

Theoretische Aspekte der Regelung eines frequenzverdoppelten Festkörperlasers und der Einfluß von Rauschen auf seine Dynamik

Vom Fachbereich Physik der
Carl von Ossietzky-Universität Oldenburg
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)
angenommene Dissertation

von

Tobias Letz
geboren am 03.12.1968
in Braunschweig

November 2001

Wisst ihr denn nicht, daß das *Chaos* der Vater allen Seins ist?
Voltaire

1. Gutachter: Prof. Dr. Jürgen Parisi
 2. Gutachter: Priv.-Doz. Dr. Holger Kantz
 3. Gutachter: Priv.-Doz. Dr. Achim Kittel
- Tag der Disputation: 21.12.2001

Theoretische Aspekte der Regelung eines frequenzverdoppelten Festkörperlasers und der Einfluß von Rauschen auf seine Dynamik

Vom Fachbereich Physik der
Carl von Ossietzky-Universität Oldenburg
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)
angenommene Dissertation

von

Tobias Letz
geboren am 03.12.1968
in Braunschweig

November 2001

Wisst ihr denn nicht, daß das *Chaos* der Vater allen Seins ist?
Voltaire

1. Gutachter: Prof. Dr. Jürgen Parisi
 2. Gutachter: Priv.-Doz. Dr. Holger Kantz
 3. Gutachter: Priv.-Doz. Dr. Achim Kittel
- Tag der Disputation: 21.12.2001

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung und Motivation	1
2	Physikalische Grundlagen des verwendeten Lasers	5
2.1	Wechselwirkung zwischen Licht und Materie	5
2.1.1	Spontane Emission	6
2.1.2	Linienverbreiterung	7
2.1.3	Absorption und stimulierte Emission	9
2.1.4	Einfache atomare Ratengleichung	10
2.1.5	Frequenzverdopplung und Summenfrequenzbildung	10
2.2	Aufbau des Lasers	12
2.2.1	Fabry-Perot-Resonator	13
2.2.2	Vier-Niveau-Pump-Schema im laseraktiven Medium	14
2.2.3	Der diodengepumpte resonatorintern frequenzverdoppelte Festkörperlaser	16
2.3	Theoretische Beschreibung der Dynamik	17
2.3.1	Räumlich ausgedehntes Ratengleichungsmodell	19
2.3.2	Reduziertes Ratengleichungsmodell	19
3	Regelung der Laserdynamik	23
3.1	Grundsätzliche Betrachtungen zur Chaoskontrolle	23
3.2	Regelung des Modells	24
3.2.1	Konstante Ausgangsleistung – ein Fixpunkt	24
3.2.2	Stabilität des Fixpunktes ohne Regeleingriff	25
3.2.3	Stabilität des Fixpunktes mit Regeleingriff	29
3.3	Experimentelle Umsetzung	32
3.3.1	Der experimentelle Aufbau	32
3.3.2	Die Regelung im Experiment	37
3.3.3	Experimentelle Ergebnisse	38
3.4	Erklärung der Abweichungen der Beobachtungen von der Theorie	40
3.5	Alternative Regeleingriffe mit Rückkopplung auf einen Systemparameter	45
3.5.1	Differentielle und gemischt proportional-differentielle Rückkopplung	45
3.5.2	Wandlungseffizienz als Eingriffsparameter	46
3.6	Erweiterter Regeleingriff auf zwei Systemparameter	49
3.6.1	Vorexperimente	50
3.6.2	Theoretische Vorhersagen	53
3.7	Zusammenfassung zur Regelung der Laserdynamik	55

4	Reduktion von dynamischem Rauschen	59
4.1	Problemstellung	59
4.1.1	Chaos und Rauschen	61
4.1.2	Bekannte Rauschunterdrückungsverfahren für Zeitreihen von chaotischen Systemen	61
4.1.3	Rauschquellen im Laser	63
4.2	Charakteristische Größen von chaotischen Systemen	65
4.2.1	Dimensionen	65
4.2.2	Lyapunovexponenten	67
4.3	Detektion von dynamischem Rauschen und Rekonstruktion der determi- nistischen Dynamik	69
4.4	Verifikation über die Anwendung auf numerisch erzeugte Daten	71
4.4.1	Das verwendete numerische System — der Rössler-Attraktor	72
4.4.2	Ergebnisse für die numerisch erzeugten Daten	74
4.5	Anwendung auf experimentelle Daten vom Laser	85
4.5.1	Das Bifurkationsdiagramm für den Laser	85
4.5.2	Bestimmung der Einbettungsparameter	85
4.5.3	Rekonstruktion der rauschbereinigten Dynamik	86
4.5.4	Charakterisierung der Dynamik	89
4.6	Zusammenfassung zur Rauschreduktion	91
5	Resümee und Ausblick	93
	Literaturverzeichnis	95

1 Einleitung und Motivation

An den Anfang möchte ich zunächst zwei Fragen stellen, die in diesem Abschnitt zum Teil und im Verlauf der Arbeit eingehender beantwortet werden sollen. Was ist ein *Laser*? Und warum beschäftigt man sich mit einem resonatorintern frequenzverdoppelten Festkörperlaser?

Obwohl das Wort *Laser* im allgemeinen als eigenständiges Substantiv gebraucht wird, ist es eigentlich eine Abkürzung. *LASER* steht im Englischen für *light amplification through stimulated emission of radiation* (Verstärkung von Licht durch stimulierte Emission von Strahlung). Damit wird schon der für Laser-Aktivität entscheidende, von Albert Einstein postulierte, quantenmechanische Effekt der stimulierten Emission erwähnt. Er besagt, daß Licht einer bestimmten Energie in Materie einen angeregten Zustand unter zusätzlicher Aussendung (und damit Verstärkung) von Licht derselben Energie zerfallen lassen kann. Dabei bedeutet Licht einer bestimmten Energie im Wellenbild von elektromagnetischen Wellen eine bestimmte Frequenz und Vakuumwellenlänge und damit eine Farbe. Der Effekt der stimulierten Emission ist eine von drei Wechselwirkungen zwischen Licht und Materie. Die Absorption von Licht einer bestimmten Energie führt unter Anregung der Materie zum Verschwinden dieses Lichts und die spontane Emission wiederum führt zum zufälligen Zerfall einer solchen Anregung unter Aussendung von Licht.

Eine weitere wichtige Zutat für einen Laser ist ein Resonator. Zwischen zwei Wände passen nur solche Wellen, die sich beim Hin- und Zurücklaufen nicht selber auslöschen. Dieses bildet eine Zwangsbedingung für die möglichen Wellenlängen.

Damit hat man jetzt eigentlich schon von den physikalischen Grundlagen her alles, um einen Laser zu aufzubauen. Ein Medium wird zwischen zwei Wände (im optischen Fall: Spiegel) plazierte. Unter Ausnutzung der Absorption wird es angeregt. Zwischen den Spiegeln bilden sich Wellen aus, die sich durch stimulierte Emission selbst verstärken. Wenn nun einer der Spiegel leicht durchlässig ist, entweicht dort dem Resonator sehr einfarbiges (monochromatisches) Licht, dessen Wellen zudem in Phase (kohärent) sind. Eine weitere Eigenschaft von Laserlicht ist der stark gebündelte Strahl, der aus dem Resonator austritt.

Die Erfindung des Lasers in den 50er Jahren eröffnete neue technische Anwendungen. In der Meßtechnik sind Auflösungen bis in den Nanometerbereich (10^{-9}m) möglich geworden. Mit dem stark fokussierten Strahl können Materialien bearbeitet werden (z.B. schweißen, härten). In der Medizin wird mit Hilfe von Lasern diagnostiziert und therapiert. Informationen können mit hoher Dichte geschrieben und gelesen werden (Musik-CD, CD-ROM).

Eine weitere Anwendung ist ein Laser-Video-Display, bei dem mit Ablenkspiegeln

das Licht von drei Lasern in den drei Grundfarben Rot, Grün und Blau über die Projektionsfläche gerastert wird. Diese Anwendung war eine Motivation für unsere Arbeitsgruppe, sich im Rahmen eines BMBF-geförderten Projektes mit einem resonatorintern frequenzverdoppelten Festkörperlaser, der Licht im grünen Spektralbereich aussendet, zu beschäftigen. Diese Laser sind gute Kandidaten für den Einsatz in solchen Displays (auch für den Massenmarkt), da sie, bei moderaten Preisen, kompakt, robust und leistungsstark aufgebaut werden können. Andere Lasertypen, wie Gas- oder Farbstofflaser, die Licht im sichtbaren Spektralbereich aussenden, erfüllen die Anforderungen nach Kompaktheit und niedrigen Preisen nicht. Laser auf Basis von Halbleitern stehen zwar im roten Spektralbereich zur Verfügung. Für kürzere Wellenlängen (grün, blau) sind Laserdioden auf Gallium-Nitrid-Basis jedoch erst in einigen Jahren mit ausreichenden Lebensdauern zu erwarten.

Einen entscheidenden Nachteil haben resonatorintern frequenzverdoppelte Festkörperlaser jedoch: da Festkörperlaser aufgrund der möglichen atomaren Übergänge Licht mit größeren Wellenlängen (infrarot) emittieren, muß dieses Licht mit Hilfe von optisch nichtlinearen Elementen in sichtbares Licht konvertiert werden. Um diesen Wandlungsprozeß besonders effektiv zu gestalten, wird das optisch nichtlineare Element innerhalb des Laserresonators plaziert. Diese Konstruktion führt aber zu irregulären (chaotischen) zeitlichen Fluktuationen des emittierten Lichts, die einen Einsatz in vielen Bereichen unmöglich machen.

Diese Eigenschaften solcher Laser waren dann auch die Beweggründe der Oldenburger Arbeitsgruppe, die sich mit nichtlinearer Dynamik beschäftigt, sich auf das neue und unbekannte Terrain der Laserphysik zu begeben. Der Rahmen des BMBF-Projektes war schließlich durch den Titel „Technische Anwendung von Methoden der nichtlinearen Dynamik“ im Arbeitsgebiet der Gruppe angesiedelt. Bezogen auf den Laser galt das Vorhaben, mit Chaostrollmethoden die Fluktuationen der Laserstrahlung zu unterdrücken bzw. zu bändigen. Solche Chaostrollmethoden nutzen spezifische Eigenschaften von chaotischen Systemen aus. Hier gilt zu beachten, daß Chaos aus der Sicht der nichtlinearen Dynamik nicht, wie im Volksmund, vollkommene Unordnung und Zufall bedeutet, sondern im Sinne des Ursache-Wirkungs-Prinzips der klassischen Physik deterministischen Gesetzen folgt. Weiterhin setzen die Chaostrollmethoden eigentlich keine detaillierten Kenntnisse über das zu beherrschende System voraus, das Experiment sollte also als *black box* betrachtet werden können. Leider ist der Konjunktiv hier richtig gebraucht, und der Einstieg in die Laserphysik war tiefer als geplant. Das „leider“ gilt hier für die Anwendung der Chaostrollmethoden, zum Glück aber nicht für den Zwang, sich weitergehend mit dem Experiment zu beschäftigen, da sich so ein interessantes und weites Arbeitsfeld auftat. So führten das tiefere Verständnis des Lasers und die Analyse eines mathematischen Modells desselben zu einem Regelschema, um die Laserausgangsintensität konstant zu halten. Die Regelung wurde dann auch erfolgreich im Experiment umgesetzt und führte schließlich auch zu einer Patentanmeldung.

In einem Betrachtungswinkel des Lasers spielt der Zufall dann aber doch eine Rolle. Die nichtlineare Dynamik ist ein recht mathematisch geprägtes Arbeitsfeld auf dem Gebiet der klassischen Physik, wo es eigentlich keinen Zufall gibt. Die physikalischen Grundlagen des Lasers aber beruhen auf den Gesetzen der in den 20er Jahren des letzten

Jahrhunderts entwickelten Quantenmechanik, die den Zufall in die Physik eingebracht hat. In der Quantenmechanik werden über Zustände und Entwicklungen von sehr kleinen Systemen, wie z. B. Atome, nur Wahrscheinlichkeiten, nicht aber feste Werte, angegeben. Im Falle von Lasern bedeutet dies, daß einerseits die statistischen Aussagen über größere Mengen solcher kleinen Systeme, wie der am Laser-Prozeß beteiligten Atome, zwar in sehr guter Näherung durch klassische, deterministische Gesetze gegeben sind. Mikroskopisch jedoch herrscht der Zufall der Quantenmechanik. Damit deutet sich an, daß solche oszillierenden Laser sich in einem Übergangsbereich zwischen Chaos und Zufall befinden und an ihnen sehr gut die Interaktion zwischen diesen beiden an sich gegensätzlichen Eigenschaften studiert werden kann.

Diese beiden unterschiedlichen Blickwinkel auf Laser spiegeln sich dann auch deutlich in der Gliederung dieser Arbeit wider. Zunächst geht es im Kapitel 2 darum, die theoretischen Grundlagen für das Verständnis der beiden folgenden Kapitel zu schaffen. Hier werden die oben schon angesprochenen physikalischen Grundlagen zur Verstärkung von Licht durch stimulierte Emission detailliert angeführt. Weiterhin werden dort die Bereiche der nichtlinearen Optik angesprochen, die für das Verständnis der Frequenzkonversion von infrarotem in grünes Licht notwendig sind. Die Beschreibung optischer Resonatoren soll für den Leser das physikalische Bild des im Experiment verwendeten Lasers abrunden. Zudem wird im Grundlagenkapitel ein Ratengleichungsmodell zur mathematischen Beschreibung der Fluktuationen des Laserlichts eingeführt, wobei dann auch die vorher erwähnten physikalischen Grundlagen des Lasers verwendet werden.

Kapitel 3 beschäftigt sich mit der Unterdrückung der Fluktuationen des Laserlichts. Dazu wird zunächst aus den in Kapitel 2 eingeführten Ratengleichungen ein Regelschema abgeleitet. Dann werden die im Rahmen der Vorgängerarbeit von F. Lange [lan01a] durchgeführte experimentelle Umsetzung des Regelschemas und deren Ergebnisse vorgestellt. Es folgt eine Erklärung der Abweichungen der experimentellen von den theoretischen Ergebnissen. Im Modell werden kurz alternative einfache Regelschemata diskutiert, die aber experimentell nicht umgesetzt wurden. Zum Ende des Kapitels wird ein erweitertes Regelschema vorgeschlagen, zu dem experimentelle Vorarbeiten gemacht wurden. In der Modellierung dieses erweiterten Regelschemas ist das System auch in Parameterbereichen stabilisierbar, in denen das zuerst beschriebene Schema nicht wirkt.

But now for something completely different. Wie schon angedeutet, wird der Laser in dieser Arbeit aus unterschiedlichen Blickwinkeln betrachtet. In Kapitel 4 geht es mehr um eine Charakterisierung der Dynamik des Lasers, als um ihre Beeinflussung. Experimentelle Beobachtungen, aber auch die zugrundeliegende Physik lassen erahnen, daß Rauschen im Laser eine Rolle spielt. Im Kapitel 4 soll, motiviert durch den Laser, die Trennung von deterministischen und zufälligen Anteilen in Daten behandelt werden. Dazu wird zunächst eine bekannte Methode für dieses Anliegen vorgestellt. Die Methode wird dann auf die Daten eines verrauschten Systems in einer numerischen Simulation angewendet und mit Hilfe von für das System bekannten Kenngrößen quantitativ bewertet. Schließlich wird die Methode auf Daten des Lasers angewendet und versucht, aus diesen Daten Kenngrößen einer rein deterministischen Dynamik zu extrahieren.

2 Physikalische Grundlagen des verwendeten Lasers

In diesem Kapitel werden zunächst die für das Experiment und die mathematische Modellierung der Dynamik des Lasers relevanten physikalischen Grundlagen, die detaillierter in Standardlehrbüchern (z.B. [sal91, sie86, sve98]) dargestellt sind, aufgeführt. Weiterhin wird die Funktionsweise des verwendeten resonatorintern frequenzverdoppelten Festkörperlaser genauer beschrieben. Im letzten Teil des Kapitels wird dann die theoretische Beschreibung des Lasers durch ein Ratengleichungsmodell, das sich in der Literatur zur Modellierung der Dynamik des betrachteten Festkörperlaser durchgesetzt hat, eingeführt.

2.1 Wechselwirkung zwischen Licht und Materie

Energie tritt gemäß den Gesetzen der Quantenmechanik in diskreten (gequantelten) Werten auf. Für die elektronischen Zustände in isolierten Atomen oder Ionen bedeutet dies, daß die Elektronen eben nur bestimmte Anregungszustände annehmen dürfen. Zudem darf sich in einem Anregungszustand nur ein Elektron aufhalten, da Elektronen als Fermionen einer *Fermi-Dirac*-Statistik gehorchen, bei der nach dem *Pauli*-Prinzip jeweils nur ein Fermion einen quantenmechanischen Zustand annehmen kann. In Festkörpern, die aus vielen einzelnen Atomen bestehen, überlagern diese diskreten Zustände zu kontinuierlichen Bändern. In der Laserphysik spielen diese Bänder aber nur bei Halbleitern eine Rolle. In der Regel begegnen einem in der Laserphysik die diskreten Energieniveaus von isolierten Atomen. Hier und im weiteren Text sind in diesem Zusammenhang, obwohl nur Atome erwähnt werden, auch Ionen (geladene Atome) und Moleküle (kleine Atomverbände) gemeint. Beispielfhaft seien hier an Lasertypen Farbstofflaser (Moleküle), Gaslaser (neutrale Atome und Ionen) und Festkörperlaser erwähnt. Bei Festkörperlaser, wie dem hier verwendeten Nd:YAG-Laser (Neodym-dotiertes Yttrium-Aluminium-Granat), befinden sich die vereinzelt Fremddionen des laseraktiven Materials (Neodym-Ionen) im Gitter des Wirtskristalls (Yttrium-Aluminium-Granat).

Die Besetzung der Energieniveaus folgt dabei den Gesetzen der Thermodynamik. Im thermodynamischen Gleichgewicht bei hohen Temperaturen ($T \approx 300$ K) kann für die Besetzungswahrscheinlichkeit $P(E_m)$ eines Energieniveaus der Energie E_m die klassische *Boltzmann*-verteilung $P(E_m) \propto \exp(-E_m/k_B T)$ angenommen werden. Dabei ist k_B die *Boltzmann*-konstante und T die absolute Temperatur. Dies bedeutet, daß energetisch höher liegende Zustände seltener besetzt werden, als energetisch niedriger liegende. Zu niedrigen Temperaturen wird die die Besetzung der Zustände hingegen durch die *Fermi*-

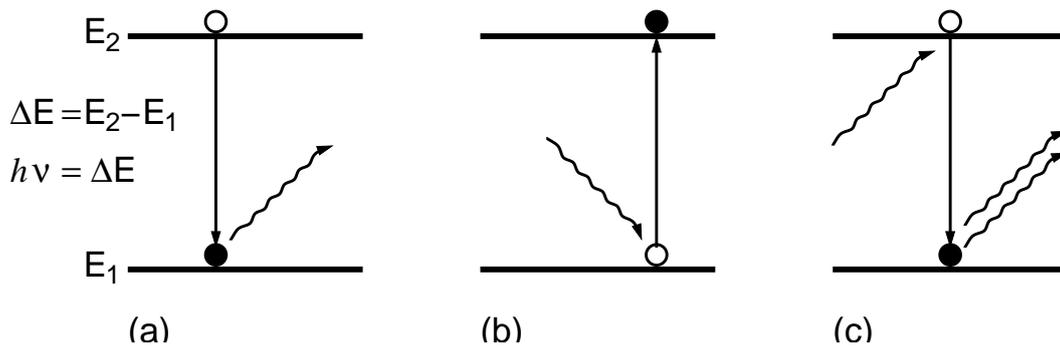


Abbildung 2.1: Schematische Darstellung der drei für Laseraktivität relevanten Wechselwirkungen zwischen Licht und Materie. (a) spontane Emission, (b) Absorption und (c) stimulierte Emission. Die Materie ist dabei durch ihre diskreten quantenmechanischen Energieniveaus E_1 und E_2 gekennzeichnet. Das wechselwirkende Licht ist durch seine Frequenz ν charakterisiert, die einzelnen Lichtquanten besitzen die Energie $h\nu$.

Verteilung beschrieben.

Ebenso tritt die Energie von Licht nur in diskreten Werten auf. Klassisch wird Licht durch elektromagnetische Wellen mit einer Wellenlänge λ und einer Frequenz ν beschrieben. Dabei besitzt das für das menschliche Auge sichtbare Licht Wellenlängen zwischen 400 und 800nm. Die unterschiedlichen Wellenlängen werden als unterschiedliche Farben wahrgenommen. Der verwendete frequenzverdoppelte Nd:YAG-Laser emittiert z. B. unter anderem Licht mit einer Wellenlänge von 532nm, was im grünen Spektralbereich liegt. Im Rahmen der Quantenmechanik ist die Beschreibung von Licht durch Teilchen (Welle-Teilchen-Dualismus) eingeführt worden. Ein solches Lichtteilchen, ein Photon, trägt dann die Energie $E = h\nu = hc/\lambda$, mit dem *Planckschen* Wirkungsquantum h und der Lichtgeschwindigkeit c .

Die Energiepakete in Materie und Licht können auf verschiedene Weisen aufeinander wirken. Diese möglichen Wechselwirkungen sind in Abb. 2.1 dargestellt und sollen im folgenden beschrieben werden. Die diskreten Energiepakete in Materie werden dabei durch die Differenzenergie ($\Delta E = E_2 - E_1$) zwischen zwei elektronischen Zuständen (1 und 2) charakterisiert.

2.1.1 Spontane Emission

Der spontane, zufällige Zerfall (Abb. 2.1 (a)) angeregter Zustände unter Aussendung von Licht ist ein uns alltäglich begegnendes Phänomen. Das Leuchten heißer Gegenstände, wie etwa dem Glühfaden in einer Glühlampe oder aber auch der Sonne, beruht hierauf. Dabei spielt auch die mittlere Verweildauer der Elektronen im energetisch höheren Niveau eine Rolle. Wenn das Medium nach Abschalten der Anregung noch relativ lange nachleuchtet, spricht man von Fluoreszenz. Dabei ergibt sich aus den physikalischen (quantenmechanischen) Eigenschaften des Übergangs von E_2 hin zu energetisch niedrigeren Niveaus die charakteristische Fluoreszenzdauer τ_f , zu der von einem Ensemble

aus anfänglich N_2 Atomen im angeregten (energetisch höher liegenden) Zustand E_2 im Mittel nur noch der $1/e$ -te Teil übrig ist.

Für den zeitlichen Verlauf der Zahl $N_2(t)$ der Atome im angeregten Zustand gilt für ein großes Ensemble die Differentialgleichung (DGL) $dN_2/dt = -\tau_f N_2$. Die DGL hat als analytische Lösung den exponentiellen Zerfall $N_2(t) = N_2(0) \cdot \exp(-t/\tau_f)$.

Der Zerfall eines energetisch höher liegenden Zustandes findet aber nicht nur unter Aussendung von Strahlung statt. Es gibt auch nichtstrahlende Übergänge zwischen Energieniveaus. Dabei geben die Elektronen die Energie z.B. an das umgebende Kristallgitter in Form von Phononen ab. Somit können einem Energieniveau zwei charakteristische Zeitskalen zugeordnet werden: zum einem die nichtstrahlende Zerfallszeit τ_1 , zum anderen die strahlende Zerfallszeit τ_2 . Für die Lebensdauer, die Fluoreszenzzeit τ_f , des Niveaus ist die schnellere der beiden Zeiten maßgeblich. Diese Zeit beträgt in Nd:YAG-Lasern $\tau_f = 230\mu\text{s}$.

2.1.2 Linienverbreiterung

Die Energie der abgestrahlten Photonen, und damit auch ihre Frequenzen, sind nicht unendlich scharf auf $\Delta E = E_2 - E_1$ (bzw. $\nu = \Delta E/h$ im Frequenzbild) begrenzt, sondern sind mit endlicher Wahrscheinlichkeit mit einer charakteristischen Verteilungsfunktion $\sigma(\nu)$ um den Mittelwert $\Delta\nu_0$ verteilt. Diese Funktion ist der Wirkungsquerschnitt des Übergangs und wird als Linienverbreiterung bezeichnet. Dabei werden zwei Arten der Verbreiterung, die zu zwei unterschiedlichen Formen des Wirkungsquerschnitts führen, unterschieden: die homogene und die inhomogene Linienverbreiterung. Die Unterscheidung zwischen diesen beiden Formen bezieht sich auf das betrachtete Ensemble von Atomen: im homogenen Fall können die Atome hinsichtlich ihrer Übergänge als gleich betrachtet werden, im inhomogenen Fall besitzen sie unterschiedliche Eigenschaften, z. B. Geschwindigkeiten oder lokale Felder im sie umgebenden Medium, was zu einer Verschiebung der Übergänge führt. Die Form und die Breite eines Übergangs gelten sowohl für die Wirkungsquerschnitte der spontanen Emission, als auch der weiter unten beschriebenen Absorption und der stimulierten Emission.

Homogene Linienverbreiterung durch endliche Lebenszeit

Homogene Linienverbreiterung tritt in Materie auf, bei der alle Atome als identisch angesehen werden können, und somit auch die Wirkungsquerschnitte für alle Atome identisch sind. In Festkörperlaser, wie dem Nd:YAG-Laser, ist dies der Fall.

Homogene Linienverbreiterungen lassen sich allgemein durch endliche Lebensdauern erklären. Solche endlichen Lebensdauern lassen sich zum einen durch exponentiell abfallende Schwingungen beschreiben, wie in Abb. 2.2 (a) dargestellt. Dies gilt für die durch die spontane Emission hervorgerufene natürlich homogene Linienverbreiterung. Dieser exponentielle Abfall führt zu einer Unschärfe in der Frequenz der Schwingung. Mathematisch wird dies durch die Fouriertransformation vom Zeit- in den Frequenzraum beschrieben. Aus dieser Transformation ergibt sich aus einer Schwingung mit der zentralen Frequenz ν_0 und der charakteristischen Zerfallszeit τ im Frequenzbild eine

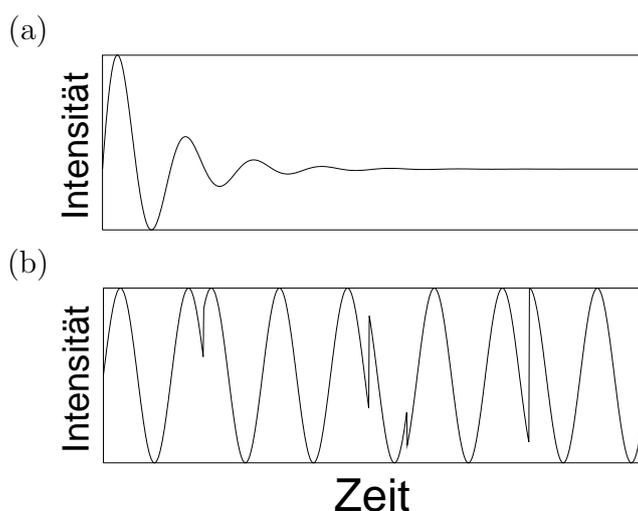


Abbildung 2.2: Zwei mögliche Zerfallsszenarien, die zu einer homogenen Linienverbreiterung eines Übergangs mit gleicher Halbwertsbreite führen. In (a) ist die spontane Emission, und damit die endliche Lebensdauer, eines Übergangs für einen exponentiellen Zerfall der Amplitude für die Linienverbreiterung verantwortlich. In (b) erfährt die Schwingung zufällige Phasenverschiebungen zu zufälligen Zeiten, man kann von einer mittleren Lebensdauer der Phase sprechen.

Wirkungsquerschnittsfunktion in der Form einer Lorentzkurve,

$$g(\nu) = \frac{\Delta\nu/2\pi}{(\nu - \nu_0)^2 + (\Delta\nu/2)^2} \quad (2.1)$$

mit dem Mittelwert ν_0 und der Halbwertsbreite $\Delta\nu$. Dabei ist die Halbwertsbreite $\Delta\nu$ gegeben durch $\Delta\nu = 1/2\pi\tau$.

Das würde für den Nd:YAG-Laser bei der gemessenen Zerfallszeit von $230\mu\text{s}$ eine Linienbreite von etwa 700Hz bedeuten. Die gemessene Linienbreite liegt aber bei 120GHz, was auf um mehrere Größenordnungen schnellere Prozesse im Material hindeutet.

Die bis hier beschriebenen Wechselwirkungen zwischen Licht und Materie können als inelastische Kollisionen zwischen den beteiligten Teilchen (Photonen, Atome) betrachtet werden. Die Teilchen, die dabei die inelastischen Stöße erfahren, sind die laseraktiven Neodym-Ionen, die im YAG-Gitter eingebettet sind, und dabei Gitterplätze von Yttrium-Atomen einnehmen. Neodym liegt hier dreifach positiv ionisiert im Gitter vor, weil es drei Elektronen in der äußersten Schale, die für Bindungen zur Verfügung stehen, weniger besitzt, als Yttrium. Die Dotierung mit Neodym in YAG liegt üblicherweise, und so auch im experimentell eingesetzten Laser, bei einem Prozent der Yttrium-Atome.

Homogene Linienverbreiterung durch elastische Phononen-Stöße

Neben den inelastischen Kollisionen der Photonen mit den verdünnt im Material verteilten, laseraktiven Ionen treten aber auch elastische Kollisionen mit den Schwingungszuständen (Phononen) des Wirtsgitters auf. Diese elastischen Stöße sind erheblich

häufiger, als die inelastischen Kollisionen mit den laseraktiven Teilchen, da diese nur sehr „verdünnt“ im Gitter verteilt vorliegen. Bei diesen Kollisionen zu zufällig verteilten Zeiten bleibt die Amplitude der Lichtwelle erhalten, sie erfährt aber einen Phasenversatz um einen zufälligen Wert. Man kann daher, im Vergleich zu einem exponentiellen Zerfall der Amplitude bei der spontanen Emission, von einer (mittleren) Lebensdauer der Phase der Schwingung sprechen, nämlich der mittleren Zeit zwischen zwei Kollisionen. In Abb. 2.2 (b) ist eine solche Schwingung dargestellt. Man erhält auch hier als Form der Verbreiterungsfunktion $g(\nu)$ eine Lorentzkurve, hier mit der Halbwertsbreite $\Delta\nu = 1/\pi\tau_k$. Dabei ist τ_k die mittlere Zeit zwischen den Kollisionen.

Da hier Kollisionen mit den Schwingungszuständen des Wirtsgitters stattfinden, ist es ersichtlich, daß diese Linienverbreiterung stark temperaturabhängig ist. Die Linienbreite von Nd:YAG von 120GHz bei Raumtemperatur bedeutet eine mittlere Zeit von etwa 1ps zwischen den Kollisionen.

Inhomogene Linienverbreiterung

Der Vollständigkeit halber sei hier noch die zweite Klasse von Linienverbreiterungen erwähnt. Sie tritt in Lasern auf, bei denen die laseraktiven Atome nicht als identisch angesehen werden können. Dies ist zum einen bei Festkörperlasern mit amorphem Wirtsmaterial (z. B. Nd:Glas) der Fall. Hier erfahren die Übergänge durch unterschiedliche Feldverzerrungen um einen Mittelwert normalverteilte Verschiebungen, durch die die Überlagerung der individuellen Übergänge zu einer gaussförmigen Verbreiterung

$$g(\nu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta\nu} \exp\left(-\frac{(\nu - \nu_0)^2}{2\Delta\nu^2}\right) \quad (2.2)$$

mit dem Mittelwert ν_0 und der Halbwertsbreite $\Delta\nu$ führt. Zum anderen tritt die inhomogene Linienverbreiterung in Gaslasern auf, bei denen die Übergänge in den sich relativ schnell bewegenden Atomen durch den Doppler-Effekt eine Verschiebung erfahren. Durch das gaussförmige Verteilungsprofil der Geschwindigkeiten (bzw. der Geschwindigkeitskomponente in Richtung des Laserstrahls) erhält man auch hier wieder eine gaussförmige Verbreiterung.

2.1.3 Absorption und stimulierte Emission

Bei der Absorption (Abb. 2.1 (b)) eines Photons der Energie $h\nu = E$ wird ein Atom in einen um diesen Energiebetrag höher liegenden Zustand angeregt. Das Lichtquant wird dabei vernichtet. Bei der stimulierten Emission (Abb. 2.1 (c)) geschieht sozusagen das Gegenteil: ein angeregtes Atom geht durch die Wechselwirkung mit einem Photon der Energie $h\nu = E$ in einen um diesen Energiebetrag niedrigeren Zustand über. Dabei wird durch diese Wechselwirkung ein weiteres Photon der Energie $h\nu = E$ erzeugt. Im Wellenbild des Lichts haben diese beiden Photonen dann neben der identischen Frequenz auch die identische Phasenlage, d.h. die Wellenknoten- und bäuche liegen aufeinander. Licht kann also durch angeregte (sich nicht im thermodynamischen Gleichgewicht befindliche) Materie kohärent verstärkt werden.

Die Wahrscheinlichkeit der Absorption P_A hängt von der Zahl der Atome N_1 im energetisch niedrigeren Zustand E_1 , der Zahl der Photonen $N(\nu)$ mit der Energie $h\nu = E_2 - E_1$ und dem Wirkungsquerschnitt des Übergangs ab: $P_A = N_1 N(\nu) \sigma(\nu)$.

Für die Wahrscheinlichkeit P_S der stimulierten Emission gilt mit der Zahl der Atome N_2 im energetisch höheren Zustand E_2 : $P_S \propto N_2 N(\nu) \sigma(\nu)$.

2.1.4 Einfache atomare Ratengleichung

Für größere Ensembles von Atomen bedeuten die Wahrscheinlichkeiten der Absorption und der stimulierten Emission nichts anderes als Raten, mit denen diese Übergänge stattfinden. Mit der Rate der spontanen Emission kann nun eine einfache Ratengleichung für Übergänge zwischen zwei atomaren Niveaus E_1 und E_2 dargestellt werden. Dabei muß nur eine Gleichung für die Anzahl von Teilchen in einem Niveau aufgestellt werden, da die Gewinne eines Energieniveaus die Verluste des anderen sind. Hier soll die Ratengleichung für die Besetzungszahl N_2 des oberen Niveaus E_2 dargestellt werden. Für das obere Niveau ist die Absorptionsrate $N_1 N(\nu) \sigma(\nu)$ ein Gewinnterm, die spontane Emission $\tau_f E_2$ und die stimulierte Emission $N_2 N(\nu) \sigma(\nu)$ gehen als Verlustterme negativ in die Gleichung ein. Bei einer Einstrahlung von $N(\nu)$ Photonen wird dann die Änderung der Zahl der angeregten Zustände N_2 durch die DGL

$$\frac{d}{dt} N_2 = N_1 N(\nu) \sigma(\nu) - N_2 N(\nu) \sigma(\nu) - \tau_f E_2 \quad (2.3)$$

beschrieben. Für diese Gleichung kann nun die stationäre Lösung $\frac{d}{dt} N_2 = 0$ bei einer Einstrahlung mit sehr vielen Photonen betrachtet werden. Da die spontane Emission nicht von der Zahl der eingestrahnten Photonen abhängt, kann der sie beschreibende Term vernachlässigt werden, und es wird deutlich, daß dann beide Niveaus in etwa gleich besetzt sein müssen ($N_1 \approx N_2$). Das bedeutet aber auch, daß Absorption und stimulierte Emission fast gleich sind und daher bei nur zwei beteiligten Niveaus keine Verstärkung des Lichts erreicht werden kann.

2.1.5 Frequenzverdopplung und Summenfrequenzbildung

In dem verwendeten Lasermaterial Nd:YAG liegen die für Laseraktivität geeigneten Übergänge bei Energiedifferenzen ΔE von 1,17eV bzw. 1,31eV. Diese entsprechen Vakuum-Wellenlängen λ von 1064nm bzw. 946nm und Frequenzen ν von 282THz bzw. 317THz. Damit liegen die möglichen Laserwellenlängen im infraroten Spektralbereich. Ist es nun möglich, dennoch Licht im sichtbaren Spektralbereich zu erhalten?

Mechanismus

In der klassischen, linearen Optik gilt das Superpositionsprinzip. Gemäß diesem Prinzip können sich Lichtstrahlen nicht gegenseitig beeinflussen und beim Durchgang durch Materie Eigenschaften, wie z. B. ihre Frequenz, ändern. Für niedrige elektrische Feldstärken

der elektromagnetischen Lichtwellen oder im Vakuum trifft dies auch zu. Die Polarisationsdichte \mathcal{P} als Maß für die Ausrichtung der elektrischen Dipole in einem dielektrischen Material kann durch

$$\mathcal{P} = \epsilon_0 \chi \mathcal{E}, \quad (2.4)$$

mit der Dielektrizitätskonstanten ϵ_0 und der elektrischen Suszeptibilität χ des Materials, als linearer Antwort, analog zum *Hookschen* Federgesetz in der Mechanik, auf das elektrische Feld \mathcal{E} dargestellt werden. Diese Relation gilt aber für nichtlineare Dielektrika nur in der Näherung kleiner elektrischer Feldstärken. Durch die Erfindung von Lasern war es möglich, in solchen Materialien durch die enormen Lichtdichten dieser Strahlungsquellen Frequenzänderungen des durchgehenden Lichts zu beobachten.

Gleichung (2.4) kann als Taylorentwicklung der Antwort der Polarisationsdichte \mathcal{P} auf das elektrische Feld \mathcal{E} mit Abbruch nach dem linearen Glied betrachtet werden. Dementsprechend kann diese Entwicklung mit

$$\mathcal{P} = \epsilon_0 \chi \mathcal{E} + 2\epsilon_0 d \mathcal{E}^2 + \mathcal{O}(\mathcal{E}^3), \quad (2.5)$$

weitergeführt werden. Dabei ist d der nichtlineare optische Koeffizient für die Nichtlinearitäten zweiter Ordnung. Die Polarisationsdichte wird in den \mathcal{P} in einen linearen Term $\epsilon_0 \chi \mathcal{E}$ nach (2.4) und einen nichtlinearen Term

$$\mathcal{P}_{\text{NL}} = 2\epsilon_0 d \mathcal{E}^2 + \mathcal{O}(\mathcal{E}^3) \quad (2.6)$$

aufgespalten. Für ein elektrisches Feld $\mathcal{E}(t)$ von zwei einfallenden Lichtwellen mit den Frequenzen ν_1 und ν_2 und den Amplituden $E(\nu_1)$ und $E(\nu_2)$, beschrieben durch die komplexe Gleichung

$$\mathcal{E}(t) = \Re(E(\nu_1) \exp(i2\pi\nu_1 t) + E(\nu_2) \exp(i2\pi\nu_2 t)) \quad (2.7)$$

enthält dann die nichtlineare Polarisierung \mathcal{P}_{NL} die fünf „neuen“ Frequenzen 0 , $2\nu_1$, $2\nu_2$, $\nu_1 + \nu_2$ und $\nu_1 - \nu_2$. Die Polarisierung im Medium kann als Quelle von elektromagnetischen Wellen aufgefaßt werden, sodaß durch den beschriebenen Prozeß beim Durchgang von Licht der Frequenzen ν_1 und ν_2 Strahlung mit den genannten Summen- und Differenzfrequenzen entsteht.

Im weiteren möchte ich mich auf die Frequenzverdopplung ($2\nu_1$ und $2\nu_2$) und die Summenfrequenzbildung ($\nu_1 + \nu_2$) beschränken, da diese für die laseraktiven Übergänge in Nd:YAG Strahlung im sichtbaren Bereich bei 532nm (grün) bzw. 473nm (blau) ergeben.

Phasenanpassung

Die Gleichungen $\nu_3 = \nu_1 + \nu_2$, $\nu_3^* = 2\nu_1$ bzw. $\nu_3^\dagger = 2\nu_2$ ist eine Zwangsbedingung im Frequenzraum. Für die räumliche Ausbreitung der stehenden Wellen kann eine analoge Bedingung aufgestellt werden: die stehenden Wellen besitzen Wellenvektoren $\mathbf{k}(\nu)$, deren Richtung durch die Ausbreitungsrichtung der Welle mit der Frequenz ν gegeben ist und deren Länge die Wellenlänge λ einer Welle mit der Frequenz ν in dem Medium ist. Die

Wellenlänge λ hängt von der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle im Medium, und somit vom Brechungsindex n_ν ab: $\lambda(\nu) = \frac{c}{n_\nu \nu}$. Für die Wellenvektoren ergeben sich dann mit $\mathbf{k}_i = \mathbf{k}(\nu_i)$ die Phasenanpassungsbedingungen $\mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ bzw. $2\mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_{1/2}$.

Wenn sich die beteiligten Wellen in der gleichen Richtung ausbreiten, kann die Phasenanpassungsbedingung skalar durch die Wellenlängen dargestellt werden: $\lambda_3 = \lambda_1 + \lambda_2$ mit $\lambda_i = \lambda(\nu_i) = \frac{c}{n_{\nu_i} \nu_i}$. Diese Bedingung ist wegen der Wellenlängenabhängigkeit der Brechungsindizes, der Dispersion, in optisch isotropen Medien, in denen sich das Licht in jeder Richtung und mit beliebiger Polarisierung mit der gleichen Geschwindigkeit ausbreitet, nicht erfüllbar. In optisch anisotropen Medien, in denen die Ausbreitungsgeschwindigkeiten, und damit die Brechungsindizes, für verschiedene Polarisationsrichtungen des Lichts unterschiedlich sind, kann die Phasenanpassungsbedingung jedoch erfüllt werden. Bei solchen Materialien besitzen entlang der beiden optischen Hauptachsen polarisierte Lichtwellen verschiedene Brechungsindizes, so daß unpolarisiertes Licht in einen sogenannten ordentlichen und einen außerordentlichen Strahl aufgespalten werden. So können durch entsprechendes Ausrichten eines solchen doppelbrechenden Kristalls die kristallographischen Hauptachsen so eingestellt werden, daß entweder zwei ordentliche Wellen der Frequenzen ν_1 und ν_2 zu einer außerordentlichen Welle der Frequenz ν_3 koppeln (Typ-I-Phasenanpassung) oder eine ordentliche und eine außerordentliche Welle zu einer außerordentlichen Welle koppeln (Typ-II-Phasenanpassung).

In optisch anisotropen, nichtlinearen Dielektrika hängen auch die optisch nichtlinearen Koeffizienten d von den Ausbreitungsrichtungen der einfallenden (koppelnden) Wellen und der ausgehenden Wellen ab, sodaß sich für diesen Koeffizienten ein Tensor dritter Stufe ergibt. Aufgrund von systematischen Permutationssymmetrien und kristallographischen Symmetrien sind jedoch viele Einträge in diesem Tensor identisch. Daraus ergibt sich eine einfachere Schreibweise als 3×6 -Matrix, bei welcher der erste Index für die Polarisationsrichtung (x,y und z als kristallographische Hauptachsen) der Polarisierung des Mediums steht, der zweite für die sechs möglichen Kombinationen der Polarisierung der einfallenden Wellen, bzw. ihrer elektrischen Felder. Da diese Größen auf die kristallographischen Hauptachsen des Kristalls bezogen sind, diese aber wegen der Phasenanpassung nicht mit den optischen Hauptachsen zusammenfallen, ergibt sich durch die Lage der Achsen zueinander ein vom Material und vom Typ der Phasenanpassung abhängiger, effektiver optisch nichtlinearer Koeffizient d_{eff} .

In dem verwendeten Laser wurde ein KTP-Kristall (**K**alium-**T**itanyl-**P**hosphat), der für eine Phasenanpassung vom Typ II geschliffen war, eingesetzt. Mit den vom Hersteller gegebenen Werten für den optisch nichtlinearen Koeffiziententensor [cas00b] ergibt sich nach

$$d_{\text{eff}} = (d_{24} - d_{15}) \sin^2 \theta \sin^2 2\phi - (d_{15} \sin^2 \phi + d_{24} \cos^2 \phi) \sin \theta, \quad (2.8)$$

ebenfalls aus [cas00b], ein Wert von $3,36 \times 10^{-12} \text{m/V}$.

2.2 Aufbau des Lasers

Nachdem im vorigen Abschnitt die grundsätzlichen physikalischen Effekte, die für den verwendeten Laser relevant sind, dargestellt wurden, geht dieser Abschnitt auf die für

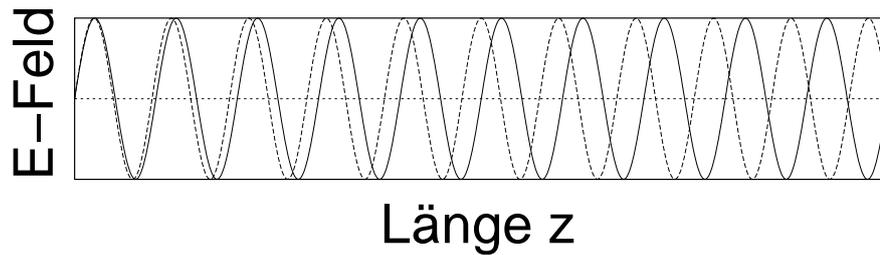


Abbildung 2.3: Profil des elektrischen Feldes von zwei longitudinalen Moden in einem planaren Resonator. Zwischen den beiden planaren Spiegeln „passen“ nur ganzzahlige Vielfache der Halbwellenlängen. In der Abbildung sind zwei benachbarte Resonatormoden mit 20 (durchgezogene Linie) und 21 (gestrichelte Linie) Halbwellenlängen dargestellt.

Laserspezifischen Mechanismen ein. Zunächst wird der optische Resonator eingeführt. Desweiteren wird das Pumpschema eines Lasers dargestellt. Zum Schluß des Abschnitts wird das experimentelle System skizziert.

2.2.1 Fabry-Perot-Resonator

Ein optischer Resonator besteht aus zwei gegenüberliegenden Spiegeln. Dabei können diese Spiegel planar oder aber auch konkav gekrümmt sein. Dabei zeigen Resonatoren mit gekrümmten Spiegeln eine höhere Stabilität, die sich schon in der Schwierigkeit andeutet, zwei plane Spiegel exakt parallel zueinander aufzubauen. Die Spiegel führen zu Zwangsbedingungen an den Rändern des Resonators für die sich ausbreitenden elektromagnetischen Wellen. Bei metallischen Spiegeln müssen z. B. die elektrischen Felder an den Rändern verschwinden. Dadurch können sich in einem Resonator der Länge L nur Wellen ausbreiten, deren Halbwellenlängen ein ganzzahliger Teiler von L ist. Andere Wellen würden sich beim Hin- und Herlaufen zwischen den Spiegeln durch destruktive Interferenz auslöschen. Schematisch sind solche longitudinalen Resonatormoden in Abb. 2.3 dargestellt. Die Wellenlängen λ_i der longitudinalen Moden sind

$$\lambda_i = \frac{2L}{i}, \quad i \in \mathbb{N}. \quad (2.9)$$

Die sich daraus ergebenden Frequenzen ν_i sind mit $\nu = c/\lambda$

$$\nu_i = i \frac{c}{2L}, \quad i \in \mathbb{N}. \quad (2.10)$$

Die Wellenlängen λ_i sind umgekehrt proportional zur Wellenzahl i , die Frequenzen ν_i hingegen proportional dazu. Daher haben die Frequenzen benachbarter Moden immer den gleichen Abstand zueinander. Dieser Wert

$$\Delta\nu = \frac{c}{2L}, \quad (2.11)$$

wird als der freie Spektralbereich (FSB) des Resonators bezeichnet.

Die Frequenzen der Moden sind aber, wie die Energieverteilung bei den atomaren Übergängen, nicht unendlich scharf begrenzt. In verlustfreien Resonatoren wäre dies so. Da aber die Spiegel leicht transparent sind, das Material im Resonator die Wellen durch Absorption abschwächt und es durch die endliche transversale Ausdehnung des Resonators Beugungsverluste gibt, ergibt sich ein endlicher Verlust α für einen Resonator. Mit der Resonatorumlaufzeit $\tau_c = 2L/c$, der Zeit, die das Licht braucht, um einmal komplett im Resonator hin- und herzulaufen, folgt daraus eine Lebensdauer der Photonen im Resonator (Abfall auf $1/e$) von τ_c/α . Das Verhältnis zwischen der Intensität einer Mode und ihrer Halbwertsbreite wird als die Finesse des Resonators bezeichnet. Die Finesse kann analog zur Resonanzschärfe eines Schwingkreises, der Güte, betrachtet werden.

Polarisationseigenzustände

Wenn sich in einem Resonator optisch anisotrope, doppelbrechende Elemente befinden, ergibt sich für die Moden eine weitere Randbedingung für ihre Polarisationsrichtung. Doppelbrechende Elemente zeichnen sich durch unterschiedliche Brechungsindizes in Abhängigkeit der Polarisationsrichtung des einfallenden Lichts aus, was zu einer Phasenverschiebung zwischen zwei entlang der optischen Hauptachsen verschieden polarisierten Lichtwellen, und damit zu einer veränderten Gesamtpolarisierung führt.

Die Elemente in einem Resonator können hinsichtlich ihrer Phasenverschiebungen für polarisiertes Licht durch Drehmatrizen beschrieben werden. Werden nun alle diese Matrizen für einen Resonator für einen kompletten Durchlauf des Lichts (hin und zurück) miteinander aufmultipliziert, erhält man die *Jonesmatrix* des Resonators. Die Eigenwerte dieser Matrix haben alle den Betrag 1, die Eigenzustände entsprechen den Polarisationsrichtungen, in denen sich Moden ausbilden können.

2.2.2 Vier-Niveau-Pump-Schema im laseraktiven Medium

Wie in Abschnitt 2.1.3 schon erwähnt, kann Licht in einem Medium, das sich im thermodynamischen Gleichgewicht befindet, keine Verstärkung erfahren. Da die Wirkungsquerschnitte von Absorption und stimulierter Emission für einen Übergang identisch sind und sich im Gleichgewicht immer im energetisch niedrigeren Zustand E_1 mehr Teilchen befinden, wird Licht hier immer abgeschwächt. Daher ist es notwendig, diese Gleichgewichtssituation aufzuheben. Es muß also eine Inversionssituation hergestellt werden, bei der sich im energetisch höheren Zustand E_2 mehr Teilchen befinden, als im niedrigeren E_1 . Naiv könnte man nun annehmen, daß es ausreicht, die Teilchen direkt von E_1 nach E_2 zu „pumpen“ zum Beispiel mit einer elektromagnetischen Welle der Frequenz $\nu = (E_2 - E_1)/h$, da im Gleichgewicht die Absorption die stimulierte Emission überwiegt. Das funktioniert bis zu der neuen Gleichgewichtssituation, bei der beide Zustände gleich besetzt sind und sich Absorption und stimulierte Emission ausgleichen. Das Material wird dann transparent für diese Welle. Mit nur zwei beteiligten Energieniveaus kann also keine Inversion und damit keine Verstärkung von Licht erreicht werden.

Es muß bei dem Prozeß also noch mindestens ein weiterer Zustand beteiligt werden. Seien E_1 der Grundzustand, E_2 und E_3 zwei im Gleichgewicht fast unbesetzte höhere

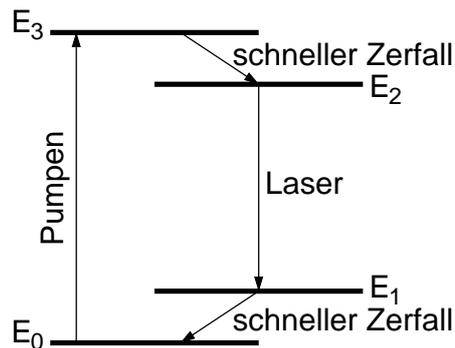


Abbildung 2.4: Das allgemeine Vier-Niveau-Schema. Die Atome werden durch Absorption oder andere Anregungsmechanismen vom Grundzustand mit der Energie E_0 in den oberen Pumpzustand mit der Energie E_3 gebracht. Dieser zerfällt sehr schnell zum langsam zerfallenden, oberen Laserniveau E_2 . Zwischen E_2 und dem unteren Laserniveau E_1 ergibt sich die Inversion und es findet nun die eigentliche Verstärkung durch stimulierte Emission statt. Das untere Laserniveau zerfällt wiederum sehr schnell in den Grundzustand E_0 .

Zustände. Der obere Zustand E_3 zerfällt sehr schnell zu E_2 , während E_2 ein langlebiger Zustand mit strahlendem Zerfall nach E_1 ist. Dann gelingt es, durch Pumpen von E_1 nach E_3 eine Besetzungsinversion zwischen E_2 und E_1 herzustellen. Dieses Drei-Niveau-Schema wird bei Lasern (z. B. Rubin-Lasern und Nd:YAG-Laser bei 946nm) verwendet, ist aber relativ ineffektiv, da E_1 im Gleichgewicht zunächst fast vollständig besetzt ist und zum Erreichen einer Besetzungsinversion mindestens die Hälfte der Zustände in E_1 nach E_2 angeregt werden müssen.

In einem weiteren Schema, dem Vier-Niveau-Schema (Abb. 2.4), liegen die drei bisher betrachteten Niveaus oberhalb des Grundniveaus E_0 , und E_1 ist ein sehr kurzlebiger Zustand mit nichtstrahlendem Zerfall nach E_0 . E_1 liegt soweit über E_0 , daß es im thermodynamischen Gleichgewicht aufgrund der *Boltzmann*-Verteilung der Besetzung der Zustände fast vollständig unbesetzt ist. Dann kann durch Pumpen von E_0 nach E_3 sehr effektiv eine Besetzungsinversion zwischen E_2 und E_1 hergestellt werden.

Der in dieser Arbeit verwendete Laser wird in einem solchen Vier-Niveau-Schema betrieben. In Abb. 2.5 ist das Schema für Nd:YAG dargestellt. Die äußersten Elektronen der Nd^{3+} -Ionen liegen in der I-Schale, genauer auf dem $4I_{9/2}$ -Niveau¹. Von diesem Grundzustand werden die Elektronen in höhere Zustände angeregt. Dabei besitzt das Material ausgeprägte Absorptionsbänder bei 810nm und 750nm, die in Abb. 2.5 durch einen Kasten als oberes Pumpniveau angedeutet sind. Im verwendeten System wurde das 810nm-Band verwendet. Von diesem höheren Niveau (Lebenszeit ca. 100ns) erreichen die Elektronen das obere Laserniveau $4F_{3/2}$. Im isolierten Ion ist der Übergang von $4F_{3/2}$ nach $4F_{11/2}$, der eigentliche Laserübergang mit 1064nm, gemäß den *Hundtschen*

¹Spektroskopische Notierung. Mit der Hauptquantenzahl L , der Drehimpuls-Quantenzahl J und der Spinquantenzahl S wird ein Zustand durch $2S+1 L_J$ vollständig charakterisiert.

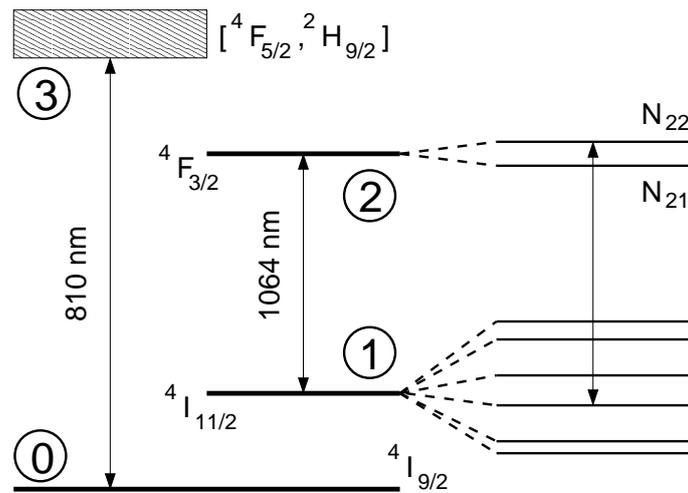


Abbildung 2.5: Die für die Laseraktivität bei 1064 nm beteiligten Energieniveaus in Neodym-dotiertem Yttrium-Aluminium-Granat (Nd:YAG) mit den entsprechenden Wellenlängen zum Pumpen und für die Laseraktivität.

Auswahlregeln verboten. Durch die Einbettung in das Wirtsgitter gibt es eine Verzerrung des elektrischen Feldes um die Ionen. Dies bewirkt eine Aufhebung der Entartung der beiden Laserzustände $4F_{3/2}$ und $4F_{11/2}$ durch den *Starkeffekt*. Dadurch wiederum wird der Übergang leicht erlaubt, was zu einer relativ langen Lebensdauer (ca. $230\mu s$) des Übergangs und damit zu einer niedrigen spontanen Zerfallsrate führt. Durch diese Eigenschaften lassen sich mit Nd:YAG sehr effiziente Laser aufbauen.

2.2.3 Der diodengepumpte resonatorintern frequenzverdoppelte Festkörperlaser

Mit den bis hier gegebenen physikalischen Details sind nun die notwendigen Kenntnisse zum Aufbau eines Lasers, wie dem im Experiment eingesetzten, eingeführt worden. In Abb. 2.6 ist das System schematisch dargestellt.

Der Laserresonator ist ein Plan-Konkav-Resonator. Der plane Spiegel wird dabei durch die beschichtete Eintrittsseite des Nd:YAG-Kristalls gebildet. Die Beschichtung bildet dabei einen dielektrischen Spiegel, der bei der Laserwellenlänge von 1064nm und ihrer ersten Harmonischen bei 532nm hoch reflektiv ist, jedoch im Absorptionsband von Nd:YAG bei 810nm möglichst transmissiv ist.

Gepumpt wird der Laser mit einer Laserdiode mit einer Wellenlänge von 810nm. Das Licht der Laserdiode wird mit Hilfe einer Linsenoptik in einer Freifeldgeometrie zunächst kollimiert und dann in den Laserkristall fokussiert.

Bis hier hat man einen Festkörperlaser, der Licht im infraroten Spektralbereich abstrahlt. Um nun Licht im sichtbaren Spektralbereich zu erhalten, werden die Frequenzverdopplung und Summenfrequenzbildung mit Hilfe eines optisch nichtlinearen Kristalls, dem KTP-Kristall, verwendet.

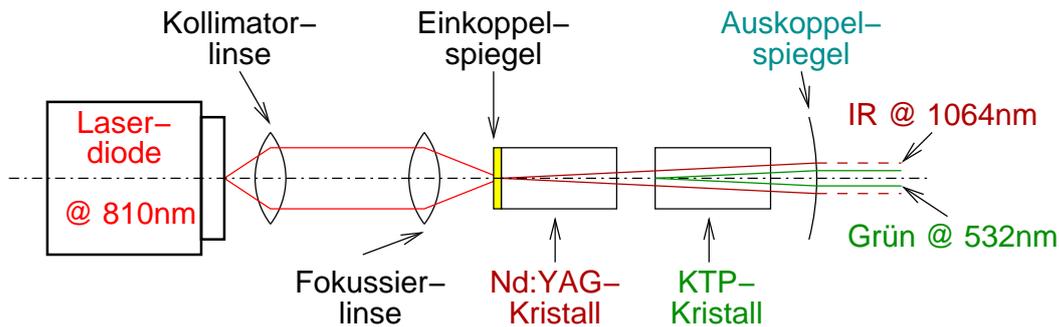


Abbildung 2.6: Schematischer Aufbau des resonatorintern frequenzverdoppelten Nd:YAG-Lasers.

Wie Gl. (2.6) zeigt, geht die elektrische Feldstärke der einstrahlenden elektromagnetischen Welle quadratisch in die nichtlinearen Terme der Polarisierung ein, welche die Frequenzverdopplung und Summenfrequenzbildung bewirken. Daraus ist es ersichtlich, daß sich alle Maßnahmen zur Erhöhung der elektrischen Feldstärke im optisch nichtlinearen Kristall überproportional auf die Effizienz der Generierung des frequenzverdoppelten Lichts auswirken. Daher wird der Kristall innerhalb des Resonators platziert, da hier die Feldstärke des infraroten Lichts wegen der hohen Reflektivität der Spiegel um Größenordnungen über der außerhalb des Resonators hinter dem konkaven Auskoppelspiegel liegt. Zudem besitzt der Laserstrahl bei der gegebenen Resonator-Geometrie (plan-konkav) im Resonator am Planspiegel einen geringeren Querschnitt, als am Konkavspiegel. Dadurch ist dort auch die lokale Feldstärke höher. Daher wird der KTP-Kristall im Resonator dicht am Nd:YAG-Kristall platziert.

2.3 Theoretische Beschreibung der Dynamik

Zur Beschreibung der Dynamik von Lasern werden Ratengleichungen verwendet. Das grundlegende Modell nach H. Haken [hak70] beschreibt den zeitlichen Verlauf von drei physikalischen Größen: der Zahl der Phononen im Resonator (bzw. der Intensität), der angeregten Zustände (der Inversion) und der Polarisierbarkeit des Mediums. Wenn nun diese Größen stark unterschiedliche Zeitskalen besitzen, ist es möglich, mit adiabatischen Näherungen in einer Zeitskalentrennung einzelne dieser Größen zu eliminieren und einen Laser durch ein einfacheres Modell zu beschreiben. Im Falle des verwendeten Nd:YAG-Lasers kann hier die Polarisierbarkeit des Mediums aus der Beschreibung entfernt werden, so daß die Dynamik nur noch durch die Intensität und die Besetzungsinversion dominiert wird. Ein solches Modell wurde von Tang et al. [tan63] ursprünglich für Rubin-Laser aufgestellt und später auf den Nd:YAG-Laser übertragen.

Bevor hier die Ratengleichungen eingeführt werden, soll noch das Phänomen des räumlichen Lochbrennens beschrieben werden, da diese räumlichen Effekte eine wichtige Rolle bei den Gleichungen in Tang et al. [tan63] spielen.

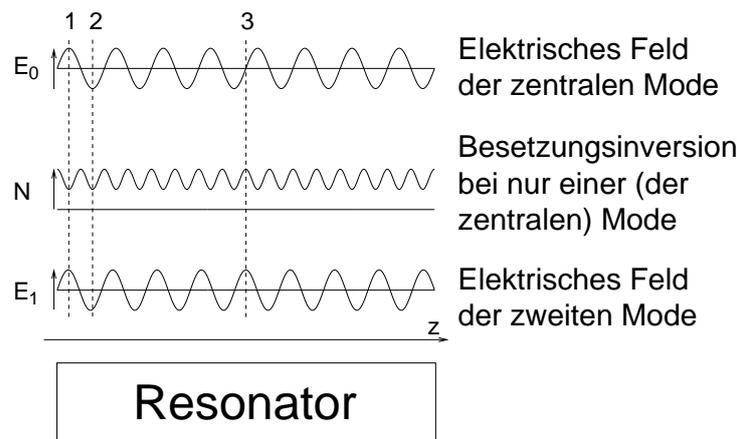


Abbildung 2.7: Illustration zum räumlichen Lochbrennen. Dargestellt sind (von oben nach unten) die räumliche Modulation des elektrischen Feldes der zentralen longitudinalen Resonatormode, die daraus resultierende räumliche Modulation der Besetzungsinversion und die räumliche Modulation des elektrischen Feldes einer benachbarten Mode. An den Enden des Resonators (z.B. bei 1 und 2 am linken Ende des Resonators) räumt die zentrale Mode die für die benachbarte Mode in Frage kommenden angeregten Zustände ab. In der Mitte jedoch (bei 3) hat die durch die zentrale Mode räumlich modulierte Besetzungsinversion ein Maximum, somit stehen für die benachbarte Mode angeregte Zustände zur Verfügung.

Räumliches Lochbrennen

In Medien mit homogener Verbreiterung der Wirkungsquerschnitte besitzen alle Atome in Bezug auf den Laserübergang die gleichen Eigenschaften. Daher sollte man erwarten, daß in einem Laser, dessen laseraktives Material eine solche homogene Verbreiterung des Wirkungsquerschnittes des Laserübergangs aufweist, nur eine zentrale Mode anschwingt und diese sämtliche angeregten Zustände für sich verbraucht. Die Beobachtungen zeigen jedoch, daß dies nicht so ist, es schwingen mehrere Moden an, sowohl longitudinal, als auch transversal. Als Erklärung hierfür dient die räumliche Ausdehnung des laseraktiven Materials und der stehenden Wellen im Material. In Abb. 2.7 ist der angesprochene Effekt für eine zentrale und eine benachbarte Mode dargestellt. Die räumliche Modulation der Besetzungsinversion kann natürlich nur auftreten, wenn die angeregten Zustände nur langsam räumlich diffundieren. In Festkörperlaser, wie Rubin und Nd:YAG, können diese Diffusionszeiten aufgrund der Abstände der laseraktiven Atome und der Wellenlängen der stehenden Wellen gegenüber der Zeitskala, in der die Besetzungsinversion auf- und abgebaut werden kann, vernachlässigt werden. Durch eine stehende Welle werden sozusagen Löcher in die räumlich verteilte Besetzungsinversion gebrannt. Daher spricht man hier von räumlichem Lochbrennen.

2.3.1 Räumlich ausgedehntes Ratengleichungsmodell

Daß Laser ein dynamisches Verhalten zeigen, wurde schon sehr bald nach ihrer Erfindung beobachtet. Die ersten Laser waren beidseitig verspiegelte Rubin-Stäbe, die mit Gasentladungs-Blitzlampen gepumpt wurden. Dabei zeigte sich, daß das Laserlicht auf die Blitze des Pumplichts mit ausgeprägten Relaxationsoszillationen antwortete. Frequenz und Dämpfung der Relaxationsoszillationen hängen dabei von den experimentellen Bedingungen, wie z.B. Resonatorverlusten und Pumpstärke, ab. Um dieses dynamische Verhalten zu beschreiben, wurde 1963 von Tang et al. [tan63] ein Ratengleichungsmodell für unverdoppelte Festkörperlaser entwickelt, das hier kurz vorgestellt werden soll.

Unter Berücksichtigung des räumlichen Lochbrennens wurde in [tan63] das folgende partielle Integro-Differentialgleichungssystem, das allgemein für Festkörperlaser mit mehreren Moden gilt, für die räumliche Besetzungsinversion $n(z, t)$ und die Intensitäten der einzelnen Lasermoden $I_i(t)$ (t ist die Zeit und z die räumliche Ausdehnung entlang der optischen Achse) vorgestellt:

$$\frac{d}{dt}n(z, t) = \frac{\bar{n}}{\tau_f} - \frac{n(z, t)}{\tau_f} - \sum_i Dg_i I_i(t)[1 - \cos(2m_i\pi z/L)]n(z, t) \quad \text{und} \quad (2.12a)$$

$$\frac{d}{dt}I_i = -\frac{\alpha_i I_i}{\tau_c} + \frac{Dg_i I_i}{\tau_c} \int_0^l n(z, t)[1 - \cos(2m_i\pi z/L)]dz. \quad (2.12b)$$

\bar{n} ist die Gleichgewichtslage der Besetzungsinversion ohne stimulierte Emission, also das Gleichgewicht zwischen dem Pumpprozeß und spontaner Emission. τ_f ist die Fluoreszenzzeit, die Lebensdauer des Laserübergangs. Der Term \bar{n}/τ_f entspricht dem Anwachsen der Besetzungsinversion durch den Pumpprozeß. Die anschließenden Terme in Gl. (2.12a) beschreiben den Abbau der Besetzungsinversion durch spontane Emission ($n(z, t)/\tau_f$) und stimulierte Emission in den Lasermoden (der Summenterm in Gl. (2.12a)). In Dg_i spiegelt sich die Lage der i -ten Mode im Wirkungsquerschnitt des Übergangs wider. Der Term $[1 - \cos(2m_i\pi z/L)]$ ($= \sin^2(m_i\pi z/L)$) beschreibt die Modulation der Besetzungsinversion durch die i -te Mode, die im Resonator der Länge L m_i Halbwellen besitzt. Die Modulation folgt dabei der Leistung des elektrischen Feldes der Welle, also dem Quadrat des elektrischen Feldes. In der Gleichung für die einzelnen Intensitäten beschreibt α_i die Resonatorverluste (u.a. die Reflektivität der Spiegel und die Beugungsverluste durch die endliche transversale Ausdehnung des Resonators) der i -ten Mode und $\tau_c = 2L/c$ die Resonatorumlaufzeit. Der Term $\alpha_i I_i/\tau_c$ beschreibt den Zerfall einer Mode mit der Rate α_i/τ_c . Gespeist werden die Intensitäten von der stimulierten Emission im Zusammenspiel mit der Besetzungsinversion. Dies wird durch den zweiten Term auf der rechten Seite von Gl. (2.12b) beschrieben.

2.3.2 Reduziertes Ratengleichungsmodell

Gleichung (2.12a) besitzt als partielle Differentialgleichung mathematisch unendlich viele Freiheitsgrade. Zudem kommt durch den Integralterm in Gl. (2.12b) eine Art Rekursion

in das Gleichungssystem. Dadurch kann die Lösung der Gleichung nicht in einer geschlossenen Form angegeben werden, wodurch ein exakter analytischer Zugang unmöglich und ein numerischer Zugang schwierig ist.

Daher wurden verschiedene Anstrengungen unternommen, die Gleichungen auf einfachere gewöhnliche Differentialgleichungen zu reduzieren [tan63, bae86, roy93, man00, pyr01]. Ich gehe hier auf die nach Baer [bae86] bzw. Roy et al. [roy93] abgeleiteten Gleichungen ein, da sie die Basis für die analytischen Untersuchungen bildeten.

Reduzierte Gleichungen für den unverdoppelten Laser

In [roy93] wird den einzelnen Moden eine individuelle Verstärkung bzw. Besetzungsinversion G_i zugewiesen:

$$G_i = Dg_i \int_0^L n(z, t) [1 - \cos(2m_i \pi z / L)] dz. \quad (2.13)$$

Damit vereinfacht sich Gleichung (2.12b) für die Intensitäten I_i zu

$$\tau_c \frac{d}{dt} I_i = (G_i - \alpha_i) I_i. \quad (2.14a)$$

Die Ableitung der Differentialgleichung für die Verstärkungen G_i stellt sich erheblich komplizierter dar. Die Gleichgewichtslage \bar{n} , die Länge L des Resonators und der Koeffizient für die stimulierte Emission Dg_i werden als Parameter $\Gamma_i = L\bar{n}Dg_i$ für die Pumpleistung der i -ten Mode zusammengefaßt. Aus der Sicht des Experimentators ist dieser Parameter der am besten zugängliche, da die Pumpleistung über den Pumplaserdiodenstrom beeinflusst werden kann. Die sich aus (2.12a) und (2.13) ergebenden Mischintegrale mit Anteilen der einzelnen Moden werden unter der Annahme, daß sich die räumliche Dynamik der Besetzungsinversion $n(z, t)$ von der zeitlichen abspalten läßt, zu den Selbst- bzw. Kreuzsättigungsparametern β_i und β_{ij} zusammengefaßt. Damit erhält die Differentialgleichung für die Verstärkung der i -ten Mode die Form

$$\tau_f \frac{d}{dt} G_i = \Gamma_i - (1 + \beta_i I_i + \sum_{j \neq i} I_j \beta_{ij}) G_i. \quad (2.14b)$$

Der Nachteil dieser Zusammenfassung zu den Sättigungsparametern β ist die fehlende Zuordnung zu den zugrundeliegenden physikalischen Größen. Die Parameter müssen in den Gleichungen phänomenologisch angepaßt werden. Der Selbstsättigungsparameter β_i wird im folgenden gemäß der Literatur [bae86, bra91] auf den Wert 1 W^{-1} gesetzt. Die Matrix der Kreuzsättigungsparameter β_{ij} ist gegen die Vertauschung der Indizes invariant. Der Wert der einzelnen Einträge hängt vom Abstand der Moden im Frequenzraum ab. Zur Vereinfachung analytischer Untersuchungen wird jedoch hier ein identischer Wert von $0,7 \text{ W}^{-1}$ für alle Einträge verwendet.

Erweiterung um die Frequenzkonversion

Bisher fehlt in den Gleichungen noch die Integration der Frequenzverdopplung und Summenfrequenzbildung, um im Bild des Nd:YAG-Lasers sichtbares, grünes Licht zu generieren. Die Frequenzkonversion stellt sich als ein zusätzlicher Verlustterm für die Intensitäten I_i dar. Die Konversionseffizienz wird mit dem Parameter ϵ beschrieben. Er setzt sich aus dem optisch nichtlinearen Koeffizienten d_{eff} des Konversionskristalls und der zeitlich und räumlich über den Kristall gemittelten Leistungsdichte des zu wandelnden Lichts zusammen. Ein weiterer Parameter g berücksichtigt die Lage der Polarisationsrichtungen der Lasermoden im Resonator zu den optischen Hauptachsen des Konversionskristalls. Im Falle der Phasenanpassung vom Typ II wird durch zwei parallel polarisierte Moden mit den Intensitäten $I_1(t)$ und $I_2(t)$ die Leistung

$$I_{dp}(t) = \epsilon(gI_1(t)^2 + gI_2(t)^2 + 4gI_1(t)I_2(t)), \quad (2.15a)$$

im Falle von orthogonal polarisierten Moden die Leistung

$$I_{do}(t) = \epsilon(gI_1(t)^2 + gI_2(t)^2 + 4(1-g)I_1(t)I_2(t)) \quad (2.15b)$$

in den verdoppelten Frequenzbereich konvertiert. Für die Anzahl von m in einer willkürlich als x -Richtung bezeichneten Richtung polarisierten Moden und die Anzahl von n in der orthogonal dazu liegenden y -Richtung polarisierten Moden kann Gl. (2.14a) dann zu

$$\tau_c \frac{d}{dt} I_i = \left[G_i - \alpha_i + \epsilon \left(gI_i - 2 \left(g \sum_{j=1}^m I_j + (1-g) \sum_{k=m+1}^{m+n} I_k \right) \right) \right] I_i, \quad i = 1 \dots m, \quad (2.16a)$$

beziehungsweise zu

$$\tau_c \frac{d}{dt} I_i = \left[G_i - \alpha_i + \epsilon \left(gI_i - 2 \left((1-g) \sum_{j=1}^m I_j + g \sum_{k=m+1}^{m+n} I_k \right) \right) \right] I_i, \quad i = m+1 \dots m+n, \quad (2.16b)$$

erweitert werden.

Anpassung der Zeit- und Größenskalen der Variablen

Die charakteristischen Zeiten der Gleichungen sind durch die Resonatorumlaufzeit $\tau_c \approx 10^{-9}$ s für die Intensitäten und die Fluoreszenzzeit $\tau_f = 230\mu\text{s}$ für die Verstärkungen bestimmt. Dies führt in den Gleichungen zu Variablen, die sich um fast sechs Größenordnungen unterscheiden. Um plausible numerische Untersuchungen, wie z.B. Integration der Differentialgleichungen und numerische Stabilitätsanalyse, durchzuführen, ist es notwendig, die Variablen durch Variablentransformation umzuskalieren. In [pyr00] wurde diese Transformation im Rahmen von Untersuchungen zur Stabilisierung der Fluktuationen im Modell durchgeführt. Die Ratengleichungen schreiben sich dann für die transformierten Verstärkungen Δ_i und die Intensitäten I_i

$$\frac{d}{d\theta} I_i = [\Delta_i + \epsilon(gI_i - 2M_i)] I_i \quad (2.17a)$$

und

$$\frac{d}{d\theta}\Delta_i = \gamma - [1 + (1 - \beta)I_i + \beta(S_x + S_y)](1 + \eta\Delta_i). \quad (2.17b)$$

Unter der vereinfachten Annahme, daß alle Moden die gleichen Resonatorverluste $\alpha_i = \alpha$ erfahren und daß die Kreuzsättigung zwischen allen Moden gleich ist ($\beta_{ij} = \beta$), ergeben sich der Zeitskalierungsfaktor \mathcal{T} und der räumliche Skalierungsfaktor \mathcal{G} mit

$$\mathcal{T} = \sqrt{\frac{\tau_f \tau_c}{\alpha}} \quad \text{und} \quad \mathcal{G} = \sqrt{\frac{\alpha \tau_c}{\tau_f}}. \quad (2.18)$$

Die transformierten Verstärkungen sind durch $\Delta_i = (G_i - \alpha)/\mathcal{G}$ und die transformierte Zeit durch $\theta = t/\mathcal{T}$ gegeben. Mit der Zusammenfassung der Summenintensitäten in den beiden Polarisationsrichtungen

$$S_x = \sum_{j=1}^m I_j \quad \text{und} \quad S_y = \sum_{j=m+1}^{m+n} I_j \quad (2.19)$$

gilt $M_i = gS_x + (1-g)S_y$ für $i = 1 \dots m$ bzw. $M_i = (1-g)S_x + gS_y$ für $i = m+1 \dots m+n$. Die transformierte Konversionseffizienz ist $\varepsilon = \epsilon/\mathcal{G}$. Der Pumpparameter wird mit $\gamma = \Gamma/\alpha$ auf die Pumpschwelle normiert. Als zusätzlicher Parameter wird $\eta = \sqrt{\tau_c}/(\alpha\tau_f)$ eingeführt. Die Ableitung nach der transformierten Zeit $\frac{d}{d\theta}$ wird im weiteren abkürzend in der gestrichenen Form ($\frac{d}{d\theta}I_i = I'_i$ und $\frac{d}{d\theta}\Delta_i = \Delta'_i$) geschrieben.

3 Regelung der Laserdynamik

In diesem Kapitel geht es um den Themenkomplex, der im Rahmen des BMBF-Projektes behandelt wurde. Die Aufgabenstellung war die Reduktion bzw. Unterdrückung der zeitlichen Fluktuationen des austretenden Laserlichts mit Methoden der nichtlinearen Dynamik. Zunächst werden kurz die elementaren Konzepte der Kontrolle nichtlinearer, chaotischer Systeme dargelegt. In Bezug auf das vorliegende Experiment wird dann das von Pyragas et al. [pyr00] beschriebene Kontrollschema vorgestellt, welches unter Berücksichtigung der experimentellen Gegebenheiten und Möglichkeiten für das Raten-gleichungsmodell abgeleitet wurde. In diesem Kontrollschema werden zwei Meßgrößen, die beiden orthogonal polarisierten infraroten Summenintensitäten, auf einen Systemparameter, die Pumpleistung, zurückgekoppelt. Das Kontrollschema wurde experimentell von F. Lange [lan01a, lan01b] hier in Oldenburg und A. Schenck zu Schweinsberg [sch00, sch01] beim Projektpartner DaimlerChrysler in Frankfurt umgesetzt. Die Ergebnisse dieser experimentellen Umsetzung werden im weiteren Verlauf dieses Kapitels vorgestellt. Trotz teilweise sehr guter Übereinstimmung der experimentellen Ergebnisse [lan01a, lan01b, sch00, sch01] mit den theoretischen Vorhersagen [pyr00] gibt in einigen Punkten elementare Abweichungen. Die Diskussion und Erklärung dieser Abweichungen sind das Objekt eines weiteren Abschnitts in diesem Kapitel. Es folgt eine kurze Diskussion alternativer Kontrollmöglichkeiten bei Eingriff auf nur einen Systemparameter. Zum Schluß des Kapitels wird ein erweitertes Kontrollschema mit Rückkopplung auf zwei Systemparameter vorgestellt, für das die Ergebnisse erster Vorexperimente und theoretische Vorhersagen dargestellt werden.

3.1 Grundsätzliche Betrachtungen zur Chaostkontrolle

Stabilisierung von ursprünglich chaotischen Zuständen wird allgemein als Chaostkontrolle bezeichnet, was eine den Sachverhalt nicht ganz treffende Übersetzung des englischen *chaos control* ist. Besser wäre hier Chaosregelung oder Chaosbeherrschung. Dennoch hat sich auch im Deutschen der Begriff Chaostkontrolle durchgesetzt. Er soll im weiteren unter Beachtung der etwas falschen Übersetzung verwendet werden.

In der letzten Dekade des vorigen Jahrhunderts wurden verschiedene Konzepte zur Chaostkontrolle vorgestellt, die aber insgesamt auf eines der beiden grundlegenden Konzepte entweder nach Ott, Grebogi und Yorke (OGY) [ott90] oder nach Pyragas [pyr92] zurückgehen. Diese wurden in den folgenden Jahren an mehreren experimentellen Systemen erfolgreich erprobt. Auch der bei uns eingesetzte Laser war schon Objekt einer Chaostkontrollmethode, dem *occasional proportional feedback* (OPF), welche auf der OGY-Kontrolle beruht [jam90a].

Alle Methoden zur Chaosregelung nutzen charakteristische Eigenschaften von Chaos aus. Chaotische Systeme reagieren sehr empfindlich auf kleinste Änderungen der Anfangsbedingungen, was dazu führt, daß anfänglich eng benachbarte Zustände mit der Zeit exponentiell auseinanderlaufen. Das Maß dieses exponentiellen Auseinanderlaufens sind die Lyapunovexponenten. Eine weitere Eigenschaft von chaotischen Systemen ist, daß ihre chaotischen Zustände immer instabilen regulären Zuständen sehr nahe kommen. So ist es leicht möglich, unter Ausnutzung der Empfindlichkeit von den Anfangsbedingungen, das System mit kleinsten Regeleingriffen in einen solchen regulären Zustand zu befördern und dort auch zu halten. Wenn in einem solchen Fall die Regelung die Stabilität des angestrebten Zustandes erreicht, verschwindet das Regelsignal.

Ziel des BMBF-Projektes war es, eine der Chaoskontrollmethoden zur Reduktion bzw. Unterdrückung der Fluktuationen des austretenden Laserlichts im grünen Spektralbereich anzuwenden. Eine konstante Ausgangsleistung ist gleichbedeutend mit einem Fixpunkt der dynamischen Systemvariablen. Um eine der Chaoskontrollmethoden auf einen Fixpunkt anwenden zu können, müßten die chaotischen Zustände diesem Fixpunkt nahe kommen. Für den verwendeten frequenzverdoppelten Nd:YAG-Laser trifft dieses aber im allgemeinen nicht zu. Das Regelungsschema, das letztendlich angewendet wird, ist eigentlich die aus der Ingenieurtechnik schon lange bekannte proportionale Rückkopplungstechnik.

3.2 Regelung des Modells

Es wäre schön, wenn es Kontrollmethoden für chaotische Systeme geben würde, für die man die zugrundeliegende Dynamik nicht kennen müßte. Es ist aber in den wenigsten Fällen möglich, das Experiment als *Black Box* zu betrachten. Ohne Analysen der die Dynamik des Experiments beschreibenden Gleichungen muß eher nach dem *trial-and-error*-Prinzip vorgegangen werden. Zielgerichteter ist es jedoch, aus den Analysen der beschreibenden Gleichungen ein Regelkonzept abzuleiten.

Für den verwendeten Laser wurden solche Analysen an den im ersten Kapitel eingeführten Ratengleichungen (2.17a) und (2.17b) von K. Pyragas et al. [pyr00] durchgeführt. In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse der Untersuchungen dargestellt.

3.2.1 Konstante Ausgangsleistung – ein Fixpunkt

Zunächst ist es wichtig, den stationären Zustand zu bestimmen, auf den stabilisiert werden soll. Dazu werden die Gleichungen in einer vereinfachten Version betrachtet. Die unterschiedlichen Moden haben identische Parameter $\gamma_i = \gamma$, $\alpha_i = \alpha (= 0,01)$ und $\beta_{ij} = \beta (= 0,7)$. Für den Geometriefaktor g wird ein Wert gewählt, bei dem ein hoher Anteil an frequenzverdoppeltem Licht durch Summenfrequenzbildung entsteht ($g = 0,1$). So erhält man zwar eine maximale Konversionsrate, andererseits sind aber die Instabilitäten so am ausgeprägtesten. Die Werte für die Systemparameter sind dabei die in der Literatur (siehe z.B. [bra91]) verwendeten Standardwerte. Die Anzahl der Moden in den beiden Polarisationsrichtungen wird mit m bzw n bezeichnet und deren

Anzahl als Systemparameter vorgegeben.

Die Bedingung für einen Fixpunkt in einem Differentialgleichungssystem ist, daß die Ableitungen verschwinden, also $I'_i = 0$ und $\Delta'_i = 0$ für $i = 1, \dots, m+n$ in den Gleichungen (2.17a) und (2.17b). Das gegebene Gleichungssystem besitzt mehrere Fixpunkte, daher muß man sich für einen von ihnen entscheiden. Einige der Fixpunkte scheiden aus, da sie physikalisch nicht sinnvolle Werte haben (negative Intensitäten). Bei anderen Fixpunkten verschwinden Intensitäten einzelner Moden. Diese Fixpunkte kann man aber dann in einem um die entsprechende Modenanzahl reduzierten Modell betrachten. Am Ende bleibt nur ein interessanter Fixpunkt, bei dem alle Intensitäten positive Werte annehmen. Durch die identischen Parameter ergibt sich, daß innerhalb der beiden Polarisationsrichtungen alle Intensitäten I_i und Verstärkungen Δ_i dieselben Fixpunktwerte (I_i^0, Δ_i^0) besitzen:

$$I_i^0 = I_x, \quad \Delta_i^0 = \Delta_x, \quad i = 1, \dots, m \quad (3.1a)$$

$$I_i^0 = I_y, \quad \Delta_i^0 = \Delta_y, \quad i = m+1, \dots, m+n. \quad (3.1b)$$

Damit vereinfachen sich die Gleichungen (2.17) zu

$$\Delta_x - \varepsilon[(2m-1)gI_x + 2n(1-g)I_y] = 0, \quad (3.2a)$$

$$\Delta_y - \varepsilon[(2n-1)gI_y + 2m(1-g)I_x] = 0, \quad (3.2b)$$

$$\gamma - \{1 + [1 + (m-1)\beta]I_x + \beta n I_y\}(1 + \eta\Delta_x) = 0, \quad (3.2c)$$

$$\gamma - \{1 + [1 + (n-1)\beta]I_y + \beta m I_x\}(1 + \eta\Delta_y) = 0 \quad (3.2d)$$

für nun nur noch vier Größen unabhängig von der Anzahl von Moden in den beiden Polarisationsrichtungen. Durch die kleinen Parameter η und ε können unter Vernachlässigung höherer Potenzen in diesen Parametern approximative Werte für I_x , Δ_x , I_y und Δ_y bestimmt werden. Diese dienen dann als Ausgangswerte für eine iterative Bestimmung der Fixpunktwerte mit Hilfe der Gleichungen (3.2).

3.2.2 Stabilität des Fixpunktes ohne Regeleingriff

Nach der Bestimmung des Fixpunktes folgt nun die Ermittlung seiner Stabilität. Eine Standardmethode hierfür ist die Linearisierung der Gleichungen (2.17) um den Fixpunkt. Dazu werden die kleinen Abweichungen

$$(i_i, \delta_i) = (I_i - I_i^0, \Delta_i - \Delta_i^0) \quad (3.3)$$

von den Fixpunktwerten betrachtet. Nun wird Gl. (3.3) in Gl. (2.17) eingesetzt. Bei der Linearisierung werden alle Terme, die quadratisch in den Abweichungen i_i und δ_i sind (sowohl direkt quadratisch, als auch Produkte von mindestens zwei dieser kleinen Variablen) wegen der im Rahmen der Linearisierung vorgegebenen geringen Größe der

Abweichungen i_i und δ_i vernachlässigt. Zusätzlich werden dann die Abweichungen in den Verstärkungen vom Fixpunkt δ_i eliminiert, so daß man lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die Abweichungen der Intensitäten vom Fixpunkt i_i der Form

$$i_i'' + b_x i_i' + c_x i_i + f_x = 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (3.4a)$$

$$i_i'' + b_y i_i' + c_y i_i + f_y = 0, \quad i = m + 1, \dots, m + n, \quad (3.4b)$$

erhält. Die Parameter b_x und c_x sind dabei durch

$$b_x = \frac{\eta\varepsilon}{1 + \eta\Delta_x} - \varepsilon g I_x \quad (3.5a)$$

und

$$c_x = \left[(1 - \beta)(1 + \eta\Delta_x) - \frac{\varepsilon\eta g\gamma}{1 + \eta\Delta_x} \right] I_x \quad (3.5b)$$

gegeben. f_x ist mit den Abweichungen der Summenintensitäten vom Fixpunkt

$$s_x = \sum_{j=1}^m i_j \quad \text{und} \quad s_y = \sum_{j=m+1}^{m+n} i_j \quad (3.6)$$

gegeben durch

$$\begin{aligned} f_x = & \beta(1 + \varepsilon\eta\Delta_x) I_x (s_x + s_y) \\ & + \frac{2\varepsilon^2\gamma\eta}{1 + \varepsilon\eta\Delta_x} I_x [g s_x + (1 - g) s_y] \\ & + 2\varepsilon I_x [g s'_x + (1 - g) s'_y]. \end{aligned} \quad (3.7)$$

b_y , c_y und f_y ergeben sich aus Gl. (3.5) und (3.7) durch Vertauschen der Indizes x und y .

Für die Abweichungen der Summenintensitäten s_x und s_y kann nun durch Aufsummieren von Gl. (3.4) jeweils über alle Moden einer Polarisationsrichtung ein geschlossenes Gleichungssystem der Form

$$s_x'' + B_x s_x' + C_x s_x + E_x s_y' + F_x s_y = 0, \quad (3.8a)$$

$$s_y'' + B_y s_y' + C_y s_y + E_y s_x' + F_y s_x = 0. \quad (3.8b)$$

aufgestellt werden. Hier sind die Koeffizienten B_x , C_x , E_x und F_x

$$B_x = \frac{\eta\gamma}{1 + \eta\Delta_x} + \varepsilon g (2m - 1) I_x, \quad (3.9a)$$

$$C_x = \left([1 + (m - 1)\beta] (1 + \eta\Delta_x) + (2m - 1) \frac{\varepsilon g \gamma \eta}{1 + \eta\Delta_x} \right) I_x, \quad (3.9b)$$

$$E_x = 2\varepsilon(1 - g)mI_x, \quad (3.9c)$$

und

$$F_x = \left(\beta(1 + \eta\Delta_x) + 2(1 - g)\frac{\varepsilon g \gamma \eta}{1 + \eta\Delta_x} \right) mI_x. \quad (3.9d)$$

Die Koeffizienten B_y , C_y , E_y und F_y ergeben sich auch hier wieder durch Vertauschen der Indizes x und y und der Anzahl der Moden in den beiden Polarisationsrichtungen m und n in Gl. (3.9).

Die so erhaltenen DGLs für die Einzelabweichungen i_i und die Summenintensitäten s_x und s_y sind gekoppelte, lineare Oszillatorgleichungen, wodurch den Parametern ihre Wirkung auf die Dämpfung und die charakteristischen Frequenzen des Systems zugewiesen werden kann.

Die Stabilität des Fixpunktes kann über die Eigenwerte von Gl. (3.4) bestimmt werden. Der Fixpunkt ist stabil, wenn kein Eigenwert einen positiven Realteil besitzt. Für eine größere Anzahl an Moden sind die Eigenwerte jedoch nicht einfach zu bestimmen.

Zum Glück läßt sich die Problematik aber vereinfachen, indem zwei Teilgleichungen betrachtet werden. Zum einen müssen die Gleichungen für die Abweichungen der Summenintensitäten (3.8) betrachtet werden. Diese besitzen vier Eigenwerte, die auch Eigenwerte der Gleichungen (3.4) sind. Hat man die Stabilität des Punktes $(s_x, s_y, s'_x, s'_y) = 0$ bestimmt, lassen sich Gl. (3.4) zu

$$i_i'' + b_x i_i' + c_x i_i = 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (3.10a)$$

$$i_i'' + b_y i_i' + c_y i_i = 0, \quad i = m + 1, \dots, m + n, \quad (3.10b)$$

reduzieren. Da Gl. (3.10a) für alle in x -Richtung polarisierten und Gl. (3.10b) für alle in y -Richtung polarisierten Moden identisch sind, sind die Eigenwerte stark degeneriert, es gibt nur maximal vier unterschiedliche Werte. Weniger unterschiedliche Eigenwerte treten z.B. auf, wenn in einer Polarisationsrichtung nur eine Mode existiert und somit die Gleichungen für die Summenabweichung und die Einzelabweichung identisch sind.

Die Eigenwerte Λ_i von Gl. (3.8) zur Bestimmung der Stabilität des Punktes $(s_x, s_y, s'_x, s'_y) = 0$ lassen sich durch einen Exponentialansatz über das charakteristische Polynom

$$\Lambda^4 + a_1 \Lambda^3 + a_2 \Lambda^2 + a_3 \Lambda + a_4 = 0 \quad (3.11)$$

mit

$$a_1 = B_x + B_y, \quad (3.12a)$$

$$a_2 = C_x + C_y + B_x B_y - E_x E_y, \quad (3.12b)$$

$$a_3 = B_y C_x + B_x C_y - E_y F_x - E_x F_y, \quad (3.12c)$$

$$a_4 = C_x C_y - F_x F_y. \quad (3.12d)$$

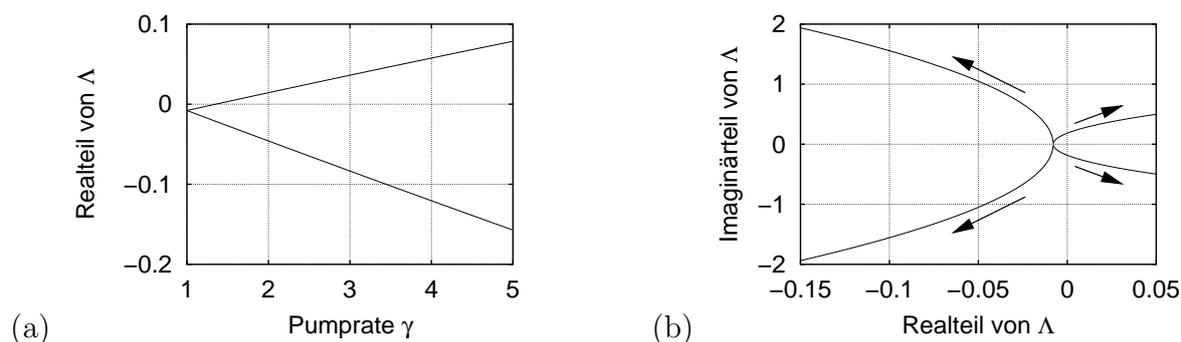


Abbildung 3.1: Eigenwerte des Untersystems für die Abweichungen der Summenintensitäten. In (a) sind die beiden Realteile der Eigenwerte Λ_i in Abhängigkeit von der Pumprate γ dargestellt. In (b) sind die Imaginärteile gegen die jeweiligen Realteile aufgetragen. Durch die Pfeile ist die Entwicklung der Werte bei ansteigender Pumprate γ gekennzeichnet.

bestimmen. Bei den aus der Literatur übernommenen Parametern für das Ratengleichungsmodell sind die vier Eigenwerte zwei komplex konjugierte Paare. Eines der Paare besitzt bei beliebigen Pumpraten γ nur negative Realteile. Die Realteile des anderen Paares werden bei von der Pumpschwelle ($\gamma = 1$) anwachsender Pumprate γ schnell positiv, der Punkt $(s_x, s_y, s'_x, s'_y) = 0$ wird damit instabil. In Abb. 3.1 ist die Entwicklung der Eigenwerte Λ in Abhängigkeit von der Pumprate dargestellt.

Nun kann die Stabilität der Einzelabweichungen i_i im durch die Nebenbedingung $(s_x, s_y, s'_x, s'_y) = 0$ eingeschränkten Raum über die Eigenwerte von Gl. (3.10) bestimmt werden. Auch hier wird für die Lösung ein Exponentialansatz gemacht, so daß sich zwei unabhängige quadratische Gleichungen $\lambda^2 + b_x \lambda + c_x = 0$ und $\lambda^2 + b_y \lambda + c_y = 0$ mit jeweils zwei (komplexen) Lösungen ergeben:

$$\lambda_{1,2}^{(x)} = -\frac{b_x}{2} \pm \sqrt{\frac{b_x^2}{4} - c_x}, \quad (3.13a)$$

$$\lambda_{1,2}^{(y)} = -\frac{b_y}{2} \pm \sqrt{\frac{b_y^2}{4} - c_y}. \quad (3.13b)$$

Es erweist sich, daß bei den gegebenen (und experimentell realistischen) Parametern diese Eigenwerte für alle Pumpraten γ negative Realteile besitzen (siehe dazu Abb. 3.2).

Daraus ergibt sich, daß die Instabilität des Fixpunktes unter der Zwangsbedingung $(s_x, s_y, s'_x, s'_y) = 0$ in den Summenintensitäten, nicht aber in den Einzelintensitäten liegt. Wenn es gelingt, die Summenintensitäten konstant auf dem Fixpunktwert zu halten, werden auch die Einzelintensitäten nicht mehr fluktuieren, und somit auch nicht mehr das frequenzverdoppelte Licht. Dies ist mit Blick auf das Experiment eine wichtige Eigenschaft, da die Summenintensitäten leicht getrennt gemessen werden können, die Einzelintensitäten nur mit erheblichem Aufwand, und somit als gutes Regelsignal zur Verfügung stehen.

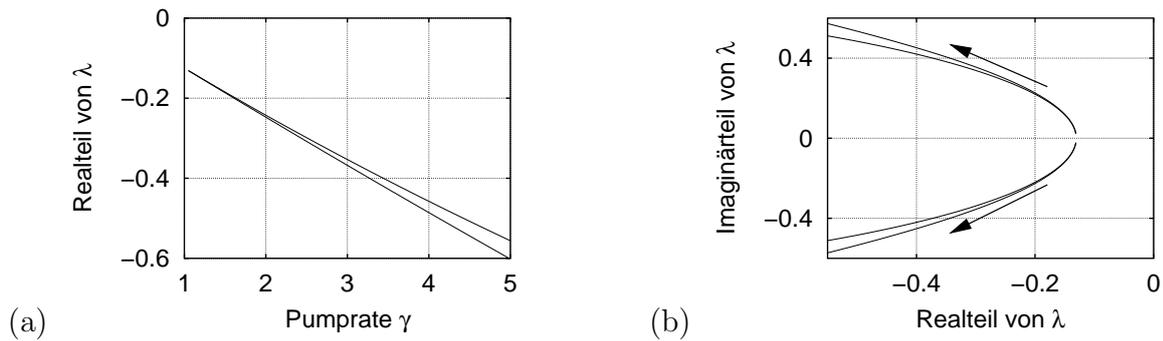


Abbildung 3.2: Eigenwerte $\lambda_i^{(x)/(y)}$ des Untersystems für die Abweichungen der Einzelintensitäten unter der Zwangsbedingung $(s_x, s_y, s'_x, s'_y) = 0$. In (a) sind die beiden Realteile der Eigenwerte in Abhängigkeit von der Pumprate γ dargestellt. In (b) sind die Imaginärteile gegen die jeweiligen Realteile aufgetragen. Durch die Pfeile ist die Entwicklung der Werte bei ansteigender Pumprate γ gekennzeichnet.

3.2.3 Stabilität des Fixpunktes mit Regeleingriff

Nachdem die Stabilität des Fixpunktes ohne Regeleingriff nun bestimmt ist, muß jetzt, unter Berücksichtigung der experimentellen Gegebenheiten, ein Regeleingriff in den Gleichungen berücksichtigt werden. Die dynamischen Größen, die gemessen werden können, sind die Ausgangsintensitäten im frequenzverdoppelten Spektralbereich und bei der Laser- oder auch Fundamentalwellenlänge. Letztere läßt sich noch in die beiden Polarisationsrichtungen des Resonators aufspalten.

Um die Dynamik des Lasers beeinflussen zu können, ist es notwendig, einen Systemparameter zu variieren. Aus experimenteller Sicht muß ein solcher Systemparameter gut zugänglich sein, daß heißt, er muß mit vertretbarem Aufwand modulierbar sein. Im Falle des frequenzverdoppelten Nd:YAG-Lasers kommen hier zunächst zwei Parameter in Frage: die Pumprate γ über den Laserdiodenstrom und die Wandlungseffizienz ϵ über den elektrooptischen Effekt des KTP-Kristalls. Hier soll zunächst der Eingriff auf die Pumprate diskutiert werden, da er mit einer einfachen Niederspannungselektronik realisierbar ist. Der Eingriff auf die Wandlungseffizienz ist experimentell schwieriger zu realisieren, da hier für den elektrooptischen Effekt hohe Spannungen mit den systemeigenen Frequenzen moduliert werden müssen. Die Beeinflussung der Wandlungseffizienz wird aus theoretischer Sicht später in diesem Kapitel behandelt.

Durch den Regeleingriff auf die Pumprate γ ändert diese sich in den Systemgleichungen (2.17) zu

$$\tilde{\gamma} = \gamma + u(t). \quad (3.14)$$

Dabei repräsentiert $u(t)$ den zeitlich variierenden Regeleingriff, die Stellgröße.

Aus der im letzten Abschnitt angeführten Motivation wurde das Modell von Pyragas et al. [pyr00] hinsichtlich der beiden orthogonalen Polarisationsrichtungen des Resonators als Regelgrößen untersucht.

Die einfachste Form einer Rückkopplungskontrolle ist die proportionale Regelung. Dabei wird die Differenz des Ausgangssignals zu einem Sollwert, hier dem Fixpunktwert, auf das System zurückgekoppelt. Im Falle des Lasers existieren zwei solcher Größen. Somit läßt sich die Stellgröße $u(t)$ mit den entsprechenden Wichtungsparemtern k_x und k_y und den beiden Fixpunktwerten $S_x^0 = \sum_{j=1}^m I_j^0 = mI_x$ und $S_y^0 = \sum_{j=m+1}^{m+n} I_j^0 = nI_y$ durch

$$u(t) = k_x(S_x(t) - S_x^0) + k_y(S_y(t) - S_y^0) \quad (3.15)$$

darstellen. In der um den Fixpunkt linearisierten Form ergibt sich dann

$$\delta u = k_x s_x + k_y s_y. \quad (3.16)$$

Durch diese Regelgröße ändert sich die Stabilität der Einzelintensitäten im durch $(s_x, s_y, s'_x, s'_y) = 0$ eingeschränkten Unterraum nicht, sie können also durch den Regeleingriff nicht instabil werden. Daher müssen nur die Gleichungen (3.8) für die Summenabweichungen betrachtet werden, die sich nun zu

$$s''_x + \tilde{B}_x s'_x + \tilde{C}_x s_x + \tilde{E}_x s'_y + \tilde{F}_x s_y = 0, \quad (3.17a)$$

$$s''_y + \tilde{B}_y s'_y + \tilde{C}_y s_y + \tilde{E}_y s'_x + \tilde{F}_y s_x = 0, \quad (3.17b)$$

verändern. Die geänderten Parameter (durch die Tilde gekennzeichnet) sind nun

$$\tilde{B}_x = B_x, \quad (3.18a)$$

$$\tilde{C}_x = C_x - k_x m I_x, \quad (3.18b)$$

$$\tilde{E}_x = E_x, \quad (3.18c)$$

$$\tilde{F}_x = F_x - k_y m I_x. \quad (3.18d)$$

Die Parameter \tilde{B}_y , \tilde{C}_y , \tilde{E}_y , und \tilde{F}_y in Gl. (3.17b) ergeben sich auch hier wieder durch das Vertauschen der Indizes x und y , bzw. der Zahlen m und n .

Die Stabilität des Fixpunktes unter Einbeziehung des Regeleingriffes wird auch hier durch das charakteristische Polynom

$$\Lambda^4 + \tilde{a}_1 \Lambda^3 + \tilde{a}_2 \Lambda^2 + \tilde{a}_3 \Lambda + \tilde{a}_4 = 0, \quad (3.19)$$

von Gl. (3.17) bestimmt. Die geänderten Koeffizienten \tilde{a}_1 , \tilde{a}_2 , \tilde{a}_3 und \tilde{a}_4 ergeben sich wieder durch das Vertauschen der Koeffizienten 3.9 durch 3.18, für die Koeffizienten mit Index y gilt wieder die Vertauschung von x und y bzw. m und n .

Für die Vorzeichen der Realteile der Eigenwerte können über das Hurwitz-Kriterium (siehe z.B. [oga90]) Aussagen getroffen werden. Wenn

$$\tilde{a}_1 > 0, \quad \tilde{a}_3 > 0, \quad \tilde{a}_4 > 0, \quad \text{und} \quad \tilde{a}_3(\tilde{a}_1 \tilde{a}_2 - \tilde{a}_3) - \tilde{a}_4 \tilde{a}_1^2 > 0 \quad (3.20)$$

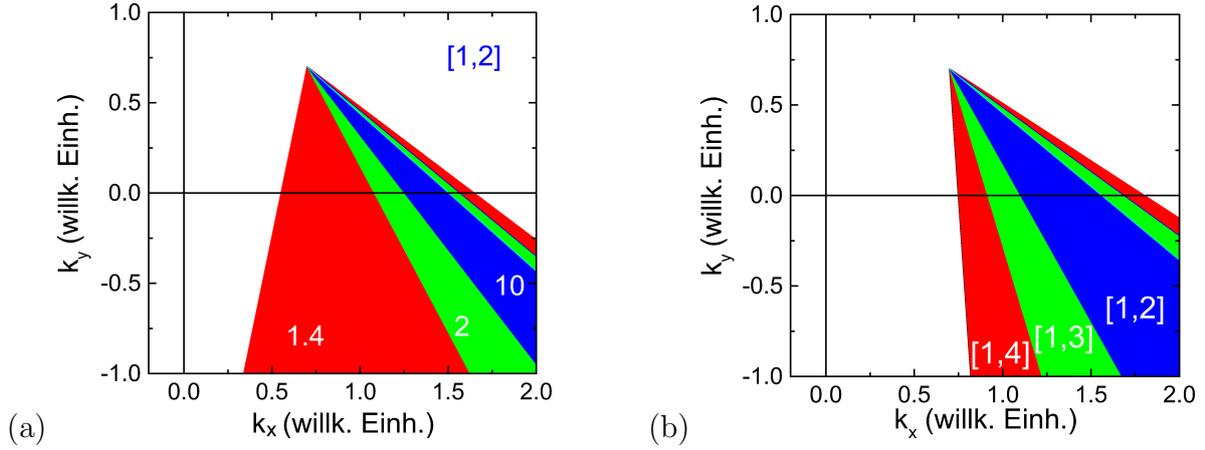


Abbildung 3.3: Numerisch bestimmte Stabilitätsbereiche in der k_x - k_y -Ebene für (a) verschiedene Pumpraten bei fester Modenkonfiguration und (b) verschiedene Modenkonfigurationen bei fester Pumprate $\gamma = 2,0$. Die Modenkonfigurationen sind durch $[n, m]$ für n in x - und m in y -Richtung polarisierte Moden bezeichnet.

gilt, sind alle Realteile negativ. Mit Hilfe dieses Kriteriums kann nun die Stabilität des Fixpunktes für verschiedene Parameter unter Variation der Rückkopplungsparameter k_x und k_y getestet werden und in der Ebene dieser beiden Parameter Stabilitätsbereiche dargestellt werden. In Abb. 3.3 sind solche Stabilitätsbereiche für verschiedene Pumpraten und Modenkonfigurationen dargestellt. Die größeren Bereiche werden teilweise von den kleineren überdeckt.

Das entscheidende Ergebnis der Analysen ist, daß das Modell für den Laser mit dem vorgeschlagenen Rückkopplungsschema stabilisierbar ist. Die Fläche der stabilen Bereiche in der Ebene der Rückkopplungsparameter k_x und k_y ist unendlich ausgedehnt und durch zwei Geraden zum nicht stabilisierbaren Bereich abgegrenzt. Der von den beiden Geraden eingeschlossene Winkel nimmt zu höheren hin Pumpraten ab. Er verschwindet aber nicht, sondern konvergiert gegen einen endlichen Wert. Die einzige Einschränkung in der Stabilisierbarkeit bilden symmetrische Zustände, die durch eine gleiche Anzahl von Moden in beiden Polarisationsrichtungen gekennzeichnet sind. Auf der anderen Seite nimmt der Winkel zwischen den beiden Begrenzungsgeraden mit der Asymmetrie des Systems zu. Die Charakterisierung der Symmetrie des Systems über die Anzahl der Moden in den beiden Polarisationsrichtungen ist wegen der vereinfachten Annahme gleicher Parameter für alle Moden aus experimenteller Sicht unrealistisch.

Ein weiterer wichtiger Aspekt der Analysen ist, daß die Stabilitätsuntersuchungen nur für eine kleine (infinitesimale) Umgebung des Fixpunktes gelten. Dies folgt direkt aus der Linearisierung, da hier unter der Annahme kleiner Abweichungen die Terme höherer Potenzen in diesen Abweichungen vernachlässigt werden. Bei größeren Abweichungen gilt dies in der Regel nicht. Der Fixpunkt liegt im allgemeinen nicht in der Nachbarschaft der komplexen Dynamik im Phasenraum, so daß aus dem laufenden Betrieb eine Stabilisierung nicht zu erreichen ist. Ein Lösungsansatz hierfür ist eine so-

genannte *Tracking*-Prozedur. Dabei wird die Regelung in einem stabilen Zustand mit konstanter Ausgangsleistung (beim Laser in der Regel bei einer niedrigeren Pumprate) eingeschaltet. Dann wird die Pumprate bei eingeschalteter Regelung langsam erhöht. Die beiden Rückkopplungsparameter k_x und k_y werden dabei auf einen Wert eingestellt, für den bei der zu regelnden Dynamik bei höheren Pumpraten eine Stabilität zu erwarten ist, gegebenenfalls können k_x und k_y mit Hilfe von Optimierungsalgorithmen dabei nachgestellt werden. So kann dann auch der Fixpunkt in Parameterbereichen, in denen der Laser eine sehr komplexe Dynamik zeigt, stabilisiert werden.

3.3 Experimentelle Umsetzung

Das in den analytischen Untersuchungen vorgeschlagene Regelschema wurde experimentell von F. Lange an der Universität Oldenburg [lan01a, lan01b] und A. Schenck zu Schweinsberg bei DaimlerChrysler in Frankfurt [sch00, sch01] umgesetzt. Dabei wurde in [lan01a, lan01b] eine analoge Regelelektronik, in [sch00, sch01] ein digitaler Signalprozessor (DSP) in einem PC verwendet. Hier gehe ich in erster Linie auf das Oldenburger Experiment ein. Bei der Umsetzung des Regelkonzeptes in Oldenburg wurde ein Schwerpunkt auf ein enges Zusammenwirken vom experimentellen Teil hauptsächlich durch F. Lange und der Modellierung durch K. Pyragas und mich gelegt.

3.3.1 Der experimentelle Aufbau

Laser-Resonator

Im Rahmen des Projektes wurde zunächst vom Projektpartner DaimlerChrysler ein Lasersystem zur Verfügung gestellt. Dieses bestand aus einer Pumpeinheit und dem eigentlichen Laserresonator. Die Pumpeinheit war ein Laserdiodensteuergerät mit eingebauter Laserdiode. Das Gerät besaß einen Regeleingang. Um das Licht der Laserdiode in den Resonator zu transportieren, wurde ein Lichtwellenleiter mit einer Grinlinse verwendet. Der Laserresonator war auf einer handelsüblichen, miniaturisierten optischen Bank aufgebaut. Die einzelnen optischen Elemente befanden sich in Standardhalterungen mit den notwendigen Freiheitsgraden (Kippen, Translation). Da das Steuergerät fehlerhaft war und die Einkopplung des Laserdiodenlichts über einen Lichtwellenleiter sehr störungsanfällig ist, wurde die Einkopplung des Pumplichts sehr schnell auf eine Freifeldgeometrie umgestellt, wie sie schon in der Skizze des Lasers in Abb. 2.6 dargestellt ist. Dabei kam dann eine Streifen-Laserdiode vom Typ S81-1000C-100 von der Firma COHERENT als Pumplichtquelle zum Einsatz. Die Wellenlänge dieser Laserdiode liegt bei 810nm, wobei sie durch Temperaturregelung mit Hilfe der integrierten Peltierelemente in einem gewissen Bereich variierbar und somit auf das Absorptionsband von Nd:YAG abstimmbare ist. Zur Steuerung der Laserdiode, was sowohl den Laserdiodenstrom, als auch die Temperaturregelung betrifft, kam ein modulares Steuergerät des Typs PRO800 von PROFILE zum Einsatz. Zur Stromregelung nutzten wir ein Modul vom Typ LDC8020, zur Temperaturregelung ein Modul vom Typ TED8020 im PRO800.

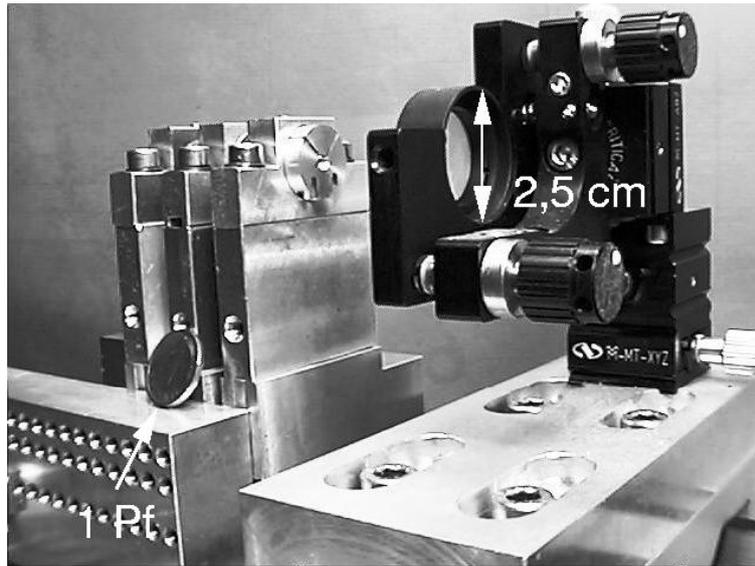


Abbildung 3.4: Photo des im Experiment eingesetzten Laserresonators mit der Fokussierlinse für das Pumplicht. Die Linse hat einen Durchmesser von 2,5 cm. Für einen Größenvergleich steht vor dem Resonator noch ein Pfennigstück.

Der Laserdiodentreiber kann über eine IEEE-488.2-Schnittstelle vom Rechner aus angesteuert werden, so daß softwaregesteuert die Temperatur und der Laserdiodenstrom einstellbar sind. Für Steuerung und Auslesen von Meßwerten wurde die Software Lab-View von NATIONAL INSTRUMENTS, eine Programmiersprache für virtuelle Meß- und Steuergeräte im Computer, eingesetzt.

Laserdioden besitzen aufgrund der kleinen Austrittsfläche, die in der Größenordnung der Lichtwellenlänge liegt, durch Beugung ein sehr divergentes Strahlprofil. Bei der verwendeten Laserdiode kommt hinzu, daß die Austrittsfläche durch ihre unterschiedlichen Ausmaße in x - und y -Richtung ($1 \times 100 \mu\text{m}^2$) zu einem elliptischen Strahlprofil führt. Die Divergenz des Strahls wird durch eine Kollimatorlinse der Firma CASIX mit einer Brennweite von 8mm parallelisiert und dann mit einer weiteren Sammellinse axial in den Nd:YAG-Kristall fokussiert. Die Linsen können durch Halterungen der Firma NE-PORT (in Abb. 3.4 in der rechten Bildhälfte zu sehen) in drei Achsen (x , y und z) verschoben und in x - und y -Richtung gekippt werden. Die elliptische Form kann durch eine Zylinderlinse oder ein anamorphes Prismenpaar (eine für diesen Zweck spezielle Anordnung zweier Prismen) zwischen den beiden Linsen zirkularisiert werden, wobei sich die Elliptizität des Pumpstrahls als nicht so kritisch erwiesen hat. Daher wurde bei den Experimenten auf diese zusätzlichen Elemente verzichtet.

Auch der ursprüngliche Resonator genügte nicht den Ansprüchen an die Reproduzierbarkeit von dynamischen Zuständen des Lasers. Dieses beruhte zum einen auf der fehlenden Möglichkeit, den Resonator auf eine konstante Temperatur einzustellen (was unter anderem die Länge des Resonators beeinflusst, aber auch spezifische Eigenschaften der Kristalle, wie z.B. die Wandlungseffizienz des KTP-Kristalls). Zum anderen waren

die Halterungen der optischen Elemente nicht mechanisch stabil genug, das heißt, sie waren in gewissen Toleranzgrenzen beweglich. Daher war es notwendig, den mechanischen Aufbau des Resonators komplett neu aufzubauen.

Dabei hat der mechanische Aufbau des Resonators im Laufe der Arbeiten in Oldenburg verschiedene Änderungen und Neukonstruktionen durchlaufen, wobei sich schließlich der in Abb. 3.4 abgebildete Resonator durchgesetzt hat. Die Vorteile dieses Resonators liegen auf der einen Seite in der mechanischen Stabilität und in der Temperaturstabilisierbarkeit, zum anderen in der Flexibilität, was die Justage und Positionierbarkeit der Elemente betrifft.

Das Pumplicht kommt in Abb. 3.4 von rechts und wird mit der abgebildeten Sammellinse in den Nd:YAG-Kristall fokussiert. In der linken Bildhälfte sind die drei Fassungen für (von rechts nach links) den laseraktiven Nd:YAG-Kristall mit verspiegelter Rückseite, den frequenzverdoppelnden KTP-Kristall und den Auskoppelspiegel zu sehen. Die Fassungen sind in einem u-förmigen Aluminiumblock montiert. Sie besitzen zur Justage der Elemente alle möglichen Translations- und Rotationsfreiheitsgrade. Der gesamte Resonator ist mit Hilfe eines Peltierelementes unter dem Aluminiumblock temperaturstabilisierbar. Zusätzlich wird der gesamte Resonator mit einem PVC-Kasten vor Störungen von außen geschützt. Durch die Temperaturregelung ist es möglich, den Laser in unterschiedlichen Betriebszuständen zu betreiben. Durch eine Temperaturänderung ändert sich in erster Linie die Länge des Resonators, aber auch die einzelnen Längen der Kristalle. Dies führt dazu, daß in einem gewissen Rahmen unterschiedliche Modenkonfigurationen angesteuert werden können. Diese hängen aber nicht unbedingt systematisch von der Temperatur ab, sondern müssen empirisch ermittelt werden. Die Temperatur des Resonators kann im verwendeten Aufbau zwischen ca. +10 °C und ca. +50 °C geregelt und im Bereich einiger mK stabil gehalten werden.

In der Abb. 3.4 ist die verspiegelte Rückseite des Nd:YAG-Stabes in der rechten, vorderen Fassung aus blankem Aluminium zu sehen. Der zylindrische Kristall ist 5mm lang und besitzt einen Durchmesser von 3mm. Die im Bild rechte Seite des Kristalls ist für die Laserwellenlänge bei 1064nm ($r > 99,8\%$) und die erste Harmonische bei 532nm ($r > 99\%$) verspiegelt, für das Pumplicht bei 808nm entspiegelt ($r < 5\%$). Die andere Seite des Nd:YAG-Kristalls ist für die Laserwellenlänge entspiegelt ($r < 0,1\%$).

In der linken, hinteren Fassung in Abb. 3.4 befindet sich der konkave Auskoppelspiegel. Der Krümmungsradius des Spiegels beträgt 80mm. Er ist für die Fundamentalwellenlänge hoch verspiegelt ($r > 99,8\%$) und für die erste Harmonische entspiegelt ($r < 5\%$). Der Abstand zwischen den beiden Spiegeln beträgt ca. 35mm, wodurch die optische Länge wegen des optisch dichteren Nd:YAG-Kristalls (Brechungsindex $n = 1,82$) ca. 39mm ($= 30 + 5 \times 1,82$ mm) im unverdoppelten Laser beträgt.

In der mittleren Fassung befindet sich der optisch nichtlineare KTP-Kristall ($5 \times 3 \times 3\text{mm}^3$). Er ist so eingesetzt, daß seine optischen Hauptachsen orthogonal zur optischen Achse und eine von ihnen senkrecht auf dem optischen Tisch liegen. Die optische Länge vergrößert sich im Laser mit Frequenzkonversion durch den KTP-Kristall (Brechungsindex $n \approx 1,8$) noch einmal um 4mm.

Wie im Abschnitt 2.2.1 beschrieben, führen doppelbrechende Elemente in Resonatoren zu Polarisierungseigenzuständen in den sich ausbildenden Moden. Hauptsächlich

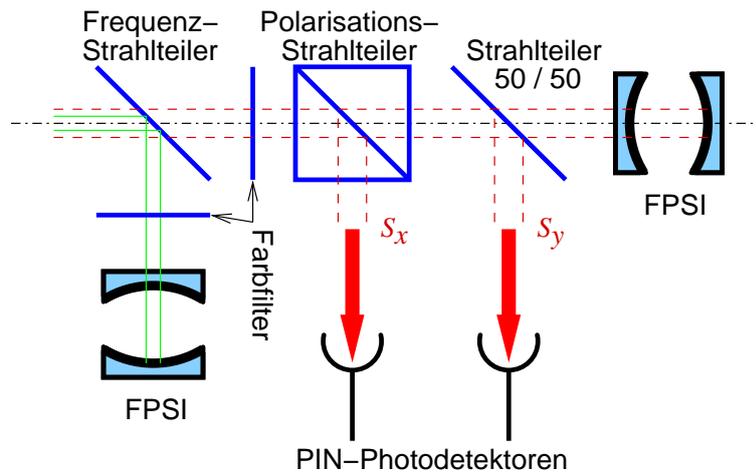


Abbildung 3.5: Schematische Darstellung der Ausgangsstrahlanalyse (FPSI=Fabry-Perot-Scanning-Interferometer)

ist der KTP-Kristall doppelbrechend (sonst wäre die Phasenanpassungsbedingung nicht erfüllbar). Seine optischen Achsen liegen jeweils parallel zu zwei gegenüberliegenden Seiten des quadratischen Querschnitts. Der Nd:YAG-Kristall ist aufgrund seiner kubischen Kristallstruktur an sich optisch isotrop. Durch Druck (z.B. in der Fassung) und durch lokale Erwärmung durch das Pumplicht wird diese Isotropie jedoch aufgehoben. Dadurch emittiert schon der unverdoppelte Laser infrarotes Licht in zwei orthogonalen Polarisationsrichtungen, die auf den optischen Hauptachsen des Kristalls liegen. Die optischen Achsen der beiden Kristalle wurden im Resonator parallel zueinander ausgerichtet. Dies führt zu einer Frequenzkonversion hauptsächlich durch Summenfrequenzbildung zwischen orthogonal polarisierten Moden (Typ-II-Phasenanpassung), was einem nahezu verschwindenden Wert für den Geometriefaktor g in den Differentialgleichungen (2.17a) entspricht. Der in der Literatur verwendete Wert $g = 0,1$ kommt also unseren experimentellen Gegebenheiten nahe.

Elemente der Ausgangsstrahlanalyse

Der Analyseteil ist in Abb. 3.5 schematisch dargestellt. Das aus dem Laser entlang der optischen Achse (strichpunktiert) austretende Licht bei 1064nm (dunkelrot) und bei 532nm (grün) wird durch den Frequenzstrahlteiler in die beiden Spektralanteile aufgespalten. Das grüne Licht bei 532nm wird dann mit einem Farbfilter von eventuell noch enthaltenen roten Anteilen befreit. Mit einem Fabry-Perot-Scanning-Interferometer (FPSI) können nun die einzelnen „Moden“ im Grünen dargestellt werden. Das infrarote Licht wird zunächst ebenfalls mit einem Farbfilter von den verbliebenen Anteilen mit kürzeren Wellenlängen befreit. Ein drehbar gelagerter Polarisations-Strahlteilerwürfel mit mitdrehendem PIN-Photodetektor trennt die beiden Polarisationsrichtungen auf. Hinter dem Polarisations-Strahlteilerwürfel wird nun die verbliebene Polarisationsrichtung mit einem 50%-Strahlteiler zum einen auf einen weiteren PIN-Photodetektor, zum anderen in das zweite FPSI gelenkt. Mit Hilfe des FPSIs für infrarotes Licht kann die

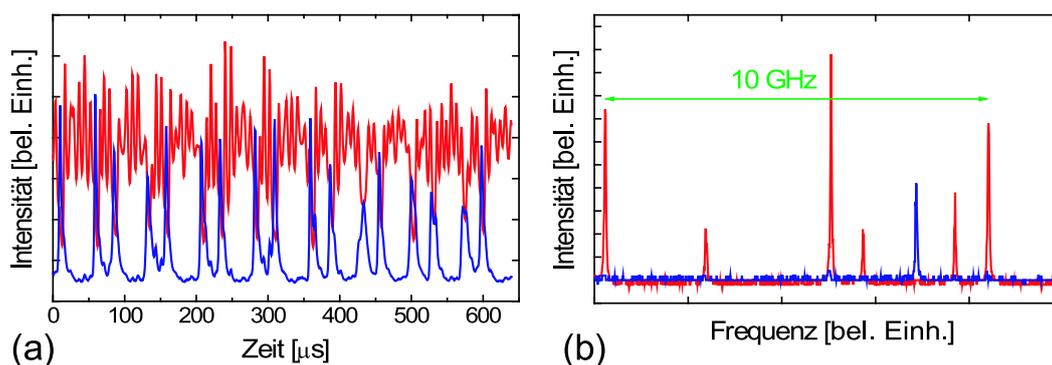


Abbildung 3.6: (a) Exemplarische Zeitreihen des vom Laser abgestrahlten infraroten Lichts in den beiden Polarisationsrichtungen mit (b) dazugehörigem Modenspektrum (blau x -polarisiert, rot y -polarisiert)

Ausrichtung des Polarisations-Strahlteilerwürfels kontrolliert werden (alle Moden in einer Polarisationsrichtung müssen verschwinden) und die Anzahl der Moden in den beiden Polarisationsrichtungen bestimmt werden. Letzteres gibt Hinweise auf die Zahl der Gleichungen vom Typ (2.17) in der Modellierung.

Die Darstellung der Signale der PIN-Photodetektoren und der FPSIs erfolgt mit zwei Digital-Speicher-Oszilloskopen, die über eine IEEE-488.2-Schnittstelle mit dem Rechner verbunden sind. Die Signale der PIN-Photodetektoren werden zusätzlich von einer 2-Kanal-100MHz-AD-Wandlerkarte (PDA12 von SIGNATEC) digitalisiert. Mit 2 MB Speicher auf der Karte können bei einer 12 Bit-Digitalisierung Zeitreihen mit bis zu 1 Million Punkten aufgenommen werden.

Zur Messung der Leistung des abgestrahlten Laserlichts wird ein Leistungsmeßgerät vom Typ Fieldmaster von COHERENT verwendet. Mit Hilfe dieses Gerätes können z.B. die Pumpschwelle und die dazu relativen Pumpraten bestimmt werden.

In Abb. 3.6(a) sind zwei gleichzeitig mit den beiden PIN-Photodetektoren aufgenommene Zeitreihen in den beiden Polarisationsrichtungen dargestellt. Man kann sehr gut die Antiphasedynamik zwischen den beiden Polarisationsrichtungen erkennen: wenn sie x -polarisierte Summenintensität ein Maximum besitzt, hat die y -polarisierte einen Einbruch und vice versa. In Abb. 3.6(b) sind die beiden nacheinander mit dem FPSI aufgenommenen Modenspektren für die beiden Polarisationsrichtungen dargestellt. Zwischen den beiden Messungen mußte der Polarisations-Strahlteilerwürfel um 90° gedreht werden. Aus der Graphik kann abgelesen werden, daß in der x -Richtung eine Mode, in der y -Richtung fünf Moden angeschwungen sind. Eine absolute Lage der Moden im Frequenzspektrum ist nicht oder nur sehr schwierig zu bestimmen, da das Modenspektrum in den freien Spektralbereich (FSB) des FPSI (analog zum FSB eines Laser-Resonators in Abschnitt 2.2.1) von 10GHz gefaltet wird. Der FSB des Lasers und damit der minimale Abstand der longitudinalen Lasermoden liegt zwar bei ca. 3,5GHz, durch die Konkurrenz der Moden um angeregte Zustände im aktiven Medium und das räumliche Lochbrennen schwingen die Moden aber mit größeren Abständen (aber ganzzahligen Vielfachen des FSB des Lasers) an. Dieses Phänomen wird als *sparse mode operation*

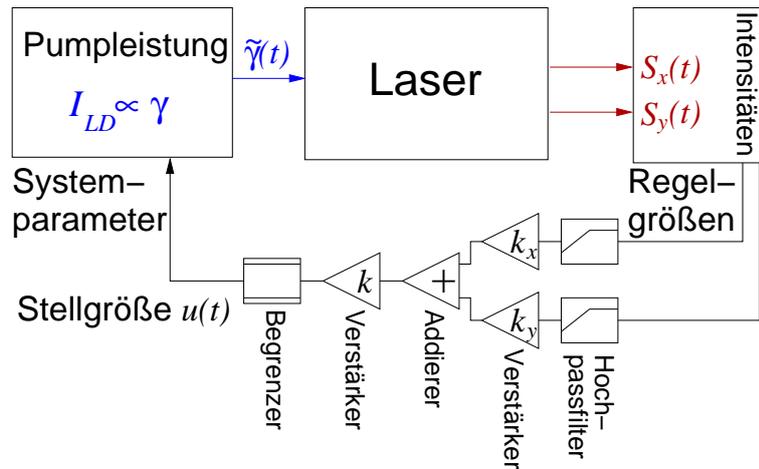


Abbildung 3.7: Schema der Rückkopplungsregelung.

bezeichnet.

3.3.2 Die Regelung im Experiment

Im aus der Analyse der Ratengleichungen abgeleiteten Regelschema wird die Stellgröße aus den jeweiligen Differenzen zwischen den beiden Summenintensitäten S_x und S_y und ihren jeweiligen Fixpunktintensitäten S_x^0 und S_y^0 generiert. Die Werte der Fixpunkte stehen aber leider im Experiment nicht zur Verfügung. In den numerischen Simulationen hat sich aber zum Glück gezeigt, daß der Mittelwert $\langle S_x \rangle$ bzw. $\langle S_y \rangle$ der fluktuierenden infraroten Summenintensitäten nahe dem Fixpunktwert liegen:

$$S_x^0 \approx \langle S_x \rangle \quad \text{und} \quad S_y^0 \approx \langle S_y \rangle. \quad (3.21)$$

Daher bietet es sich hinsichtlich der experimentellen Umsetzung an, das Regelsignal aus den hochpassgefilterten Summenintensitäten zu gewinnen.

In Abb. 3.7 ist die Rückkopplungsschleife als Blockschaltbild dargestellt. Die beiden Summenintensitäten werden, durch den Polarisations-Strahlteilerwürfel aufgeteilt, zeitlich aufgelöst mit den beiden PIN-Photodetektoren gemessen. Deren Signal wird dann zunächst jeweils mit einem Hochpaßfilter von niedrigen Frequenzanteilen (Abschneidfrequenz ca. 1kHz) befreit. Die Filterung kann als die Mittelwertbildung für $\langle S_x \rangle$ und $\langle S_y \rangle$ bzw. Differenzbildung für $(S_x(t) - \langle S_x \rangle)$ und $(S_y(t) - \langle S_y \rangle)$ angesehen werden. Diese Signale werden dann mit Operationsverstärkern mit den k_x und k_y entsprechenden Gewichtungsfaktoren verstärkt bzw. abgeschwächt. Die Variation der Verstärkung erfolgt dabei mit Hilfe von Digital-Potentiometern mit 100 diskreten Widerstandswerten, die über eine parallele Schnittstelle von einem Rechner aus angesteuert werden. Die beiden Signale werden dann addiert und mit einer Gesamtverstärkung k versehen (so kann der mögliche Ausschnitt in der k_x - k_y -Ebene variiert werden). Zum Schluß wird das Signal noch in der Amplitude auf die extremalen Werte u_{\max} bzw. u_{\min} begrenzt. Somit erhält

man die Stellgröße

$$u_{\text{exp}}(t) = \begin{cases} u_{\text{max}}, & k(k_x \langle S_x \rangle + k_y \langle S_y \rangle) > u_{\text{max}}, \\ u_{\text{min}}, & k(k_x \langle S_x \rangle + k_y \langle S_y \rangle) < u_{\text{min}}, \\ k(k_x \langle S_x \rangle + k_y \langle S_y \rangle). & \end{cases} \quad (3.22)$$

Die Einkopplung in den Laser erfolgt über den Laserdiodenstrom und damit über die Pumprate. Daß Halbleiterlaser gut und vor allem schnell modulierbar sind, ist aus Anwendungen in der Telekommunikation und der Datenfernübertragung über Glasfasern bekannt. Es stellt sich nur die Frage, wie man diese Modulation am besten realisiert. In unserem Fall wurde mit einer Bypass-Schaltung ein Teil des Laserdiodenstroms an der Laserdiode vorbei abgeleitet. Diese Beschaltung hat den großen Vorteil, daß keine Stromspitzen, die über den im Steuergerät vorgegebenen Wert hinausgehen, zur Laserdiode gelangen und diese zerstören können, da der vom Steuergerät gelieferte Strom nur zu niedrigeren Werten hin geregelt werden kann. Ein Nachteil dieser Schaltung ist, daß bei der Regelung das Steuergerät eine sich entsprechend ändernde Impedanz am Ausgang „sieht“. Das Steuergerät versucht dann, als Konstantstromquelle die Spannung entsprechend nachzuregeln. Diese Nachregelung kann aber nur mit einer endlichen, gerätespezifischen Bandbreite erfolgen. Dadurch wird im Kontrast zu den theoretischen Untersuchungen die Regelgröße frequenzabhängig, was einen großen Einfluß auf die Stabilisierbarkeit des Lasers hat, wie weiter unten in diesem Kapitel gezeigt wird.

In der technischen Ausführung wird durch die Bypass-Schaltung ein Offset vom Laserdiodenstrom abgezogen. Um diesen Wert kann dann über einen Regeleingang nach oben bis zum im Steuergerät eingestellten Wert und nach unten moduliert werden.

3.3.3 Experimentelle Ergebnisse

Mit den so gegebenen Mitteln war es nun möglich, rechnerunterstützt die zeitlichen Fluktuationen der Laserintensitäten in Abhängigkeit von den Rückkopplungsparametern bei verschiedenen Betriebszuständen des Lasers zu messen. Die Variation der Betriebszustände fand dabei zum einem über die Änderung des Laserdiodenstroms statt. Die Erhöhung des Laserdiodenstroms führt in der Regel zu einer Zunahme der Komplexität der Laserdynamik, da dabei zusätzliche Moden anschwingen und daher, im Sinne der numerischen Modellierung des Lasers gesprochen, mehr Modellgleichungen verwendet werden müssen. Eine weitere Variation der Betriebszustände kann über die Änderung der Resonatortemperatur erreicht werden. Dabei kann die Anzahl der Moden bzw. die mittlere Gesamtenergie jeweils in den beiden Polarisationsrichtungen in gewissen Grenzen variiert werden.

Zur Charakterisierung der Fluktuationen im Hinblick auf die Stabilitätseigenschaften wurde der Wechselstromanteil bzw. zu dessen Quantifizierung die Standardabweichung der zeitlichen Signale der PIN-Photodetektoren, die im Rechner mit der AD-Wandlerkarte aufgenommen werden, verwendet. Die den Rückkoppelparametern k_x und k_y aus dem Modell entsprechenden Verstärkungsfaktoren wurden mit den Digitalpotentiometern (100 diskrete Widerstandswerte) über einen Rechner eingestellt. Die Verstell-

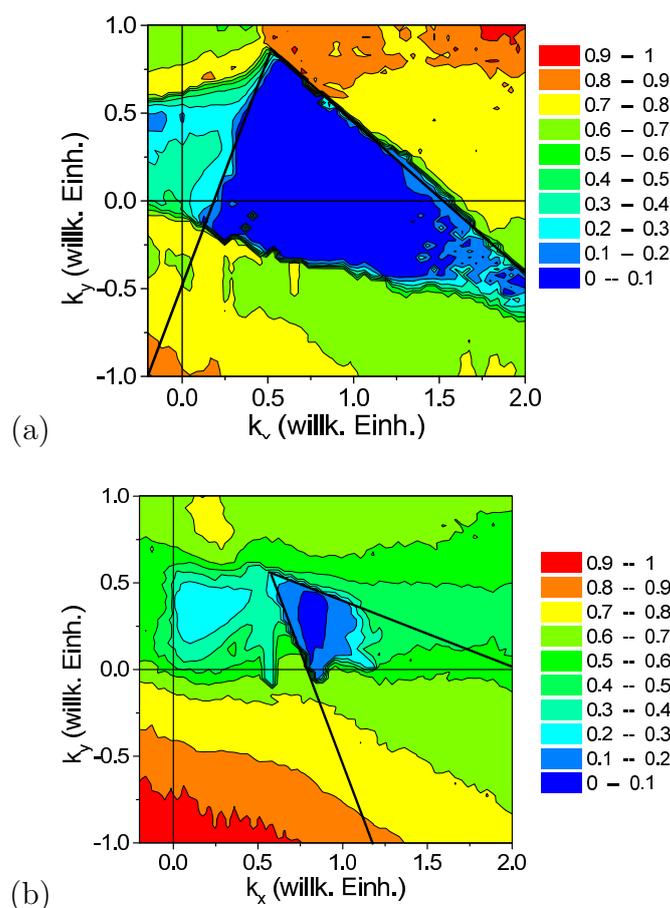


Abbildung 3.8: Experimentell ermittelte Stabilitätsbereiche in der k_x - k_y -Ebene für zwei verschiedene Laserzustände: (a) Relative Pumprate $\gamma = 1,38$, Modenkongfiguration $[1,1]$, (b) $\gamma = 2,17$, $[1,4]$.

lung erfolgt dabei inkrementell, d.h. es kann kein konkreter Wert absolut angesteuert werden. Die Ansteuerung der Schnittstelle für die Digitalpotentiometer wird auf der Softwareseite mit LabView realisiert.

Mit Hilfe der Automatisierung können nun durch Abtastung des Parameterbereichs Stabilitätskarten des Lasers in der k_x - k_y -Ebene aufgenommen werden. In Abb. 3.8 sind exemplarisch zwei solche Karten für zwei verschiedene Betriebszustände des Lasers dargestellt. Die x - und y -Achse bezeichnen dabei die Einstellung der Digitalpotentiometer, die proportional zu den Gewichtungsfaktoren k_x bzw. k_y ist. Eine direkte Zuordnung der Potentiometereinstellungen zu den Werten der Gewichtungsfaktoren ist problematisch, da die Signale einen quantitativ schwer nachzuvollziehenden Weg durch die PIN-Dioden und die folgende Verstärkerschaltung nehmen. Die Farbkodierung in der Fläche stellt die Standardabweichung der y -polarisierten infraroten Intensität dar. Zusätzlich sind noch als Bezug zur Theorie Begrenzungslinien der dreieckigen Stabilitätsbereiche mit verschwindendem Wechselstromanteil eingezeichnet.

Durch die Abtastung der Parameter über die Digitalpotentiometer wird der Para-

meter k_y für aufeinanderfolgende Werte von k_x einmal aufsteigend, einmal absteigend verstellt. Dies führt bei einem hysteretischen Verhalten zu Problemen. Beim Herauslaufen aus einem Stabilitätsbereich bleibt die Stabilität länger erhalten, als beim Hineinlaufen. Dadurch erhalten die Stabilitätskarten an den Rändern der Stabilitätsbereiche eine zackige Struktur, die auf das hysteretische Verhalten zurückgeführt werden kann. Andererseits spricht dies für die Wirksamkeit einer *tracking*-Prozedur, da der Laser bei erreichter Stabilität unter Parameteränderung länger stabil gehalten werden kann.

Der Laser kann mit dem aus der Theorie abgeleiteten Regelschema in einigen Parameterbereichen stabilisiert werden. Die bei diesen Parameterwerten aufgenommenen Stabilitätskarten unter Variation der Gewichtungsfaktoren für die beiden infraroten Summenintensitäten zeigen dabei strukturelle Ähnlichkeiten zu den theoretisch vorhergesagten Stabilitätsbereichen, wie in Abb. 3.8 zu sehen ist. Die deutliche Abweichung von den in der Theorie unendlich ausgedehnten Bereichen ist die scharfe Begrenzung der experimentell bestimmten Stabilitätsbereiche im vierten Quadranten. Diese Abweichung wird im nächsten Abschnitt diskutiert.

Die Stabilitätskarten können aber nur im Bereich niedriger Pumpraten aufgenommen werden, da hier im Phasenraum der Einzugsbereich des Fixpunktes von den Trajektorien der unregulierten Dynamik geschnitten wird. Bei höheren Pumpraten kann zum Teil Stabilität durch die *tracking*-Prozedur erreicht werden, wie in [sch00, sch01] gezeigt. Weiterhin versagt das Regelschema in Systemzuständen, bei denen die gemittelten Summenintensitäten $\langle S_x \rangle$ und $\langle S_y \rangle$ gleiche Werte annehmen, die in [sch00, sch01] über den Winkel zwischen $\{\langle S_x \rangle, \langle S_y \rangle\}$ und der $\langle S_x \rangle$ -Achse charakterisiert werden.

3.4 Erklärung der Abweichungen der Beobachtungen von der Theorie

In diesem Abschnitt gilt es, zu klären, warum die experimentell ermittelten Stabilitätsbereiche abweichend von der Theorie im vierten Quadranten der k_x - k_y -Ebene scharf begrenzt sind, und warum im Experiment bei hohen Pumpraten, trotz der *tracking*-Prozedur, eine Stabilisierung nicht mehr möglich ist. Daher wird nach eventuellen Gemeinsamkeiten dieser beiden Situationen gesucht (ungeregulierter Laser bei höheren Pumpraten, Einfluß der Regelung im vierten Quadranten der k_x - k_y -Ebene).

Aus der Literatur ist bekannt, wie auch aus den linearisierten Oszillatorgleichungen (3.8) für die Abweichungen vom Fixpunkt abzulesen, daß die charakteristischen Frequenzen ω_l des Systems mit der Pumprate wurzelförmig ansteigen, $\omega_l \propto \sqrt{\gamma}$.

Bei den bisherigen Untersuchungen der Stabilität des Fixpunktes in Abhängigkeit von den Rückkopplungsparametern k_x und k_y im Modell wurde bisher die Stabilität qualitativ über das Vorzeichen der größten Realteile von Eigenwerten charakterisiert. Dies geschah über das mathematisch rigorose *Hurwitz*-Kriterium (3.20). Zur quantitativen Bestimmung der Eigenwerte werden in Press et al. [pre92] Algorithmen zur numerisch robusten Bestimmung der Nullstellen (Eigenwerte) von Polynomen angegeben. Dies geschieht über einen Umweg über die Bestimmung der Eigenwerte von Matrizen, da

dieses besser und sicherer zu implementieren ist, als die direkte Bestimmung der Nullstellen der Polynome. Aus den (reellen) Koeffizienten der Polynome (3.19) wird dabei eine Matrix konstruiert, deren charakteristisches Polynom wiederum das zu untersuchene Polynom (3.19) selber ist. So können die komplexen Eigenwerte zur Ermittlung der Stabilität des Fixpunktes in Abhängigkeit von den Rückkopplungsparametern bestimmt werden. Zur Verifizierung der Ergebnisse können die mit dem *Hurwitz*-Kriterium (siehe Gl. (3.20)) ermittelten Stabilitätsbereiche (z.B. in Abb. 3.3) dienen.

Die Eigenwerte des charakteristischen Polynoms für die Stabilität des Fixpunktes sind im untersuchten Parameterbereich im allgemeinen komplex. Das bedeutet, daß die Umgebung des Fixpunktes neben dem über die Realteile der Eigenwerte beschriebenen Auseinander- bzw. Zusammenlaufen eine Rotation besitzen. Die Frequenz dieser Rotation wird durch die Imaginärteile der Eigenwerte beschrieben. In Abb. 3.9 sind für einen exemplarischen Zustand des Lasers die größten Real- und Imaginärteile aller Eigenwerte in der k_x - k_y -Ebene mit Grauwerten kodiert dargestellt. Die maximalen Realteile steigen in Richtung positiver Rückkopplungsparameter k_x und k_y , also im ersten Quadranten, stark an. Die maximalen Imaginärteile hingegen steigen in Richtung positiver k_x und negativer k_y , also im dritten Quadranten, an. Die Steigung der Linien gleicher maximaler Imaginärteile liegt dabei ähnlich zum Winkel zwischen der Abbruchkante und der k_x -Achse bei den experimentell ermittelten Stabilitätsbereichen. Dies kann als Hinweis dienen, daß die Frequenzen hinsichtlich der Stabilität des Fixpunktes bei der Regelung eine Rolle spielen.

In den numerischen Untersuchungen wird davon ausgegangen, daß die Rückkopplungsschleife nicht frequenzbegrenzt ist. In der experimentellen Realisierung hingegen gibt es solche Frequenzbegrenzungen durch die Eigenschaften der realen, analogen Bauelemente. Dies führt zu einem frequenzabhängigen Regelsignal, hohe Frequenzen werden schwächer zurückgekoppelt, als niedrigere. Wenn die analoge Schaltung die Charakteristik eines Tiefpassfilters hat, kommt es außerdem zu einer Phasenverschiebung, d.h. bei höheren Frequenzen wird im schlimmsten Fall genau entgegengesetzt geregelt. Bei einer digitalen Realisierung [sch00, sch01] spielen endliche Verarbeitungszeiten eine Rolle, die zu einer verzögerten Antwort in der Rückkopplung führen. Solche digitalen Realisierungen können zwar höhere Frequenzen mit der richtigen Amplitude zurückkoppeln, die Durchlaufverzögerung führt aber, ähnlich zum Tiefpassfilter, zu einer Phasenverschiebung.

In der theoretischen Beschreibung kann eine solche Frequenzbeschränkung durch einen Tiefpassfilter modelliert werden. Für das Ratengleichungssystem bedeutet das einen zusätzlichen Freiheitsgrad der Form

$$z' = \omega_c(k_x(S_x - S_x^0) + k_y(S_y - S_y^0) - z). \quad (3.23)$$

Dabei ist ω_c die Abschneidefrequenz des Tiefpaßfilters, bei der die Intensität des Signals auf die Hälfte abgefallen ist und sich eine Phasenverschiebung von 45° ergibt. Die Stellgröße $u(t)$ ändert sich dann zu

$$u_f(t) = k_x(S_x - S_x^0) + k_y(S_y - S_y^0) - z. \quad (3.24)$$

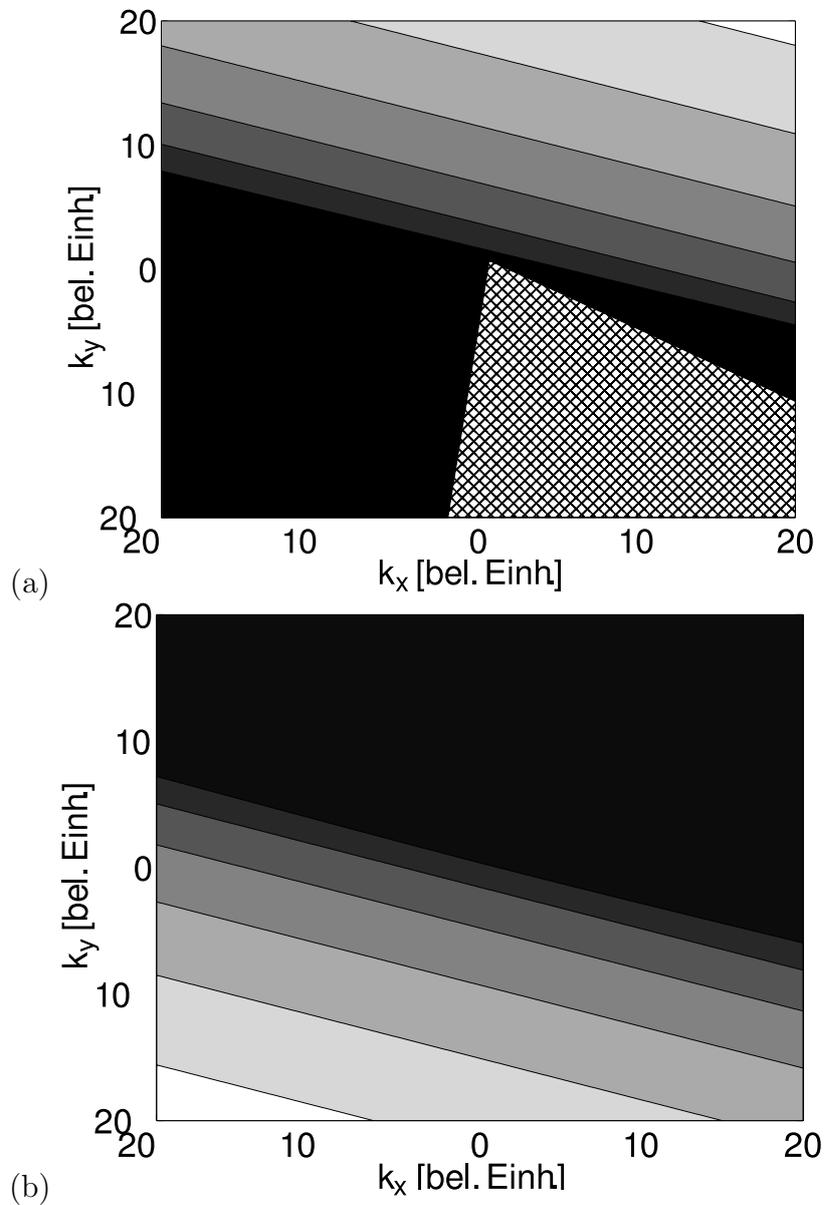


Abbildung 3.9: (a) Größter Realteil, (b) größter Imaginärteil aller Eigenwerte des charakteristischen Polynoms für die Stabilität des Fixpunktes in Abhängigkeit von den Rückkopplungsparametern k_x und k_y bei einer Pumprate $\gamma = 1,4$ und einer Modenkonfiguration [1, 3]. Hellere Flächen entsprechen höheren (positiven) Werten. Die schraffierte Fläche in (a) kennzeichnet den Stabilitätsbereich mit negativem größtem Realteil der Eigenwerte (vgl. Abb. 3.3).

Das um den Tiefpaßfilter erweiterte Gleichungssystem wird wieder um den Fixpunkt linearisiert. Da an der neuen Stellgröße $u_f(t)$ weiterhin nur die Summenintensitäten beteiligt sind, ändert sich die Stabilität der Einzelabweichungen i_i unter der Randbedingung $(s_x, s_y, s'_x, s'_y) = 0$ nicht. Daher muß nur das auf fünf Gleichungen erweiterte System für die Summenintensitäten betrachtet werden. Daraus ergibt sich ein charakteristisches Polynom fünfter Ordnung:

$$\Lambda^5 + d_1\Lambda^4 + d_2\Lambda^3 + d_3\Lambda^2 + d_4\Lambda + d_5 = 0. \quad (3.25)$$

Die Koeffizienten d_i des Polynoms sind

$$d_1 = a_1 + \omega_c, \quad (3.26a)$$

$$d_2 = a_2 + \omega_c(B_x + B_y), \quad (3.26b)$$

$$d_3 = a_3 + \omega_c(C_x + C_y + B_xB_y - E_xE_y - k_xS_x^0 - k_yS_y^0), \quad (3.26c)$$

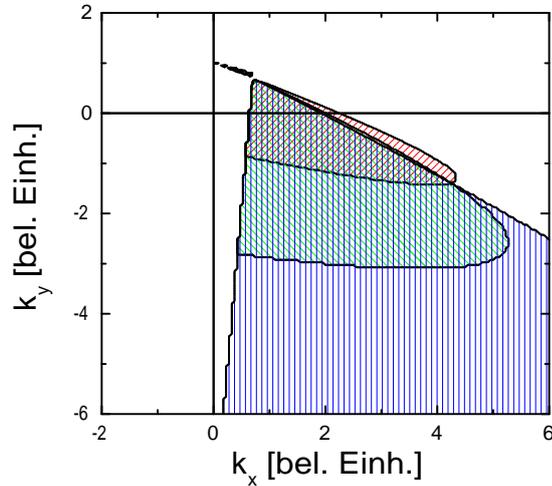
$$d_4 = a_4 + \omega_c(B_xC_y + B_yC_x - E_xF_y - E_yF_x - B_xk_yS_y^0 - B_yk_xS_x^0) \quad (3.26d)$$

und

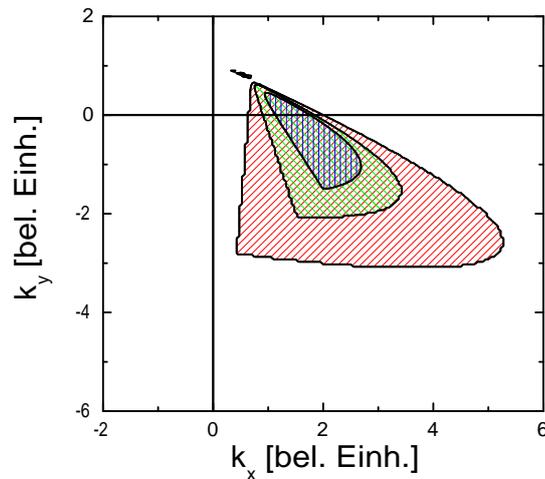
$$d_5 = \omega_c(C_xC_y - F_xF_y - C_xk_yS_y^0 - C_yk_xS_x^0 + F_xk_xS_y^0 + F_yk_yS_x^0). \quad (3.26e)$$

Da sich die Algorithmen aus Press et al. [pre92] als numerisch robust erwiesen haben, wurden die Eigenwerte dieses Polynoms damit bestimmt. Zum einen wurde dies bei einer festen Systemkonfiguration mit unterschiedlichen Bandbreiten der Rückkoppelschleife durchgeführt. Zum anderen wurde bei einer experimentell realistischen Bandbreite und fester Modenkonfiguration die Pumprate γ erhöht, um den Einfluß steigender Frequenzen bei Erhöhung der Pumprate zu untersuchen. Die Ergebnisse dieser Untersuchungen sind graphisch in Abb. 3.10 dargestellt. In Abb. 3.10 (a) ist für das Modell die Abhängigkeit der Stabilitätsbereiche von der Bandbreite dargestellt. Die dabei ermittelten Stabilitätsbereiche geben sehr gut die Form der experimentell ermittelten Bereiche wieder. Die Flächen der Bereiche nehmen mit steigender Abschneidefrequenz zu und konvergieren für $\omega_c \rightarrow \infty$ gegen die unendlich ausgedehnten Flächen aus der Untersuchung mit unbeschränkter Bandbreite. In Abb. 3.10 (b) ist die Abhängigkeit der Stabilitätsbereiche von der Pumprate bei fester Modenkonfiguration und Bandbreite der Rückkopplungsschleife dargestellt. Die Bereiche werden bei steigender Pumprate immer kleiner und sie verlagern ihre Position zu hohen Pumpratzen, was erklären kann, warum die *tracking*-Prozedur ohne Änderung der Rückkopplungsparameter bei höheren Pumpratzen versagt.

Aus den Untersuchungen hinsichtlich der Abhängigkeit der Stabilisierbarkeit läßt sich für das Experiment ableiten, daß es Hoffnungen gibt, durch eine Verbesserung der Rückkopplungselektronik die Stabilisierung des Lasers zu verbessern. Es bleibt aber noch die fehlende Stabilisierung bei symmetrischen Systemkonfigurationen, die sich im Modell durch gleiche Modenanzahlen, im Experiment durch gleiche mittlere Intensitäten in beiden Polarisationsrichtungen auszeichnen.



(a)



(b)

Abbildung 3.10: Numerisch ermittelte Stabilitätsbereiche in der k_x - k_y -Ebene unter Berücksichtigung einer endlichen Bandbreite. (a) Unterschiedliche Bandbreiten ($\omega_c \approx 0,25$ MHz (rot schraffiert), 1 MHz (grün schraffiert) und 16 MHz (blau schraffiert)) der Rückkopplungsschleife bei fester Systemkonfiguration (Pumprate $\gamma = 1,4$, Modenkonfiguration [1, 3]), (b) feste Bandbreite ($\omega_c \approx 1$ MHz), feste Modenkonfiguration und unterschiedliche Pumpraten ($\gamma = 1,4$ (rot schraffiert), 2,1 (grün schraffiert) und 10 (blau schraffiert)).

3.5 Alternative Regeleinriffe mit Rückkopplung auf einen Systemparameter

In diesem Abschnitt wird kurz auf theoretische Vorhersagen für andere eindimensionale Rückkopplungsschemata eingegangen, bei denen entweder eine andere Form der Rückkopplungsfunktion (proportional-differentiell und rein differentiell) auf den Laserdiodenstrom oder die gegebene Funktion (proportionale Rückkopplung der infraroten Summenintensitäten) auf einen anderen Systemparameter, hier die Wandlungseffizienz, zurückgekoppelt wird.

3.5.1 Differentielle und gemischt proportional-differentielle Rückkopplung

Eine Möglichkeit, das Regelungsschema zu verändern, ist, statt der Signale der infraroten Summenintensitäten selbst, die abgeleiteten und/oder integrierten Signale zurückzukoppeln. Rückkopplungsschemata mit Ableitungen wurden in Pyragas et al. [pyr00] untersucht und sollen hier kurz dargestellt werden. Ein solches Regelungsschema ist aus der Regelungstechnik als PID-Regelung (**p**roportional-**i**ntegral-**d**ifferentiell) bekannt und findet zum Beispiel in unserem Experiment in den Temperaturregelungen der Laserdiode und des Resonators seine Anwendung.

Die Betrachtungen werden ohne Bandbreitenbegrenzung durchgeführt. Durch die zusätzliche differentielle Rückkopplung ändert sich die Stellgröße (3.16) in der um den Fixpunkt linearisierten Form mit den differentiellen Rückkopplungsparametern d_x und d_y zu

$$\delta u = k_x s_x + k_y s_y + d_x s'_x + d_y s'_y. \quad (3.27)$$

Hier werden exemplarisch zwei mögliche Kombinationen von zwei Rückkopplungsgrößen betrachtet, zum einen die proportional-differentielle Rückkopplung der schwächeren Summenintensität S_x ($k_y = d_y = 0$), zum anderen die rein differentielle Rückkopplung beider Summenintensitäten ($k_x = k_y = 0$). In Abb. 3.11 sind die numerisch bestimmten Stabilitätsbereiche für diese Regelschemata für feste Modenkonfigurationen bei unterschiedlichen Pumpraten dargestellt. Die Stabilitätsbereiche in Abb. 3.11 (a) für die gemischt proportional-differentielle Rückkopplung einer Summenintensität sind, als deutliche Verschlechterung gegenüber der rein proportionalen Rückkopplung, endlich ausgedehnt und verschwinden bei hohen Pumpraten völlig. Bei der rein differentiellen Rückkopplung beider Summenintensitäten in Abb. 3.11 (b) sind die Stabilitätsbereiche, wie bei der rein proportionalen Rückkopplung, auch unendlich ausgedehnt, aber nicht verbessert.

Insgesamt läßt sich zu dieser alternativen Signalaufbereitung zur Rückkopplung auf den Laserdiodenstrom sagen, daß die Vorhersagen aus der Theorie keine Verbesserungen, wenn nicht sogar Verschlechterungen gegenüber dem bisher diskutierten Ansatz bieten. Aus experimenteller Sicht ist sogar eine stärkere Verschlechterung zu erwarten, da zum einen, wie schon im bisherigen Fall, die Regelschleife bandbreitenbegrenzt ist. Zum anderen ist ein Differenzierglied elektronisch zwar sehr leicht aufzubauen, es ist

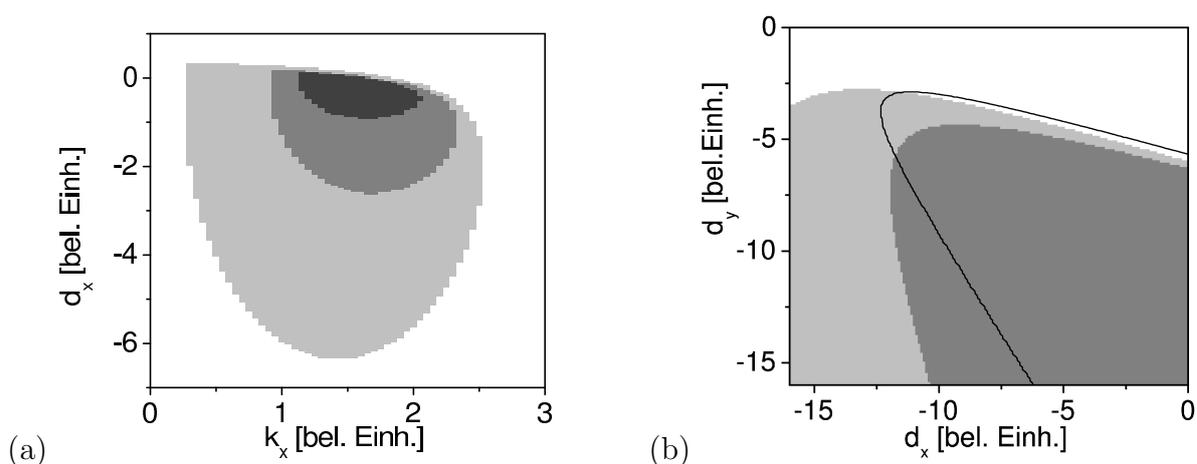


Abbildung 3.11: Numerisch ermittelte Stabilitätsbereiche in der Ebene der Rückkopplungsparameter k_x und d_x in (a) bzw. d_x und d_y in (b) für die Rückkopplung auf den Laserdiodenstrom mit differentiellen Anteilen bei fester Modenkonfiguration [1, 3] für verschiedene Pumpraten (dunklere Flächen entsprechen höheren Pumpraten). (a) Gemischt proportional-differentielle Rückkopplung der schwächeren Summenintensität S_x . (b) Rein differentielle Rückkopplung beider Summenintensitäten.

aber gegenüber dem im Experiment immer vorhandenen Rauschen sehr empfindlich. Daher sind diese Erweiterungen aus experimenteller Sicht nicht attraktiv.

3.5.2 Wandlungseffizienz als Eingriffsparameter

Der zur Frequenzkonversion eingesetzte KTP-Kristall hat nicht nur die günstigen Eigenschaften, daß er nichtlinear auf einfallende Lichtwellen antwortet und durch seine Doppelbrechung phasenanaßbar ist. Eine weitere Eigenschaft ist, daß der KTP-Kristall den elektro-optischen *Kerr*-Effekt zeigt. Dieser Effekt bewirkt, daß Doppelbrechung sich durch ein elektrisches Feld verändern läßt. Das bedeutet konkret, daß in einem KTP-Kristall zwischen zwei Kondensatorplatten die Phasen Anpassung durch die angelegte Spannung verstimmbar ist. Wenn diese angelegte Spannung nun schnell modulierbar ist, kann das im Modell als eine Modulation der Wandlungseffizienz ε angesehen werden. Bei einer Rückkopplung der Stellgröße $u(t)$ ändert sich die Wandlungseffizienz zu

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon + u(t). \quad (3.28)$$

Man kann nun die bei der Rückkopplung auf den Laserdiodenstrom durchgeführten Methoden zur Bestimmung der Stabilität unter der Rückkopplung auch auf diesen Fall anwenden. Auch hier ändert sich die Stabilität der Einzelabweichungen i_i unter der Nebenbedingung $(s_x, s_y, s'_x, s'_y) = 0$ nicht, da weiterhin nur Kombinationen der Summenintensitäten zurückgekoppelt werden. Daher müssen hier nur die Gleichungen für die

Summenabweichungen s_x bzw. s_y betrachtet werden. Die Koeffizienten der Gl. (3.17a) für s_x ändern sich bei dieser Regelung zu

$$\tilde{B}_x = B_x - k_x m \frac{\Delta_x I_x}{\varepsilon}, \quad (3.29a)$$

$$\tilde{C}_x = C_x - k_x m \frac{\eta \gamma \Delta_x I_x}{\varepsilon(1 + \eta \Delta_x)}, \quad (3.29b)$$

$$\tilde{E}_x = E_x - k_y m \frac{\Delta_x I_x}{\varepsilon} \quad (3.29c)$$

und

$$\tilde{F}_x = F_x - k_y m \frac{\eta \gamma \Delta_x I_x}{\varepsilon(1 + \eta \Delta_x)}. \quad (3.29d)$$

Die entsprechenden Parameter von Gl. (3.17b) ergeben sich wieder durch Vertauschen der Indizes x und y , bzw. der Zahlen m und n .

Mit diesen Werten und dem Algorithmus zur Eigenwertbestimmung aus [pre92] bzw. dem *Hurwitz*-Kriterium (3.20) kann nun, analog zur Rückkopplung auf die Pumpleistung γ , die Stabilität des Fixpunktes unter Einfluß der Regelung untersucht werden. In Abb. 3.12 sind die Stabilitätsbereiche unter Variation (a) der Pumprate bei fester Modenkonfiguration [1, 3], (b) der Modenkonfiguration bei fester Pumprate γ dargestellt. Da hier die Stabilitätsbereiche nicht ineinanderliegen, wie bei der Rückkopplung auf die Pumprate, sind die Begrenzungslinien der Stabilitätsbereiche abgebildet. Für diesen Regeleingriff fällt auf, daß, im Gegensatz zur Rückkopplung auf die Pumprate, die schwächere Polarisationsrichtung mit weniger Moden eher negativ zurückgekoppelt werden muß, die stärkere eher positiv. Als Begründung für die mehr im zweiten Quadranten liegenden Stabilitätsbereiche kann als Argument dienen, daß eine Erhöhung der Wandlungseffizienz eine Erhöhung der Verluste für das infrarote Licht, und somit eine Abschwächung, bedeutet. Analog bedeutet eine Verringerung der Wandlungseffizienz eine Verringerung der Verluste.

Um die Auswirkung einer begrenzten Bandbreite der Rückkopplungsschleife bei dieser Rückkopplung abzuschätzen, sind in Abb. 3.13 für eine exemplarische Systemkonfiguration (Modenkonfiguration [1, 3] und Pumprate $\gamma = 2, 0$) die maximalen Real- und Imaginärteile aller Eigenwerte des charakteristischen Polynoms in Abhängigkeit von den Rückkoppelparametern dargestellt. Auch hier kann sich die Frequenz des Systems unter der Regelung stark erhöhen, wodurch die Stabilitätsbereiche durch die begrenzte Bandbreite kleiner werden. Die erhöhten Werte der Imaginärteile liegen aber in etwa parallel zur oberen Kante der Stabilitätsbereiche. Dadurch ist eventuell zu erwarten, daß die Stabilitätsbereiche durch eine Bandbreitenbegrenzung nicht zu endlichen Flächen beschnitten werden und somit die Stabilisierung nicht so stark von der Bandbreite der Rückkopplungsschaltung abhängt und eine Stabilisierung bei höheren Pumpratzen möglich ist.

Hinsichtlich der Bandbreitenbegrenzung der Rückkoppelschleife könnte dieser alternativ Regeleingriff also Verbesserungen gegenüber der proportionalen Rückkopplung auf

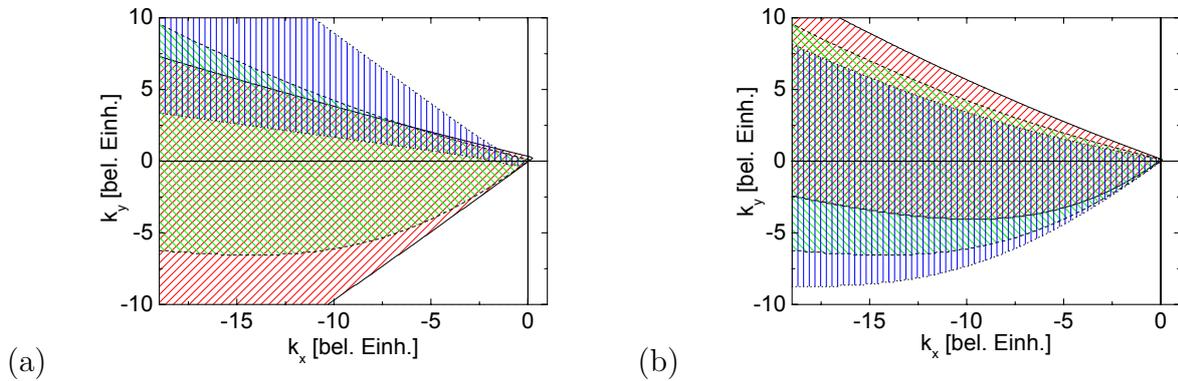


Abbildung 3.12: Numerisch ermittelte Stabilitätsbereiche in der Ebene der Rückkopplungsparameter k_x und k_y für die Rückkopplung auf die Wandlungseffizienz über den elektro-optischen Effekt des optisch nichtlinearen Kristalls. Die Stabilitätsbereiche liegen dabei innerhalb der eingezeichneten Linien. In (a) wurde bei fester Modenkonfiguration $[1,3]$ die Pumprate variiert ($\gamma = 1,4$ (rot schraffiert), $2,0$ (grün schraffiert), $5,0$ (blau schraffiert)). In (b) wurden bei fester Pumprate $\gamma = 2,0$ verschiedene Modenkonfigurationen untersucht ($[1,4]$ (rot schraffiert), $[1,3]$ (grün schraffiert), $[1,2]$ (blau schraffiert)).

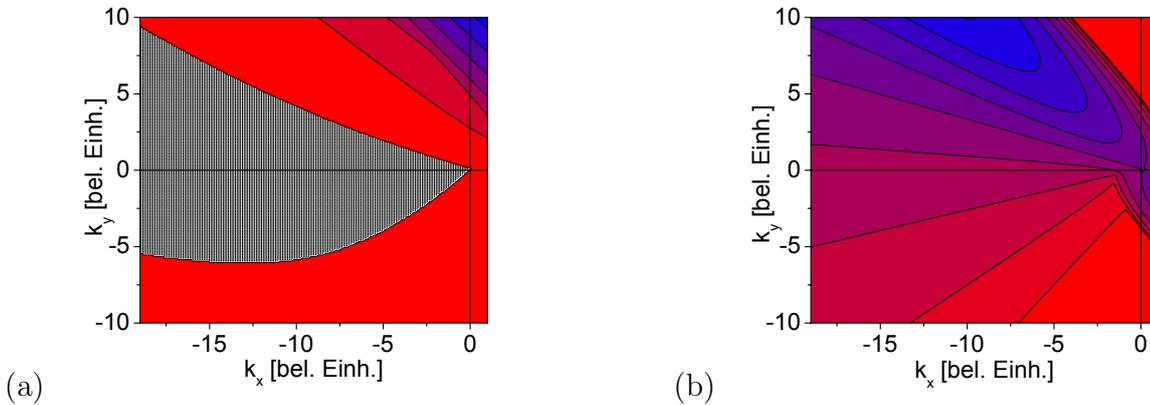


Abbildung 3.13: Maximale Realteile (a) und Imaginärteile (b) aller Eigenwerte von Gl. (3.17) bei Rückkopplung auf die Wandlungseffizienz in Abhängigkeit der Rückkopplungsparameter k_x und k_y bei der Modenkonfiguration $[1,3]$ und Pumprate $\gamma = 2,0$. Der Übergang von Blau nach Rot entspricht einem Übergang von größeren zu kleineren Werten. Die schraffierte Fläche in (a) ist der Stabilitätsbereich mit negativem maximalen Realteil aller Eigenwerte (vgl. Abb. 3.12).

die Pumprate bringen. Aus technischer und experimenteller Sicht stehen dem aber gegenüber, daß zur Modulation der Wandlungseffizienz über den elektro-optischen Effekt des KTP-Kristalls recht hohe Spannungen ($\gtrsim 100$ V) notwendig sind. Diese hohen Spannungen bedeuten gegenüber der Niederspannungselektronik zur Modulation des Laserdiodenstroms einen zusätzlichen technischen Aufwand, zumal sie auch mit den typischen Frequenzen des Systems moduliert werden müssen.

3.6 Erweiterter Regeleingriff auf zwei Systemparameter

Die Stabilität bzw. Instabilität des Fixpunktes liegt gemäß den numerischen Analysen des Ratengleichungsmodells unter der Zwangsbedingung konstanter Summenintensitäten in beiden Polarisationsrichtungen in zwei Größen, den beiden infraroten Summenintensitäten S_x und S_y . In der Nähe des Fixpunktes zeigen diese beiden Größen eine Antiphasendynamik, d.h. eine Abnahme der einen bewirkt eine Zunahme der anderen Größe. Daraus ist schon ersichtlich, daß symmetrische Zustände (im Modell identische Modenanzen, im Experiment identische gemittelte Energie in beiden Polarisationsrichtungen) bei Eingriff auf nur einen Systemparameter nicht stabilisiert werden können, da eine Energiezufuhr auf beide Größen gleich wirkt. Hier wäre es wünschenswert, wenn man die beiden Größen gezielt einzeln beeinflussen könnte. Dies ist aber z.B. nicht der Fall bei einem Eingriff auf die Gesamtpumprate und die Gesamtwandlungseffizienz, da auch hier beide Größen nur gleich beeinflußt werden können. Daher gilt es, ein Paar von Systemparametern zu finden, die jeweils unterschiedlich auf die beiden Polarisationsrichtungen wirken.

Leistungsstarke Festkörperlaser werden häufig mit mehreren Laserdioden gepumpt. Dabei wird das Licht der Laserdioden mit geeigneten Optiken (Strahlteiler oder Lichtleiter) zusammengeführt. Wenn es nun Konfigurationen (z.B. durch unterschiedliche Wellenlängen oder Polarisationsrichtungen) der Laserdioden gibt, in denen sie unterschiedlich auf die Summenintensitäten wirken, hätte man ein solches Paar leicht modulierbarer Systemparameter.

Gross et al. [gro93] haben an Eu:YAG (Europium-dotiertes YAG) polarisationsabhängige fluoreszenzspektroskopische Untersuchungen gemacht. Europium ist ebenso wie Neodym und die häufig für Laser als Dotierung von YAG verwendeten Elemente Neodym (Nd), Erbium (Er) und Ytterbium (Yb) ein Element der seltenen Erden, der Lanthaniden. Es liegt in YAG ebenso als dreifach positiv geladenes Ion wie Neodym vor. In [gro93] wird daher auf die Relevanz der Untersuchungen hinsichtlich der Laseraktivität in YAG-basierten Festkörperlaser hingewiesen. Bei den Untersuchungen wurde ein optisch isotroper (nicht doppelbrechender) Eu:YAG-Kristall mit einem polarisierten Laser angeregt und die Fluoreszenz polarisationsabhängig gemessen. Dabei wurden verschiedene Polarisationskombinationen zwischen einfallendem und emittiertem Licht und verschiedene Ausrichtungen dieser Kombinationen zu den kristallographischen Achsen variiert. Im Ergebnis zeigt Eu:YAG bei den Messungen unterschiedliche Fluoreszenzspektren in Abhängigkeit von der Polarisationsrichtung von Anregungsquelle und Analysator. Die Polarisation der Anregungsquelle, die höhere Anregungszustände, als die

Fluoreszenzübergänge, anregt, wird auf die Polarisation des abgestrahlten Fluoreszenzlichts übertragen. Dabei werden also polarisationsabhängig unterschiedliche Klassen von Atomen im Medium angesprochen.

3.6.1 Vorexperimente

Der Effekt der polarisationsabhängigen Anregung von Atomen in einem kristallinen Medium kann evtl. auf den Nd:YAG-Laser übertragen werden. Das könnte bedeuten, daß die Polarisation des einfallenden Pumplichts einen Einfluß auf die sich im Resonator ausbildenden Polarisationseigenzustände hat. Da die verwendete Laserdiode polarisiertes Licht ausstrahlt und die verwendete Einkoppeloptik, im Gegensatz zur Fasereinkoppeloptik in [sch00, sch01], die Polarisation erhält, läßt sich der Einfluß leicht ermitteln. Zur experimentellen Verifikation muß nur die Polarisationsrichtung des Pumplichts variiert werden. Da die Laserdiode fest montiert und justiert ist, geschieht dies mit einer polarisationsdrehenden Optik, einem $\lambda/2$ -Verzögerungsplättchen. Bei einem solchen Verzögerungsplättchen eilt das in der einen optischen Hauptachse des Plättchens polarisierte Licht dem in der orthogonalen Richtung polarisierten um $\lambda/2$, also 180° , voraus. Das führt dazu, daß einfallendes linear polarisiertes Licht, dessen Polarisationsrichtung in einem Winkel θ zu einer der Hauptachsen des Plättchens liegt, das Plättchen um 2θ in der Polarisationsrichtung gedreht verläßt. So läßt sich leicht mit einem drehbar gelagerten $\lambda/2$ -Plättchen im Pumpstrahlengang die Polarisationsrichtung des Pumplichts drehen. Der mit diesem Licht gepumpte Laser wird dann hinsichtlich der Polarisationseigenrichtungen und der mittleren Energie in diesen untersucht.

Zunächst wurden diese Untersuchungen am Nd:YAG-Laser ohne Verdopplerkristall durchgeführt. Dabei änderten sich die Polarisationseigenrichtungen, die durch die schwache Doppelbrechung des Nd:YAG-Kristalls hervorgerufen werden, durch die Drehung der Polarisation des Pumplichts nicht, was mit dem polarisierenden Strahlteilerwürfel und dem FPSI nachweisbar ist. Das weist darauf hin, daß die Doppelbrechung nicht durch die Polarisation des Pumplichts hervorgerufen wird. Als Quellen dafür bleiben noch das elliptische Strahlprofil des Pumplichts und Spannungen im Kristall aufgrund der Fassung und aufgrund der gegenüber den Yttrium-Ionen größeren Neodym-Ionen. In Abb. 3.14 ist farbig kodiert der relative Anteil der mittleren in, y -Richtung polarisierten Strahlung an der Gesamtstrahlung für verschiedene Pumpraten und Winkel der Polarisation des Pumplichts zur x -Achse dargestellt. Man erkennt sehr deutlich die systematische Abhängigkeit dieser Größe vom Winkel der Pump polarisation. Bei in x -Richtung polarisiertem Pumplicht werden hauptsächlich die in x -Richtung polarisierten Resonatormoden angeregt, für die y -Richtung gilt analoges. Dieses Verhalten ist annähernd unabhängig von der Pumprate im untersuchten Bereich.

In Abb. 3.15 sind die gleichen Messungen am verdoppelten Laser dargestellt. Auch hier ist die systematische Abhängigkeit der mittleren Intensitäten in den beiden Polarisationseigenrichtungen von der Polarisation des Pumplichts vorhanden.

Ein weiterer wichtiger Punkt bei dieser Variation betrifft die Menge des frequenzgewandelten Lichts. Der Laser ist aus Effizienzgründen auf reine Summenfrequenzbildung zwischen den orthogonal polarisierten Anteilen entlang der beiden optischen Hauptach-

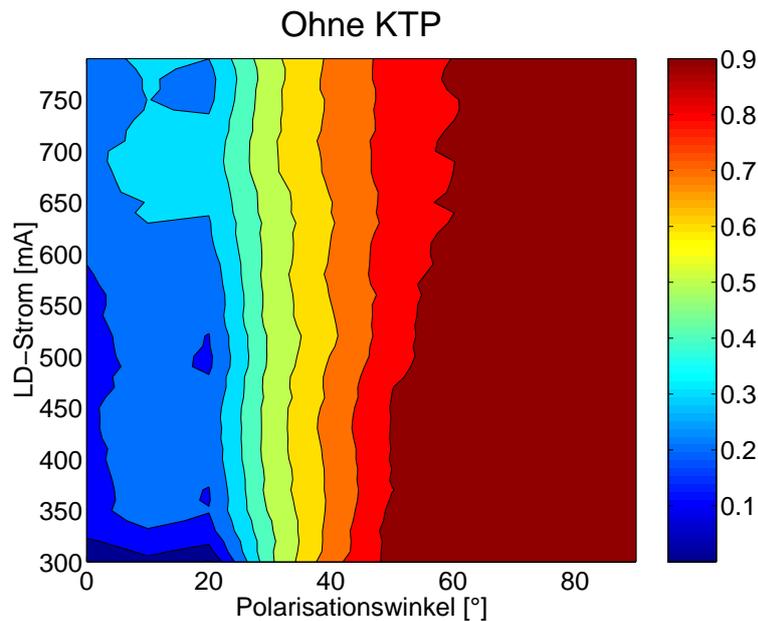


Abbildung 3.14: Abhängigkeit der Polarisationsrichtungen im Infraroten (1064 nm) von der Polarisationsrichtung der Pumplaserdiode im unverdoppelten Laser. Dargestellt ist der relative Anteil der y -Polarisation am gesamten IR-Laserlicht ($\langle I_y \rangle / (\langle I_x \rangle + \langle I_y \rangle)$) bei verschiedenen Pumpleistungen und Polarisationsrichtungen der Pumplaserdiode.

sen des KTP eingestellt. Es ist recht einfach ersichtlich, daß man am meisten grünes Licht erhält, wenn in beiden Polarisationsrichtungen die Intensitäten gleich sind, da das grüne Licht aus den Produkten der jeweils orthogonal polarisierten Moden entsteht. Daher ist es möglich, durch entsprechende Drehung der Polarisation des Pumplichts diese Konfiguration anzufahren. In Abb. 3.16 ist sozusagen ein Schnitt durch Abb. 3.15 entlang einer Linie mit gleichem Pumpstrom dargestellt. Zusätzlich ist noch die mittlere Intensität des frequenzgewandelten Lichts dargestellt. Im Bereich mit gleichen Intensitäten in den beiden infraroten Polarisationsrichtungen erhält man am meisten grünes Licht.

Der Einsatz von zwei gekreuzt polarisierten Pumplaserdioden läßt auf ein Paar unabhängiger Systemparameter zur Regelung mit einfacher Niederspannungselektronik hoffen. Bei den experimentellen Voruntersuchungen konnte aber bisher nicht abschließend geklärt werden, ob es sich eher um einen statischen oder einen dynamischen Effekt handelt. Statisch soll hier im Gegensatz zu dynamisch bedeuten, daß durch das polarisierte eingestrahlte Licht eine Ausrichtung von Dipolen im Kristall bewirkt wird, die nicht auf schnelle Änderungen der Intensität des eingestrahlten Lichts polarisationsabhängig antwortet.

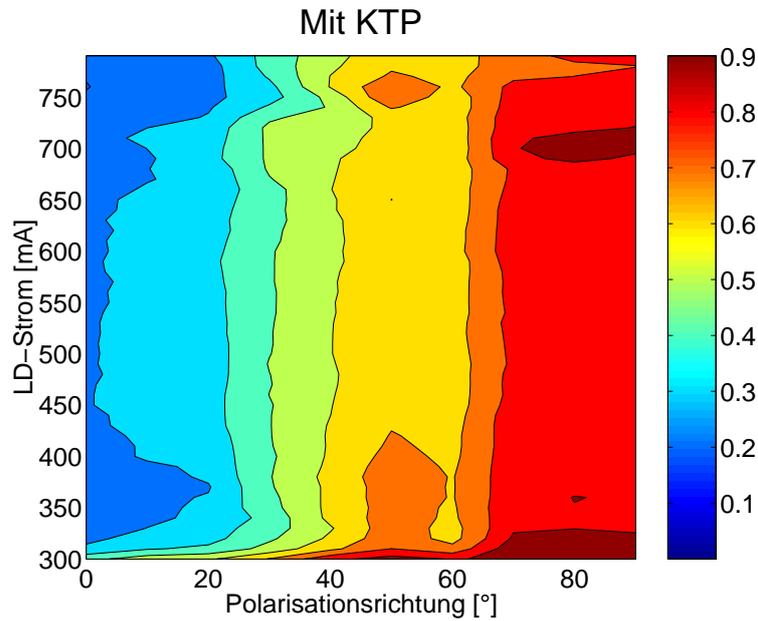


Abbildung 3.15: Abhängigkeit der Polarisationsrichtungen im Infraroten (1064 nm) von der Polarisationsrichtung der Pumplaserdiode im verdoppelten Laser. Dargestellt ist der relative Anteil der y -Polarisation am gesamten IR-Laserlicht ($\langle I_y \rangle / (\langle I_x \rangle + \langle I_y \rangle)$) bei verschiedenen Pumpleistungen und Polarisationsrichtungen der Pumplaserdiode.

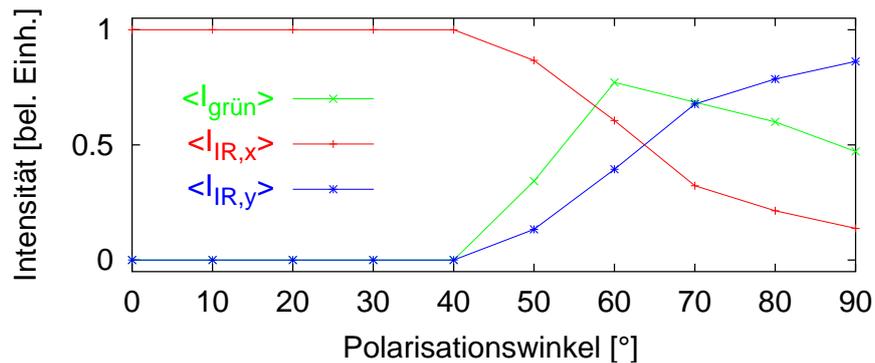


Abbildung 3.16: Abhängigkeit der Polarisationsrichtungen im Infraroten (1064 nm) und der Generation von grünem Licht (532 nm) von der Polarisationsrichtung der Pumplaserdiode im verdoppelten Laser. Dabei ist die mittlere grüne Intensität in grün, die mittlere infrarote in x -Richtung polarisiert in rot und die in y -Richtung in blau dargestellt.

3.6.2 Theoretische Vorhersagen

Modellerweiterung

Im Ratengleichungsmodell des Lasers nach Gln. (2.17) ist der Einfluß der Polarisati-
on des Pumplichts nicht vorgesehen. Daher wird hier ein empirischer Ansatz für dieses
Phänomen gemacht. Einer in x -Richtung polarisierten Pumpquelle wird eine Pumpra-
te γ_x zugewiesen, einer in y -Richtung polarisierten γ_y . Weiterhin muß berücksichtigt
werden, daß γ_x auch auf die in y -Richtung polarisierten Moden im Resonator wirkt,
und umgekehrt. Dies wird durch einen empirisch zu ermittelnden, für beide Polarisati-
onsrichtungen gleichen Faktor w berücksichtigt. Gleichung (2.17b) ändert sich dann zu

$$\Delta'_i = \gamma_x + w\gamma_y - [1 + (1 - \beta)I_i + \beta(S_x + S_y)](1 + \eta\Delta_i) \quad (3.30)$$

für die normierte Verstärkung der i ten in x -Richtung polarisierten Mode. Die Gleichung
für eine in y -Richtung polarisierte Mode ergibt sich wieder durch Vertauschen der Indizes
 x und y .

Für diese Gleichungen lassen sich dann, analog zu den Abschnitten 3.2.1 und 3.2.2,
die Fixpunkte und die Stabilität derselben bestimmen. In Abb. 3.17 wurde für eine
symmetrische Modenkonfiguration $[1, 1]$ das Drehen der Polarisationsrichtung des Pum-
plichts um 90° von x - in y -Richtung simuliert. Für den Übersprechfaktor w wurde ein
Wert von 0,9 angesetzt. Zu kleinen bzw. großen Winkeln wurde der Fixpunktwert der
schwächeren Polarisationsrichtung negativ, in der Abbildung wurde daher eine Fix-
punktintensität von Null eingezeichnet. Korrekterweise hätte in diesen Bereichen der
Fixpunktwert von einem Gleichungssystem mit geänderter Modenkonfiguration ($[0, 1]$
bzw. $[1, 0]$) gerechnet werden müssen. Zusätzlich ist das Produkt der beiden Fixpunk-
tintensitäten als Maß des generierten grünen Lichts bei reiner Summenfrequenzbildung
eingezeichnet. Qualitativ gibt die Abbildung das experimentell gemessene Verhalten in
Abb. 3.16 wieder. Der Schnittpunkt zwischen den beiden Summenintensitäten läßt sich
durch eine Aufhebung der Symmetrie hinsichtlich der Modenkonfiguration auf der Win-
kelachse verschieben.

Erweiterte, zweidimensionale Rückkopplung

Da die beiden Polarisationsrichtungen getrennt ansteuerbar sind, müssen in den Glei-
chungen zwei Stellgrößen u_x und u_y verwendet werden. Dabei wirkt aber jede der Stell-
größen auch mit dem Faktor w in der orthogonalen Polarisationsrichtung. In jede dieser
Stellgrößen gehen wieder die beiden gewichteten Abweichungen der infraroten Summen-
intensitäten von ihren Fixpunktwerten ein:

$$u_x = k_{xx}(S_x - S_x^0) + k_{xy}(S_y - S_y^0) \quad (3.31a)$$

und

$$u_y = k_{yy}(S_y - S_y^0) + k_{yx}(S_x - S_x^0). \quad (3.31b)$$

Dabei muß berücksichtigt werden, daß u_x mit dem Faktor w auf die y -polarisierten
Intensitäten wirkt, und andersherum.

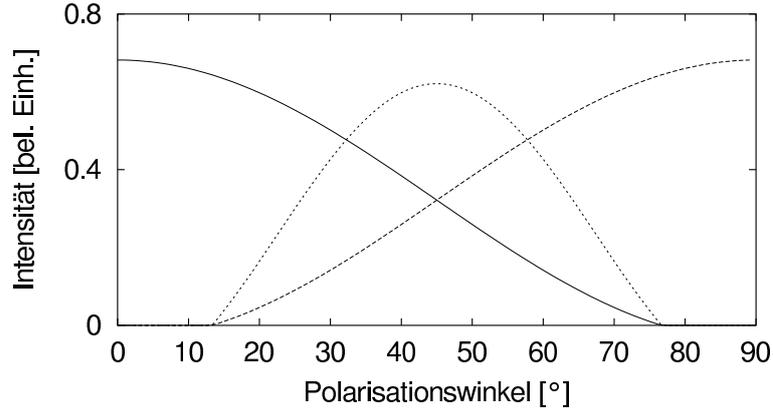


Abbildung 3.17: Numerisch bestimmte Fixpunktintensitäten der beiden infraroten Polarisationsrichtungen (x —, y - -) und das Produkt der beiden als Maß für das generierte grüne Licht (\cdots).

Auch hier wird durch die Rückkopplungsfunktion die Stabilität der Einzelabweichungen i_i unter der Nebenbedingung $(s_x, s_y, s'_x, s'_y) = 0$ nicht beeinflusst. Daher muß wieder nur die Änderung der Parameter der gekoppelten Oszillatorgleichungen der Summenintensitäten betrachtet werden:

$$\tilde{B}_x = B_x, \quad (3.32a)$$

$$\tilde{C}_x = C_x - (k_{xx} + wk_{yx})mI_x, \quad (3.32b)$$

$$\tilde{E}_x = E_x, \quad (3.32c)$$

$$\tilde{F}_x = F_x - (wk_{yy} + k_{xy})mI_x, \quad (3.32d)$$

für die Parameter der Gleichung für die y -polarisierten Summenabweichungen gilt wieder die Vertauschung der Indizes x und y .

In einem vierdimensionalen Parameterraum ist die Visualisierung der Stabilitätsbereiche nur schwer anschaulich möglich. Daher wird hier nur ein zweidimensionaler Schnitt durch den Parameterraum angesprochen. In Abb. 3.18 werden in einem symmetrischen Systemzustand (gleiche Modenanzahl in beiden Polarisationsrichtungen $[1, 1]$ und gleiche Pumpraten $\gamma_x = \gamma_y = 2.0$) die beiden Differenzen der infraroten Summenintensitäten S_x und S_y zu ihren Fixpunktwerten S_x^0 und S_y^0 auf die jeweils gleich polarisierte Laserdiode zurückgekoppelt. Dieses entspricht einem Schnitt durch den Parameterraum $(k_{xx}, k_{xy}, k_{yy}, k_{yx})$ bei $(k_{xy}, k_{yx}) = 0$. In diesem Schnitt sind die Stabilitätsbereiche endlich ausgedehnt und recht klein. Damit sind sie sicherlich sehr anfällig gegen die begrenzte Bandbreite der Rückkoppelschaltung. Daher ist es sinnvoll, die beiden weiteren Parameter zu verwenden. Hier ist unter Berücksichtigung des

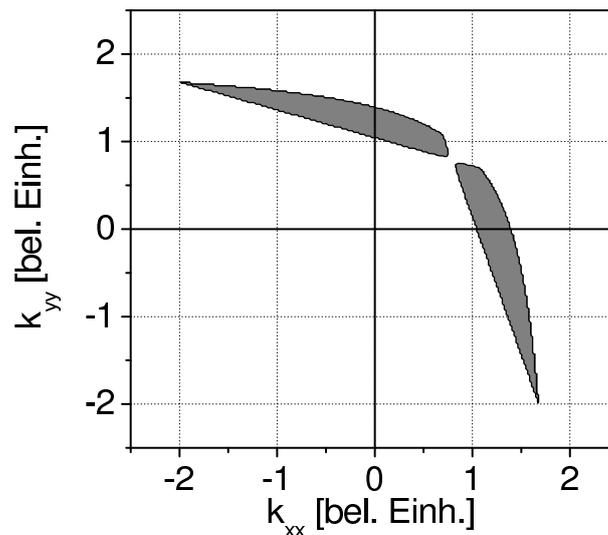


Abbildung 3.18: Numerisch ermittelte Stabilitätsbereiche für die Rückkopplung auf zwei gekreuzt polarisierte Pumplaserdioden. Dabei wurde durch den vierdimensionalen Parameterraum $(k_{xx}, k_{xy}, k_{yy}, k_{yx})$ ein Schnitt bei $(k_{xy}, k_{yx}) = 0$ gelegt.

bisher gewonnenen Verständnisses der Antiphasendynamik der beiden Summenintensitäten in der Nähe des Fixpunktes zu erwarten, daß die Gewichtungparameter k_{xx} und k_{yy} negativ und k_{xy} und k_{yx} positiv gewählt werden müssen. Eine anwachsende Intensität in einer Polarisationsrichtung würde dadurch über die negative Rückkopplung von sich selbst und die positive Rückkopplung aufgrund der Antiphasendynamik sich abschwächenden anderen Polarisationsrichtung in ihrem Anwachsen gedämpft.

3.7 Zusammenfassung zur Regelung der Laserdynamik

In diesem Kapitel wurde die Stabilisierung der Ausgangsleistung eines frequenzverdoppelten Nd:YAG-Lasers behandelt. Um dieses Problem systematisch anzugehen, wurden die im Kapitel 2 eingeführten Ratengleichungen von Pyragas et al. [pyr00] hinsichtlich der Stabilität von Fixpunkten analysiert. Diese Fixpunkte der Systemvariablen der Ratengleichungen, die Intensitäten und Verstärkungen der einzelnen infraroten Lasermoden, entsprechen einer konstanten Ausgangsleistung des Lasers. Unter Berücksichtigung der im Experiment zugänglichen Meß- und Regelgrößen wurde ein Regelkonzept abgeleitet, bei dem die beiden orthogonal polarisierten infraroten Summenintensitäten auf die Pumprate über den Strom der Pumplaserdiode zurückgekoppelt werden. Hier sagt die Modellierung der Regelung voraus, daß sich die Ausgangsleistung des Lasers stabilisieren läßt, wenn sich das System in einem asymmetrischen Zustand befindet. Die Asymmetrie ist im Modell durch die unterschiedliche Anzahl von Moden in den beiden Polarisationsrichtungen gekennzeichnet. Auf das Experiment bezogen kann eine ungleiche Energieverteilung in den beiden Polarisationsrichtungen angenommen werden. Die

Stabilität wurde in Karten in Abhängigkeit von den beiden Gewichtungsparemtern k_x und k_y der beiden Summenintensitäten dargestellt. Dabei ergaben sich in der Ebene dieser beiden Gewichtungsparemter (bei Asymmetrie des Systems) unendlich ausgedehnte Stabilitätsbereiche. Dieses gilt auch bei beliebig hohen Pumpraten.

Auch in der experimentellen Umsetzung des Regelkonzepts war es zumindest bei niedrigen Pumpraten möglich, die Ausgangsleistung des Lasers auf einen konstanten Wert zu stabilisieren. Mit Hilfe von computergesteuerten Potentiometern konnten auch im Experiment, analog zur Theorie, Stabilitätskarten in Abhängigkeit von den Rückkopplungsparametern aufgenommen werden. Die Ergebnisse der experimentellen Umsetzung weichen insofern von den theoretischen Vorhersagen ab, als daß sich zum einen der Laser nur bei niedrigen Pumpraten stabilisieren läßt und daß zum anderen die aufgenommenen Stabilitätsbereiche nur endlich ausgedehnt sind.

Auf der Suche nach einer Begründung für diese Abweichungen wurde nach Gemeinsamkeiten in beiden Situationen gesucht. Dabei fiel schnell der Blick auf die typischen Systemfrequenzen. Diese Frequenzen steigen in Abhängigkeit von der Pumprate mit einem Wurzelgesetz an. Auch die Regelung erhöht die typischen Systemfrequenzen, was durch die Betrachtung der Imaginärteile der Eigenwerte der Stabilitätsmatrix in Abhängigkeit von den Gewichtungsparemtern k_x und k_y belegt wurde. Die Regelung im Modell geht von einer unendlichen Bandbreite der Rückkopplung aus. Im Experiment ist eine solche Bandbreite aber niemals zu realisieren. Daher wurde die endliche Bandbreite der Rückkopplungsschleife im Modell durch einen Tiefpaßfilter berücksichtigt. So konnten im Modell die im Experiment beobachteten begrenzten Stabilitätsbereiche reproduziert werden. Auch das Versagen der Stabilisierung bei höheren Pumpraten wird hier wiedergegeben. Diese Untersuchungen legen nahe, daß die Bandbreite der im Experiment verwendeten Rückkopplungsschleife eine kritische Rolle für die Stabilisierung spielt.

Weiterhin wurden in diesem Kapitel weitere Regelkonzepte, bei denen auf nur einen Systemparameter zurückgekoppelt wird, modelliert. Diese Konzepte würden im Experiment aus verschiedenen Gründen kaum eine Verbesserung gegenüber dem vorher beschriebenen Konzept bieten: die Rückkopplung von Ableitungen der Signale ist zwar einfach zu realisieren, durch das im Experiment immer vorhandene Rauschen würden diese Ableitungen jedoch sehr stark verunreinigt. Die Rückkopplung auf die Wandlungseffizienz über den elektrooptischen Effekt des Verdopplerkristalls hätte zwar evtl. Vorteile hinsichtlich des Frequenzverhaltens, auf der anderen Seite müssen für diesen Effekt hohe Spannungen schnell moduliert werden, was in der experimentellen Umsetzung große Schwierigkeiten bereitet.

Zum Schluß dieses Kapitels wurde noch eine Regelkonzept angedeutet, bei dem auf zwei Systemparameter, die unterschiedlich auf die meßbaren Systemparameter wirken, zurückgekoppelt wird. Dabei wurde zunächst die Abhängigkeit der Energieverteilung in den beiden Polarisationsrichtungen des Laserresonators von der Polarisation des Pumplichts experimentell untersucht. Die Untersuchungen haben gezeigt, daß die Energieverteilung im Resonator tatsächlich von der Polarisation des Pumplichts abhängt: ein in x -Richtung polarisierter Pumpstrahl regt hauptsächlich die in x -Richtung polarisierten Lasermoden an (für die y -Richtung gilt das gleiche). Daher sollte es möglich sein, mit zwei orthogonal polarisierten Pump-laserdioden die beiden orthogonal polarisierten

infraroten Summenintensitäten einzeln zu beeinflussen. Die Abhängigkeit von der Polarisation der Pumplaserdiode wurde mit einem empirischen Ansatz in ein erweitertes Regelkonzept integriert. Mit diesem Regelkonzept ist es aus theoretischer Sicht möglich, auch symmetrische Systemzustände zu stabilisieren. Da in diesen Zuständen aber bei Einstellung der Kristalle auf überwiegende Summenfrequenzbildung am meisten grünes Licht erzeugt wird, ist dieses Konzept auch aus technischer Sicht interessant.

4 Reduktion von dynamischem Rauschen

4.1 Problemstellung

Dieses Kapitel widmet sich einem für Experimentatoren allgegenwärtigen Problem — dem Rauschen. Das erscheint auf den ersten Blick als ein starker Bruch in dieser Arbeit. Im Kapitel 3 wurde auf der Basis eines deterministischen Modells ein Regelkonzept für den Laser abgeleitet. Als Parameter in diesem Modell wurden immer Werte aus der Literatur verwendet. Aus den Übereinstimmungen von den theoretischen Vorhersagen und den experimentellen Ergebnissen kann auf eine gute Beschreibung des Lasers durch das verwendete Modell geschlossen werden. Dennoch erscheint es sinnvoll, für das verwendete experimentelle System die richtigen Parameter im Modell zu bestimmen. In diesem Kapitel werden Hinweise auf stochastische Anteile in der Dynamik gezeigt. Um nun über die gemessenen Daten einen Zugang zu den Systemparametern für die Beschreibung zu erhalten, ist es aber notwendig, diesen stochastischen Anteil zu entfernen, da das zugrundeliegende Modell rein deterministisch ist. Daher erscheint es auch mit Hinblick auf die Kontrolle der Laserdynamik sinnvoll, sich mit der Rauschreduktion zu beschäftigen.

In zeitlich stationären Systemen spielt Rauschen eine eher untergeordnete Rolle, da, nach entsprechender Optimierung des Meßaufbaus, das verbliebene Restrauschen durch zeitliche Mittelung (z.B. Lock-In-Technik o.ä.) reduziert werden kann.

Wenn jedoch der zeitliche Verlauf, also die Dynamik, einer Meßgröße aufgenommen werden soll, sind Mittelungsverfahren nur begrenzt einsetzbar. Hier sind zeitliche Mittelungen nur in periodischen Zuständen möglich, indem über mehrere Perioden immer am gleichen Punkt der Umläufe (Triggerung) gemessen wird (wobei auch schon hier Schwierigkeiten auftreten, da auch der Triggerpunkt verrauscht ist). Werden jedoch aperiodische (z.B. chaotische) Zustände gemessen, helfen die bekannten Methoden nicht mehr weiter.

Spätestens an dieser Stelle ist nun eine Begriffserklärung notwendig. Die Rauschleistung von Lasern beeinflusst die Anwendbarkeit derselben in verschiedenen Gebieten, wie z.B. in der Laser-Display-Technologie, beim Belichtungsprozeß im Druckgewerbe und im Präzisionsmessungsbereich. In dieser Rauschleistung eingeschlossen sind aber aus der Sicht der Lasertechniker auch die Fluktuationen von resonatorintern frequenzverdoppelten Festkörperlasern, wie dem betrachteten Nd:YAG-Laser mit KTP-Verdopplerkristall. Diese Fluktuationen sind jedoch teilweise deterministischer Natur und werden in der Begrifflichkeit der nichtlinearen Dynamik als niedrigdimensionales Chaos bezeichnet. Rauschen hingegen ist rein stochastischer Natur und kann allenfalls als hochdimensionales Chaos aufgefaßt werden. Die Gemeinsamkeiten von chaotischen und stochastischen Signalen liegen unter anderem in ihren breiten, nicht auf einzelne Frequenzen scharf

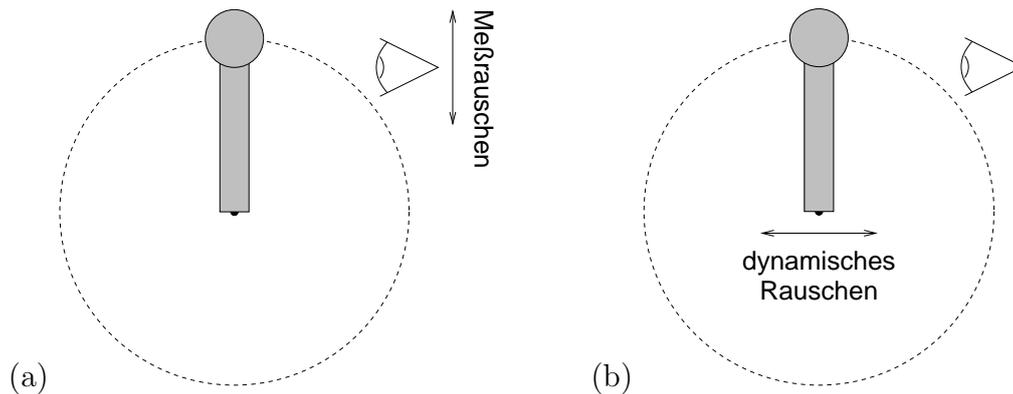


Abbildung 4.1: Illustration zur unterschiedlichen Wirkung von Meß- und dynamischem Rauschen auf ein einfaches dynamisches System — ein Pendel.

begrenzten Frequenzspektren. Daraus ist schon ersichtlich, daß es für Daten von chaotischen Systemen eigener Analyseinstrumente bedarf, die im Rahmen der nichtlinearen Zeitreihenanalyse bereitgestellt werden. Ein Überblick über die Algorithmen der nichtlinearen Zeitreihenanalyse wird in den Lehrbüchern von Abarbanel [aba96b] und Kantz et al. [kan97] gegeben. Einfache, periodische Zeitsignale können, wie schon oben erwähnt, mit entsprechenden Mittelungen behandelt werden. Um Rauschen aus solchen periodischen Signalen zu entfernen, stehen lineare Filter im Frequenzraum zur Verfügung. Diese entfernen ganze Frequenzbereiche aus dem Signal und lassen nur die dominierenden Frequenzen übrig. Dies ist jedoch für chaotische Signale wegen der Breite der Frequenzspektren nicht zulässig, wichtige Informationen würden so herausgefiltert. Rein stochastische Signale hingegen werden mit ebenso linearen, statistischen Methoden wie Mittelwerten, Standardabweichungen und Korrelationen charakterisiert.

Hier sollen zwei Arten von Rauschen unterschieden werden: ein erst im Meßprozeß zum Signal hinzugefügtes Rauschen wird als additives Meßrauschen bezeichnet. Diese Art von Rauschen ist für die Analysen der Dynamik nur insofern kritisch, als daß diese Methoden der nichtlinearen Zeitreihenanalyse häufig von Grenzwertbildungen hin zu kleinen Umgebungen im Phasenraum Gebrauch machen. Die Eigenschaften der kleinen Umgebungen werden natürlich durch das Meßrauschen zerstört. Aus der nichtlinearen Zeitreihenanalyse sind jedoch Methoden zur Entfernung des Meßrauschens aus den Daten bekannt. Ein anderes Bild ergibt sich jedoch, wenn das Rauschen mit der (chaotischen) Dynamik wechselwirkt und diese beeinflusst. Dieses Art von Rauschen wird als dynamisches Rauschen bezeichnet. Dynamisches Rauschen wiederum kann in zwei Arten unterteilt werden: additives dynamisches Rauschen wirkt überall im Phasenraum gleich stark, während multiplikatives orts- und evtl. auch zeitabhängig ist.

In Abb. 4.1 ist die unterschiedliche Wirkung von Meß- und dynamischem Rauschen illustriert. Während das Meßrauschen (Rütteln am Beobachter) keinen Einfluß auf die instabile Ruhelage des Pendels hat, wird dynamisches Rauschen (Rütteln am Aufhängepunkt) den Zustand sicher ändern.

4.1.1 Chaos und Rauschen

Chaotische Systeme zeichnen sich, wie schon erwähnt, durch ihre Sensitivität gegenüber den Anfangsbedingungen aus, d.h. sie expandieren auf kleinen Längenskalen. Andererseits sind die meisten chaotischen Systeme dissipativ, sie wirken global im Phasenraum kontrahierend. Lokal im Phasenraum äußert sich das in stabilen und instabilen Richtungen, wobei Störungen, die in diesen Richtungen liegen, eher angezogen bzw. abgestoßen werden. In gutartigen, so genannten hyperbolischen Systemen schließen diese Richtungen immer einen endlichen Winkel ein, so daß Störungen immer mit endlichen Raten entweder abgestoßen oder angezogen werden. Die meisten realen Systeme sind jedoch nicht hyperbolisch. Bei ihnen gibt es Punkte im Phasenraum, in denen die stabile und die instabile Richtung parallel verlaufen. Diese Punkte werden als homokline Tangenten bezeichnet. Störungen an solchen homoklinen Tangenten werden mit erheblich höheren Raten, als der lokalen Expansion aufgrund der Lyapunovexponenten, vergrößert und in Bereiche des Phasenraumes transportiert, die normalerweise ohne Störung nicht vom System erreicht werden. Das führt zu einem von einem ungestörten System stark abweichenden Attraktor im Phasenraum. Daher spricht man hier von rauschinduzierter Attraktordeformation. Numerisch wurde dies an einer zweidimensionalen, chaotischen Abbildung, dem Hénon-Attraktor, von Jaeger et al. [jae96, jae97a, jae97b] gezeigt. Auch experimentell wurde dieser Effekt von Diestelhorst et al. [die99] in einem elektronischen Schwingkreis mit nichtlinearer Kapazität nachgewiesen.

4.1.2 Bekannte Rauschunterdrückungsverfahren für Zeitreihen von chaotischen Systemen

Einbettung

Für die meisten Algorithmen der nichtlinearen Zeitreihenanalyse ist es zunächst einmal notwendig, sich aus der skalaren Zeitreihe ein dem Attraktor im Phasenraumes äquivalentes Gebilde zu beschaffen. Dies geschieht meistens über die so genannte Zeitverzögerungseinbettung. Dabei wird aus den skalaren Messungen $x(t)$ aus zeitlich äquidistanten Punkten der Zeitreihe ein m_E -dimensionaler Vektor $\mathbf{x}(t)$ rekonstruiert:

$$\mathbf{x}(t) = (x(t), x(t - \Delta t), x(t - 2\Delta t), \dots, x(t - (m_E - 1)\Delta t)). \quad (4.1)$$

Als Bedingung für die Wahl der Einbettungsdimension m_E gilt dabei nach Sauer et al. [sau91] $m_E > 2D_0$. D_0 ist die nicht notwendigerweise ganzzahlige Kapazitätsdimension, die in Abschnitt 4.2.1 detaillierter beschrieben wird. Mit der Wahl der Einbettungsdimension nach Sauer et al. [sau91] befindet man sich immer auf der sicheren Seite. Häufig reicht jedoch schon eine niedrigere Einbettungsdimension aus. Da man häufig die Kapazitätsdimension nicht kennt, müssen die Algorithmen bei sukzessiver Erhöhung der Einbettungsdimension angewendet werden, so daß unter dieser Erhöhung sich die zu ermittelnden Werte nicht mehr ändern. Für den Wert der Zeitverzögerung Δt gibt es eine Reihe unterschiedlicher Auswahlkriterien, auf die ich hier nicht näher eingehe (siehe dazu Abarbanel [aba96b] und Kantz et al. [kan97]).

Nichtlineare Rauschunterdrückung

Die einfachste, in [kan97] vorgeschlagene Methode zur Unterdrückung von Rauschen in chaotischen Zeitreihen beruht ebenso, wie die später dargestellte für dynamisches Rauschen, auf Vorhersagen. Am allereinfachsten wäre es, alle Nachbarn eines Punktes \mathbf{x}_i in einer entsprechenden ε -Umgebung im Phasen- oder Einbettungsraum zu suchen und den zeitlichen Nachfolger \mathbf{x}_{i+1} durch den Mittelwert der zeitlichen Nachfolger aller Punkte dieser Umgebung zu verwenden. Das ist mathematisch gesehen die lokale Anpassung einer Gleichung nullter Ordnung. Alternativ lassen sich hier auch Gleichungen erster Ordnung anpassen. Dabei wird die lokale Steigung aus der Umgebung gemittelt. Ein limitierender Faktor dieser Methode ist jedoch die Expansion der Trajektorien aufgrund der Lyapunovexponenten. Der Zeitschritt zwischen zwei Punkten muß also klein gegenüber dieser Expansion sein, damit es eine Chance gibt, daß der Gewinn durch diese Rauschunterdrückung größer ist als der mögliche Schaden. Aus der Art der lokal-linearen Anpassung ist ersichtlich, daß diese Bedingung gleichbedeutend mit der Gültigkeit der Linearisierung ist, also Krümmungen und weitere Ableitungen noch keine Rolle spielen. Da eine Vorhersage in Richtung der positiven Zeitachse durch die Expansion aufgrund der positiven Lyapunovexponenten kritisch ist, könnte man naiv versuchen, eine Vorhersage rückwärts in der Zeit zu machen. Dann tauschen aber die stabilen und instabilen Richtungen ihre Rollen. Da die Anziehung in dissipativen Systemen immer betragsmäßig größer als die Expansion aufgrund der Lyapunovexponenten ist, sieht die Situation aber in dieser Richtung noch schlimmer aus. Daher wird von Kantz et al. [kan97] ein Mittelweg vorgeschlagen: die Expansionen vorwärts und rückwärts in der Zeit werden in der Zeitverzögerungseinbettung ausbalanciert, indem der Wert für einen in der Mitte des Zeitverzögerungsvektors liegenden Eintrag vorhergesagt wird.

Ein ausgeklügelterer Algorithmus ist die Rauschunterdrückung mittels lokaler Projektionen von Grassberger et al. [gra93]. Dieser Algorithmus beruht nicht auf einer Vorhersage und umgeht damit die durch die Expansion von chaotischen Systemen eingebrachten Fehler. Es wird vielmehr von einer lokal stetigen Struktur des ungestörten Attraktors im Phasen- und auch im Einbettungsraum ausgegangen. Das bedeutet, daß man überall auf dem Attraktor in linearer Näherung eine Hyperfläche als Tangente an ihn legen kann. Dazu müssen natürlich Annahmen über die lokale Dimensionalität gemacht werden. Zur Korrektur eines Meßpunktes werden zunächst wieder Punkte in der Nachbarschaft, deren Abstand größer als das Rauschniveau sein sollte, im Phasen- oder Einbettungsraum gesucht. Durch die lokalen Strukturen des Attraktors wird diese Nachbarschaft aber nicht in alle Richtungen gleich ausgedehnt sein. Es wird sich vielmehr eine Hyperellipse ergeben, deren größte Hauptachsen in der tangentialen Hyperebene liegen. Diese Achsen müssen identifiziert werden und die Punkte, die in den anderen Richtungen liegen, werden auf die von diesen Achsen aufgespannte Fläche projiziert. Die empfindlichen Parameter bei Anwendung der lokal projektiven Rauschunterdrückung sind die Einbettungsdimension m_E und die lokale Dimension d_l der zugrundeliegenden Dynamik. Für die Einbettungsdimension gilt, daß das Objekt übereingebettet wird, da in der Rekonstruktion auch die Richtungen mit dem zu entfernenden Rauschen sichtbar sein müssen. Da man Annahmen für die lokale Dimensionalität machen muß, ist es

notwendig, entsprechende Kenntnisse über die zugrundeliegende Dynamik zu haben.

Beiden Algorithmen, der einfachen Rauschunterdrückung durch Vorhersage und dem lokal projektiven Verfahren, ist die Annahme gemeinsam, daß die Trajektorien sich schon in etwa dort im Phasenraum befinden, wo sie aufgrund der rein deterministischen Dynamik sein sollten. Kleine Abweichungen werden komplett der stochastischen Verunreinigung durch den Meßprozeß zugeordnet und können durch kleine Korrekturen in der vorliegenden Zeitreihe beseitigt werden. In einem dynamisch verrauschten System jedoch enthalten diese Abweichungen auch deterministische Anteile. Beide Algorithmen können also bei einem durch Rauschen deformierten Attraktor nur eine effektive Dynamik sehen, die von der reinen, ungestörten Dynamik abweicht. Wenn man nun Kenngrößen, wie Lyapunovexponenten und Dimensionen, für mit den genannten Verfahren rauschbereinigte Zeitreihen von dynamisch verrauschten Systemen bestimmt, müssen die Ergebnisse kritisch betrachtet werden. Die Definition von Lyapunovexponenten geht von einer rein deterministischen Dynamik aus. Für diese Zeitreihen wird man, wenn überhaupt ein exponentielles Auseinanderlaufen der Trajektorien zu beobachten ist, zu niedrige Werte bestimmen, da das System auf den deterministischen Attraktor hin kontrahierend wirkt. Da aber die Wirkung des dynamischen Rauschens weiterhin in den Zeitreihen sichtbar ist, wird das mit der Zeit wurzelförmige Auseinanderlaufen der Trajektorien (*random walk*) sichtbar bleiben. Auch bei der Bestimmung der Dimension bleibt das Rauschen sichtbar, und das System erscheint hochdimensional.

4.1.3 Rauschquellen im Laser

Warum ist es nun im Zusammenhang mit dem vorgestellten Laser-Experiment interessant, nach der Art und Größe von Rauschen in den gemessenen Zeitreihen zu fragen? Die meisten bekannten chaotischen Systeme zeigen unter Parameteränderung moderate Anstiege in der Komplexität der Dynamik. Auch bei dem gegebenen Laser-Experiment wäre dies so zu erwarten, da dieses durch das allgemein anerkannte Ratengleichungsmodell nahegelegt wird. Bei einer solchen Parametervariation durchläuft das System so genannte Bifurkationen. An einem Bifurkationspunkt findet eine grundlegende Änderung der Stabilität der Trajektorien statt. So wird z.B. aus einem periodischen Zustand mit Periode Eins ein periodischer Zustand mit Periode Zwei (Periodenverdopplung). Ein solches Periodenverdopplungsszenario ist z.B. ein klassischer „Weg ins Chaos“, d.h. das System geht nach und nach in Zustände mit immer höherer Periode über, bis keine Periodizität mehr vorliegt und das System auf chaotischen Bahnen im Phasenraum läuft. Die Änderungen der zur Charakterisierung der Komplexität dienenden Größen, wie der Lyapunovexponenten und der Dimensionalität, zeigen an solchen Übergängen zwar nicht stetige, aber doch moderate Anstiege. So springt z.B. die Dimension des Attraktors beim Übergang von einem Fixpunkt zu einem einfachen periodischen Zustand um den Wert eins. Auch beim Übergang ins Chaos wird im allgemeinen eine Änderung der Dimensionalität in der Größenordnung eins beobachtet. Die Untersuchung der Zeitreihen des Laser-Experimentes zeigte aber nicht interpretierbar hohe Anstiege der Komplexität der Dynamik unter Erhöhung der Pumprate beim Übergang von periodischen hin zu chaotischen Systemzuständen. Alleine diese Tatsache kann schon als Hinweis auf mit der

Dynamik verwobene Rauschprozesse dienen: in einem periodischen Zustand sorgt die Stabilität (und damit Anziehung) der Trajektorien, dafür, daß auch mit der Dynamik wechselwirkende Störungen auf die periodische Bahn zurückgezogen werden, dynamisches Rauschen wird gedämpft. Meß- und dynamisches Rauschen haben in periodischen Zuständen sehr ähnliche Signaturen und sind damit schwer auseinanderzuhalten. Sobald das System aber in einen chaotischen Zustand übergeht, findet eben die Wechselwirkung zwischen Chaos und dynamischem Rauschen statt. Dadurch erscheint die Dynamik erheblich komplexer als im rein deterministischen Fall.

Rauschen ist schon seit langem ein wichtiger Punkt in der wissenschaftlichen und technischen Untersuchung von Lasern. Wie schon erwähnt, ist Rauscharmut ein wichtiges Kriterium bei Lasern. Rauschen wirkt sich z.B. wie bei einer Amplitudenmodulation direkt auf die Frequenzschärfe des abgestrahlten Lichts, und damit auf die Kohärenzlänge, aus. Daher wurden eine Reihe von Anstrengungen unternommen, die Rauschquellen in Lasern zu identifizieren und zu reduzieren. Da Laser auf grundlegenden quantenmechanischen Prozessen beruhen (siehe Kapitel 2), gibt es aber eine prinzipielle untere Schranke für ein minimales Rauschen, den Quantenrauschlimes.

Aus der Identifikation der Rauschquellen können direkte Ableitungen zu ihrer Reduktion gewonnen werden. Buchler et al. [buc98] haben einen (unverdoppelten) Nd:YAG-Laser mit Rückkopplungsschleife komplett quantenmechanisch beschrieben und daraus direkt die Dimensionierung von Filtern im Rückkopplungsweig zur Optimierung der Rauschreduktion abgeleitet. Als Rauschquellen wurden neben den für die Laseraktivität grundlegenden Mechanismen (Absorption, spontane und stimulierte Emission und Phononenkollisionen) auch das Rauschen der Pumpquelle (die ja in unserem Fall ebenfalls ein Laser ist), die Transmission der Spiegel und Strahlteiler im Experiment und das Detektorrauschen in die quantenmechanischen Kalkulationen mit einbezogen. Dabei erweist sich in einem breiten, niederfrequenten Bereich (bis ca. 1MHz) das Rauschen der Pumpquelle als dominierender Effekt. Weiterhin ist im Frequenzspektrum des Rauschens eine Resonanz zu erkennen, die von den Phononen-Kollisionen und den Resonator-Verlusten angeregt werden.

In einer weiteren, kürzlich erschienenen Veröffentlichung von Peters et al. [pet01] wurden experimentelle und numerische Untersuchungen an einem Nd:Glas-Laser hinsichtlich des Einflusses des Quantenrauschens auf die Dynamik der Gesamtintensität und der Einzelintensitäten der longitudinalen Moden durchgeführt. Solche Laser mit Glas als Wirtsmaterial unterscheiden sich von dem verwendeten Laser mit einem kristallinen Wirtsmaterial (YAG) durch ihre erheblich größere Anregungslinienbreite wegen der schon erwähnten inhomogenen Linienverbreiterung in Lasern mit amorphem Wirtsmaterial. Dadurch oszillieren schon bei sehr kurzen Resonatoren viele longitudinale Lasermoden. Aus dynamischer Sicht sind solche Laser stabil, das heißt, sie sollten an sich eine konstante Ausgangsintensität zeigen. Dennoch zeigt die Gesamtintensität dieser Laser Fluktuationen, die im Frequenzraum eine Spitze bei der charakteristischen Frequenz der Relaxationsoszillationen zeigt. Die in [pet01] gemessenen Dynamiken zeigten zusätzlich eine weitere Spitze bei deutlich niedrigeren Frequenzen. Diese wurde einer Antiphase-Dynamik der Moden untereinander, das heißt dem dynamischen Austausch von Energie zwischen den Moden, zugewiesen und ist in der Dynamik der Gesamtintensität nicht

mehr sichtbar. Ausgehend von dem räumlich ausgedehnten Ratengleichungsmodell von Tang et al. [tan63], das auch die Basis des bisher untersuchten, reduzierten Modells ist, wurden Ratengleichungen mit zusätzlichen stochastischen Langevin-Kräften abgeleitet. Die Langevin-Kräfte repräsentieren das Quantenrauschen der Resonatorverluste, der stimulierten und spontanen Emission und des Pumpprozesses. Diese Gleichungen geben die gemessenen Dynamiken der Einzel- und der Gesamtintensitäten sehr gut wieder. Die Möglichkeit, das Rauschen im Laser durch die Erweiterung der rein deterministischen Gleichungen zu stochastischen Langevin-Gleichungen zu beschreiben, ist eine wichtige Eigenschaft hinsichtlich der Untersuchung der Zeitreihen auf dynamisches Rauschen.

4.2 Charakteristische Größen von chaotischen Systemen

Zur Charakterisierung chaotischer Systeme werden von der Analyse linearer Systeme abweichende Größen verwendet. So gibt es aus der Statistischen Physik abgeleitete Entropien, nicht ganzzahlige Dimensionen seltsamer Attraktoren und zur Charakterisierung der Sensitivität gegenüber den Anfangsbedingungen die Lyapunovexponenten. Die Dimensionen und die Lyapunovexponenten werden später zur quantitativen Bewertung von Rauschunterdrückungsmethoden herangezogen und daher hier detaillierter dargestellt.

4.2.1 Dimensionen

Die Attraktoren chaotischer Systeme haben die Eigenschaft, Selbstähnlichkeit auf verschiedenen Längenskalen zu zeigen. Um dieses, aber auch die Füllung der verschiedenen Phasenraumrichtungen zu charakterisieren, wurde zunächst Anfang des letzten Jahrhunderts die *Hausdorff*-Dimension [hau18] eingeführt. In den 80er Jahren des vorigen Jahrhunderts wurde dann von Grassberger [gra83a] und Hentschel und Proccacia [hen83] ein Dimensionsspektrum D_q mit q als Ordnungsparameter eingeführt. Diese Größen können nichtganzzahlige Werte annehmen. Man spricht dann von einer fraktalen (gebrochenen) Dimension. Für Punkte (Fixpunkte) und Linienzüge (periodische Trajektorien) liefern sie aber die bekannten Werte $D_q = 0$ bzw. $D_q = 1$.

$$D_q = \frac{1}{1-q} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln I(q, \epsilon)}{\ln(1/\epsilon)} \quad (4.2a)$$

mit

$$I(q, \epsilon) = \sum_{i=1}^{\tilde{N}(\epsilon)} \mu_i^q. \quad (4.2b)$$

$\tilde{N}(\epsilon)$ ist die minimale Anzahl von disjunkten Boxen der Größe ϵ , die benötigt wird, um den Attraktor abzudecken, und μ_i ist die relative Aufenthaltszeit der Trajektorien in der jeweiligen ϵ -Box, das Wahrscheinlichkeitsmaß. Mit dem Exponenten q wird das Wahrscheinlichkeitsmaß bei den unterschiedlichen Dimensionen D_q unterschiedlich stark

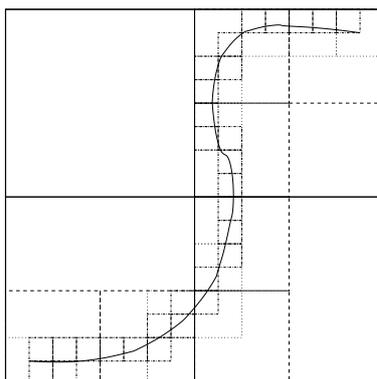


Abbildung 4.2: Dargestellt ist eine (eindimensionale) Schlangenlinie im (zweidimensionalen) „Phasenraum“ mit einer Überdeckung durch immer kleiner werdende Quadrate. Die Abbildung dient zur Illustration der Bestimmung von Dimensionen über die Abdeckung durch Boxen. Zu kleinen Boxen mit kleinen Kantenlängen ϵ wird hier die Anzahl von Boxen, die zur Abdeckung der eindimensionalen Schlangenlinie benötigt werden, mit ϵ^{-1} skalieren.

gewichtet. Für $q = 0$ wird einfach nur die Zahl der ϵ -Boxen gezählt, mit denen der Attraktor überdeckt werden kann; wir erhalten dann die *box counting dimension* oder auch Kapazität der Menge. Dimensionen mit größerem Index gelten dabei als untere Schranken für solche mit kleinerem, also $D_{q_1} \leq D_{q_2}$ für $q_1 > q_2$.

Abb. 4.2 soll anschaulich den hier benutzten Dimensionsbegriff, speziell die *box counting dimension*, illustrieren.

Für die nichtlineare Zeitreihenanalyse ist die Korrelationsdimension mit quadratischer Wichtung der Maße am interessantesten, da sie aus den Zeitreihen leicht nach dem von Grassberger und Proccacia [gra83b] vorgeschlagenen Algorithmus bestimmt werden kann.

Zur Bestimmung der *Korrelations*-Dimension wird dabei das *Korrelations*-Integral $C(\epsilon)$ gebildet. Anschaulich ist dieses Integral der Anteil der Paare von Punkten im Phasen- oder einem äquivalenten Raum mit einem maximalen Abstand von ϵ an der Zahl der insgesamt untersuchten Punktpaare:

$$C(\epsilon) = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N \Theta(\epsilon - \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|). \quad (4.3)$$

$\Theta(x)$ ist dabei die Stufenfunktion. Da dieser Anteil der Paare $C(\epsilon)$ mit der Potenz der Dimension D ansteigt ($C(\epsilon) \propto \epsilon^D$), ist die gesuchte *Korrelations*-Dimension die Steigung des *Korrelations*-Integrals in doppellogarithmischer Auftragung.

In Abb. 4.3 sind exemplarisch die Korrelationsintegrale (a) und deren logarithmischen Ableitungen nach der Umgebungsgröße ϵ dargestellt. Aus der Steigung der Korrelationsintegrale kann bei hinreichender Einbettungsdimension die Korrelationsdimension bestimmt werden.

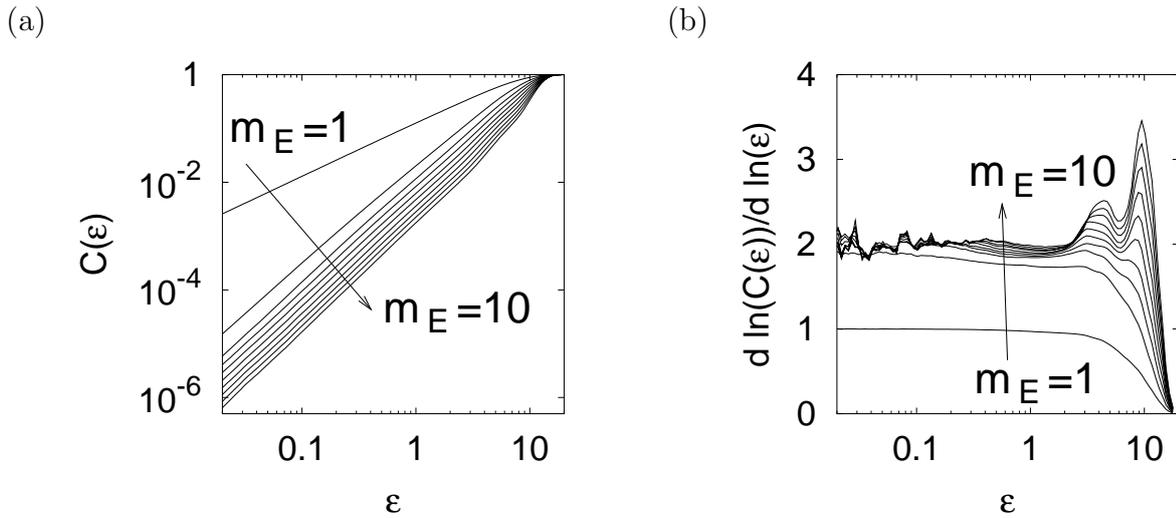


Abbildung 4.3: Bestimmung der Korrelations-Dimension aus Zeitreihen des Rössler-Attraktors. Teil (a) zeigt die Korrelationsintegrale für die Einbettungsdimensionen 1–10. Teil (b) zeigt die entsprechenden Ableitungen der Korrelationsintegrale nach der Umgebungsgröße ε . Der numerisch ermittelte Wert der Dimension liegt für die verwendeten Parameter ($a = 0,36$, $b = 0,4$ und $c = 4,5$) des weiter unten eingeführten Rössler-Systems (4.9) bei 2,04.

4.2.2 Lyapunovexponenten

Lyapunovexponenten charakterisieren die Empfindlichkeit chaotischer Systeme gegenüber den Anfangsbedingungen. Es gibt so viele Lyapunovexponenten, wie physikalische Freiheitsgrade bzw. DGLs zur numerischen Beschreibung des Systems. Diese Anzahl ist gleichbedeutend mit der Dimension des Phasenraums. Hier wird nur der die Expansion dominierende, maximale Lyapunovexponent behandelt, da er leicht aus Zeitreihen zu ermitteln ist. Formal werden die Lyapunovexponenten über die Entwicklung sehr kleiner (infinitesimaler) Störungen in einer Mittelung über den gesamten Attraktor bestimmt. Dazu wird das System linearisiert und die Rechnungen werden im so genannten Tangentialraum ausgeführt. In diesem Raum wird die Dynamik der Ableitungen nach den Koordinaten des Systems beschrieben. Im eindimensionalen Fall sind dies einfach die skalaren Ableitungen, im höherdimensionalen Fall ergeben sich dabei die *Jacobi*-Matrizen $\mathbf{J}(\mathbf{x})$. Das System sei durch die vektorwertige Funktion $\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}})$ gegeben. Dann sind die Einträge der Matrix durch $J_{ij}(\tilde{\mathbf{x}}) = \frac{d}{dx_j} f_i(\tilde{\mathbf{x}})$ gegeben. Die Lyapunovexponenten ergeben sich nun aus der zeitlichen Mittelung der entlang der Trajektorien aufintegrierten, räumlich variierenden *Jacobi*-Matrizen.

Bei gemessenen Zeitreihen von chaotischen Systemen hat man in der Regel keinen expliziten Zugang zu dieser Tangentialraum-Dynamik. Daher muß man sich in der nicht-linearen Zeitreihenanalyse anders den Zugang zu den Lyapunovexponenten verschaffen. Hierfür wurde bereits von R. Stoop in Peinke et al. [pei92] ein Verfahren vorgestellt, daß auf die Anwendung auf experimentelle Zeitreihen ausgerichtet war. Später wurden wei-

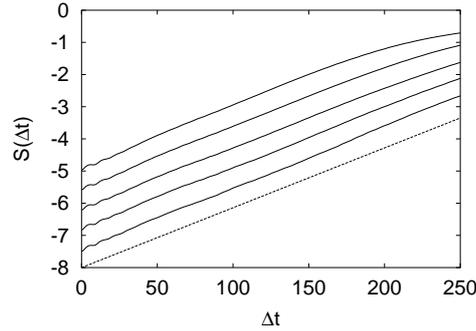


Abbildung 4.4: Die mittlere logarithmierte Expansion der Trajektorien $S(\Delta t)$ in Abhängigkeit von der zeitlichen Entfernung Δt vom Referenzpunkt zur Bestimmung des maximalen Lyapunovexponenten aus Zeitreihen des Rössler-Attraktors (4.9) bei den Parameterwerten $a = 0,36$, $b = 0,4$ und $c = 4,5$. Die Größe $S(\Delta t)$ ist dabei für fünf verschiedene Umgebungsgrößen ε bei einer Einbettungsdimension von fünf dargestellt. Die gestrichelte Linie hat die Steigung des mit der Abtastrate skalierten Lyapunovexponenten $\lambda_{\max} = 0,148$ aus der Integration der *Jacobi*-Matrizen.

tere robuste Algorithmen zur Bestimmung des maximalen Lyapunovexponenten wurden von Rosenstein et al. [ros93] und Kantz [kan94] vorgeschlagen. In dieser Arbeit wird im weiteren der letztgenannte Algorithmus nach Kantz [kan94] verwendet, daher soll dieser hier kurz beschrieben werden.

Zunächst wird wieder aus der Zeitreihe durch Einbettung ein dem Attraktor im Phasenraum äquivalentes Objekt rekonstruiert. In diesem Objekt werden nun für eine hinreichende Anzahl an Referenzpunkten $\tilde{\mathbf{x}}_{i_0}$ Nachbarn $\tilde{\mathbf{x}}_n$ in einer ε -Umgebung $\mathcal{U}_\varepsilon(\tilde{\mathbf{x}}_{i_0})$ gesucht. Für die Δt Zeitschritte in der Zukunft liegenden Nachfolger der Referenz- und Nachbarschaftspunkte wird der mittlere Abstand berechnet und der Logarithmus dieser Größe über die Referenzpunkte gemittelt:

$$S(\Delta t) = \frac{1}{N} \sum_{i_0=1}^N \ln \left(\frac{1}{|\mathcal{U}_\varepsilon(\tilde{\mathbf{x}}_{i_0})|} \sum_{\tilde{\mathbf{x}}_n \in \mathcal{U}_\varepsilon(\tilde{\mathbf{x}}_{i_0})} |x_{i_0+\Delta t} - x_{n+\Delta t}| \right). \quad (4.4)$$

$|\mathcal{U}_\varepsilon(\tilde{\mathbf{x}}_{i_0})|$ ist die Anzahl der Punkte in der ε -Umgebung. Der verwendete Abstand $|x_{i_0+\Delta t} - x_{n+\Delta t}|$ ist mathematisch keine Norm. In Kantz [kan94] wird jedoch gezeigt, daß dennoch der richtige Wert für den maximalen Lyapunovexponenten ermittelt wird.

Trägt man diese Größe $S(\Delta t)$ nun gegen die relative Zeit Δt auf, so weist ein linearer Anstieg wegen des Logarithmus' auf ein (mittleres) exponentielles Auseinanderlaufen benachbarter Trajektorien hin. Dieser exponentielle Anstieg kann in der Regel über mehrere Größenordnungen beobachtet werden, da die Linearisierung meist über größere Bereiche gültig ist.

4.3 Detektion von dynamischem Rauschen und Rekonstruktion der deterministischen Dynamik

Das hier verwendete Verfahren zur Detektion und Reduktion des dynamischen Rauschens in Zeitreihen geht auf eine von Siegert et al. [sie98] vorgeschlagene Methode zurück. Die Voraussetzung für diese Methode ist, daß sich das System durch eine *Langevin*-Gleichung

$$\frac{d}{dt}x_i(t) = f_i(\tilde{\mathbf{x}}(t), t) + \sum_j g_{ij}(\tilde{\mathbf{x}}(t), t)\Gamma_j(t) \quad (4.5)$$

beschreiben läßt. Der erste Term $f_i(\tilde{\mathbf{x}}(t), t)$ dieser Gleichung entspricht dabei einer deterministischen Differentialgleichung. Der zweite Term $\sum_j g_{ij}(\tilde{\mathbf{x}}(t), t)\Gamma_j(t)$ ist der stochastische Teil der Dynamik mit den Zufallstermen $\Gamma_j(t)$. Durch die Multiplikation mit der Funktion $g_{ij}(\tilde{\mathbf{x}}(t), t)$ wird eine mögliche (auf den Phasenraum bezogene) räumliche und zeitliche Variation des Rauscheinflusses berücksichtigt. Der deterministische Term wird in der Theorie der stochastischen Systeme als Driftterm, der Zufallsterm als Diffusionsterm bezeichnet. Das Rauschen $\Gamma_j(t)$ wird als normalverteilt mit verschwindendem Mittelwert angenommen. Weiterhin soll es sowohl zeitlich als auch zwischen den einzelnen Beiträgen $\Gamma_i(t)$ und $\Gamma_j(t)$ δ -korreliert sein, d.h. daß die Korrelationsfunktion

$$c_i(j, \Delta t) = \langle \Gamma_i(t)\Gamma_j(t + \Delta t) \rangle \quad (4.6)$$

nur für $\Delta t = 0$ und $j = i$ gleich eins, sonst gleich Null ist.

Eine solche *Langevin*-Gleichung beschreibt vollständig einen *Markov*-Prozeß, d.h. für die zukünftige Entwicklung des Systems ist die Kenntnis eines Zustandes $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ ausreichend, und es werden keine zusätzlichen Informationen in Form weiterer Zustände aus der Vergangenheit benötigt.

Eine stochastische DGL vom *Langevin*typ kann nur Wahrscheinlichkeiten der Entwicklung eines dynamischen Systems beschreiben. Dabei wird die mittlere Wahrscheinlichkeit durch den deterministischen Anteil $\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}(t), t)$ gegeben. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der zukünftigen Zustände äußert sich in der Form einer Gausskurve um diesen Mittelwert. Die Breite der Verteilung in den verschiedenen Phasenraumrichtungen ist durch den stochastischen Anteil der Langevin-Gleichung $\sum_j g_{ij}(\tilde{\mathbf{x}}(t), t)\Gamma_j(t)$ gegeben. Abb. 4.5 dient zur Illustration einer stochastischen Dynamik. Dabei wird die Beschreibung der Dynamik als eine Abbildung von $\mathbf{x}(t)$ auf einen kurzen Zeitschritt Δt später betrachtet. Diese Abbildung kann z.B. aus der Differentialgleichung durch Integration nach der *Euler*-Methode gewonnen werden:

$$x_i(t + \Delta t) = x_i(t) + \Delta t f_i(\mathbf{x}(t), t) + \sqrt{\Delta t} \sum_j g_{ij}(\mathbf{x}(t), t)\Gamma_j(t). \quad (4.7)$$

Dann ist der Mittelwert $\overline{\mathbf{x}(t + \Delta t)}$ durch den Driftterm, die Wahrscheinlichkeitsverteilung $p(\mathbf{x}(t + \Delta t))$ mit der Verteilungsbreite σ durch den Diffusionsterm gegeben. Die Wurzel $\sqrt{\Delta t}$ ergibt sich aus der mit der Zeit wurzelförmigen Zunahme der Breite der Verteilung einer rein diffusiven, zufälligen Dynamik, wie z.B. einem *random walk*.

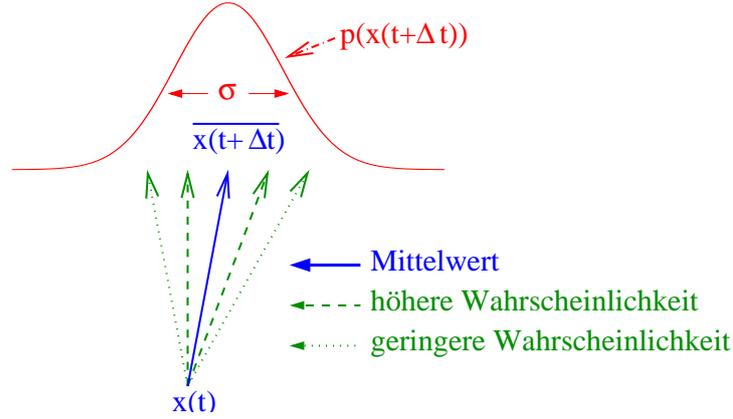


Abbildung 4.5: Entwicklung einer stochastischen Dynamik vom *Langevintyp* im Phasenraum auf kurzen Zeitskalen. Die Abbildung soll zusätzlich die Funktionsweise der Methode zur Rekonstruktion der rein deterministischen Dynamik aus Zeitreihen eines durch dynamisches Rauschen beeinflussten Systems illustrieren.

Diese Interpretation einer stochastischen Dynamik kann man sich nun direkt für die Untersuchung von gemessenen (oder aber auch numerisch generierten) Zeitreihen zu Nutze machen. Es werden, wie bei den schon erwähnten Rauschunterdrückungsmethoden, Nachbarn eines Systemzustandes $\mathbf{x}(t)$ im Phasen- oder Einbetungsraum gesucht. Wenn die Zeitabstände Δt zwischen den einzelnen Messungen kurz und die Größe der ε -Nachbarschaften klein genug sind, so daß die *Eulersche* Näherung gilt, können aus den zeitlichen Nachfolgern aller Punkte aus der Nachbarschaft die Informationen über den deterministischen Drift- und den stochastischen Diffusionsterm gewonnen werden. Der Mittelwert mit der Anzahl $|\mathcal{U}_\varepsilon(\tilde{\mathbf{x}}(t))|$ von Punkten in der ε -Umgebung von $\tilde{\mathbf{x}}(t)$

$$\overline{x_i(t + \Delta t)} = \frac{1}{|\mathcal{U}_\varepsilon(\tilde{\mathbf{x}}(t))|} \sum_{\tilde{\mathbf{x}}(t') \in \mathcal{U}_\varepsilon(\tilde{\mathbf{x}}(t))} x_i(t' + \Delta t) \quad (4.8a)$$

ist ein guter Schätzwert für die rein deterministische Entwicklung der Dynamik in der durch den Index i gekennzeichneten Phasenraumrichtung. Die Funktion $f_i(\tilde{\mathbf{x}}(t), t)$ kann dann, bei hinreichend kurzem Zeitschritt Δt , durch $f_i(\tilde{\mathbf{x}}(t), t) \approx \frac{\overline{x_i(t+\Delta t)} - x_i(t)}{\Delta t}$ angenähert werden. Die Streuung

$$\sigma(x_i(t + \Delta t)) = \frac{1}{|\mathcal{U}_\varepsilon(\tilde{\mathbf{x}}(t))|} \sum_{\tilde{\mathbf{x}}(t') \in \mathcal{U}_\varepsilon(\tilde{\mathbf{x}}(t))} \left(x_i(t' + \Delta t)^2 - \overline{x_i(t + \Delta t)}^2 \right) \quad (4.8b)$$

gibt ein Maß für die Rauschamplitude am Ort $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ in der durch den Index i gekennzeichneten Phasenraumrichtung.

Mit diesen Größen kann die stochastische Dynamik mit ihren deterministischen und zufälligen Anteilen vollständig charakterisiert werden. Eine Möglichkeit ist, den Phasen-

oder Einbettungsraum in kleine ε -Kästchen zu unterteilen und für jedes dieser Kästchen die beiden Größen zu bestimmen. Auf diese Weise wurde von Siegert et al. [sie98] die deterministische Dynamik in periodischen Systemen aus numerisch generierten Daten extrahiert. Da die Systeme durch das dynamische Rauschen in Bereiche außerhalb der periodischen Bahnen im Phasenraum transportiert wurden, konnte der deterministische Anteil auch außerhalb der periodischen Orbits rekonstruiert, mit den bekannten Gleichungen verglichen und darüber verifiziert werden. Zudem wurde auch das Rauschen aus den Daten extrahiert und mit den Werten aus den zugrundeliegenden *Langevin*-Gleichungen verglichen.

Numerisch erzeugte Zeitreihen eines chaotischen Systems wurden von Gradišek et al. [gra00] im Phasenraum untersucht. Auf den aus den Daten generierten Vektorfeldern konnten rauschfreie Zeitreihen „integriert“ werden, die qualitativ den aus einer rauschfreien Dynamik generierten entsprechen. Quantitativ wurden hier keine Untersuchungen durchgeführt. Zudem wurden hier auch experimentelle Daten von Metallschneide-Prozessen untersucht. Dabei konnten verschiedene Fehlfunktionen der Prozesse über den deterministischen Anteil der Dynamik identifiziert werden. In der Oldenburger Diplomarbeit von M. Siefert [sie00] und der darauf basierenden Veröffentlichung von Friedrich et al. [fri00] wurden experimentelle Daten von einem chaotischen Schwingkreis mit der Methode untersucht. Hier bestand der Vorteil, daß das Experiment an sich sehr rauscharm aufzubauen ist und das Rauschen zusätzlich eingekoppelt werden kann. Zudem sind alle Phasenraumvariablen des beschreibenden Gleichungssystems für Messungen zugänglich. Auf diese Weise konnten das eingekoppelte Rauschen und das Vektorfeld der zugrundeliegenden deterministischen Gleichungen aus den Daten extrahiert werden. Zusätzlich wurden in [fri00] noch physiologische Daten von Tremorpatienten untersucht. Hier war die zugrundeliegende Dynamik periodischer Natur. Die Daten konnten über den deterministischen Anteil der Dynamik als zu verschiedenen Krankheitsbildern gehörend klassifiziert werden.

4.4 Verifikation über die Anwendung auf numerisch erzeugte Daten

In der Literatur wurden Daten von chaotischen Systemen sowohl aus numerischen Simulationen, als auch aus einfachen, konstruierten experimentellen Systemen bisher nur im Phasenraum mit der Methode behandelt. Die hier vorgestellten Untersuchungen sollen darüberhinaus zum einen über Dimensionen und Lyapunovexponenten quantitative Aussagen über die Wirksamkeit der im vorigen Abschnitt dargestellten Methode erlauben. Zum anderen wird der experimentell realistische Fall berücksichtigt, daß von dem betrachteten System nur eine skalare Meßgröße zugänglich ist. Zudem hat man meistens auch keine exakte numerische Beschreibung der Dynamik. Daher muß man sich aus den skalaren Zeitreihen eine Repräsentation des Phasenraumes beschaffen. Hier bietet sich die Zeiteinbettungsrekonstruktion an. Dabei muß man jedoch im Hinterkopf behalten, daß die Aussagen für die hinreichende Einbettungsdimension und die Wahl der Zeit-

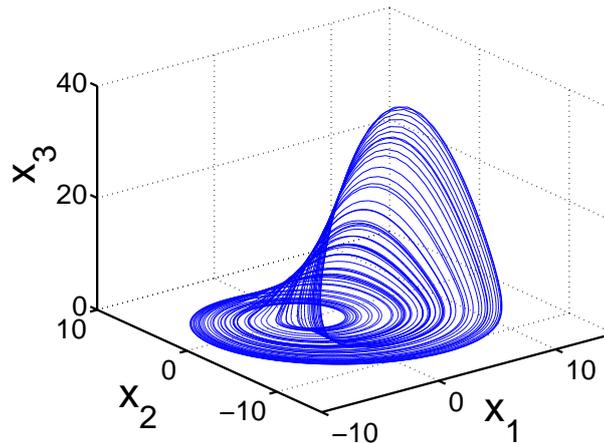


Abbildung 4.6: Der Rössler-Attraktor im Phasenraum.

verzögerung nur für rein deterministische Systeme gelten. Die verwendeten Kriterien zur Wahl einer ausreichenden Einbettungsdimension m_E werden aus der Konvergenz von Vorhersagefehlern bei ansteigendem m_E und der Qualität des für verschiedene m_E abgespaltenen Rauschens abgeleitet.

4.4.1 Das verwendete numerische System — der Rössler-Attraktor

Um die Leistungsfähigkeit der Methode zur Reduktion von dynamischem Rauschen zu testen, ist es notwendig, sie auf ein System anzuwenden, von dem auch die unverrauschte Dynamik bekannt ist. Zudem müssen im Hinblick auf die Bestimmung von charakteristischen Größen aus den Zeitreihen diese Größen bekannt sein. Das hier verwendete Modellsystem ist das Rössler-System [roe76], das einfachste, dreidimensionale DGL-System, mit dem chaotische Trajektorien erzeugt werden können:

$$\dot{x}_1 = -x_2 - x_3, \quad (4.9a)$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + ax_2, \quad (4.9b)$$

$$\dot{x}_3 = x_1x_3 - cx_3 + b. \quad (4.9c)$$

Der verwendete Parametersatz, mit dem die Gleichungen unter anderem chaotische Trajektorien liefert, war $a = 0,36$, $b = 0,4$ und $c = 4,5$. In Abb. 4.6 ist der Attraktor für die angegebenen Parameter im Phasenraum dargestellt.

Für dieses Gleichungssystem lassen sich die Lyapunovexponenten nach der Methode von Benettin et al. [ben80a, ben80b] bestimmen. Für jede Phasenraumrichtung gibt es einen Lyapunovexponenten. Bei kontinuierlichen, sogenannten Flußsystemen, die durch DGLs beschrieben werden, gibt es immer einen „neutralen“ Exponenten, der den Wert Null hat. Er entspricht der Richtung entlang der Trajektorien, hier findet im Mittel weder eine Kontraktion, noch eine Expansion statt. Da das System dissipativ ist, ist der negative Exponent vom Betrag her größer, als der positive. Die numerisch bestimmten Werte bei den gegebenen Parametern sind $\lambda_1 = 0,148$, $\lambda_2 = 0,0$ und $\lambda_3 = -3,68$.

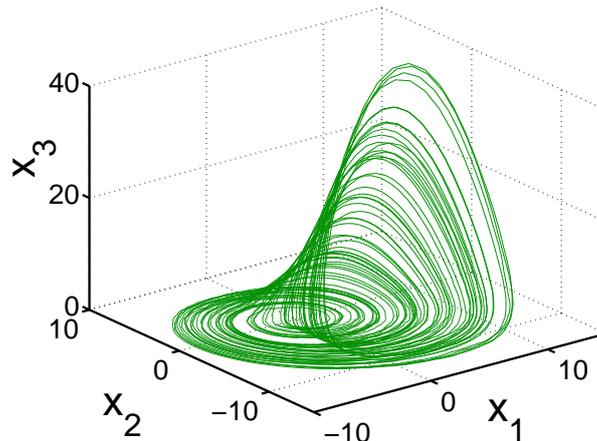


Abbildung 4.7: Der verrauschte Rössler-Attraktor im Phasenraum.

Über die Lyapunovexponenten läßt sich nach einer Vermutung von Kaplan und Yorke [kao79] die Dimension, genauer gesagt die Informationsdimension D_1 (siehe Gl. (4.2a)), des Attraktors abschätzen:

$$D_1 \approx D_{KY} = k + \frac{\sum_{i=1}^k \lambda_i}{|\lambda_{k+1}|}, \quad k : \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i > 0, \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i < 0 \right). \quad (4.10)$$

Eine anschauliche Erklärung der Formel ist, daß k Raumrichtungen durch die Expansion wegen der noch positiven Summe der Lyapunovexponenten ausgefüllt werden. Die $k + 1$ -te Raumrichtung bekommt nur noch den kleinen Anteil ab, der durch den Bruch in auf der echten Seite von Gl. (4.10) angegeben ist. Aus den numerisch bestimmten Lyapunovexponenten ergibt sich dann eine Dimension von $D_{KY} = 2,04$. Dieser Wert ist als Abschätzung der Informations-Dimension D_1 eine obere Schranke für die aus Zeitreihen über das Korrelationsintegral leicht bestimmbare Korrelationsdimension D_2 .

Das dynamische Rauschen wirkt additiv auf die zweite Koordinate (vgl. Gl. (4.9b)):

$$\dot{\tilde{x}}_2 = x_1 + a\tilde{x}_2 + \eta\Gamma(t). \quad (4.11)$$

Die DGLs des Rössler-Systems wurden mit Hilfe eines Runge-Kutta-Verfahrens vierter Ordnung aus [pre92] integriert. Die Integrationsschrittweite war $h = 1,26 \cdot 10^{-3}$, und die Zeitreihen wurden alle 100 Integrationsschritte ausgegeben. Zur Simulation mit dynamischem Rauschen wurde nach jedem Integrationsschritt des Runge-Kutta-Verfahrens der Term $\sqrt{h}\eta\Gamma(t)$ zur zweiten Koordinate hinzuaddiert. Das Rauschen $\Gamma(t)$ selber war normalverteiltes, weißes Rauschen, das durch eine Routine aus [pre92] erzeugt wurde. Als Rauschstärke wurde $\eta = 0,2$ gewählt.

In Abb. 4.7 ist der verrauschte Attraktor für die angegebenen Parameter im Phasenraum dargestellt. Zu beachten ist hier, daß die verrauschten Trajektorien nicht „unruhig“ verlaufen, wie es für Meßrauschen typisch wäre. Im Vergleich zum ungestörten System in Abb. 4.6 fällt auf, daß die Trajektorien teilweise in Bereichen höherer Werte von x_3 verlaufen.

4.4.2 Ergebnisse für die numerisch erzeugten Daten

Die Motivation für die Untersuchungen waren, wie beschrieben, experimentelle, skalare Zeitreihen. Daher wurden die Daten des verrauschten Rössler-Systems nicht im Phasenraum untersucht. Vielmehr stehen durch das additive Einkoppeln des Rauschens auf die x_2 -Koordinate zwei unterschiedliche Klassen von skalaren Zeitreihen zur Verfügung. Zeitreihen der x_1 -Koordinate enthalten das Rauschen nur mittelbar über den Beitrag von x_2 in Gl. (4.9a). Demgegenüber zeigen die Zeitreihen der x_2 -Koordinate einen direkten Einfluß des dynamischen Rauschens. Die beiden verwendeten Koordinaten zeigen eine ähnliche Dynamik. Hier war das Ziel, die beiden Fälle von direktem und indirektem Einfluß des Rauschens auf ähnliche Variablen zu untersuchen. Daher wurde die x_3 -Koordinate hier nicht untersucht, da sie sich in ihrer Dynamik stark von den beiden anderen Variablen unterscheidet.

Bestimmung der Einbettungsparameter

Zeitverzögerung Um einen Zugang zu der höherdimensionalen Dynamik (hier knapp über zwei Dimensionen) zu erhalten, müssen aus den Zeitreihen mit Hilfe der Zeitverzögerungseinbettung höherdimensionale Vektoren gebildet werden. Dabei gilt es zunächst, geeignete Werte für die Zeitverzögerung zwischen den Vektoreinträgen zu wählen. Wie schon erwähnt, gibt es hierfür mehrere unterschiedliche Kriterien. Hier wird für die Zeitverzögerung die Zeit gewählt, zu der die Autokorrelationsfunktion $c(\Delta t)$ der Daten auf den $1/e$ -ten Bruchteil zurückgegangen ist. Die Autokorrelationsfunktion einer Zeitreihe $x(t)$ ist mit dem Mittelwert $\langle x \rangle$ und der Standardabweichung σ des Datensatzes gegeben durch

$$c(\Delta t) = \frac{1}{T - \Delta t} \frac{\sum_{t=0}^T (x(t) - \langle x \rangle)(x(t + \Delta t) - \langle x \rangle)}{\sigma^2} \quad (4.12)$$

und gibt, anschaulich gesprochen, die gemittelte Information eines Zustandes über einen Zustand zu einer Zeit Δt später an.

Einbettungsdimension Die Wahl einer geeigneten Einbettungsdimension stellt sich bei dynamisch verrauschten Daten schon etwas schwieriger dar. Für rein deterministische Daten werden häufig Algorithmen zur Bestimmung charakteristischer Größen, wie Dimensionen oder Lyapunovexponenten, mit verschiedenen Einbettungsdimensionen auf die Daten angewendet. Wenn dann zu höheren Dimensionen hin keine signifikanten Änderungen in den Ergebnissen mehr auftreten, ist die Einbettungsdimension hinreichend hoch. Bei verrauschten Daten jedoch beobachtet man z.B. bei der Bestimmung der Korrelationsdimension keine Konvergenz gegen einen festen Wert, man sieht immer die Einbettungsdimension als Korrelationsdimension des Objektes. Auch bei der Bestimmung von Lyapunovexponenten scheitert ein solches Konvergenz-Kriterium, da zu höheren Einbettungsdimensionen hin die Statistik in den ε -Nachbarschaften immer schlechter wird.

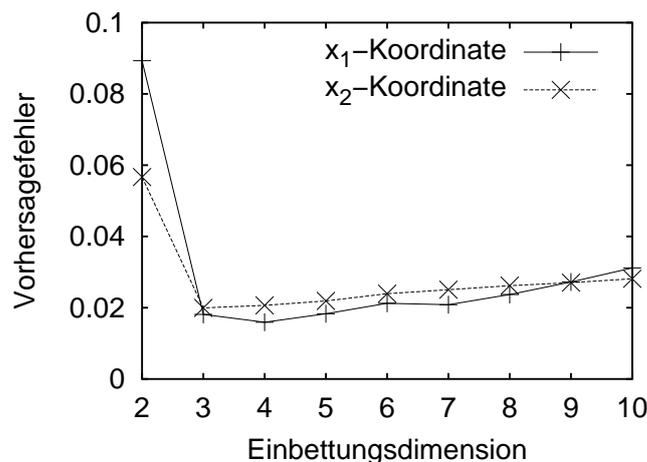


Abbildung 4.8: Mittlerer Vorhersagefehler für 1000 Punkte von Zeitreihen des verrauschten Rössler-Systems für verschiedene Einbettungsdimensionen.

Mittlerer Vorhersagefehler Da der verwendete Algorithmus zur Rauschunterdrückung auf einer Vorhersage beruht, bietet es sich an, die hinreichende Einbettungsdimension über Vorhersagefehler zu bestimmen. Dabei wird, unter Variation der Einbettungsdimension, für eine Anzahl von Meßwerten in der Zeitreihe die Abweichung dx der gemessenen Werte von den mit Gl. (4.8a) vorhergesagten (und als den rein deterministischen Anteil der Dynamik aufgefaßten) Werten bestimmt. Zum einen kann dann mit diesen Werten durch Mittelung über diese Werte ein mittlerer Vorhersagefehler $\langle dx \rangle$ in Abhängigkeit von der Einbettungsdimension bestimmt werden. Für diesen Zweck steht im Rahmen des TISEAN-Softwarepaketes (**TI**me **SE**ries **AN**alysis) [heg99] das Programm `zeroth` zur Verfügung. Das Kommandozeilenprogramm `zeroth` erwartet unter anderem als Eingabeparameter neben der zu untersuchenden Zeitreihe die Einbettungsdimension, die Zeitverzögerung für die Einbettung, die minimale Anzahl von benachbarten Punkten und die minimale Größe der ε -Umgebung, in der die benachbarten Punkte gesucht werden. Die Zeitverzögerung Δt ist durch die Autokorrelation der Zeitreihe gegeben, und für die Einbettungsdimension m_E gilt es hier durch Variation von m_E den optimalen Wert zu bestimmen. Die beiden Parameter zur Nachbarschaftswahl haben sich als relativ empfindlich erwiesen, häufig mußten die Ergebnisse durch visuelle Begutachtung auf Plausibilität geprüft werden. Als Ausgabe kann das Programm neben dem gemittelten Vorhersagefehler auch Zeitreihen der individuellen Abweichungen der Meßwerte in den Zeitreihen von den Vorhersagen herauschreiben.

In Abb. 4.8 sind die auf Zeitreihen des verrauschten Rössler-Systems gemittelten Vorhersagefehler dargestellt. Als Datenbasis diente hier eine Zeitreihe von 500000 Punkten, und der Vorhersagefehler wurde für die ersten 1000 Punkte dieser Zeitreihe bestimmt. Der Vorhersagefehler fällt dabei zu höheren Einbettungsdimensionen auf einen mehr oder weniger konstanten Wert ab, bzw. steigt später wieder leicht an, da zur Gewinnung der Mindestanzahl von Nachbarn immer größere ε -Umgebungen gewählt werden müssen und dann die Linearisierung nicht mehr gilt. Der Wert, gegen den der Vorhersagefehler

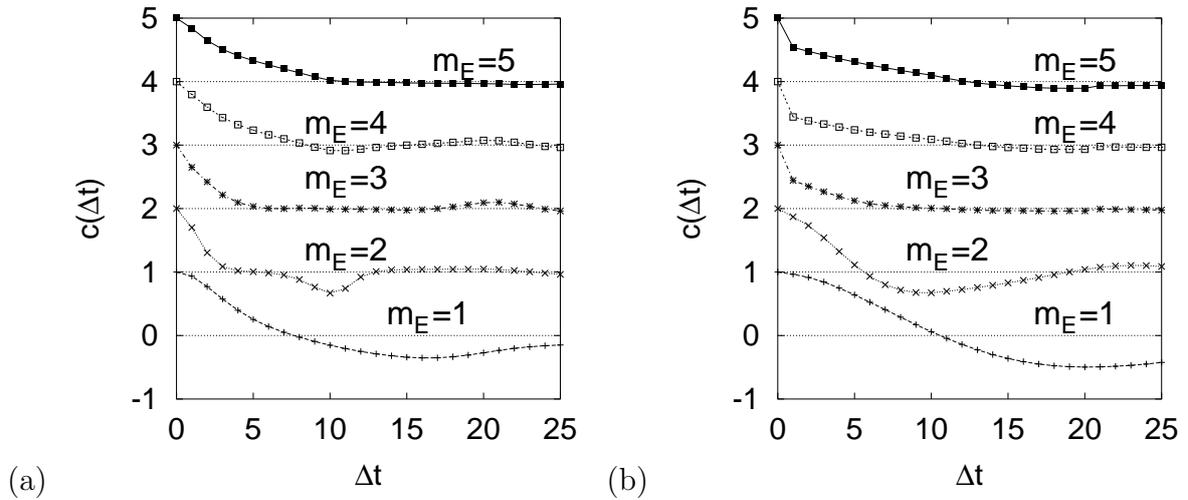


Abbildung 4.9: Autokorrelation der Zeitreihen des für verschiedene Einbettungsdimensionen m_E abgespaltenen Rauschens des Rössler-Systems als Funktion der Schrittweite Δt . In Teil (a) wurde eine Zeitreihe der indirekt verrauschten x_1 -Koordinate verwendet, in Teil (b) der direkt verrauschten x_2 -Koordinate. Die einzelnen Kurven sind der Übersichtlichkeit halber jeweils um eins entlang der Ordinate verschoben.

konvergiert, kann dann als Fehler aufgrund des Rauschens in den Daten interpretiert werden. Im Falle des verrauschten Rössler-Systems ergibt sich für den Vorhersagefehler in Abhängigkeit von der Einbettungsdimension bei der indirekt verrauschten x_1 -Koordinate ein Minimum des Fehlers bei einer Einbettungsdimension von vier, bei der direkt verrauschten x_2 -Koordinate bei drei. Hinreichend, jedoch nicht notwendig, wäre nach Sauer et al. [sau91] eine Einbettungsdimension von fünf gewesen. Aus den mittleren Vorhersagefehlern kann hier jedoch für die indirekt verrauschte x_1 -Koordinate eine kleinste ausreichende Einbettungsdimension von drei, für die direkt verrauschte von vier abgelesen werden.

Autokorrelation des abgespaltenen Rauschens Alternativ zu den mittleren Vorhersagefehlern können auch die individuellen Abweichungen dx der gemessenen Werte von den vorhergesagten für die Zeitreihen ausgegeben werden, wofür ebenfalls das Programm `zeroth` aus [heg99] verwendet werden kann. Dadurch erhält man dann Zeitreihen des abgespaltenen Rauschens. Dies wird wieder für verschiedene Einbettungsdimensionen durchgeführt. Bei einer zu niedrigen Einbettungsdimension enthält dann dieser abgespaltene Teil der Daten aber auch einen deterministischen Anteil. Dieser ist dann in der Autokorrelationsfunktion (4.12) der abgespaltenen Zeitreihen durch eine endliche Korrelationslänge sichtbar. Für reines weißes Rauschen fällt die Autokorrelationsfunktion nach dem ersten Zeitschritt auf Null ab, es ist δ -korreliert. In Abb. 4.9 sind die Autokorrelationsfunktionen der abgespaltenen (Rausch-)Zeitreihen für das verrauschte

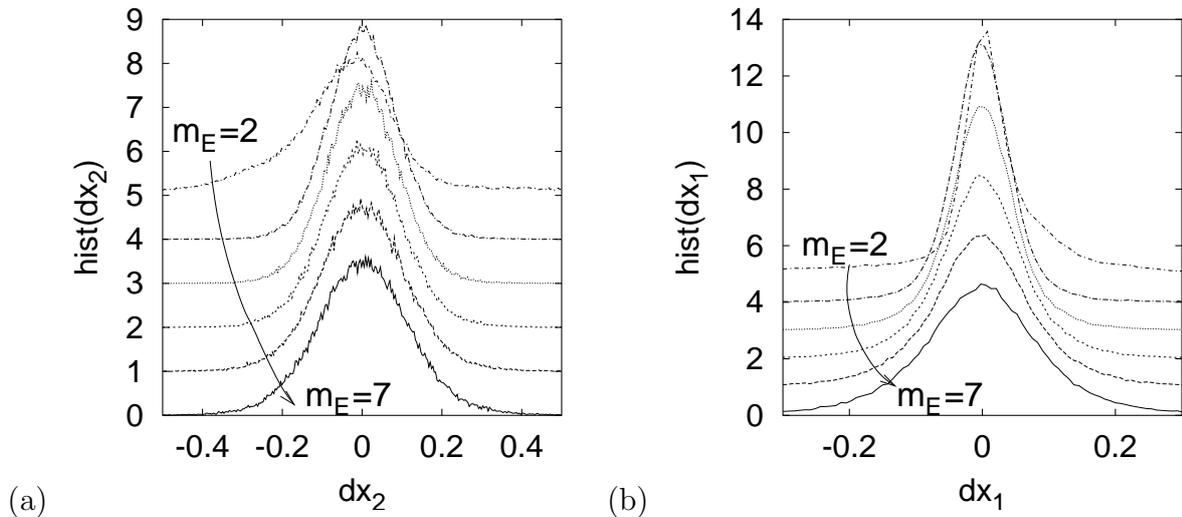


Abbildung 4.10: Verteilungen des abgespaltenen Rauschens bei verschiedenen Einbettungsdimensionen für (a) die direkt verrauschte x_2 -Koordinate und (b) die indirekt verrauschte x_1 -Koordinate des Rössler-Systems. Dabei wurden die Kurven der besseren Übersicht halber jeweils um eins auseinandergezogen. Dargestellt sind die Verteilungen für die Einbettungsdimensionen (von oben nach unten) von zwei bis sieben.

Rössler-System für verschiedene Einbettungsdimensionen dargestellt. Dabei wurde in Abb. 4.9(a) eine Zeitreihe der indirekt verrauschten x_1 -Koordinate, im Teil (b) eine Zeitreihe der direkt verrauschten x_2 -Koordinate verwendet. In beiden Fällen scheint es nicht zu gelingen, das Rauschen komplett vom deterministischen Teil der Dynamik zu trennen, es verbleibt immer eine langsam zerfallende Korrelation. Dies kann aber auch ein Artefakt der Zeitverzögerungseinbettung sein. Dieser Fehler ist deutlicher in den später gezeigten Ergebnissen für die experimentellen Daten zu sehen, wobei wohl das Meßrauschen eine Rolle spielt.

Da die Autokorrelation des abgespaltenen Rauschens zu höheren Einbettungsdimensionen hin nicht, wie gefordert, nach einem Zeitschritt zerfällt, kann verständlicherweise diese Eigenschaft nicht als Kriterium zur Wahl der hinreichenden Einbettungsdimension dienen. Als alternatives Kriterium kann hier dienen, daß sich die Autokorrelationen des abgespaltenen Rauschens zu höheren Einbettungsdimensionen hin nicht mehr stark unterscheiden. Bei den Daten des numerisch integrierten Rössler-Systems führt dies zu gleichen Ergebnissen, wie aus den mittleren Vorhersagefehlern im vorigen Abschnitt.

Verteilung des abgespaltenen Rauschens Einen weiteren Hinweis liefert auch die Verteilung dieser abgespaltenen Rauschzeitreihen. Da das System mit weißem, normalverteiltem Rauschen „verunreinigt“ wurde, sollte auch das abgespaltene Rauschen in erster Näherung normalverteilt sein. Abb. 4.10 zeigt die Verteilungen des abgespaltenen Rauschens für verschiedene Einbettungsdimensionen. Auch hier sind Ergebnisse für zwei

unterschiedliche Situationen dargestellt, bei denen die gemessene Variable das Rauschen nur mittelbar (a), bzw. unmittelbar (b) enthält. Im Falle des numerisch integrierten Rössler-Systems ist die Rauschstärke $\eta = 0,2$ bekannt. Damit läßt sich mit der ebenfalls gegebenen Abtastzeit $h = 1,26 \cdot 10^{-1}$ (einheitenlose Systemzeit aus der numerischen Integration der DGLs) die für die Daten zu erwartende Rauschstärke zu $\eta\sqrt{h} = 0,071$ bestimmen. Da die Informationen über die Dynamik aber durch Einbettung der skalaren Zeitreihen gewonnen wird, ist nicht zu erwarten, daß sich diese Zahl aus den Daten reproduzieren läßt. Insbesondere zeigen sich Unterschiede in der sichtbaren Rauschamplitude zwischen den Untersuchungen auf den Zeitreihen der direkt und der indirekt verrauschten Variablen. Das aus den Zeitreihen der indirekt verrauschten x_1 -Koordinate abgespaltene Rauschen ist schwächer (charakterisiert durch die Breite der Verteilung), als das für die direkt verrauschte x_2 -Koordinate. In beiden Fällen zeigt die Verteilung bei einer Einbettungsdimension von zwei noch eine deutliche Asymmetrie, was mit einer Normalverteilung unvereinbar ist. Weiterhin wächst in beiden Fällen die Breite der Verteilung des abgespaltenen Rauschens mit der verwendeten Einbettungsdimension an. Weiterhin zeigt die Verteilung des abgespaltenen Rauschens für die x_1 -Koordinate eine stärkere Abweichung von einer Normalverteilung, was durch den relativen Fehler bei einer Anpassung einer Gauss-Funktion an die Verteilung belegt werden kann. In Tab. 4.1 sind die Werte für die Breiten der Verteilungen und die Abweichung von einer Normalverteilung bei verschiedenen Einbettungsdimensionen für die beiden Koordinaten dargestellt.

Hier zeigt sich, daß auch die Verteilung des abgespaltenen Rauschens in Abhängigkeit von der Einbettungsdimension bei der Generierung der Rauschzeitreihen kein eindeutiges Kriterium für eine hinreichende Einbettungsdimension ist. Als einziger Hinweis kann hier nur die Abweichung von einer idealen Normalverteilung dienen, wenn plausibel angenommen werden kann, daß der involvierte Rauschprozeß selbst normalverteilt ist. Für die numerisch integrierten Daten zeigen die Verteilungen des abgespaltenen Rauschens in beiden Fällen (der direkt und der indirekt verrauschten Beobachtungsvariable) schon ab einer Einbettungsdimension von drei eine hinreichend gute Übereinstimmung mit ei-

Einbettungsdimension	x_1		x_2	
	σ	Fehler	σ	Fehler
3	0,044	0,81%	0,085	0,26%
4	0,051	0,90%	0,090	0,23%
5	0,064	0,89%	0,098	0,23%
6	0,077	0,94%	0,107	0,26%
7	0,090	0,90%	0,115	0,29%
8	0,102	1,04%	0,124	0,37%

Tabelle 4.1: Beobachtete Rauschstärke in Abhängigkeit von der Einbettungsdimension für die indirekt verrauschte x_1 - und die direkt verrauschte x_2 -Koordinate des Rössler-Systems.

ner Normalverteilung. Bei einer Einbettungsdimension von zwei ist die Verteilung zudem noch stark asymmetrisch um den Mittelwert Null verteilt. Bei einer Normalverteilung sind nur die ersten Momente (Abweichungen der Quadrate) von Null verschieden. Zur Charakterisierung der Abweichung von einer solchen Normalverteilung könnten also die höheren Momente herangezogen werden, bei asymmetrischen Verteilungen vor allem die Abweichungen der ungeradzahigen Potenzen.

Rekonstruktion von Zeitreihen der deterministischen Dynamik

Nachdem die Parameter für die Einbettung gefunden sind, gilt es jetzt, aus den verrauschten Zeitreihen die deterministische Dynamik zu extrahieren und die Ergebnisse zu bewerten. Zum Auffinden der Parameter haben wir uns bisher bei den Vorhersagen auf bekanntem Terrain bewegt, man kannte die Werte, die vorhergesagt werden sollten, und konnte somit ein Maß für die Güte der Vorhersage erhalten. Um den deterministischen Teil der Dynamik zu erhalten, reicht es nach dem Verständnis einer dynamisch verrauschten Dynamik nicht aus, einzelne Punkte in der Zeitreihe zu korrigieren, wie dies bei Rauschunterdrückungsmethoden für Meßrauschen geschieht. Man muß daher neue Zeitreihen generieren, deren Dynamik über Mittelwertbildungen aus den gemessenen Zeitreihen gewonnen wird. Dafür stehen bereits Werkzeuge im Rahmen der nichtlinearen Zeitreihenanalyse bereit, die jedoch bisher nicht so sehr im Hinblick auf dynamisch verrauschte Systeme angewandt wurden. Das hier verwendete Programm `nstep` entstammt ebenfalls dem TISEAN Softwarepaket [heg99]. Dieses Kommandozeilenprogramm erwartet die gleichen Parameter, wie das zur Abspaltung des Rauschens verwendete `zeroth`.

Die Rekonstruktion der deterministischen Dynamik ist ein iterativer Prozeß. Für einen Punkt im Phasen- bzw. Einbettungsraum, z.B. den letzten Punkt der Daten, wird aus der Nachbarschaft ein Nachfolger bestimmt. Von dort aus wird dann sukzessive eine neue Zeitreihe über die Mittelwertbildungen iteriert. Wenn der Startpunkt der zu rekonstruierenden Dynamik nicht auf dem zu rekonstruierenden Attraktor liegt, muß man zunächst einige Iterationsschritte abwarten, bis die rekonstruierte Dynamik auf den Attraktor gezogen wird. Dieses ist vergleichbar mit den Transienten bei der numerischen Integration von DGLs. Man kann dabei nicht erwarten, daß es, selbst für eine rein deterministische Dynamik, gelingt, den exakten Verlauf zu reproduzieren. Die für chaotische Systeme charakteristische Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen führt durch die kleinen Fehler bei der Nachbarschaftssuche und der Mittelwertbildung schnell zu einer starken Abweichung von der exakten Dynamik. Es ist jedoch bei richtiger Wahl der Parameter und hinreichender Qualität der gemessenen Zeitreihe zu erwarten, daß charakteristische Merkmale der deterministischen Dynamik, wie Frequenzspektrum, Lyapunovexponenten und Dimension, aus den verrauschten Daten gewonnen werden können.

Bewertung der Rauschreduktion

Für die Bewertung der Ergebnisse der Rauschreduktion für das numerisch integrierte Rössler-System werden aus dem Bereich der klassischen, linearen Werkzeuge das Fre-

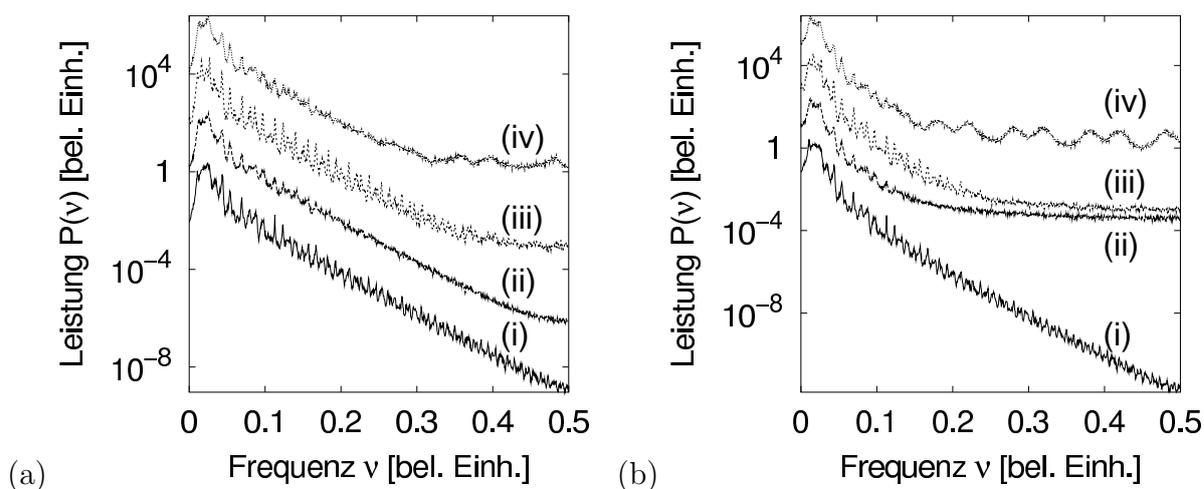


Abbildung 4.11: Leistungsspektren der (a) indirekt x_1 - und (b) direkt verrauschten x_2 -Koordinate des numerischen Systems. Die Kurven wurden der Übersichtlichkeit halber jeweils um einen Faktor 100 entlang der Ordinate verschoben. Die Kurven zeigen die Spektren der unverrauschten (i), der verrauschten (ii), der rekonstruierten (iii) und der mit der lokal projektiven Rauschunterdrückung bereinigten (iv) Dynamik.

quenzspektrum, aus dem Bereich der nichtlinearen Dynamik der maximale Lyapunovexponent und die Korrelationsdimension herangezogen. Diese Größen lassen sich leicht mit Standardwerkzeugen, wie sie z.B. in Hegger et al. [heg99] bereitgestellt werden, aus den Zeitreihen gewinnen. Als Vergleich sollen dabei die aus den mit und ohne Rauschen integrierten Zeitreihen gewonnenen Größen dienen. Als weitere Vergleichswerte sollen die Größen dienen, die aus Zeitreihen nach der Anwendung der lokal projektiven Rauschreduktion auf die verrauschten Daten gewonnen werden können. Diese Gegenüberstellung von zwei Rauschreduktionsmethoden soll nicht die bessere Wirksamkeit einer von beiden nachweisen, da sie für unterschiedliche Arten von Rauschen konzipiert sind. Vielmehr soll diese Gegenüberstellung als Hinweis dienen, für die jeweilige Art des Rauschens die richtige Rauschreduktionsmethode zu verwenden. Die Ergebnisse werden für die zwei unterschiedlichen Arten der Beobachtung von dynamisch verrauschten Systemen, also Beobachtung einer direkt bzw. indirekt verrauschten Variablen, dargestellt. Es wurden bei den Vergleichen jeweils Zeitreihen mit 100000 Punkten verwendet. Dabei wurden die mit dem vorgeschlagenen Verfahren rauschbereinigt generierten Zeitreihen auf einer Datenbasis von 500000 Punkten der verrauschten Zeitreihen bei einer Einbettungsdimension von fünf gewonnen.

Frequenzspektren In Abb. 4.11 sind die Frequenzspektren von jeweils vier Zeitreihen für eine der Koordinaten dargestellt, in (a) für die indirekt verrauschte x_1 -, in (b) für die direkt verrauschte x_2 -Koordinate. Der Übersicht halber wurden die Spektren in der halblogarithmischen Auftragung jeweils um einen Faktor 100 entlang der Ordinate verschoben, da nicht die konkrete Leistung in den einzelnen Frequenzen, sondern die Struk-

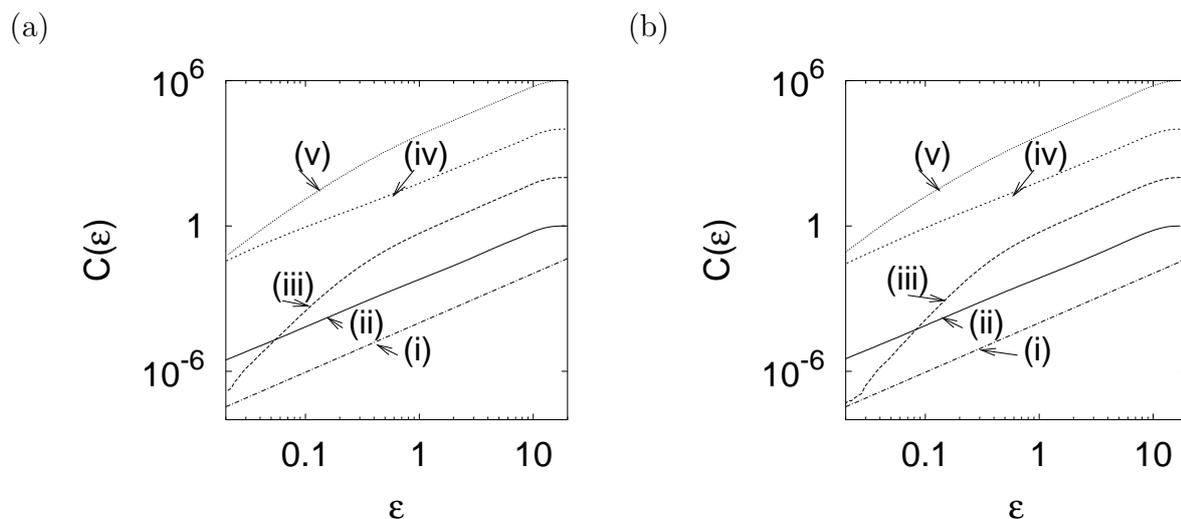


Abbildung 4.12: Korrelationsintegrale $c(\varepsilon)$ als Funktion der Umgebungsgröße ε bei einer Einbettungsdimension von fünf für (a) die indirekt verrauschte x_1 - und (b) die direkt verrauschte x_2 -Koordinate. Dargestellt sind eine Gerade mit der Steigung der numerisch bestimmten Dimension $D_{KY} = 2.04$ (i) und die Korrelationsintegrale für die deterministischen (ii), die verrauschten (iii), die rekonstruierten (iv) und die mit dem lokal projektiven Verfahren rauschbereinigten (v) Zeitreihen.

tur der Spektren als Bewertungskriterium dient. Für die x_1 -Koordinate zeigt sich, daß zum einen zwar das Spektrum der rauschbereinigt generierten Zeitreihe zu höheren Frequenzen ($> 0,4 \times$ Abtastfrequenz) hin auch gegenüber dem Spektrum der verrauschten Zeitreihe angehoben ist, was einer Erhöhung der Rauschstärke in diesem Bereich entspricht. Diese Erhöhung ist auf die beschränkte Statistik bei der Nachbarschaftssuche während der Rekonstruktion der deterministischen Dynamik zurückzuführen. Andererseits werden durch die Rauschbereinigung im mittleren Frequenzbereich ($0,1$ bis $0,4 \times$ Abtastfrequenz) die im Spektrum der verrauschten Zeitreihe verschmierten Strukturen wieder sichtbar gemacht.

Für die x_2 -Koordinate wird durch die Rauschreduktion das Rauschniveau der rekonstruierten Zeitreihe gegenüber der verrauschten Zeitreihe um fast zwei Größenordnungen abgesenkt.

Auf beiden Koordinaten bringt die Rauschunterdrückung mit dem lokal projektiven Verfahren keine Verbesserung, im Falle der indirekt verrauschten Variable wird zu höheren Frequenzen das Rauschen noch stärker, als bei dem vorgeschlagenen Verfahren, angehoben. Dieses war aber auch zu erwarten, da das lokal projektive Verfahren prinzipbedingt das dynamische Rauschen nicht komplett entfernen kann. Die mit diesem Verfahren bereinigten Zeitreihen enthalten indirekt einen Anteil des Rauschens durch die Tatsache, daß sich die Trajektorien im Einbettungsraum auch außerhalb des deterministischen Attraktors aufhalten.

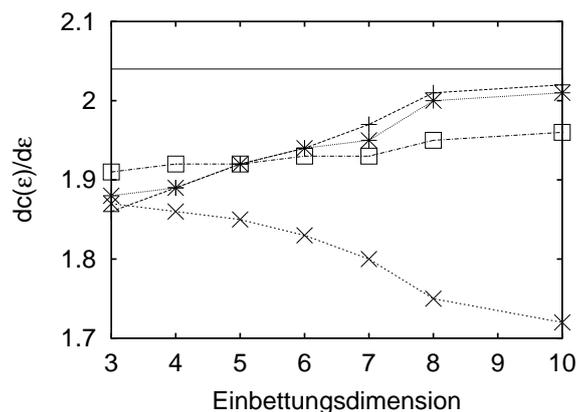


Abbildung 4.13: Steigung der Korrelationsintegrale für verschiedene Einbettungsdimensionen. Dargestellt sind der Wert der Kaplan-Yorke-Dimension $D_{KY} = 2.04$ (—), die Steigung der Korrelationsintegrale für die deterministischen Zeitreihen der x_1 -Koordinate (— + —) und der x_2 -Koordinate ($\cdots * \cdots$) und für die rekonstruierten Zeitreihen der x_1 -Koordinate ($- - \square - -$) und der x_2 -Koordinate ($- \cdot - \times - \cdot -$).

Korrelationsdimension Von den nichtlinearen Kenngrößen chaotischer Systeme soll hier zunächst die Korrelationsdimension als Maß für die Güte der Rauschbereinigung herangezogen werden. Diese läßt sich, wie schon weiter vorne beschrieben, über die Steigung des Korrelationsintegrals aus dem Grassberger-Procaccia-Algorithmus in doppellogarithmischer Auftragung bestimmen. In Abb. 4.12 sind die Korrelationsintegrale für die Zeitreihen der beiden beobachteten Koordinaten des Rössler-Systems dargestellt. Wie erwartet, zeigen die Korrelationsintegrale für die deterministischen Zeitreihen in der doppellogarithmischen Auftragung einen weiten linearen Skalierungsbereich über mehrere Größenordnungen der ε -Nachbarschaften im Einbettungsraum und können somit als Referenz für die Ergebnisse für die rauschbereinigten Zeitreihen dienen. Zusätzlich sind noch Geraden mit der Steigung der Kaplan-Yorke-Dimension $D_{KY} = 2,04$ eingezeichnet.

Die Steigungen der Korrelationsintegrale für die verrauschten und der mit dem lokal projektiven Verfahren rauschbereinigten Zeitreihen konvergieren zu kleinen ε gegen die Einbettungsdimension (hier fünf), zeigen aber insgesamt keinen ausreichenden, in der doppellogarithmischen Auftragung linearen Skalierungsbereich. Aus diesen Kurven ist daher kein sinnvoller Wert für die Korrelationsdimension abzulesen.

Für die mit dem vorgeschlagenen Verfahren rauschbereinigt generierten Zeitreihen zeigen die Korrelationsintegrale eine deutliche Annäherung an die der deterministischen Zeitreihen, was eine deutliche Verbesserung gegenüber den Ergebnissen für die verrauschten Zeitreihen bedeutet.

Neben der qualitativen Betrachtung der Korrelationsintegrale in Abb. 4.12 kann durch Anpassung einer Potenzfunktion der Form $C\varepsilon^{D_2}$ (C ist ein für die Auswertung nicht relevanter Faktor) innerhalb des Skalierungsbereiches der Korrelationsintegrale ein Wert für die Korrelationsdimension D_2 bestimmt werden. Dieses wurde im Be-

reich $0,1 < \varepsilon < 1$ in Abb. 4.12 für die Korrelationsintegrale der deterministischen und der rekonstruierten Zeitreihen beider Koordinaten x_1 und x_2 in verschiedenen Einbettungsdimensionen bei der Bestimmung der Korrelationsintegrale durchgeführt. Die Ergebnisse sind in Abb. 4.13 dargestellt. Die Steigung der Korrelationsintegrale der deterministischen Zeitreihen nähern sich zu höheren Einbettungsdimensionen hin der als Abschätzung der Informationsdimension dienenden Kaplan-Yorke-Dimension von unten an. Das entspricht der Erwartung, daß die Informationsdimension $D_1 \approx D_{KY}$ eine obere Schranke für die Korrelationsdimension D_2 ist.

Die Steigungen der Korrelationsintegrale der aus der Zeitreihe der x_2 -Koordinate rekonstruierten Daten zeigen ebenfalls eine Annäherung an den korrekten Wert, nur langsamer. Da Ergebnisse von Zeitreihenanalysen-Methoden, die auf Zeitverzögerungseinbettungen beruhen, schon bei Einbettungsdimensionen ab etwa acht kritisch zu bewerten sind, ist ersichtlich, daß die Dimensionalität hier eher unterschätzt wird. Das Bild für die aus der Zeitreihe der x_1 -Koordinate generierten Daten ist hier noch schlechter, die Steigungen der Korrelationsintegrale fallen zu höheren Einbettungsdimensionen hin sogar noch ab.

Insgesamt zeigen die rekonstruierten Zeitreihen eine geringere Dimensionalität als die deterministischen. Eine mögliche Begründung hierfür beruht auf der zeitdiskreten Abtastung des kontinuierlichen Systems. Bei der Generierung der rauschbereinigten Zeitreihen kann der Vorhersagealgorithmus in diskreten Bereichen des verrauschten Attraktors im Einbettungsraum einrasten. An sich kann ein kontinuierliches chaotisches System keine Dimension kleiner als zwei besitzen. Wenn jedoch die zeitdiskrete Abtastung bei der Vorhersage sozusagen verstärkt wird, kann eine geringere Dimension in den rauschbereinigt generierten Zeitreihen beobachtet werden. Eine andere Begründung für die Beobachtung zu niedriger Dimensionen kann in der unterschiedlichen Dichte des Attraktors im Einbettungsraum liegen. In dichteren Bereichen ist das System weniger expansiv, als in dünneren. Wenn nun der Vorhersagealgorithmus in dünneren Bereichen zu große ε -Umgebungen für die Nachbarschaftssuche verwenden muß, um noch genügend benachbarte Punkte zu finden, steigen die Vorhersagefehler. Dadurch kann das vorhergesagte System aus den dünneren Bereichen gedrängt werden, was zu einer überproportionalen Repräsentation der dichteren Bereiche führt. Eine lokal geringere Expansion führt aber zu einer lokal geringeren Dimension, wodurch wegen der Mittelung über das gesamte System eine Unterschätzung der Dimensionalität in den vorhergesagten Zeitreihen erklärbar ist.

Maximaler Lyapunovexponent Als zweite Vergleichsgröße aus dem Bereich der nicht-linearen Kenngrößen chaotischer Systeme soll hier der maximale Lyapunovexponent dienen, der leicht aus Zeitreihen zu extrahieren ist und die mittlere Expansion als Charakterisierung der Sensitivität gegenüber den Anfangsbedingungen angibt. In Abb. 4.14 sind die mittleren logarithmierten Expansionen der Zeitreihen in einem fünfdimensionalen Einbettungsraum bei einer Nachbarschaftsgröße von $2,5 \times 10^{-3}$ bezogen auf die Gesamtausdehnung des Objektes im Einbettungsraum dargestellt. Bei dieser Nachbarschaftsgröße wurde bei den unverrauschten Daten für etwa die Hälfte der Punkte Nach-

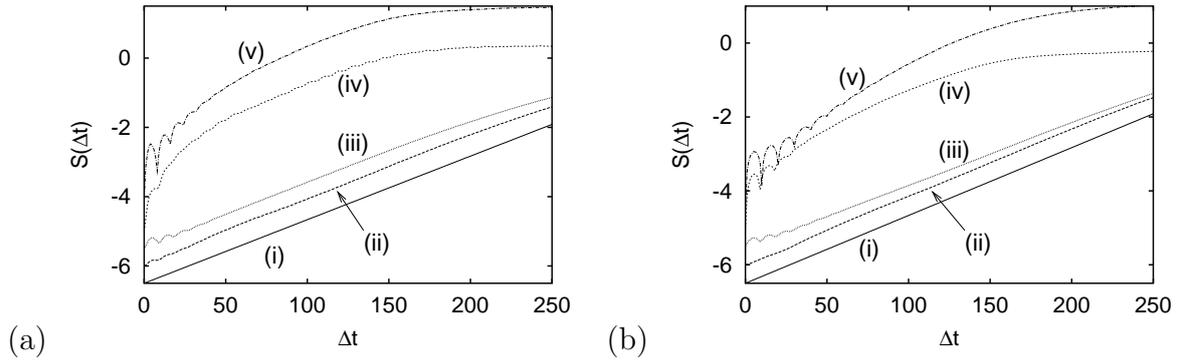


Abbildung 4.14: Mittlere logarithmierte Divergenz als Funktion der Zeit von im fünfdimensionalen Einbettungsraum benachbarten Trajektorien für (a) die indirekt verrauschte x_1 - und (b) die direkt verrauschte x_2 -Koordinate des Rössler-Systems. Die Kurven wurden der Übersichtlichkeit halber entlang der Ordinate auseinandergezogen. Dargestellt sind eine Gerade mit der Steigung des maximalen Lyapunovexponenten aus der numerischen Simulation, skaliert mit der Abtastrate ($0,148 \times 0,126 = 1,86 \times 10^{-2}$) (i), die mittleren Expansionen für die deterministischen (ii), die rekonstruierten (iii), die verrauschten (iv) und die mit dem lokal projektiven Verfahren rauschbereinigten (v) Zeitreihen.

barn in dieser Umgebung gefunden, welche somit für die Bestimmung der Expansion berücksichtigt werden konnten. Während für die verrauschten Zeitreihen und die mit dem lokal projektiven Verfahren rauschbereinigten Zeitreihen kein linearer Skalierungsbereich in dieser Auftragung zu beobachten ist, zeigen die mittleren Expansionen sowohl für die deterministischen, als auch für die rekonstruierten Zeitreihen einen solchen linearen Skalierungsbereich. Die Kurven für die mittleren Expansionen für die verrauschten Zeitreihen und die mit dem lokal projektiven Verfahren rauschbereinigten Zeitreihen weisen eher auf eine Abhängigkeit der Form $S(\Delta t) \propto \sqrt{\Delta t}$ hin, die charakteristisch für stochastische Dynamiken sind.

Wenn man an diese mittleren logarithmierten Expansionen in einem linearen Skalierungsbereich eine Gerade der Form $S(\Delta t) = a + \lambda_{max} \times \Delta t/h$ (a ist der y -Achsenabschnitt und h ist die inverse Abtastrate) angepaßt wird, kann aus den Graphen der maximale Lyapunovexponent λ_{max} bestimmt werden. Für die deterministischen Zeitreihen der x_1 - bzw. x_2 -Koordinate kann der numerisch bestimmte maximale Lyapunovexponent $\lambda_{max} = 0,148$ in einem Anpassungsbereich von $50 < \Delta t < 150$ mit $0,145$ bzw. $0,146$ sehr gut reproduziert werden. Das Gleiche gilt für die rekonstruierte Zeitreihe der x_1 -Koordinate, hier ergibt dabei ein Wert von $0,145$. Bei der direkt verrauschten x_2 -Koordinate zeigt der Wert mit $0,134$ eine Unterschätzung des richtigen Wertes.

4.5 Anwendung auf experimentelle Daten vom Laser

Nachdem der Algorithmus zur Reduktion von dynamischem Rauschen an einem numerischen Modellsystem getestet und quantitativ bewertet worden ist, soll er in diesem Abschnitt auf Zeitreihen der infraroten Intensitäten des frequenzverdoppelten Nd:YAG-Lasers angewendet werden.

4.5.1 Das Bifurkationsdiagramm für den Laser

Als Beispiel für die Anwendung der Methode auf experimentelle Daten soll hier ein Bifurkationsdiagramm des Lasers dienen. Dabei wird als Bifurkationsparameter die Pumpleistung über den Laserdiodenstrom in kleinen Schritten erhöht. Die bei den einzelnen Pumpleistungen aufgenommenen Zeitreihen werden dann zur Charakterisierung der einzelnen Systemzustände verwendet. Dazu wurde die Pumplaserdiode mit Hilfe eines in den Strahlengang gestellten Neutralsichtfilters der Dichte eins um einen Faktor 10 abgeschwächt, um eine flachere Strom-Leistungs-Charakteristik der Pumpquelle zu erreichen. Der Laserdiodenstrom wurde in einem Bereich von 370 bis 470mA in Schritten von 1mA variiert. Das entspricht in zur Laserschwelle P_{th} relativen Pumpraten ($P/P_{th} = \gamma/\alpha$) einem Bereich zwischen etwa 1,2 und 2,6. Für jeden dieser Werte wurde eine Zeitreihe einer der infraroten Polarisationsrichtungen mit 500000 Punkten bei einer Abtastrate von 625 kHz aufgenommen.

4.5.2 Bestimmung der Einbettungsparameter

Da auch hier, wie in der numerischen Simulation des Rössler-Systems, die Zeitreihen als zeitliche Abfolge skalarer Meßwerte vorlagen, war es notwendig, die Dynamik im Phasenraum durch die Zeitverzögerungseinbettung zu rekonstruieren. Die dabei notwendigen Parameter wurden analog zur numerischen Simulation bestimmt. Im Falle der Zeitverzögerung zwischen den einzelnen Vektoreinträgen geschah dies über den Abfall der Autokorrelation der Zeitreihen auf $1/e$. Dies war für 100 individuelle Zeitreihen einfach möglich. Für die ausreichende Einbettungsdimension mußte jedoch wegen der Rechenzeit für die einzelnen Zeitreihen ein pragmatischerer Weg beschritten werden, um am Ende eher mit einer größeren, als der minimal nötigen Dimension einzubetten. In Abb. 4.15 sind exemplarisch die Größen zur Bestimmung der hinreichenden Einbettungsdimension für die Zeitreihe bei 422mA ($P \approx 1,96 \cdot P_{th}$) dargestellt. In Abb. 4.15 (a) sind dabei die Autokorrelationen des bei verschiedenen Einbettungsdimensionen abgespaltenen Rauschens dargestellt. Für diese Zeitreihe zeigte sich dabei, daß ab einer Einbettungsdimension von fünf keine qualitativen Änderungen der Autokorrelationen mehr auftraten. Weiterhin fällt in der Graphik der Knick der Funktionen bei der Zeitverzögerung $\Delta t = 6$ und ganzzahligen Vielfachen davon auf. Dieser Knick ließ sich durch eine Variation der Zeitverzögerung bei der Einbettung verschieben. Dieses deutet auf einen Artefakt der Eigenschaften des Rauschens durch die Abspaltung auf der Basis einer Zeitverzögerungseinbettung hin. In Abb. 4.15 (b) ist die Verteilung des bei einer Einbettungsdimension von 5 abgespaltenen Rauschens in halblogarithmischer Auf-

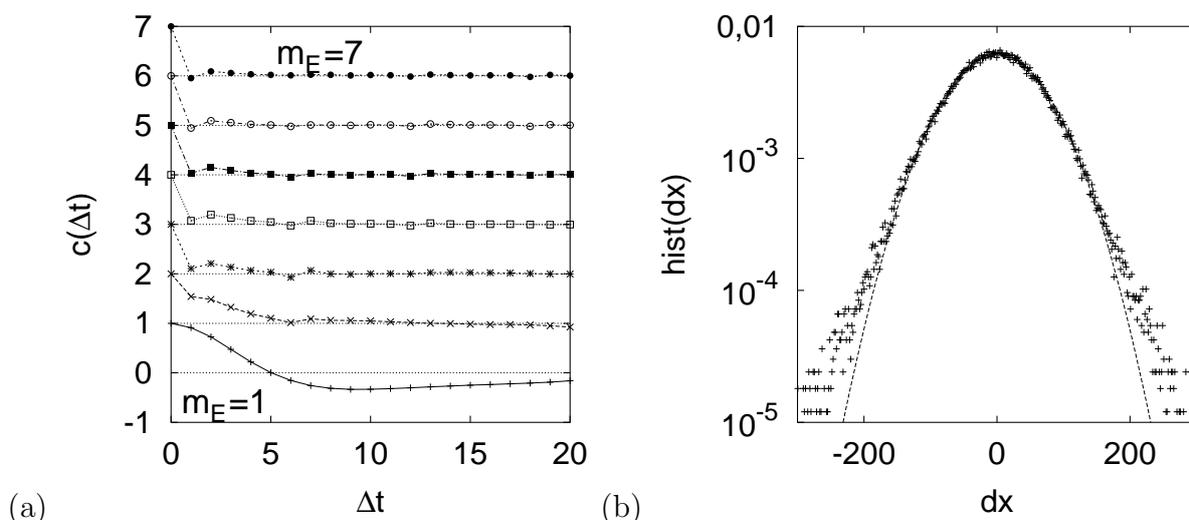


Abbildung 4.15: (a) Autokorrelation des bei verschiedenen Einbettungsdimensionen abgespaltenen Rauschens. Die Kurven wurden dabei der Übersichtlichkeit halber jeweils um 1 entlang der Ordinate verschoben. Sie gehören (von unten nach oben) zu den Einbettungsdimensionen 1 bis 7. (b) Verteilung des bei einer Einbettungsdimension von fünf abgespaltenen Rauschens mit angepasster Gauss-Funktion in halblogarithmischer Auftragung.

tragung dargestellt. Zusätzlich wurde an die Verteilung einer an die Daten angepassten Gauss-Kurve der Form $g(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\langle x \rangle)^2}{2\sigma^2}\right)$ dargestellt. Dabei ergab sich eine Halbwertsbreite der Verteilung von $\sigma = 64,5 \pm 0,15$.

Neben der Bestimmung der hinreichenden Einbettungsdimension können die Ergebnisse der Abspaltung des Rauschanteils auch als Plausibilitätskriterium für den Algorithmus dienen. Aber auch wenn die abgespaltenen Zeitreihen die charakteristischen Eigenschaften von Rauschen zeigen, ist es möglich, daß im verbliebenen Rest neben dem deterministischen Anteil noch stochastische Anteile verbleiben. Als charakteristische Eigenschaften von Rauschen sollen hier die δ -Korreliertheit und die Normalverteilung der abgespaltenen Zeitreihen dienen. Die Annahme der Normalverteilung der im Laser involvierten Rauschprozesse erscheint in erster Näherung sinnvoll, da eine solche Verteilung mit verschwindenden höheren Momenten eine Eigenschaft der einfachsten Form von Rauschen ist. Die Annahme der Normalverteilung wird hier auch sehr gut bestätigt.

4.5.3 Rekonstruktion der rauschbereinigten Dynamik

Mit den erhaltenen Parametern für die Zeitverzögerungseinbettung wurden nun für jeden einzelnen Datensatz mit Hilfe von `nstep` aus Hegger et al. [heg99] Zeitreihen der vermuteten deterministischen Dynamik mit jeweils 20000 Punkten generiert, für einige ausgewählte Zeitreihen auch längere zur späteren Charakterisierung der Dynamik mit

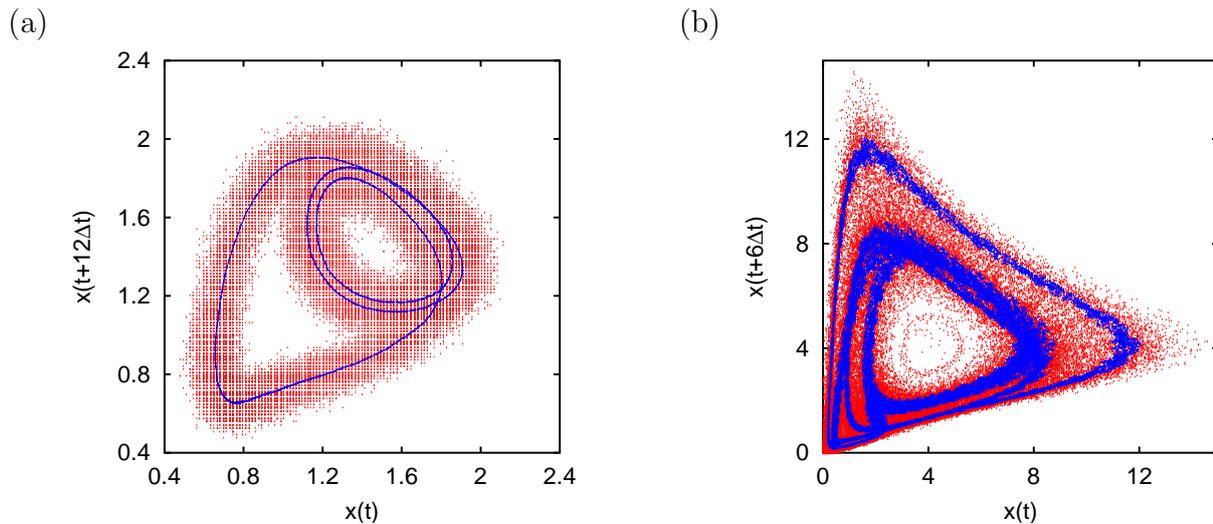


Abbildung 4.16: Projektion auf zwei Dimensionen des Attraktors von Zeitreihen des infraroten Lichts des Lasers bei 1064nm in einer Polarisationsrichtung. Die zur Pumpschwelle relative Pumprate lag dabei für (a) bei $P/P_{th} \approx 1,5$ und für (b) bei $P/P_{th} \approx 2$. Dabei sind in hellgrau die Zeitreihen der gemessenen Rohdaten, in dunkelgrau die der rekonstruierten Dynamik dargestellt.

Methoden der nichtlinearen Zeitreihenanalyse. In Abb. 4.16 sind zwei dieser Zeitreihen in einer Projektion der Zeitverzögerungseinbettung auf zwei Dimensionen zusammen mit den jeweils gemessenen Rohdaten dargestellt. Dabei handelt es sich bei Abb. 4.16 (a) offensichtlich um einen periodischen Systemzustand mit Periode 3, was aus den Rohdaten nicht ersichtlich ist. Der Systemzustand in Abb. 4.16 (b) scheint chaotisch zu sein, wobei, wie später gezeigt wird, der Nachweis von chaotischem Verhalten nicht eindeutig ist. Die rekonstruierte Dynamik scheint weniger komplex zu sein, als die gemessenen Rohdaten vermuten lassen, und zeigt die von chaotischen Systemen bekannten, bänderartigen Strukturen.

Um nun einen Überblick über die Entwicklung der Dynamik unter Variation der Pumpleistung als Bifurkationsparameter zu erhalten, wurde aus den gemessenen und rauschbereinigt generierten Daten ein Bifurkationsdiagramm erstellt. Dazu wurde für jeden Datensatz ein Poincaré-Schnitt erstellt, indem in einer fünfdimensionalen Einbettung die Durchstöße der Trajektorien durch eine vierdimensionale Hyperfläche durch den Mittelwert der skalaren Zeitreihen herausgeschrieben wurden. In Abb. 4.17 ist das Bifurkationsdiagramm sowohl für die Rohdaten, als auch für die rekonstruierten Daten dargestellt. Dabei können periodische Bereiche in den rekonstruierten Dynamiken identifiziert werden, die aus den Rohdaten so nicht ersichtlich sind. Zu höheren Pumpraten hin scheint die Komplexität der Dynamik in den gemessenen Daten deutlich anzusteigen, während hier die rekonstruierten Dynamiken eher die von numerischen Bifurkationsdiagrammen bekannte moderate Zunahme an Komplexität zeigen.

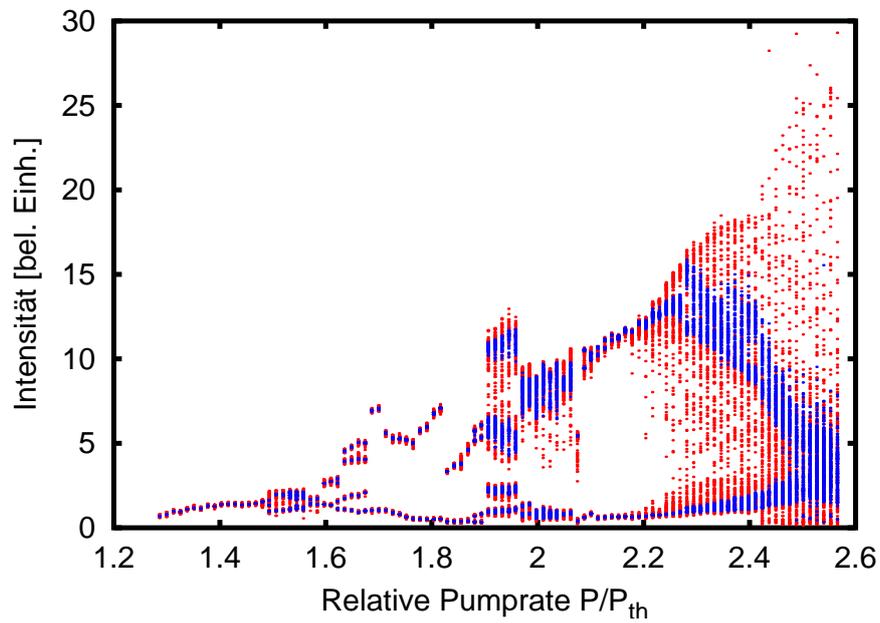


Abbildung 4.17: Bifurkationsdiagramm für den resonatorintern frequenzverdoppelten Nd:YAG-Laser mit der Pumprate (in Form des Pumplaserdiodenstromes) als Bifurkationsparameter. Hellgrau sind die Punkte für die gemessenen Rohdaten, dunkelgrau für die rauschbereinigt generierten Daten dargestellt.

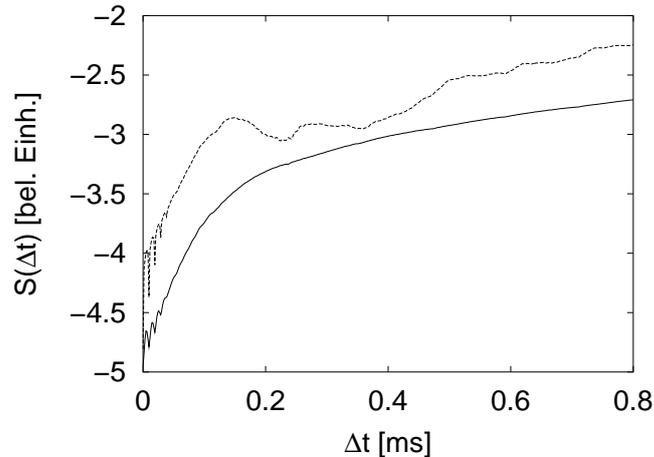


Abbildung 4.18: Mittlere logarithmierte Expansion der Rohdaten vom Laser (gestrichelt) und der rekonstruierten Daten (durchgezogen) bei einer relativen Pumprate von $P/P_{\text{th}} \approx 1,96$. Als Einbettungsdimension wurde hier 5 gewählt.

4.5.4 Charakterisierung der Dynamik

Zur Plausibilitätsprüfung der Ergebnisse des Algorithmus' konnten bis hier die charakteristischen Eigenschaften des abgespaltenen Rauschens und die qualitative Betrachtung der Daten in Form von Zeitverzögerungseinbettungen (Abb. 4.16) und Bifurkationsdiagramm (Abb. 4.17) herangezogen werden. Frequenzspektren werden hier nicht dargestellt, da keine Vergleichsspektren der ungestörten Dynamiken vorliegen. Für den maximalen Lyapunovexponenten und die Korrelationsdimension liegen natürlich auch keine Vergleichswerte einer ungestörten Dynamik vor. Hier kann eine Plausibilitätsprüfung nur über das Skalierungsverhalten der Größen erfolgen, die aus den Zeitreihen bestimmt werden können.

Hier sollen exemplarisch die Größen für die in Abb. 4.16 (b) gezeigten Daten des Lasers bei einer relativen Pumprate von 1,96 gezeigt werden, da hier die Vermutung auf einen chaotischen Zustand besteht. In Abb. 4.18 sind die mittleren logarithmierten Expansionen $S(\Delta t)$ für die gemessenen und die rauschbereinigt generierten Zeitreihen dargestellt. Die Kurve für die Rohdaten ist nicht monoton und zeigt in keinem Zeitfenster einen linearen Skalierungsbereich. Die Kurve für die rekonstruierten Daten ist erheblich glatter, dennoch zeigt sich hier kein deutlicher linearer Skalierungsbereich von $S(\Delta t)$, der ein Nachweis eines deterministischen, exponentiellen Auseinanderlaufens benachbarter Trajektorien als typisches Merkmal chaotischer Dynamiken wäre. Zur Interpretation der Kurve kann ein evtl. in den Daten verbliebenes Restrauschen dienen, das zunächst für ein starkes Auseinanderlaufen der Trajektorien sorgt. Oberhalb des Rauschniveaus ist dann nur noch ein schwächeres Auseinanderlaufen aufgrund des Determinismus' zu sehen. Andererseits ist die Signatur von anfänglich stärkerer Expansion mit Übergang zur schwächeren Expansion aufgrund von Ausrichtungseffekten bei dem verwendeten

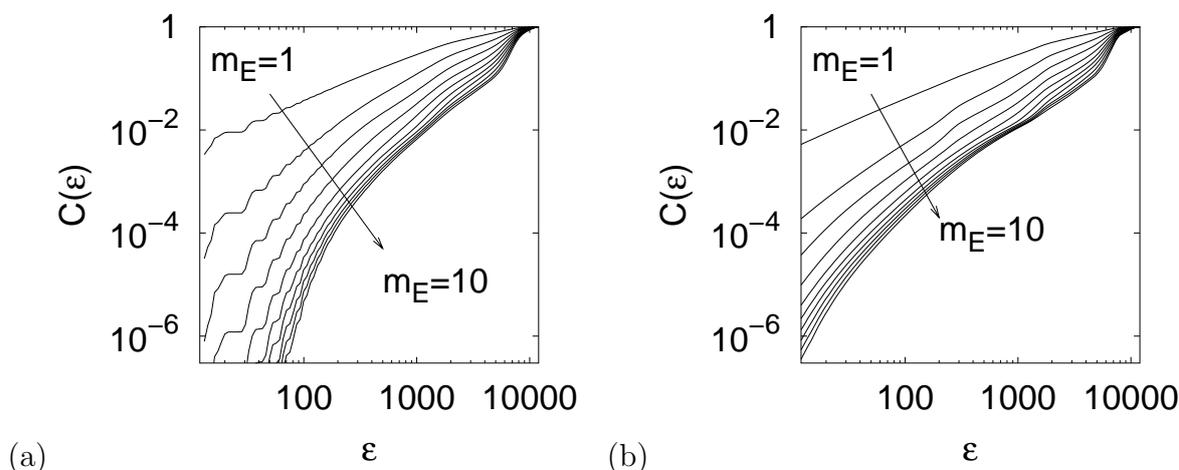


Abbildung 4.19: Korrelationsintegrale der Zeitreihen bei einer relativen Pumprate von $P/P_{\text{th}} \approx 1,96$. In (a) sind die Korrelationsintegrale für die Rohdaten bei den Einbettungsdimensionen von 1 bis 10 dargestellt, in (b) selbiges für die rekonstruierten Daten.

Algorithmus auch bei der Anwendung auf rein deterministische Daten möglich (siehe Letz [let97]).

Als weitere Größe soll auch hier wieder das zur Bestimmung der Korrelationsdimension dienende Korrelationsintegral verwendet werden. In Abb. 4.19 sind die Korrelationsintegrale (a) der Rohdaten und (b) der rekonstruierten Daten für die Einbettungsdimensionen 1 bis 10 in doppellogarithmischer Auftragung gezeigt. Für die Rohdaten zeigen die Kurven für digitalisierte Daten typische Stufen, die von der Diskretisierung herrühren. Das führt bei der Darstellung der logarithmierten Ableitung der Korrelations-Integrale in Abb. 4.20 (a) zu Spitzen, wo ein Übergang von einer Stufe zur nächsten stattfindet. Da dieses für kleine ε auftritt, wo die Steigungen der Kurven bei hinreichender Einbettungsdimension gegen die Korrelationsdimension konvergieren sollten, ist eine entsprechende Auswertung hier unmöglich. Die Korrelationsintegrale der rekonstruierten Daten in Abb. 4.19 (b) zeigen diese Stufen nicht, und mit gutem Willen kann zu höheren Einbettungsdimensionen ($m_E \geq 5$) hin eine Konvergenz der Kurven gesehen werden. Eine von der ε -Umgebung unabhängige Steigung ist aber in keinem Bereich zu finden, was auch sehr gut in der Darstellung der logarithmierten Ableitung der Korrelations-Integrale in Abb. 4.20 (b) zu sehen ist. Dennoch kann die tendenziell niedrigere Steigung der Korrelationsintegrale als Hinweis auf einen zugrundeliegenden niedrigdimensionalen Determinismus angesehen werden. Wie bei den Lyapunovexponenten wird auch hier die Signatur von einem reinen Determinismus durch ein in den rekonstruierten Daten verbliebenes Restrauschen gestört.

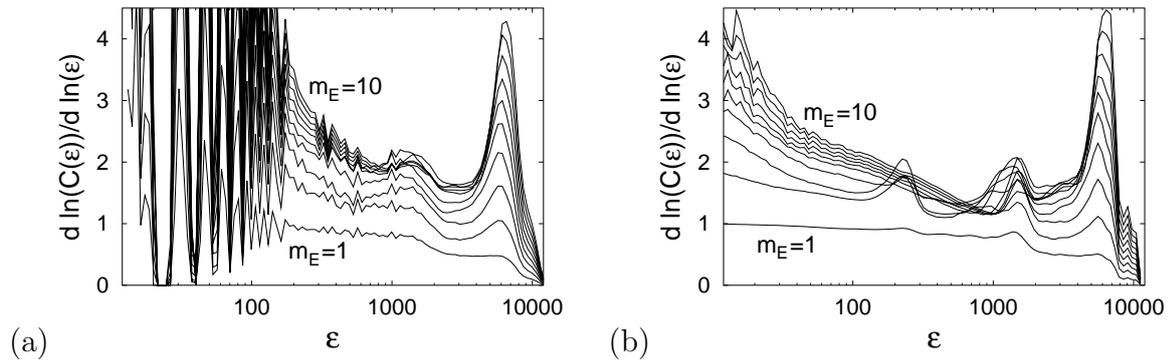


Abbildung 4.20: Logarithmische Ableitungen der Korrelationsintegrale der Zeitreihen bei einer relativen Pumprate von $P/P_{\text{th}} \approx 1,96$. In (a) sind die logarithmischen Ableitungen der Korrelationsintegrale für die Rohdaten bei den Einbettungsdimensionen von 1 bis 10 dargestellt, in (b) selbiges für die rekonstruierten Daten.

4.6 Zusammenfassung zur Rauschreduktion

In diesem Kapitel wurde das Problem von dynamischem Rauschen bzw. dessen Abspaltung von einer deterministischen Dynamik thematisiert.

In der theoretischen Beschreibung kann ein System mit deterministischen und stochastischen Anteilen durch Gleichungen vom *Langevintyp* modelliert werden. In solchen Modellen sagt der deterministische Anteil den Mittelwert einer Entwicklung voraus, der stochastische Anteil die Streuung um diesen Mittelwert. Mit Hilfe dieser Betrachtungsweise wurde in der Literatur ein Algorithmus entwickelt, mit dessen Hilfe aus Daten der stochastische und der deterministische Anteil extrahiert werden können. In der Literatur wurden solche Aufspaltungen der unterschiedlichen Anteile für eine Reihe von Systemen durchgeführt, wobei die Bewertung der Ergebnisse entweder über die Kenntnis der zugrundeliegenden Gleichungen oder durch eher qualitative Betrachtungen durchgeführt wurden. In dieser Arbeit wurden zwei von den bisherigen Arbeiten abweichende Betrachtungen durchgeführt: zum einen wurden, entsprechend der üblichen experimentellen Realität, skalare Zeitreihen eines chaotischen Systems in einer Rekonstruktion des Phasenraums betrachtet. Zum anderen wurden über Kenngrößen der nichtlinearen Dynamik (Lyapunovexponenten und Dimensionen) und über Frequenzspektren quantitative Aussagen über die Wirksamkeit der Methode gemacht.

Bei den numerischen Untersuchungen wurde das bekannte Rössler-System bei Standardparametern verwendet. Das Rauschen wurde dabei in die DGL einer Systemvariablen eingekoppelt. So war es möglich, die Auswirkungen von direktem und indirektem Einfluß des Rauschens auf zwei Variablen mit vergleichbarer Dynamik zu untersuchen. Zunächst wurde das Rauschen aus den Zeitreihen abgespalten und mit Hilfe von Autokorrelation und Verteilung charakterisiert. Die Autokorrelation des abgespaltenen Rauschens zeigte im Kontrast zu der des in der Simulation eingekoppelten Rauschens eine endliche Zerfallszeit. Das deutet darauf hin, daß es nicht vollständig gelingt, die de-

terministische Dynamik und das Rauschen zu trennen. Aus den Untersuchungen des Rauschens konnten aber die ausreichenden Einbettungsdimensionen zur Rekonstruktion des Phasenraums abgeleitet werden. In Einbettungsräumen mit dieser ermittelten Dimension wurde dann Zeitreihen der deterministische Dynamik rekonstruiert. Für beide Variablen zeigten die Frequenzspektren der rekonstruierten Dynamiken deutliche Verbesserungen gegenüber den verrauschten Daten. Auch Lyapunovexponenten und Dimensionen konnten in den rekonstruierten Daten bestimmt werden, wobei die Werte tendenziell etwas unterschätzt werden.

Nach der Anwendung der Methode auf numerisch erzeugte Daten wurde sie auf Zeitreihen der fluktuierenden Intensitäten des frequenzverdoppelten Nd:YAG-Lasers angewandt. Dazu wurden zunächst die Daten für ein Bifurkationsdiagramm gemessen: für 100 aufeinanderfolgende Werte der Pumprate wurde jeweils eine Zeitreihe der y -polarisierten infraroten Summenintensität aufgenommen. Für diese Daten wurde zunächst über die Eigenschaften des in verschiedenen Einbettungsdimensionen abgespaltenen Rauschens eine für die weiteren Untersuchungen hinreichende Einbettungsdimension bestimmt. Dann wurde für diese Zeitreihen der deterministische Anteil der Dynamik im Einbettungsraum rekonstruiert. Das Bifurkationsdiagramm der rekonstruierten Daten zeigt, im Gegensatz zu den gemessenen Rohdaten, ein aus der Kenntnis anderer chaotischer Systeme erwartetes Verhalten. Exemplarisch wurde auch versucht, den maximalen Lyapunovexponenten und die Korrelationsdimension für eine der Zeitreihen zu bestimmen. Hier war es aber nicht möglich, konkrete Werte abzulesen, da kein vernünftiges Skalierungsverhalten zu beobachten war. Die Ergebnisse können aber über ein möglicherweise verbliebenes Restrauschen erklärt werden. Zudem ist bei den Korrelationsintegralen der rekonstruierten Daten ein flacherer Anstieg gegenüber denen der Rohdaten zu beobachten. Diese Abflachung des Anstiegs kann die Annahme einer zugrundeliegenden niedrigdimensionalen deterministischen Dynamik verstärken.

5 Resümee und Ausblick

Resonatorintern frequenzverdoppelte Festkörperlaser sind interessante Systeme zum Studium nichtlinearer physikalischer Phänomene. Zudem sind sie wegen ihrer Eigenschaften (Laserlicht im sichtbaren Spektralbereich, geringe Größe, moderate Preise und Robustheit) auch interessant für technische Anwendungen, wodurch den Untersuchungen doch zumindest teilweise ein gewisser Anwendungsbezug gegeben wird.

Die Dynamik dieser Laser läßt sich anscheinend durch ein relativ einfaches Raten-gleichungsmodell sehr gut beschreiben, andererseits können im Experiment auch sehr komplexe dynamische Zustände beobachtet werden. Die Qualität des Ratengleichungs-modells zeigt sich in der guten Übereinstimmung der Vorhersagen des in Kapitel 3 aus ihnen abgeleiteten Regelschemas mit den experimentellen Ergebnissen. Selbst die ursprünglichen Abweichungen können durch Integration der realen experimentellen Gegebenheiten (begrenzte Bandbreite des Regelkreises) in die Modellierung erklärt werden. Das zunächst vorgeschlagene Regelschema hat aber aus technischer Sicht die Schwäche, daß die Systemzustände, in denen am meisten Licht in den sichtbaren Spektralbereich konvertiert wird, nicht stabilisiert werden können. Da leistungsstarke Festkörperlaser ohnehin häufig mit mehreren Pumplaserdioden betrieben werden, wurde in dieser Arbeit untersucht, ob es möglich ist, mit zwei Laserdioden gezielt unterschiedliche Systemvariablen anzusprechen. In den Vorexperimenten wurde dabei die lineare Polarisierung der einen Pumplaserdiode ausgenutzt. Die Drehung der Polarisierung des Pumplichts führte zu einer Umverteilung der Energie in den beiden Polarisationsrichtungen des Lasers. Mittlerweile steht im Experiment eine zweite, orthogonal zur ersten, linear polarisierte Laserdiode zur Verfügung. Als Ausblick sei hier gesagt, daß die ersten Experimente mit beiden Laserdioden den Erwartungen entsprechen. Da auch die Analysen des Modells hinsichtlich eines Eingriffs über zwei Laserdioden positive Ergebnisse liefern, ist mit den bisher gemachten Erfahrungen berechtigt zu hoffen, daß durch die Erweiterung der Regelung eine Verbesserung der Stabilisierung erreicht werden kann. Andererseits werden durch die Erweiterung des Experimentes sicher wieder neue Fragen auftauchen, wodurch der Laser mit Hinblick auf die Stabilisierung ein weitreichendes Betätigungsfeld bleibt.

Im zweiten Teil dieser thematisch grob in zwei Arbeitsbereiche aufgeteilten Arbeit ging es um die Rekonstruktion der deterministischen Dynamik aus dynamisch verrauschten Daten. Mit dynamischem Rauschen wird hier ein stochastischer Prozess bezeichnet, der mit der deterministischen Dynamik wechselwirkt. Der Begriff soll als Abgrenzung zu dem erst im Meßprozess zu den Daten hinzugefügten Meßrauschen dienen. Für die Reduktion von Meßrauschen in Daten stehen viele Werkzeuge zur Verfügung. Diese können jedoch auf dynamisch verrauschte Daten nur eingeschränkt angewendet werden. Mit dem in Kapitel 4 beschriebenen Verfahren wird auch nicht im eigentlichen Sinne das Rauschen

aus den Daten entfernt. Vielmehr wird die deterministische Dynamik rekonstruiert, indem auf den Daten im Phasen- oder Einbettungsraum durch Mittelwertbildungen eine neue Zeitreihe generiert wird. In einer zweiten Anwendung der zugrundeliegenden Ideen können aus den Daten über die Abweichungen von Mittelwerten Rauschzeitreihen abgespalten werden. Die Wirksamkeit der Methode wurde in der Anwendung auf ein dynamisch verrauschtes System in einer numerischen Simulation quantitativ bewertet. Aus den rekonstruierten Daten konnten von der ungestörten Dynamik bekannte dynamische Kenngrößen, wie Frequenzspektren, Lyapunovexponenten und Dimensionen, gut reproduziert werden. Für die experimentellen Daten des Lasers standen natürlich keine Vergleichsgrößen einer ungestörten Dynamik zur Verfügung. Als Kriterium diente hier, inwieweit es möglich ist, dynamische Kenngrößen zu bestimmen. Aus den rekonstruierten Daten des Lasers ließen sich leider keine Werte für diese Kenngrößen bestimmen. Dennoch sind die Ergebnisse in einem gewissen Rahmen interpretierbar. Insgesamt scheint in den rekonstruierten Daten noch ein Restrauschen vorhanden zu sein, und bei der Bestimmung der Dimensionalität des Systems gibt es Hinweise auf eine zugrundeliegende niedrigdimensionale Dynamik.

Die Anwendung der beschriebenen Rauschreduktionsmethode auf die experimentellen Daten zeigt, daß es noch viele Fragen hinsichtlich des Verständnisses des Algorithmus' gibt. In der numerischen Simulation wurde das Rauschen sehr einfach in die Dynamik eingekoppelt. Daher gilt es, schrittweise die Komplexität der Wechselwirkung der Dynamik mit dem Rauschen zu erhöhen und die Methode daran zu testen. Weiterhin ist die Rekonstruktion des Phasenraumes verrauschter Systeme durch Einbettung nicht trivial, da die Kriterien für die Wahl der Einbettungsparameter nur für deterministische Systeme gegeben sind. Für durch *Langevin*-Gleichungen beschriebene Dynamiken reicht im Phasenraum die Kenntnis des Systemzustands zu einem Zeitpunkt aus, um die Wahrscheinlichkeiten der Entwicklung in die Zukunft eindeutig zu bestimmen. Man benötigt hier kein Gedächtnis für vergangene Zustände. Durch die Zeitverzögerungseinbettung kann diese Eigenschaft aber verloren gehen, und man benötigt für die Beschreibung der zukünftigen Entwicklung ein unendliches Gedächtnis.

Insgesamt bestätigt sich auch bei dieser Arbeit also wieder die These, daß man mit wenigen Fragen anfängt, um am Ende mehr neue Fragen aufzuwerfen.

Literaturverzeichnis

- [aba96a] H.D.I. Abarbanel, Z. Gills, C. Liu, and R. Roy, *Nonlinear time-series analysis of chaotic laser dynamics*, Phys. Rev. A **53**, 440 (1996)
- [aba96b] H.D.I. Abarbanel, *Analysis of observed chaotic data* (Springer-Verlag, New York, 1996)
- [bae86] J. Baer, *Large amplitude fluctuations due to longitudinal mode coupling in diode-pumped intracavity-doubled Nd:YAG-lasers*, J. Opt. Soc. Am. B **3**, 1175 (1986)
- [ben80a] G. Benettin, L. Galgani, A. Giorgilli, and J.-M. Strelcyn, *Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems; A method for computing all of them. Part I: Theory*, Meccanica **15**, 9 (1980)
- [ben80b] G. Benettin, L. Galgani, A. Giorgilli, and J.-M. Strelcyn, *Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems; A method for computing all of them. Part II: Numerical application*, Meccanica **15**, 15 (1980)
- [bra91] C. Bracikowski and R. Roy, *Chaos in a multimode solid-state laser system*, Chaos **1**, 49 (1991)
- [bro89] I.N. Bronstejn, K.A. Semendjajew, *Taschenbuch der Mathematik* (Teubner-Verlag, Leipzig, 1989)
- [buc98] B.C. Buchler, E.H. Huntington, C.C. Harb, and T.C. Ralph, *Feedback control of laser intensity noise*, Phys. Rev. A **57**, 1286 (1998)
- [cas00a] CASIX, Inc., Produktdatenblatt für Nd:YAG-Laserkristalle (2000)
- [cas00b] CASIX, Inc., Produktdatenblatt für KTP-Verdopplerkristalle (2000)
- [die99] M. Diestelhorst, R. Hegger, L. Jaeger, H. Kantz, and R.-P. Kapsch, *Experimental verification of noise induced attractor deformation*, Phys. Rev. Lett. **82**, 2274 (1999)
- [eck85] J.P. Eckmann and D. Ruelle, *Ergodic theory of chaos and strange attractors*, Rev. Mod. Phys. **57**, 617 (1985)

- [fri00] R. Friedrich, S. Siegert, J. Peinke, St. Lück, M. Siefert, M. Lindemann, J. Raethjen, G. Deuschl, and G. Pfister, *Extracting model equations from experimental data*, Phys. Lett. A **271**, 217 (2000)
- [gra83a] P. Grassberger, *Generalized dimensions of strange attractors*, Phys. Lett. A **97**, 227 (1983)
- [gra83b] P. Grassberger, I. Procaccia, *Measuring the strangeness of strange attractors*, Physica D **9**, 189 (1983)
- [gra93] P. Grassberger, R. Hegger, H. Kantz, C. Schaffrath, and T. Schreiber, *On noise reduction methods for chaotic data*, Chaos **3**, 127 (1993), reprinted in [ott94]
- [gra00] J. Gradišek, S. Siegert, R. Friedrich, and I. Grabec, *Analysis of time series from stochastic processes*, Phys. Rev. E **62**, 3146 (2000)
- [gro93] H. Gross, J. Neukum, J. Heber, D. Mateika, and T. Xiao, *Crystal-field analysis of Eu^{3+} -doped yttrium aluminium garnet by site-selective polarized spectroscopy*, Phys. Rev. B **48**, 9264 (1993)
- [hak70] H. Haken, *Laser Theory* (Springer-Verlag, Berlin, 1970)
- [hau18] F. Hausdorff, *Dimension und äußeres Maß*, Math. Annalen **79**, 157 (1918)
- [heg99] R. Hegger, H. Kantz, and T. Schreiber, *Practical implementation of nonlinear time series methods: The TISEAN package*, Chaos **9**, 413 (1999)
- [hen83] H.G.E. Hentschel and I. Procaccia, *The infinite number of generalized dimensions of fractals and strange attractors*, Physica D **8**, 435 (1983)
- [jae96] L. Jaeger and H. Kantz, *Unbiased reconstruction of the dynamics underlying a noisy chaotic time series*, Chaos **6**, 440 (1996)
- [jae97a] L. Jaeger and H. Kantz, *Homoclinic tangencies and non-normal Jacobians - effects of noise in non-hyperbolic systems*, Physica D **105**, 79 (1997)
- [jae97b] L. Jaeger and H. Kantz, *Effective deterministic models for chaotic motion perturbed by interactive noise*, Phys. Rev. E **55**, 5234 (1997)
- [jam90a] G.E. James, E.M. Harell II, and R. Roy, *Intermittency and chaos in intracavity doubled lasers*, Phys. Rev. A **41**, 2778 (1990)
- [jam90b] G.E. James, E.M. Harell II, C. Bracikowski, K. Wiesenfeld, and R. Roy, *Elimination of chaos in an intracavity-doubled Nd:YAG-laser*, Opt. Lett. **15**, 1141 (1990)
- [kan94] H. Kantz, *A robust method to estimate the maximal Lyapunov exponent of a time series*, Phys. Lett. A **185**, 77 (1994)

-
- [kan97] H. Kantz and T. Schreiber, *Nonlinear Time Series Analysis* (Cambridge University Press, Cambridge, 1997)
- [kan01] H. Kantz and M. Ragwitz, *Markov models from data by simple nonlinear time series predictors in delay embedding spaces*, in preparation (2001)
- [kao79] J.L. Kaplan and J.A. Yorke, in *Functional Differential Equations and Approximations of Fixed Points*, eds. H.-O. Peitgen and H.-O. Walter, Lecture Notes in Math, 204 (Springer-Verlag, Berlin, 1979)
- [lae96] F.G. Laeri, N. Deutsch, G. Angelow, M. Müller, and H. Sakowski, *Spatio-temporal coupling of laser fluctuations — observations on a laser with internal frequency conversion*, Appl. Phys. B **63**, 339 (1996)
- [lan01a] F. Lange, *Stabilisierung der Ausgangsleistung eines resonatorintern frequenzverdoppelten Nd:YAG-Lasers* (Doktorarbeit, Universität Oldenburg, 2001)
- [lan01b] F. Lange, T. Letz, K. Pyragas, and A. Kittel, in preparation (2001)
- [let97] T. Letz, *Lyapunov-Exponenten und Expansionen auf endlichen Längenskalen*, (Diplomarbeit, Universität Oldenburg, 1997)
- [li01] D. Li, C. Zhu, V. Gaebler, B. Liu, H.J. Eichler, Z. Zhang, Y. Wang, Z. Li, and J. Qiu, *Theoretical and experimental studies of noise suppression for intracavity frequency doubled lasers with phase matching type I or II*, Opt. Commun. **189**, 357 (2001)
- [liu97] C. Liu, R. Roy, H.D.I. Abarbanel, Z. Gills, and K. Nunes, *Influence of noise on chaotic laser dynamics*, Phys. Rev. E **55**, 6483 (1997)
- [man00] P. Mandel, *Global rate equation description of a laser*, Eur. Phys. J. D **8**, 431 (2000)
- [mei98] R. Meitzner, *Charakterisierung eines resonatorintern frequenzverdoppelten Nd:YAG-Lasers mit Größen der nichtlinearen Dynamik* (Diplomarbeit, Universität Oldenburg, 1998)
- [mey95] Th. Meyer, *Das verallgemeinerte Rössler-System* (Diplomarbeit, Universität Bayreuth, 1995)
- [mul98] M.R. Muldoon, D.S. Broomhead, J.P. Huke, and R. Hegger, *Delay embedding in the presence of dynamical noise*, Dynamics and Stability of Systems **13**, 175 (1998)
- [oga90] K. Ogata, *Modern Control Engineering* (Prentice Hall, Englewood Cliffs (NJ), 1990)
- [ott90] E. Ott, C. Grebogi, and J.A. Yorke, *Controlling chaos*, Phys. Rev. Lett **64**, 1196 (1990), reprinted in [ott94]

- [ott93] E. Ott, *Chaos in Dynamical Systems* (Cambridge University Press, Cambridge, 1993)
- [ott94] E. Ott, T. Sauer, and J.A. Yorke, *Coping with Chaos* (Wiley, New York, 1994)
- [pei92] J. Peinke, J. Parisi, O.E. Rössler, and R. Stoop, *Encounter with Chaos* (Springer-Verlag, Berlin, 1992)
- [pet01] B. Peters, J. Hünkemeier, V.M. Baev, and Y.I. Khanin, *Low-frequency dynamics of a Nd-doped glass laser*, Phys. Rev. A **64**, 023816 (2001)
- [pre92] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, and B.P. Flannery, *Numerical Recipes in C*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1992)
- [pyr92] K. Pyragas, *Continuous control of chaos by self-controlling feedback*, Phys. Lett. A **170**, 421 (1992)
- [pyr00] K. Pyragas, F. Lange, T. Letz, J. Parisi, and A. Kittel, *Stabilization of an unstable steady state in intracavity frequency-doubled lasers*, Phys. Rev. E **61**, 3721 (2000)
- [pyr01] K. Pyragas, F. Lange, T. Letz, J. Parisi, and A. Kittel, *Dynamics and control of a multimode laser: Reduction of space-dependent rate equations to a low-dimensional system*, Phys. Rev. E **63**, 016204 (2001)
- [ric00] H. Richter and K.J. Reinschke, *Optimization of local control of chaos by an evolutionary algorithm*, Physica D **144**, 309 (2000)
- [roe76] O.E. Rössler, *An equation for continuous chaos*, Phys. Lett. A **57**, 397 (1976)
- [ros93] M.T. Rosenstein, J.J. Collins, and C.J. de Luca, *A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets*, Physica D **65**, 117 (1993)
- [roy93] R. Roy, C. Bracikowski, and G.E. James, *Dynamics of a multimode laser with nonlinear birefringent intracavity elements*, in *Recent Development in Quantum Optics*, ed. R. Inguva (Plenum Press, New York, 1993)
- [sal91] B.E.A. Saleh and M.C. Teich, *Fundamentals of Photonics* (Wiley, New York, 1991)
- [sau91] T. Sauer, J.A. Yorke, and M. Castagli, *Embedology*, J. Stat. Phys. **65**, 579 (1991)
- [sch00] A. Schenk zu Schweinsberg, *Stabilisierung eines resonatorintern frequenzverdoppelten Nd:YAG-Lasers* (Doktorarbeit, Universität Göttingen, 2000, verlegt bei Der Andere Verlag, Osnabrück, 2000)

- [sch01] A. Schenck zu Schweinsberg and U. Dressler, *Characterization and stabilization of the unstable fixed points of a frequency doubled Nd:YAG laser*, Phys. Rev. E **63**, 056210 (2001)
- [sch88] H.-G. Schuster, *Deterministic Chaos*, (VCH, New York, 1988)
- [sie00] M. Siefert, *Analyse nichtlinearer Diffusionsprozesse* (Diplomarbeit, Universität Oldenburg, 2000)
- [sie98] S. Siegert, R. Friedrich, and J. Peinke, *Analysis of data sets of stochastic systems*, Phys. Lett. A **243**, 275 (1998)
- [sie86] A.E. Siegman, *Lasers* (University Science Books, Sausalito (CA), 1986)
- [sve98] O. Svelto, *Principles of Lasers*, (Plenum Press, New York, 1998)
- [tan63] C.L. Tang, H. Statz, and G. deMars, *spectral output and spiking behavior of solid-state lasers*, J. Appl. Phys. **34**, 2289 (1963)
- [tak81] F. Takens, *Detecting Strange Attractors in Turbulence*, Lecture Notes in Math (Springer-Verlag, New York, 1981)

Danksagung

Nur auf ein Paar Schultern gestützt kann solch eine Arbeit natürlich nicht entstehen. Daher möchte ich mich hier bei allen Beteiligten im näheren und fernerem Umfeld der Physik bedanken.

Zunächst geht mein Dank an Jürgen Parisi für Möglichkeit, in seiner Arbeitsgruppe für Energie- und Halbleiterforschung diese Arbeit anfertigen zu können.

Bei Holger Kantz vom Max-Planck-Institut für Physik Komplexer Systeme möchte ich mich für viele fruchtbare Diskussionen über meinen Arbeitsbereich, aber auch für die Finanzierung meiner Arbeit bedanken. Leider hat es etwas länger gedauert . . .

Am meisten mit meiner Arbeit hatte Achim Kittel zu tun. Bei ihm möchte ich mich für Rat und Tat bei allen (!!!) Fragen bedanken. Ich hoffe, daß ich ein wenig zurückgeben konnte . . .

Bei Kestutis Pyragas aus Vilnius möchte ich mich für die lehrreiche Zeit seiner Aufenthalte in Oldenburg bedanken. Ohne das von ihm geschaffene Grundgerüst hätte ich die Gleichungen so nicht behandeln können.

Für den Algorithmus im Rauschkapitel und die sich daraus ergebenden Diskussionen möchte ich Malte Siefert und Joachim Peinke aus der AG Hydrodynamik danken.

Der Autoren des Softwarepaketes TISEAN, Rainer Hegger, Thomas Schreiber und Holger Kantz möchte ich für die Programme und die die prompte Umsetzung von Anregungen und Wünschen danken.

Ein großer Dank geht auch an die gesamte EHF für das fast familiäre Arbeitsumfeld über nunmehr fast vier Jahre. Besonders erwähnen möchte ich hier von der alten Crew Matthias Goldbach, Wolfgang Müller-Hirsch und Falk Lange. Dafür daß es reibungslos weiterging haben u.a. Carsten Deibel, Marco Munzel, Holger Koch und Michael Pientka gesorgt.

Auch in der neuen Crew, aber als mein Nachfolger doch etwas intensiver in die Entstehung dieser Arbeit involviert, ist Lars Ehlkes. Bei ihm möchte ich mich für die zum Teil lustigen letzten Monate meiner und ersten Monate seiner Zeit in der Arbeitsgruppe bedanken. Aber, Lars, man muß nicht immer alles technisch anwenden können, an dem man im Labor oder am Rechner arbeitet ;-)

Für den Blick jenseits von Chaos und Halbleitern möchte ich mich bei den Histos Jochen Hennig und Andreas Makus bedanken.

Auch ein Thema außerhalb der der Physik, aber in dieser Gemeinschaft durch die gemeinsame Zeit am MPI in Dresden doch durch wieder von ihr herrührend, wurde von der Tipprunde zu jedem Spieltag der Bundesliga in den Fokus gerückt.

Für die vielen Jahre, die wir nun trotz inzwischen teilweise großer Entfernungen seit Braunschweiger Zeiten zusammenhalten, möchte ich mich bei Tobias Sommer in Ham-

burg, Karsten Mohapatra in Norrköping, Andreas Franz in Braunschweig und Thomas Löwe und Marcus Tägtmeyer in Oldenburg bedanken.

Meinen Eltern danke ich für die Möglichkeit, trotz drei Geschwistern doch so ein langes Studium mit dem jetzt abgeschlossenen Zusatz durchführen zu können.

Lebenslauf

Name:	Tobias Georg Letz
Geburtsdatum:	03.12.1968
Geburtsort:	Braunschweig
Familienstand:	ledig
1975–79	Grundschule Klint, Braunschweig
1979–81	Orientierungsstufe Friesenstraße, Braunschweig
1981–88	Wilhelm-Gymnasium, Braunschweig Abschluß: Allgemeine Hochschulreife, Note 2,2
10/88–05/90	Zivildienst im Seniorenpflegeheim Nußbergstraße, Braunschweig
WS 90/91 – WS 97/98	Studium der Physik an der Carl von Ossietzky- Universität Oldenburg
11/96–11/97	Externe Diplomarbeit am Max-Planck-Institut für Phy- sik Komplexer Systeme über „Lyapunov-Exponenten und Expansionen auf endlichen Längenskalen“ Betreuer: PD. Dr. Holger Kantz 1. Gutachter: Prof. Dr. Jürgen Parisi 2. Gutachter: Prof. Dr. Volker Mellert
29.01.1998	Diplomhauptprüfung, Gesamtnote Diplom: gut
03/98–12/01	Externer Doktorand des Max-Planck-Institut für Phy- sik Komplexer Systeme an der Carl von Ossietzky- Universität Oldenburg Anfertigung der Dissertation zum Thema „Theoreti- sche Aspekte der Regelung eines frequenzverdoppelten Festkörperlasers und der Einfluß von Rauschen auf seine Dynamik“.
21.12.2001	Disputation, Gesamtnote: sehr gut

Erklärung gemäß §8(2) der Promotionsordnung

Hiermit erkläre ich, daß ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfaßt und nur die angegebenen Hilfsmittel benutzt habe.

Oldenburg, den 26.11.2001

(Tobias Letz)