$  schien damit endgültig beantwortet.

Dass dem nicht so ist, erweist sich dann, wenn man die Fokker-Planck-Gleichung für die bedingten Dichten  $p(u, r|u_0, r_0)$  betrachtet. Ein Vergleich der experimentell bestimmten Verteilungen mit der numerischen Lösung der Fokker-Planck-Gleichung (Abbildung 6.21) zeigt eindeutig, dass die durch (6.27) gegebenen Koeffizienten die gemessenen bedingten Dichten nicht korrekt beschreiben und deswegen nicht richtig sein können. Nur die durch die Gleichungen (6.16) und (6.17) gegebenen  $D^{(k)}$  beschreiben sowohl die Wahrscheinlichkeitsdichten  $p(u, r)$  des Geschwindigkeitsinkrements auf nur einer Skala als auch die bedingten Dichten  $p(u, r|u_0, r_0)$ .

Es existieren also mehrere Möglichkeiten, die Statistik des Geschwindigkeitsinkrements  $u(r)$  auf nur einer Skala zu beschreiben. Diese Mehrdeutigkeit verschwindet jedoch, sobald man die bedingten Dichten  $p(u, r|u_0, r_0)$  betrachtet. Das bedeutet im

Umkehrschluss, dass durch eine Untersuchung der Dichten  $p(u, r)$  bzw. der Strukturfunktionen  $S_u^n(r)$  keine eindeutige Beschreibung des stochastischen Prozesses für  $u(r)$  gefunden werden kann. Erst durch die bedingten Dichten, d.h. durch die gemeinsamen statistischen Eigenschaften von Inkrementen auf verschiedenen Skalen, ist der stochastischen Prozess eindeutig charakterisiert und vollständig beschrieben.

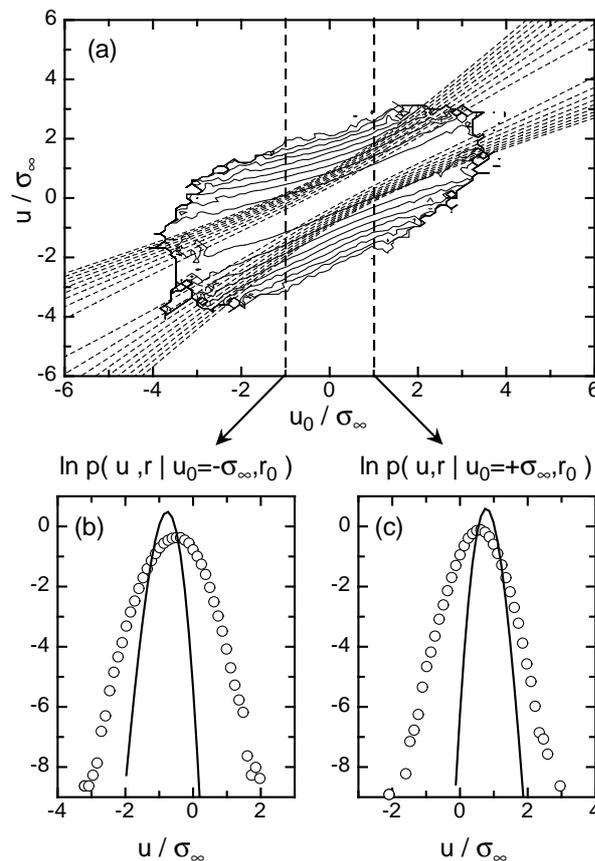


Abbildung 6.21: Vergleich der numerischen Lösung der Fokker-Planck-Gleichung für die bedingten Wahrscheinlichkeitsdichten mit den experimentellen Daten für die durch Glg. (6.27) gegebenen Koeffizienten  $\gamma$  und  $\beta$  (Darstellung wie in Abbildung 6.18). In [90] wurde gezeigt, dass diese Koeffizienten die Dichte  $p(u, r)$  des Geschwindigkeitsinkrements auf nur einer Skala korrekt beschreiben.

Aufgrund dieses Ergebnisses kann die Skalierungshypothese für den hier untersuchten Datensatz nicht mehr als eine erste Näherung sein. Das deckt sich durchaus mit den in Kapitel 5 diskutierten Ergebnissen der klassischen Turbulenzanalysen dieses Datensatzes: Abbildung 5.5 lässt deutlich erkennen, dass das Leistungsspektrum (und damit die Strukturfunktion zweiten Grades) nur in grober Näherung durch ein Potenzgesetz beschrieben werden kann. Ein Grund hierfür könnte die relativ niedrige Reynoldszahl der Messung sein, allerdings werden in der Literatur zunehmend auch für höhere Reynoldszahlen Abweichungen vom Skalierungsverhalten der Strukturfunktionen beobachtet [6, 103] (siehe auch Kapitel 3.5).

Eine Ausnahme hiervon sollte die Strukturfunktion dritten Grades bilden, die nach dem Kolmogorovschen 4/5-Gesetz (3.28) linear in  $r$  sein müsste. Die Ergebnisse der hier vorgestellten Analysen sprechen zwar gegen ein allgemeines Skalenverhalten der Strukturfunktionen, müssen deswegen aber nicht zwangsläufig im Widerspruch zum 4/5-Gesetz stehen. Aus Gleichung (4.9) folgt aus der Annahme einer linearen Abhängigkeit der Strukturfunktion dritten Grades von  $r$  lediglich eine Bedingung an den Zusammenhang zwischen  $\gamma(r)$ ,  $\delta(r)$ ,  $\beta(r)$  und der Strukturfunktion zweiten Grades (siehe dazu auch Kapitel 7.5).

Es sei aber auch darauf hingewiesen, dass das 4/5-Gesetz neueren Untersuchungen zufolge bei üblichen experimentellen Bedingungen nicht erfüllt ist [73]. Die Gründe hierfür können neben den meist niedrigen Reynoldszahlen (die im Labor üblicherweise  $R_\lambda = 1000$  nicht übersteigen) experimentelle Unzulänglichkeiten sein. Das betrifft zum einen die Hitzdrahtmesstechnik (siehe Kapitel 5), zum andern aber auch ein prinzipielles Problem: Strömungen mit ausgezeichneter Hauptströmungsrichtung sind nur im Laborsystem, nicht aber im mit der Strömung mitbewegten Koordinatensystem stationär [62] (das turbulente Geschwindigkeitsfeld baut sich erst in einiger Entfernung von der Düse auf und zerfällt weiter stromabwärts auch wieder). In [62] wurde gezeigt, dass im mitbewegten Koordinatensystem aufgrund dieser Instationarität in der Kolmogorov-Karman-Horvath-Gleichung (3.28) ein zusätzlicher Term auftritt, der bei Transformation ins Laborsystem nicht verschwindet und dort Abweichungen vom 4/5-Gesetz (3.29) verursacht.

Vor diesem Hintergrund verwundern die Widersprüche zwischen den Ergebnissen der Markowanalyse und der Skalierungshypothese nicht. Im Vergleich zu herkömmlichen Analysemethoden wie insbesondere der im nächsten Kapitel diskutierten ESS, ist die Markowanalyse aber ein äusserst sensibles Instrument zur Untersuchung stochastischer Prozesse.

### 6.6.3 Die ESS

Die Anregung zu den im folgenden beschriebenen Überlegungen ging von Jean-Francois Pinton (ENS Lyon) aus, dem dafür an dieser Stelle ausdrücklich gedankt sei.

Die mittlwerweilen wohl am weitesten verbreitete Methode zur experimentellen Bestimmung der Skalenexponenten  $\zeta_n$  ist die *extending self-similarity* nach Benzi, siehe Kapitel 3.4.3. Die mathematische Definition (3.51) des relativen Skalenverhaltens kann auch in folgender Form geschrieben werden:

$$\frac{\partial \ln S_u^n(r)}{\partial \ln r} = \frac{\zeta_n}{\zeta_p} \frac{\partial \ln S_u^p(r)}{\partial \ln r}. \quad (6.28)$$

Während das Skalierungsverhalten der einzelnen Strukturfunktionen in der Skala  $r$  für experimentelle Daten durchaus angezweifelt werden kann (siehe Kapitel 5 und 6.6.2), ist das relative Skalenverhalten zweier Strukturfunktionen nach (6.28) experimentell über einen weiten Bereich von Skalen zu beobachten, siehe Abbildung 6.22. Es stellt sich daher die Frage, wie diese tatsächlich beobachtete relative Skalierung mit den Ergebnissen der Markowanalyse in Einklang zu bringen ist.

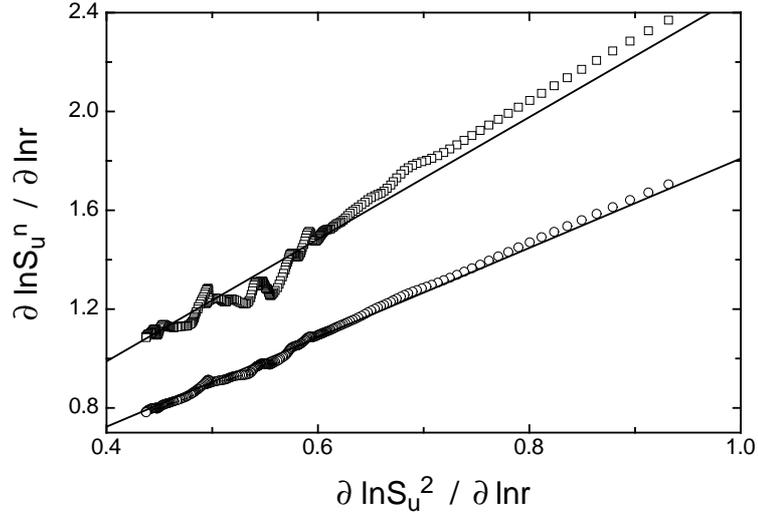


Abbildung 6.22: Die logarithmischen Ableitungen  $DS_u^n = \partial \ln(S_u^n(r)) / \partial \ln r$  für  $n = 4$  (Kreise) und  $n = 6$  (Quadrate) als Funktion von  $DS_u^2$ . Die log. Ableitungen sind, der ESS-Eigenschaft (6.28) gemäss, direkt proportional zueinander (durchgezogene Linien).

Dazu soll im Folgenden der etwas vereinfachte Spezialfall eines rein linearen Driftkoeffizienten  $D^{(1)}$  betrachtet werden:

$$\begin{aligned} D^{(1)}(u, r) &= -\gamma(r) u, \\ D^{(2)}(u, r) &= \alpha(r) - \delta(r) u + \beta(r) u^2. \end{aligned} \quad (6.29)$$

(Die in Kapitel 7 vorgestellten Ergebnisse deuten darauf hin, dass die Koeffizienten  $D^{(k)}(u, r)$  für hohen Reynoldszahlen in guter Näherung durch (6.29) beschrieben werden.)

Mit diesen Koeffizienten folgt aus der allgemeinen Gleichung (4.9) für die Strukturfunktionen:

$$\begin{aligned} r \frac{\partial}{\partial r} S_u^n(r) &= n(\gamma(r) - (n-1)\beta(r)) S_u^n(r) - \alpha(r)n(n-1)S_u^{n-2}(r) \\ &\quad + \delta(r)n(n-1)S_u^{n-1}(r). \end{aligned} \quad (6.30)$$

Division der Gleichung durch  $S_u^n(r)$  liefert mit der Definition  $\tilde{\mu} = \gamma(r)/\beta(r)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln S_u^n(r)}{\partial \ln r} &= \frac{r \frac{\partial}{\partial r} S_u^n(r)}{S_u^n(r)} = \\ &= n\gamma(1 - (n-1)\tilde{\mu}) - n(n-1)\alpha(r) \frac{S_u^{n-2}}{S_u^n} \\ &\quad + n(n-1)\delta(r) \frac{S_u^{n-1}}{S_u^n}. \end{aligned} \quad (6.31)$$

Mit zwei der Gleichungen (6.31) – für die Strukturfunktionen  $n$ -ter und  $p$ -ter Ordnung – kann  $\gamma$  eliminiert werden. Eine einfache Umformung liefert dann:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln S_u^n(r)}{\partial \ln r} &= \frac{n(1 - (n-1)\tilde{\mu})}{p(1 - (p-1)\tilde{\mu})} \frac{\partial \ln S_u^p(r)}{\partial \ln r} \\ &+ n\alpha(r) \left\{ \frac{1 - (n-1)\tilde{\mu}}{1 - (p-1)\tilde{\mu}} (p-1) \frac{S_u^{p-2}}{S_u^p} - (n-1) \frac{S_u^{n-2}}{S_u^n} \right\} \\ &- n\delta(r) \left\{ \frac{1 - (n-1)\tilde{\mu}}{1 - (p-1)\tilde{\mu}} (p-1) \frac{S_u^{p-1}}{S_u^p} - (n-1) \frac{S_u^{n-1}}{S_u^n} \right\}. \end{aligned} \quad (6.32)$$

Die ersten beiden Terme dieser Gleichung haben bereits die Form der Definition (6.28) der ESS-Eigenschaft. Vernachlässigt man die beiden letzten Terme in (6.32), so folgt aus einem Vergleich mit (6.28) für die relativen Skalenexponenten

$$\frac{\zeta_n}{\zeta_p} = \frac{n(1 - (n-1)\tilde{\mu})}{p(1 - (p-1)\tilde{\mu})}. \quad (6.33)$$

Setzt man den Skalenexponenten dritter Ordnung  $\zeta_3$  wie üblich auf eins, folgt für  $\zeta_n$ :

$$\zeta_n = \frac{\zeta_n}{\zeta_3} = \frac{n}{3} \frac{1 - (n-1)\tilde{\mu}}{1 - 2\tilde{\mu}}. \quad (6.34)$$

Wie auch im Lognormalmodell Kolmogorovs erhält man also einen Skalenexponenten  $\zeta_n$ , der quadratisch von seinem Argument  $n$  abhängt. Gleichsetzen von Gleichung (6.34) mit dem von Kolmogorov vorhergesagten Verlauf (3.47) des Skalenexponenten  $\zeta_n$  liefert den Zusammenhang zwischen  $\tilde{\mu}$  und dem Intermittenzfaktor  $\mu$  der Kolmogorovschen Theorie:

$$\mu = \frac{6\tilde{\mu}}{1 - 2\tilde{\mu}}. \quad (6.35)$$

Der Faktor  $\tilde{\mu} = \beta(r)/\gamma(r)$  ist, streng genommen, eine Funktion der Längenskala  $r$ . In erster Näherung können  $\beta$  und  $\gamma$  jedoch als konstant angenommen werden (siehe Abb. 6.9 und 6.14; man beachte in der Darstellung von  $\gamma$  den recht hohen offset), und man erhält (mit  $\beta \approx 0,06$  und  $\gamma \approx 1,2$ ) für den Intermittenzfaktor  $\mu$  einen Wert von etwa 0,33. Das liegt zwar in derselben Größenordnung wie der durch einen Fit nach Gleichung (3.47) direkt bestimmte Wert von  $\mu = 0,23$ , die Abweichung von über vierzig Prozent belegt aber, dass die gemachten Näherungen sehr grob sind.

Andererseits kann man aber feststellen, dass der mit Hilfe der ESS bestimmte Intermittenzfaktor  $\mu$  nur dann eine Aussagen über  $\tilde{\mu}$  erlaubt, wenn die oben gemachten Näherungen gültig sind<sup>3</sup>. Man kann mit Hilfe der ESS also bestenfalls eine Aussage über das Verhältnis  $\tilde{\mu} = \beta/\gamma$  der beiden Koeffizienten  $\gamma$  und  $\beta$  zueinander machen, deren absoluten Wert oder den der Koeffizienten  $\alpha$  oder  $\delta$  jedoch nicht bestimmen. Die ESS macht demnach nur eine sehr eingeschränkte Aussage über den dem Geschwindigkeitsinkrement zugrunde liegenden stochastischen Prozess.

<sup>3</sup>Die in Kapitel 7 vorgestellten Ergebnisse belegen, dass die Koeffizienten  $\alpha$  und  $\delta$  mit steigender Reynoldszahl kleiner werden. Für sehr grosse  $Re$  ist daher zu erwarten, dass die beiden letzten Terme in (6.32) in guter Näherung vernachlässigt werden können.

Die Aussage, dass die mit der ESS bestimmten relativen Skalenexponenten nur eine Aussage über das Verhältnis von  $\gamma$  zu  $\beta$  machen, kann in Verbindung zu dem in Kapitel 6.6.2 diskutierten Ergebnis gesehen werden, demzufolge es mehrere Möglichkeiten gibt, die Statistik des Geschwindigkeitsinkrements  $u(r)$  auf nur einer Skala zu beschreiben. Diese Mehrdeutigkeit verschwindet, sobald man die bedingten Dichten  $p(u, r|u_0, r_0)$  betrachtet; erst dadurch sind die Koeffizienten  $\gamma$  und  $\beta$  absolut festgelegt.

#### 6.6.4 Betragsmomente

Strukturfunktionen ungerader Ordnung sind, da sich bei ihnen Beiträge positiver und negativer Geschwindigkeitsinkremente bei der Mittelung größtenteils gegenseitig aufheben, im Gegensatz zu den Momenten gerader Ordnung experimentell schlecht definiert. Es ist deswegen eine weit verbreitete Praxis [6], zur Bestimmung der Skalenexponenten anstelle der Strukturfunktionen die Momente  $T_u^n(r)$  der Absolutbeträge des Geschwindigkeitsinkrements zu verwenden:

$$T_u^n(r) = \langle |u(r)|^n \rangle . \quad (6.36)$$

Analog zur Herleitung der Gleichung für die Strukturfunktionen ist es nun möglich, aus der Fokker-Planck-Gleichung eine Gleichung für die Betragsmomente  $T_u^n(r)$  herzuleiten. Der Einfachheit halber sollen hierzu wieder die Koeffizienten  $D^{(1)}$  und  $D^{(2)}$  nach Gleichung (6.29) verwendet werden.

Die Fokker-Planck-Gleichung für die Dichte  $p(u, r)$  lautet mit diesen Koeffizienten:

$$-r \frac{\partial}{\partial r} p(u, r) = \frac{\partial}{\partial u} (\gamma u p(u, r)) + \frac{\partial^2}{\partial u^2} ((\alpha - \delta u + \beta u^2) p(u, r)) . \quad (6.37)$$

Die Gleichung für  $p(-u, r)$  ergibt sich daraus zu:

$$-r \frac{\partial}{\partial r} p(-u, r) = \frac{\partial}{\partial u} (\gamma u p(-u, r)) + \frac{\partial^2}{\partial u^2} ((\alpha + \delta u + \beta u^2) p(-u, r)) . \quad (6.38)$$

Die Gleichungen für  $p(u, r)$  und  $p(-u, r)$  unterscheiden sich aufgrund des linearen Terms  $\delta$  in  $D^{(2)}$ . Im allgemeinen führt jeder ungerade Term in  $D^{(2)}$  und jeder gerade Term in  $D^{(1)}$  zu Unterschieden in diesen Gleichungen.

Die Strukturfunktionen  $S_u^n(r)$  und die Betragsmomente  $T_u^n$  lassen sich für  $n \geq 2$  aus den Dichten  $p(u, r)$  einfach berechnen:

$$\begin{aligned} S_u^n(r) &= \langle u(r)^n \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} u^n p(u, r) du , \\ T_u^n(r) &= \langle |u(r)|^n \rangle = \int_0^{+\infty} u^n (p(u, r) + p(-u, r)) du , \\ t_u^n(r) &= \int_0^{+\infty} u^n (p(u, r) - p(-u, r)) du . \end{aligned} \quad (6.39)$$

Die Definition der Größen  $t_u^n(r)$  wird sich für den weiteren Verlauf der Rechnung als vorteilhaft erweisen.

Einsetzen der Gleichungen (6.37) und (6.38) in (6.39) liefert die Gleichungen für die Strukturfunktionen und die Betragsmomente:

$$\begin{aligned} r \frac{\partial}{\partial r} S_u^n(r) &= n (\gamma(r) - (n-1)\beta(r)) S_u^n(r) \\ &\quad - n(n-1)\alpha(r) S_u^{n-2}(r) + n(n-1)\delta(r) S_u^{n-1}(r), \\ r \frac{\partial}{\partial r} T_u^n(r) &= n (\gamma(r) - (n-1)\beta(r)) T_u^n(r) \\ &\quad - n(n-1)\alpha(r) T_u^{n-2}(r) + n(n-1)\delta(r) t_u^{n-1}(r). \end{aligned} \quad (6.40)$$

Bei der Herleitung wurde angenommen, dass das Produkt  $u^n p(u, r)$  für  $u \rightarrow \infty$  gegen Null geht und dass die Steigung von  $p(u, r)$  für  $u = 0$  stets endlich ist.

Betrachtet man die Gleichungen (6.40) für ungerade Ordnungen  $n$ , so fallen erhebliche Unterschiede zwischen der Gleichung der Strukturfunktionen und der der Betragsmomente auf. Diese Unterschiede stammen insbesondere vom linearen Term  $\delta$  in  $D^{(2)}$ . Dieser koppelt für ungerade  $n$  in die Gleichung für  $S_u^n$  das sehr große Moment  $S_u^{n-1}$  ein, während in der Gleichung für die  $T_u^n$  an dieser Stelle nur das im Vergleich dazu kleine Moment  $t_u^{n-1}$  auftritt. Ein weiterer Unterschied ergibt sich für  $n = 3$ . In diesem Fall verschwindet das Moment  $S_u^{3-2} = S_u^1 = 0$  in der Gleichung für  $S_u^3$ , wohingegen das Betragsmoment  $T_u^1$  in der Gleichung für  $T_u^3$  einen endlichen Wert hat. Da die allgemeine Gleichung für  $T_u^n$  von  $T_u^{n-2}$  abhängt, pflanzt sich diese Differenz durch alle ungeraden Ordnungen fort.

Die Unterschiede zwischen den Strukturfunktionen und den Betragsmomenten rühren also nicht nur vom linearen Term  $\delta$  in  $D^{(2)}$  her, wie ein erster Vergleich der Gleichungen (6.37) und (6.37) für  $p(u, r)$  und  $p(-u, r)$  vielleicht vermuten lässt, sondern auch vom konstante Term  $\alpha$  des Diffusionskoeffizienten. Während  $\delta$  eine experimentell eher schlecht bestimmbare Größe ist (vergleiche Gleichungen (6.17) und (6.19)), hat der konstante Term  $\alpha$  einen relativen Fehler von nur vier Prozent. Die hier diskutierten Unterschiede zwischen den  $S_u^n$  und den Betragsmomenten  $T_u^n$  sind daher signifikant und legen dringend nahe, bei der Verwendung von Betragsmomenten anstelle der Strukturfunktionen deutlich mehr Vorsicht walten zu lassen als derzeit üblich.

### 6.6.5 Multiplikative Kaskadenmodelle

In [1] wurde gezeigt, dass das Modell einer multiplikativen Kaskade nach Castaing Markoweigenschaften impliziert und zu einer Fokker-Planck-Gleichung mit den folgenden Koeffizienten äquivalent ist:

$$\begin{aligned} D^{(1)}(u, r) &= -\gamma(r) u \\ D^{(2)}(u, r) &= \beta(r) u^2. \end{aligned} \quad (6.41)$$

In Übereinstimmung damit konnte in [32] gezeigt werden, dass die Lösung der Fokker-Planck-Gleichung mit den Koeffizienten (6.41) der Castaing-Formel (3.57) mit lognormal-verteilter Multiplikator entspricht (siehe Kapitel 6.5).

Im Widerspruch zum multiplikativen Kaskadenmodell steht nun allerdings der in dieser Arbeit gefundene endliche Wert für  $\alpha$ , dem konstanten Term in  $D^{(2)}$ . Da das Castaing-Modell die beobachteten intermittenten Verteilungen recht erfolgreich erklärt, ist auch hier die Signifikanz dieses speziellen Ergebnisses der Markowanalyse zu klären. So wurde in [1] darauf hingewiesen, dass  $\alpha$  aus der Schätzung eines Moments zweiter Ordnung ( $D^{(2)}$ ) stammt, das von Messfehlern und mangelhafter Statistik der Messung weit stärker betroffen ist als das Moment erster Ordnung. Das ist natürlich richtig. Ein Vergleich der Abbildungen 6.6 und 6.15 zeigt deutlich, dass die Fehler der Koeffizienten mit höherer Ordnung stark anwachsen. Aus Abbildung 6.19 wird aber auch deutlich, dass die Fehler von  $D^2$  in der Nähe von  $u = 0$  am kleinsten sind. Der Koeffizient des Fitpolynoms der am besten, d.h. mit dem kleinsten relativen Fehler, bestimmt werden kann, ist daher der der nullten Ordnung, also  $\alpha$ . Das experimentelle Ergebnis eines von Null verschiedenen Wertes für  $\alpha$  ist deswegen für den hier untersuchten Datensatz signifikant.

Das Modell einer rein multiplikativen Kaskade ist aber auch aus theoretischer Sicht zu kritisieren. Die Langevin-Gleichung für die Evolution des Geschwindigkeitssinkrements  $u$  in  $r$  lautet mit den Koeffizienten (6.41):

$$-\frac{\partial}{\partial r}u(r) = -\frac{\gamma(r)}{r}u(r) + \sqrt{\frac{\beta(r)}{r}}u(r)\Gamma(r). \quad (6.42)$$

Dieser Gleichung zufolge bliebe eine Geschwindigkeitsinkrement, das, von der Rauschkraft  $\Gamma$  getrieben, einmal zufällig den Wert Null angenommen hat, für alle weiteren Skalen  $r$  konstant gleich Null. Dies widerspricht nicht nur der physikalischen Anschauung, sondern auch experimentellen Ergebnissen. Ein zusätzlicher additiver Rauschterm in (6.42), wie er durch den additiven Term  $\alpha$  gegeben ist, sorgt in diesem Fall dafür, dass das Inkrement nach einem Nulldurchgang wieder endliche Werte annimmt.

In [33] wurde kürzlich ein erweitertes Kaskadenmodell mit zusätzlichem additiven Rauschen vorgeschlagen. Es konnte gezeigt werden, dass das erweiterte Modell wesentlich besser mit den beobachteten Eigenschaften turbulenter Strömungen in Einklang steht als das einfache multiplikative Kaskadenmodell. Insbesondere die Vorhersage für die Strukturfunktionen ungerader Ordnung erweisen sich beim multiplikativen Kaskadenmodell ohne additives Rauschen als falsch.

Auch der lineare Term  $\delta$  in  $D^{(2)}$  spielt in diesem Zusammenhang eine wichtige Rolle. Verschwindet er, so ist die Fokker-Planck-Gleichung (6.37) für  $p(u, r)$  symmetrisch in  $u \rightarrow -u$ . Eine anfangs symmetrische Wahrscheinlichkeitsdichte  $p(u, r)$ , die sich dieser Gleichung folgend in  $r$  entwickelt, bleibt daher für alle Skalen  $r$  symmetrisch. Dies ist aber genau der Fall, von dem in der Turbulenz üblicherweise ausgegangen wird: man nimmt gemeinhin an, dass die Geschwindigkeitsinkremente auf grossen Skalen Gaußverteilt sind. Die Evolutionsgleichung der Dichten kann in diesem Fall aber nicht symmetrisch sein, da dann die ungeraden Momente des Inkrements verschwinden würden, was dem 4/5-Gesetz widersprechen würde. Der lineare Term  $\delta$  in  $D^{(2)}$  muss daher zwingend ungleich Null sein. Nur dieser ungerade Term in  $D^{(2)}$  kann im Verlauf der Kaskade für den Aufbau ungerader Momente sorgen.

### 6.6.6 Weiterführende Ansätze

Die Markowanalyse liefert auch über die in Kapitel 3.6 vorgestellten Theorien interessante neue Einsichten.

So wurde etwa in [31] gezeigt, dass die Annahme eines Markowprozesses für das Geschwindigkeitsinkrement mit den von V. L'vov diskutierten [65] fusion rules vereinbar ist. Das in der vorliegenden Arbeit gefundene Resultat einer von Null verschiedenen Markowlänge  $l_{mar}$  könnte für die Theorie der fusion rules aber eine zusätzliche wichtige Information liefern: In [15] konnten die Vorhersagen der Theorie für das Verhalten der Mehrpunktkorrelationsfunktionen experimentell weitgehend bestätigt werden. Abweichungen von den Vorhersagen der fusion rules findet man allerdings für den Fall, dass die Differenz zweier Skalen, die selbst innerhalb des Inertialbereichs liegen, im Dissipationsbereich liegt. Diese Abweichungen deuten darauf hin, dass der Effekt einer endlichen Markowlänge auch für die fusion rules bei Skalen innerhalb des Inertialbereichs von Bedeutung ist.

Bemerkenswert ist in diesem Zusammenhang, dass die Theorie der fusion rules durchaus Aussagen für den Fall macht, dass alle betrachteten Skalen innerhalb des Dissipationsbereichs liegen [66]. Die Vorhersagen für das Verhalten der Mehrpunktkorrelationen unterscheiden sich in diesem Fall deutlich von denen, die man erhält, wenn alle beteiligten Skalen im Inertialbereich liegen und konnten experimentell auch bestätigt werden [36]. Die Existenz einer endlichen Markowlänge sowie die oben erwähnten, in [15] gefundenen, experimentellen Abweichungen deuten allerdings darauf hin, dass der Effekt der Dissipation nicht nur für die Skalen selbst, sondern auch bei Differenzen von Skalen von Bedeutung ist.

Auch zwischen dem feldtheoretischen Zugang nach Yakhot und der Markowanalyse finden sich Zusammenhänge [30, 31]. Es konnte gezeigt werden, dass die in [113] abgeleitete Differentialgleichung für  $p(u, r)$ , Gleichung (3.59), zu einer Kramers–Moyal–Entwicklung für  $p(u, r)$  äquivalent ist. Die entsprechenden dimensionsbehafteten Kramers–Moyal–Koeffizienten, die zur vorläufigen Unterscheidung mit  $d^{(k)}(U, r)$  bezeichnet seien, ergeben sich zu [31]:

$$d^{(k)}(U, r) = a_k U^k + b_k(r) U^{k-1}. \quad (6.43)$$

Hierbei ist  $U$  wiederum das dimensionsbehaftete, also nicht durch  $\sigma_\infty$  dividierte, Geschwindigkeitsinkrement. Die Faktoren  $a_k$  und  $b_k$  berechnen sich gemäß

$$\begin{aligned} a_k &= (-1)^k \frac{A}{(B+1)(B+2)\dots(B+k)}, \\ b_k(r) &= (-1)^{k-1} \frac{r}{L} \frac{\sigma}{(B+2)(B+3)\dots(B+k)}, \end{aligned} \quad (6.44)$$

wobei  $b_1$  gleich Null ist [31] und zwischen den Grössen  $A$  und  $B$  der Zusammenhang  $A = (B+3)/3$  gilt (siehe Kapitel 3.6). In [31] wurde ausserdem abgeschätzt, dass die Entwicklungskoeffizienten der Ordnung drei und höher keinen wesentlichen Einfluss mehr haben und sich die Dichte  $p(U, r)$  daher in guter Näherung durch eine Fokker–Planck–Gleichung beschreiben lassen. Mit dem in [113] angegebenen Wert von  $B \approx 20$  ergibt sich damit in der dimensionslosen Variable  $u = U/\sigma_\infty = U/(\sqrt{2}\sigma)$  für

$p(u, r)$  eine Fokker–Planck–Gleichung mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned}
 D^{(1)}(u, r) &= -\gamma u, \\
 \gamma &= \frac{B+3}{3(B+1)} \approx 0,366, \\
 D^{(2)}(u, r) &= \beta(r)u^2 - \delta(r)u, \\
 \beta &= \frac{(B+3)}{3(B+1)(B+2)} \approx 0,017, \\
 \delta(r) &= \frac{1}{\sqrt{2}(B+2)} \frac{r}{L} = \frac{1}{\sqrt{2}(B+2)} \frac{\lambda r}{L\lambda} \approx 0,032 \frac{\lambda r}{L\lambda}. \quad (6.45)
 \end{aligned}$$

(Zur Umrechnung der Fokker–Planck–Gleichung für  $p(U, r)$  in die entsprechende Gleichung für  $p(u, r)$  müssen wegen  $\partial U = \sigma_\infty \partial u$  die Koeffizienten  $d^{(k)}$  jeweils durch  $\sigma_\infty^k$  geteilt werden. Die Transformation der Dichte  $p(U, r)$  gemäss Gleichung (3.10) muss auf beiden Seiten der Gleichung vorgenommen werden und hat deswegen keinen weiteren Einfluss auf die Koeffizienten  $D^{(k)}$ .)

In Übereinstimmung mit den experimentellen Ergebnissen ergeben sich für Drift- und Diffusionskoeffizient lineare bzw. quadratische Abhängigkeiten vom Geschwindigkeitsinkrement  $u$ . Im Gegensatz zum Experiment weist der Diffusionskoeffizient in (6.45) allerdings keinen konstanten Term auf, was dazu führt, dass  $D^{(2)}$  für bestimmte Werte des Geschwindigkeitsinkrements *negativ* wird. An diesem Punkt wird die Theorie auf dem Hintergrund der Markowprozesse inkonsistent, da den Definitionen (4.6) und (4.5) zufolge  $D^{(2)}$  eine positive Grösse sein muss.

Abweichungen zwischen Theorie und Experiment finden sich auch in den numerischen Werten für  $\gamma$ ,  $\delta$  und  $\beta$ . Mit einem Wert von ca. 0,366 entspricht das theoretische Ergebnis für  $\gamma$  zwar recht genau dem nach der Kolmogorovschen Theorie zu erwartenden Wert von 0,362, siehe Gleichung (6.27), liegt jedoch deutlich unter den experimentell gefundenen Werten (6.19) um eins. Auch der quadratische Koeffizient  $\beta$  liegt mit  $\beta \approx 0,017$  deutlich unter dem experimentell gefundenen Wert von  $\beta \approx 0,06$ , stimmt aber wiederum gut mit dem nach K62 zu erwartenden Wert von 0,014 überein (siehe Gleichung (6.27)).

Die theoretischen Vorhersagen der Yakhotschen Theorie erweisen sich damit, zumindest was den linearen Term in  $D^{(1)}$  und den quadratischen Term in  $D^{(2)}$  betrifft, als identisch mit denen des Kolmogorovschen Lognormalmodells. Das bedeutet allerdings auch, wie in Kapitel 6.6.2 gezeigt, dass die Theorie die bedingten Wahrscheinlichkeitsdichten des Geschwindigkeitsinkrements nicht korrekt beschreibt. Diese Diskrepanzen verwundern andererseits aber auch nicht, da die Theorie Yakhots allenfalls für den Fall unendlich hoher Reynoldszahlen gültig ist [113]. Im Vorgriff auf Kapitel 7 sei an dieser Stelle aber bereits erwähnt, dass die Koeffizienten  $\gamma$  und  $\beta$  auch bei sehr hohen Reynoldszahlen nicht die nach Gleichung (6.45) bzw. (6.27) zu erwartenden Werte annehmen.

Ein bedeutendes Ergebnis dieser Theorie ist es allerdings, dass das Auftreten des linearen Terms  $\delta(r)$  im Diffusionskoeffizienten erklärt und auf den Einfluss der äusseren, die Kaskade treibenden Kräfte, zurückgeführt werden kann. Bemerkenswert ist ausserdem, dass sich in Übereinstimmung mit dem Experiment eine lineare Abhängigkeit des linearen Terms von der Skala  $r$  ergibt,  $\delta(r) = \delta_0 r / \lambda$ . Differenzen

ergeben sich allerdings auch hier in den numerischen Werten: Für den hier untersuchten Datensatz mit  $\lambda/L \approx 0,1$  erhält man aus der Theorie gemäss Gleichung (6.45) für  $\delta_0$  einen Wert von  $\delta_0 \approx 0,003$ , der experimentell gefundene Wert dagegen liegt bei  $\delta_0 = 0,014$  (siehe Gleichung (6.19)).

Abschliessend sei noch bemerkt, dass die Theorie Yakhots, obwohl sie nur für den Spezialfall unendlich hoher Reynoldszahlen gilt, in der Darstellung (6.45) über das Verhältnis  $\lambda/L$  eine Reynoldszahlabhängigkeit des linearen Terms  $\delta$  enthält. Dem Kaskadenmodell der Turbulenz zufolge sollte das Verhältnis  $\lambda/L$  mit  $Re^{-1/2}$  skalieren [85, 108]. Gibt man die Skala  $r$  in Einheiten der Taylorlänge  $\lambda$  an, müsste man demnach also erwarten können, dass der Faktor  $\delta_0$  mit der Wurzel der Reynoldszahl abnimmt. Wiederum im Vorgriff auf Kapitel 7 sein erwähnt, dass experimentell tatsächlich eine Abnahme von  $\delta_0$  mit der Reynoldszahl beobachtet wird, allerdings lässt sich der beobachtete Abfall besser mit einem Skalenexponenten von  $-3/8$  beschreiben:  $\delta_0 \propto Re^{-3/8}$ .

Auch zu dem in Kapitel 3.6 diskutierten thermodynamischen Ansatz kann eine Verbindung gefunden werden. Die Anwendung dieses verallgemeinerten thermodynamischen Ansatzes von Tsallis auf die Turbulenz führt zu folgender Vorhersage für die Wahrscheinlichkeitsdichten des Geschwindigkeitsinkrements:

$$p(u, r) = \frac{m_1}{(1 + m_2 u^2)^{k(r)}}. \quad (6.46)$$

Die beiden (skalenabhängigen) Koeffizienten  $m_1$  und  $m_2$  sind durch die Normierungsbedingung für  $p(u, r)$  und die Standardabweichung des Geschwindigkeitsinkrements  $u(r)$  gegeben, der Skalenexponent  $k(r)$  berechnet sich zu:

$$k(r) = 1 + \log_2 \frac{r}{\eta}. \quad (6.47)$$

Eine Erweiterung dieses Konzeptes auf asymmetrische Verteilungen wurde zwar ebenfalls vorgeschlagen [12], der Einfachheit halber beschränkt sich die folgende Diskussion aber auf den Fall symmetrischer Verteilungen. Um einen wenigstens qualitativen Vergleich mit dem Experiment durchführen zu können, soll hier die symmetrisierte Dichte  $p_{\pm}$  betrachtet werden:

$$p_{\pm}(u, r) = \frac{1}{2} (p(u, r) + p(-u, r)). \quad (6.48)$$

In Abbildung 6.23 ist diese symmetrisierte Dichte auf die Skala  $r = 2,25l_{mar}$  dargestellt. Der ebenfalls mit eingezeichnete Fit belegt, dass sich die Daten tatsächlich in guter Näherung durch eine Verteilung der Form (6.46) beschreiben lassen. Für den Skalenexponenten  $k$  liefert der Fit einen Wert von:

$$k_{Fit}(r = 2,25l_{mar}) = 7,5. \quad (6.49)$$

Dieser Wert stimmt recht gut mit dem nach Gleichung (6.47) berechneten Wert überein:

$$k_{Tsallis}(r = 2,25l_{mar}) = 1 + \log_2 \frac{2,25l_{mar}}{\eta} \approx 1 + \log_2 \frac{2\lambda}{0,038\lambda} = 6,7. \quad (6.50)$$

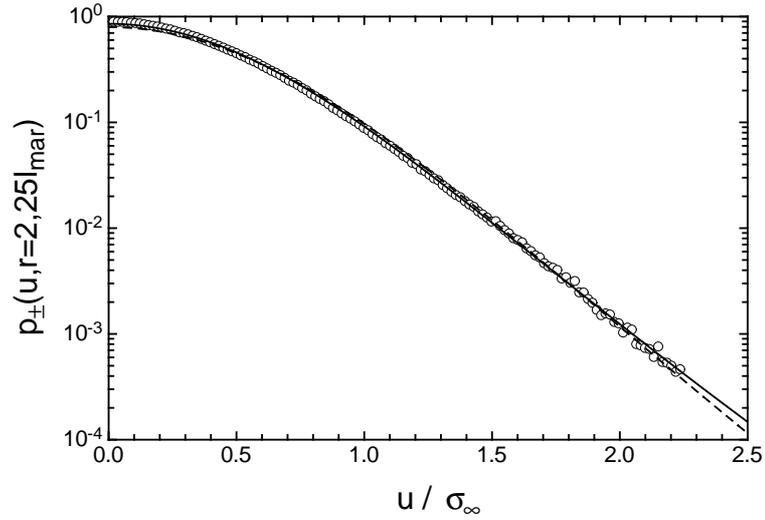


Abbildung 6.23: Die in Gleichung (6.48) definierte symmetrisierte Wahrscheinlichkeitsdichte  $p_{\pm}(u, r)$  auf der Skala  $r = 2, 25l_{mar}$  als Funktion des Geschwindigkeitssinkrements (offene Kreise). Die durchgezogene Linie gibt einen Fit an die Daten gemäss Gleichung (6.46) wider, als durchbrochene Linie ist ein Fit dieser Art mit  $k = k_{stat} = 9,3$  dargestellt.

Der oben angesprochene Zusammenhang zur Markowanalyse ergibt sich für den Fall einer stationären Fokker–Planck–Gleichung. Für den Fall, dass die Evolution der Wahrscheinlichkeitsdichten  $p(u, r)$  in  $r$  als stationär angenommen werden kann, d.h. falls

$$\frac{\partial}{\partial r} p(u, r) \approx 0, \quad (6.51)$$

lautet die Lösung der Fokker–Planck–Gleichung (4.8) einfach [95]:

$$p(u, r) = \frac{N(r)}{D^{(2)}(u, r)} \exp \left\{ \int \frac{D^{(1)}(u', r)}{D^{(2)}(u', r)} du' \right\}, \quad (6.52)$$

wobei sich  $N(r)$  durch die Normierungsbedingung (3.3) an  $p(u, r)$  festgelegt ist.

Vernachlässigt man die Terme der Ordnung 2 und höher in  $D^{(1)}$  und ausserdem auch den linearen Term in  $D^{(2)}$ , so kann die stationäre Lösung für den Fall der Turbulenz leicht berechnet werden. Mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned} D^{(1)}(u, r) &= -\gamma(r)u, \\ D^{(2)}(u, r) &= \alpha(r) + \beta(r)u^2 \end{aligned} \quad (6.53)$$

lautet sie:

$$p(u, r) = \frac{N(r)}{\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}u^2\right)^{1 + \frac{\gamma}{2\beta}}}. \quad (6.54)$$

Die stationäre Lösung der Fokker–Planck–Gleichung entspricht damit exakt der aus der Tsallis–Statistik hergeleiteten Vorhersage (6.46) mit  $k(r) = 1 + \frac{\gamma(r)}{2\beta(r)}$ . Mit den

für  $\gamma$  und  $\beta$  gefundenen Werte (6.19) erhält man für  $k(r = 2, 25l_{mar})$  allerdings den Wert:

$$k_{stat}(r = 2, 25l_{mar}) = 1 + \frac{\gamma(r = 2, 25l_{mar})}{2\beta(r = 2, 25l_{mar})} \approx 9,3. \quad (6.55)$$

Dieser Wert liegt zwar deutlich höher als der theoretische Wert (6.50) und auch als der aus dem Fit erhaltene (6.49), stimmt aber immerhin in seiner Grössenordnung gut mit diesen beiden Werten überein. Bemerkenswert ist ausserdem, dass man die in Abbildung 6.46 gezeigten Daten für  $u > \sigma_\infty$  in sehr guter Näherung auch durch einen Fit der Form (6.46) beschreiben kann, wenn man den Exponenten  $k$  auf den Wert  $k = k_{stat} = 9,3$  fixiert.

In erster Näherung liefern die stationäre Lösung der Fokker–Planck–Gleichung und der verallgemeinerte thermodynamische Ansatz nach Tsallis also äquivalente Beschreibungen der (symmetrisierten) Wahrscheinlichkeitsdichten des Geschwindigkeitsinkrements. Eine physikalische Interpretation der Annahme, dass das turbulente Geschwindigkeitsfeld die verallgemeinerte Entropie  $S_q$  maximiert (und das ausserdem mit einem skalenabhängigen Wert für  $q$ ) konnte allerdings auch in [12, 5] noch nicht gegeben werden.

Im Sinne eines Ausblicks sei abschliessend noch der von G. Pedrizzetti und E. A. Novikov verfolgte Ansatz der Markowmodellierung erwähnt [80, 81]. Hierbei wird explizit davon ausgegangen, dass das turbulente Geschwindigkeitsfeld Markoweigenschaften aufweist und sich die relative Geschwindigkeit zweier mit der Strömung mitbewegter Teilchen durch eine Langevin–Gleichung beschreiben lässt. Die Terme dieser Langevin–Gleichung wurden in [80, 81] modelliert, wobei sich bereits aus der Bedingung der Inkompressibilität, dem Kolmogorovschen 4/5–Gesetz und den experimentellen Ergebnissen für die Strukturfunktion zweiten Grades starke Einschränkungen für die möglichen Modellgleichungen ergeben.

Die aus diesem Ansatz letztlich resultierende Modellgleichung für die Wahrscheinlichkeitsdichten des Geschwindigkeitsinkrements kann zum jetzigen Zeitpunkt allerdings noch nicht mit den Ergebnissen der Markowanalyse verglichen werden. Das Modell von Novikov und Pedrizzetti geht explizit davon aus, dass das turbulente Geschwindigkeitsfeld nur durch eine zweidimensionale Gleichung für die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte von longitudinalem und transversalem Geschwindigkeitssinkrement korrekt beschrieben werden kann. Eine auf mehrdimensionale Zufallsvariablen verallgemeinerte Markowanalyse ist zwar möglich (siehe dazu auch Kapitel 8) und wurde für longitudinales und transversales Inkrement auch bereits begonnen [10], konnte aber aufgrund ihrer Komplexität noch nicht bis in alle Details ausgeführt werden. Es deutet sich aber an, dass auch in diesem Fall die Markoweigenschaften erst für Längenskalen oberhalb der Taylorschen Skala erfüllt sind, was auch den Gültigkeitsbereich eines Markowmodells der Turbulenz auf diesen Bereich von Skalen einschränkt.

# Kapitel 7

## Der Übergang zu hohen Reynoldszahlen

### 7.1 Motivation

Bei weitem die meisten der aktuell diskutierten Turbulenzmodelle basieren auf der Annahme, dass die turbulente Kaskade universelle Eigenschaften zeigt: Für Skalen innerhalb des Inertialbereichs wird die Statistik des Geschwindigkeitsinkrements als unabhängig von den konkreten Randbedingungen, der Viskosität und auch der Reynoldszahl angenommen. Die Reynoldszahl definiert über das Verhältnis  $L/\eta$  bzw.  $L/\lambda$  lediglich den Bereich von Skalen, in dem das Kaskadenmodell gültig ist [85, 41].

Diese Annahme hat, neben ihrer starken physikalischen Aussage, eine beträchtliche Bedeutung in numerischen Verfahren zur Simulation der Navier–Stokes–Gleichung gewonnen, hier insbesondere bei der large eddy simulation (siehe Kapitel 2). Bei diesem Verfahren müssen die Einflüsse der turbulenten Geschwindigkeitsfluktuationen auf Skalen kleiner als der Breite des Filters modelliert werden. Eine wesentliche Annahme bei den meisten der dazu vorgeschlagenen Modelle ist die der Universalität der turbulenten Kaskade.

Experimentellen Untersuchungen zu der vermuteten Universalität der Kaskade kommt daher neben der physikalischen Fragestellung auch eine grosse praktische Bedeutung zu. Frühere Untersuchungen zu den Skalenexponenten der Strukturfunktionen haben, in Übereinstimmung mit der Hypothese der Universalität, eine nur sehr schwache Abhängigkeit der  $\zeta_n$  von der Reynoldszahl und dem konkreten experimentellen System gefunden [6, 4]. Im Widerspruch dazu stehen allerdings die in [54] und [68] vorgestellten Ergebnisse einer Analyse der Turbulenz im Rahmen des multiplikativen Kaskadenmodells von Castaing. Es zeigt sich hier, dass die die Intermitenz beschreibenden Parameter wie etwa der Formparameter  $\lambda^2(r)$  eine starke Abhängigkeit von der Reynoldszahl aufweisen.

Alle oben diskutierten experimentellen Ergebnisse beruhen allerdings auf Annahmen (dem Skalenverhalten bzw. der multiplikativen Kaskade) und haben daher nur begrenzte Aussagekraft. Die Markowanalyse bietet hier die Möglichkeit von Modellannahmen unabhängige Aussagen über eine eventuelle Reynoldszahlabhängigkeit des stochastischen Prozesses für das Geschwindigkeitsinkrement zu machen und so

zu gesicherten Erkenntnissen über die vermutete Universalität der turbulenten Kaskade zu kommen.

## 7.2 Verwendete Daten

Die im Oldenburger Freistrahls maximal erreichbare Reynoldszahl beträgt aufgrund der Geometrie des Versuchsaufbaus und der Eigenschaften des verwendeten Fluids (Luft) etwa  $3 \cdot 10^4$  (siehe Kapitel 5). Um höhere Reynoldszahlen zu erreichen, müsste entweder der Durchmesser der Düse oder die Austrittsgeschwindigkeit des Strahls an der Düse erhöht werden. Ein grösserer Düsendurchmesser verbietet sich, weil die Breite des Freistrahls entsprechend zunehmen und der Strahl dann mit den Wänden des Versuchsaufbaus wechselwirken würde. Auch eine Erhöhung des Durchflusses kommt nicht in Frage, da ansonsten die Austrittsgeschwindigkeit an der Düse nicht mehr als klein gegen die Schallgeschwindigkeit angenommen werden darf und damit die Inkompressibilität des Fluids nicht mehr gewährleistet ist (diese Bedingung beschränkt die Geschwindigkeit an der Düse auf maximal etwa  $40\text{m/s}$ ).

Zur Untersuchung der Markoweigenschaften von turbulenten Strömungen bei sehr hohen Reynoldszahlen wurden daher auch Daten eines anderen Experiments herangezogen. Diese Daten wurden uns dankenswerterweise von Olivier Chanal aus der Arbeitsgruppe um Benoit Chabaud von der Universität Grenoble überlassen und stammen aus einem Freistrahlexperiment in gasförmigem Helium bei Temperaturen um  $4\text{K}$ . Die Viskosität von Helium ist sehr klein, so dass selbst in Laborexperimenten geringer Grösse Reynoldszahlen von etwa  $10^6$  erreicht werden können. Die gewählte Temperatur von  $4\text{K}$  liegt ausserdem in der Nähe des kritischen Punktes von Helium. Die Viskosität ist in diesem Bereich stark druckabhängig, was es erlaubt, die Reynoldszahl über einen sehr weiten Bereich zu variieren.

Die hier verwendeten Grenobler Daten wurden mit einer Düse des Durchmessers  $D = 2\text{mm}$  in einer vertikalen Entfernung von  $40D$  von der Düse gemessen. Die Reynoldszahlen der verschiedenen Messungen variieren zwischen  $8,5 \cdot 10^3$  und  $7,6 \cdot 10^5$ , was Taylor-Reynoldszahlen zwischen 85 und 1180 entspricht. Eine ausführliche Beschreibung des Versuchsaufbaus, der Messtechnik sowie eine eingehende Charakterisierung der Daten findet sich in der Dissertation von O. Chanal [27] und in [28]. Hier soll im Folgenden nur eine kurze Zusammenfassung der wichtigsten Charakteristika der Daten gegeben werden.

Abbildung 7.1 zeigt die Wellenzahlspektren einiger der im Grenobler Experiment gemessenen Datensätze. Mit steigender Reynoldszahl zeigt sich ein immer stärker ausgeprägter Bereich, in dem das Spektrum dem von Kolmogorov postulierten Potenzverhalten  $\propto k^{-5/3}$  folgt.

Ein weiteres Kriterium für die Güte einer Messreihe ist die Abhängigkeit der charakteristischen Längenskalen  $L$ ,  $\lambda$  und  $\eta$  von der Reynoldszahl. Für diese Abhängigkeiten folgen aus dem Kaskadenmodell der Turbulenz einfache Vorhersagen, die in früheren Experimenten bereits verifiziert werden konnten [64, 41, 85].

Für das Verhältnis der integralen Skala  $L$  zur Kolmogorovschen Dissipationslänge

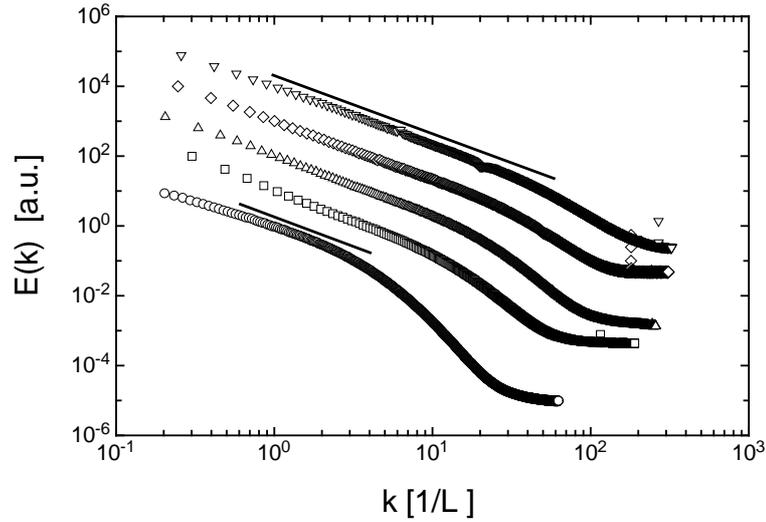


Abbildung 7.1: Die Wellenzahlspektren einiger im Grenobler Freistrahlf gemessenen Datensätze. Die Taylor-Reynoldszahlen betragen (von unten nach oben):  $R_\lambda = 85, 283, 463, 703$  und  $1181$ . Die durchgezogenen Linien sind die nach Kolmogorov zu erwartenden Potenzgesetze mit dem Exponenten  $-5/3$ . Die Kurven wurden der Übersichtlichkeit halber in vertikaler Richtung gegeneinander verschoben.

$\eta$  etwa erhält man [85]:

$$\frac{L}{\eta} \propto Re^{3/4}, \quad (7.1)$$

während die Taylorsche Skala  $\lambda$  mit einem Exponenten von  $1/2$  skalieren sollte:

$$\frac{L}{\lambda} \propto Re^{1/2}. \quad (7.2)$$

Wie in Abbildung 7.2 gezeigt, stimmen sowohl die im Oldenburger Freistrahlf gemessenen Daten als auch die des Grenobler Helium-Experiments gut mit den Vorhersagen (7.1) und (7.2) des Kaskadenmodells überein. Denselben Überlegungen zufolge sollte sich auch die Taylor-Reynoldszahl  $R_\lambda$  als Funktion der Reynoldszahl wie das Verhältnis  $L/\lambda$  verhalten, d.h.  $R_\lambda$  sollte proportional zur Wurzel der Reynoldszahl sein (dieser Zusammenhang folgt direkt aus (7.2), wenn man annimmt, dass die äussere Längenskala, die in die Definition der Reynoldszahl eingeht, von der Grössenordnung der integralen Längenskala  $L$  ist und der Turbulenzgrad für einen gegebenen experimentellen Aufbau konstant ist). Abbildung 7.3 belegt, dass das für die hier untersuchten Datensätze tatsächlich der Fall ist; für die Proportionalitätskonstante  $c$  zwischen  $R_\lambda$  und  $\sqrt{Re}$  liefert ein Fit an die Daten einen Wert von  $c = 1,35 \pm 0,02$ .

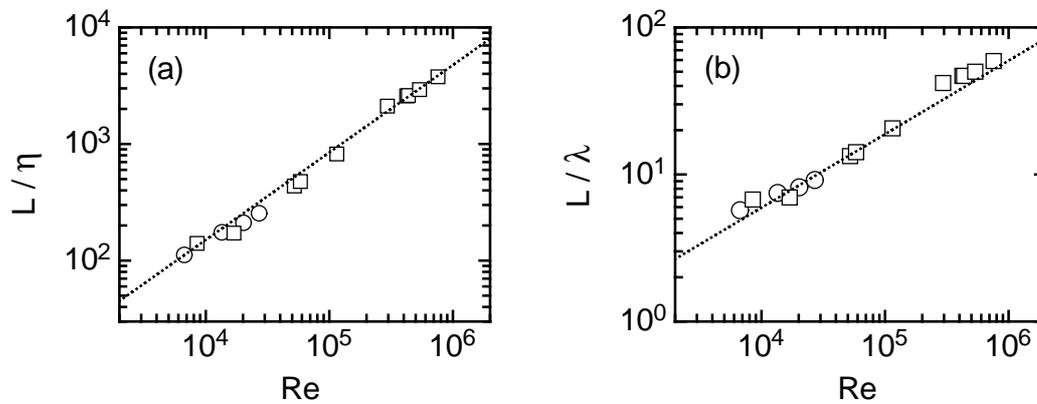


Abbildung 7.2: Die charakteristischen Längenskalen der verwendeten Datensätze als Funktion der Reynoldszahl. Daten aus dem Grenobler Helium-Freistrahlexperiment sind durch Quadrate gekennzeichnet, die im Oldenburger Experiment gemessenen durch Kreise. (a): Das Verhältnis der integralen Skala  $L$  zur Kolmogorovschen Dissipationslänge  $\eta$  im Vergleich zu dem nach Gleichung (7.1) zu erwartenden Verlauf  $\propto Re^{3/4}$  (gestrichelte Linie).

(b): Das Verhältnis  $L/\lambda$  als Funktion der Reynoldszahl im Vergleich zur Vorhersage (7.2) des Kaskadenmodells (gestrichelte Linie).

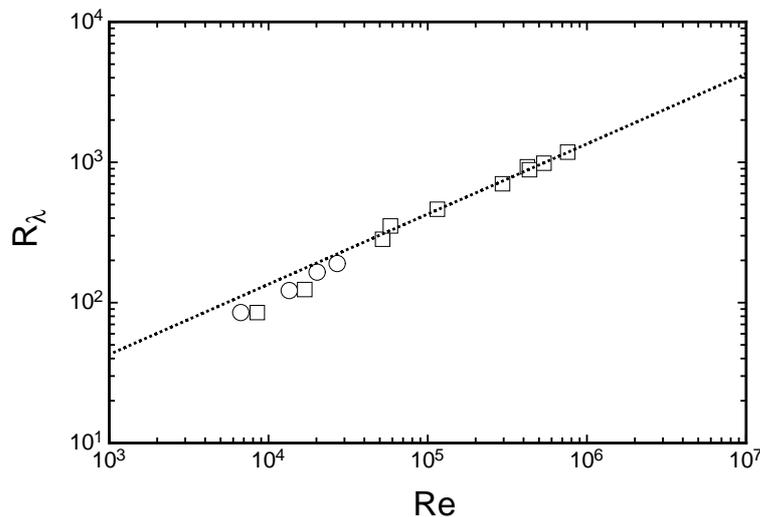


Abbildung 7.3: Die Taylor-Reynoldszahl  $R_\lambda$  als Funktion der Reynoldszahl  $Re$  sowohl für die Oldenburger (Kreise) als auch für die Grenobler Daten (Quadrate).  $R_\lambda$  skaliert mit der Wurzel der Reynoldszahl:  $R_\lambda = c\sqrt{Re}$ , wobei ein Fit an die Daten (durchgezogene Linie) für  $c$  einen Wert von  $c = 1,35 \pm 0,02$  ergibt.

## 7.3 Die Markowlänge

Der erste Schritt der Markowanalyse besteht in der Überprüfung der Markoweigenschaften bzw. in der Bestimmung der Markowlänge  $l_{mar}$ . Von Interesse ist hierbei insbesondere, ob sich die Markowlänge als identisch mit der Taylorschen Länge herausstellt, oder ob die Übereinstimmung zwischen beiden Skalen, die in Kapitel 6 für den Datensatz bei  $R_\lambda = 190$  gefunden wurde, Zufall ist.

Zur Bestimmung der Markoweigenschaften wurden die in Kapitel 6.2 beschriebenen Methoden verwendet, die die Markowlänge aus dem Abfall des normierten Erwartungswertes  $\langle t \rangle(r_1, \Delta r)$  bestimmen.  $\langle t \rangle$  zeigt auch für hohe Reynoldszahlen das aus Kapitel 6.2 bekannte Verhalten, d.h. für kleine  $\Delta r$  Werte weit oberhalb von  $\sqrt{2/\pi}$  und einen Abfall auf diesen Wert für Skalen in der Grössenordnung der Taylorschen Skala  $\lambda$  (siehe Abbildung 7.4).

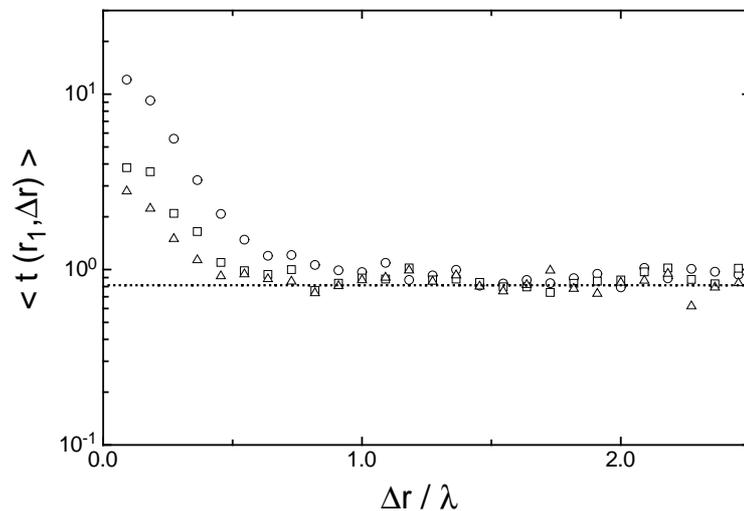


Abbildung 7.4: Der Erwartungswert  $\langle t \rangle$  als Funktion von  $\Delta r$  auf den Skalen  $r_1 = \lambda$  (Kreise),  $r_1 = L/2$  (Quadrate) und  $r_1 = L$  (Dreiecke) für die Messung bei  $R_\lambda = 1181$ .

Die in Kapitel 6.2 beschriebenen drei verschiedenen Methoden zur Bestimmung der Markowlänge aus dem Erwartungswert  $\langle t \rangle$  wurden für jede Reynoldszahl auf jeweils drei Basislängen  $r_1$  angewendet ( $r_1 = \lambda$ ,  $L/2$  und  $L$ ). Die somit erhaltenen insgesamt neun Schätzwerte für  $l_{mar}$  definieren einen Mittelwert und, über ihre Extrema, den Fehler der Markowlänge für die jeweilige Messung.

Abbildung 7.5 zeigt die so bestimmte Markowlänge im Verhältnis zur Taylorschen Skala als Funktion der Reynoldszahl. Über den gesamten Bereich von Reynoldszahlen liegt dieses Verhältnis in der Grössenordnung von eins, was dafür spricht, dass Markow- und Taylorlänge im wesentlichen identisch sind. Allerdings beobachtet man einen leichten Abfall von Werten um eins bei  $Re \approx 10^4$  auf Werte um 0,7 ab Reynoldszahlen von  $10^5$ . Im Intervall  $10^5 \leq Re \leq 10^6$  nimmt das Verhältnis  $l_{mar}/\lambda$  dann andererseits einen konstanten Wert von etwa 0,7 an.

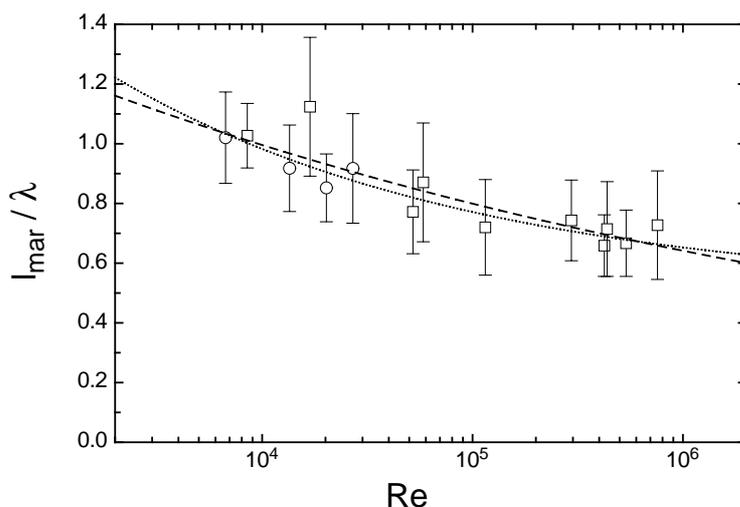


Abbildung 7.5: Das Verhältnis von Markow- zu Taylorlänge als Funktion der Reynoldszahl für Messreihen aus dem Oldenburger (Kreise) und dem Grenobler Freistrahlexperiment (Quadrate). Die Daten können sowohl durch ein Potenzgesetz (durchbrochene Linie) als auch durch einen Abfall auf einen konstanten Wert gemäss  $l_{mar}/\lambda = 1/2 + cRe^{-1/4}$  gefittet werden (gepunktete Linie). Im letzten Fall beträgt die quadratische Abweichung  $\chi^2$  etwa 1,7, während man für das Potenzgesetz einen Wert von  $\chi^2 = 1,9$  erhält.

Ob das Verhältnis  $l_{mar}/\lambda$  im Limes  $Re \rightarrow \infty$  gegen einen konstanten Wert konvergiert oder ob sich der für kleine Reynoldszahlen beobachtete Abfall zu grossen  $Re$  hin (eventuell verlangsamt) fortsetzt, kann aufgrund der bisher vorliegenden Daten und ihrer recht grossen Fehler allerdings nicht abschliessend beantwortet werden. Dass das Verhältnis  $l_{mar}/\lambda$  im gesamten Bereich  $10^5 \leq Re \leq 10^6$  keine systematische Abhängigkeit von der Reynoldszahl zeigt ist allerdings ein starker Hinweis darauf, dass beide Skalen bei hohen Reynoldszahlen bis auf einen konstanten Faktor identisch sind.

Interessant ist in diesem Zusammenhang auch, dass die Daten in Abbildung 7.5 über den gesamten Bereich von Reynoldszahlen in guter Näherung durch eine Funktion der Form  $l_{mar}/\lambda = 1/2 + cRe^{-1/4}$  gefittet werden können. Dieser Fit beschreibt mit einer quadratischen Abweichung von  $\chi^2 = 1,7$  die Daten besser als ein Fit der Form  $l_{mar}/\lambda = cRe^n$  (in diesem Fall beträgt die Abweichung  $\chi^2 = 1,9$ ).

Eine eindeutige Aussage kann dagegen über das Verhältnis der Markowlänge zur Kolmogorovschen Dissipationslänge  $\eta$  gemacht werden. Wie aus Abbildung 7.6 ersichtlich wird, zeigt das Verhältnis dieser beiden Skalen über den gesamten betrachteten Bereich von Reynoldszahlen eine eindeutig steigende Tendenz und kann in guter Näherung durch ein Potenzgesetz in  $Re$  mit einem Skalenexponenten von 0,17 beschrieben werden.

Darüber hinaus stellt man fest, dass sich das Verhältnis  $l_{mar}/\eta$  innerhalb der experimentellen Fehler für Reynoldszahlen grösser als  $10^5$  auch durch ein Potenzgesetz der Form  $l_{mar}/\eta \propto Re^{1/4}$  beschreiben lassen (siehe Abbildung 7.6). Ein Potenzgesetz

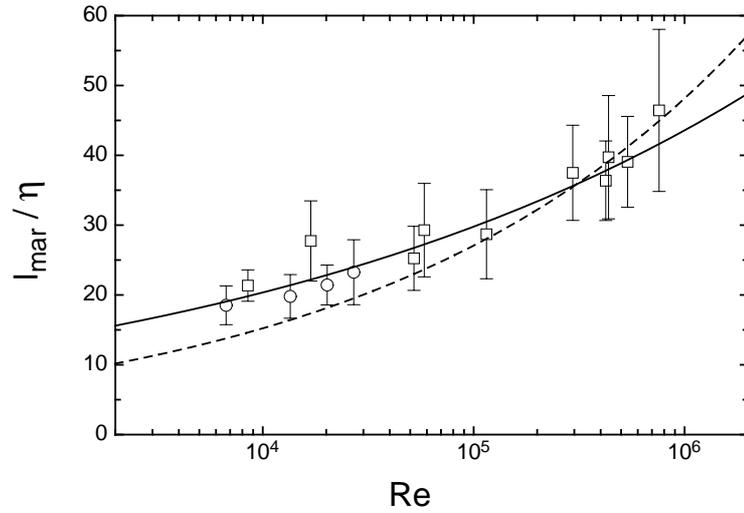


Abbildung 7.6: Das Verhältnis von Markowlänge  $l_{mar}$  zur Kolmogorovschen Dissipationsskala  $\eta$  als Funktion der Reynoldszahl für Messreihen aus dem Oldenburger (Kreise) und dem Grenobler Freistrahlexperiment (Quadrate). Die Daten werden in guter Näherung durch ein Potenzgesetz mit einem Skaleneffizienten von  $0,17 \pm 0,03$  beschrieben (durchgezogene Linie). Berücksichtigt man nur die Daten bei Reynoldszahlen größer als  $10^5$ , kann  $l_{mar}/\eta$  auch durch ein Potenzgesetz mit einem Exponenten von  $1/4$  gefittet werden (durchbrochene Linie).

dieser Form ist das Verhalten, das nach den Gleichungen (7.1) und (7.2) für das Verhältnis  $\lambda/\eta$  zu erwarten ist. Dass sich auch das Verhältnis  $l_{mar}/\eta$  für  $Re > 10^5$  durch ein solches Potenzgesetz beschreiben lässt, ist daher ein weiterer Hinweis darauf, dass Markow- und Taylorlänge für sehr hohe Reynoldszahlen bis auf einen konstanten Faktor der Größenordnung eins identisch sind.

## 7.4 Drift- und Diffusionskoeffizient

Extrapoliert man die experimentell gewonnenen Koeffizienten  $M^{(k)}(u, r, \Delta r)$  mit den in Kapitel 6 beschriebenen Methoden, so erhält man auch bei hohen Reynoldszahlen eine lineare Abhängigkeit des Driftkoeffizienten  $D^{(1)}(u, r)$  vom Geschwindigkeitsinkrement  $u$ :

$$D^{(1)}(u, r) = -\gamma(r)u. \quad (7.3)$$

Abbildung 7.7 zeigt dies exemplarisch für den Datensatz bei  $R_\lambda = 1180$ .

Im Unterschied zu dem in Kapitel 6 untersuchten Datensatz bei  $R_\lambda = 190$  weist der Driftkoeffizient bei sehr hohen Reynoldszahlen allerdings keine signifikanten Terme zweiter und dritter Ordnung mehr in  $u$  auf (siehe Abbildung 7.7) was nahelegt, dass diese Terme im Grenzfall  $Re \rightarrow \infty$  gegen Null gehen. Die folgende Diskussion beschränkt sich daher auf die Steigung  $\gamma(r)$  des Driftkoeffizienten und vernachlässigt die bei niedrigen Reynoldszahlen eventuell noch vorhandenen Terme höherer Ordnung in  $u$ .

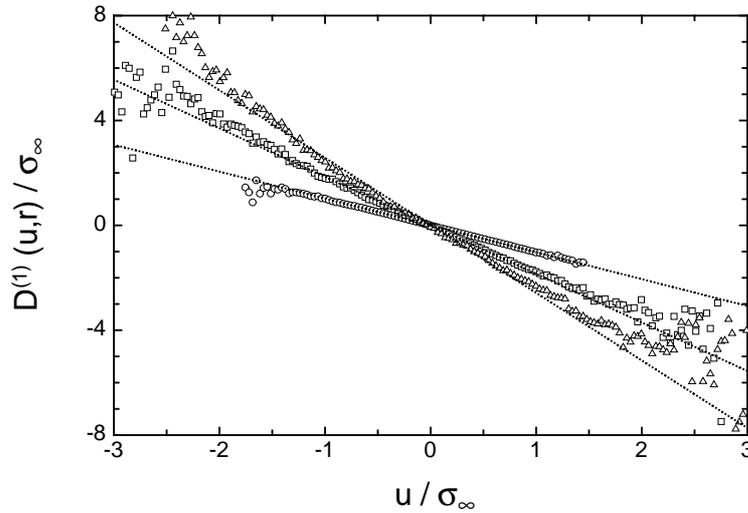


Abbildung 7.7: Der Driftkoeffizient  $D^{(1)}(u, r)$  als Funktion des Geschwindigkeitsinkrements  $u$  auf den Skalen  $r = 3l_{mar}$  (Kreise),  $r = L/2$  (Quadrate) und  $r = L$  (Dreiecke) für den Datensatz bei  $R_\lambda = 1180$ . Die experimentellen Daten lassen sich durch Ursprungsgeraden in  $u$  mit skalenabhängiger Steigung  $\gamma(r)$  beschreiben (gepunktete Linien). Deutliche Abweichungen von diesem linearen Verhalten finden sich nur auf der grössten Skala  $r = L$  für  $|u| > \sigma_\infty$ . Allerdings sind in diesem Bereich die Fehler der extrapolierten Daten bereits sehr viel grösser als die Abweichungen zwischen dem linearen Fit und den Daten (die Fehlerbalken sind hier der Übersichtlichkeit halber nicht gezeigt).

Stellt man die Ergebnisse für den linearen Koeffizienten  $\gamma$  für verschieden Reynoldszahlen als Funktion der Skala  $r$  in Einheiten der Markowlänge  $l_{mar}$  dar, findet man eine universelle Abhängigkeit des Koeffizienten  $\gamma$  von  $\rho = r/l_{mar}$ , siehe Abbildung 7.8. Es zeigt sich ausserdem, dass diese Abhängigkeit nicht, wie noch in Kapitel 6.3 angenommen, linear ist, sondern sehr viel besser durch ein Potenzgesetz mit einer additiven Konstanten beschrieben wird. Dieser Zusammenhang konnte bei dem in Kapitel 6.3 untersuchten Datensatz so noch nicht festgestellt werden, da sich in diesem Fall der Inertialbereich nur bis zu  $L/l_{mar} = 11$  erstreckte; über diesen Bereich von Skalen ist die lineare Näherung ausreichend (vergleiche Abb. 6.9).

Fittet man ein Potenzgesetz mit einer additiven Konstanten an die in Abbildung 7.8 dargestellten Daten, so erhält man für den Exponenten einen Wert, der innerhalb seines Fehlers gleich  $1/2$  ist und eine additive Konstante, die innerhalb ihres Fehlers gleich  $2/3$  ist. An die Daten wurde daher eine Kurve der Form:

$$\gamma(\rho) = \frac{2}{3} + c_0\sqrt{\rho} \quad (7.4)$$

angepasst. Für den Vorfaktor  $c_0$  liefert der Fit einen Wert von  $c_0 = 0,17 \pm 0,01$ . Alternativ kann man die Skala  $r$  natürlich auch in Einheiten der Taylurlänge  $\lambda$  darstellen (Abbildung 6.9(b)). In diesem Fall weisen die Daten, insbesondere bei kleinen Skalen, eine im Vergleich zu Abb. 6.9(a) etwas grössere Streuung auf, aber

auch hier können die Daten durch einen Fit der Form (7.4) beschrieben werden. Die Konstante in Gleichung (7.4) nimmt in diesem Fall einen Wert von  $c_{0,\lambda} \approx 0,2$  an.

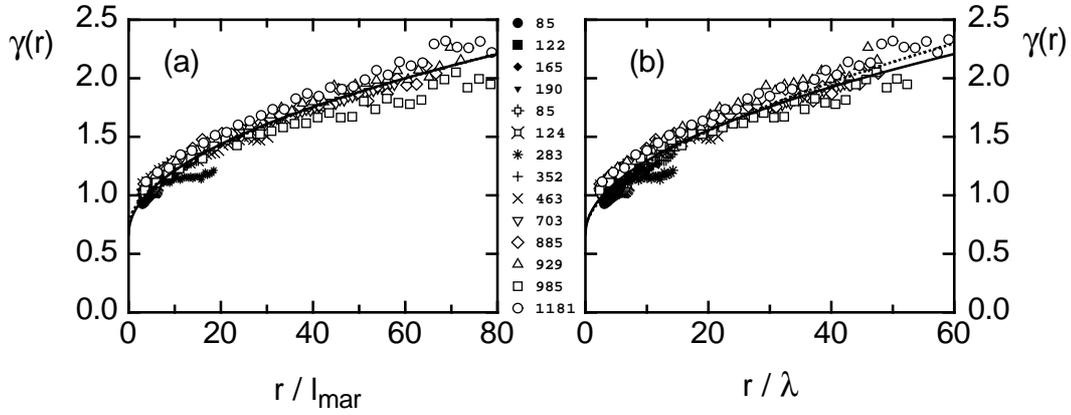


Abbildung 7.8: Die Steigung  $\gamma(r)$  als Funktion der Längenskala  $r$  in Einheiten der Markowlänge  $l_{mar}$  (a) bzw. der Taylorlänge  $\lambda$  (b). Die im Oldenburger Freistrahlgemessenen Daten sind durch volle Symbole gekennzeichnet, offene stellen Ergebnisse des Grenobler Experiments dar. Die Taylor-Reynoldszahlen der jeweiligen Messung sind der Legende zu entnehmen. An die Daten wurde ein Fit der Form (7.4) angepasst (volle Linien). Die quadratischen Abweichungen solcher Fits sind mit  $\chi^2 = 2,08$  (a) bzw.  $\chi^2 = 3,0$  (b) nur wenig grösser als die eines allgemeinen Potenzfits (durchbrochene Linien) mit  $\chi^2 = 2,05$  (a) bzw.  $\chi^2 = 2,6$  (b).

Auch der Diffusionskoeffizient  $D^{(2)}(u, r)$  zeigt für alle untersuchten Reynoldszahlen die bereits aus Kapitel 6 bekannte funktionale Abhängigkeit vom Geschwindigkeitsinkrement  $u$ , wie in Abbildung 7.9 exemplarisch für den Datensatz bei  $R_\lambda = 1180$  gezeigt wird:

$$D^{(2)}(u, r) = \alpha(r) - \delta(r)u + \beta(r)u^2. \quad (7.5)$$

Ebenfalls deutlich zu erkennen ist, dass sowohl der konstante Term  $\alpha(r)$  als auch der lineare Term  $\delta(r)$  nach wie vor nicht zu vernachlässigen sind.

Die durch Polynomfits an die Daten erhaltenen Koeffizienten  $\alpha$  und  $\delta$  weisen für alle Reynoldszahlen lineare Abhängigkeiten von der Skala  $\rho = r/l_{mar}$  auf, siehe Abbildung 7.10:

$$\begin{aligned} \alpha(r) &= \alpha_0 (\rho - \rho_0) , \\ \delta(r) &= \delta_0 \rho . \end{aligned} \quad (7.6)$$

Im Gegensatz zu  $\gamma$  jedoch hängen  $\alpha(r)$  und  $\delta(r)$  von der Reynoldszahl ab. Insbesondere die Steigungen  $\alpha_0$  und  $\delta_0$  in (7.6) variieren stark mit  $Re$  und lassen sich in guter Näherung durch Potenzgesetze in  $Re$  mit einem Exponenten von  $-3/8$  beschreiben (Abbildung 7.11 (a)):  $\alpha_0, \delta_0 \propto Re^{-3/8}$  (bzw.  $\alpha_0, \delta_0 \propto R_\lambda^{-3/4}$ ). Der Nulldurchgang  $\rho_0$  des Koeffizienten  $\alpha(r)$  variiert dagegen nur schwach: man beobachtet einen leichten

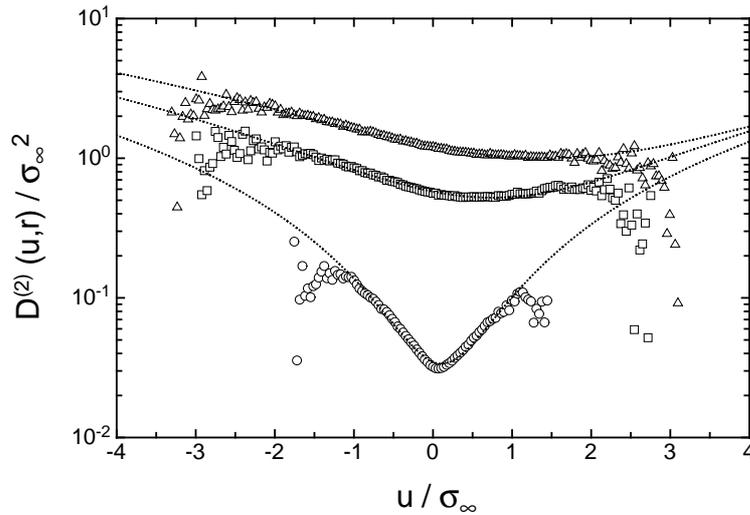


Abbildung 7.9: Der Diffusionskoeffizient  $D^{(2)}(u, r)$  als Funktion des Geschwindigkeitsinkrements  $u$  auf den Skalen  $r = 3l_{\text{mar}}$  (Kreise),  $r = L/2$  (Quadrate) und  $r = L$  (Dreiecke) für den Datensatz bei  $R_\lambda = 1180$ . Die experimentellen Daten lassen sich durch Polynome zweiten Grades in  $u$  beschreiben (gepunktete Linien).

Anstieg von Werten um 0,5 bei kleinen Reynoldszahlen auf den Maximalwert  $\rho_0 = 1$  bei Taylor-Reynoldszahlen von 500 und grösser (ohne Abbildung).

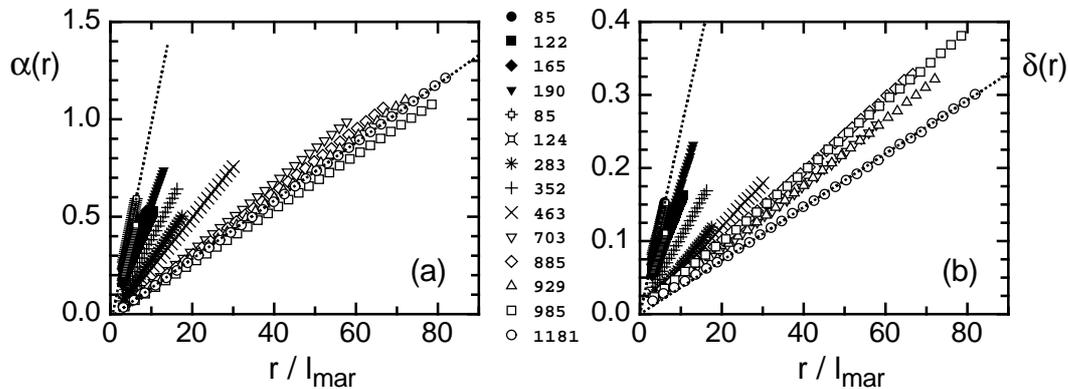


Abbildung 7.10: (a): Der konstante Term  $\alpha(r)$  von  $D^{(2)}$  als Funktion der Längenskala  $r$  für verschiedene Reynoldszahlen.  $\alpha$  zeigt bei allen Reynoldszahlen eine lineare Abhängigkeit von  $r$ . Die im Oldenburger Freistrahls gemessenen Daten sind durch volle Symbole gekennzeichnet, offene stellen Ergebnisse des Grenobler Experiments dar. Die Taylor-Reynoldszahlen der jeweiligen Messung sind der Legende zu entnehmen.

(b): Der lineare Term  $\delta(r)$  von  $D^{(2)}$  als Funktion der Längenskala  $r$  für verschiedene Reynoldszahlen. Bei allen Reynoldszahlen findet sich eine lineare Abhängigkeit von  $r$ . Bezeichnungen wie in (a).

Wiederum können die Koeffizienten  $\alpha(r)$  und  $\delta(r)$  alternativ in Einheiten der Taylorskala  $\lambda$  dargestellt werden:

$$\begin{aligned}\alpha(r) &= \alpha_{0\lambda} \left( \frac{r}{\lambda} - \rho_{0\lambda} \right), \\ \delta(r) &= \delta_{0\lambda} \frac{r}{\lambda}.\end{aligned}\quad (7.7)$$

Auch in diesem Fall können die Steigungen  $\alpha_{0\lambda}$  und  $\delta_{0\lambda}$  in guter Näherung durch Potenzgesetze in  $Re$  mit einem Exponenten von  $-3/8$  beschrieben werden, siehe Abbildung 7.11 (b).

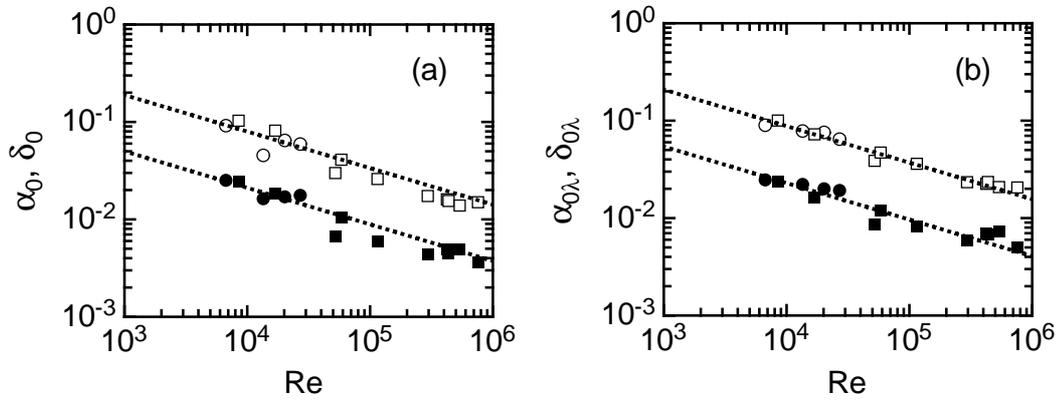


Abbildung 7.11: (a): Die in Gleichung (7.6) definierten Steigungen  $\alpha_0$  und  $\delta_0$  als Funktion der Reynoldszahl. Beide Grössen lassen sich als Potenzfunktionen in  $Re$  beschreiben:  $\alpha_0, \delta_0 = mRe^{-3/8}$  (Linien). Entsprechende Fits an die Daten ergeben für  $m$  die Werte  $m = 2,5 \pm 0,1$  (für  $\alpha_0$ ) bzw.  $m = 0,67 \pm 0,03$  (für  $\delta_0$ ). Ergebnisse des Oldenburger Experiments sind durch Kreise gekennzeichnet, Daten des Grenobler Freistrahls durch Quadrate.

(b): Die in Gleichung (7.7) definierten Steigungen  $\alpha_{0\lambda}$  und  $\delta_{0\lambda}$  als Funktion der Reynoldszahl. Wiederum lassen sich beide Grössen als Potenzfunktionen in  $Re$  beschreiben:  $\alpha_{0\lambda}, \delta_{0\lambda} = mRe^{-3/8}$  (Linien). Man erhält die Werte  $m = 2,8 \pm 0,1$  (für  $\alpha_{0\lambda}$ ) bzw.  $m = 0,72 \pm 0,03$  (für  $\delta_{0\lambda}$ ).

Der quadratische Term  $\beta$  in  $D^{(2)}$  dagegen zeigt, anders als alle anderen bisher besprochenen Grössen, einen leichten Anstieg mit der Reynoldszahl, siehe Abbildung 7.12. Diesen zu quantifizieren erweist sich allerdings als schwierig, da  $\beta$  keine eindeutige Abhängigkeit von der Skala  $r$  aufweist: bei kleinen Reynoldszahlen fällt  $\beta$  mit grösser werdender Skala  $r$ , bei grossen  $Re$  steigt  $\beta$  dagegen mit der Skala leicht an. Darüberhinaus treten bei diesem Koeffizienten erstmals Unterschiede zwischen den im Oldenburger Freistrahls und den im Grenobler Experiment gemessenen Daten auf. Die Oldenburger Daten weisen bei vergleichbaren Taylor-Reynoldszahlen durchgehend höhere Werte für  $\beta$  auf und auch der oben angesprochene Übergang von einer in  $r$  fallenden zu einer in  $r$  steigenden Funktion findet bei den Oldenburger Daten bereits bei einer sehr viel kleineren Reynoldszahl statt als dies bei den

Grenobler Daten beobachtet wird (siehe Abbildung 7.12) <sup>1</sup>.

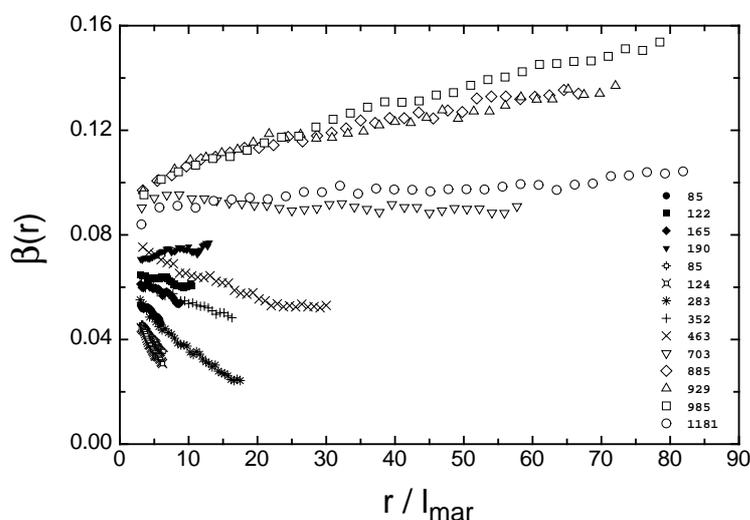


Abbildung 7.12: Der quadratische Koeffizient  $\beta(r)$  von  $D^{(2)}$  als Funktion der Skala  $r$  bei verschiedenen Reynoldszahlen. Die im Oldenburger Freistrahls gemessenen Daten sind durch volle Symbole gekennzeichnet, offene stellen Ergebnisse des Grenobler Experiments dar. Die Taylor-Reynoldszahlen der jeweiligen Messung sind der Legende zu entnehmen.

Eine Interpretation dieser Ergebnisse wird zusätzlich durch die sehr grossen Fehler des Koeffizienten  $\beta$  erschwert. Den in Kapitel 6.5 vorgestellten Ergebnissen zufolge liegt dieser Fehler bei der verwendeten Extrapolationsmethode in der Grössenordnung von 20 Prozent. Für die vier im Oldenburger Freistrahls gemessenen Datensätze etwa führt ein so grosser Fehler dazu, dass die Ergebnisse für  $\beta$  innerhalb ihrer Fehler übereinstimmen.

Die Daten des Grenobler Experiments, die einen wesentlich weiteren Bereich von Reynoldszahlen abdecken, lassen aber dennoch ein eindeutiges Anwachsen des Koeffizienten  $\beta$  mit der Reynoldszahl erkennen. Um dieses Verhalten näher zu untersuchen und quantifizieren zu können, müssten allerdings zunächst analog zu dem in Kapitel 6.5 beschriebenen Vorgehen aus den numerischen Lösungen der Fokker-Planck-Gleichungen für  $p(u, r)$  und  $p(u, r|u_0, r_0)$  jeweils die tatsächlichen Werte der Koeffizienten  $\beta$  bestimmt werden. Da dieses Verfahren jedoch sehr zeitaufwändig ist, konnte es im Rahmen der vorliegenden Arbeit nicht mehr für alle Datensätze durchgeführt werden.

Eine Klärung der exakten Reynoldszahlabhängigkeit des Koeffizienten  $\beta$  und der damit verbundenen offenen Fragen (insbesondere die nach der Ursache der Unter-

<sup>1</sup>Im Sinne einer Spekulation sei auf mögliche Ursachen für diese Diskrepanz hingewiesen: Zum einen könnten sie in den unterschiedlichen Innenprofilen der jeweils verwendeten Düsen begründet sein, denkbar ist aber auch, dass die unterschiedlichen Entfernungen des Sensors von der Düse (120D im Oldenburger bzw. 40D im Grenobler Versuchsaufbau) zu unterschiedlichen Ergebnissen führen. Die wahrscheinlichste Ursache dürfte aber die unterschiedliche Messtechnik sein, insbesondere die verwendeten Sensoren.

schiede zwischen den Oldenburger bzw. Grenobler Daten) bleibt daher zukünftigen Untersuchungen vorbehalten. Mit den hier vorliegenden Ergebnissen lässt sich allerdings bereits eine interessante Überlegung für den Grenzübergang  $Re \rightarrow \infty$  anstellen. Dann nämlich gehen die Koeffizienten  $\alpha$  und  $\delta$  gegen Null und die Gleichung (4.9) für die Strukturfunktion dritten Grades lautet <sup>2</sup>:

$$\frac{r \frac{\partial}{\partial r} S_u^3(r)}{3 S_u^3(r)} = \gamma(r) - 2\beta_\infty(r). \quad (7.8)$$

Im Limes grosser Reynoldszahlen sollte das Kolmogorovsche 4/5-Gesetz auch für Turbulenzexperimente mit ausgezeichneter Hauptströmungsrichtung erfüllt sein [62, 73]. Die Strukturfunktion dritten Grades ist dann eine lineare Funktion der Skala  $r$  und die linke Seite der Gleichung (7.8) ergibt exakt  $1/3$ . Für den Zusammenhang zwischen  $\gamma(r)$  und  $\beta_\infty(r)$  folgt damit:

$$\begin{aligned} \beta_\infty(r) &= \frac{\gamma(r)}{2} - \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{6} + \frac{c_0}{2} \sqrt{\rho}. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Abbildung 7.13 zeigt die bei verschiedenen Reynoldszahlen gemessenen Koeffizienten  $\beta(r)$  im Vergleich zu ihrem nach Gleichung (7.9) berechneten Grenzwert  $\beta_\infty$ . Zwar lassen die Messdaten eine eindeutig steigende Tendenz erkennen, dennoch liegen selbst die Daten der Messungen bei  $R_\lambda \approx 1000$  noch um bis zu einer Größenordnung unter dem Grenzwert  $\beta_\infty$ .

Für die in Abbildung 7.13 dargestellten Fits an die gemessenen Koeffizienten  $\beta(r)$  wurden, in Anlehnung an Gleichung (7.9), Funktionen der Form:

$$\beta(r) = \beta_0 + m\sqrt{\rho} \quad (7.10)$$

verwendet. Abbildung 7.13 belegt, dass diese Funktion die  $r$ -Abhängigkeit der gemessenen Daten für alle hier untersuchten Datensätze korrekt wiedergibt. Aus dem Vergleich mit Gleichung (7.9) erwartet man daher im Grenzübergang  $Re \rightarrow \infty$  für  $\beta_0$  den Wert  $1/6$ , während  $m$  gegen  $c_0/2 \approx 0.086$  konvergieren sollte.

Wie bereits erwähnt, sind die direkt bestimmten Koeffizienten  $\beta(r)$  mit einem sehr grossen Fehler (in der Grössenordnung von etwa 20 Prozent) behaftet. Nimmt

---

<sup>2</sup>Streng genommen gehen nur die Koeffizienten  $\alpha_0$  und  $\delta_0$  gegen Null. Für  $\alpha(r)$  (und analog auch für  $\delta$ ) auf der Skala  $r = L$  dagegen gilt:

$$\alpha(L) = \alpha_{0\lambda} \frac{L}{\lambda} \propto Re^{-3/8} Re^{1/2} \propto Re^{1/8}.$$

Die analoge Abschätzung für  $\gamma(L)$  liefert:

$$\gamma(L) \propto \sqrt{\frac{L}{\lambda}} \propto Re^{1/4}.$$

Zwar wachsen auf der Skala  $r = L$  sowohl  $\alpha$  und  $\delta$  als auch  $\gamma$  mit  $Re$ , der Anstieg von  $\gamma$  ist aber stärker und führt dazu, dass  $\alpha$  und  $\delta$  bei hohen Reynoldszahlen gegenüber  $\gamma$  vernachlässigt werden können.

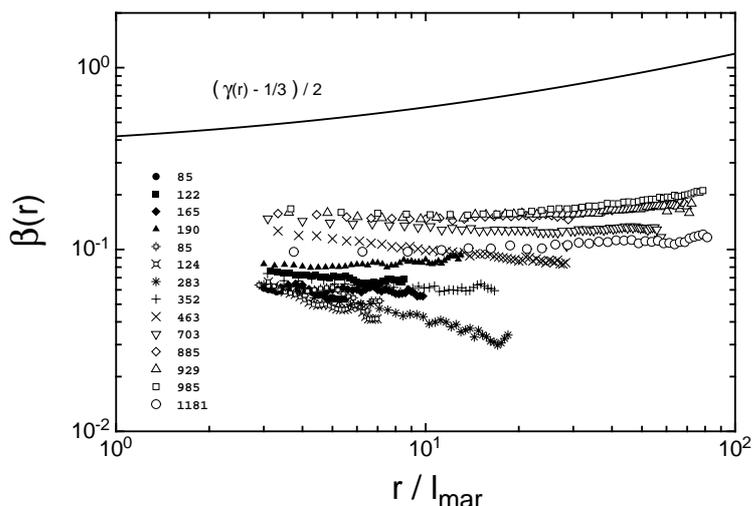


Abbildung 7.13: Die Koeffizienten  $\beta(r)$  als Funktion von  $r$  bei verschiedenen Reynoldszahlen im Vergleich zu ihrem durch Gleichung (7.9) definierten Grenzwert  $\beta_\infty$  (durchgezogene Linie). Die im Oldenburger Freistrahel gemessenen Daten sind durch volle Symbole gekennzeichnet, offene stellen Ergebnisse des Grenobler Experiments dar. Die Taylor-Reynoldszahlen der jeweiligen Messung sind der Legende zu entnehmen.

man jedoch an, dass dieser Fehler systematisch ist, so können aus der Reynoldszahl-abhängigkeit der beiden Grössen  $\beta_0$  und  $m$  dennoch zumindest qualitative Aussagen über den Grenzübergang  $Re \rightarrow \infty$  des quadratischen Koeffizienten  $\beta$  gemacht werden. Abbildung 7.14 zeigt  $\beta_0$  und  $m$  als Funktion der Taylor-Reynoldszahl  $R_\lambda$ . Beide Grössen liegen deutlich unterhalb ihrer jeweiligen Grenzwerte und steigen im Intervall  $85 \leq R_\lambda \leq 1180$  nur leicht an. Verwendet man die Konvergenz von  $\beta_0$  und  $m$  gegen ihre Grenzwerte als Kriterium dafür, wie nahe eine Reynoldszahl dem Grenzfall unendlicher Reynoldszahl kommt, so stellt man fest, dass selbst die grössten derzeit erreichbaren Werte von  $R_\lambda \approx 10^4$  (gemessen in atmosphärischer Turbulenz [56]) diesem Grenzfall nicht wesentlich näher kommen als die hier betrachteten Datensätze.

## 7.5 Zusammenfassung und Diskussion

Auch über den Grenzübergang hin zu grossen Reynoldszahlen liefert die Markowanalyse interessante neue Einsichten. In einem ersten Schritt wurde die Reynoldszahl-abhängigkeit der Markowlänge und ihre Beziehung zur Taylorschen bzw. Kolmogorovschen Skala bestimmt. Trotz der relativ grossen experimentellen Fehler belegt der Vergleich zwischen der Kolmogorovschen Dissipationslänge  $\eta$  und der Markowlänge eindeutig, dass diese beiden Skalen nicht in einem konstanten Verhältnis zueinander stehen. Dagegen sind die experimentellen Ergebnisse durchaus mit der Hypothese vereinbar, dass die Markowlänge im Grenzfall sehr hoher Reynoldszahlen bis auf einen konstanten Faktor mit der Taylorschen Längenskala identisch ist.

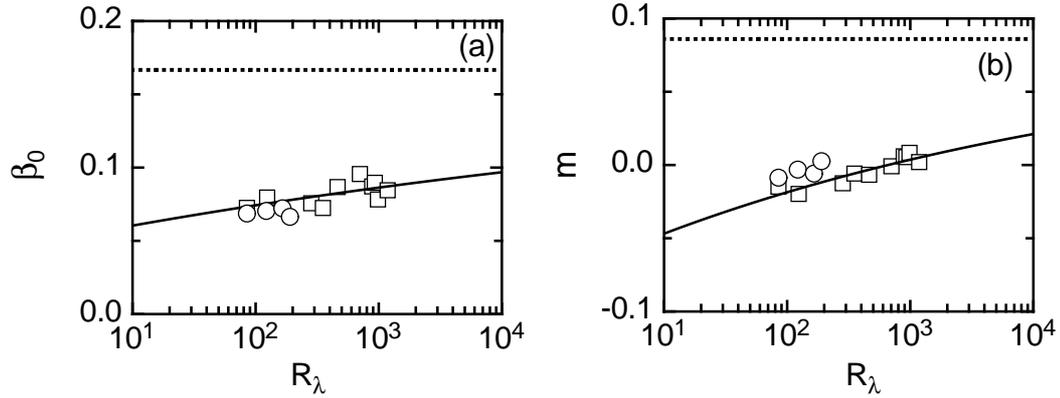


Abbildung 7.14: Die in Gleichung (7.10) definierten Grössen  $\beta_0$  (a) und  $m$  (b) als Funktion der Taylor-Reynoldszahl im Vergleich zu ihren Grenzwerten für  $Re \rightarrow \infty$  (gepunktete Linien). Die im Oldenburger Freistrahlmessungen gemessenen Daten sind durch volle Symbole gekennzeichnet, offene stellen Ergebnisse des Grenobler Experiments dar. Angefittete Potenzfunktionen mit additivem Term (durchgezogene Linien) zeigen eine langsame Konvergenz gegen die jeweiligen Grenzwerte (für diese Fits wurden nur die Grenobler Daten verwendet).

Der Driftkoeffizient  $D^{(1)}$  weist bei allen hier untersuchten Datensätzen eine lineare Abhängigkeit vom Geschwindigkeitsinkrement  $u$  auf, wobei sich die Steigung  $\gamma(r)$  des Driftkoeffizienten, trägt man sie als Funktion der auf  $l_{mar}$  normierten Skala  $r$  auf, als universell erweist ( $\rho = r/l_{mar}$ ):

$$\begin{aligned} D^{(1)}(u, r) &= \gamma(r)u, \\ \gamma(r) &= \frac{2}{3} + c\sqrt{\rho}, \\ c &= 0,17 \pm 0,01. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Auch der Diffusionskoeffizient  $D^{(2)}$  zeigt bei allen Reynoldszahlen das bereits aus Kapitel 6 bekannte Verhalten. Seine Abhängigkeit vom Geschwindigkeitsinkrement kann durch ein Polynom zweiten Grades beschrieben werden, und sowohl der konstante als auch der lineare Term,  $\alpha(r)$  bzw.  $\delta(r)$  steigen linear mit der Skala  $r$  an:

$$\begin{aligned} D^{(2)}(u, r) &= \alpha(r) - \delta(r)u + \beta(r)u^2, \\ \alpha(r) &= \alpha_0(Re) (\rho - 1), \\ \delta(r) &= \delta_0(Re) \rho. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Der quadratische Koeffizient  $\beta(r)$  weist keine eindeutige Abhängigkeit von der Skala  $r$  auf, kann aber in guter Näherung durch Fits der Form

$$\beta(r) = \beta_0(Re) + m\sqrt{\rho} \quad (7.13)$$

parametrisiert werden. Anders als die Steigung  $\gamma$  von  $D^{(1)}$  sind die Koeffizienten  $\alpha_0$ ,  $\delta_0$ ,  $\beta_0$  und  $m$  stark von der Reynoldszahl abhängig:  $\alpha_0$  und  $\delta_0$  fallen mit steigender

Reynoldszahl mit  $Re^{-3/8}$  bzw.  $R_\lambda^{-3/4}$ , die Koeffizienten  $\beta_0$  und  $m$  des für die Intermittenz verantwortlichen quadratischen Terms in  $D^{(2)}$  steigen langsam gegen ihre durch das Kolmogorovsche 4/5-Gesetz gegebenen Grenzwerte von  $1/6$  bzw.  $c/2$ .

Die beobachtete Abhängigkeit des Diffusionskoeffizienten von der Reynoldszahl belegt, dass sich der stochastische Prozess für  $u(r)$  im Grenzübergang zu hohen Reynoldszahlen grundlegend ändert. Dieses Ergebnis steht in eklatantem Widerspruch zur Annahme einer universellen turbulenten Kaskade, deren Mechanismen im Inertialbereich von der Reynoldszahl unabhängig sein sollten. Die Ergebnisse der Markowanalyse finden sich in dieser Hinsicht in Übereinstimmung mit den in [54] und [68] diskutierten Ergebnissen. In den genannten Arbeiten wurde der Übergang zu hohen Reynoldszahlen im Rahmen des Castaing'schen Kaskadenmodells analysiert, wobei sich auch hier deutliche Anzeichen einer Reynoldszahlabhängigkeit der relevanten Parameter ergab.

Eine vollständige Übereinstimmung des multiplikativen Kaskadenmodells nach Castaing mit den hier vorgestellten Ergebnissen ergibt sich allerdings nur im Grenzfall  $Re = \infty$ , in dem Drift- und Diffusionskoeffizient rein lineare bzw. quadratische Funktionen des Geschwindigkeitsinkrements  $u$  werden. Die langsame Konvergenz des quadratischen Koeffizienten  $\beta(r)$  gegen seinen Grenzwert  $\beta_\infty$  zeigt allerdings, dass selbst die höchsten derzeit erreichbaren Reynoldszahlen von diesem Grenzfall noch sehr weit entfernt sind. Bemerkenswert ist ausserdem, dass, obwohl Drift- und Diffusionskoeffizient gegen rein lineare bzw. quadratische Funktionen in  $u$  streben, die Koeffizienten  $\gamma$  und  $\beta$  auch für den Grenzfall unendlicher hoher Reynoldszahlen nicht gegen die durch die Kolmogorovschen Modelle gegebenen Werte (6.27) streben. Die im Experiment beobachteten Abweichungen vom K62-Modell sind also keine Effekte der endlichen Reynoldszahl, sondern weisen auf einen grundlegenden Widerspruch zwischen Modell und Experiment hin. Ob dieser Widerspruch grundsätzlicher Natur ist oder sich durch den in Kapitel 6.6.2 diskutierten Effekt der Nichtstationarität der Freistrahlsströmung erklären lässt, werden Untersuchungen in turbulenten Strömungen mit verschwindender mittlerer Geschwindigkeit (wie etwa der in [75] untersuchten Strömung zwischen zwei gegensinnig rotierenden Scheiben) zeigen müssen.

Weitergehende quantitative Aussagen über den Grenzübergang  $Re \rightarrow \infty$  setzen eine exaktere Bestimmung der Koeffizienten  $\delta$  und  $\beta$  voraus, die derzeit noch mit einem experimentellen Fehler von bis zu 20 Prozent behaftet sind. Diese Parameter können, wie in Kapitel 6.5 beschrieben, durch einen Vergleich der Lösungen der Fokker-Planck-Gleichung mit den gemessenen Dichten  $p(u, r)$  bestimmt werden, oder, wie in Kapitel 11.5, aus der Gleichung (4.9) der Strukturfunktionen. Diese Methode sei hier exemplarische für den Datensatz bei  $R_\lambda = 703$  etwas ausführlicher erläutert.

Die Gleichung (4.9) für die Strukturfunktion  $n$ -ten Grades lautet mit linearem Drift- und quadratischem Diffusionskoeffizienten (wie sie durch die Gleichungen (7.11) und (7.11) gegeben sind)

$$f_n(r) = \frac{r \frac{\partial}{\partial r} S_u^n(r)}{S_u^n(r)} = n\gamma(r) - n(n-1)\beta(r) + n(n-1)\delta(r) \frac{S_u^{n-1}(r)}{S_u^n(r)} - n(n-1)\alpha(r) \frac{S_u^{n-2}(r)}{S_u^n(r)}. \quad (7.14)$$

Erwähnenswert ist an dieser Stelle, dass sich der Ausdruck auf der linken Seite von Gleichung (7.14) unter der Voraussetzung, dass die Strukturfunktionen Skalenverhalten zeigen, auf den Skalenexponenten  $n$ -ter Ordnung reduziert:

$$S_u^n(r) \propto r^{\zeta_n} \quad \rightarrow \quad \frac{r \frac{\partial}{\partial r} S_u^n(r)}{S_u^n(r)} = \zeta_n. \quad (7.15)$$

Die aus den Messdaten bestimmten Funktionen  $f_n(r)$  zeigen allerdings starke Abweichungen von diesem Verhalten, siehe Abbildung 7.15(a). Die Funktion zweiter Ordnung  $f_2(r)$  fällt über den gesamten Inertialbereich, der sich für diese Messung über das Intervall  $l_{mar} \leq r \leq 60l_{mar} = L$  erstreckt, streng monoton ab. Auch  $f_3(r)$ , das dem Kolmogorovschen Vier-Fünftel-Gesetz zufolge exakt gleich eins sein sollte, folgt diesem idealen Verhalten nur über einen eingeschränkten Bereich von Skalen (vergleiche auch Kapitel 6.6.2).

Um nun aus den Gleichungen (7.14) die beiden Unbekannten  $\delta(r)$  und  $\beta(r)$  zu bestimmen soll angenommen werden, dass die beiden Koeffizienten  $\gamma(r)$  und  $\alpha(r)$  aus der direkten Analyse der bedingten Momente  $M^{(k)}$  korrekt bestimmt werden können. In diesem Fall genügen zwei der Gleichungen (7.14), um  $\delta(r)$  und  $\beta(r)$  aus den gemessenen Strukturfunktionen und deren Ableitungen zu bestimmen. In besonders einfacher Weise ist dies aus den Gleichungen für die Ordnungen zwei und drei möglich:

$$\begin{aligned} f_2(r) &= 2\gamma(r) - 2\beta(r) - 2\alpha(r) \frac{1}{S_u^2(r)} \\ f_3(r) &= 3\gamma(r) - 6\beta(r) + 6\delta(r) \frac{S_u^1(r)}{S_u^3(r)}. \end{aligned} \quad (7.16)$$

Die erste dieser Gleichungen kann sehr einfach nach  $\beta(r)$  aufgelöst werden,  $\delta(r)$  ergibt sich dann in ebenfalls sehr einfacher Weise aus der zweiten der beiden Gleichungen.

Abbildung 7.15(b) zeigt einen Vergleich des so bestimmten Diffusionskoeffizienten mit den direkt durch Extrapolation der bedingten Momente  $M^{(k)}$  bestimmten Werten auf der Skala  $r = L/2$ . Der aus den Strukturfunktionen bestimmte Diffusionskoeffizient zeigt zwar deutliche Abweichungen von den direkt bestimmten Werten, die Abweichungen zwischen beiden liegen aber in der Größenordnung der durch die endliche Anzahl von Messwerten bedingten Fehler. Es kommt hier also nicht zu Inkonsistenzen zwischen den Ergebnissen der Markowanalyse und dem Verhalten der Strukturfunktionen, insbesondere zu dem der Strukturfunktion dritten Grades.

Um zu einer gesicherten Aussage über die so bestimmten Koeffizienten  $\delta$  und  $\beta$  zu gelangen, ist es jedoch unabdingbar, die gefundenen Koeffizienten durch einen Vergleich der Lösung der Fokker-Planck-Gleichung für die bedingte Dichte  $p(u, r|u_0, r_0)$  mit den experimentell bestimmten Verteilungen zu verifizieren. Dies konnte, wie bereits erwähnt, im Rahmen dieser Arbeit nicht für alle Datensätze durchgeführt werden. Die Aussage, dass die hier untersuchten Messungen vom Grenzfall unendlich hoher Reynoldszahlen noch sehr weit entfernt sind, bleibt von den recht hohen experimentellen Unsicherheiten bei der Bestimmung von  $\beta$  aber unberührt: Selbst

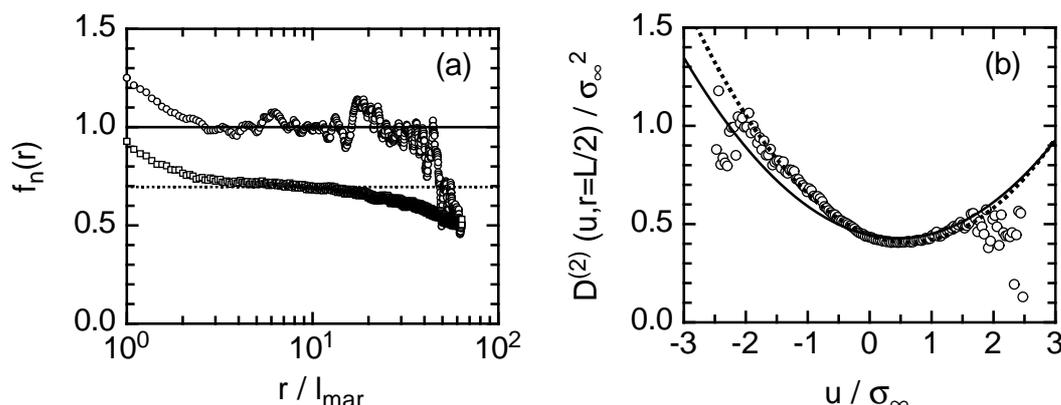


Abbildung 7.15: (a): Die in Gleichung (7.14) definierten Funktionen  $f_n(r)$  als Funktion der Skala  $r$  für die Ordnungen  $n = 2$  (Quadrate) und  $n = 3$  (Kreise). Die Linien geben die Vorhersage des Kolmogorowschen Lognormalmodells wieder ( $f_3(r) = \zeta_3 = 1$  bzw.  $f_2(r) = \zeta_2 \approx 0,696$ ).

(b): Der direkt aus den Daten bestimmte Diffusionskoeffizient  $D^{(2)}(u, r)$  auf der Skala  $r = L/2$  (Kreise) im Vergleich zu dem aus den Gleichungen der Strukturfunktionen bestimmten Werten (volle Linie). Die durchbrochene Linie gibt eine an die Daten angepasste Polynomfunktion zweiten Grades wieder.

die grössten gemessenen Werte für  $\beta$  liegen um etwa einen Faktor fünf unterhalb des Grenzwerts  $\beta_\infty$ , zudem zeigen die bisherigen Erfahrungen (siehe Kapitel 6), dass sowohl  $\beta$  als auch  $\delta$  eher über- als unterschätzt werden. Auch innerhalb ihres Fehlers von typischerweise 20 Prozent sind die gemessenen Werte von  $\beta$  also signifikant kleiner als ihr Grenzwert  $\beta_\infty$ .

Einen weiteren interessanten Einblick in die Physik der kleinskaligen Turbulenz und ihrer vermuteten Universalität verspricht der Vergleich der hier vorgestellten Ergebnisse mit denen einer entsprechenden Markowanalyse von Daten aus anderen experimentellen Systemen wie etwa den Nachlaufströmungen von Gittern und Zylindern oder der oben angesprochenen Strömung zwischen zwei gegensinnig rotierenden Scheiben. Da die Markowanalyse eine vollständige Beschreibung der Statistik des Geschwindigkeitsinkrements liefert, sollten sich aus einem solchen Vergleich neue Aussagen über die allgemein vermuteten universellen Eigenschaften der kleinskaligen Turbulenz gewinnen lassen.

# Kapitel 8

## Zweidimensionale Analyse der turbulenten Kaskade

### 8.1 Motivation

Die Markowanalyse des Geschwindigkeitsinkrements liefert zwar eine korrekte und auch vollständige Beschreibung des stochastischen Prozesses für  $u(r)$ , einige weitere Fragen bleiben aber dennoch offen: Zum einen bleibt die Ursache für das Auftreten eines multiplikativen Rauschterms (also der quadratischen Abhängigkeit des Diffusionskoeffizienten vom Inkrement  $u$ ) ungeklärt, und zum anderen entzieht sich ein weiter Bereich von Skalen, der gesamte Dissipationsbereich  $\eta \leq r \leq l_{mar} \approx \lambda$ , der Beschreibung.

Einem Theorem der Wahrscheinlichkeitsrechnung zufolge kann jeder stochastische Prozesse als Markowprozess beschrieben werden, vorausgesetzt die Dimension der zur Beschreibung des Prozesses verwendeten Zustandsvariablen  $\vec{\xi}(r)$  ist gross genug [95]. Diese Aussage eröffnet im Prinzip die Möglichkeit, durch eine geeignete Erweiterung der eindimensionalen Variablen  $u(r)$  zu einer mehrdimensionalen Variablen auch den Dissipationsbereich durch einen Markowprozess beschreiben zu können. Offen bleibt zunächst aber die Frage, auf welche Dimension die Zustandsvariable erweitert werden muss und mit welchen zusätzlichen Grössen diese Erweiterung vorzunehmen ist. Diese Fragen müssen aus physikalischen Überlegungen heraus bzw. im Nachhinein anhand der Ergebnisse der Markowanalyse beantwortet werden.

Für die Wahl einer solchen zusätzlichen Variablen legt das Kaskadenmodell allerdings die Wahl der gemittelten Energiedissipationsrate  $\epsilon_r$  nahe. Sowohl Landaus berühmter Einwand gegen das K41-Modell und Kolmogorovs daraufhin erstelltes Modell der Intermittenz (K62) als auch das Kaskadenmodell von B. Castaing weisen  $\epsilon_r$  einen entscheidenden Einfluss auf die Statistik des Geschwindigkeitsinkrements zu. Darüberhinaus haben experimentelle Untersuchungen gezeigt, dass sich die Statistik des Geschwindigkeitsinkrements bei Bedingung auf die Energiedissipationsrate auf einen normalverteilten Prozess reduziert: die bedingte Dichte  $p(u(r)|\epsilon_r)$  ist Gaußverteilt [78]. Dieses Ergebnis lässt erwarten, dass sich in einer um die Energiedissipation erweiterten Beschreibung ein wesentlich einfacherer Prozess für die Statistik von  $u(r)$  ergibt.

Im folgenden werden daher die Markoweigenschaften der zweidimensionalen Zufallsvariablen  $\vec{\xi}(r)$  untersucht, die wie folgt definiert ist:

$$\vec{\xi}(r) = \begin{pmatrix} u(r) \\ x(r) \end{pmatrix}. \quad (8.1)$$

Mit  $x(r)$  wird hierbei der Logarithmus der auf ihren Erwartungswert  $\bar{\epsilon}$  normierten gemittelten Energiedissipationsrate  $\epsilon_r$  bezeichnet:

$$x(r) = \ln \left( \frac{\epsilon_r}{\bar{\epsilon}} \right). \quad (8.2)$$

Diese Wahl ist im Rahmen des Kolmogorovschen Lognormalmodells naheliegend ( $x(r)$  sollte demnach einfach Gaußverteilt sein) und hat sich auch in der experimentellen Analyse der Energiedissipationsrate weitgehend durchgesetzt [77, 71, 111].

Der Driftkoeffizient wird damit zu einem zweidimensionalen Vektor, dessen Komponenten mit  $D_u^{(1)}$  bzw.  $D_x^{(1)}$  bezeichnet werden und jeweils Funktionen von  $u$ ,  $x$  und der Skala  $r$  sind:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^{(1)}(u, x, r) &= \begin{pmatrix} D_u^{(1)}(u, x, r) \\ D_x^{(1)}(u, x, r) \end{pmatrix} \\ D_u^{(1)}(u, x, r) &= \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{r}{\Delta r} \langle (u'(r - \Delta r) - u(r)) | u(r), x(r) \rangle, \\ D_x^{(1)}(u, x, r) &= \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{r}{\Delta r} \langle (x'(r - \Delta r) - x(r)) | u(r), x(r) \rangle. \end{aligned} \quad (8.3)$$

Der Diffusionskoeffizient wird dementsprechend zu einer  $2 \times 2$ -Matrix mit den Elementen  $D_{uu}^{(2)}(u, x, r)$ ,  $D_{xx}^{(2)}(u, x, r)$  und  $D_{ux}^{(2)}(u, x, r) = D_{xu}^{(2)}(u, x, r)$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^{(2)}(u, x, r) &= \begin{pmatrix} D_{uu}^{(2)}(u, x, r) & D_{ux}^{(2)}(u, x, r) \\ D_{xu}^{(2)}(u, x, r) & D_{xx}^{(2)}(u, x, r) \end{pmatrix}, \\ D_{uu}^{(2)}(u, x, r) &= \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{r}{2\Delta r} \langle (u'(r - \Delta r) - u(r))^2 | u(r), x(r) \rangle, \\ D_{xx}^{(2)}(u, x, r) &= \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{r}{2\Delta r} \langle (x'(r - \Delta r) - x(r))^2 | u(r), x(r) \rangle, \\ D_{ux}^{(2)}(u, x, r) &= \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{r}{2\Delta r} \langle (u'(r - \Delta r) - u(r)) \\ &\quad \times (x'(r - \Delta r) - x(r)) | u(r), x(r) \rangle. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Für höherdimensionale stochastische Variablen ist sowohl eine Berechnung der Koeffizienten  $\mathbf{D}^{(k)}$  mit  $k > 2$  als auch eine direkte Überprüfung der Markoweigenschaften kaum möglich, siehe Kapitel 4.3. Aus diesem Grund wird hier die auch bereits in Kapitel 4.3 angesprochene Methode verwendet: Aus den experimentell bestimmten Koeffizienten  $\mathbf{D}^{(1)}$  und  $\mathbf{D}^{(2)}$  sowie den ebenfalls experimentell bestimmten Ableitungen des Zustandsvektors  $\vec{\xi}$  nach der Prozessvariablen  $r$  kann nach der Langevin-Gleichung (4.21) das Rauschen  $\mathbf{\Gamma}(r)$  rekonstruiert werden. Ist das rekonstruierte Rauschen  $\delta$ -korreliert, so ist der stochastische Prozess Markowsch, ist es zudem Gaußverteilt, so ist auch die Beschreibung durch die Fokker-Planck-Gleichung zulässig.

## 8.2 Experimentelle Ergebnisse

Für die folgenden Analysen wurde ein im Grenobler Freistrahler bei einer Taylor-Reynoldszahl von  $R_\lambda = 463$  gemessener Datensatz verwendet. Von dieser Messung liegen insgesamt  $10^8$  Messwerte vor, was eine sichere Bestimmung der auf nunmehr zwei Variablen bedingten Erwartungswerte  $\mathbf{M}^{(k)}$  ermöglicht. Bei der Wahl des verwendeten Datensatzes waren auch zwei weitere Kriterien entscheidend: Zum einen sollte die Reynoldszahl natürlich so hoch wie möglich sein, zum anderen muss die räumliche Auflösung des verwendeten Sensors noch unterhalb der Kolmogorovschen Dissipationslänge liegen. Diese Forderung folgt direkt aus der Tatsache, dass sich die Energiedissipationsrate gemäss der Näherungsformel (3.31) aus den räumlichen Gradienten des Geschwindigkeitsfeldes berechnet und diese experimentell über Differenzenquotienten bestimmt werden müssen. Die Ableitung mit dem Differenzenquotienten gleichzusetzen ist aber nur auf Skalen unterhalb der Dissipationslänge zulässig, wo das Geschwindigkeitsfeld als hinreichend glatt angesehen werden kann.

Die Dissipationslänge des hier verwendeten Datensatzes wurde zu  $\eta = 5,9 \mu\text{m}$  abgeschätzt, die räumliche Auflösung des Geschwindigkeitssensors beträgt nur etwa  $3,37 \mu\text{m}$  [27]. Es sollte daher erlaubt sein, den Gradienten des Geschwindigkeitsfeldes durch einen Differenzenquotienten auf einer Skala  $\Delta < \eta$  zu nähern und über Gleichung (3.31) schliesslich die lokale Energiedissipationsrate  $\epsilon(x)$  zu bestimmen.

Bei genauerer Betrachtung stellt sich allerdings noch ein weiteres Problem. Abbildung 8.1 zeigt das Leistungsspektrum der Daten in Einheiten der Messschritte. Man erkennt bei hohen  $k$ -Werten (ab etwa 0,2) einen Bereich, in dem das Spektrum einen näherungsweise konstanten Wert annimmt. In diesem Bereich von Wellenzahlen werden die Daten von weissem Messrauschen dominiert, was eine Bestimmung des Gradienten durch einen einfachen Differenzenquotienten auf der kleinsten zugänglichen Skala ( $\Delta = 1$  in Einheiten der Messschritte) problematisch macht.

Aus diesem Grund wurde zum einen zur Berechnung der Ableitung der Differenzenquotient auf der Skala  $\Delta = 5$  verwendet (dieser Wert entspricht in etwa der Wellenzahl, ab der das Spektrum der Daten konstant wird, siehe Abb. 8.1), und zum anderen wurden die gemessenen (verrauschten) Daten mittels eines spektralen Tiefpassfilters geglättet. Die Daten wurden dazu fouriertransformiert und die mit der Filterfunktion  $\phi(k)$  multiplizierten Fourierkoeffizienten anschliessend wieder rücktransformiert. Als Filter wurde die Funktion

$$\phi(k) = \frac{1}{1 + (k/k_0)^4} \quad (8.5)$$

mit  $k_0 = 0,2$  verwendet (in Einheiten der Messschrittweite). In Abb. 8.1 ist neben dem Spektrum des ursprünglichen Signals auch das des geglätteten Datensatzes dargestellt. Ab Wellenzahlen von 0,2 zeigen das Spektrum der geglätteten Daten aufgrund der Glättung einen deutlich stärkeren Abfall, bei kleineren Wellenzahlen stimmen beide Spektren weitgehend überein.

Eine Glättung des gemessenen Signals ist natürlich eine schwerwiegende Manipulation und es ist nicht von vornherein davon auszugehen, dass die Ableitung der geglätteten Daten den Gradienten der eigentlichen Geschwindigkeitsfluktuationen korrekt wiedergeben. Aus diesem Grund werden sowohl der geglättete als auch der

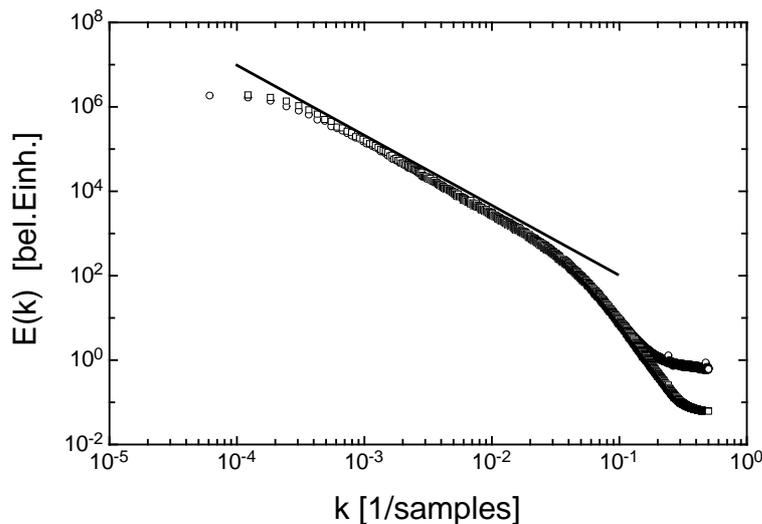


Abbildung 8.1: Das Leistungsspektrum des verwendeten Datensatzes in Einheiten der Messschrittweite. Kreise: Spektrum des ungeglätteten Datensatzes, Quadrate: Spektrum der geglätteten Daten. Der ursprüngliche Datensatz ist bei hohen Wellenzahlen (ab etwa 0,2) von weißem Rauschen dominiert, das Spektrum der geglätteten Daten zeigt dagegen einen weit stärkeren Abfall bei hohen Wellenzahlen. Die durchgezogene Linie entspricht Skalengesetz nach Kolmogorov 1941 ( $E(k) \propto k^{-5/3}$ ).

ursprüngliche Datensatz verwendet und die Ergebnisse beider Datensätze miteinander verglichen werden (auch bei den geglätteten Datensatz wurde zur Bestimmung der Ableitung der Differenzenquotient bei  $\Delta = 5$  verwendet).

Im Folgenden werden die über die Skala  $r$  gemittelten Dissipationsraten  $\epsilon_r$  gemäss (8.2) in Einheiten der mittleren Energiedissipationsrate  $\bar{\epsilon}$  angegeben, die für diesen Datensatz etwa  $0,52 \text{ m}^2/\text{s}^3$  beträgt. Geschwindigkeitsinkremente werden, wie auch in den vorhergehenden Kapiteln, in Einheiten von  $\sigma_\infty$  angegeben, was in diesem Fall  $0,20 \text{ m/s}$  entspricht.

Abbildung 8.2 zeigt den Koeffizienten  $M_u^{(1)}(u, x, r, \Delta r)$  für ausgewählte Werte von  $u$ ,  $x$  und  $r$  als Funktion von  $\Delta r$ <sup>1</sup>.

Im Vergleich zum Verlauf des Koeffizienten  $M^{(1)}(u, r, \Delta r)$  im eindimensionalen Fall (siehe Abbildung 6.6) fällt ein wesentlicher Unterschied auf: Auf kleinen Skalen  $\Delta r$  zeigt der Koeffizient kein Abknicken hin zu kleineren Werten, sondern, (vor allem für die ungeglätteten Daten) einen starken Anstieg. In Kapitel 11, in dem die Ergebnisse einer Markowanalyse hochfrequenter Wechselkursdaten vorgestellt werden, konnte eine solches divergierendes Verhalten im Grenzfall  $\Delta r \rightarrow 0$  auf den Einfluss eines dem eigentlichen Signal additiv überlagerten weissen (Mess-) Rauschens zurückgeführt werden.

<sup>1</sup>Die  $M^{(n)}$  wurden im Fall der zweidimensionalen Analyse nicht, wie noch in den vorhergehenden Kapiteln, über die bedingten Wahrscheinlichkeitsdichten bestimmt, sondern gemäss den Gleichungen (8.3) und (8.4) direkt als bedingte Momente des Inkrements bzw. der Dissipationsrate. Aus diesem Grund konnte die in Kapitel 6 besprochene Fehlerrechnung hier so nicht angewendet werden.

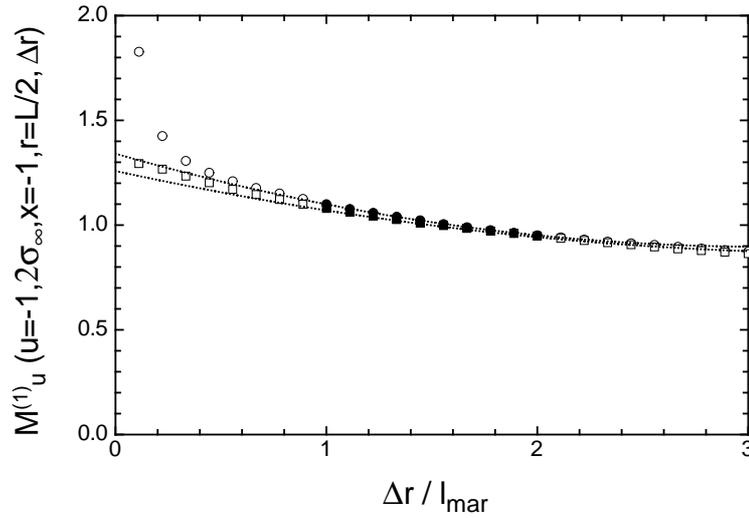


Abbildung 8.2: Der Koeffizient  $M_u^{(1)}(u, x, r, \Delta r)$  auf der Skala  $r = L/2$  bei  $u = -1, 2\sigma_\infty$  und  $x = -1$  als Funktion von  $\Delta r$ . Die Kreise geben die Ergebnisse des unglätteten Rohdatensatzes wieder, Quadrate die der gefilterten Daten. Im Intervall  $l_{mar} \leq \Delta r \leq 2l_{mar}$  (volle Symbole) wurden Polynome zweiten Grades an die Daten gefittet (durchbrochene Linien).

In Übereinstimmung mit dieser Überlegung zeigt der aus den geglätteten Daten bestimmte Koeffizient  $M_u^{(1)}$  für kleine Skalen  $\Delta r$  einen weit weniger starken Anstieg. Bemerkenswert ist ausserdem, dass dieser Koeffizient, vor allem im Vergleich zu dem im eindimensionalen Fall beobachteten Verhalten (vergleiche Abbildung 6.6), über nahezu den gesamten Bereich  $0 \leq \Delta r \leq 3l_{mar}$  als Polynom zweiten Grades in  $\Delta r$  beschrieben werden kann. Da die im eindimensionalen Fall beobachteten starken Abweichungen von diesem Verlauf des Koeffizienten  $M^{(1)}$  eindeutig mit der Markowlänge  $l_{mar}$  korreliert sind (vergleiche Kapitel 6), könnte dieses Ergebnis darauf hinweisen, dass im Fall der zweidimensionalen Analyse die Markoweigenschaften auch auf kleineren Skalen erfüllt sind.

Die Extrapolation gegen  $\Delta r = 0$  wurde dennoch nicht auf diesen kleinen Skalen, sondern auf Skalen im Intervall  $l_{mar} \leq \Delta r \leq 2l_{mar}$  durchgeführt (siehe Abbildung 8.2). In diesem Bereich von Skalen sind die aus den Rohdaten und den geglätteten Daten bestimmten Koeffizienten  $M_u^{(1)}$  praktisch identisch und die durch die quadratischen Fits erhaltenen Ergebnisse für  $D_u^{(1)}$  stimmen im Wesentlichen überein (die relative Abweichung der extrapolierten Werte beträgt für den in Abbildung 8.2 betrachteten Fall weniger als sieben Prozent). Ein weiterer Grund für diese Wahl des Extrapolationsverfahrens ist der oben besprochene Einfluss des Messrauschens, das die kleinen Skalen dominiert und Aussagen über diesen Bereich erschwert. Es zeigt sich aber sehr deutlich, dass die geglätteten Daten im Bereich  $\Delta r \leq l_{mar}$  weit weniger stark ansteigen als die Rohdaten und auch in diesem Bereich in erster Näherung noch durch den Extrapolationsfit beschrieben werden.

Abbildung 8.3 zeigt das Ergebnis der quadratischen Extrapolation für den Koeffizienten  $D_u^{(1)}(u, x, r)$  auf der Skala  $r = L/2$  für drei verschiedene Werte von  $x$

als Funktion des Geschwindigkeitsinkrements  $u$ . Der Koeffizient zeigt das bereits aus der eindimensionalen Analyse bekannte lineare Verhalten in  $u$  und eine leichte Abhängigkeit von  $x$ : Die Steigung der an die Daten angefitzten Geraden wächst von 0,75 bei  $x = -1$  über 0,88 bei  $x = 0$  auf einen Wert von 1,1 bei  $x = +1$ . Im Vergleich zur Variation von  $D_u^{(1)}$  mit  $u$  ist diese Abhängigkeit aber klein und wird daher im folgenden vernachlässigt.

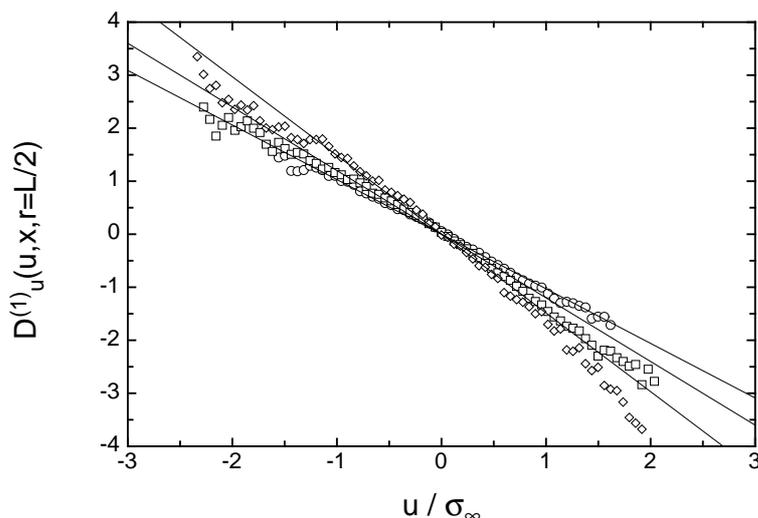


Abbildung 8.3: Die  $u$ -Komponente  $D_u^{(1)}(u, x, r)$  des Driftvektors auf der Skala  $r = L/2$  als Funktion des Geschwindigkeitsinkrements  $u$  bei  $x = -1$  (Kreise),  $x = 0$  (Quadrate) und  $x = +1$  (Rauten).  $D_u^{(1)}(u, x, r)$  kann durch Ursprungsgeraden in  $u$  beschrieben werden (durchgezogene Linien). Die Steigungen der angefitzten Geraden variieren von  $g = 0,75$  bei  $x = -1$  über  $g = 0,88$  bei  $x = 0$  bis zu  $g = 1,1$  bei  $x = +1$ .

Die  $u$ -Komponente des Driftvektors kann also in erster Näherung als eine von  $x$  unabhängige lineare Funktion des Geschwindigkeitsinkrements  $u$  mit skalenabhängiger Steigung  $g(r)$  dargestellt werden:

$$D_u^{(1)}(u, x, r) = -g(r)u. \quad (8.6)$$

Für den in Abbildung 8.3 dargestellten Koeffizienten auf der Skala  $r = L/2$  erhält man eine mittlere Steigung von  $g(r = L/2) \approx 1,24$  (hierbei wurde über die Ergebnisse der Fits für verschiedene Werte von  $x$  gemittelt). Abbildung 8.4 zeigt die Steigung  $g$  des Koeffizienten  $D_u^{(1)}$  als Funktion der Längenskala  $r$ . Zum Vergleich ebenfalls gezeigt ist die Steigung  $\gamma(r)$  des aus der eindimensionalen Analyse bestimmten Driftkoeffizienten  $D^{(1)}$ . Es zeigt sich, dass die beiden Koeffizienten  $g(r)$  und  $\gamma(r)$  identisch sind.

Dieses Ergebnis ist nicht überraschend sondern folgt, wie eine einfache Rechnung zeigt, aus der Annahme, dass  $D_u^{(1)}$  keine Funktion von  $x$  ist. Hierzu betrachtet man die Fokker-Planck-Gleichung für  $q(u, x, r)$ , die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte des Geschwindigkeitsinkrements  $u(r)$  und der logarithmischen Energieisipations-

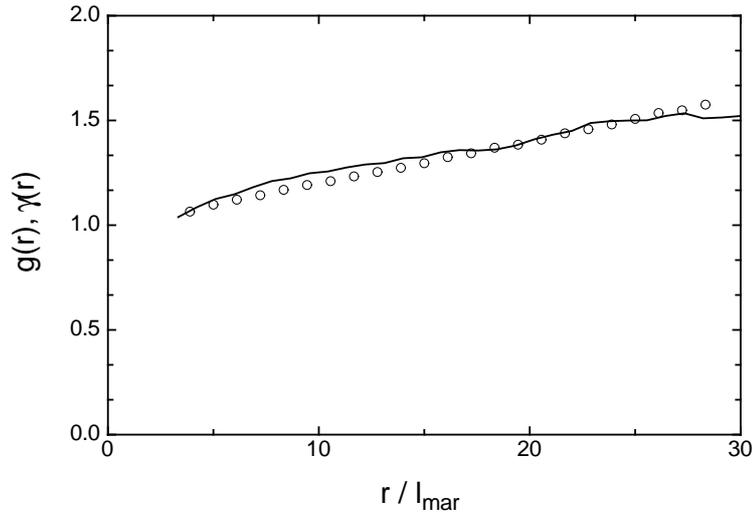


Abbildung 8.4: Die Steigung  $g(r)$  des Koeffizienten  $D_u^{(1)}$  als Funktion der Längenskala  $r$  (offene Kreise). Die durchgezogene Linie gibt die Ergebnisse der eindimensionalen Markowanalyse für die Steigung  $\gamma(r)$  des Driftkoeffizienten  $D^{(1)}$  wieder.

rate  $x(r)$ . Sie lautet ausgeschrieben:

$$\begin{aligned}
 -r \frac{\partial}{\partial r} q(u, x, r) &= -\frac{\partial}{\partial u} (D_u^{(1)} q) - \frac{\partial}{\partial x} (D_x^{(1)} q) \\
 &\quad + \frac{\partial^2}{\partial u^2} (D_{uu}^{(2)} q) + 2 \frac{\partial^2}{\partial u \partial x} (D_{ux}^{(2)} q) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (D_{xx}^{(2)} q). \quad (8.7)
 \end{aligned}$$

Durch Integration über  $x$  kann aus ihr die Gleichung für die eindimensionale Dichte  $p(u, r)$  des Geschwindigkeitsinkrements berechnet werden. Wesentlich für die folgenden Rechnung ist die Unabhängigkeit von  $D_u^{(1)}$  von  $x$ , was es erlaubt, diesen Koeffizienten vor das Integral nach  $x$  zu ziehen:

$$\begin{aligned}
 -r \frac{\partial}{\partial r} p(u, r) &= -r \frac{\partial}{\partial r} \int_{-\infty}^{+\infty} q(u, x, r) dx \\
 &= -\frac{\partial}{\partial u} \int_{-\infty}^{+\infty} D_u^{(1)}(u, r) q dx - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} (D_x^{(1)} q) dx \\
 &\quad + \frac{\partial^2}{\partial u^2} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} D_{uu}^{(2)} q dx \right) + 2 \frac{\partial}{\partial u} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} (D_{ux}^{(2)} q) dx + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} (D_{xx}^{(2)} q) dx \\
 &= -\frac{\partial}{\partial u} (D_u^{(1)}(u, r) p(u, r)) + \frac{\partial}{\partial u^2} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} D_{uu}^{(2)} q dx \right) \\
 &\quad - \underbrace{\left[ D_x^{(1)} q \right]_{x=-\infty}^{x=+\infty}}_{=0} + 2 \frac{\partial}{\partial u} \underbrace{\left[ D_{ux}^{(2)} q \right]_{x=-\infty}^{x=+\infty}}_{=0} + \frac{\partial}{\partial x} \underbrace{\left[ D_{xx}^{(2)} q \right]_{x=-\infty}^{x=+\infty}}_{=0}
 \end{aligned}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial u} \left( D_u^{(1)}(u, r) p(u, r) \right) + \frac{\partial}{\partial u^2} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} D_{uu}^{(2)} q(x, r|u, r) dx}_{D_{1dim}^{(2)}(u, r)} p(u, r). \quad (8.8)$$

Man erhält also eine eindimensionale Fokker-Planck-Gleichung für  $p(u, r)$  mit einem Diffusionskoeffizienten, der sich in Übereinstimmung mit den experimentellen Ergebnissen als identisch mit dem der zweidimensionalen Gleichung erweist.

Die nächste Frage, die sich in diesem Zusammenhang stellt, ist die nach den Abhängigkeiten des Koeffizienten  $D_{uu}^{(2)}$  vom Inkrement  $u$  und der Dissipationsrate  $x$ . Abbildung 8.5 zeigt den Koeffizienten  $M_{uu}^{(2)}(u, x, r, \Delta r)$  auf der Skala  $r = L/2$  für exemplarisch gewählte Werte von  $u$  und  $x$  als Funktion von  $\Delta r$ . Wie auch schon im Fall des Koeffizienten erster Ordnung zeigt der aus den Rohdaten berechnete Diffusionskoeffizient  $M_{uu}^{(2)}$  für kleine Werte von  $\Delta r$  einen starken Anstieg, der sich nach Glättung der Daten stark abschwächt. Bei grösseren Skalen  $\Delta r$  sind die Ergebnisse für die geglätteten und die ungeglätteten Daten wiederum nahezu identisch und die Extrapolation der Daten im Intervall  $l_{mar} \leq \Delta r \leq 2l_{mar}$  liefert Werte, die sich um lediglich fünf Prozent voneinander unterscheiden.

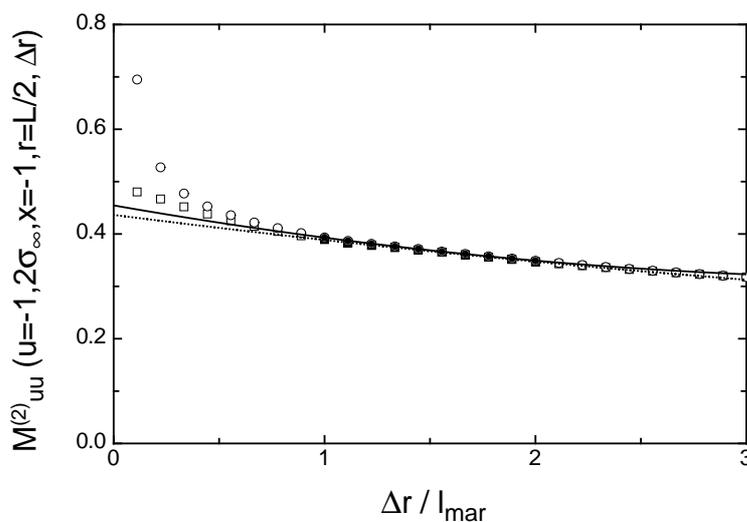


Abbildung 8.5: Das bedingte Moment  $M_{uu}^{(2)}(u, x, r, \Delta r)$  auf der Skala  $r = L/2$  bei  $u = -1, 2\sigma_\infty$  und  $x = -1$  als Funktion von  $\Delta r$  (offene Symbole), berechnet aus den Rohdaten (Kreise) und den geglätteten Daten (Quadrate). Im Intervall  $l_{mar} \leq \Delta r \leq 2l_{mar}$  (volle Symbole) wurden Polynome zweiten Grades an die Daten gefittet.

In Abbildung 8.6 ist  $D_{uu}^{(2)}(u, x, r)$  auf der Skala  $r = L/2$  für drei verschiedene Werte von  $u$  als Funktion der logarithmischen Energiedissipationsrate  $x$  gezeigt. Der Koeffizient steigt exponentiell mit  $x$  und hängt nicht vom Geschwindigkeitsinkrement  $u$  ab:

$$D_{uu}^{(2)}(u, x, r) = D_{uu}^{(2)}(x, r) = a_0(r) \exp(a_1(r)x). \quad (8.9)$$

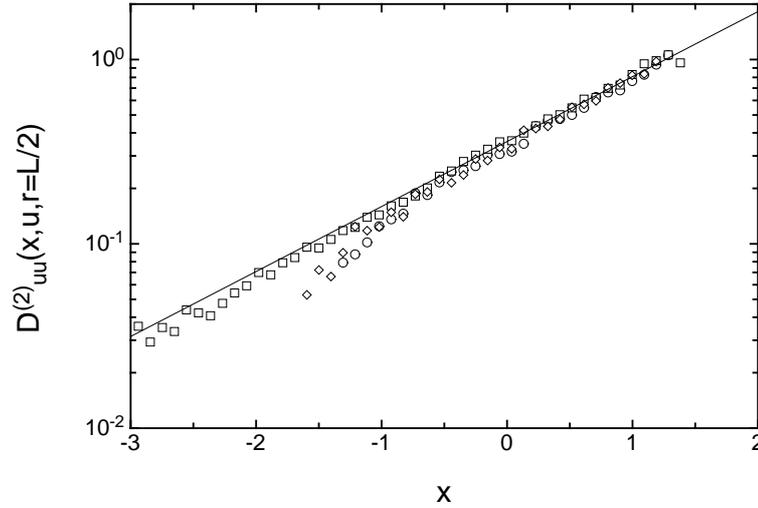


Abbildung 8.6: Die  $uu$ -Komponenten der Diffusionsmatrix auf der Skala  $r = L/2$  als Funktion der logarithmischen Dissipationsrate  $x$  bei  $u = -\sigma_\infty$  (Kreise),  $u = 0$  (Quadrate) und  $u = +\sigma_\infty$  (Rauten). Die durchgezogene Linie ist ein Exponentialfit gemäss (8.9) an die Daten für  $u = 0$ .

Die durch Gleichung (8.9) beschriebene exponentielle Abhängigkeit des Diffusionsterms  $D_{uu}^{(2)}$  von  $x$  findet sich auf allen Skalen  $r$ , was es erlaubt die beiden Koeffizienten  $a_0$  und  $a_1$  als Funktion der Längenskala  $r$  zu bestimmen.  $a_0$  ist eine lineare Funktion von  $r$ , während  $a_1$  in erster Näherung konstant ist (siehe Abbildung 8.7):

$$\begin{aligned} a_0(r) &\approx 0,02(\rho - 1), \\ a_1 &\approx 0,9. \end{aligned} \quad (8.10)$$

Bei der Extrapolation des gemischten Terms  $M_{ux}^{(2)}$  treten wesentlich stärkere Unterschiede zwischen den geglätteten und den ursprünglichen Daten auf, siehe Abbildung 8.8. In beiden Fällen zeigt sich aber ein ähnlicher Verlauf des Koeffizienten in  $\Delta r$  und auch die extrapolierten Werte stimmen gut überein. Auffällig ist zudem, dass  $M_{ux}^{(2)}$  bei Annäherung an  $\Delta r = 0$  betragsmässig schnell gegen Null strebt und der durch die Extrapolation erhaltene Wert für  $D_{ux}^{(2)}$  klein ist gegen die Werte von  $M_{ux}^{(2)}$ , die zur Extrapolation verwendet wurden. Dieses Ergebnis lässt vermuten, dass  $D_{ux}^{(2)}$  verschwindet. Das bestätigt sich, wenn man  $D_{ux}^{(2)}$  als Funktion der logarithmischen Dissipationsrate  $x$  betrachtet (Abbildung 8.8). Die Extrapolationsmethode liefert für  $D_{ux}^{(2)}$  Werte, die eine im Vergleich zu ihrer Grössenordnung starke Streuung aufweisen und betragsmässig sehr viel kleiner sind als die entsprechenden Werte von  $D_{uu}^{(2)}$ . Im Folgenden wird daher der Koeffizient  $D_{ux}^{(2)}$  in erster Näherung vernachlässigt.

Geht man davon aus, dass nur die Diagonalelemente der Diffusionsmatrix ungleich Null sind, so können Drift- und Diffusionsterm der Fokker-Planck-Gleichung für die Wahrscheinlichkeitsdichte leicht in die Funktionen  $\mathbf{g}(\vec{\xi}, r)$  und  $\mathbf{h}(\vec{\xi}, r)$  der entsprechenden Langevin-Gleichung für die Zufallsvariablen  $\vec{\xi}$  in  $r$  umgerechnet werden. Die im allgemeinen notwendige Diagonalisierung der Diffusionsmatrix entfällt in diesem Fall (vergleiche Kapitel 4).

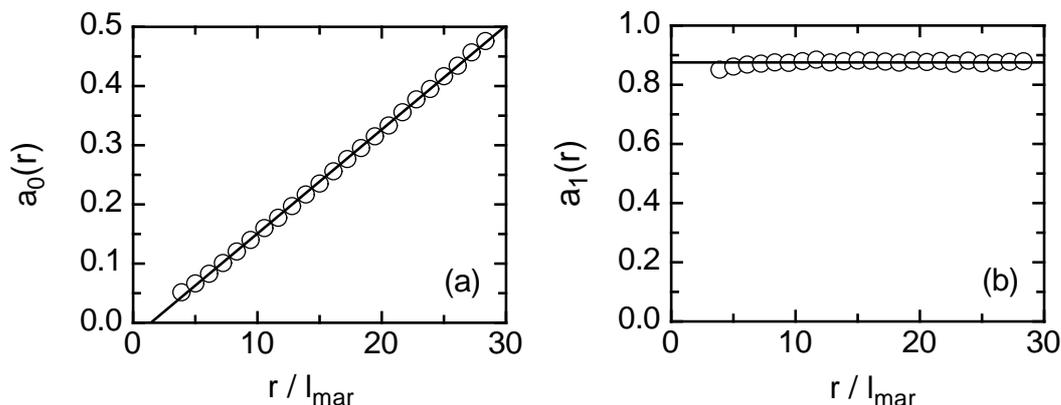


Abbildung 8.7: Die in Gleichung (8.9) definierten Grössen  $a_0(r)$  (a) und  $a_1(r)$  (b) als Funktionen der Längenskala  $r$ .  $a_0(r)$  ist eine lineare Funktion der Skala  $r$ ,  $a_0(r) \approx 0,02(\rho - 1)$  mit  $\rho = r/l_{mar}$ , der Exponent  $a_1$  dagegen in erster Näherung konstant:  $a_1 \approx 0,8$  (durchgezogene Linien).

Im konkreten Fall der hier betrachteten zweidimensionalen Zufallsvariablen erhält man zwei gekoppelte Differentialgleichungen für die Entwicklung der Zufallsvariablen  $u(r)$  und  $x(r)$ . Eine weitere Vereinfachung ergibt sich aus der Tatsache, dass der stochastische Anteil  $D_{uu}^{(2)}$  der Gleichung für das Geschwindigkeitsinkrement nicht von  $u$  abhängt; sowohl der Formalismus nach Itô als auch der nach Stratonovich liefern in diesem Fall für die  $u$ -Komponente der Gleichung dasselbe Ergebnis. Es lautet:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial r}u(r) &= \frac{1}{r}D_u^{(1)}(u, r) + \sqrt{\frac{1}{r}D_{uu}^{(2)}(x, r)}\Gamma_u(r), \\ -\frac{\partial}{\partial r}x(r) &= \dots \end{aligned} \quad (8.11)$$

Bereits in dieser unvollständigen Formulierung kann die Langevin-Gleichung dazu benutzt werden, den Rauschterm  $\Gamma_u$  zu bestimmen. Neben den aus den bedingten Momenten abgeschätzten Koeffizienten  $D_u^{(1)}$  und  $D_{uu}^{(2)}$  müssen hierzu für eine konkrete Realisierung des Zufallsprozesses  $u(r)$  lediglich noch die Ableitung  $\frac{\partial}{\partial r}u(r)$  des Geschwindigkeitsinkrements sowie die logarithmische Dissipationsrate  $x(r)$  aus den Messdaten abgeschätzt werden. Um das Rauschen  $\Gamma_u(r)$  zu extrahieren wurde ein Euler-Verfahren erster Ordnung verwendet. Eine sehr ausführliche Diskussion der Anwendung dieses numerischen Verfahrens auf die Langevin-Gleichung findet sich in der Diplomarbeit von M. Siefert [101]. Abbildung 8.9 zeigt die Autokorrelationsfunktion  $R_\Gamma(\Delta r)$  des nach der Langevin-Gleichung rekonstruierten Rauschens  $\Gamma_u(r)$ . Der stochastische Prozess  $u(x, r)$  ist nur dann Markowsch, wenn  $\Gamma_u$   $\delta$ -korreliert ist, was hier allerdings nicht der Fall ist: Die Autokorrelation weist bis zu einer Skala von  $\Delta r = l_{mar}$  Werte ungleich Null auf. Die Tatsache, dass die Korrelationsfunktion  $R_\Gamma(\Delta r)$  genau bei  $\Delta r = l_{mar}$  ihren ersten Nulldurchgang hat deutet vielmehr darauf hin, dass die Markoweigenschaften nach wie vor erst auf Skalen grösser als der (aus der eindimensionalen Analyse bestimmten) Skala  $l_{mar}$  erfüllt sind.

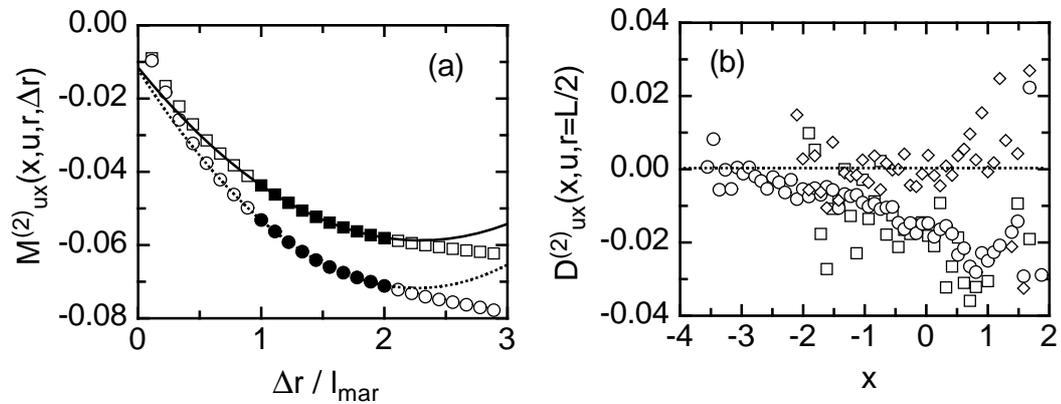


Abbildung 8.8: (a): Das gemischte bedingte Moment  $M_{ux}^{(2)}(u, x, r, \Delta r)$  auf der Skala  $r = L/2$  bei  $u = -1, 2\sigma_\infty$  und  $x = -1$  als Funktion von  $\Delta r$  (offene Symbole), berechnet aus den Rohdaten (Kreise) und den geglätteten Daten (Quadrate). Im Intervall  $l_{mar} \leq \Delta r \leq 2l_{mar}$  (volle Symbole) wurden Polynome zweiten Grades an die Daten gefittet.

(b): Der Koeffizient  $D_{ux}^{(2)}(u, x, r)$  auf der Skala  $r = L/2$  als Funktion der Dissipationsrate  $x$  für  $u = -\sigma_\infty$  (Kreise),  $u = 0$  (Quadrate) und  $u = +\sigma_\infty$  (Rauten).

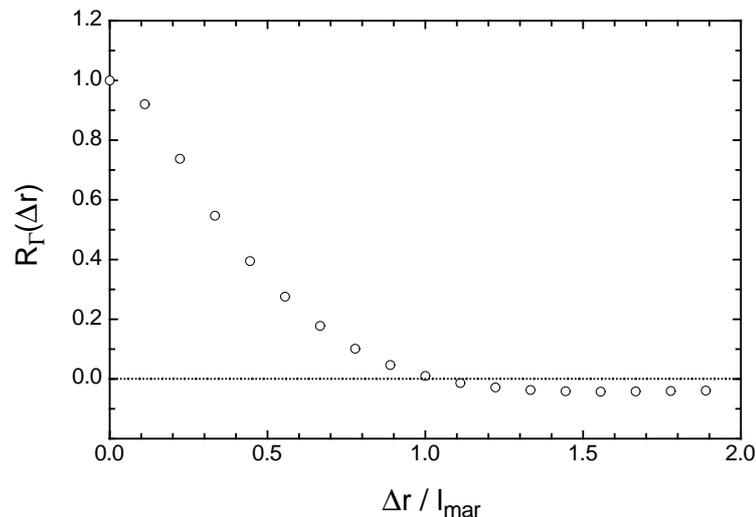


Abbildung 8.9: Die Autokorrelationsfunktion  $R_\Gamma(\Delta r)$  des nach der Langevin-Gleichung (8.11) extrahierten Rauscheterms  $\Gamma_u(r)$ .

Um die Analyse zu vervollständigen, müssen noch die Koeffizienten  $D_x^{(1)}$  und  $D_{xx}^{(2)}$  aus den Daten abgeschätzt werden. Der Grenzübergang  $\Delta r \rightarrow 0$  erweist sich für diese beiden Koeffizienten allerdings als wesentlich problematischer als in den vorhergehenden Fällen. Bei beiden Koeffizienten unterscheiden sich die Ergebnisse des geglätteten Datensatzes und der Rohdaten für den gesamten Bereich von Skalen beträchtlich (siehe Abbildung 8.10), und auch die Extrapolationen liefern, insbesondere für  $D_x^{(1)}$ , deutlich unterschiedliche Ergebnisse.  $M_{xx}^{(2)}$  weist zudem, ähnlich wie der Koeffizient  $M_{ux}^{(2)}$ , mit abnehmenden Werten von  $\Delta r$  einen starken betragsmäßigen Abfall gegen Null auf, so dass anhand der vorliegenden experimentellen Daten kaum zu entscheiden ist, ob der Grenzwert für  $\Delta r = 0$  noch signifikant von Null verschieden ist.

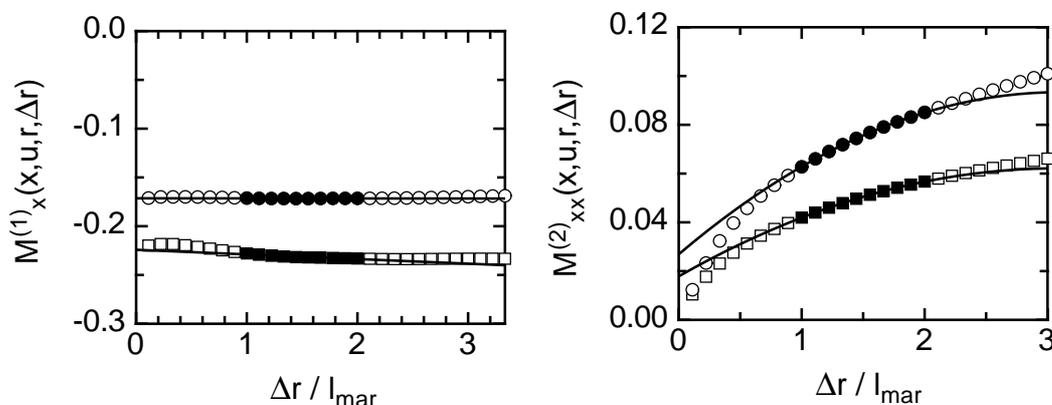


Abbildung 8.10: Die bedingten Momente  $M_x^{(1)}$  und  $M_{xx}^{(2)}$  auf der Skala  $r = L/2$  bei  $u = -1, 2\sigma_\infty$  und  $x = -1$  als Funktion von  $\Delta r$  (offene Symbole), berechnet aus den Rohdaten (Kreise) und den geglätteten Daten (Quadrate). Im Intervall  $l_{mar} \leq \Delta r \leq 2l_{mar}$  (volle Symbole) wurden Polynome zweiten Grades an die Daten gefittet.

Extrapoliert man die aus den geglätteten Daten berechneten  $M_x^{(1)}$  mit linearen Fits im Intervall  $l_{mar} \leq \Delta r \leq 2l_{mar}$ , so erhält man einen Koeffizienten erster Ordnung, der in erster Näherung linear in der logarithmierten Dissipationsrate  $x$  verläuft und keine systematische Abhängigkeit vom Geschwindigkeitsinkrement  $u$  zeigt (siehe Abbildung 8.11). Bei sehr kleinen Werten von  $x$  (in etwa ab  $x = -2$ ) deutet sich eine Änderung des linearen Verlaufs an, der Koeffizient scheint hier zu saturieren. Um die Signifikanz der beobachteten Abweichungen vom linearen Verhalten beurteilen zu können müsste aber eine ausführliche Fehlerrechnung für Drift- und Diffusionskoeffizient durchgeführt werden, was im Rahmen der vorliegenden Arbeit nicht mehr realisiert werden konnte. Zu beachten wäre dabei auch, dass die Bildung des Logarithmus in  $x = \ln(\epsilon_r/\bar{\epsilon})$  zu Verzerrungen führt, die das Problem der endlichen experimentellen Auflösung von  $\epsilon_r$  noch verstärken [111]. Dieser Effekt tritt insbesondere bei kleinen Werten von  $\epsilon_r$  bzw. bei stark negativen Werten von  $x$  auf. Dieser Bereich besitzt dementsprechend wenig Signifikanz [77].

Hier soll davon ausgegangen werden, dass sich  $D_x^{(1)}$  als von  $u$  unabhängige lineare

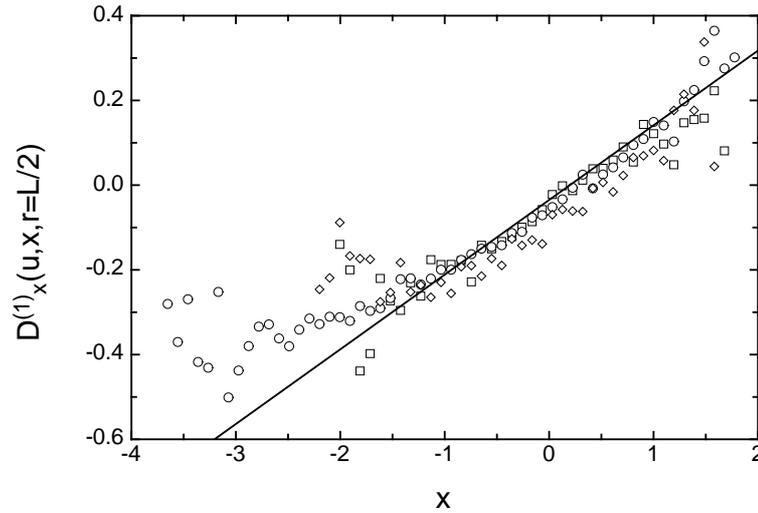


Abbildung 8.11: Der Koeffizient  $D_x^{(1)}(x, u, r)$  auf der Skala  $r = L/2$  als Funktion der Dissipationsrate  $x$  bei  $u = -\sigma_\infty$  (Quadrate),  $u = 0$  (Kreise) und  $u = +\sigma_\infty$  (Rauten).

Funktion der logarithmierten Dissipationsrate  $x$  darstellen lässt:

$$D_x^{(1)}(x, r) = F(r) + G(r)x. \quad (8.12)$$

Abbildung 8.12 zeigt die durch Fits gemäss (8.12) erhaltenen Funktionen  $F(r)$  und  $G(r)$ . Die beiden Terme lassen sich als logarithmische Funktion bzw. als Potenzfunktion in  $r$  darstellen:

$$\begin{aligned} F(r) &= b_0 \ln(b_1 \rho), \\ b_0 &\approx -0,041, \\ b_1 &\approx -0,19, \\ G(r) &= c_0 \rho^{c_1}, \\ c_0 &\approx 0,027, \\ c_1 &\approx 0,57, \end{aligned} \quad (8.13)$$

Für den Koeffizienten zweiter Ordnung  $D_{xx}^{(2)}$  findet man als Ergebnis der Extrapolation auf der Skala  $r = L/2$  Werte, die eine im Vergleich zu ihrer Grössenordnung sehr starke Streuung aufweisen und keine wohldefinierte Abhängigkeit von den Variablen  $x$  und  $u$  aufweisen (Abbildung 8.13(a)). Hier ist die Anzahl der zur Verfügung stehenden Messdaten immer noch zu gering um die funktionalen Abhängigkeiten des Koeffizienten  $D_{xx}^{(2)}$  von  $u$  und  $x$  sicher bestimmen zu können.

Ein anderes Bild ergibt sich auf kleineren Skalen, wie in Abbildung 8.13(b) exemplarisch für  $r = 4l_{mar}$  gezeigt. Der Diffusionsterm  $D_{xx}^{(2)}$  weist hier signifikante Abhängigkeiten sowohl von der logarithmischen Dissipationsrate  $x$  als auch vom Geschwindigkeitsinkrement  $u$  auf. Eine mögliche Parametrisierung der  $x$ -Abhängigkeit von  $D_{xx}^{(2)}$  ist in Abb. 8.13(b) vorgeschlagen; inwieweit diese sich als brauchbar

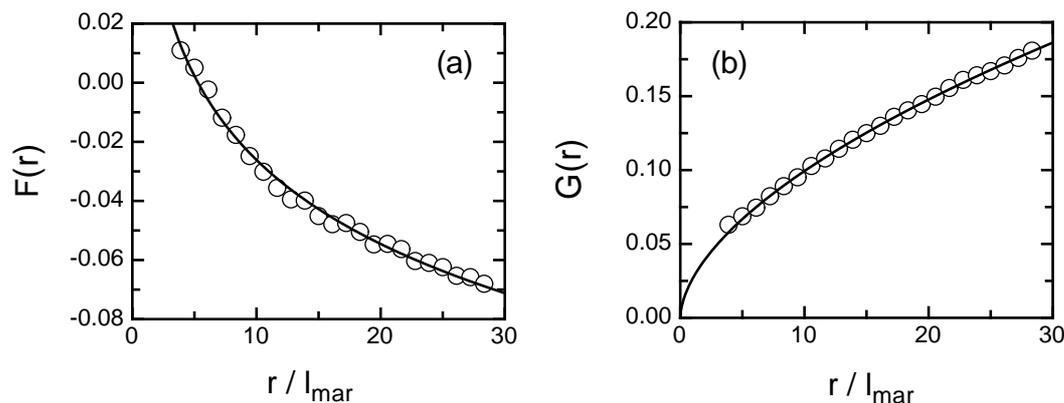


Abbildung 8.12: Die in Gleichung (8.11) definierten Größen  $F$  (a) und  $G$  (b) als Funktion der Längenskala  $\rho = r/l_{mar}$ . Die durchgezogenen Linien geben Fits an die Daten gemäss Gleichung (8.13) wieder.

zur Beschreibung des Koeffizienten erweitert werden allerdings zukünftige Untersuchungen erweisen müssen.

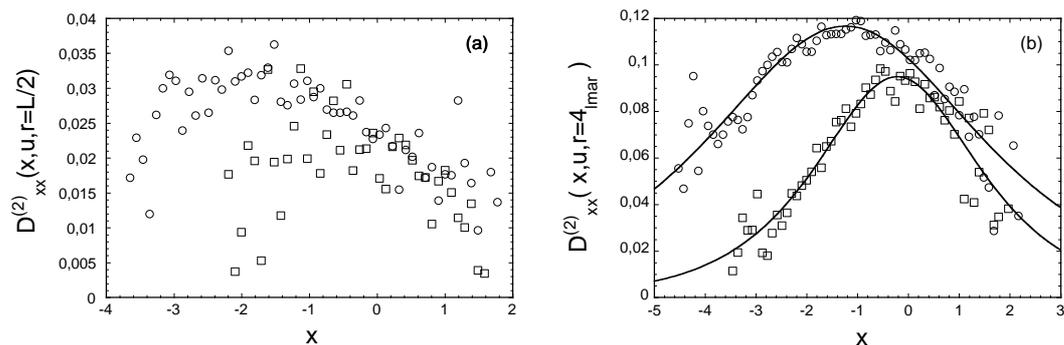


Abbildung 8.13: Der Koeffizient  $D_{xx}^{(2)}(x, u, r)$  als Funktion der logarithmischen Dissipationsrate  $x$  auf den Skalen  $r = L/2$  (a) und  $r = 4l_{mar}$  (b). Die Geschwindigkeitsinkremente betragen  $u = 0$  (Kreise, in (a) und (b)) und  $u = +\sigma_\infty$  (Quadrate in (a)) bzw.  $u = +\sigma_\infty/4$  (Quadrate in (b)). An die in (b) gezeigten Daten sind Fits der Form  $D_{xx}^{(2)} = \frac{m_0}{\cosh((x-m_1)/m_2)}$  angepasst (durchgezogene Linien).

### 8.3 Diskussion

Auch wenn die zweidimensionale Analyse der Turbulenz im Rahmen der vorliegenden Arbeit nicht bis ins Detail ausgeführt werden konnte, so erlauben die vorliegenden Ergebnisse dennoch interessante Aussagen über die Physik der turbulenten Kaskade.

Bemerkenswert sind dabei vor allem die Ergebnisse für die Langevin-Gleichung (8.11) des Geschwindigkeitsinkrements. Der deterministische Anteil  $D_u^{(1)}$  dieser Gleichung

chung erweist sich in guter erster Näherung als unabhängig von der Dissipationsrate  $x$  (siehe Abbildung 8.3) und als identisch mit dem Koeffizienten  $D^{(1)}(u, r)$  der eindimensionalen Fokker-Planck-Gleichung. Die deterministische Entwicklung des Inkrements ist also völlig unabhängig von der Statistik der Energiedissipationsrate. Diese übt ihren Einfluss auf das Geschwindigkeitsinkrement ausschliesslich über den stochastischen Term  $D_{uu}^{(2)}$  aus, der eine exponentielle Funktion von  $x$  ist und nicht von  $u$  abhängt.

Damit ergibt sich für das Geschwindigkeitsinkrement eine recht einfache Aussage: Für den (hypothetischen) Fall, dass die Dissipationsrate keine stochastische Variable sondern eine Konstante ist, kann die Entwicklung des Inkrements  $u$  in der Skala  $r$  durch einen einfachen deterministischen Prozess mit rein additivem Rauschen beschrieben werden: der Koeffizient  $D_{uu}^{(2)}$  wäre dann konstant und auch der Diffusionsterm  $D^{(2)}$  der aus der zweidimensionalen Fokker-Planck-Gleichung abgeleiteten Entwicklungsgleichung (8.8) für  $p(u, r)$  wäre dann konstant in  $u$ . Die Lösungen dieser Gleichung sind dann Gaußverteilungen die keinerlei Intermittenzeffekte zeigen.

Dieses Ergebnis ist das im Rahmen aller gängigen Kaskadenmodelle erwartete. Sowohl Kolmogorovs Theorien als auch das Modell Castaings schreiben das Auftreten der Intermittenzeffekte den statistischen Fluktuationen der Energiedissipationsrate zu und auch experimentelle Untersuchungen der auf  $\epsilon_r$  bedingten Statistik des Inkrements haben gezeigt, dass sich die Wahrscheinlichkeitsdichten von  $u$  bei Bedingung auf  $x(r)$  bzw.  $\epsilon_r$  auf Gaußverteilungen reduzieren [78].

Einen Widerspruch zu insbesondere den Modellen Kolmogorovs stellt allerdings nach wie vor das Ergebnis für den deterministischen Term  $D_u^{(1)}$  dar. Dieser ist, wie bereits erwähnt, identisch mit dem im eindimensionalen Koeffizienten und steht damit im Widerspruch zu dem nach K41 erwarteten Wert von  $D_u^{(1)}(u, r) = \frac{1}{3}u$ . Die im eindimensionalen Fall beobachteten Abweichungen vom Kolmogorovschen Modell lassen sich also nicht auf den Einfluss der Energiedissipationsrate zurückführen, sondern weisen auf eine grundlegende Diskrepanz zwischen diesem Modell und dem hier untersuchten Experiment hin.

Um den Prozess in zwei Dimensionen vollständig charakterisieren zu können, müssten noch die Abhängigkeiten des Koeffizienten  $D_{xx}^{(2)}$  von seinen Argumenten  $u$ ,  $x$  und  $r$  bestimmt werden. Dies war im Rahmen dieser Arbeit allerdings nicht mehr in der notwendigen Ausführlichkeit möglich. Die Ergebnisse für  $D_{xx}^{(2)}$  auf der Skala  $r = L/2$  (siehe Abbildung 8.13(a)) zeigen aber deutlich, dass, um die nötige Genauigkeit zu erreichen, Untersuchungen an noch größeren Datensätzen als dem hier untersuchten erforderlich sind.

Als gesichert darf aber gelten, dass der Koeffizient erster Ordnung,  $D_x^{(1)}$ , linear in  $x$  verläuft und keine Abhängigkeit vom Geschwindigkeitsinkrement  $u$  zeigt. Man erhält also, im Bild der Langevin-Gleichung, für das Inkrement  $u(r)$  und die Dissipationsrate  $x(r)$  je eine vergleichsweise einfache stochastische Entwicklungsgleichung in  $r$ , wobei die beiden Zufallsvariablen  $u$  und  $x$  nur über die stochastischen Anteile  $D_{uu}^{(2)}$  bzw.  $D_{xx}^{(2)}$  in die Gleichung der jeweils anderen Variablen eingehen. Die deterministischen Terme  $D_u^{(1)}$  und  $D_x^{(1)}$  dagegen sind jeweils nur Funktionen von  $u$  bzw.  $x$  und entkoppeln daher vollständig. Zusammengefasst lauten die bisherigen Ergebnisse (im Formalismus nach Itô) für die gekoppelten Langevin-Gleichungen für  $u(r)$

und  $x(r)$ :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial r}u(r) &= -\frac{\gamma(r)}{r}u(r) + \sqrt{m \exp(a_1 x(r))} \Gamma_u(r), \\ -\frac{\partial}{\partial r}x(r) &= +\frac{G(r)}{r}x(r) + \frac{F(r)}{r} + \sqrt{\frac{1}{r}D_{xx}^{(2)}(u, x, r)} \Gamma_x(r). \end{aligned} \quad (8.14)$$

(Der Faktor  $m = \frac{a_0(r)}{r}$  im stochastischen Anteil der Gleichung für  $u(r)$  ist nach den in Gleichung (8.10) und Abb. 8.7 zusammengefassten Ergebnissen für  $D_{uu}^{(2)}$  näherungsweise konstant.)

Interessant ist ein Vergleich der zweidimensionalen Gleichung mit den Langevin-Gleichungen, die sich aus den jeweiligen eindimensionalen Markowanalysen des Geschwindigkeitsinkrements bzw. der Energiedissipationsrate ergeben. Mit den Ergebnissen der vorhergehenden Kapitel für das Geschwindigkeitsinkrement und der von A. Naert und P. Marq durchgeführten Markowanalyse der Energiedissipationsrate [77, 71] lauten diese Gleichungen (im Formalismus nach Itô):

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial r}u(r) &= -\frac{\gamma(r)}{r}u(r) + \sqrt{\frac{1}{r}(\alpha(r) - \delta(r)u + \beta(r)u^2)} \Gamma(r), \\ -\frac{\partial}{\partial r}x(r) &= +\frac{G(r)}{r}x(r) + \frac{F(r)}{r} + \sqrt{\frac{1}{r}D(r)} \Gamma(r). \end{aligned} \quad (8.15)$$

Die beiden Funktionen  $G(r)$  und  $F(r)$  in der eindimensionalen Langevin-Gleichung (8.15) müssen, ebenso wie die deterministischen Terme  $\gamma(r)$  der Gleichungen für  $u(r)$ , mit den entsprechenden Termen der zweidimensionalen Gleichung (8.14) identisch sein. Dies folgt, analog zu der in Gleichung (8.8) skizzierten Überlegung, aus der Tatsache, dass der Driftkoeffizient  $D_x^{(1)}$  keine Funktion des Geschwindigkeitsinkrements  $u$  ist. Allerdings sei darauf hingewiesen, dass die in [71] angegebenen Werte für  $G(r)$  um einen Faktor zwei über den hier in Abbildung (8.12) gezeigten Werten liegen. Diese Diskrepanz dürfte aber durch die unterschiedlichen Reynoldszahlen der jeweils verwendeten Datensätze ( $R_\lambda = 341$  in [71] bzw.  $R_\lambda = 463$  bei den hier vorgestellten Analysen) und den Unsicherheiten bei der experimentellen Bestimmung der Energiedissipationsrate zu erklären sein.

Deutliche Unterscheide zwischen ein- und zweidimensionaler Analyse zeigen sich dagegen bei den stochastischen Termen der Langevin-Gleichungen. Während sich für die Gleichung des Geschwindigkeitsinkrements durch die zweidimensionale Analyse, wie oben bereits diskutiert, wesentliche Vereinfachungen ergeben, weist der Diffusionskoeffizient  $D_{xx}^{(2)}$  in (8.14) eine sehr viel kompliziertere Abhängigkeit von den Variablen auf als sein eindimensionales Gegenstück  $D(r)$ , das sich als unabhängig von  $x$  erweist [71]. Bemerkenswert ist allerdings, dass die Größenordnung des in [71] gemessenen Diffusionskoeffizienten  $D(r)$  gut mit den hier in Abbildung 8.13 gezeigten Werten für  $D_{xx}^{(2)}$  übereinstimmt. Beim Vergleich der in der ein- bzw. zweidimensionalen Analyse erhaltenen Diffusionskoeffizienten für  $x$  sei aber auch darauf hingewiesen, dass die Konstanz von  $D(r)$  lediglich eine erste Näherung darstellt: Die in [77] graphisch dargestellten Diffusionskoeffizienten weisen eine deutliche Abhängigkeit von  $x$  auf.

Insgesamt hat die um die Energiedissipationsrate erweiterten Analyse, zumindest was die Gleichung des Geschwindigkeitsinkrements betrifft, die erwarteten Vereinfachungen für die Beschreibung des stochastischen Prozesses erbracht. Die zweite der mit der zweidimensionalen Markowanalyse verbundenen Hoffnungen, die mögliche Erweiterung der Beschreibung bis in den Dissipationsbereich hinein, hat sich dagegen nicht erfüllt: Die Autokorrelationsfunktion des nach der Langevin-Gleichung (8.11) extrahierten Rauschens  $\Gamma_u$  zeigt bis hin zu Werten von  $\Delta r = l_{mar}$  Werte ungleich Null, ist also keineswegs  $\delta$ -korreliert.

Um den stochastischen Prozess auch in zwei Dimensionen vollständig zu charakterisieren, werden zukünftige Untersuchungen zunächst klären müssen, ob die sich in Abbildung 8.13(b) andeutende vergleichsweise komplizierte Abhängigkeit des Koeffizienten  $D_{xx}^{(2)}$  von  $x$  bestätigt wird, oder experimentellen Unzulänglichkeiten zuzuschreiben ist. In diesem Zusammenhang wird insbesondere auch die Frage geklärt werden müssen, welchen Einfluss die Bestimmung des Gradienten der Geschwindigkeit auf diesen Koeffizienten hat. Hilfreich wären in diesem Zusammenhang sicherlich auch Untersuchungen an Daten aus direkten numerischen Simulationen, die eine Bestimmung der Energiedissipationsrate gemäss ihrer Definition (3.30) zulassen und damit das Problem der Näherungsformel (3.31) umgehen.

Denkbar ist aber auch, dass eine vollständige stochastische Charakterisierung der turbulenten Kaskaden neben dem longitudinalen Geschwindigkeitsinkrement und der Energiedissipationsrate auch noch das transversale Geschwindigkeitsinkrement mit einbeziehen muss und sich erst im Rahmen einer solchen dreidimensionalen Analyse einfache Ausdrücke für alle Terme der Langevin-Gleichung ergeben. Erste Untersuchungen zu den gemeinsamen statistischen Eigenschaften von longitudinalem und transversalem Inkrement haben bereits weitere interessante Ergebnisse erbracht [10].

Trotz dieser offenen Punkte hat die bisherige Analyse einige interessante Einblicke in die Kopplung der beiden stochastischen Variablen  $u(r)$  und  $\epsilon_r$  erbracht und insbesondere die Natur des multiplikativen Rauschterms (d.h. des quadratischen Diffusionskoeffizienten) der eindimensionalen Gleichung für  $u(r)$  klären können.



# Kapitel 9

## Zusammenfassung und Ausblick

Die im ersten Teil dieser Arbeit vorgestellten Ergebnisse belegen, dass die Mathematik Markowscher Prozesse erfolgreich zur Analyse experimenteller turbulenter Daten angewendet werden kann. Auch wenn die mit dieser Methode erzielten Ergebnisse in einem streng mathematischen Sinn nicht beweisbar sind, so ergeben sie aus physikalischer Sicht dennoch eine widerspruchsfreie, in sich konsistente und im Rahmen der experimentellen Genauigkeit exakte Beschreibung des der Turbulenz zugrunde liegenden stochastischen Prozesses.

Nach Kenntnis des Autors ist die Markowanalyse ausserdem derzeit die einzige experimentelle Methode, die eine korrekte Beschreibung der bedingten Wahrscheinlichkeitsdichten von Geschwindigkeitsinkrementen auf verschiedenen Längenskalen liefert. Wie in dieser Arbeit gezeigt wurde, liefert eine Analyse dieser bedingten Dichten wesentlich mehr Informationen über den stochastischen Prozess als herkömmliche Methoden wie die Skalierungsanalyse der Strukturfunktionen, die ESS oder auch Analysen der Wahrscheinlichkeitsdichten des Inkrements auf nur einer Skala. Es sei hier insbesondere nochmals darauf hingewiesen, dass es mehrere Möglichkeiten gibt, die Dichten  $p(u, r)$  durch (effektive) Fokker–Planck–Gleichungen zu beschreiben, diese Mehrdeutigkeit aber verschwindet, sobald man die bedingten Dichten  $p(u, r|u_0, r_0)$  betrachtet (siehe Kapitel 6.6.2). Dieser Sachverhalt mag mit begründen, warum es zur Erklärung der Turbulenz basierend auf  $p(u, r)$  bzw.  $S_u^n(r)$  in der Literatur noch unterschiedliche Modelle gibt.

Die Tatsache, dass die Markowanalyse eine korrekte Beschreibung der bedingten Dichten liefert verleiht den hier vorgestellten Ergebnissen daher beträchtliche Signifikanz. Allerdings muss man aufgrund dieser Ergebnisse die Annahme eines Skalenverhaltens der Strukturfunktionen für die hier untersuchten Datensätze ablehnen bzw. akzeptieren, dass Skalenverhalten für diese Daten allenfalls eine Näherung erster Ordnung sein kann. Vor dem Hintergrund der in [62] vorgestellten Ergebnisse, denen zufolge in Experimenten mit ausgezeichneter Hauptströmungsrichtung wie dem Freistrahle auch das Kolmogorovsche 4/5–Gesetz nicht exakt erfüllt sein kann, relativiert sich dieser Widerspruch allerdings wieder.

Die Ergebnisse der Markowanalyse sind aber auch für die Modellierung und theoretische Behandlung der voll entwickelten Turbulenz von Bedeutung. Es konnte etwa gezeigt werden, dass das phänomenologische Modell einer multiplikativen Kaskade Markowigenschaften impliziert und für die Abhängigkeiten des Drift- und Diffusi-

onskoeffizienten vom Inkrement bestimmte Vorhersagen macht [1]. Die experimentell gefundenen Widersprüche zu diesen Vorhersagen (insbesondere das Auftreten eines additiven Terms im Diffusionskoeffizienten) führten bereits zu einer um additive Rauscheinflüsse erweiterten Fassung des Modells, die mit experimentellen und auch theoretischen Ergebnissen weit besser übereinstimmt als das ursprüngliche Modell einer rein multiplikativen Kaskade [33].

Auch die neueren Ansätze der sog. fusion rules und der analytischen Behandlung der Navier-Stokes-Gleichung mit feldtheoretischen Methoden lassen sich, wie kürzlich gezeigt werden konnte, in die Markowbeschreibung überführen und sind mit der Annahme einer Fokker-Planck-Gleichung mit linearem Drift- und quadratischem Diffusionskoeffizienten vereinbar [30, 31]. Obwohl sich noch nicht alle Details dieser verschiedenen Ansätze mit den experimentellen Ergebnissen in Einklang bringen lassen, weisen diese Überlegungen der Markowanalyse bereits jetzt eine wichtige Brückenfunktion zwischen Experiment, Modell und analytischer Behandlung der Navier-Stokes-Gleichung zu und lassen für die Zukunft auf weitere wichtige Ergebnisse hoffen.

Ein experimentelles Ergebnis, von dem wichtige Impulse auf Modellierung und Theorie erwartet werden dürfen, ist dabei insbesondere die Existenz der endlichen Markowlänge  $l_{mar}$ , die bisher weder im Modell noch in der Theorie berücksichtigt wurde. Zwar konnten aufgrund der relativ grossen experimentellen Unsicherheiten bei der Bestimmung der Markowlänge  $l_{mar}$  die exakten Zusammenhänge zwischen  $l_{mar}$  und der Kolmogorovschen Dissipationslänge  $\eta$  bzw. der Taylorschen Skala  $\lambda$  bislang noch nicht endgültig geklärt werden, der Verlauf des Verhältnisses  $l_{mar}/\eta$  belegt aber dennoch, dass die Markowlänge auch im Limes sehr hoher Reynoldszahlen nicht gegen Null tendiert. Vielmehr deuten die bisherigen Ergebnisse darauf hin, dass sie, bis auf einen konstanten Faktor der Grössenordnung  $1/2$ , mit der Taylorschen Längenskala identisch ist.

Die Markowanalyse des Übergangs zu hohen Reynoldszahlen wirft auch ein neues Licht auf die angenommenen universellen Eigenschaften der turbulenten Kaskade. Üblicherweise wird davon ausgegangen, dass die Reynoldszahl innerhalb des Inertialbereichs den grundlegenden Mechanismus der Kaskade, also den Energiefluss von grossen zu kleinen Skalen, nicht wesentlich beeinflusst. Im wesentlichen sollte lediglich das Verhältnis  $L/\eta$ , also der Bereich von Skalen, in dem das Modell Gültigkeit besitzt, von der Reynoldszahl abhängen [85]. In Übereinstimmung mit dieser Überlegung zeigen die Skalenexponenten der Strukturfunktionen keine oder nur schwach ausgeprägte Abhängigkeiten von der Reynoldszahl [6, 4, 50].

Die Kramers-Moyal-Koeffizienten der Fokker-Planck-Gleichung dagegen weisen eine eindeutige Abhängigkeit von  $Re$  auf. Der Driftkoeffizient  $D^{(1)}$  erweist sich (bei geeigneter Auftragung) zwar als universell, der Diffusionskoeffizient  $D^{(2)}$  variiert dagegen stark und scheint im Grenzfall  $Re \rightarrow \infty$  gegen eine rein quadratische Funktion von  $u$  zu streben, wobei der Koeffizient  $\beta_\infty$  durch das 4/5-Gesetz gegeben sein sollte. Die gemessenen Koeffizienten  $\beta$  weisen bei steigender Reynoldszahl zwar eine eindeutige Tendenz in Richtung des Grenzwert  $\beta_\infty$  auf, liegen aber auch bei der höchsten hier untersuchten Reynoldszahl noch um etwa eine Grössenordnung unter diesem Wert. Auch hier muss eine quantitative Aussage über die Konvergenz gegen den

Grenzwert zukünftigen Untersuchungen überlassen bleiben. Da der bisherigen Erfahrung nach der Koeffizient  $\beta$  allerdings eher über- als unterschätzt wird, kann auch aus den bereits vorliegenden Daten der Schluss gezogen werden, dass die Konvergenz gegen den Grenzwert  $\beta_\infty$  sehr langsam verläuft und auch Taylor-Reynoldszahlen von 10000 (einem Wert, der in geophysikalischen Strömungen gemessen wird [56]) von diesem Grenzwert noch sehr weit entfernt sind. Vor dem Hintergrund dieser Ergebnisse erscheint es fraglich, ob Turbulenzmodelle und Theorien, die von verschwindender Viskosität bzw. dem Fall unendlich hoher Reynoldszahlen ausgehen, an realen Messdaten überhaupt sinnvoll überprüft werden können.

Die zweidimensionale Markowanalyse der gemeinsamen statistischen Eigenschaften von Geschwindigkeitsinkrement und Energiedissipationsrate konnte zwar nicht mehr vollständig durchgeführt werden, erlaubt aber bereits jetzt interessante Aussagen über die gegenseitigen Abhängigkeiten des Geschwindigkeitsinkrements und der Energiedissipationsrate: Bei konstanter Energiedissipationsrate  $x$  beschreibt die Langevin-Gleichung, wie auch nach [78] erwartet werden konnte, einen normalverteilten Prozess für  $u(r)$ . Der deterministische Anteil der Gleichung für  $u(r)$  erweist sich in erster Näherung ausserdem als unabhängig von  $x$  und damit als identisch mit dem deterministischen Term der eindimensionalen Gleichung. Die Energiedissipationsrate beeinflusst im Prozess für  $u(r)$  also in der Tat nur den stochastischen Anteil. Dies führt auch dazu, dass der deterministische Anteil der Gleichung nach wie vor im Widerspruch zu den Kolmogorovschen Theorien steht.

Es zeichnet sich ausserdem ab, dass der deterministische Anteil der Entwicklungsgleichung für  $x(r)$  seinerseits nicht vom Geschwindigkeitsinkrement abhängt und auch hier  $u$  nur über den stochastischen Term in die Gleichung für  $x$  einkoppelt. Man erhält für  $u(r)$  und  $x(r)$  also ein System von zwei gekoppelten stochastischen Differentialgleichungen, wobei die beiden Variablen nur über die stochastischen Anteile der Gleichungen auf die Dynamik der jeweils anderen Variablen einwirken.

Die Markowanalyse der turbulenten Kaskade ist eine relativ junge Forschungsrichtung und es bleiben daher naturgemäss noch einige offene Fragen. Um die eindimensionale Analyse des Übergangs zu sehr hohen Reynoldszahlen zu komplettieren müsste zunächst ein automatisiertes Verfahren entwickelt werden das es erlaubt, die Koeffizienten  $\delta(r)$  und  $\beta(r)$ , den linearen bzw. quadratischen Term des Diffusionskoeffizienten, exakt zu bestimmen. Ein solches Verfahren könnte die aus der Fokker-Planck-Gleichung resultierenden Gleichungen für die Strukturfunktionen ausnutzen (vergleiche Kapitel 11.5), was gegenüber dem in dieser Arbeit verwendeten Verfahren (dem Vergleich der Lösungen der Fokker-Planck-Gleichung mit den experimentell bestimmten Dichten) auch mit einem sehr viel geringeren numerischen und zeitlichen Aufwand verbunden wäre.

Neben einer Ausweitung der Analyse auf einen grösseren Bereich von Reynoldszahlen müssten dann in einem weiteren Schritt auch Daten aus anderen experimentellen Systemen, wie insbesondere den Nachlaufströmungen von Gittern und Zylindern, untersucht werden. Solche Untersuchungen könnten klären, inwieweit die statistischen Eigenschaften der Turbulenz tatsächlich universell, d.h. unabhängig von den Randbedingungen der jeweiligen Strömung sind. Dieser Frage kommt neben ihrer grundlegenden physikalischen Aussage auch im Zusammenhang mit dem nu-

merischen Verfahren der large eddy simulation entscheidende Bedeutung zu. Um zu klären, welchen Einfluss der in [62] diskutierte Effekt der Instationarität hat, könnten auch Untersuchungen an Strömungen mit verschwindender mittlerer Geschwindigkeit wie dem in [75] untersuchten Experiment von Interesse sein.

Auch im Zusammenhang mit der zweidimensionalen Analyse der Kaskade konnten noch nicht alle Fragen abschliessend geklärt werden. Schwierigkeiten bereitet hier bereits die Frage nach der korrekten Bestimmung der Energiedissipationsrate aus experimentellen Daten, die hier nur angesprochen, nicht aber endgültig geklärt werden konnte. Festzuhalten ist dazu, dass zwar die Ergebnisse für die  $u$ -Komponenten  $D_u^{(1)}$  und  $D_{uu}^{(2)}$  von Driftvektor und Diffusionsmatrix kaum von der Bildung des Gradienten abhängen, sich für die  $x$ -Komponenten jedoch deutliche Unterschiede ergeben. Von dieser Unsicherheit ist insbesondere der Koeffizient  $D_{xx}^{(2)}$  betroffen. Ein weitergehender Vergleich der aus den Rohdaten bzw. den geglätteten Daten erhaltenen Ergebnisse könnte aber klären, ob zumindest über die funktionalen Abhängigkeiten dieses Koeffizienten von den Variablen  $u$ ,  $x$  und  $r$  sichere Aussagen gemacht werden können. Zu bemerken wäre an dieser Stelle auch noch, dass die aus einem eindimensionalen Schnitt durch ein turbulentes Geschwindigkeitsfeld mithilfe der Isotropieannahme berechnete Energiedissipationsrate nur eine grobe Näherung an die tatsächliche Rate darstellt. Es wäre daher zu überlegen, ob Untersuchungen zu den statistischen Eigenschaften von  $\epsilon$  nicht besser an Daten aus direkten numerischen Simulationen durchgeführt werden sollten. Eine weitere mögliche Erweiterung der Analysemethode könnte schliesslich als dritte Variable auch noch das transversale Geschwindigkeitsinkrement miteinbeziehen.

Trotz der angesprochenen offenen Fragen zeigen insbesondere die Ergebnisse der eindimensionalen Analyse des Geschwindigkeitsinkrements, dass die Markowanalyse durch die Einbeziehung der gemeinsamen statistischen Eigenschaften von Inkrementen auf verschiedenen Längenskalen Erkenntnisse über den stochastischen Prozess liefert, die über die Aussagen herkömmlicher Analysemethoden weit hinausgehen. Das Anwendungsgebiet der Markowanalyse bleibt allerdings nicht nur auf die voll entwickelte, homogene, isotrope und stationäre Turbulenz beschränkt. Untersuchungen von Windfeldern [17], der Randbereiche der Freistrahlsströmung [89] und dem Nahfeld der Zylindernachlaufströmung [64, 63] haben gezeigt, dass diese Analysemethode auch auf inhomogene Turbulenz anwendbar ist. Im Fall der Zylindernachlaufströmung konnte mit Hilfe dieser Methode eine äusserst exakte Charakterisierung des Übergangs von der inhomogenen in die homogene Turbulenz erzielt werden. Die Markowanalyse wurde aber auch auf Gebiete ausserhalb der Turbulenzforschung angewandt. Zu nennen wären hier die Charakterisierung rauher Oberflächen [42], die Analyse verrauschter chaotischer Systeme [101] sowie medizinischer Daten [102] und schliesslich die Untersuchung von Finanzmärkten [40, 93]. Dem letztgenannten Gebiet widmet sich auch der zweite Teil der vorliegenden Arbeit.

## Teil II

# Markowanalyse hochfrequenter Wechselkursdaten



# Kapitel 10

## Eine kurze Einführung in die Finanzdatenanalyse

Nicht erst seit den jüngsten schweren Turbulenzen am Neuen Markt sondern seit bereits über hundert Jahren versuchen Wissenschaftler, die irregulären Fluktuationen von wirtschaftlichen Kenndaten wie Aktienkursen, Aktienindizes oder Wechselkursen zu quantifizieren und die Risiken von Kursschwankungen abzuschätzen. Ein prominenter Ansatz hierzu stammt von L. Bachelier, der im Jahr 1900 ein mathematisches Modell für die zeitliche Entwicklung von Aktien- und Wechselkursen vorstellte, das erst fünf Jahre später unter dem Begriff der Brownschen Bewegung bzw. des random walk als Modell für die Bewegung eines diffundierenden Teilchens auch in die Physik eingeführt wurde [9].

Das Modell einer einfachen Brownschen Bewegung für Kursverläufe hat eine weite Verbreitung in der Finanzmathematik gefunden und bildet auch heutzutage noch die Grundlage für wichtige Modelle wie insbesondere die bekannte Black-Scholes-Gleichung zur Berechnung des Preises von Optionen [16]. Dieses Modell erfasst allerdings eine wichtige Eigenschaft empirischer Daten nicht: Wie auch in der Turbulenz findet man auf kleinen Skalen (in diesem Fall natürlich Zeitskalen) eine im Vergleich zur Gaußschen Verteilung unerwartet hohe Wahrscheinlichkeit für betragsmässig sehr grosse Kursschwankungen.

Diese Diskrepanz hat zur Entwicklung alternativer Modell für Kursentwicklungen geführt. Ohne an dieser Stelle ins Detail zu gehen, seien mit den ARCH- (autoregressive conditional heteroskedasticity) [35, 18, 19] und SV- (stochastic volatility) Modellen [109, 46, 43] die beiden wichtigsten Richtungen erwähnt. Eine Übersicht über die gängigsten Modelle der Finanzmathematik und ihrer Anwendung in der Bewertung von Finanzderivaten bieten die Bücher von Hull [53] und Shiryaev [100].

In den letzten Jahren beschäftigen sich in stark zunehmendem Masse auch Physiker mit der Modellierung ökonomischer Systeme und der statistischen Analyse empirischer Marktdaten. Auf dem Gebiet der Modellierung unterscheidet sich der Ansatz der sog. Ökonophysik insbesondere durch die Einbeziehung dynamischer Aspekte von den traditionellen Gleichgewichtsmodellen der Wirtschaftsmathematik [25]. Die typischerweise diskutierten Marktmodelle gehen dabei von einer gewissen Anzahl von Händlern („Agenten“) aus, die in bestimmter Weise auf die aktuelle Kursent-

wicklung und das Verhalten ihrer Nachbarn reagieren. Diese aus der statistischen Physik entlehnten Perkulationsmodelle beschreiben unter bereits recht einfachen Annahmen für die Interaktion zwischen den Agenten die meisten der in tatsächlichen Märkten beobachteten Phänomene zumindest qualitativ richtig [29, 105].

Auch die statistische Analyse empirischer Daten hat in den zurückliegenden Jahren einen beträchtlichen Aufschwung erfahren. Diese Entwicklung wurde nicht zuletzt durch die rasante Entwicklung der Computertechnik begünstigt, die eine immer größere Menge von Daten handhabbar werden läßt. Während die traditionelle Finanzmathematik eher den Ansatz verfolgt, die verschiedenen Vorhersagen von Modellen (wie den oben erwähnten ARCH- und SV-Modellen) im Nachhinein an realen Daten zu validieren, ist es das Anliegen der Ökonophysik, Informationen über den stochastischen Prozess aus der Datenanalyse zu gewinnen [104]. Eine Übersicht über die aktuellen Entwicklungen auf dem Gebiet der Ökonophysik findet sich in [70, 112, 100].

Die im Folgenden vorgestellten Analysen bauen auf der erstmals in [45] vorgeschlagenen Analogie zwischen Finanzmärkten und voll entwickelter Turbulenz auf. In [45] wurden die statistischen Eigenschaften des Wechselkurses US-Dollar / Deutsche Mark, im folgenden mit  $y(t)$  bezeichnet, analog zur Turbulenz mithilfe des Preisinkrements  $x(\tau)$  untersucht:

$$x(\tau) = y(t + \tau) - y(t). \quad (10.1)$$

Auch wenn es in der Finanzmathematik üblicher ist, an dieser Stelle die sog. Renditen (*returns*), also das Verhältnis von  $y(t + \tau)$  zu  $y(t)$ , bzw. die logarithmischen returns zu verwenden, wird auch in der vorliegenden Arbeit das Preisinkrement verwendet. Zum einen enthalten Inkrement und return dieselbe Information, zum anderen ermöglicht die Verwendung des Inkrements den direkten Vergleich mit den Ergebnissen der analogen Analyse turbulenter Daten.

In [45] wurde eine solche vergleichende Analyse des Preisinkrements durch eine Charakterisierung seiner Wahrscheinlichkeitsdichten  $p(x, \tau)$  im Rahmen der Castaing'schen Turbulenztheorie vorgenommen. Wie auch im Fall der Turbulenz zeigen diese Dichten vor allem für kleine Zeitskalen  $\tau$  signifikante Abweichungen von der Gauß'schen Form und weisen stark ausgeprägte Flügel auf (siehe Abbildung 11.15). Es stellte sich heraus, dass die Dichten des Preisinkrements in guter Näherung durch den Castaingfit (3.55) beschrieben werden können, und dass zudem der Formfaktor  $\lambda^2(\tau)$  den vom Kolmogorov'schen Turbulenzmodell geforderten linearen Verlauf in  $\ln(\tau)$  aufweist.

Basierend auf diesem Ergebnis wurde postuliert, dass auch Finanzmärkte von kaskadenartigen Prozessen dominiert werden, wobei die turbulente Energiekaskade durch eine kaskadenartige Verbreitung von Informationen im Markt ersetzt wurde. Diese Analogie hat viele weitere Arbeiten initiiert, so etwa [7, 98, 21, 76], wurde aber auch als zu oberflächlich kritisiert [69, 70]. Es sei noch erwähnt, dass auch gegen diese Kritik wiederum Einwände vorgebracht wurden [76].

Um eine vollständige Charakterisierung des stochastischen Prozesses für das Preisinkrement  $x(\tau)$  zu erreichen und damit auch eine tiefgehende Aussage über die eventuellen Analogien zwischen voll entwickelter Turbulenz und Finanzmärkten zu

erhalten, werden im folgenden die Ergebnisse einer Markowanalyse des auch in [45] untersuchten Datensatzes vorgestellt. Es handelt sich hierbei um  $1,4 \cdot 10^6$  Notierungen des Wechselkurses des US-Dollars gegenüber der deutschen Mark aus dem Zeitraum vom 01. Oktober 1992 bis zum 30. September 1993. Diese Daten liegen in unregelmässigen Zeitabständen vor, wobei der mittlere Abstand in etwa 20 Sekunden beträgt, der kleinste Zeitschritt zwei Sekunden sind und die längsten Unterbrechungen von etwa zwei Tagen naturgemäss an den Wochenenden auftreten (unter der Woche treten, da die beiden Währungen an Börsen in aller Welt gehandelt werden bzw. wurden, keine längeren Unterbrechungen auf). Die Zeitschritte sind über das gesamte Jahr durchlaufend in Sekunden angegeben. Das Preisinkrement  $x(\tau)$  wurde zu einem bestimmten Zeitpunkt  $t$  nur dann berechnet, wenn sowohl zum Zeitpunkt  $t$  als auch bei  $t + \tau$  tatsächlich auch Notierungen des Kurses vorlagen.

Im folgenden Kapitel 11 werden die Ergebnisse der Markowanalyse dieses Datensatzes vorgestellt und vor dem Hintergrund der postulierten Analogie zur Turbulenz sowie einigen weiteren derzeit diskutierten Ansätzen interpretiert. Wie auch schon bei der Analyse der turbulenten Kaskade wurde der Prozess hierbei von grossen Skalen  $\tau$ , auf denen die Dichten näherungsweise Gaußförmig sind, hin zu kleineren Skalen durchgeführt. Um künftige Kursrisiken aus dem bisherigen Verlauf abschätzen zu können, ist diese Richtung des Prozesses allerdings nicht geeignet. In Kapitel 12 werden daher kurz auch die Ergebnisse einer Markowanalyse in umgekehrter Prozessrichtung, d.h. von kleinen hin zu grösseren Skalen, diskutiert. Eine Zusammenfassung der erhaltenen Ergebnisse und ein Ausblick auf mögliche Erweiterungen der Analysen werden den zweiten Teil dieser Arbeit dann beschliessen.



# Kapitel 11

## Markowanalyse der Daten

### 11.1 Vorbereitende Analysen

Das Frequenzspektrum der Daten ist oberhalb einer bestimmten Frequenz (ab ca.  $10^{-2} Hz$ ) in etwa konstant (siehe Abbildung 11.1). Eine solche Form des Spektrums deutet darauf hin, dass die Wechselkursdaten  $y(t)$  bei hohen Frequenzen von additivem weissen Rauschen dominiert werden, vergleichbar etwa dem Messrauschen, das bei jeder physikalischen Messung auftritt. Die Zeitserie  $y(t)$  liesse sich demnach als Summe des „tatsächlichen“ Signals  $s(t)$  und eines additiven Rauschens  $n(t)$  darstellen:

$$y(t) = s(t) + n(t). \quad (11.1)$$

Es sei darauf hingewiesen, dass das nach (11.1) angenommene additive Rauschen  $n(t)$  sich fundamental von dem dynamischen Rauschen  $\Gamma$  der Langevin-Gleichung (4.15) unterscheidet. Letzteres koppelt über den Diffusionkoeffizienten  $D^{(2)}$  direkt in die Dynamik des Prozesses ein, während das additive Rauschen  $n(t)$  zwar die Messdaten verfälscht, auf die Dynamik des Systems bzw. des Kursverlaufs  $s(t)$  jedoch keinen Einfluss hat.

Wie in Kapitel 11.3 gezeigt werden wird, verursacht ein solches additives unkorreliertes Rauschen erhebliche Probleme bei der Bestimmung der Kramers-Moyal-Koeffizienten. Um diese Probleme zu vermeiden, wurden die Daten geglättet. Jeder Wert  $y(t)$  wurde dabei durch einen gewichtete Mittelwerte seiner selbst und seiner Umgebung ersetzt, wobei die Daten in der Umgebung von  $y(t)$  mit einer bei  $t$  zentrierten Gaußverteilung mit einer Standardabweichung von  $44s$  gewichtet wurden (die Breite des Filters von  $44s$  entspricht etwa dem doppelten mittleren Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Notierungen des Kurses).

Abbildung 11.2 zeigt das Ergebnis  $s(t)$  dieser Glättung im Vergleich zu den ursprünglichen Daten  $y(t)$ . Nach Gleichung (11.1) sollte es möglich sein, aus diesen beiden Zeitserien das additive Rauschen  $n(t)$  zu extrahieren. Stimmt die Annahme, dass es sich hierbei um unkorreliertes additives Rauschen handelt, müsste der Mittelwert  $\langle n(t) \rangle$  Null sein und  $n(t)$  müsste  $\delta$ -korreliert sowie statistisch unabhängig von  $s(t)$  sein.

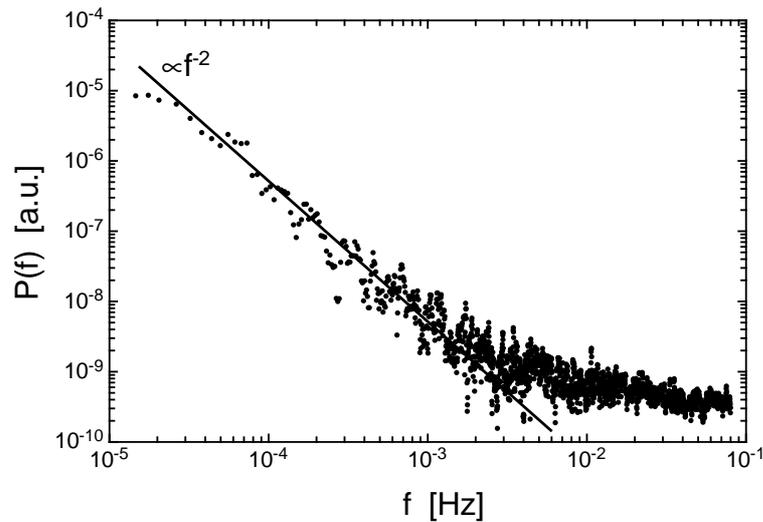


Abbildung 11.1: Das Frequenzspektrum der Wechselkursdaten  $y(t)$ . Über einen weiten Bereich von Frequenzen fällt es mit etwa  $f^{-2}$  ab, oberhalb von  $f \approx 10^{-2}$  wird es von weißem Rauschen dominiert.

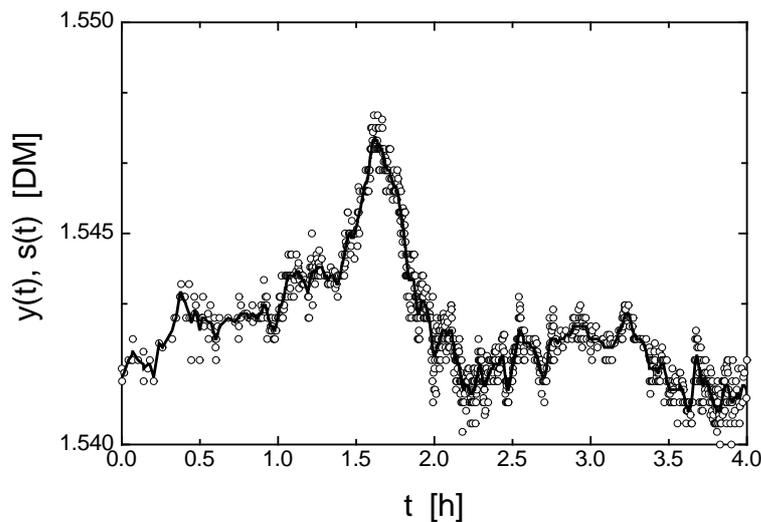


Abbildung 11.2: Ausschnitte der ursprünglichen Zeitserie  $y(t)$  (Kreise) und der geglätteten Daten  $s(t)$  (durchgezogene Linie).

Der Mittelwert  $\langle n(t) \rangle$  der nach (11.1) extrahierten Daten ist um den Faktor  $8 \cdot 10^{-5}$  kleiner als die Standardabweichung  $\sigma_n$  von  $n(t)$ . Dieses Ergebnis rechtfertigt die Annahme, dass der Mittelwert von  $n(t)$  Null ist. Die Autokorrelationsfunktion  $R_n(t)$  fällt innerhalb von zwei Sekunden von 1 auf 0,08 ab, siehe Abbildung 11.3. Verglichen mit der zeitlichen Auflösung der Daten ist das in der Tat ein annähernd  $\delta$ -förmiger Abfall: die kleinste Zeitspanne zwischen zwei aufeinander folgenden Notierungen ist zwei Sekunden. Allerdings hat die Autokorrelationsfunktion im weiteren Verlauf bis noch etwa  $\tau \leq 2 \text{ min}$  zwar kleine, aber dennoch deutlich von Null

verschiedene Werte. In diesem Bereich ist die Rekonstruktion des „wahren“ Signals  $s(t)$  durch die geglätteten Daten unzureichend. Die folgenden Analysen des Preisinkrements werden daher auf Zeitskalen  $\tau$  und  $\Delta\tau$  beschränkt, die grösser sind als eine bestimmte Schrittweite  $\tau_{min}$ . Das in Abbildung 11.3 gezeigte Ergebnisse für die Autokorrelationsfunktion  $R_n(t)$  legt hierfür die Wahl  $\tau_{min} = 4min$  nahe. In Einheiten von  $\tau_{min}$  kann  $n(t)$  als  $\delta$ -korreliert angenommen werden.

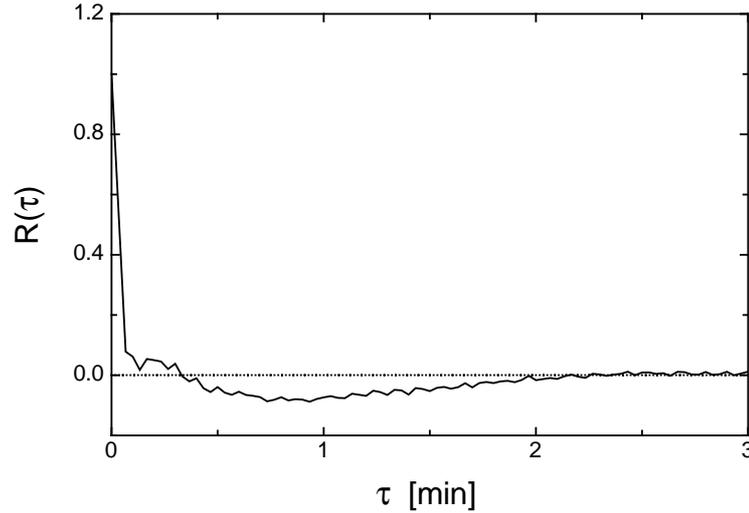


Abbildung 11.3: Die Autokorrelationsfunktion  $R_n(t)$  des nach Gleichung (11.1) aus den ursprünglichen Wechselkursdaten  $y(t)$  und den geglätteten Daten  $s(t)$  berechneten Rauschens  $n(t)$ .

Die dritte zu überprüfende Eigenschaft des Rauschens ist seine statistische Unabhängigkeit vom geglätteten Signal  $s(t)$ . Diese beiden stochastischen Variablen sind statistisch unabhängig, wenn ihre gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte  $p(s(t), n(t))$  faktorisiert bzw. die bedingte Dichte  $p(s(t)|n(t))$  nicht von  $n(t)$  abhängt:

$$\begin{aligned} p(s(t), n(t)) &= p(s(t)) p(n(t)) \\ \leftrightarrow p(s(t)|n(t)) &= \frac{p(s(t), n(t))}{p(n(t))} = p(s(t)) . \end{aligned} \quad (11.2)$$

Die aus den Daten bestimmte bedingte Dichte  $p(s(t)|n(t))$  ist in Abbildung 11.4 für mehrere Werte von  $n$  mit der (unbedingten) Dichte  $p(s(t))$  verglichen. Für variierende  $n$  zeigen sich zwischen den bedingten Dichten und  $p(s(t))$  keine systematischen Abweichungen, Gleichung (11.2) kann daher als erfüllt angesehen werden.

Dass der Einfluss des additiven Rauschens  $n(t)$  tatsächlich auf kleine Skalen  $\tau$  beschränkt ist, zeigt ein Vergleich der Wahrscheinlichkeitsdichten des aus den ursprünglichen bzw. den geglätteten Daten berechneten Preisinkrements  $x(\tau)$  (Abbildung 11.5). Auf Skalen  $\tau$  grösser als  $\tau = 2\tau_{min}$  sind die Dichten des aus  $y(t)$  bzw.  $s(t)$  berechneten Inkrements praktisch identisch.

Im folgenden werden Preisinkremente, soweit nicht ausdrücklich gegenteiliges erwähnt ist, ausschliesslich aus den geglätteten Daten  $s(t)$  berechnet.

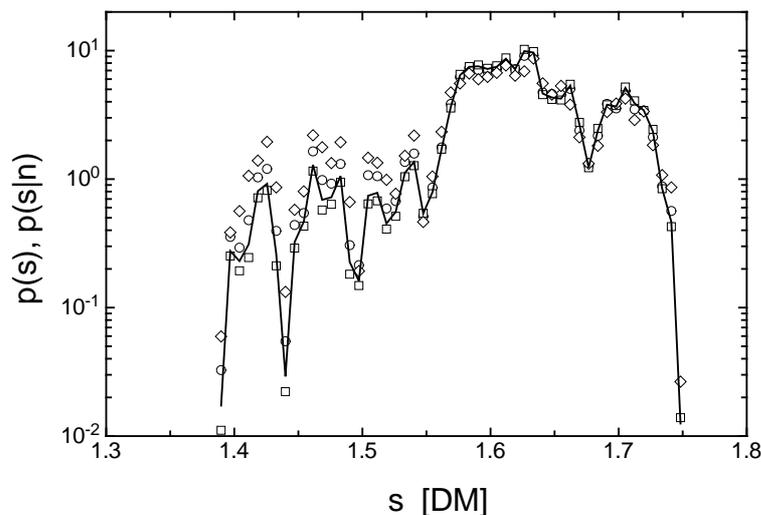


Abbildung 11.4: Vergleich der bedingten Dichten  $p(s(t)|n(t))$  (offene Symbole) mit der Wahrscheinlichkeitsdichte  $p(s(t))$  des geglätteten Signals (durchgezogene Linie). Es zeigen sich keine systematischen Abweichungen zwischen bedingten und unbedingter Verteilung. Die bedingten Dichte sind gezeigt für:  $n = -2\sigma_n$  (Kreise),  $n = 0$  (Quadrate) und  $n = +3\sigma$  (Rauten).

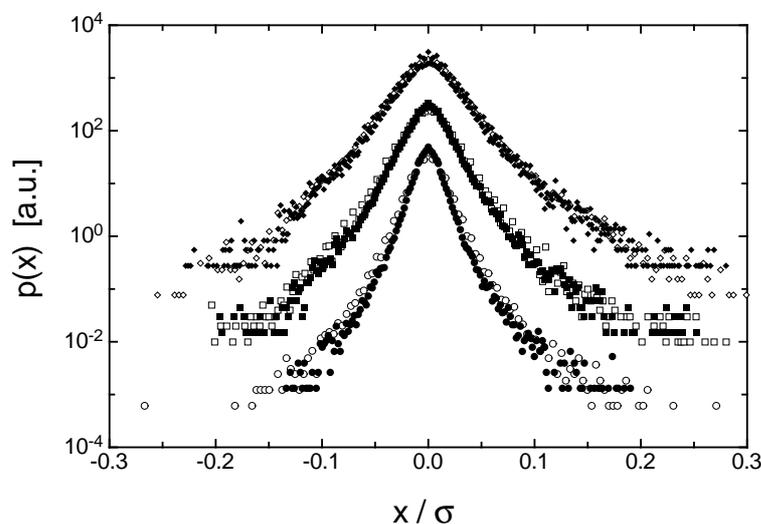


Abbildung 11.5: Die Wahrscheinlichkeitsdichten des Preisinkrements  $x(\tau)$  auf den Skalen  $\tau = 4\text{min}$ ,  $8\text{min}$  und  $15\text{min}$  (von unten nach oben). Das Preisinkrement wurde sowohl aus den ursprünglichen Wechselkursdaten  $y(t)$  (offene Symbole) als auch aus den geglätteten Daten  $s(t)$  (volle Symbole) berechnet. Die Dichten wurden der Übersichtlichkeit halber in vertikaler Richtung gegeneinander verschoben. Das Preisinkrement ist in Einheiten der Standardabweichung  $\sigma$  der Zeitserie  $y(t)$  angegeben.

## 11.2 Markoweigenschaften

Die Bedingung (4.2) für die Markoweigenschaft des Preisinkrements kann, wie auch schon im Fall der voll entwickelten Turbulenz, lediglich für den Spezialfall  $N = 3$  untersucht werden:

$$p(x_1, \tau_1 | x_2, \tau_2; x_3, \tau_3) = p(x_1, \tau_1 | x_2, \tau_2). \quad (11.3)$$

Abbildung 11.6 zeigt einen Vergleich der einfach- und zweifach bedingten Wahrscheinlichkeitsdichte für die Skalen  $\tau_1 = \tau_{min} = 4min$ ,  $\tau_2 = 2\tau_{min}$  und  $\tau_3 = 3\tau_{min}$ . Für diese Kombination von Skalen  $\tau_i$  zeigt sich eine gute Übereinstimmung zwischen den Dichten.

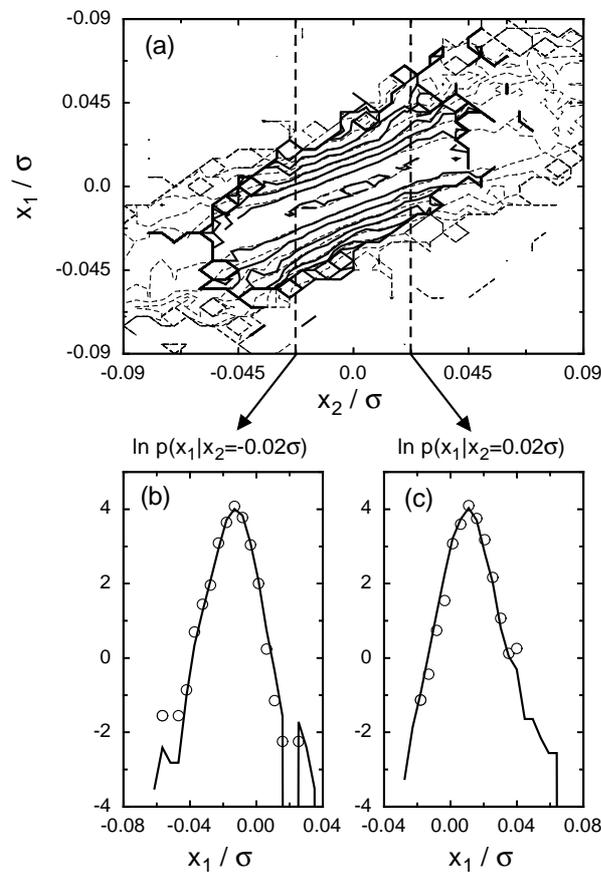


Abbildung 11.6: (a): Konturliniendarstellung der bedingten Dichte  $p(x_1, \tau_1 | x_2, \tau_2)$  (durchbrochene Linien) und  $p(x_1, \tau_1 | x_2, \tau_2; x_3 = 0, \tau_3)$  (durchgezogene Linien) für  $\tau_1 = \tau_{min} = 4min$ ,  $\tau_2 = 2\tau_{min}$  und  $\tau_3 = 3\tau_{min}$ . (b) und (c): Schnitte durch die bedingten Dichten für  $x_2 = \pm 0,02\sigma$ . Symbole: zweifach bedingte Dichte, durchgezogene Linie: einfach bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte.

Ähnlich gute Übereinstimmungen finden sich auch für andere Kombinationen von Skalen  $\tau_i$  mit  $\tau_{min} \leq \tau_1 \leq 2h$  und Werten von  $\Delta\tau = \tau_2 - \tau_1 = \tau_3 - \tau_2$  zwischen

$\tau_{min}$  und  $3\tau_{min}$ . Das ist in Abbildung 11.7 exemplarisch für eine weitere Kombination von Skalen gezeigt:  $\tau_1 = 1h$ ,  $\tau_2 = \tau_1 + \tau_{min}$  und  $\tau_3 = \tau_1 + 2\tau_{min}$ .

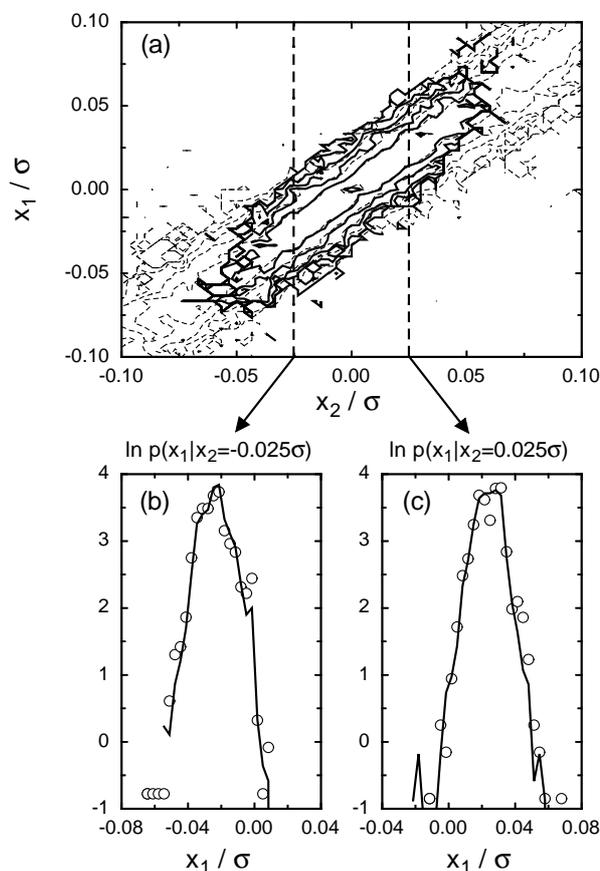


Abbildung 11.7: (a): Konturliniendarstellung der bedingten Dichte  $p(x_1, \tau_1 | x_2, \tau_2)$  (durchbrochene Linien) und  $p(x_1, \tau_1 | x_2, \tau_2; x_3 = 0, \tau_3)$  (durchgezogene Linien) für  $\tau_1 = 1h$ ,  $\tau_2 = \tau_1 + \tau_{min}$  und  $\tau_3 = \tau_1 + 2\tau_{min}$ .

(b) und (c): Schnitte durch die bedingten Dichten für  $x_2 = \pm 0,025\sigma$ . Symbole: zweifach bedingte Dichte, durchgezogene Linie: einfach bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte.

Aufgrund dieser Ergebnisse wird im folgenden davon ausgegangen werden, dass das Preisinkrement  $x$  in der Skala  $\tau$  einem Markowprozess gehorcht.

### 11.3 Die Kramers-Moyal Koeffizienten

Die Gültigkeit der Markoweigenschaften vorausgesetzt, kann man die Entwicklungskoeffizienten  $D^{(k)}(x, \tau)$  über den Grenzübergang  $\Delta\tau \rightarrow 0$  aus den bedingten Momenten  $M^{(k)}(x, \tau, \Delta\tau)$  bestimmen. In Abbildung 11.8 ist der nach der Entwicklungsgleichung (4.13) korrigierte Koeffizient  $M_{korr}^{(2)}$  zu jeweils festen Werten von  $x$  und  $\tau$  als Funktion von  $\Delta\tau$  aufgetragen (vergleiche auch Kapitel 6.3). Über das gesamte Intervall  $\tau_{min} \leq \Delta\tau \leq 2\tau_{min}$  lässt sich  $M_{korr}^{(2)}$  durch das nach der Entwicklungsgleichung zu

erwartende Polynom zweiten Grades mit verschwindendem linearen Term darstellen. Abweichungen davon zeigen sich nur für Werte von  $\Delta\tau$  kleiner als  $0,5\tau_{min} = 2min$ . Im Vergleich mit Abbildung 11.3 fällt auf, dass dies exakt der Bereich von Skalen ist, in dem die Autokorrelationsfunktion des extrahierten additiven Rauschens von Null verschiedene Werte annimmt. Der Bereich von Skalen, in dem die Rekonstruktion des unverrauschten Signals durch die Glättung des ursprünglichen Datensatzes unzulänglich wird, entspricht also exakt dem Bereich, in dem der Koeffizient  $M_{korr}^{(2)}$  von dem erwarteten Verhalten abweicht. Das legt die Vermutung nahe, dass die in Abb. 11.8 beobachteten Abweichungen vom Idealverhalten bei ebendiesen Skalen auf die Unzulänglichkeiten der Rekonstruktion des unverrauschten Signals  $s(t)$  zurückzuführen ist. Bei den Fits zur Extrapolation der aus den Daten bestimmten Koeffizienten  $M^{(k)}$  wurde der Bereich  $0 < \Delta\tau \leq \tau_{min}$  daher nicht berücksichtigt.

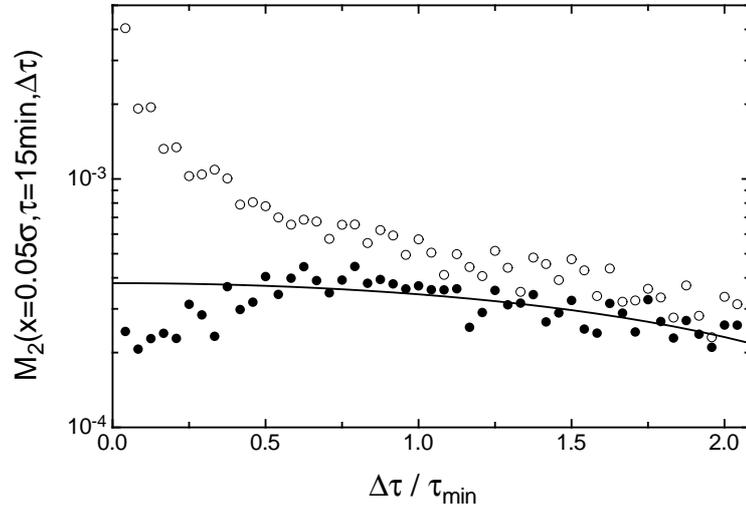


Abbildung 11.8: Der korrigierte Koeffizient  $M_{korr}^{(2)}(x, \tau, \Delta\tau)$  als Funktion von  $\Delta\tau$  für  $x = 0,05\sigma$  und  $\tau = 15min$  (volle Kreise). Für  $\Delta\tau \geq \tau_{min}$  lässt sich der korrigierte Koeffizient durch das nach der Entwicklungsgleichung (4.13) zu erwartende Polynom zweiten Grades mit verschwindendem linearen Term beschreiben (durchgezogene Linie). Die offenen Kreise sind die Ergebnisse für  $M_{y,korr}^{(2)}$ , die man zu denselben Werten von  $x$  und  $\tau$  erhält, wenn man anstelle der geglätteten Daten  $s(t)$  die ursprüngliche Zeitserie  $y(t)$  verwendet.

In Abbildung 11.8 ist zusätzlich der Koeffizient  $M_{y,korr}^{(2)}$  gezeigt. Zu seiner Berechnung wurde anstelle des geglätteten Datensatzes  $s(t)$  die ursprüngliche Zeitserie  $y(t)$  verwendet. In diesem Fall divergieren die Werte von  $M^{(2)}$  im Limes  $\Delta\tau \rightarrow 0$ , eine Bestimmung des Grenzwertes  $D^{(2)}$  ist daher hier nicht möglich. Das divergierende Verhalten des Koeffizienten  $M_{y,korr}^{(2)}$  kann leicht verstanden werden, wenn man annimmt, dass sich  $y(t)$  nach Gleichung (11.1) aus dem „eigentlichen“ Signal  $s(t)$  und additivem, unkorrelierten Rauschen  $n(t)$  zusammensetzt. In diesem Fall nämlich erhält man für das zweite Moment des Preisinkrements:

$$\langle (y(t+\tau) - y(t))^2 \rangle = \langle (s(t+\tau) + n(t+\tau) - s(t) - n(t))^2 \rangle$$

$$= \langle (s(t + \tau) - s(t))^2 \rangle + 2 \langle n^2 \rangle. \quad (11.4)$$

Aufgrund des additiven Rauschens erhält man also den zusätzlichen, von  $\tau$  unabhängigen, Term  $2 \langle n^2 \rangle$ . Da die Koeffizienten  $M^{(k)}$  nichts anderes als bedingte Momente des Preisinkrements sind, treten auch dort ähnliche Terme auf. Dividiert man diese konstanten Terme nach Gleichung (4.6) durch  $\Delta\tau$ , so erhält man das in Abbildung 11.8 beobachtete divergierende Verhalten von  $M_y^{(2)}$  für  $\Delta\tau \rightarrow 0$ .

Benutzt man die geglätteten Daten  $s(t)$  zur Berechnung der Koeffizienten, so kann  $D^{(1)}$  durch lineare und  $D^{(2)}$  durch quadratische Extrapolation aus den  $M^{(k)}$  bestimmt werden. In Abbildung 11.9 ist das Ergebnis dieser Extrapolationsmethoden für die Koeffizienten  $D^{(1)}(x, \tau)$  und  $D^{(2)}(x, \tau)$  für verschiedene Skalen  $\tau$  als Funktion des Preisinkrements  $x$  gezeigt. Wie auch schon im Fall der voll entwickelten Turbulenz zeigen beide Koeffizienten einfache Abhängigkeiten vom Inkrement  $x$ :  $D^{(1)}$  lässt sich in guter Näherung durch eine Ursprungsgerade beschreiben,  $D^{(2)}$  durch ein Polynom zweiten Grades in  $x$ . Im Gegensatz zum Fall der Turbulenzdaten jedoch zeigt  $D^{(2)}$  keine Asymmetrie in  $x$ , der lineare Term verschwindet offensichtlich:

$$\begin{aligned} D^{(1)}(x, \tau) &= -\gamma(\tau)x, \\ D^{(2)}(x, \tau) &= \alpha(\tau) + \beta(\tau)x^2. \end{aligned} \quad (11.5)$$

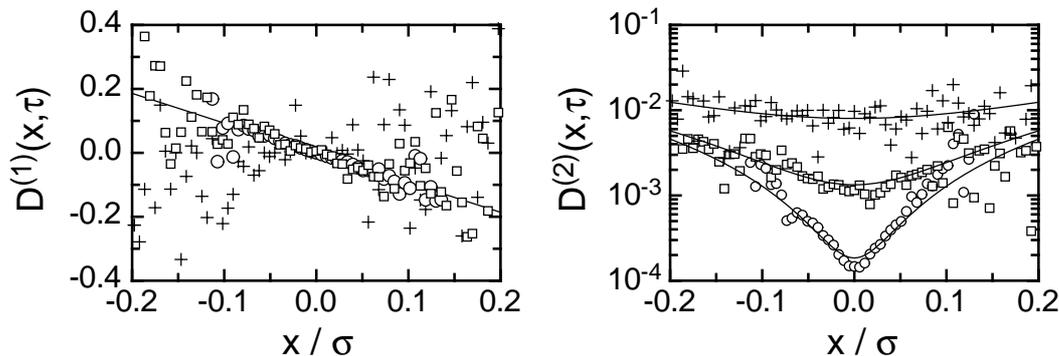


Abbildung 11.9: Die Koeffizienten  $D^{(1)}$  (a) und  $D^{(2)}$  (b) als Funktionen des Preisinkrements  $x$  auf den Skalen  $\tau = 15\text{min}$  (Kreise),  $\tau = 2\text{h}$  (Quadrate) und  $\tau = 12$  (Kreuze). Die durchgezogenen Linien geben die Ergebnisse der in Kapitel 11.5 beschriebenen Methode wieder.

Die Koeffizienten  $D^{(1)}$  und  $D^{(2)}$  lassen sich allerdings nur für Skalen  $\tau \leq 2\text{h}$  direkt aus den Daten bestimmen. Auf grösseren Skalen werden nicht mehr genug unabhängige Ereignisse gemessen, um die Koeffizienten sicher bestimmen zu können. Das kann man sich verdeutlichen, wenn man bedenkt, dass es innerhalb eines Jahres (der Länge des hier untersuchten Datensatzes), nur  $365 \times 2$  überlappungsfreie Intervalle der Länge  $12\text{h}$  gibt, also auch nur etwa 700 unabhängige Ereignisse auf dieser Skala. Bedingte Erwartungswerte, zumal solche der Ordnung zwei und höher, können mit einer solch niedrigen Anzahl von Ereignissen natürlich nicht zuverlässig bestimmt werden, wie in Abbildung 11.9 für  $\tau = 12\text{h}$  gezeigt.

Es kann aber auf jeden Fall festgehalten werden, dass sich die Abhängigkeit der Koeffizienten  $D^{(1)}$  und  $D^{(2)}$  vom Preisinkrement  $x$  für Skalen  $\tau$  unterhalb von zwei Stunden in guter Näherung durch lineare bzw. quadratische Funktionen in  $x$  mit skalenabhängigen Koeffizienten beschreiben lassen.

## 11.4 Der Koeffizient vierter Ordnung

Der nächste Schritt bei der Markowanalyse besteht wiederum darin, den Koeffizienten vierter Ordnung  $D^{(4)}(x, \tau)$  abzuschätzen. Verschwindet er, so bricht die Kramers–Moyal–Entwicklung nach dem zweiten Glied ab und die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsdichte  $p(x, \tau)$  wird durch die Fokker–Planck–Gleichung beschrieben.

Abbildung 11.10 zeigt das bedingte Moment  $M^{(4)}(x, \tau, \Delta\tau)$  für  $\tau = 15\text{min}$  und  $x = 0,05\sigma$ . Wie auch schon im Fall der voll entwickelten Turbulenz fällt  $M^{(4)}$ , im Gegensatz zu den Koeffizienten erster und zweiter Ordnung, bei Annäherung an  $\Delta\tau = 0$  stark ab: Über das Intervall  $2\tau_{\min} \geq \Delta\tau \geq \tau_{\min}$  verringert sich der Wert von  $M^{(4)}$  um etwa die Hälfte. Das ist ein erster Hinweis darauf, dass  $M^{(4)}$  im Grenzübergang  $\Delta\tau \rightarrow 0$  verschwinden könnte.

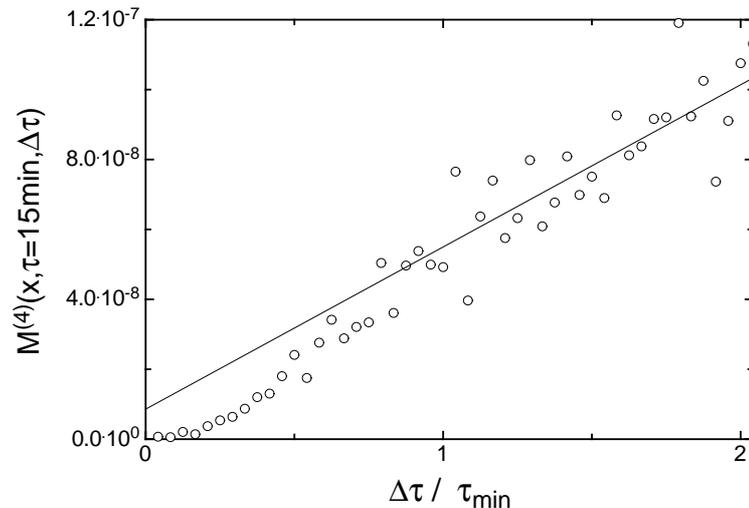


Abbildung 11.10: Der Koeffizient  $M^{(4)}(x, \tau, \Delta\tau)$  als Funktion von  $\Delta\tau$  für  $\tau = 15\text{min}$  und  $x = 0,05\sigma$  (Kreise). Die durchgezogene Linie entspricht einem linearen Fit an die Daten im Intervall  $\tau_{\min} \leq \Delta\tau \leq 2\tau_{\min}$ . Der dadurch erhaltene Wert für  $D^{(4)}(x = 0,05\sigma, \tau = 15\text{min})$  beträgt  $(0,9 \pm 1,0)10^{-8}$ .

Fittet man Polynome verschiedener Ordnungen an die Daten im Intervall  $\tau_{\min} \leq \Delta\tau \leq 2\tau_{\min}$ , so erhält man für  $D^{(4)}$  bereits bei linearer Extrapolation sowohl positive als auch negative Werte (siehe Abbildung 11.11). Da  $D^{(4)}$  per Definition aber eine positive Größe ist, ist dies ein starker Hinweis darauf, dass dieser Koeffizient verschwindet.

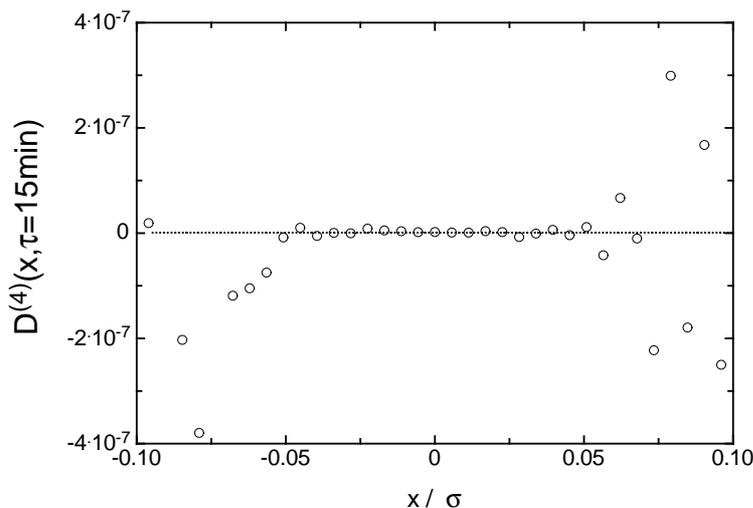


Abbildung 11.11: Das Ergebnis der linearen Extrapolationsmethode für  $D^{(4)}$  auf der Skala  $\tau = 15 \text{ min}$ . Man erhält sowohl positive als auch negative Werte für  $D^{(4)}$ .

Ähnliche Ergebnisse für  $D^{(4)}$  erhält man auch auf anderen Skalen. Aufgrund dieser Ergebnisse wird für die folgenden Analysen davon ausgegangen, dass der Koeffizient vierter Ordnung Null ist und sich die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsdichten in der Skala  $\tau$  durch die Fokker-Planck-Gleichung beschreiben lässt.

## 11.5 Ein alternativer Ansatz zur Bestimmung der Koeffizienten

Die Analyse der direkt aus den Daten bestimmten Koeffizienten  $M^{(k)}$  deutet darauf hin, dass sich die Statistik des Preisinkrements  $x$  auf der Zeitskala  $\tau$  durch eine Fokker-Planck-Gleichung mit Drift- und Diffusionskoeffizienten gemäss Gleichung (11.5) beschreiben lassen. Aufgrund der beschränkten Länge des untersuchten Datensatzes ist es allerdings nicht möglich, definitive Aussagen über die Skalenabhängigkeit der Koeffizienten  $\gamma(\tau)$ ,  $\alpha(\tau)$  und  $\beta(\tau)$  zu machen. Abschätzungen für deren Werte können aber aus den Gleichungen für die Momente des Preisinkrements gewonnen werden.

Die Steigung  $\gamma(\tau)$  von  $D^{(1)}$  etwa kann aus der Gleichung für das bedingte erste Moment  $Z^1(\tau)$ ,

$$Z^1(\tau) = \langle x(\tau) | x_0(\tau_0) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x, \tau | x_0, \tau_0) dx, \quad (11.6)$$

abgeschätzt werden. Multipliziert man die Fokker-Planck-Gleichung (4.7) für die bedingten Dichten  $p(x, \tau | x_0, \tau_0)$  mit  $x$ , integriert über  $x$  und benutzt schliesslich das Ergebnis  $D^{(1)}(x, \tau) = -\gamma(\tau)x$  für den Driftkoeffizienten, so erhält man die folgende

Gleichung für  $Z^1(\tau)$ :

$$-\tau \frac{\partial}{\partial \tau} Z^1(\tau) = -\gamma(\tau) Z^1(\tau). \quad (11.7)$$

Bei der Herleitung dieser Gleichung wurde neben der Gültigkeit der Fokker-Planck-Gleichung nur die Annahme benutzt, dass  $D^2(x, \tau)p(x, \tau|x_0, \tau_0)$  für  $x \rightarrow \pm\infty$  gegen Null geht.

Mit der Anfangsbedingung  $Z^1(\tau_0) = \langle x(\tau = \tau_0)|x_0(\tau_0) \rangle = x_0$  lautet die Lösung der Gleichung (11.7):

$$Z^1(\tau) = x_0 \exp \left\{ \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{\gamma(\tau')}{\tau'} d\tau' \right\}. \quad (11.8)$$

Diese Gleichung hat eine zweifache Bedeutung: Folgt das gemessene bedingte erste Moment tatsächlich dieser Vorhersage, so kann das als starker Hinweis auf die Gültigkeit der der Herleitung von (11.8) zugrunde liegenden Annahmen (Gültigkeit der Fokker-Planck-Gleichung und lineare Abhängigkeit des Driftkoeffizienten von  $x$ ) gewertet werden. Andererseits kann der einfache Zusammenhang (11.8), vorausgesetzt er beschreibt  $Z^1(\tau)$  korrekt, auch dazu benutzt werden, die Funktion  $\gamma(\tau)$  zu bestimmen.

Abbildung 11.12 zeigt den aus den Daten bestimmten bedingten Erwartungswert  $Z^1(\tau)$  als Funktion von  $\tau$  für verschiedene Werte von  $x_0$  für  $\tau_0 = 2h$ . Tatsächlich ist, wie nach Gleichung (11.8) zu erwarten,  $Z^1(\tau)/x_0$  eine universelle Funktion des Verhältnisses  $\tau/\tau_0$ , also unabhängig von  $x_0$  und  $\tau_0$ .

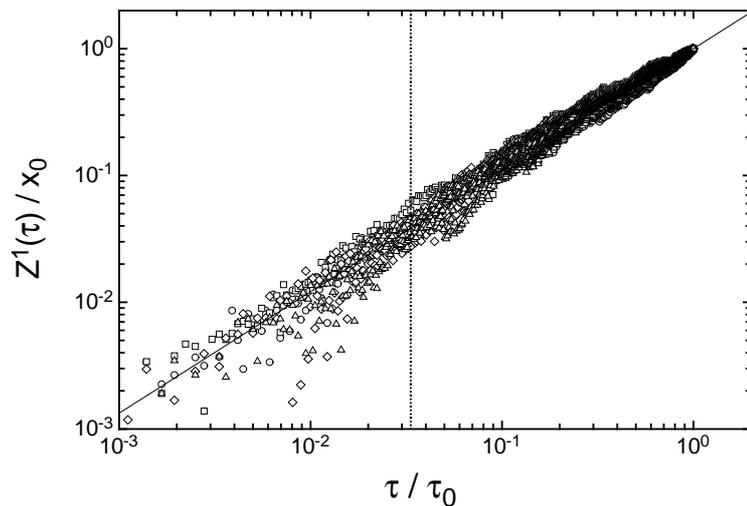


Abbildung 11.12: Das (durch  $x_0$  dividierte) bedingte erste Moment  $Z^1(\tau)$  als Funktion von  $\tau/\tau_0$  für  $\tau_0 = 2h$  und  $x_0 = -0.05\sigma$  (Kreise),  $x_0 = -0.025\sigma$  (Quadrate),  $x_0 = +0.025\sigma$  (Rauten) und  $x_0 = +0.05\sigma$  (Dreiecke). Die durchgezogene Linie ist ein Potenzfit an die Daten gemäss 11.9, die gepunktete senkrechte Linie markiert die Zeitskala  $\tau = \tau_{min} = 4min$ ,

Man findet überdies, dass sich  $Z^1$  durch ein Potenzgesetz in  $\tau$  beschreiben lässt:  $Z^1/x_0 = (\tau/\tau_0)^c$ . Eine einfache Rechnung zeigt, dass ein solches Potenzgesetz aus (11.8) für den Fall folgt, dass  $\gamma(\tau)$  konstant ist:

$$\begin{aligned} Z^1(\tau) &= x_0 \exp \left\{ \gamma \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{1}{\tau'} d\tau' \right\} = x_0 \exp \left\{ \gamma \ln \left( \frac{\tau}{\tau_0} \right) \right\} \\ &= x_0 \left( \frac{\tau}{\tau_0} \right)^\gamma . \end{aligned} \quad (11.9)$$

Der Fit einer Potenzfunktion an die in Abbildung 11.12 gezeigten Werte von  $Z^1(\tau)$  ergibt einen Wert von 0,95 für  $\gamma$ . Durch Variation von  $x_0$  und  $\tau_0$  erhält man die folgenden Abschätzungen für den Koeffizienten  $\gamma$  und seinen Fehler:

$$\gamma = 0,93 \pm 0,02 . \quad (11.10)$$

Interessanterweise erhält man für  $\gamma$  einen Wert nahe eins. Ob die durch (11.10) angedeutete Abweichung davon signifikant ist, kann allerdings aufgrund des hier untersuchten Datensatzes nicht eindeutig entschieden werden. Die Beantwortung dieser Frage muss Untersuchungen an längeren Datensätzen vorbehalten bleiben.

Auf ähnliche Weise können auch Abschätzungen für die Koeffizienten  $\alpha(\tau)$  und  $\beta(\tau)$ , den konstanten bzw. quadratischen Term in  $D^{(2)}$ , gefunden werden. Es sollen hierzu die Gleichungen für die Momente  $\langle x(\tau)^n \rangle$  betrachtet werden. Diese Gleichungen lassen sich, analog zu den Gleichung (4.9) für die Strukturfunktionen des Geschwindigkeitsinkrements, aus der Fokker-Planck-Gleichung für die Wahrscheinlichkeitsdichte  $p(x, \tau)$  gewinnen. Für  $n \geq 2$  lauten sie mit den Koeffizienten (11.5):

$$\begin{aligned} -\tau \frac{\partial}{\partial \tau} \langle x(\tau)^n \rangle &= -n\gamma \langle x(\tau)^n \rangle + n(n-1)\alpha(\tau) \langle x(\tau)^{n-2} \rangle \\ &\quad + n(n-1)\beta(\tau) \langle x(\tau)^n \rangle . \end{aligned} \quad (11.11)$$

Das kann umgeschrieben werden zu:

$$\frac{\tau \frac{\partial}{\partial \tau} \langle x(\tau)^n \rangle}{n \langle x(\tau)^n \rangle} = \gamma - (n-1)\beta(\tau) - (n-1)\alpha(\tau) \frac{\langle x(\tau)^{n-2} \rangle}{\langle x(\tau)^n \rangle} . \quad (11.12)$$

$\gamma$  ist von der Analyse des bedingten ersten Moments her bekannt. Es genügen daher zwei der Gleichungen (11.12) um die unbekannt Funktionen  $\alpha(\tau)$  und  $\beta(\tau)$  aus den Momenten  $\langle x(\tau)^n \rangle$  zu bestimmen. Da sich aus empirischen Daten am ehesten gerade Momente niedriger Ordnung bestimmen lassen, wurden hierzu die Momente zweiter und vierter Ordnung verwendet. Abbildung 11.13 zeigt diese beiden Momente als Funktion der Skala  $\tau$  im Intervall  $\tau_{min} \leq \tau \leq 180\tau_{min} = 12h$ . Über den gesamten Bereich können die Momente in guter Näherung als Potenzfunktionen in  $\tau$  beschrieben werden:

$$\langle x(\tau)^n \rangle \propto \tau^{\zeta_n} . \quad (11.13)$$

Es kann leicht gezeigt werden, dass sich die linke Seite der Gleichung (11.12) damit auf  $\frac{\zeta_n}{n}$  reduziert. Fittet man die empirisch bestimmten Momente  $\langle x(\tau)^n \rangle$  mit Potenzgesetzen, so erhält man für die Skalenexponenten  $\zeta_n$ :

$$\begin{aligned} \zeta_2 &= 0,94 \pm 0,04 \\ \zeta_4 &= 1,7 \pm 0,1 \end{aligned} \quad (11.14)$$

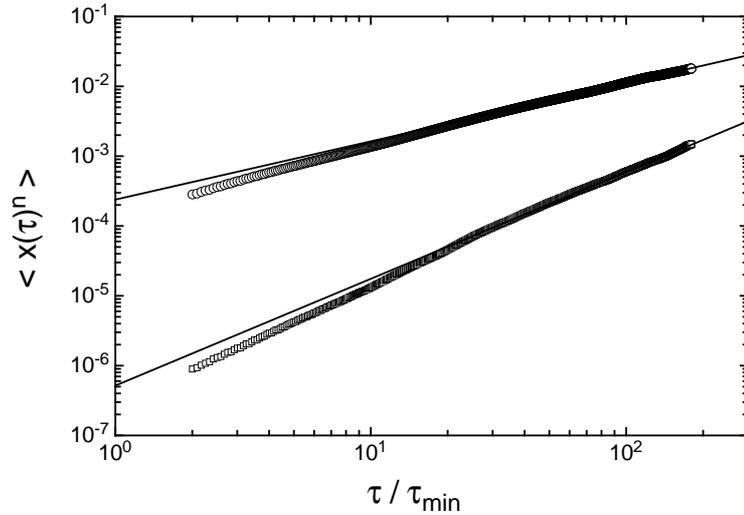


Abbildung 11.13: Die Momente  $\langle x(\tau)^n \rangle$  des Preisinkrements  $x$  als Funktion der Zeitskala  $\tau$ . Die Ordnungen  $n$  der Momente sind  $n = 2$  (Kreise) und  $n = 4$  (Quadrate). Die Momente lassen sich in guter Näherung durch Potenzgesetze in  $\tau$  beschreiben (durchgezogene Linien).

Die Fehler der  $\zeta_n$  wurden ermittelt, indem der für den Fit verwendete Bereich von Skalen variiert wurde.

Es sei hier auf das Ergebnis für den Skalenexponenten  $\zeta_2$  hingewiesen. Dieser scheint etwas kleiner zu sein als eins, der Wert der in der Literatur üblicherweise angegeben wird [70, 45]. Der durch (11.14) angedeutete kleinere Wert ist jedoch nicht signifikant: die empirisch bestimmten Momente  $\langle x(\tau)^2 \rangle$  können mit fast derselben Genauigkeit auch durch ein Potenzgesetz mit  $\zeta_2 = 1$  angefitet werden. Da die oben gegebenen Werte den hier untersuchten Datensatz jedoch (wenn auch geringfügig) besser fitten, werden sie im weiteren anstelle des Literaturwerts  $\zeta_2 = 1$  verwendet.

Nimmt man an, dass das in (11.10) gegebene Ergebnis für  $\gamma$  auch für Skalen  $\tau > 3h$  gilt, können mit den empirischen Ergebnissen für das zweite und vierte Moment die Gleichungen (11.12) nun nach  $\alpha$  und  $\beta$  aufgelöst werden. Es stellt sich heraus, dass sich  $\alpha$  durch eine Ursprungsgerade in  $\tau$  darstellen lässt, während  $\beta$  nur schwach in  $\tau$  variiert und in erster Näherung als konstant angenommen werden kann (Abbildung 11.14).

Zusammengefasst lauten die Ergebnisse für  $D^{(1)}$  und  $D^{(2)}$ :

$$\begin{aligned}
 D^{(1)}(x, \tau) &= -\gamma x \\
 \gamma &= 0,93 \pm 0,02 \\
 D^{(2)}(x, \tau) &= \alpha_0 \tau + \beta x^2 \\
 \alpha_0 &= 0,016d^{-1} \pm 0,002d^{-1} \\
 \beta &\approx \text{const} = 0,11 \pm 0,02
 \end{aligned} \tag{11.15}$$

Es sei hier nochmals auf Abbildung 11.9 hingewiesen, wo die durch obige Werte definierten  $D^{(1)}$  und  $D^{(2)}$  mit den direkt aus den Daten bestimmten Koeffizienten

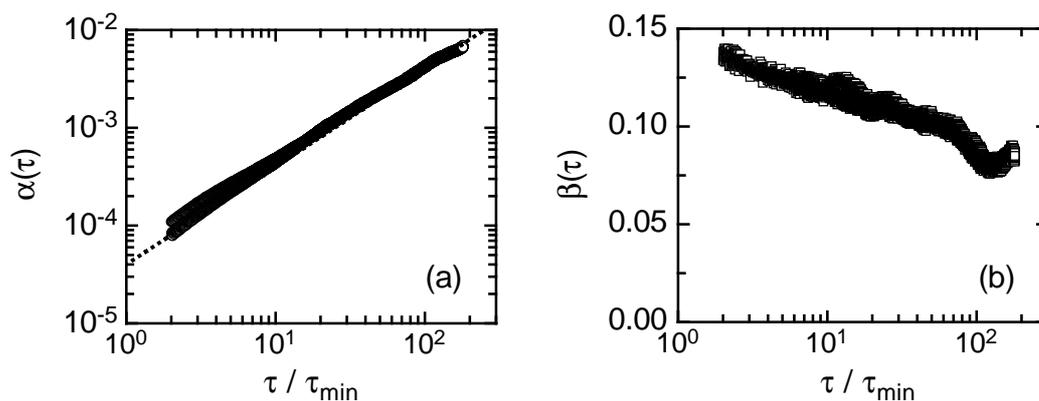


Abbildung 11.14: Die aus dem zweiten und vierten Moment des Inkrements  $x$  bestimmten Koeffizienten  $\alpha$  (a) und  $\beta$  (b) als Funktion von  $\tau$ .  $\alpha$  kann durch eine Ursprungsgerade in  $\tau$  beschrieben werden (durchbrochene Linie),  $\beta$  ist in erster Näherung konstant.

verglichen werden. Es zeigt sich, dass (11.15) die direkt bestimmten Koeffizienten  $D^{(k)}$  tatsächlich korrekt wiedergibt.

## 11.6 Die Lösungen der Fokker-Planck Gleichung

Den im vorhergehenden Kapitel präsentierten Ergebnissen liegen mehrere Annahmen zu Grunde. Zu nennen sind insbesondere die Gültigkeit der Markoweigenschaften sowie das Verschwinden der Terme mit Ordnung drei und höher der Kramers-Moyal-Entwicklung. Beide Annahmen können im streng mathematischen Sinn durch eine Analyse empirischer Daten natürlich nicht bewiesen werden.

Um die Gültigkeit der gemachten Annahmen zu belegen, wurden die aus den Daten bestimmten Wahrscheinlichkeitsdichten nun wiederum mit den numerischen Lösungen der Fokker-Planck-Gleichung verglichen. Abbildung 11.15 zeigt diesen Vergleich für die Dichten  $p(x, \tau)$  des Preisinkrements  $x$  auf mehreren Skalen  $\tau$  im Intervall  $12h \geq \tau \geq 4min$ . Über diesen Bereich kann die Entwicklung von  $p(x, \tau)$  in  $\tau$  in der Tat durch eine Fokker-Planck-Gleichung mit den in (11.15) definierten Koeffizienten beschrieben werden.

Auch die Lösungen der Fokker-Planck-Gleichung für die bedingten Wahrscheinlichkeitsdichten  $p(x, \tau | x_0, \tau_0)$  finden sich in Übereinstimmung mit den aus den Daten bestimmten Verteilungen. Abbildung 11.16 belegt dies für die Skalen  $\tau_0 = 1h$  und  $\tau = 0, 5h$ . Es sei an dieser Stelle nochmals ausdrücklich erwähnt, dass die aus den Daten bestimmten Koeffizienten  $D^{(1)}$  und  $D^{(2)}$  nach Gleichung (11.15) nicht verändert werden mussten, um die in den Abbildungen 11.15 und 11.16 gezeigten Übereinstimmungen zwischen den Lösungen der Fokker-Planck-Gleichung und den empirisch bestimmten Dichten zu erreichen.

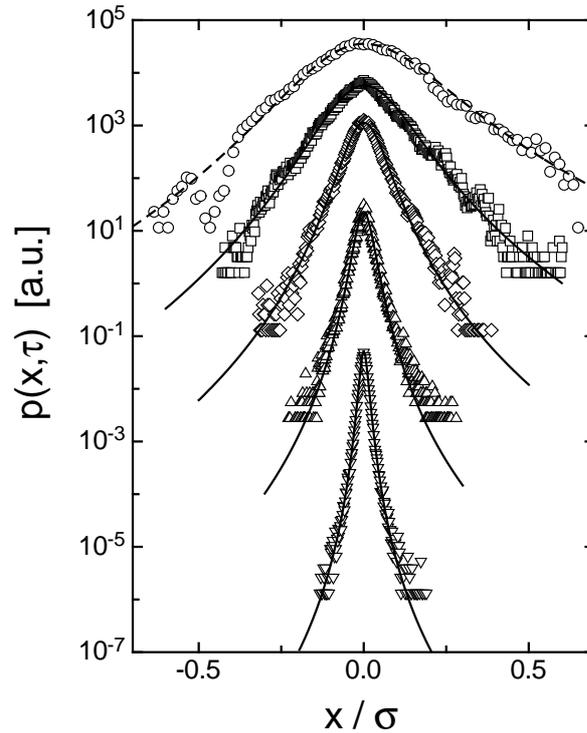


Abbildung 11.15: Vergleich der numerischen Lösungen der Fokker-Planck-Gleichung (durchgezogene Linien) mit den empirisch bestimmten Wahrscheinlichkeitsdichten  $p(x, \tau)$  des Preisinkrements (offene Symbole). Die Skalen  $\tau$  sind (von oben nach unten): 12h, 4h, 1h, 15min und 4min. Die Dichte auf der Skala  $\tau = 12h$  wurde parametrisiert und dem numerischen Algorithmus als Startverteilung vorgegeben. Die Kurven wurden der Übersichtlichkeit halber in vertikaler Richtung gegeneinander verschoben.

## 11.7 Zusammenfassung und Diskussion

Auch im Fall der hochfrequenten Wechselkursdaten des US-Dollars in DM erweist sich die Mathematik der Markowprozesse als nützliches Werkzeug. Innerhalb der durch die geringe Anzahl von Notierungen bedingten (Un-) Genauigkeiten ist es möglich, direkte Hinweise auf die Gültigkeit der Markoweigenschaften zu gewinnen. Die Analyse der bedingten Momente  $M^{(k)}(x, \tau, \Delta\tau)$  lässt eine lineare Abhängigkeit des Driftterms  $D^{(1)}$  vom Inkrement  $x$  erwarten, der Diffusionskoeffizient  $D^{(2)}$  ist quadratisch in  $x$ . Es finden sich starke Hinweise darauf, dass der Koeffizient vierter Ordnung im Grenzübergang  $\Delta\tau \rightarrow 0$  verschwindet, die Kramers-Moyal-Entwicklung reduziert sich demnach zur Fokker-Planck-Gleichung. Ausgehend von dieser Annahme können aus den Gleichungen für die Momente von  $x$  Abschätzungen für die Skalenabhängigkeit der Koeffizienten  $\gamma$ ,  $\alpha$  und  $\beta$  gewonnen werden. Ein Vergleich der numerischen Lösung der daraus resultierenden Fokker-Planck-Gleichung mit den empirisch bestimmten Wahrscheinlichkeitsdichten liefert eine eindrucksvolle Bestätigung dieser Ergebnisse und der ihnen zugrunde liegenden Annahmen.

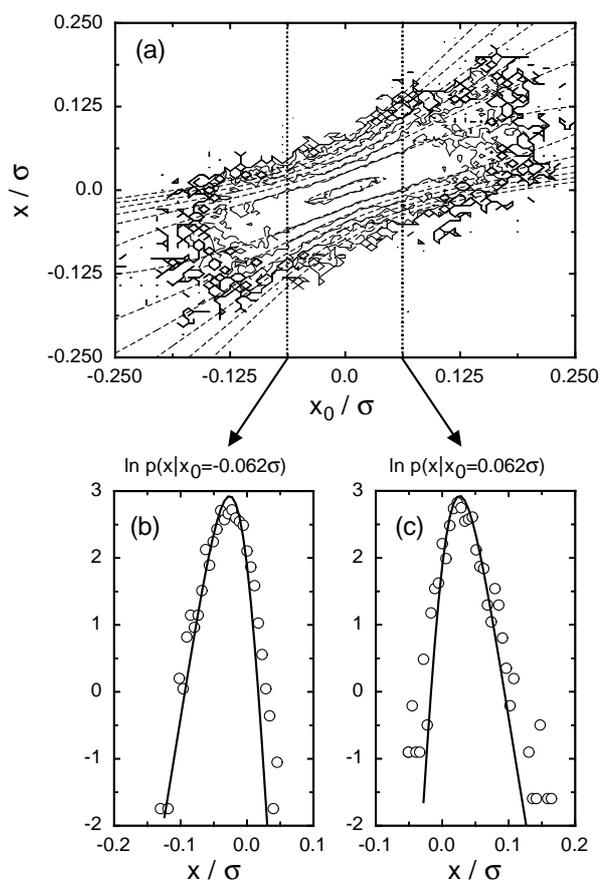


Abbildung 11.16: Vergleich der numerischen Lösung der Fokker-Planck-Gleichung für die bedingte Dichte  $p(x, \tau | x_0, \tau_0)$  mit den empirischen Daten.

(a): Konturliniendarstellung von  $p(x, \tau | x_0, \tau_0)$  für  $\tau = 0,5h$  und  $\tau_0 = 1h$ . Durchbrochene Linien: numerische Lösung der Fokker-Planck-Gleichung, durchgezogene Linien: empirisch bestimmte Dichten.

(b) und (c): Schnitt durch die in (a) gezeigte bedingte Dichte für  $x_0 = \pm 0,062\sigma$ . Offene Symbole: empirische Daten, durchgezogene Linien: numerische Lösung der Fokker-Planck-Gleichung.

Wie auch schon im Fall der voll entwickelten Turbulenz ist es interessant, die hier vorgestellten Ergebnisse mit denen früherer Analysen [40] zu vergleichen. In der zitierten Arbeit wurde bereits eine Fokker-Planck-Gleichung mit linearem Drift- und quadratischem Diffusionskoeffizienten angegeben, die numerischen Werte der Koeffizienten  $\gamma$ ,  $\alpha$  und  $\beta$  unterschieden sich aber deutlich von den hier in (11.15) gegebenen. Die in [40] vorgestellten Analysen konzentrierten sich hauptsächlich auf die funktionale Abhängigkeit der Koeffizienten  $D^{(k)}$  vom Preisinkrement  $x$ , der Grenzübergang  $\Delta\tau \rightarrow 0$  wurde nicht im Detail durchgeführt. Stattdessen in vollständiger Analogie zu dem in Kapitel 3.4 vorgestellten Vorgehen versucht, die Koeffizienten  $\gamma$  und  $\beta$  aus den Skalenexponenten  $\zeta_n$  der Momente  $\langle x(\tau)^n \rangle$  abzuleiten.

In [40] wurde gezeigt, dass die so erhaltenen Koeffizienten, mit kleinen Korrekturen durch einen konstanten und einen linearen Term in  $D^{(2)}$ , die empirisch bestimm-

ten Dichten  $p(x, \tau)$  korrekt beschreiben. Die bedingten Dichten  $p(x, \tau | x_0, \tau_0)$  lassen sich durch die entsprechende Fokker-Planck-Gleichung allerdings nicht beschreiben. Es zeigt sich also auch in diesem Fall, dass eine Analyse, die sich ausschliesslich auf die Statistik des Inkrements auf nur einer Skala beschränkt, mehrdeutig sein kann. Nur die gemeinsamen statistischen Eigenschaften von Inkrementen auf verschiedenen Skalen liefert eine eindeutige und auch vollständige Charakterisierung des zugrunde liegenden Zufallsprozesses.

Die in [40] vorgestellten Ergebnisse standen ausserdem in Widerspruch zu einer in der Literatur häufig diskutierten Eigenschaft der Wahrscheinlichkeitsdichten. Auf kleinen Zeitskalen  $\tau$  können die Flügel der Dichten  $p(x, \tau)$  in guter Näherung durch Potenzgesetze in  $x$  beschrieben werden [70]:  $p(x, \tau) \propto x^{-(\mu+2)}$ . Für den Skalenexponent  $\mu$  erhält man aus Fits an empirische Daten Werte zwischen drei und fünf [104]. In [107] wurde darauf hingewiesen, dass die Lösungen der Fokker-Planck-Gleichung mit linearem Drift- und quadratischem Diffusionskoeffizient im Limes kleiner Skalen  $\tau$  gegen Potenzfunktionen mit dem Exponenten

$$\mu = \frac{\gamma}{2\beta} \quad (11.16)$$

konvergieren. Im Widerspruch zu diesen Überlegungen ergaben die in [40] angegebenen Werte für  $\gamma$  und  $\beta$  einen Wert von etwa 12 für  $\mu$ . Mit den hier vorgestellten Ergebnisse (11.15) dagegen erhält man  $\mu = 4, 2 \pm 0, 8$ , was mit den in der Literatur angegebenen Werten zwischen drei und fünf gut übereinstimmt.

Ein weiteres interessantes Resultat der Markowanalyse betrifft die Symmetrie des stochastischen Prozesses. Gemäss (11.15) ist der Driftkoeffizient  $D^{(1)}$  antisymmetrisch in  $x$  ( $D^{(1)}(-x) = -D^{(1)}(x)$ ), der Diffusionskoeffizient dagegen symmetrisch ( $D^{(2)}(-x) = D^{(2)}(x)$ ). Die daraus resultierende Fokker-Planck-Gleichung ist damit invariante gegen die Vertauschung  $x \rightarrow -x$ . Die Lösungen der Fokker-Planck-Gleichung wären daher, bei symmetrischer Anfangsbedingung, auf allen Skalen  $\tau$  symmetrisch in  $x$ . Anders ausgedrückt: Die Asymmetrien auf kleinen Skalen sind ausschliesslich auf die Asymmetrie von  $p(x, \tau)$  auf der grössten Skala  $\tau = 12h$  zurückzuführen. Der stochastische Prozess selbst ist, jedenfalls auf Skalen kleiner als zwölf Stunden, völlig symmetrisch in positiven und negativen Schwankungen. Dieses Ergebniss könnte eine Möglichkeit bieten, kurzzeitige Schwankungen des Marktes von langfristigen Trends der Zeitserien zu trennen. Letztere dürften (abgesehen von spekulativen Blasen und deren Zusammenbrüchen) ihre Ursache in wirtschafts- und geldpolitischen Entscheidungen haben und können damit kaum Objekte physikalischer Untersuchungen sein. Kurzfristige Schwankungen in Finanzmärkten dagegen können, in Analogie zu Systemen wechselwirkender Spins, durch einfache Agentenmodelle gut erklärt werden [105, 29]. Bereits recht einfache Annahmen für die Wechselwirkungen zwischen einzelnen Agenten führen zu Ergebnissen, die die meisten beobachteten Phänomene realer Märkte qualitativ richtig beschreiben. Im Rahmen dieser einfachen Modelle erhält man allerdings keine Asymmetrien in den Kursverläufen, was allgemein als das grösste Manko dieses Ansatzes angesehen wird. Dementsprechend ist dieses Problem Gegenstand aktueller Diskussionen, und es wurden Mechanismen vorgeschlagen, die im Rahmen dieser Modelle zu asymmetrischen Preisverteilungen führen können [105].

Die Ergebnisse der Markowanalyse scheint allerdings darauf hinzuweisen, dass es nicht notwendig ist, die Modelle in dieser Hinsicht zu erweitern: die kurzfristigen Preisschwankungen, d.h. die Inkremente auf Zeitskalen eines Handelstages und kleiner, scheinen symmetrisch zu sein. Es sei aber darauf hingewiesen, dass die hier vorgestellten Ergebnisse noch keine allgemeinen Schlüsse zulassen. Bisher wurde lediglich ein einziger Datensatz über einen Zeitraum von einem Jahr untersucht. Um die Signifikanz dieses speziellen Ergebnisses zu überprüfen, sind aber Untersuchungen an mehreren Datensätzen (Wechselkursen, Aktienkursen und Aktienindizes) über einen grösseren Bereich von Zeitskalen notwendig.

Die Ergebnisse der Markowanalyse erlauben aber auch Aussagen über die derzeit diskutierten eventuellen Analogien zwischen Finanzmärkten und voll entwickelter Turbulenz. Insbesondere wird derzeit die Frage diskutiert, inwieweit die für die Turbulenz entwickelten Kaskadenmodelle auch für die Statistik von Preisschwankungen gültig sind (siehe Kap. 10).

Im folgenden seien nochmals kurz die wichtigsten Ergebnisse der gängigsten Kaskadenmodelle zusammengefasst. Das wichtigste Modell ist in diesem Zusammenhang nach wie vor das von Kolmogorov aus dem Jahr 1962. Die Vorhersage dieses Modells für Drift- und Diffusionskoeffizient der Fokker-Planck-Gleichung ist (siehe Kapitel 3.4.2):

$$\begin{aligned} D^{(1)}(x, \tau) &= -\gamma x \\ D^{(2)}(x, \tau) &= -\beta x^2 \end{aligned} \tag{11.17}$$

Die Koeffizienten  $\gamma$  und  $\beta$  sind im Rahmen dieses Modells beide konstant, in voll entwickelter Turbulenz erwartet man für  $\gamma$  einen Wert von etwa  $1/3$ .

Vergleicht man nun die Ergebnisse der Markowanalysen mit den Vorhersagen des Kaskadenmodells, so stellt man fest, dass die Statistik des Preisinkrements den Vorhersagen des Kolmogorovschen Modells wesentlich näher kommt als die Turbulenzdaten: Im Fall der Wechselkursdaten sind sowohl  $\gamma$  als auch  $\beta$  konstant, lediglich der konstante Term  $\alpha$  in  $D^{(2)}$  widerspricht den Vorhersagen Kolmogorovs. Bei turbulenten Geschwindigkeitsdaten dagegen findet sich nicht nur ein von Null verschiedener konstanter Term  $\alpha$ , sondern auch ein linearer. Die Steigung  $\gamma$  des Driftkoeffizienten weist ausserdem eine deutliche Skalenabhängigkeit auf.

# Kapitel 12

## Die Umkehrung der Prozessrichtung

In allen bisherigen Analysen war die Richtung des stochastischen Prozesses in  $\tau$  bzw. auch  $r$  stets auf den Übergang von grossen hin zu kleinen Skalen festgelegt. Diese Wahl ist im Rahmen des Kaskadenmodells der Turbulenz naheliegend und motiviert sich ausserdem auch aus der Tatsache, dass die Dichten von Geschwindigkeits- bzw. Preisinkrement auf grossen Skalen Gaußverteilt sind und mit kleiner werdender Skala komplexere Eigenschaften ausbilden. Den Übergang von einer normalverteilten, also relativ einfachen, Statistik auf grossen Skalen hin zu intermittenten Verteilungen auf kleinen Skalen zu erklären ist die physikalisch und mathematisch herausfordernde Aufgabe.

Für praktische Anwendungen in der Finanzdatenanalyse, insbesondere bei dem Problem der Preisgestaltung von Optionen [100], ist es aber eher von Interesse, aus dem bisherigen Verlauf eines Kurses auf seine zukünftige Entwicklung zu schliessen. Das entspricht exakt der Frage nach dem stochastischen Prozess in positiver Richtung in  $\tau$ , d.h. von kleinen hin zu grossen Skalen. Die Frage nach dem Prozess in positiver Richtung in  $r$  ist aber auch für die Turbulenzforschung von Bedeutung [41]. Insbesondere für turbulente Strömungen in zwei räumlichen Dimensionen findet sich (numerisch) ein Fluss von Energie von kleinen hin zu grossen Skalen. Ob eine solche sog. Rückwärtskaskade auch bei dreidimensionaler Turbulenz existiert (obwohl in dreidimensionaler Turbulenz der Netto-Energiefluss eindeutig von grossen hin zu kleinen Skalen gerichtet ist) ist Gegenstand aktueller Forschung [41].

Die in Kapitel 4 vorgestellten mathematischen Zusammenhänge können selbstverständlich auch in dieser Richtung formuliert werden. Die Markowbedingung (4.2) etwa lautet dann

$$p(x_N, \tau_N | x_{N-1}, \tau_{N-1}; x_{N-2}, \tau_{N-2}; \dots; x_1, \tau_1) = p(x_N, \tau_N | x_{N-1}, \tau_{N-1}), \quad (12.1)$$

wobei wiederum gilt:  $\tau_{i+1} > \tau_i$ .

Eine einfache Rechnung zeigt, dass diese Gleichung erfüllt ist, wenn die Markoweigenschaften in der negativen Richtung gelten, d.h. wenn die Gleichungen (4.2) und (4.3) erfüllt sind. Für die bedingte Dichte  $p(x_N, \tau_N | x_{N-1}, \tau_{N-1}; \dots; x_1, \tau_1)$  kann

man in diesem Fall nämlich schreiben:

$$\begin{aligned}
p(x_N, \tau_N | x_{N-1}, \tau_{N-1}; x_{N-2}, \tau_{N-2}; \dots; x_1, \tau_1) &= \frac{p(x_N, \tau_N; x_{N-1}, \tau_{N-1}; \dots; x_1, \tau_1)}{p(x_{N-1}, \tau_{N-1}; \dots; x_1, \tau_1)} \\
&= \frac{p(x_1, \tau_1; \dots; x_N, \tau_N)}{p(x_1, \tau_1; \dots; x_{N-1}, \tau_{N-1})} \\
&= \frac{p(x_1, \tau_1 | x_2, \tau_2) \dots p(x_{N-2}, \tau_{N-2} | x_{N-1}, \tau_{N-1}) p(x_{N-1}, \tau_{N-1} | x_N, \tau_N) p(x_N, \tau_N)}{p(x_1, \tau_1 | x_2, \tau_2) \dots p(x_{N-2}, \tau_{N-2} | x_{N-1}, \tau_{N-1}) p(x_{N-1}, \tau_{N-1})} \\
&= \frac{p(x_{N-1}, \tau_{N-1} | x_N, \tau_N) p(x_N, \tau_N)}{p(x_{N-1}, \tau_{N-1})} = \frac{p(x_{N-1}, \tau_{N-1}; x_N, \tau_N)}{p(x_{N-1}, \tau_{N-1})} \\
&= p(x_N, \tau_N | x_{N-1}, \tau_{N-1}). \tag{12.2}
\end{aligned}$$

In Übereinstimmung mit dieser Überlegung weisen, wie in Abbildung 12.1 exemplarisch gezeigt, die einfach und zweifach bedingten Dichten des Preisinkrements auch für die positive Prozessrichtung eine gute Übereinstimmung auf. Die Markowbedingung kann daher als erfüllt gelten.

Die Koeffizienten  $\tilde{D}^{(k)}(x, \tau)$  berechnen sich in positiver Prozessrichtung über den Grenzübergang  $\Delta\tau \rightarrow 0$  aus den wie folgt definierten bedingten Momenten  $\tilde{M}^{(k)}(x, \tau, \Delta\tau)$ :

$$\tilde{M}^{(k)}(x, \tau, \Delta\tau) = \frac{\tau}{k! \Delta\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} (\tilde{x} - x)^k p(\tilde{x}, \tau + \Delta\tau | x, \tau) d\tilde{x}. \tag{12.3}$$

Die Extrapolation wurde wiederum durch Polynomfits im Intervall  $\tau_{min} \leq \Delta\tau \leq 2\tau_{min}$  durchgeführt. Abbildung 12.2 zeigt das Ergebniss der Extrapolation für den Driftkoeffizienten  $\tilde{D}^{(1)}(x, \tau)$  auf zwei verschiedenen Zeitskalen  $\tau$  jeweils im Vergleich zu dem in negativer Richtung erhaltenen Koeffizienten. Das Resultat überrascht zunächst: Betrachtet man den Prozess von kleinen hin zu grossen Skalen, so verschwindet der Driftkoeffizient. Bei näherer Betrachtung entspricht dieses Ergebniss aber sowohl den intuitiven Erwartungen als auch allen bisherigen Beobachtungen an Finanzmärkten: die Tatsache, dass der Driftkoeffizient verschwindet, besagt nichts anderes als dass der Erwartungswert des zukünftigen Kursverlaufs aus den bisherigen Beobachtungen nicht vorhergesagt werden kann. Dies wird deutlich, wenn man die Gleichung für den bedingten Erwartungswert  $\tilde{Z}^1(\tau) = \langle x(\tau) | x_0(\tau_0) \rangle$  für  $\tau \geq \tau_0$  bei verschwindendem Driftkoeffizienten betrachtet. Sie lautet (die Herleitung verläuft analog zu der von Gleichung (11.7)):

$$\tau \frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{Z}^1(\tau) = 0. \tag{12.4}$$

Damit erhält man mit der Anfangsbedingung  $\tilde{Z}^1(\tau_0) = x_0$  einfach:

$$\tilde{Z}^1(\tau) = \langle x(\tau) | x_0(\tau_0) \rangle = x_0. \tag{12.5}$$

Der auf den Wert  $x_0$  auf der Zeitskala  $\tau_0$  bedingte Erwartungswert des Preisinkrements sollte für Skalen  $\tau \geq \tau_0$  demnach konstant gleich  $x_0$  sein. Die aus den Daten

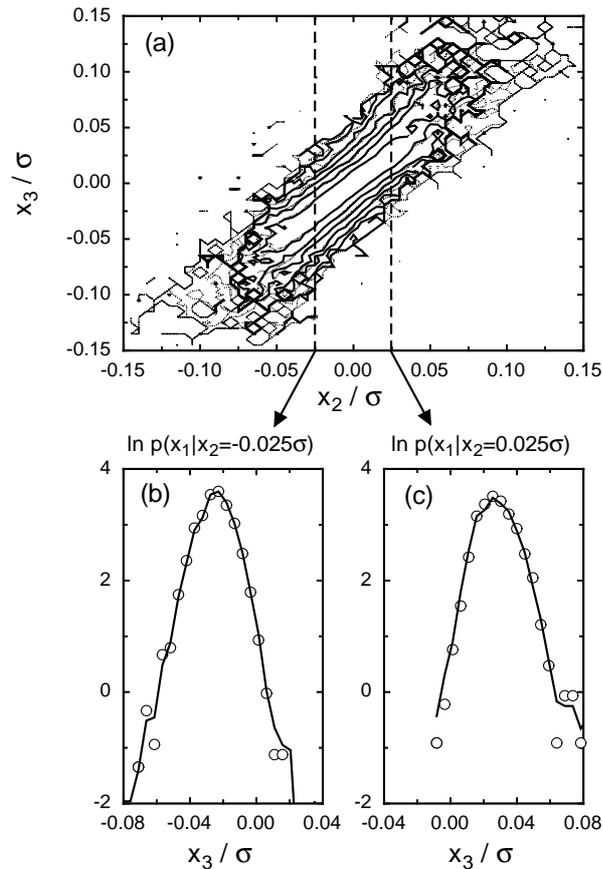


Abbildung 12.1: (a): Konturliniendarstellung der bedingten Dichte  $p(x_3, \tau_3 | x_2, \tau_2)$  (durchbrochene Linien) und  $p(x_3, \tau_3 | x_2, \tau_2; x_1 = 0, \tau_1)$  (durchgezogene Linien) für  $\tau_1 = \tau_{min} = 4min$ ,  $\tau_2 = 2\tau_{min}$  und  $\tau_3 = 3\tau_{min}$ . (b) und (c): Schnitte durch die bedingten Dichten für  $x_2 = \pm 0,025\sigma$ . Symbole: zweifach bedingte Dichte, durchgezogene Linie: einfach bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte.

bestimmten Erwartungswerte weisen dieses Verhalten tatsächlich auf, wie die in Abbildung 12.3 dargestellten Beispiele für  $\tau_0 = 15min$  zeigen. Während man für Skalen  $\tau$  kleiner als  $\tau_0$  den bereits aus Kapitel 11.5 bekannten Anstieg auf  $x_0$  beobachtet, bleibt der Wert für grössere Skalen in der Tat konstant.

Dieses Verhalten entspricht der in der Finanzmathematik weit verbreiteten Einsicht, dass der zukünftige Trend eines Kursverlaufs aus der bisherigen Entwicklung nicht vorhergesagt werden kann und demnach die beste Vorhersage für den Erwartungswert des Kurses der momentane Wert ist. (man spricht in diesem Fall von einem sogenannten Martingale-Prozess) [100, 53]. Im Rahmen dieser Überlegungen ist das Verschwinden des Driffterms (und damit, in der Terminologie der Langevin-Gleichung, das Verschwinden des deterministischen Anteils der Entwicklungsgleichung) das zu erwartende Ergebnis.

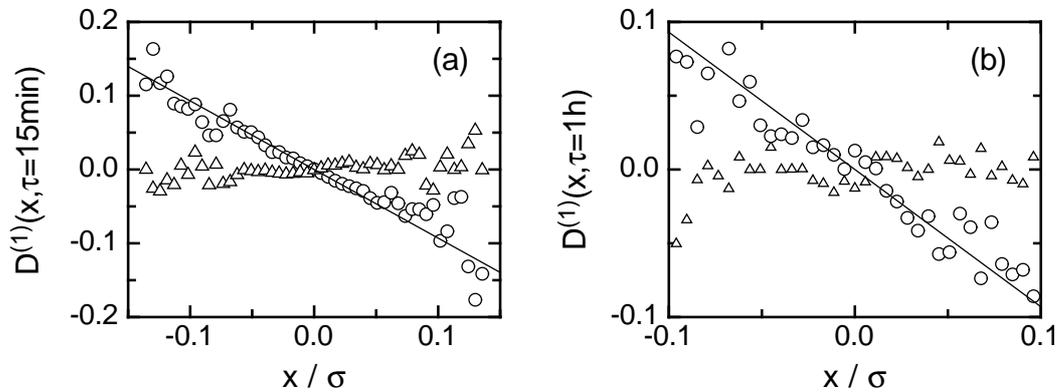


Abbildung 12.2: Der Driftkoeffizient  $\tilde{D}^1$  in positiver Prozessrichtung (Dreiecke) im Vergleich zum Koeffizienten  $D^{(1)}$  in negativer Richtung (Kreise bzw. durchgezogene Linie) als Funktion des Preisinkrements  $x$  auf den Skalen  $\tau = 15\text{min}$  (a) bzw.  $\tau = 1\text{h}$  (b).

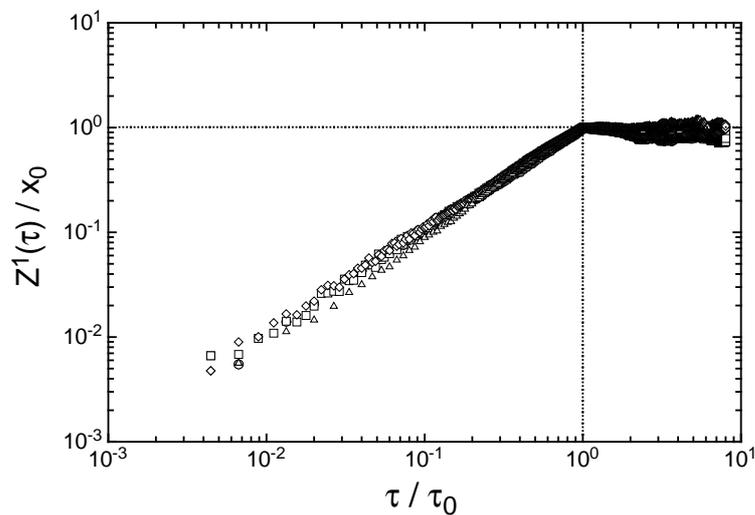


Abbildung 12.3: Der bedingte Erwartungswert  $\tilde{Z}^1(\tau) = \langle x(\tau) | x_0(\tau_0) \rangle$  als Funktion der Skala  $\tau$  für  $x_0 = -0,06\sigma$  (Kreise),  $x_0 = -0,03\sigma$  (Quadrate),  $x_0 = 0,03\sigma$  (Rauten) und  $x_0 = 0,06\sigma$  (Dreiecke). Die Referenzskala  $\tau_0$  ist in diesem Fall zu  $\tau_0 = 15\text{min}$  gewählt.

Der Diffusionskoeffizient  $\tilde{D}^{(2)}(x, \tau)$  weist, wie auch der Koeffizient  $D^{(2)}(x, \tau)$  in negativer Richtung, eine quadratische Abhängigkeit vom Preisinkrement  $x$  auf und stimmt auch in seiner Grössenordnung mit dem Diffusionskoeffizienten in negativer Richtung überein, siehe Abbildung 12.4.

Unterschiede zwischen den Diffusionskoeffizienten in positiver und negativer Richtung zeigen sich, wenn überhaupt, auf kleinen Skalen  $\tau$ . Die in Abbildung 12.4(a) gezeigten Fits an die Koeffizienten auf der Skala  $\tau = 15\text{min}$  ergeben für die quadratischen Terme  $\beta$  bzw.  $\tilde{\beta}$  noch verschiedene Werte, stimmen in ihren konstanten Termen aber innerhalb ihrer Fehler bereits überein. Für  $\tau = 1\text{h}$  (Abbildung 12.4(b)) sind die beiden direkt aus den Daten bestimmten Koeffizienten dann bereits nicht mehr zu unterscheiden.

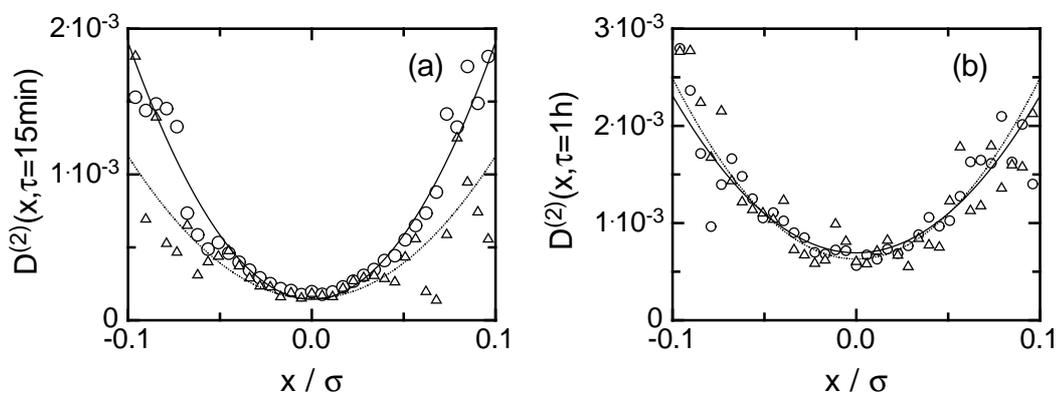


Abbildung 12.4: Der Diffusionskoeffizient  $\tilde{D}^2$  in positiver Prozessrichtung (Dreiecke) im Vergleich zum Koeffizienten  $D^{(2)}$  in negativer Richtung (Kreise) als Funktion des Preisinkrements  $x$  auf den Skalen  $\tau = 15\text{min}$  (a) bzw.  $\tau = 1\text{h}$  (b). An die Koeffizienten wurden jeweils Polynom zweiten Grades mit verschwindendem linearen Term gefittet (durchgezogene Linien für die Koeffizienten in negativer Richtung, durchbrochene Linien für die positive Prozessrichtung).

Zusammenfassend ergeben sich für die Koeffizienten  $\tilde{D}^{(1)}$  und  $\tilde{D}^{(2)}$  die folgenden Ergebnisse:

$$\begin{aligned}\tilde{D}^{(1)}(x, \tau) &= 0, \\ \tilde{D}^{(2)}(x, \tau) &= \tilde{\alpha}(\tau) + \tilde{\beta}(\tau)x^2.\end{aligned}\tag{12.6}$$

Der Koeffizient vierter Ordnung scheint in der positiven Prozessrichtung ebenfalls zu verschwinden. Abbildung 12.5 zeigt das Ergebnis der linearen Extrapolation für  $\tilde{D}^{(4)}$  als Funktion von  $x$  auf der Skala  $\tau = 15\text{min}$ . Man erhält, wie auch schon im Fall des Koeffizienten in negativer Richtung, sowohl positive als auch negative Werte und kann daher davon ausgehen, dass  $\tilde{D}^{(4)}$  verschwindet. Vergleichbare Ergebnisse (d.h. negative Wert für  $\tilde{D}^{(4)}$ ) erhält man auch, wenn man zur Extrapolation Polynomen höherer Ordnung verwendet.

Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsdichten  $p(x, \tau|x_0, \tau_0)$  und  $p(x, \tau)$  wird demnach auch in positiver Prozessrichtung durch eine Fokker–Planck–Gleichung be-

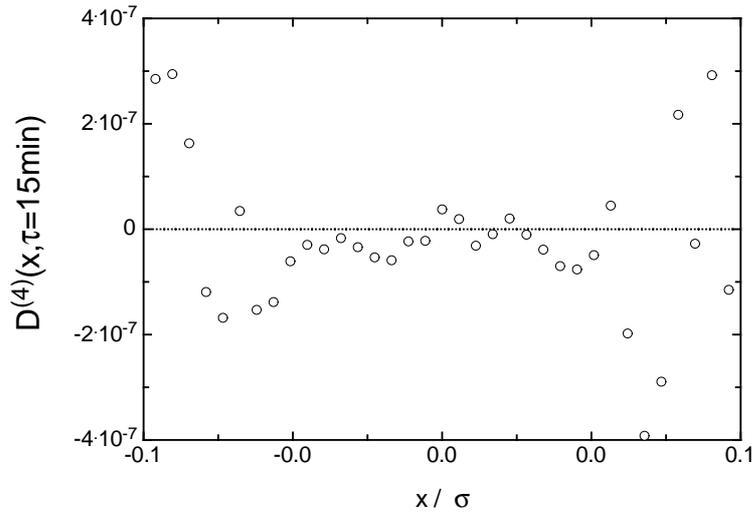


Abbildung 12.5: Der Kramers–Moyal Koeffizient vierter Ordnung in positiver Prozessrichtung auf der Skala  $\tau = 15\text{min}$  als Funktion des Preisinkrements  $x$ .

schrieben. Während das Verschwinden des Driftkoeffizienten aufgrund der Ergebnisse für das bedingte erste Moment des Preisinkrements (sowie der Übereinstimmung mit der vorherrschenden Lehrmeinung) als gesichert gelten darf, steht eine genaue Bestimmung der Koeffizienten  $\tilde{\alpha}$  und  $\tilde{\beta}$  analog zu den in Kapitel 11 vorgestellten Analyse derzeit aber noch aus.

Von Interesse ist die Analyse der positiven Prozessrichtung trotz ihrer Unvollständigkeit auch für die vermutete Analogie zwischen Finanzmärkten und der voll entwickelten Turbulenz. In den Ergebnissen für die in positiver Richtung gemessenen Koeffizienten  $\tilde{D}^{(k)}$  zeigen sich erhebliche Unterschiede zwischen den beiden Systemen.

Abbildung 12.6 zeigt Drift- und Diffusionskoeffizienten der Turbulenz auf der Skala  $r = L/2$  für beide Prozessrichtungen. Im Gegensatz zu den Ergebnissen der Finanzdatenanalyse verschwindet der Driftkoeffizient in positiver Richtung nicht, auch wenn er eine weit geringere Steigung in  $u$  aufweist als der in negativer Richtung gemessene. Grössere Werte als in negativer Richtung erhält man dagegen für den Diffusionskoeffizienten  $\tilde{D}^{(2)}$  in positiver Richtung. Er weist zwar nach wie vor eine quadratische Abhängigkeit vom Inkrement  $u$  auf, insbesondere sein additiver Term ist jedoch deutlich grösser als der des Koeffizienten in negativer Richtung.

Das Ergebnis für  $\tilde{D}^{(1)}$  in der Turbulenz lässt sich anschaulich wenigstens qualitativ erklären. Mit einem näherungsweise linearen Driftkoeffizienten  $\tilde{D}^{(1)}(u, r) \approx -\tilde{\gamma}(r)u$  lautet die Langevin–Gleichung in positiver Prozessrichtung (im Formalismus nach Itô):

$$\frac{\partial}{\partial r}u(r) = -\frac{1}{r}\tilde{\gamma}(r)u + \sqrt{\frac{1}{r}\tilde{D}^{(2)}(u, r)\Gamma(r)}. \quad (12.7)$$

Dieser Gleichung zufolge relaxiert (unter Vernachlässigung des stochastischen Terms) ein auf kleinen Skalen von Null verschiedenes Geschwindigkeitsinkrement  $u$  im wei-

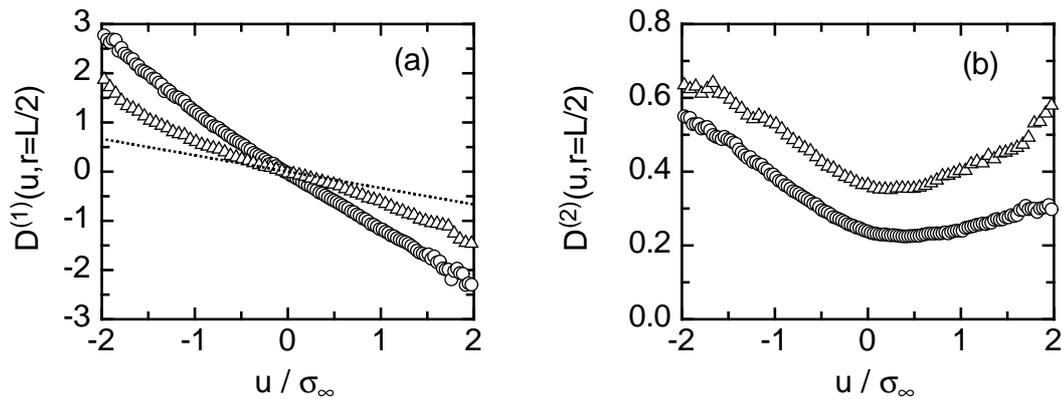


Abbildung 12.6: Drift- und Diffusionskoeffizient in der Turbulenz ((a) bzw. (b)) auf der Skala  $r = L/2$  als Funktion des Geschwindigkeitsinkrements  $u$  für positive (Dreiecke) und negative (Kreise) Prozessrichtung. Es wurde der in den Kapiteln 5 und 6 untersuchte Datensatz verwendet. Auch in positiver Prozessrichtung lässt sich  $\tilde{D}^{(1)}$  nicht durch die nach K41 zu erwartende Steigung von  $\tilde{\gamma} = 1/3$  beschreiben (gepunktete Linie in (a)).

teren Verlauf des Prozesses wieder gegen Null. Das besagt nichts anderes, als dass es sich bei den untersuchten Daten um eine stationäre Zeitserie mit einem wohldefinierten Mittelwert handelt, zu dem das System stets wieder zurückkehrt. Dies ist für die Finanzdaten offensichtlich nicht der Fall; ein Mittelwert kann, da die Fluktuationen nicht wieder relaxieren, für diese Daten nicht definiert werden.

In diesem Zusammenhang sei auch kurz auf die Bedeutung des Driftkoeffizienten in negativer Prozessrichtung eingegangen. Hier finden sich sowohl in der Turbulenz als auch im Finanzmarkt eindeutig von Null verschiedene Werte für  $D^{(1)}$ , in beiden Fällen also eine deterministische Entwicklung. Diese deterministische Entwicklung ist in der negativen Richtung allerdings trivial: Jedes auf einer grossen Skala von Null verschiedene Inkrement  $u$  bzw.  $x$  muss aufgrund der Definition des Geschwindigkeits- bzw. Preisinkrements bei Annäherung an  $r = 0$  bzw.  $\tau = 0$  verschwinden. Die wichtige physikalische Aussage des Driftkoeffizienten in negativer Richtung liegt eher in seiner Abhängigkeit von der Skala  $r$  bzw.  $\tau$ . Diese bestimmt die Geschwindigkeit, mit der die Inkremente bei  $r, \tau \rightarrow 0$  gegen Null streben und hier zeigen sich deutliche Unterschiede zwischen den verschiedenen Systemen.

Dieser qualitativen Interpretation wird in eine ausführliche vergleichende Markowanalyse der Turbulenz und der Finanzmärkte in positiver Prozessrichtung folgen müssen. Eine Frage, die von besonderem Interesse sein wird, ist die, ob der Driftkoeffizient  $\tilde{D}^{(1)}$  für die Finanzdaten auf allen Skalen  $\tau$  identisch gleich Null ist, oder ob sich auf längeren Skalen nicht doch wieder ein Relaxieren der Inkremente und damit ein stabiler Fixpunkt des Systems findet. Aber auch zum jetzigen Zeitpunkt lässt sich bereits erkennen, dass die Markowanalyse in positiver Prozessrichtung wichtige neue Details zu den den beiden Phänomenen zugrunde liegenden stochastischen Prozessen liefern wird.



# Kapitel 13

## Zusammenfassung und Ausblick

Auch für die statistischen Eigenschaften hochliquider Wechselkurse, hier der des US-Dollar gegenüber der deutschen Mark, liefert die Mathematik der Markowprozesse eine in sich konsistente und mit den Daten widerspruchsfreie Beschreibung. Die Ergebnisse für die funktionalen Abhängigkeiten von Drift- und Diffusionskoeffizient vom Preisinkrement sind vergleichbar zu denen der voll entwickelten Turbulenz:  $D^{(1)}$  ist eine lineare Funktion von  $x$ ,  $D^{(2)}$  eine quadratische. Im Gegensatz zur Turbulenz weist der Diffusionskoeffizient im Fall der Finanzdaten allerdings keinen linearen Term auf, ist also symmetrisch in  $x$ . Dies hat die bemerkenswerte Konsequenz, dass die Fokker-Planck-Gleichung für die Wahrscheinlichkeitsdichte des Preisinkrements symmetrisch in positiven und negativen Fluktuationen ist, was, sollte sich dieses Ergebnis bei weiteren Untersuchungen anderer Datensätze bestätigen, wichtige Impulse für derzeit diskutierte Marktmodelle liefern könnte.

Weitere Unterschiede zur Turbulenz finden sich auch in den Skalenabhängigkeiten der Koeffizienten  $\gamma$ ,  $\alpha$  und  $\beta$ . Zwar weist der konstanten Term  $\alpha$  des Diffusionskoeffizienten in beiden Fällen eine lineare Abhängigkeit von der Skala auf,  $\gamma$  und  $\beta$  hängen jedoch, im Gegensatz zur Turbulenz, im Fall der Finanzdaten nicht von der Skala ab. Die Finanzdaten zeigen damit, bis auf eine kleine Korrektur durch den konstanten Term  $\alpha$  in  $D^{(2)}$ , interessanterweise exakt das vom Kolmogorovschen Lognormalmodell vorhergesagte Verhalten. In gewissem Sinn verhalten sich Finanzmärkte, salopp formuliert, also wesentlich turbulenter als turbulente Daten.

Eine Einschränkung erfährt die Analogie zwischen Finanzmärkten und der Turbulenz allerdings durch die Analyse des Prozesses in positiver Richtung, d.h. von kleinen hin zu grösseren Skalen. Hier zeigen sich, trotz des vorläufigen Charakters der bisher erzielten Ergebnisse, deutliche Unterschiede in den jeweiligen stochastischen Prozessen: Während man in den Turbulenzdaten auch in positiver Richtung noch eine deterministische Entwicklung, das Relaxieren von Fluktuationen, feststellen kann, verschwindet der Driftkoeffizient bei den Finanzdaten bei Umkehrung der Prozessrichtung.

Ob sich dieses Verhalten auf allen Skalen  $\tau$  findet, oder ob auf grösseren Skalen nicht doch auch bei den Wechselkursdaten ein deterministischer Term auftritt, werden zukünftige Untersuchungen zeigen müssen. Von Interesse dürften ausserdem auch eine analoge Analyse mehrerer unterschiedlicher Datensätze sein (neben weiteren Wechselkursen vor allem auch Aktienkurse) sowie die Übertragung der Analyse-

methode vom Preisinkrement auf die üblicherweise verwendeten Renditen (returns) bzw. deren Logarithmen.

Ebenfalls von sehr grossem Interesse dürfte die Frage sein, ob es auch für Finanzmärkte eine um zusätzliche Variablen erweiterte Beschreibung gibt, die die Statistik des Preisinkrements auf einen normalverteilten Prozess zurückführt, analog zur in Kapitel 8 vorgestellten zweidimensionalen Analyse der turbulenten Kaskade. Geeignete zusätzliche Variablen für eine solche erweiterte Beschreibung könnte zum einen die oft diskutierte sog. Volatilität sein, ein lokales Mass für die betragsmässige Stärke der Schwankungen des Kurses [100], oder eventuell auch die Anzahl oder das Umsatzvolumen der Transaktionen (Kauf bzw. Verkauf einer bestimmten Aktie oder Währung), die in einem gegebenen Zeitintervall stattgefunden haben.

# Literaturverzeichnis

- [1] P.-O. Amblard & J.-M. Brossier. On the cascade in fully developed turbulence. The propagator approach versus the Markovian description. *Eur. Phys. J. B* **12**, 579 (1999).
- [2] F. Anselmet, Y. Gagne, E. J. Hopfinger & R. A. Antonia. High-order structure functions in turbulent shear flows. *J. Fluid Mech.* **140**, 63 (1984).
- [3] R. A. Antonia & B. R. Pearson. Scaling exponents for turbulent velocity and temperature increments. *Europhys. Lett.* **40**(2), 123 (1997).
- [4] R. A. Antonia, B. R. Pearson & T. Zhou. Reynolds number dependence of second-order velocity structure functions. *Phys. Fluids* **12**(11), 3000–3006 (2000).
- [5] T. Arimitsu. Analysis of fully developed turbulence in terms of Tsallis statistics. *Phys. Rev. E* **61**(3), 3237 (2000).
- [6] A. Arneodo et al. Structure functions in turbulence, in various flow configurations, at Reynolds number between 30 and 5000, using extended self-similarity. *Europhys. Lett.* **34** (6), 411 (1996).
- [7] A. Arneodo, J.-F. Muzy & D. Sornette. “Direct” causal cascade in the stock market. *Eur. Phys. J. B.* **2**, 277 (1998).
- [8] D. Aronson & L. Löfdahl. The plane wake of a cylinder. Measurements and inferences on the turbulence modelling. *Phys. Fluids A* **5**, 1433 (1993).
- [9] L. Bachelier. *Theorie de la speculation*, Dissertation, Ecole Normal Superieure III-17, 1900.
- [10] St. Barth & M. Karth. *Messungen und Analyse der turbulenten Nachlaufströmung eines Zylinders*. Diplomarbeit, Oldenburg, 2001.
- [11] G.K. Batchelor. *The theory of homogeneous turbulence*. Cambridge, 1953.
- [12] C. Beck. Application of generalized thermostatistics to fully developed turbulence. *Physica A* **277**, 115 (2000).
- [13] R. Benzi, S. Ciliberto, R. Tripiccion, C. Baudet & S. Succi. Extended self-similarity in turbulent flows. *Phys. Rev. E* **48**(1), 29 (1993).

- [14] R. Benzi et al. On the scaling of 3-dimensional homogeneous and isotropic turbulence. *Physica D* **80**(4), 385–398 (1995).
- [15] R. Benzi, L. Biferale & F. Toschi. Multiscale velocity correlations in turbulence. *Phys. Rev. Lett* **80**(15), 3244 (1998).
- [16] F. Black & M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of political economy* **81**(3), 637–659 (1973).
- [17] F. Böttcher. *Untersuchungen der kleinskaligen Turbulenz im atmosphärischen Windfeld und in Zylindernachlaufströmungen mit Hilfe statistischer Methoden*. Diplomarbeit, Oldenburg, 2000.
- [18] T. Bollerslev. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *J. Econom.* **31**, 307–327 (1986).
- [19] T. Bollerslev, R. Y. Chou & K. F. Kroner. ARCH modeling in finance: a review of the theory and empirical evidence. *J. Econom.* **52**, 5–59 (1992).
- [20] L. Breiman. *Probability*. Addison–Wesley, Boston, 1968.
- [21] W. Breymann, S. Gashghaie & P. Talkner. A stochastic cascade model for FX dynamics. *Int. J. Theor. Appl. Finance* **3**(3), 357–360 (2000).
- [22] I. N. Bronstein & K. A. Semendjajew *Taschenbuch der Mathematik*. Teubner, Stuttgart, 1991.
- [23] B. Castaing, Y. Gagne & E.J. Hopfinger. Velocity probability density functions of high Reynolds number turbulence. *Physica D* **46**, 177 (1990).
- [24] B. Castaing. The temperature of turbulent flows. *J. Phys. II France*, **6**(1), 105 (1996).
- [25] J. L. McCauley. The futility of utility: how market dynamics marginalize Adam Smith. *Physica A* **285**(3–4), 506–538 (2000).
- [26] B. Chabaud, A. Naert, J. Peinke, F. Chilla, B. Castaing & B. Hébral. A transition toward developed turbulence. *Phys. Rev. Lett.* **73**, 227 (1994).
- [27] O. Chanal *Vers les échelles dissipatives dans un jet d’Hélium gazeux à basse température*. Dissertation, Grenoble, 1998.
- [28] O. Chanal, B. Chabaud, B. Castaing & B. Hébral. Intermittency in a turbulent low temperature gaseous helium jet. *Eur. Phys. J. B* **17**(2), 309–317 (2000).
- [29] R. Cont & J. P. Bouchaud. Herd behaviour and aggregate fluctuations in financial markets. Preprint cond-mat/9712318 (1997).
- [30] J. Davoudi & M. R. Tabar. Theoretical model of the Kramers-Moyal description of turbulence cascades. *Phys. Rev. Lett.* **82**, 1680 (1999).

- [31] J. Davoudi & M. R. Tabar. Multi-scale correlation functions in strong turbulence. *Phys. Rev. E* **61**, 6563 (2000).
- [32] A. A. Donkov, A. D. Donkor & E. I. Grancharov. The exact solutions of one Fokker-Planck type equation used by R. Friedrich and J. Peinke in the stochastic model of a turbulent cascade. Preprint, math-phy/9807010 (1998).
- [33] B. Dubrulle. Affine Turbulence. *Eur. Phys. J. B*, **13**, 1 (2000).
- [34] H. Eckelmann *Einführung in die Strömungsmesstechnik*. Teubner, Stuttgart, 1997.
- [35] R. F. Engel & M. Rothschild (Hrsgb.) *J. Econom.* **52** (Suppl.).
- [36] A. L. Fairhall, V. L'vov & I. Procaccia. Dissipative scaling functions in Navier–Stokes turbulence: Experimental tests. *Europhys. Lett.* **43**(3), 277 (1998).
- [37] R. Friedrich & J. Peinke. Description of a turbulent cascade by a Fokker-Planck equation. *Phys. Rev. Lett.* **78** (5), 863 (1997).
- [38] R. Friedrich & J. Peinke. Statistical properties of a turbulent cascade. *Physica D* **102** (1-2), 147 (1997).
- [39] R. Friedrich, J. Zeller & J. Peinke. A note on the three-point statistics of velocity increments in turbulence. *Europhys. Lett.* **41**, 143 (1998).
- [40] R. Friedrich, J. Peinke & C. Renner. How to quantify deterministic and random influences on the statistics of the foreign exchange market. *Phys. Rev. Lett.*, **84**, 5224 (2000).
- [41] U. Frisch. *Turbulence*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [42] Th. Galla *Intermittenzanalyse in der voll entwickelten Turbulenz*. Diplomarbeit, Universität Bayreuth, 1997.
- [43] A. R. Gallant, D. Hsieh & G. Tauchen. Estimation of stochastic volatility models with diagnostics. *J. Econom.* **81**, 159–192 (1997).
- [44] M. Geiger *Untersuchungen zur Strukturbildung im Nahfeld einer Freistrahlsströmung mit optischen Methoden*. Diplomarbeit, Universität Oldenburg, 2000.
- [45] S. Ghashghaie, W. Breymann, J. Peinke, P. Talkner, & Y. Dodge. Turbulent cascades in foreign exchange markets. *Nature*, **381**, 767 (1996).
- [46] E. Ghysels, A. Harvey & E. Renault. Stochastic volatility. In: G. S. Maddala & C. R. Rao (Hrsgb.) *Handbook of Statistics*, Vol. 14, Elsevier, Amsterdam, pp. 119–191 (1996).
- [47] D. T. Gillespie. *Markov Processes*. Academic Press, Boston, 1992.
- [48] E. Gledzer. On the Taylor hypothesis corrections for measures of energy spectra of turbulence. *Physica D* **104**, 163 (1997).

- [49] P. Hänggi & H. Thomas. Stochastic processes: Time evolution, symmetries and linear response. *Physics Reports*, **88**, 207 (1982).
- [50] J. Herweijer & W. van de Water. Universal Shape of Scaling Functions in Turbulence. *Phys. Rev. Lett.* **74** (23), 4651–4654 (1995).
- [51] R. J. Hill. Corrections to Taylor’s frozen turbulence approximation. *Atmospheric Research* **40** (1996).
- [52] I. Hosokawa, S. Oide & K. Yamamoto. Isotropic turbulence: Important differences between true dissipation rate and its one-dimensional surrogate, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 4548 (1996).
- [53] J. C. Hull *Options, Futures and other Derivatives*, 3d. edition. Prentice–Hall, London, 1997.
- [54] H. Kahalerras, Y. Malecot & Y. Gagne. Intermittency and Reynolds number. *Phys. Fluids* **10**(4), 910 (1998).
- [55] M. Kern *Messung von Druck und Geschwindigkeit in einem turbulenten Freistrahle*. Diplomarbeit, Universität Bayreuth, 1996.
- [56] M. Kholmyansky, A. Tsinober & S. Yorish. Velocity derivatives in the atmospheric surface layer at  $Re = 10^4$ . *Phys. Fluids* **13** (1), 311 (2001).
- [57] A. N. Kolmogorov. Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Math. Ann.* **104**, 415–458 (1931).
- [58] A. N. Kolmogorov. The local structure of turbulence in an incompressible viscous fluid for very high Reynolds number. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* **30**, 301 (1941).
- [59] A. N. Kolmogorov. A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high Reynolds number. *J. Fluid Mech.* **13**, 82 (1962).
- [60] L. D. Landau & E. M. Lifschitz *Fluid Mechanics*, 2nd edition. Pergamon Press, Oxford, 1987.
- [61] M. Lesieur. *Turbulence in Fluids*. Kluwer, Dordrecht, 1997.
- [62] E. Lindborg. Correction to the fourth-fifths law due to variations of the dissipation. *Phys. Fluids* **11**, 510 (1999).
- [63] St. Lück, J. Peinke & R. Friedrich. A uniform statistical description of the transition between near and far field turbulence in a wake flow. *Phys. Rev. Lett.* **83**(26), 5495 (1999).
- [64] St. Lück *Skalenaufgelöste Experimente und statistische Analysen von turbulenten Nachlaufströmungen*. Dissertation, Universität Oldenburg, 2001.

- [65] V. L’vov & I. Procaccia. Fusion Rules in turbulent systems with flux equilibrium. *Phys. Rev. Lett.* **76**(16), 2898 (1996).
- [66] V. L’vov & I. Procaccia. Towards a nonperturbative theory of hydrodynamic turbulence: Fusion rules, exact bridge relations, and anomalous viscous scaling functions. *Phys. Rev. E* **54**(6), 6268 (1996).
- [67] V. L’vov & I. Procaccia. Analytic calculation of the anomalous exponents in turbulence: Using the fusion rules to flush out a small parameter. *Phys. Rev. E* **62**(6), 8037 (2000).
- [68] Y. Malecot, C. Auriault, H. Kahalerras, Y. Gagne, O. Chanal, B. Chabaud & B. Castaing. A statistical estimator of turbulence intermittency in physical and numerical experiments. *Eur. Phys. J. B* **16**, 549–561 (2000).
- [69] R. Mantenga & H. E. Stanley. Turbulence and financial markets. *Nature* **383**, 767 (1996).
- [70] R. Mantenga & H. E. Stanley *An introduction to econophysics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [71] P. Marcq & A. Naert. A Langevin equation for the energy cascade in fully developed turbulence. *Physica D* **124** (4), 368–381 (1998).
- [72] P. Marcq & A. Naert. A Langevin equation for turbulent velocity increments. preprint.
- [73] F. Moisy, P. Tabeling & H. Willaime. Kolmogorov equation in a fully developed turbulence experiment. *Phys. Rev. Lett.* **82**, 3994 (1999).
- [74] A. S. Monin & A. M. Yaglom *Statistical Fluid Mechanics*. MIT Press, Cambridge, 1975.
- [75] N. Mordant, J.-F. Pinton & F. Chilla. Characterization of turbulence in a closed flow. *J. Phys. II* **7**(11), 1729–1742 (1997).
- [76] J. F. Muzy, J. Delour & E. Bacry. Modelling fluctuations of financial time series: from cascade process to stochastic volatility model. *Eur. Phys. J. B* **17**(3), 537–548 (2000).
- [77] A. Naert, R. Friedrich & J. Peinke. Fokker-Planck equation for the energy cascade in turbulence. *Phys. Rev. E* **56** (6), 6719–6722 (1997).
- [78] A. Naert, B. Castaing, B. Chabaud, B. Hebral & J. Peinke, Conditional statistics of velocity fluctuations in turbulence. *Physica D* **113** (1), 73–78 (1998).
- [79] A. M. Obukhov. Some specific features of atmospheric turbulence. *J. Fluid Mech.* **13**, 77 (1962).
- [80] G. Pedrizzetti & E. A. Novikov. On Markov modelling of turbulence. *J. Fluid Mech.* **280**, 69 (1994).

- [81] G. Pedrizzetti. Quadratic Markov modelling for intermittent turbulence. *Phys. Fluids* **11**(6), 1694 (1999).
- [82] J. Peinke, M. Klein, A. Kittel, A. Okninsky, J. Parisi & O. E. Roessler. On chaos, fractals and turbulence. *Physica Scripta* **T49**, 672 (1993).
- [83] J. Peinke, B. Castaing, B. Chabaud, F. Chilla, B. Hebral & A. Naert. On a fractal and experimental approach to turbulence. In *Fractals in the Natural and Applied Sciences*, p. 295, Elsevier (1994).
- [84] A. M. Polyakov. Turbulence without pressure. *Phys. Rev. E* **52**(6), 6183 (1995).
- [85] S. B. Pope. *Turbulent flows*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [86] L. Prandtl, K. Oswatitsch, & K. Wiegardt. *Führer durch die Strömungslehre*. 9te Auflage, Vieweg, Wiesbaden, 1990.
- [87] W. H. Press et al. *Numerical Recipes in C. The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, Cambridge, 1986.
- [88] N. Rajaratnam *Turbulent Jets*. Elsevier, Amsterdam, 1976.
- [89] B. Reisner, Ch. Renner, St. Lück, J. Peinke, F. Chillà & R. Friedrich. A New Method to Characterize Inhomogeneous Turbulence. In *Fundamental Problematic Issues in Turbulence*, pp. 361- 364, Birkhäuser, Basel (1999).
- [90] Ch. Renner *Über Untersuchungen der Statistik von Geschwindigkeitsfluktuationen in einem turbulenten Freistrahle*. Diplomarbeit, Universität Bayreuth, 1997.
- [91] Ch. Renner, B. Reisner, St. Lück, J. Peinke & R. Friedrich. On the Statistics of Small Scale Turbulence and its Universality. In *Fundamental Problematic Issues in Turbulence*, pp. 353- 360, Birkhäuser, Basel (1999).
- [92] Ch. Renner, J. Peinke & R. Friedrich. Experimental Indications for Markov properties of small-scale turbulence. *J. Fluid Mech.*, **433**, 383 (2001).
- [93] Ch. Renner, J. Peinke & R. Friedrich. Evidence of Markov properties of high frequency exchange rate data. *Physica A* **298**(3-4), 499-520 (2001).
- [94] L. F. Richardson *Weather prediction by Numerical process*. Cambridge University Press, Cambridge, 1922.
- [95] H. Risken. *The Fokker-Planck equation*. Springer, Berlin, 1984.
- [96] G. P. Romano & R. A. Antonia. Evaluation of LDA temporal and spatial velocity structure functions in a low Reynolds number turbulent channel flow. *Experiments in Fluids*, **27**, 468 (1999).
- [97] H.-J. Roß. *Aufbau eines Freistrahle-Experiments*. Diplomarbeit, Bayreuth (1995).
- [98] F. Schmitt, D. Schertzer & S. Lovejoy. Multifractal analysis of foreign exchange data. *Appl. Stoch. Model A* **15**(1), 29-53 (1999).

- [99] Z.-S. She & E. Leveque. Universal scaling laws in fully developed turbulence. *Phys. Rev. Lett.* **72**, 336–339 (1994).
- [100] A. N. Shiriyayev. *Essentials of stochastic finance*. World Scientific Press, Singapore, 1999.
- [101] M. Siefert. *Analyse nichtlinearer Diffusionsprozesse*. Diplomarbeit, Universität Oldenburg, 2000.
- [102] S. Siegert, R. Friedrich & J. Peinke. Analysis of data sets of stochastic systems. *Phys. Lett A* **243**(5-6), 275–280 (1998).
- [103] K. R. Sreenivasan & B. Dhruva. Is there scaling in high Reynolds number turbulence? *Prog. Theo. Phys. Suppl.* **130**, 103–120 (1998).
- [104] H. E. Stanley et al. Quantifying fluctuations in economic systems by adapting methods of statistical physics. *Physica A*, **287**, 339 (2000).
- [105] D. Stauffer & D. Sornette. Self-organized percolation model for stock market fluctuations. *Physica A*, **271**, 496 (1999).
- [106] G. Stolovitzky, C. Meneveau & K. R. Sreenivasan. Comment on “Isotropic turbulence: Important differences between true dissipation rate and its one-dimensional surrogate”, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 3883 (1998).
- [107] D. Sornette. Fokker-Planck equation of distributions of financial returns and power laws. *Physica A*, **290**, 211 (2001).
- [108] P. Tabeling & O. Cardoso (Hrsg.) *Turbulence - A Tentative Dictionary*. Plenum Press, New York, 1994.
- [109] S. J. Taylor. Modelling stochastic volatility: a review and comparative study. *Math. Finance* **4**, 183–204 (1994).
- [110] C. Tsallis. Possible generalization of Boltzmann–Gibbs statistics. *J. Stat. Phys.* **52**, 479–487 (1988).
- [111] Nicole Voges. *Statistische Untersuchungen der Energiedissipationsraten im turbulenten Freistrah*. Studienarbeit, Universität Oldenburg, 1999.
- [112] J. Voit. *The statistical mechanics of financial markets*. Springer, Heidelberg, 2001.
- [113] V. Yakhot. Probability density and scaling exponents of the moments of longitudinal velocity difference in strong turbulence. *Phys. Rev. E* **57**(2), 1737 (1998).
- [114] J. Zeller. *Statistische Eigenschaften der turbulenten Kaskade*. Diplomarbeit, Universität Stuttgart, 1997.



# Erklärung

Ich erkläre hiermit, dass ich die vorliegende Arbeit selbst verfasst und nur die im Literaturverzeichnis angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

Oldenburg, den 22.04.2002

.....

(Christoph Renner)



# Lebenslauf

## Persönliche Daten

Name	Christoph Alexander Renner
Geburtsdatum	24.10.1970
Geburtsort	Marktoberdorf

## Schulbildung

09.77 - 07.81	Grundschule Füssen
09.81 - 05.90	Gymnasium Füssen

## Studium

11.91 - 03.96	Studium der Physik (Diplom) an der Universität Bayreuth
06.96 - 07.97	Diplomarbeit am Lehrstuhl für Experimentalphysik II der Uni- versität Bayreuth (Prof. Schwörer), Arbeitsgruppe Hydrody- namik unter Priv.-Doz. Dr. J. Peinke.

## Wissenschaftliche Arbeit

09.97 - 03.98	Stipendiat des Graduiertenkollegs Nichtlineare Spektroskopie und Dynamik, Forschungs- und Lehrtätigkeit an der Uni- versität Bayreuth.
04.98 - 09.02	Promotion an der Universität Oldenburg