

### 3. Kapitel

## Messung, Analyse und Prognose von Veränderungen

*Claus Möbus und Willi Nagl*

### 1. Einleitung

Psychodiagnostik läßt sich nach Pawlik (1976) auf vier Dimensionen mit entsprechend unterschiedlichen Zielsetzungen betreiben: (1) Status- vs. Prozeßdiagnostik, (2) norm- vs. kriterienorientierte Diagnostik, (3) Testen vs. Inventarisieren und (4) Diagnostik als Messung vs. Diagnostik als Information für und über Behandlung. Setzt man sich die Prozeßdiagnostik und Behandlungsoptimierung zum Ziel, muß man, wenn man empirisch arbeitet, Veränderungsmessung betreiben. Inhaltliche Beispiele für Veränderungsmessung lassen sich für alle Bereiche der Psychologie, die an „Intervention“, „Entwicklung“, „Dynamik“ etc. interessiert sind, finden (so z.B. in einigen neueren deutschsprachigen Arbeiten: Renn, 1973; Straka, 1974; Krapp & Schiefele, 1976; Kleiter & Petermann, 1977; Möbus & Wallasch, 1977; Rudinger & Lantermann, 1978; Baltes, 1979; Baltes & Nesselrode, 1979; Kormann, 1979; Metz-Göckel, 1979; Petermann & Hehl, 1979; Kleiter, 1979; Revenstorf, 1979; Kormann, 1981; Möbus, 1983). Hierunter fällt u.a. die Erfassung von „Lernprozessen“, „Lernwegen“, „Entwicklungsverläufen“, „Wachstumskurven“, „Einstellungsänderungen“ und „Therapieeffekten“.

Entsprechend der Vielfalt der inhaltlichen Fragestellungen hat sich eine kaum zu überschauende Menge verschiedener Methoden und Schulen herausgebildet, die z.T. miteinander im Wettstreit stehen (s. a. Rost & Spada, 1978). Dabei hat es sich für die Analyse von *Prozessen* als hemmend (wenn nicht gar irreführend) erwiesen, Methoden aus dem statischen Querschnitts- in den dynamischen Zeitbereich zu übertragen. Wenig brauchbar im Zusammenhang mit Veränderungsmessung scheinen uns Verfahren zu sein, die einerseits keine *Hypothesenprüfung* zulassen, ob eine Veränderung bei einem Individuum oder einer Gruppe von Individuen signifikant war und die andererseits keine *falsifizierbaren Prognosen für konkrete (apriori bestimmbare) Zeitpunkte* zulassen. Roskam vertritt eine ähnlich vorsichtige Haltung, wenn er schreibt:

„... Perhaps the time is simply not yet ripe for doing thorough research on change processes in behaviour, and should we spend our time more wisely in doing the lot of ground work which has to be done first so that we are better equipped before starting on so much complicated problems. This is not meant to discourage research on change. *Rather it is an advice to go about vey carefully and vey cautiously.*“ (Roskam, 1976, s. 132f.)

Akzeptiert man die beiden oben genannten Kriterien als Gütemaßstäbe für Methoden zur Analyse von Veränderungen, kann man in dem Klassiker von Harris (1963) aus heutiger Sicht weiterführende und weniger nützliche Artikel separieren. Von den 12 Beiträgen über:

(1) „Some persisting Dilemmas in the Measurement of Change“ (Bereiter), (2) „Elementary Models for Measuring Change“ (Lord), (3) „The Reliability of Changes Measured by Mental Test Scores“ (Webster & Bereiter), (4) „Univariate Analysis of Variance Procedures in the Measurement of Change“ (Gaito & Wiley), (5) „Multivariate Analysis of Variance of Repeated Measurements“ (Bock), (6) „Multivariate Models for Evaluating Change“ (Horst), (7) „Implications of Factor Analysis of Three-Way Matrices for Measurement of Change“ (Tucker), (8) „Canonical Factor Models for the Description of Change,“ (Harris), (9) „Image Analysis“ (Kaiser), (10) „The Structuring of Change by P-Technique and Incremental R-Technique“ (Cattell), (11) „Statistical Models for the Study of Change in the Single Case“ (Holtzman) und (12) „From Description to Experimentation: Interpreting Trends as Quasi-Experiments“ (Campbell)

erscheinen uns die Ansätze von Bock, Holtzman und Campbell auch heute wertvoll, während die Artikel von Bereiter und Webster & Bereiter relativ viel Verwirrung über den Nutzen von Veränderungsmaßen gebracht haben. Während Bereiter Mittelwertsdifferenzen nicht in Frage stellte, formulierte er eine Reihe von Dilemmata, die sich einstellen sollten, wenn man *individuelle* Veränderungen durch die Differenz zeitlich verschobener Messungen operationalisiert: „over - correction - under - correction dilemma“, „unreliability - invalidity - dilemma“ und das „physicalism-subjectivism dilemma“. Das erste Dilemma ergibt sich nach Bereiter aus der Erkenntnis „... that there is a spurious negative element in the correlation of an initial score with gains on the same test . . .“ (Bereiter, 1963, S. 3). Das zweite Dilemma entsteht nach Bereiter „... that, other things being equal, the higher the correlation between pretest and post-test, the lower the reliability of the difference scores. Accounting for the other horn of the dilemma is the even more elementary fact that the lower the correlation between two tests, the less they can be said to measure the same thing“ (Bereiter, 1963, S. 5). Das dritte Dilemma bestand in der Frage, ob die gleiche Veränderung in der manifesten, beobachtbaren Variablen einhergeht mit gleichen Veränderungen auf der latenten Variablen, wenn die Ausgangswerte unterschiedlich hoch sind. Diese Dilemmata zogen sich wie ein roter Faden durch die Literatur und bestimmten die Diskussion für eine Reihe von Jahren.

Wir sind der Ansicht, daß es sich um Scheinprobleme handelt, wenn man einmal das Reliabilitätskonzept der klassischen Testtheorie nicht kritiklos akzeptiert und zum anderen Veränderungsanalyse unter einer systemtheoretischen Perspektive betreibt. Eine systemtheoretische Sicht der Veränderungsanalyse bedeutet: (1) der Veränderungsprozeß einer Person oder (aggregiert) einer Gruppe läßt sich kontinuierlich in der Zeit multivariat (probabilistisch oder nichtprobabilistisch) beschreiben. Die endogene Entwicklung wird überlagert durch Effekte exogener Variabler (äußere Rahmenbedingungen), die nur unvollständig kontrolliert werden können. Dieser stochastische zeitkontinuierliche Prozeß kann nur zu bestimmten diskreten Zeitpunkten gemessen werden (Sampling). Der Meßprozeß wird durch Meßfehler gestört. Selbst wenn die Prozeßparameter für 2 Personen gleich sind, können die Entwicklungsverläufe aufgrund unterschiedlicher Ausgangsbedingungen (Anfangszustände) und/oder unterschiedlicher exogener Rahmenbedingungen für die 2 Personen differieren (nähere Erläuterung im Abschnitt über zeitkontinuierliche Modelle). Eine Prognose (z.B. im Sinne von Erwartungswerten) ist nur möglich, wenn (a) der Anfangszustand (Pretest) gemessen oder geschätzt (= „wahrer Anfangszustand“) wird, (b) wenn die Gesetzhypothese (niedergelegt in den Parametern des Systems) sich nicht unvorhergesehen verändert und (c) wenn die exogenen Einflüsse (Rahmenbedingungen) entweder kontrolliert oder prognostiziert werden können oder konstant bleiben. Prognosen beziehen sich immer nur auf bestimmte konkrete Zeitpunkte. Ebenso sind Hypothesen auch nur an bestimmte Zeitpunkte geknüpft.

In dieser Sicht ist es völlig natürlich, interindividuell unterschiedliche Entwicklungskurven zu erwarten, wenn nur die äußeren Einflüsse und/oder die Ausgangsbedingungen für Individuen über die Zeit verschieden sind. Es ist nicht notwendig (wie Bereiter) zu glauben, niedrige Pre-Posttest-Korrelationen müßten unbedingt auf eine veränderte Bedeutung der Meßinstrumente verweisen. Sie kann vielmehr ein Hinweis auf zwischenzeitlich wirkende äußere Einflüsse sein. Es ist auch nicht sinnvoll, bei dem Studium von Methoden der Veränderungsanalyse mit Korrelationen zu argumentieren, wie es z.B. in der Reliabilitätsdiskussion getan wird, denn bei Korrelationen gehen Mittelwerte und Streuungen verloren. Was bei heterogenen Variablen mit unterschiedlichen Maßstäben in Querschnittanalysen sinnvoll sein kann, ist bei Veränderungsmessungen verfehlt, es sei denn, wir trauten selbst Mittelwerts- und Streuungsveränderungen keinen Informationsgehalt mehr zu. Dann wäre Veränderungs-messung aber weitgehend sinnlos. Wichtig sind sauber operationalisierte Meßvariable, deren praktische Bedeutsamkeit auf der Hand liegt und nicht im Nachhinein durch interpretative Vorgänge erst erschlossen werden muß. Eine ähnliche Ansicht vertritt z.B. Roskam und Rost & Spada, wenn sie schreiben:

„Researchers often believe that it is wrong to analyse change or gain scores: difference scores are unreliable, and if they are very reliable, how do we know whether it is the

persons or the tests who have changed (cf. Bereiter, 1963)? If a pretest and a posttest correlate as high as their reliability, the reliability of the difference scores is zero, but if they correlate appreciably less than their reliability, one is led to believe that they measure different constructs, and the difference scores are hard to interpret. Bereiter quotes Jordan in saying: „it is senseless to consider a test a valid measure of an attribute that is not clearly conceptualized independently of any instruments supposed to measure it“. So without conceptualizing first what we intend to measure, it would be meaningless to talk about change. It is my firm belief that it is methodological nonsense. Test scores - or any other kind of controlled observation - are factual data; if a persons reactions on a second occasion are different from those on a first occasion, it is our task to find a (theoretical) explanation for that fact.“ (Roskam, 1979, S. 2).

„Findet jedoch zwischen beiden Zeitpunkten, zu denen die Tests vorgegeben wurden, personenspezifisches Lernen statt, d.h. ändern sich die wahren Werte der Versuchspersonen zwischen den Testzeitpunkten, dann ist es sinnlos, anhand der Korrelation der Tests etwas über ihre Äquivalenz auszusagen. Beide Tests sollen ja in diesem Fall gar keine äquivalenten Messungen liefern, sondern einmal die Fähigkeit zum Zeitpunkt  $t_1$ , das andere Mal die zum Zeitpunkt  $t_2$  messen.“ (Rost & Spada, 1978, S. 90f.)

Wir wollen hier davon ausgehen, daß die Variablen, auf denen Veränderungen gemessen werden, eine Bedeutung haben, die nicht erst nach den Messungen durch korrelative Studien interpretativ „festgelegt“ werden muß.

Auch das Problem nichtsignifikanter Interventionen erfährt unter systemtheoretischer Beleuchtung eine gewisse Aufhellung. So ist man, wenn enge Rahmenbedingungen hinsichtlich der zur Verfügung stehenden Ressourcen vorgegeben sind, gezwungen, Entscheidungs- bzw. Behandlungsoptimierung zu betreiben. In den meisten Fällen läßt sich die zeitliche Dauer der Intervention (Therapie, Training, Instruktion etc.) und der den Prozeßverlauf abbildenden Messungen aus verschiedenen Gründen (Ermüdung der Pbn, Kosten der Datenerhebung etc.) nicht beliebig verlängern. Daher stellt sich oft die Aufgabe, bei fester Test- und Interventionsdauer die „Mischung“ der Trainingsteile optimal zu verändern. Läßt sich der Interventionseffekt nicht statistisch sichern, wird damit meist vorschnell auf die mangelnde *Güte* der Intervention geschlossen. Eine genaue Analyse zeigt aber einen weitaus komplizierteren Sachverhalt. Es gibt mindestens drei Erklärungsmöglichkeiten für die Nichtsignifikanz: (a) mangelnde Güte des Interventionsprogramms, (b) zu kurze zeitliche „*Dosierung*“ eines an sich effektiven Programms, (c) Flüchtigkeit des Effekts: nach dem Absetzen der Intervention verschwindet der Effekt (liegen die Meßzeitpunkte weit auseinander, wird oft gar kein Effekt wahrgenommen). Die letzten beiden Erklärungen sowie die Planung der Optimierung können mit klassischen statistischen Verfahren (Varianz-, Faktorenanalyse etc.) nur unvollständig geleistet werden. Eine Untersuchung zum Dosierungsproblem eines Trainings und der Versuch einer Kreuzvalidierung an einer Längsschnittstudie findet sich bei Möbus (1981). Verwendet wurden dabei stochastische zeitdiskrete Differenzgleichungssysteme, deren Parameter mit LISREL geschätzt wurden (s.a. 7.3).

Unter dem oben angerissenen Blickwinkel haben wir eine Auswahl der zu diskutierenden Methoden getroffen. Weitgehend unberücksichtigt bleiben zwei wichtige Methodenklassen: (a) die verschiedenen Versionen des Rasch-Modells (s.a. Fischer, 1976, 1977, 1978) und (b) dynamische probabilistische Systeme (s. aber Levin & Burke, 1972; Bartholomew, 1973; Wiggins, 1973; Tack, 1976; Singer & Spilerman, 1976a,b; Lee, Judge & Zellner, 1977; Singer & Spilerman, 1979a,b; Tuma & Hannan, 1979; Wasserman, 1980; Tuma, 1980; Singer, 1981).

Die ausführliche Behandlung dynamischer probabilistischer Systeme würde einerseits den Umfang des Beitrages sprengen, andererseits das Problem aufwerfen, fast keine empirischen Referenzuntersuchungen nennen zu können. Das wird gerade an dem Artikel von Singer & Spilerman (1979a) in dem „neuen Klassiker“ der Veränderungsmessung von Nesselroade & Baltes (1979) deutlich.

Alle hier angeführten Beiträge: (a) Zeitreihenanalyse, (b) Zeitreihenexperimente, (c) Analyse von Differenzenwerten, (d) Strukturmodelle, (e) Varianzanalyse, (f) Markoffketten, (g) zeitkontinuierliche Modelle (Differentialgleichungssysteme, Markoffprozesse) werden nach mehreren Gesichtspunkten klassifiziert. Folgende Gesichtspunkte spielen dabei eine Rolle: (a) die Zeit wird diskret oder kontinuierlich angesehen, (b) uni- oder multivariate Methoden ( $M = 1$ ,  $M > 1$ ), (c)  $N = 1$  oder  $N > 1$  - Studien ( $N =$  Zahl der Meßwertträger oder Pbn), (d) Test-Retest-Untersuchungen ( $T = 2$ ), Paneluntersuchungen ( $2 \leq T \leq 10$ ), Zeitreihenanalysen ( $50 \leq T$ ) (e) Experimente, Quasiexperimente, Feldstudien, (f) Meßniveau (dichotom, ordinal, Intervall).

Eine grobe Gliederung findet sich in Figur 1.1 (s. S. 244).

## 2. Univariate Zeitreihenanalyse

$N = 1$ ,  $M = 1$ ,  $T > 50$

Univariate Zeitreihenanalysen gehören noch nicht zum Standardinventar psychologischer Forschung, obwohl nur mit ihrer Hilfe bestimmte Fragestellungen befriedigend beantwortet werden können. So ist z.B. die Periodik von Stimmungszuständen von Wichtigkeit bei der Erforschung ihrer externen od. internen Auslösung. Eine ausführliche Diskussion der Bedeutung der Zeitreihenanalyse in Psychologie und Psychiatrie findet sich z.B. bei Chassan (1979<sup>2</sup>) und Gottman & Leiblum (1974).

Zeitreihenanalysemethoden unterscheiden sich hauptsächlich von anderen statistischen Methoden dadurch, daß sie die zeitliche Abhängigkeit von Beobachtungen berücksichtigen. Zeitlich frühere Beobachtungen dürfen im Modell

<i>zeitdiskret</i>		<i>zeitkontinuierlich</i>			
$N = 1$ $T \gg 2$	$N > 1$ $T = 2$	$N > 1$ $T \geq 2$	$T \gg 2$	$N = 1$ $T \gg 2$	$N > 1$ $T \geq 2$
Zeitreihenanalyse (2.)	Differenzenwerte (4.) Varianzanalyse (Wachstumskurvenanalyse) (5; 7.2) Strukturmodelle (7) Pre/Post-testanalyse (7.1) Markoffketten (8)	Time Series of Cross-Sections (6) Zeitreihenexperimente mit $G = 1$ (3.2)		„Zeitreihen“-analyse (9.1)	Differentialgleichungssysteme (9) Panelmodelle (9.2) Markoffprozesse (8.9)

Fig. 1.1 : Gliederung der behandelten Themen im Bereich „Veränderungsmessung, -analyse und -prognose“

spätere Beobachtungen beeinflussen. Im Gegensatz zur Ökonomie konzentriert sich bisher in der Psychologie das Interesse an der Zeitreihenanalyse nicht auf Prognosen sondern mehr auf Interventionsevaluation und Analyse von Kovariationszusammenhängen. Bei der Interventionsevaluation wird untersucht, ob Eingriffe (Therapie, Arbeitsbeschaffung, Ortsveränderungen, Gesetze etc.) einen Einfluß auf abhängige Variable haben, die an dem Pbn über längere Zeit erhoben wurden (Gottman & Glass, 1978; Revenstorf, 1979; Revensdorf & Keeser, 1979; McCain & Cleary, 1979; Meier, 1981). Als Effekte können auftreten: Niveauänderungen der Zeitreihe, Trendumkehr bei Variablen der subjektiven Befindlichkeit u.a.m. Liegt das Interesse der Untersuchenden dagegen mehr auf Kovariationszusammenhängen, stellt sich die Frage, ob bestimmte unabhängige Variable als zeitlich führende Indikatoren für abhängige Variable angesehen werden können („lead and lag structure“). So können z.B. der Einfluß des Wetters oder der Jahreszeiten auf die Stimmung des Pbn (Zimmermann, 1979), die Abhängigkeit der Suizidneigung von der Arbeitslosigkeit (Vigderhous, 1978) oder so profane Fragen wie die lead/lag-Beziehung von Werbeintensität und Absatz (Helmer & Johansson, 1977) von Interesse sein.

Für beide Fragestellungen werden entweder *Interventionsmodelle* (dynamische Versionen der Varianzanalyse) oder *Transfermodelle* (dynamische Versionen der Regression) formuliert. Beide Modellklassen stützen sich dabei mathematisch auf die univariate Zeitreihenanalyse. Hierbei beschränken wir uns auf die ARIMA-Modelle von Box & Jenkins (1976<sup>3</sup>), die sich sowohl in theoretischer wie auch praktischer Hinsicht als sehr brauchbar (wenn auch etwas kompliziert in der Handhabung) herausgestellt haben.

Die ARIMA-Modelle setzen sich aus drei Prozeßkomponenten zusammen: (a) dem autoregressiven, (b) dem integrierenden und (c) dem moving-average Prozeß. Zum besseren Verständnis ihres Zusammenwirkens dient es, wenn man sich das Entstehen einer Zeitreihe nach dem ARIMA-Modell vergegenwärtigt. Man nimmt an, daß es eine Unzahl äußerer Einflüsse gibt, deren Resultante der „random shock“  $a_t$  ist. Diese äußeren Einflüsse wirken nun in bestimmter Art und Weise (auf eine Person) nach. Die Art des Nachwirkens wird modellgemäß durch die drei informationsverarbeitenden Prozesse (autoregressiver, integrierender und moving-average) abgebildet. Das Ergebnis dieses Signalverarbeitungsprozesses ist dann die Zeitreihe  $Y_t - L$  (mit einer Konstanten  $L$ , von der wir bis auf weiteres annehmen, daß sie gleich Null ist; diese Darstellungsform wird von Glass, Willson & Gottman (1975) gewählt; andere Darstellungsformen finden sich bei Möbus, Görlicke & Kröh, 1982) (Fig. 2.1a). Bei empirischen Untersuchungen kennt man dagegen die Entstehungsgeschichte der Zeitreihe und damit die Parameter der drei Prozesse nicht. Man versucht daher die Entstehungsgeschichte der Zeitreihe gewissermaßen „auf den Kopf zu stellen“ bzw. rückgängig zu machen und dadurch die Zeitreihe zu analysieren (Fig. 2.1 b).

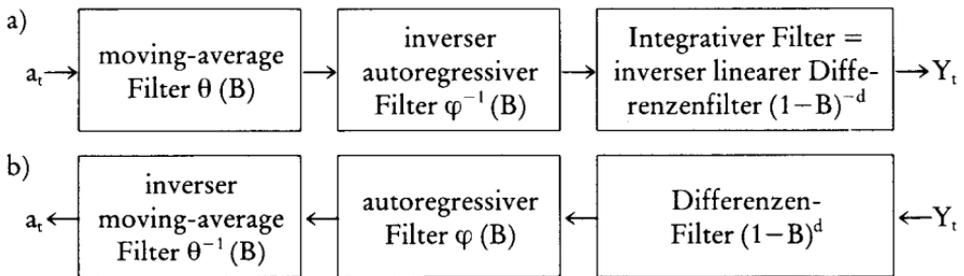


Fig. 2.1: (a) *Datengenerierung* mit dem ARIMA-Modell, (b) *Zeitreihenanalyse* als Prozeß der Wegfilterung systematischer Anteile aus der Zeitreihe  $Y_t$ , so daß nur der „white noise“-Prozeß  $a_t$  verbleibt.

Als Ergebnis einer adäquaten Datenanalyse verbleibt von der ursprünglich beobachteten Zeitreihe  $Y_t$  nur noch der generierende Zufallseinfluß  $a_t$ , der auch „weißes Rauschen“ genannt wird. Wir wollen im folgenden die drei Filter bzw. Prozesse beschreiben.

## 2.1 Integrierte Prozesse der Ordnung d: ARIMA(0,d,0)-Modelle

Ein Beispiel für einen integrierenden Prozeß ist der sogenannte „random walk“ :ARIMA(0,1,0). Der Name rührt von der Vorstellung, man würde den Nachhauseweg eines Betrunkenen beobachten. Viele kleine Anstöße  $a_t$  von rechts oder links erzeugen einen Weg, den man gemeinhin mit „Zick-Zack-Kurs“ bezeichnet. Der Abstand  $Y_t$  auf dem Bürgersteig zur rechten Begrenzung zum Zeitpunkt t setzt sich zusammen aus:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} Y_0 &= a_0 &= Y_0 & \text{dabei sollen sich die} \\ Y_1 &= a_0 + a_1 &= Y_0 + a_1 & \text{„random shocks“ unab-} \\ Y_2 &= a_0 + a_1 + a_2 &= Y_1 + a_2 & \text{hängig mit konstanter} \\ & & & \text{Varianz und Erwar-} \\ & & & \text{tungswert 0 normal} \\ & & & \text{verteilen} \\ Y_t &= a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_t = Y_{t-1} + a_t & a_t \sim \text{NID}(0, \sigma_a^2) \end{aligned}$$

Die Input-Output-Beziehung des „random walk“ läßt sich graphisch darstellen :

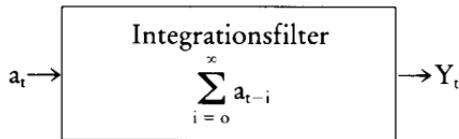


Fig. 2.2: Input-Output-Beziehung des „random-walk“

Im Random Walk ergibt sich  $Y_t$  als die Summe aller früheren Einflüsse. Der Prozeß integriert alle  $a_{t-i}$  zum Endresultat  $Y_t$ .

Leicht kommt es zu Fehlinterpretationen, wenn man den „Zick-Zack-Kurs“ des Prozesses nicht als stochastische Drift, die keine relevante Information bietet, sondern als deterministischen Trend oder gar als Effekt einer psychologischen Intervention (z.B. in einem ABAB Design) überinterpretiert. Zur Prüfung, ob ein Trend oder nur stochastische Drift vorliegt, muß man die Zeitreihe „differenzieren“. Dieses kann auch für die Schätzung der autoregressiven und moving-average-Filter notwendig werden. Die Differenzenbildung beseitigt den Trend im Niveau der Zeitreihe, wenn dieser nicht gerade exponentiell anwächst.

Im Random Walk mit Trend  $\theta_0$  verteilen sich die  $a_t \sim \text{NID}(\theta_0, \sigma_a^2)$ . Die Prozeßdarstellung für den ARIMA (0,1,0) verändert sich von (2.1) zu

$$\begin{aligned}
 (2.2) \quad Y_0 &= (\theta_0 + a_0) & a_1 & & = (\theta_0 + a_0) \\
 Y_1 &= (\theta_0 + a_0) + (\theta_0 + a_1) & & & = Y_0 + (\theta_0 + a_1) \\
 Y_2 &= (\theta_0 + a_0) + (\theta_0 + a_1) + (\theta_0 + a_2) & & & = Y_1 + (\theta_0 + a_2) \\
 & \vdots & & & \vdots \\
 Y_t &= (\theta_0 + a_0) + \dots + (\theta_0 + a_t) & & & = Y_{t-1} + (\theta_0 + a_t)
 \end{aligned}$$

Bildet man jetzt die ersten Differenzen  $\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$

$$\begin{aligned}
 (2.3) \quad \Delta Y_1 &= Y_1 - Y_0 = (\theta_0 + a_1) \\
 \Delta Y_2 &= Y_2 - Y_1 = (\theta_0 + a_2) \\
 & \vdots \\
 \Delta Y_t &= Y_t - Y_{t-1} = (\theta_0 + a_t)
 \end{aligned}$$

ist der Erwartungswert der Differenzen  $E[\Delta Y_t] = \theta_0$ . Zur Prüfung des Vorliegens eines Trends (hier linearer Trend), testen wir die Nullhypothese

$$H_0: \theta_0 = 0$$

Der in (2.2) dargestellte Random Walk (=ARIMA(0,1,0)) mit deterministischem Trend  $\theta_0$

$$(2.4a) \quad Y_t = Y_{t-1} + \theta_0 + a_t$$

läßt sich mit Hilfe des Backshiftoperators B schreiben als

$$(2.4b) \quad \Delta Y_t = (1 - B) Y_t = \theta_0 + a_t \quad \text{mit } B Y_t = Y_{t-1}$$

oder als

$$(2.4c) \quad (1 - B)(Y_t - L) = a_t \quad \text{mit } L = (1 - B)^{-1} \theta_0 = \sum_{i=0}^{\infty} \theta_0.$$

D.h. die Zeitreihe besitzt kein endliches Niveau L. Sie ist nichtstationär. Die verschiedenen Schreibweisen (2.4a)-(2.4c) sind näher bei Möbus, Görlicke & Kröh (1982) erklärt.

Während die Rohwerte  $Y_t$  für alle Zeitpunkte kein festes Level besitzen (Nichtstationarität im homogenen Sinne), liegt dieses für die Differenzen  $\Delta Y_t = W_t$  vor. Deren Erwartungswert ist

$$(2.5) \quad E(\Delta Y_t) = \theta_0$$

Damit ist die Zeitreihe der Differenzen  $\Delta Y_t$  stationär im homogenen Sinn.

Folgt der Random Walk dagegen einer stochastischen Drift oder einem deterministischen Trend vom Grade  $d=2$ , muß das ARIMA(0,2,0)-Modell aufgestellt werden:

$$(2.6) \quad \Delta^2 Y_t = (1-B)^2 Y_t = \theta_0 + a_t \quad \text{mit} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta^2 Y_t = \Delta Y_t - \Delta Y_{t-1} = \\ (Y_t - Y_{t-1}) - (Y_{t-1} - Y_{t-2}) \\ = Y_t - 2Y_{t-1} + Y_{t-2} = \\ (1 - 2B + B^2) Y_t = (1-B)^2 Y_t \end{array} \right.$$

Allgemein gilt für das ARIMA(0,d,0)-Modell

$$(2.7) \quad (1 - B)^d Y_t = \theta_0 + a_t$$

Muß die Nullhypothese  $H_0: \theta_0 = 0$  verworfen werden, liegt ein deterministischer Trend vom Grade  $d$  vor (bei  $d=2$  eine Parabel). Kann die Nullhypothese beibehalten werden, haben wir es nur mit stochastischer Drift vom Grade  $d$  zu tun. Sie darf nicht inhaltlich interpretiert werden, weil sie nur ein Zufallsprodukt ist! Im ARIMA(0,d,0) ist zwar  $Y_t$  nichtstationär im homogenen Sinn, jedoch liegt die Stationarität im Level für die  $d$ -fachen Differenzen  $W_t$  vor:

$$E(\Delta^d Y_t) = E(W_t) = \theta_0$$

Für die Abbildung der Zeitreihe als autoregressiver oder moving average Prozeß wird noch die Stationarität in Varianz und Autokorrelation gefordert. Das bedeutet zum einen die Zeitunabhängigkeit der Varianz. Die Autokorrelation darf dagegen von zeitlichen Verschiebungen (Lags) zweier Zeitreihen abhängen. Liegt die Stationarität in der Varianz nicht vor, kann die Logarithmierung der eventuell vorher differenzierten Zeitreihe Abhilfe schaffen. Ein Beispiel findet sich bei McCain & McCleary (1979, S. 282-293). Eine der Varianzstationarität ähnliche Voraussetzung findet sich z.B. auch bei der Regression und ist dort als Homoskedastizitätsforderung bekannt.

## 2.2 Autoregressive Prozesse der Ordnung $p$ : ARIMA( $p,0,0$ ) u. ARIMA( $p,d,0$ )-Modelle

Die AR-Prozesse wurden von Yule (1926) eingeführt und generalisiert von Walker (1931). Man nimmt an, daß die Abweichungsvariable  $y_t = Y_t - L$  von  $p$  früheren Variablen und einem Random-Schock  $a_t$  abhängt:

$$(2.8a) \quad y_t = \varphi_1 y_{t-1} + \varphi_2 y_{t-2} + \dots + \varphi_p y_{t-p} + a_t$$

oder in Operatorschreibweise

$$(2.8b) \quad (1 - \varphi_1 B - \varphi_2 B^2 - \dots - \varphi_p B^p) y_t = a_t$$

oder ganz kurz

$$(2.8c) \quad \varphi(B) y_t = a_t$$

bzw.

$$(2.8d) \quad Y_t - L = \frac{1}{\varphi(B)} a_t = \varphi^{-1}(B)a_t$$

Da der AR-Prozeß stationär ist, müssen nichtstationäre Prozesse erst noch durch Differenzenbildung stationär gemacht werden, so daß sie in den Differenzen  $\Delta^d Y_t = (1 - B)^d Y_t = W_t$  definiert sind. Der ARIMA(p,d,0)-Prozeß läßt sich dann in Rohwerten  $Y_t$  (s.a. Hibbs, 1977, S. 140; Möbus, Göricke & Kröh, 1982) formulieren als

$$\varphi(B)(1-B)^d Y_t = \theta_0 + a_t$$

$$(2.9a) \quad Y_t = \frac{\theta_0 + a_t}{\varphi(B)(1-B)^d} \quad \text{mit } \theta_0 = L \varphi(B)(1-B)^d$$

Andere Autoren (z.B. Jenkins, 1979, S. 98) wählen eine andere Schreibweise für den gleichen Sachverhalt. Sie formulieren den Prozeß als ARIMA(p,0,0)-Modell in den Abweichungen der Differenzen vom zugehörigen Differenzmittelwert  $W_t - \mu_W$ :

$$(2.9b) \quad W_t - \mu_W = \frac{1}{\varphi(B)} a_t \quad \text{mit } W_t = (1-B)^d Y_t$$

$$\mu_W = E(W_t) = \frac{\theta_0}{\varphi(B) \cdot 1}$$

Am häufigsten tritt der ARIMA(1,0,0) auf:

$$(2.10a) \quad y_t = \varphi_1 y_{t-1} + a_t \quad \text{mit den Stationaritätsgrenzen } -1 < \varphi_1 < +1$$

oder

$$(2.10b) \quad (1 - \varphi_1 B)y_t = a_t$$

Durch sukzessives Einsetzen kann man  $y_t$  ähnlich wie bei (2.1) auf die Random Shocks der Vergangenheit zurückführen:

$$\begin{aligned} y_0 &= a_0 \\ y_1 &= \varphi_1 a_0 + a_1 \\ y_2 &= \varphi_1^2 a_0 + \varphi_1 a_1 + a_2 \\ &\dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2.11) \quad y_t &= \varphi_1^t a_0 + \varphi_1^{t-1} a_1 + \dots + \varphi_1 a_{t-1} + a_t = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_1^i a_{t-i} \\
 &= (1 + \varphi_1 B + \varphi_1^2 B^2 + \dots + \varphi_1^k B^k + \dots) a_t \\
 &= (1 - \varphi_1 B)^{-1} a_t \\
 &= \frac{1}{\varphi(B)} a_t
 \end{aligned}$$

wenn man wie Glass et al. (1975, S. 90) die  $a_t$  mit Index  $t < 0$  auf ihren Erwartungswert  $E(a_t) = 0$  setzt

Dabei ist die Inverse des Differenzenoperators  $(1-B)$  definiert

als  $(1-B)^{-1} = 1 + B + B^2 + B^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} B^k$ . Damit ist

$$(1 - \varphi_1 B)^{-1} = 1 + \varphi_1 B + \varphi_1^2 B^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_1^k B^k.$$

Ein Vergleich mit (2.11) zeigt, daß man auf einfache Weise die Differenzgleichung (2.10) lösen kann zu:

$$Y_t - L = \frac{1}{\varphi(B)} a_t \quad \text{mit } L = \mu_y$$

was der Form (2.9b) entspricht. Da der  $|\varphi_1| < 1$  ist, findet im Gegensatz zum Random Walk eine exponentielle Abschwächung äußerer Einflüsse statt: für  $t \rightarrow \infty$  geht  $\varphi_1^t \rightarrow 0$ , d.h. der Anfangseinfluß  $a_0$  spielt im ARIMA (1,0,0) kaum noch eine Rolle. Ein Beispiel für einen ARIMA(1,0,0) findet sich in Fig. 2.5.

Im Gegensatz zum Random Walk (Fig. 2.2) hat das Input-Output-Modell des ARIMA (1,0,0) ein „Leck“, durch das frühere äußere Einflüsse  $a_{t-i}$  verschwinden. Das Input-Output-Modell des ARIMA (1,d,0)-Modells sieht dann so aus (Fig. 2.3):

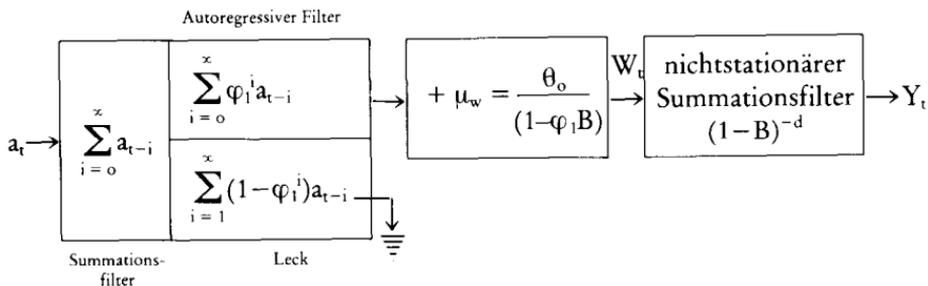


Fig. 2.3: Input-Output-Beziehung des ARIMA (1,d,0)-Prozesses

Ebenfalls relativ häufig kommt noch der ARIMA (2,0,0)-Prozeß vor:

$$(2.12a) \quad y_t = \varphi_1 y_{t-1} + \varphi_2 y_{t-2} + a_t \quad \text{mit den Stationaritätsgrenzen} \\ \text{(s.a. Fig. 2.4):}$$

$$\text{oder} \quad -1 < \varphi_2 < +1$$

$$(2.12b) \quad (1 - \varphi_1 B - \varphi_2 B^2) y_t = a_t \quad \varphi_1 + \varphi_2 < +1$$

$$\text{bzw.} \quad \varphi_2 - \varphi_1 < +1$$

$$(2.12c) \quad Y_{t-L} = \frac{1}{(1 - \varphi_1 B - \varphi_2 B^2)} a_t = \frac{1}{\varphi(B)} a_t$$

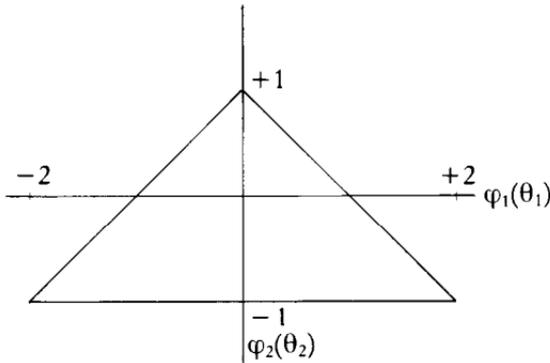


Fig. 2.4: Stationaritätsgrenzen für den ARIMA(2,0,0) bzw. Invertierbarkeitsgrenzen (s.U.) für den ARIMA(0,0,2)

### 2.3 Moving-average Prozesse der Ordnung $q$ : ARIMA(0,0, $q$ )-Modelle

Die moving-average-Prozesse sind auch schon relativ lange bekannt. Sie gehen auf Slutsky (1937) zurück. Während bei den integrierenden Prozessen die früheren random shocks  $a_t$  ohne Abschwächung ihren Einfluß theoretisch unendlich lange ausüben, wird ihr Einfluß im autoregressiven Prozeß mit der Zeit allmählich schwächer. Beim moving-average Prozeß dagegen hält sich der Einfluß nur  $q$  Zeitpunkte, um dann plötzlich ganz zu verschwinden. Die MA-Prozesse sind immer stationär.

Der einfachste Prozeß ist der ARIMA(0,0,1):

$$(2.13a) \quad y_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} \quad \text{mit der Invertierbarkeitsbedingung} \quad -1 < \theta_1 < +1$$

oder

$$(2.13b) \quad y_t = (1 - \theta_1 B)a_t$$

oder ganz kurz

$$(2.13c) \quad y_t = \theta(B)a_t \text{ oder } Y_t - L = \theta(B)a_t \quad \text{mit } L = \theta_0$$

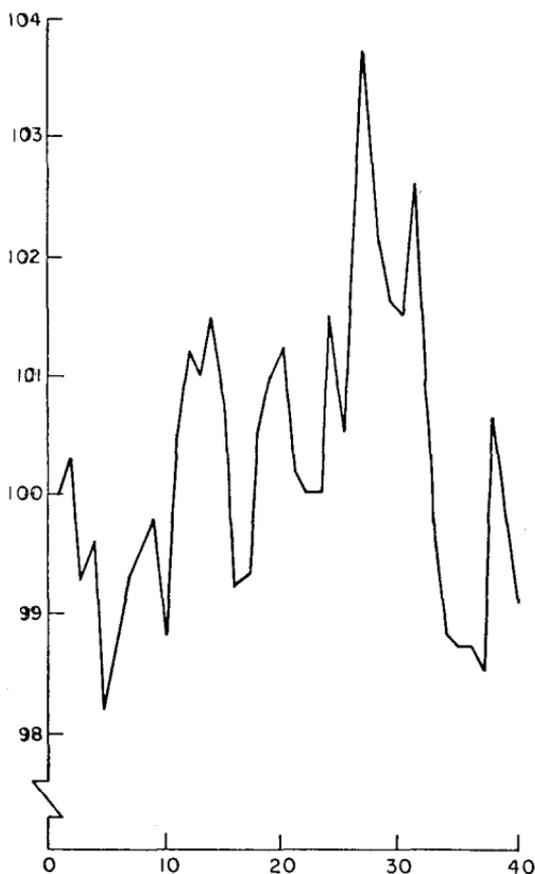


Fig. 2.5: Beispiel für einen ARIMA (1,0,0)-Prozeß (aus Glass et al., 1975)

Unter Invertierbarkeit versteht man die Forderung, daß die Parameter mit der die Vergangenheit einer Zeitreihe gewichtet wird, um Prognosen zu erhalten, mit zunehmendem Zurückgehen in die Vergangenheit allmählich verschwinden (s. Jenkins, 1979, S. 134).

Das Input-Output-Modell des ARIMA(0,0,1) findet sich in Fig. 2.6.

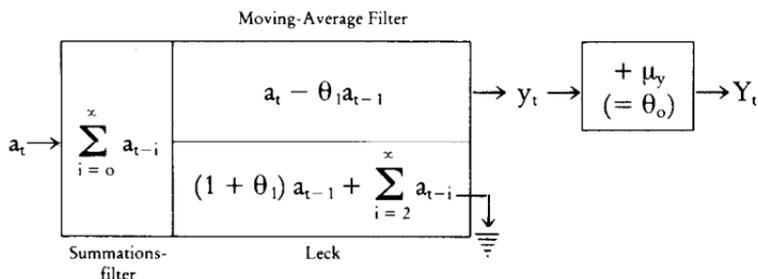


Fig. 2.6: Input-Output-Modell des ARIMA (0,0,1)

Durch sukzessive Substitution von (2.13a) kann man zeigen, daß der ARIMA(0,0,1) ein unendlich langer autoregressiver Prozeß mit einer ganz einfachen Parameterstruktur ist:

$$(2.14) \quad y_t = a_t - \sum_{i=1}^{\infty} \theta_1^i y_{t-i}$$

Ein Beispiel für einen ARIMA(0,0,1) ist in Fig. 2.7 dargestellt.

Der ARIMA(0,0,2)-Prozeß läßt sich analog zu (2.13) schreiben:

$$(2.15a) \quad y_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2}$$

$$(2.15b) \quad y_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2) a_t$$

$$(2.15c) \quad Y_t - L = \theta(B) a_t$$

mit Invertierbarkeitsgrenzen für  $\theta_1$  und  $\theta_2$ , die numerisch den Stationaritätsgrenzen des ARIMA(2,0,0) entsprechen (s. Fig. 2.4)

Nur wenn die Invertierbarkeitsbedingung erfüllt ist, läßt sich der MA-Prozeß als unendlicher AR-Prozeß formulieren. Sollten *Parameterschätzungen* außerhalb der Stationaritäts- bzw. der Invertierbarkeitsgrenzen liegen, ist das ein sicheres Zeichen, daß die Zeitreihe nicht stationär ist und differenziert werden muß oder daß zu häufig differenziert wurde.

## 2.4 Das allgemeine ARIMA (p,d,q)-Modell

Der Hauptgrund für die Kombination der drei Prozesse in ein Modell liegt im Bestreben mit möglichst wenigen Parametern möglichst komplizierte Zeitreihen beschreiben zu können. Besonders wenn man ein gemischtes Modell (sowohl p als auch q ungleich Null) formuliert, sollte man sich jedoch gegen die

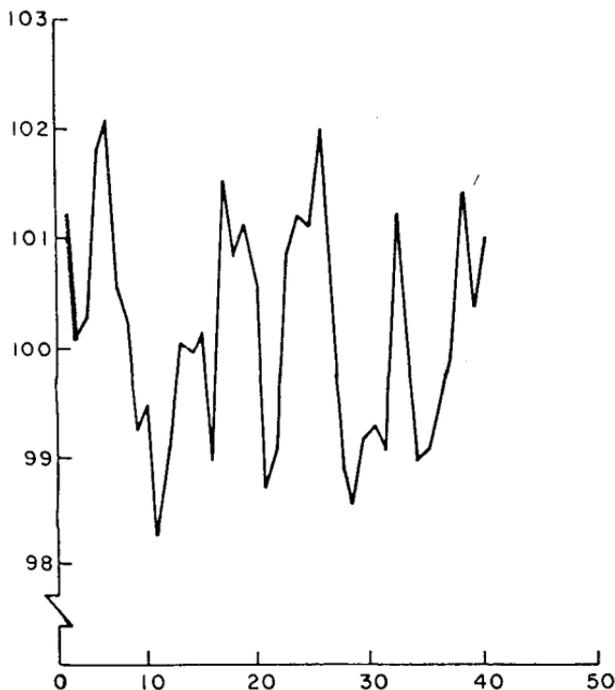


Fig. 2.7: Beispiel für einen ARIMA (0,0,1)-Prozeß (aus Glass et al., 1975)

Gefahr der Überparametrisierung schützen (Box & Jenkins, 1976, Kap. 7.3.5). Dieses soll am einfachsten gemischten Prozeß dem ARIMA(1,0,1) gezeigt werden.

$$(2.16a) \quad y_t = \varphi_1 y_{t-1} + a_t - \theta_1 a_{t-1}$$

$$(2.16b) \quad (1 - \varphi_1 B)y_t = (1 - \theta_1 B)a_t$$

$$(2.16c) \quad y_t = (1 - \varphi_1 B)^{-1}(1 - \theta_1 B) a_t$$

$$(2.16d) \quad Y_t - L = \frac{\theta(B)}{\varphi(B)} a_t$$

mit den kombinierten Stationaritäts- und Invertierbarkeitsbedingungen  $-1 < \varphi_1 < 1$  und  $-1 < \theta_1 < 1$  (s.a. Fig. 2.8) (S. 255).

Ist nun  $\varphi_1 = \theta_1$  läßt sich der Prozeß exakt auf den ARIMA(0,0,0), nämlich das weiße Rauschen, reduzieren:

$$(2.17) \quad y_t = a_t$$

Bei anderen Parameterkonstellationen sind annähernde Reduktionen auf einen ARIMA (0,0,1), einen ARIMA(0,0,2) oder einen ARIMA(1,0,0) möglich (Box & Jenkins, 1976, 248-250).

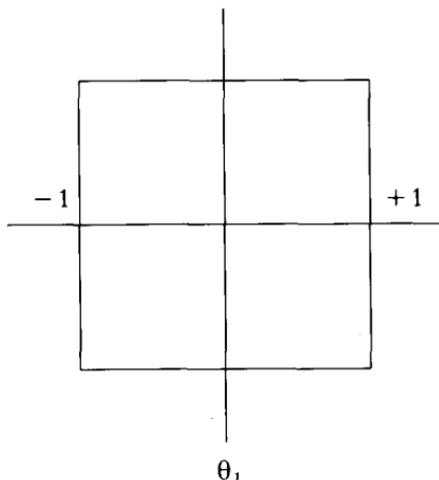


Fig. 2.8: Stationaritäts- und Invertierbarkeitsbedingungen für den ARIMA (1,0,1)

Ist man dagegen der Auffassung, daß die Zeitreihe einem vollständigen ARIMA(p,d,q)-Modell entspricht und sich dieses nicht vereinfachen läßt, können wir entsprechend (2.9a) und (2.9b) zwischen zwei äquivalenten Darstellungsformen wählen.

Beschreiben wir den Prozeß in Rohwerten  $Y_t$  als ARIMA(p,d,q), haben wir:

$$(2.18a) \quad (1 - \varphi_1 B - \dots - \varphi_p B^p) (1 - B)^d Y_t = \theta_0 + (1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q) a_t$$

oder

$$(2.18b) \quad \varphi(B) (1 - B)^d Y_t = \theta_0 + \theta(B) a_t$$

bzw.

$$(2.18c) \quad Y_t = \frac{\theta_0 + \theta(B)}{\varphi(B)(1 - B)^d} a_t$$

Diese Darstellungsform präferiert Hibbs (1977, S. 140). Die Alternative hierzu ist die Erweiterung zu (2.9b) mit

$$(2.19) \quad W_t - \mu_w = \frac{\theta(B)}{\varphi(B)} a_t \quad \text{mit } W_t = (1 - B)^d Y_t$$

$$\text{und } \mu_w = \frac{\theta_0}{\varphi(B) \cdot 1}$$

Diese Darstellung findet sich bei Jenkins (1977, S. 98). Sind die Parameter  $\theta_0$  oder  $\mu_w$  von Null verschieden, liegt wieder ein deterministischer Trend vom Grade d vor.

Ein Beispiel für einen  $ARIMA(0,2,2)$  sieht man in Fig. 2.9. Zu beachten ist der quadratische Verlauf, dem man nicht ansehen kann, ob er stochastische Drift oder einen deterministischen Trend enthält. Das kann wie oben gezeigt nur im Wege der wiederholten Differenzenbildung und der anschließenden statistischen Prüfung des Parameters  $\theta_0$  bzw.  $\mu_W$  genauer untersucht werden.

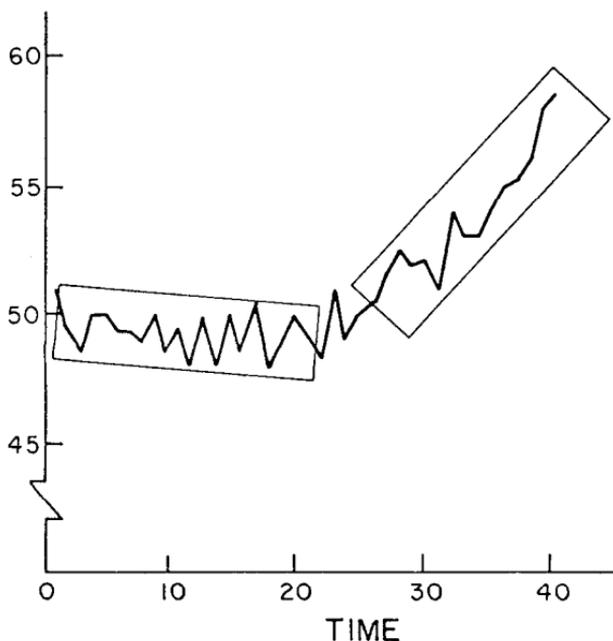
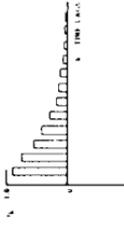
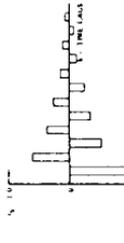
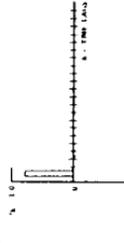
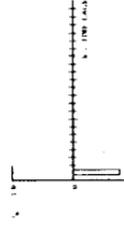


Fig. 2.9: Beispiel für einen nichtstationären  $ARIMA(0,2,2)$

## 2.5 Autokorrelations- und partielle Autokorrelationsfunktion

Einer empirisch gewonnenen Zeitreihe sieht man die Grade  $p, d, q$  des  $ARIMA$ -Modells nicht an. Daher muß in einem iterativen Identifikationsprozeß die Festlegung der  $p, d, q$  vor der Parameterschätzung erfolgen. Die Identifikation stützt sich dabei auf die Autokorrelationsfunktion (ACF) und die partielle Autokorrelationsfunktion (PACF). Jeder stationäre Prozeß besitzt eine spezielle unverwechselbare Form beider Funktionen. Werden sie dagegen mit Daten geschätzt, versucht man die empirisch erhaltenen Muster mit den theoretischen zu vergleichen und damit die Grade  $p, d, q$  des  $ARIMA$ -Modells festzulegen.

Die Autokorrelationsfunktion ist definiert als

Autocorrelation Function (ACF)	Description of ACF	Tentative Model	Estimated Coefficient
 <p>ACF plot showing exponential decay from 1.0 towards 0 as lag increases.</p>	Decays exponentially	Autoregressive First Order $(1 - \phi_1 B) \tilde{z}_t = a_t$ $\tilde{z}_t = \phi_1 \tilde{z}_{t-1} + a_t$	$\phi_1 > 0$
 <p>ACF plot showing exponential decay with oscillation (alternating positive and negative values).</p>	Decays exponentially in oscillation	Autoregressive First Order $(1 - \phi_1 B) \tilde{z}_t = a_t$ $\tilde{z}_t = \phi_1 \tilde{z}_{t-1} + a_t$	$\phi_1 < 0$
 <p>ACF plot showing a sharp spike at lag 1 and near-zero values elsewhere.</p>	Spikes at lag 1	Moving-Average First Order $\tilde{z}_t = (1 - \theta_1 B) a_t$ $= a_t - \theta_1 a_{t-1}$	$\theta_1 < 0$
 <p>ACF plot showing a sharp spike at lag 12 and near-zero values elsewhere.</p>	Spikes at lag 12	Seasonal Moving Average $\tilde{z}_t = (1 - \theta_{12} B^{12}) a_t$ $= a_t - \theta_{12} a_{t-12}$	$\theta_{12} < 0$

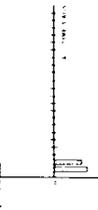
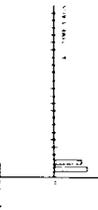
	<p>Spikes at lags 1 and 2</p>	<p>Moving-Average Second Order</p> $\hat{z}_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2) a_t$ $= a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2}$	$\theta_1 > 0 \quad \theta_2 > 0$
	<p>Spikes at lags 1 and 2</p>		$\theta_1 > 0 \quad \theta_2 < 0$
	<p>Spikes at lags 1 and 2</p>		$\theta_1 < 0 \quad \theta_2 > 0$
	<p>Spikes at lags 1 and 2</p>		$\theta_1 < 0 \quad \theta_2 < 0$
	<p>Decays exponentially from lag 1</p>	<p>Mixed ARMA <math>-(1, 0, 1)</math></p> $\frac{(1 - \phi_1 B) \hat{z}_t}{\hat{z}_t - \phi_1 \hat{z}_{t-1}} = a_t - \theta_1 a_{t-1}$ $\hat{z}_t = \phi_1 \hat{z}_{t-1} + a_t - \theta_1 a_{t-1}$	$(\phi_1 - \theta_1) > 0 \quad \phi_1 > 0$
	<p>Decays exponentially from lag 1 in oscillation</p>		$(\phi_1 - \theta_1) < 0 \quad \phi_1 > 0$
	<p>Decays exponentially from lag 1 in oscillation</p>		$(\phi_1 - \theta_1) < 0 \quad \phi_1 < 0$

Fig. 2.10: Theoretische Autokorrelationsfunktionen (ACFs) für verschiedene stationäre Prozesse (dem  $Z$  und  $\Phi$  in der Figur entsprechen  $y$  und  $\varphi$  im Text)

$$(2.20) \quad \text{ACF}(k) = \varrho(k) = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)} \quad \begin{array}{l} k = \text{Verschiebung der Zeit-} \\ \text{reihe um } k \text{ Zeitpunkte} \\ (= \text{Lag}) \end{array}$$

mit der Kovarianz

$$\gamma(k) = E[(Y_t - \mu_y)(Y_{t+k} - \mu_y)]$$

Die Autokorrelation mißt also die Größe des Zusammenhangs der Zeitreihe mit der um  $k$  Zeitpunkte verschobenen. Weist z.B. eine Person einen ausgeprägten wöchentlichen Rythmus im Stimmungsbild auf (montags: blau; dienstags, mittwochs: mittelprächtig; Donnerstag, Freitag: Vorfreude aufs Wochenende; Samstag und Sonntag: Hochstimmung), wird die Autokorrelationsfunktion für den Lag  $k=7$  einen ausgeprägt hohen Wert annehmen, da sich das Stimmungsbild von Montag zu Montag, von Dienstag zu Dienstag . . . ähnelt bzw. wiederholt (s.a. Huba, Lawley, Stallone & Fieve, 1976).

Ein gebräuchlicher Schätzer für die Autokorrelationsfunktion ist:

$$r(k) = \frac{c(k)}{c(0)}$$

$$\text{mit Kovarianz } c(k) = \frac{1}{N^*} \sum_{t=1}^{N-k} (Y_t - \bar{Y})(Y_{t+k} - \bar{Y})$$

$$\text{und } N^* = N \text{ (Box \& Jenkins, 1976)}$$

$$N^* = N-k \text{ (McCleary \& Hay, 1980)}$$

Mit zunehmend größerem Lag  $k$  wird dabei die Schätzung unsicherer, da die Zahl der Kreuzprodukte in der Kovarianzformel  $c(k)$  mit Wachsändern  $k$  ständig abnimmt.

Wir wollen kurz die ACFs einiger Prozesse beschreiben. Für den ARIMA (0,0,0) („weißes Rauschen“)

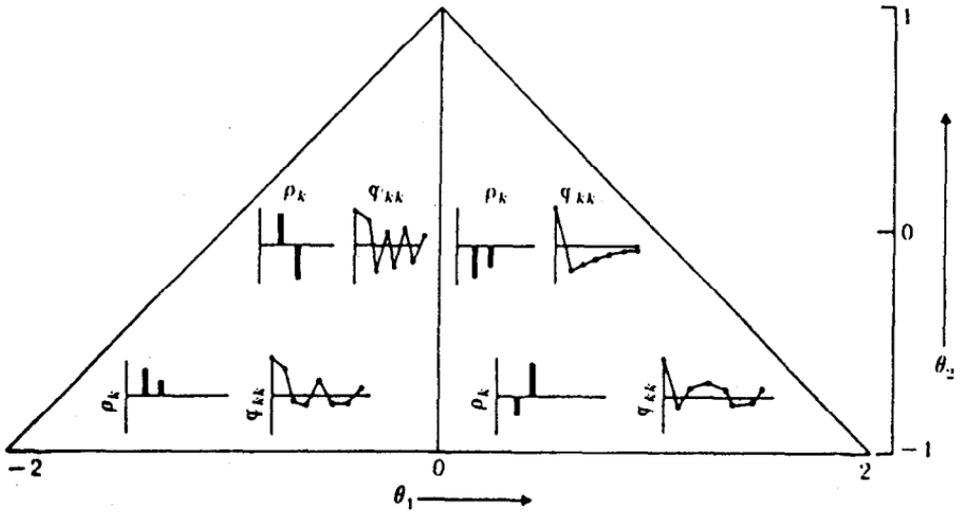
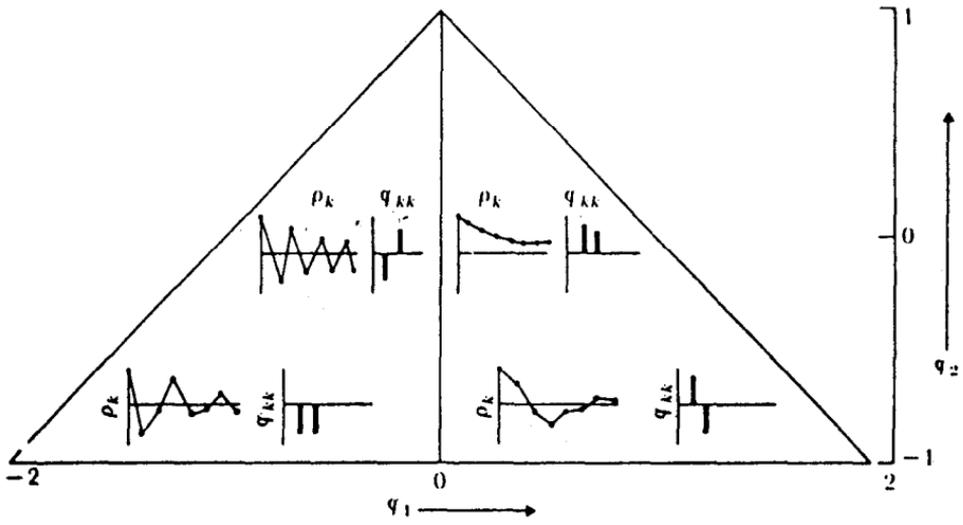
$$Y_t = a_t + \theta_0$$

ist die ACF  $(k) = 0$  für alle  $k$  größer als 0. Für den ARIMA (0,1,0)

$$(1 - B) Y_t = a_t + \theta_0$$

fällt die ACF ganz langsam ab. Denn wenn z.B.  $Y_t < Y_{t+k}$  für jedes  $k$ , wird die Kovarianz immer recht hoch sein. Ein ähnlich langsamer Abfall ist für alle nichtstationären ARIMA (p,d,q) zu erwarten.

Etwas schneller fällt die ACF(k) bei den autoregressiven Prozessen ab. So weist der ARIMA(1,0,0)  $(1 - \varphi_1 B)y_t = a_t$  eine sich exponentiell reduzierende ACF auf, wenn  $\varphi_1$  größer Null ist (Fig. 2.10)! Die Schnelligkeit der Reduktion hängt von der Größe von  $\varphi_1$  ab. Je größer  $\varphi_1$  ist, desto langsamer fällt die ACF, da ja nach (2.10)  $y_t$  dem  $y_{t-1}$  immer ähnlicher wird, je mehr  $\varphi_1$  an 1



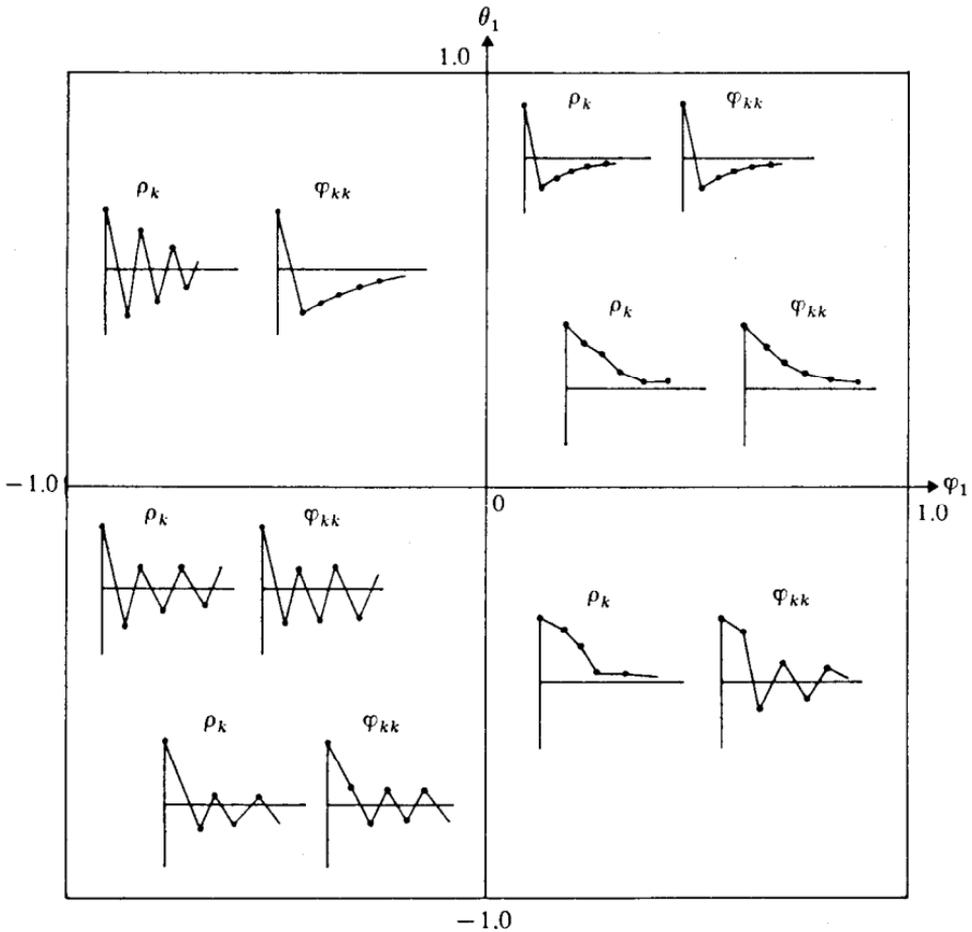


Fig. 2.1.1: ACF und PACF für verschiedene einfache stationäre Prozesse

herangeht. Ist  $\varphi_1 = 1$ , bleibt die ACF konstant. Wir haben es dann mit einem ARIMA (0,1,0) zu tun. Höhere ARIMA(p,0,0) Prozesse haben ebenfalls eine abfallende ACF, deren Muster jedoch auf recht komplizierte Weise von den  $\varphi$ -Parametern abhängen.

Bei den ARIMA(0,0,q) ist dagegen die ACF(k) für  $q < k$  ganz plötzlich Null, was die Identifikation der moving average-Prozesse durch die empirisch geschätzte ACF ganz wesentlich erleichtert. Eine Auswahl von theoretischen ACFs für verschiedene stationäre ARIMA-Prozesse findet sich in Fig. 2.10.

Leider erkennt man beim Studium der Fig. 2.10, daß nur der Grad q der reinen Moving-average-Prozesse leicht identifiziert werden kann. Gemischte ARIMA(p,0,q) und ARIMA(p,0,0) lassen sich mit Hilfe der an Daten geschätzten

ACF nicht auseinanderhalten. Ebenso ist es fast unmöglich, den Grad  $p$  bei reinen autoregressiven ARIMA( $p,0,0$ )-Prozessen allein mit der geschätzten ACF festzulegen.

Glücklicherweise hilft in diesen nicht gut entscheidbaren Fällen die partielle Autokorrelationsfunktion PACF( $k$ ) weiter. Die Prozeßgleichungen für verschieden lange ARIMA( $k,0,0$ ) Modelle enthalten als letzten Koeffizienten  $\varphi_{kk}$  die partielle Autokorrelation, so:

(2.21a)  $\varphi_{11}$  für ARIMA(1,0,0)  $y_t = \varphi_{11}y_{t-1} + a_t$

(2.21b)  $\varphi_{22}$  für ARIMA(2,0,0)  $y_t = \varphi_{21}y_{t-1} + \varphi_{22}y_{t-2} + a_t$

(2.21c)  $\varphi_{33}$  für ARIMA(3,0,0)  $y_t = \varphi_{31}y_{t-1} + \varphi_{32}y_{t-2} + \varphi_{33}y_{t-3} + a_t$   
 .....  
 usw.

Die partielle Autokorrelation  $\varphi_{kk}$  spiegelt den direkten Einfluß des Zeitpunkts  $t-k$  auf  $t$  wieder. Sammelt man die  $\varphi_{11}, \varphi_{22}, \varphi_{33} \dots$ , erhält man die partielle Autokorrelationsfunktion. Für einen autoregressiven Prozeß der Ordnung  $p$  werden die  $|\varphi_{kk}| > 0$  für  $k \leq p$  und  $|\varphi_{kk}| = 0$  für  $p < k$  sein. Die PACF hat also für die Identifikation die angenehme Eigenschaft, nach Lag  $p$  plötzlich Null zu werden.

Empirisch wird die PACF( $k$ ) durch sukzessives Anpassen von ARIMA (1,0,0), ARIMA(2,0,0), ARIMA(3,0,0) . . . Modellen und das Lösen der Yule-Walker-Gleichungen (2.22a) geschätzt (Box & Jenkins, 1976, 64-84). Diese Gleichungen besitzen eine Parallele bei der Bestimmung von Regressionsgewichten in der multiplen Regression (2.22b) (s.a. Cooley & Lohnes, 1971, S. 53 und Tab. 2.1)

Tabelle 2.1a: YULE-WALKER-Gleichungen zur Bestimmung der Parameter eines ARIMA ( $k, 0, 0$ ) und der partiellen Autokorrelation  $\varphi_{kk}$

$$\begin{bmatrix} \hat{\varphi}_{k1} \\ \hat{\varphi}_{k2} \\ \vdots \\ \hat{\varphi}_{kk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & r_1 & r_2 & \dots & r_{k-1} \\ r_1 & 1 & r_1 & \dots & r_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{k-1} & r_{k-2} & r_{k-3} & \dots & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_k \end{bmatrix}$$

(2.22a)  $\hat{\varphi}_k = \hat{P}_k^{-1} r_k$

Tabelle 2.1b: Bestimmungsgleichung für die Regressionsgewichte  $\beta$  der multiplen Regression von  $k$  Prediktoren  $X_1, \dots, X_k$  auf das Kriterium  $Y$

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & \dots & r_{1k} \\ r_{21} & 1 & \dots & r_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{k1} & r_{k2} & \dots & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} r_{1Y} \\ r_{2Y} \\ \vdots \\ r_{kY} \end{bmatrix}$$

(2.22b)  $\hat{\beta} = \hat{R}_{XX}^{-1} r_{XY}$

Die Schätzung der PACF( $k$ ) wird durch Einsetzen der geschätzten Autokorrelationen  $\hat{Q}_k = r_k$  in (2.22a) und systematischer Durchrechnung der Gleichungen  $\hat{\varphi}_k = \hat{P}_k^{-1} r_k$  ( $k=1,2,\dots,p+1,\dots$ ) gewonnen. Der Vergleich der geschätz-

ten PACF mit den theoretischen (s. Fig. 2.11) ermöglicht dann die Bestimmung der Ordnung  $p$  des ARIMA( $p,0,0$ )-Modells, weil man nach lag  $p$  einen scharfen Knick in der PACF erwartet. Alle PACF( $k$ ) mit einem größeren Lag als  $p$  sollen dann annähernd Null sein (Beispiele finden sich in Fig. 2.11).

## 2.6 Saisonale Einflüsse

Wir werden in der Psychologie relativ selten „saisonale“ Einflüsse bei den Zeitreihen berücksichtigen müssen. Liegen dagegen bei täglicher Messung ausgeprägte Wochen- oder Monatszyklen vor, werden die Autokorrelations- oder partiellen Autokorrelationsfunktionen beim Lag 7 oder Lag 30 zusätzlich hohe Werte aufweisen (s.a. Fig. 2.10 für die ACF eines saisonalen Moving Average Prozesses). Wird z. B. ein ARIMA( $1,0,0$ )-Prozeß von einem autoregressiven wöchentlichen Rhythmus vom Grade 2 überlagert, wird  $y_{21}$  auf vielfältige Weise beeinflusst (Fig. 2.12).

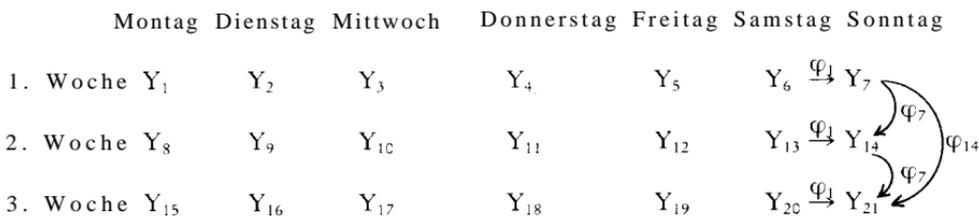


Fig. 2.12: Beeinflussungsstruktur bei einem ARIMA( $1,0,0$ ) ( $2,0,0$ ) $_7$ -Prozeß

Neben der direkten Beeinflussung von  $y_{21}$  durch  $y_{20}$  liegt eine wöchentliche Ausstrahlung von  $y_{14}$  auf  $y_{21}$  und von  $y_7$  auf  $y_{14}$  sowie auf  $y_{21}$  vor. Wir können das normale ARIMA( $1,0,0$ )-Modell

$$(2.23) \quad (1 - \varphi_1 B)y_t = \varepsilon_t \quad (\varepsilon_t \text{ ist kein weißes Rauschen})$$

um den Wochenzyklus

$$(2.24) \quad (1 - \varphi_7 B^7 - \varphi_{14} B^{14})\varepsilon_t = a_t$$

zwar nicht additiv, sondern multiplikativ erweitern zum ARIMA ( $1,0,0$ ) ( $2,0,0$ ) $_7$

$$(2.25a) \quad (1 - \varphi_1 B) (1 - \varphi_7 B^7 - \varphi_{14} B^{14}) y_t = a_t$$

oder ausmultipliziert

$$(2.25b) \quad (1 - \varphi_7 B^7 - \varphi_{14} B^{14} - \varphi_1 B + \varphi_1 \varphi_7 B^8 + \varphi_1 \varphi_{14} B^{15}) y_t = a_t$$

gibt

$$(2.25c) \quad y_t = \varphi_1 y_{t-1} + \varphi_7 y_{t-7} + \varphi_{14} y_{t-14} - \varphi_1 \varphi_7 y_{t-8} - \varphi_1 \varphi_{14} y_{t-15} + a_t$$

und für  $y_{21}$

$$(2.26) \quad y_{21} = \varphi_1 y_{20} + \varphi_7 y_{14} + \varphi_{14} y_7 - \varphi_1 \varphi_7 y_{13} - \varphi_1 \varphi_{14} y_6 + a_{21}$$

Ein Vergleich mit Fig. 2.12 zeigt die Berechtigung dieses multiplikativen Ansatzes, weil hier ähnlich wie in der Pfadanalyse der Effekt eines Pfades der Länge  $k$  durch das Produkt der Pfadkoeffizienten  $\prod_{i=1}^k \varphi_i$  ausgedrückt wird.

In ähnlicher Weise lassen sich „saisonale“ integrierte und moving-average Prozesse zum allgemeinen  $ARIMA(p,d,q)_s$  ( $P,D,Q$ )<sub>s</sub> (Box & Jenkins, 1976, Kap. 9) anfügen, wobei  $s$  die Spanne des „saisonalen“ Effekts angibt (hier war  $s=7$  Tage). Wie man an (2.25) sieht, ist die Identifikation des Prozesses wegen der Produktterme  $\varphi_1 \varphi_7 y_{13}$  und  $\varphi_1 \varphi_{14} y_6$  schwieriger geworden als es bei einem reinen  $ARIMA(p,d,q)$  oder  $ARIMA(P,D,Q)$  der Fall gewesen wäre.

## 2.7 Modellidentifikation

Bei der Modellidentifikation sollte man ein möglichst einfaches Modell im Auge halten, um der Gefahr der Überparametrisierung zu entgehen. So wird aus einem  $ARIMA(0,0,1)$ -Modell  $y_t = (1 - \theta_1 B) a_t$  bei zu häufiger Differenzbildung der Zeitreihe ein überkompliziertes  $ARIMA(0,0,2)$ -Modell:

$$(2.27a) \quad \Delta y_t = a_t - (1 + \theta_1) a_{t-1} + \theta_1 a_{t-2}$$

oder

$$(2.27b) \quad \Delta y_t = (1 - (1 + \theta_1) B + \theta_1 B^2) a_t$$

Der Prozeß der Identifikation beginnt mit einem Plot der Zeitreihe, um eine eventuell vorliegende Nichtstationarität der Varianz zu entdecken. Diese wird z.B. durch Logarithmierung und Differenzenbildung beseitigt (s.a. Jenkins, 1979), wenn die Varianz proportional zum Level zunimmt (McCleary & Hay, 1980, S. 52). Allerdings verändert sich der Charakter des Modells. So wird aus einem in der logarithmierten Form additiven Random Walk in der Originalmetrik  $Y_t$  ein multiplikativer. Liegt kein Verdacht auf Nichtstationarität der Varianz vor, wird die ACF inspiziert. Fällt sie auch bei großen Lags  $k$  kaum ab, liegt der Verdacht auf Nichtstationarität im Level und einen  $ARIMA(p,d,q)$ -Prozeß nahe. Es muß dann die Zeitreihe  $Y_t$   $d$ -fach differenziert

werden. Anschließend werden von der (eventuell differenzierten) Zeitreihe die Muster der ACF mit den theoretisch zu erwartenden verglichen. Zur Beurteilung, wo Knicke in der ACF und der PACF auftreten, kann man die Standardschätzfehler und approximativen Konfidenzintervalle heranziehen.

Nach Quenouille (1949) ist unter der Hypothese, daß ein ARIMA(p,0,0) vorliegt, der Standardschätzfehler der partiellen Autokorrelation höherer Lags

$$(2.28) \quad \hat{\sigma} [\hat{\phi}_{kk}] \approx \left[ \frac{1}{T} \right]^{1/2} \quad p < k$$

d.h. ein approximatives Konfidenzintervall unter dieser Hypothese läßt sich mit  $\pm 2\hat{\sigma}[\hat{\phi}_{kk}]$  angeben. Als Regel für die Datenanalyse läßt sich formulieren: fällt ein  $\hat{\phi}_{kk}$  aus dem Konfidenzbereich, ist zu vermuten, daß  $p = k$  ist.

Der approximative Standardschätzfehler für die Autokorrelation  $\hat{Q}_k$  ist für einen ARIMA(0,0,q):

$$(2.29) \quad \hat{\sigma}[\hat{Q}_k] \approx \left[ \frac{1}{T} \left( 1 + 2 \sum_{v=1}^q \hat{Q}_v^2 \right) \right]^{1/2} \quad q < k$$

Ein approximatives Konfidenzintervall unter dieser Hypothese läßt sich ebenfalls mit  $\pm 2\hat{\sigma}[\hat{Q}_k]$  angeben. Fällt ein  $\hat{Q}_k$  aus dem Konfidenzbereich, ist zu vermuten, daß  $q = k$  ist, d.h.  $q$  war zu klein gewählt. Dabei müssen aber immer Unsicherheiten in Kauf genommen werden, die sich durch die Diskrepanz von geschätzten und theoretischen ACFs und PACFs ergeben. Diese Diskrepanz kann, wie Monte-Carlo-Studien zeigen, (Nelson, 1973, S. 75) recht groß werden. Daher gehen in die Interpretation stark subjektive Momente ein (Chatfield, 1975, S. 25).

Der vorläufigen Identifikation schließt sich die Schätzung der Parameter an. Zwar geben Box & Jenkins (1976, 517-520) Nomogramme an, nach denen man bei Kenntnis der Autokorrelationen die Parameter einiger einfacher Prozesse ablesen kann, jedoch wird man in der Regel für Parameterschätzungen Computerprogramme verwenden. Zumindest muß der letzte Parameter signifikant sein und innerhalb der Stationaritäts- und Invertierbarkeitsgrenzen liegen. Die Grenzen sind für den autoregressiven Prozeß der Ordnung  $p$  eingehalten, wenn die Wurzeln  $B_j$  des charakteristischen Polynoms

$$(2.30) \quad (1 - \varphi_1 B - \varphi_2 B^2 - \dots - \varphi_p B^p) = 0$$

alle außerhalb des Einheitskreises in der komplexen Zahlenebene liegen. So verstößt ein ARIMA (1,0,0) mit  $\varphi_1 = 2.0$  gegen diese Bestimmung, weil das Polynom

$$(2.31) \quad (1 - 2.0B) = 0$$

nur die Lösung  $B = 1/2$  besitzt: der Prozeß ist nicht stationär.

Ähnliches gilt für die Invertierbarkeitsbedingung. Ein Moving-average-prozeß der Ordnung  $q$  ist invertierbar, wenn die Wurzeln  $B$  des charakteristischen Polynoms

$$(2.32) \quad (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q) = 0$$

alle außerhalb des Einheitskreises in der komplexen Zahlenebene liegen.

Danach müssen die Residuen  $a_t$  des vorläufigen Modells zwei Tests bestehen:

a) die ACF der Residuen darf keine signifikanten Werte für die ersten beiden Lags ( $k=1$  und  $k=2$ ) aufweisen:  $H_0: ACF(1) = ACF(2) = 0$  und (b) die  $a_t$  müssen sich wie weißes Rauschen verhalten. Ein Test, ob die gesamte ACF nichtsignifikant von der ACF eines Prozesses mit weißem Rauschen abweicht, wurde von Box & Pierce (1970) vorgelegt:

$$(2.33) \quad Q = T \sum_{j=1}^K r_j^2 \quad Q \sim \chi^2_{df=k-p-q}$$

Ist  $Q$  signifikant, muß die Nullhypothese verworfen werden. Die  $\hat{a}_t$  repräsentieren dann kein weißes Rauschen mehr. Verschiedene Autoren empfehlen für  $k$  ca. 20-30 zu wählen, da  $Q$  sehr sensitiv von  $k$  abhängt (s.a. Box & Jenkins, 1976, S. 291).

Weitere Prüfungen des vorläufigen Modells schließen die Berechnung des multiplen  $R^2$  als Maß für die Datenanpassung ein:

$$(2.34) \quad R^2 = 1 - \sum_{t=1}^T (\hat{a}_t^2 / y_t^2) \text{ mit } y_t = \begin{cases} W_t - \mu_w & \text{bei nichtstationärem} \\ \text{Prozeß} \\ Y_t - L & \text{bei stationärem Prozeß} \end{cases}$$

Eine weitere Möglichkeit der Modellprüfung bietet die systematische Aufblähung und Reduktion des Modells. Im überparametrisierten Modell müssen die überflüssigen Parameter nichtsignifikant sein. Im reduzierten (unterparametrisierten) Modell dürfen die Residuen kein weißes Rauschen sein.

Weitere praktische Hinweise zur Identifikation von ARIMA(p,d,q) Prozessen finden sich bei Glass, Willson & Gottman (1975), Anderson (1975), Gottman & Glas (1978), Makridakis & Wheelwright (1978a,b), Revenstorf & Keeser (1979), Revenstorf (1979), McCain & McCleary (1979) und Gottman (1981).

Zur Veranschaulichung einiger komplizierterer ARIMA (p,d,q)-Modelle wollen wir noch einige Beispiele geben. In Fig. 2.13 haben wir einen nichtstationären IMA-Prozeß vorliegen. Die Nichtstationarität geht auf stochastische Drift zurück, weil  $\theta_0$  nichtsignifikant ist. Die Prozeßgleichung lautet (McCain & McCleary, 1979)

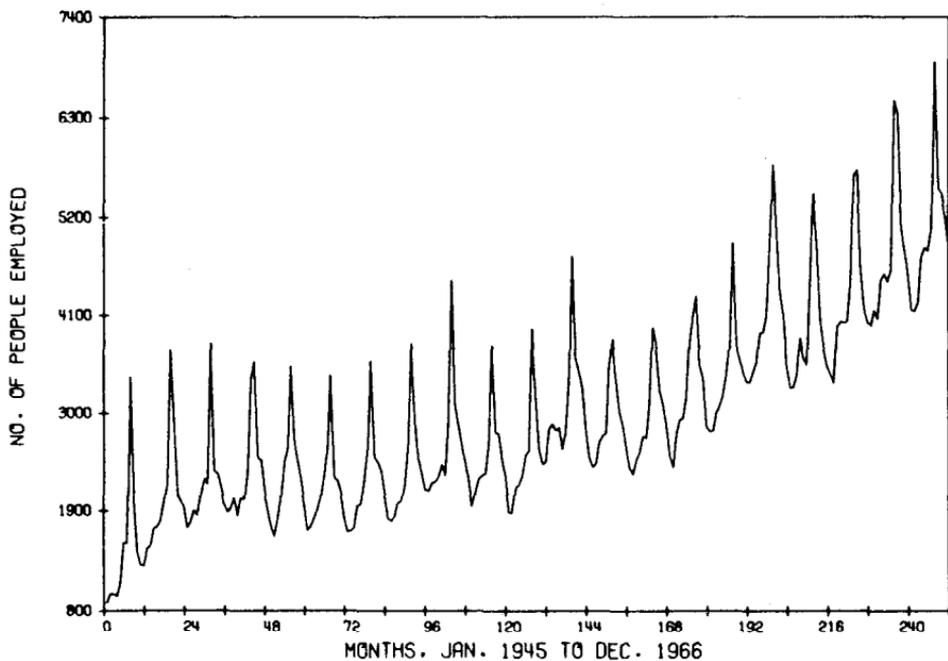


Fig. 2.13: Beispiel für einen ARIMA (0,1,1) (0,1,1),,-Prozeß

$$(2.35a) \quad (1 - B)(1 - B^{12}) Y_t = (1 - .60B)(1 - .68B^{12}) a_t$$

oder

$$(2.35b) \quad Y_t = \frac{(1 - .60B)(1 - .68B^{12})}{(1 - B)(1 - B^{12})} a_t$$

Ein Beispiel für einen in der Varianz nichtstationären Prozeß finden wir in Fig. 2.14:

Die Prozeßgleichung lautet:

$$(2.36) \quad \ln(Y_t) = \frac{(1 - .4321B)(1 - .1884B^{12})}{(1 - B)} a_t$$

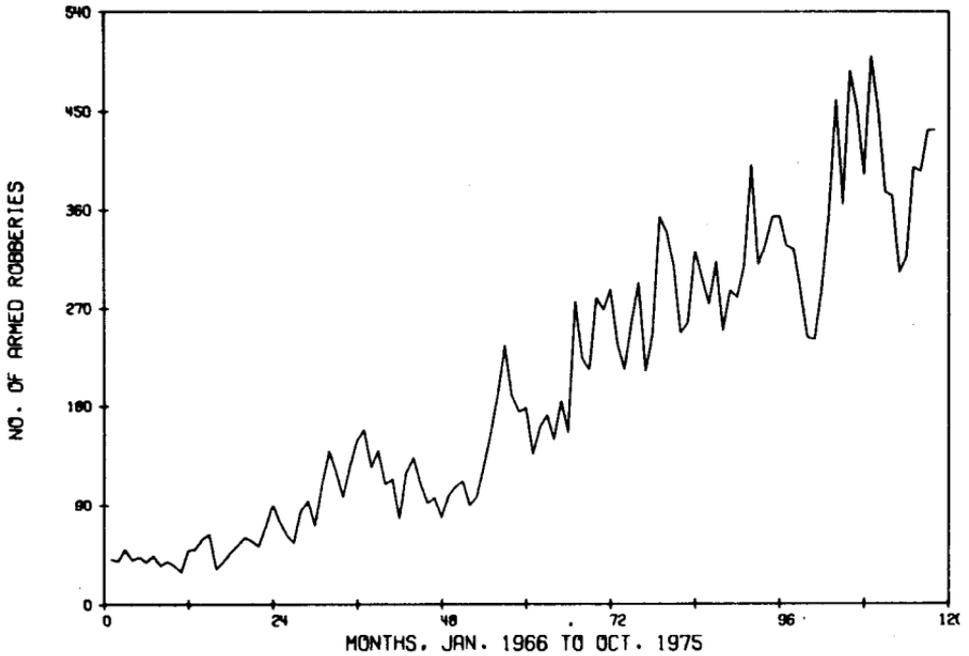


Fig. 2.14: Beispiel für einen ARIMA  $(0,1,1)(0,0,1)_{12}$  für  $\ln(Y_t)$  ( $Y_t$  = Zahl der bewaffneten überfälle in Boston 1966-75)

## 2.8 Multiple Zeitreihenanalyse : Transferfunktionsmodelle

Unter multipler Zeitreihenanalyse verstehen wir die Analyse eines Bedingungs-zusammenhangs einer abhängigen und mehrerer unabhängigen Variablen. Das Modell dieses Zusammenhangs ist die Transferfunktion. Die von Box & Jenkins (1976) vorgeschlagenen Transferfunktionsmodelle können als dynamische Form der multiplen Regression verstanden werden. Wie leicht einzusehen ist, sind Fragestellungen, in denen die Beziehung zwischen einer unabhängigen und mehrerer unabhängiger Variablen untersucht werden soll, nicht mit univariaten Analysen zu beantworten. Multiple Variablenzusammenhänge können z.B. bei folgenden Fragestellungen auftreten: In welcher Weise (a) wirkt sich das Wetter auf das Befinden von Personen aus? (b) wirken sich ökonomische Variable (z.B. Arbeitslosigkeit) auf Verhalten (z.B. Suizidneigung) (Vigderhous, 1978) aus? (c) beeinflussen Tokens das Verhalten eines Probanden im Verlauf einer Therapie (d) verändern neue Telefongebühren die „Telefongewohnheiten“ (McSweeny, 1978)?

Allen Beispielen ist trotz inhaltlicher Verschiedenheiten die Heraushebung einer unabhängigen und einer abhängigen Variablen gemeinsam. Die hypothe-

tische Beeinflussung der abhängigen Variablen im Verlauf der Zeit läßt sich am besten graphisch darstellen (s. Figur 2.15).

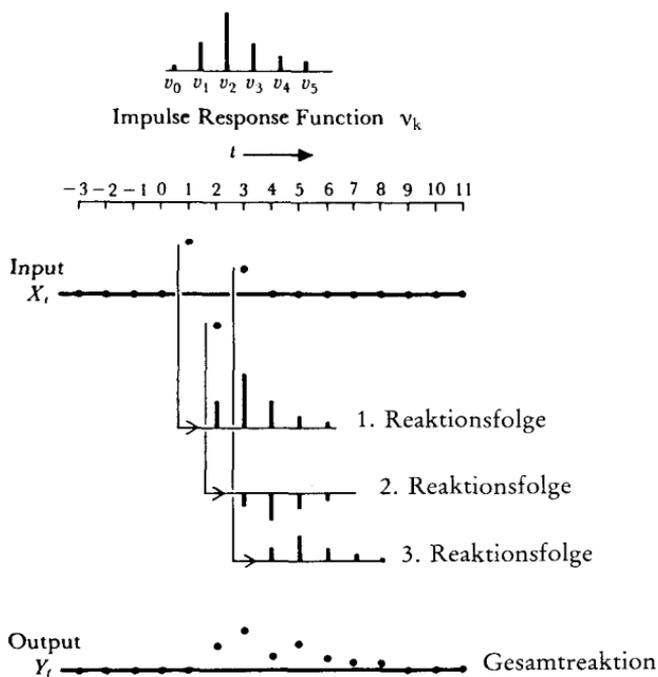


Fig. (2.15): Lineare Beeinflussung (Transfer) der abhängigen Variablen  $Y_t$  durch die unabhängige Variable  $X_t$  im Verlauf der Zeit  $t = -\infty, \dots, +\infty$

Greifen wir zur Erklärung von Figur (2.15) das inhaltliche Beispiel c) heraus. Der Input  $X_t$  sei charakterisiert durch die Tokengabe (zum Zeitpunkt  $t=1$  Übergabe von zwei Tokens, zum Zeitpunkt  $t=2$  Wegnahme von einem Token, zum Zeitpunkt  $t=3$  wiederum Übergabe von einem Token) und die abhängige Variable  $Y_t$  durch das Verhalten der Person. Aus diesen zwei Zeitreihen möchte man auf eine eventuell vorliegende Beziehung von  $X$  auf  $Y$  schließen. Ist  $X$  ein führender Indikator von  $Y$ ? Kann man diese Frage nicht verneinen, kann man untersuchen, in welcher Weise sich der Interventionseffekt über die Zeit hinweg auf  $Y$  verteilt. Diese zeitliche „Verschmierung“ des Interventionseffektes wird durch die Impuls-Response-Funktion  $v_k$  geleistet, wobei sich theoretisch die resultierende Reaktion  $Y_t$  aus einzelnen sich überlagernden Reaktionen zusammensetzt. So würde man sich bei Vorgabe von zwei Tokens zum einzigen Zeitpunkt  $t=1$  die erste Reaktionsfolge mit Maximum zu  $t=3$  denken. Würde allein ein Token zu  $t=2$  weggenommen, wäre nach dem Modell die zweite Reaktionsfolge mit negativem Maximum bei  $t=4$  zu erwarten. Hätte man dagegen zu  $t=3$  ein Token gegeben, würde nach dem Modell

die dritte Reaktionsfolge mit Maximum bei  $t=5$  eintreffen. Die drei Reaktionsfolgen auf die drei Einzeleingriffe setzen sich additiv zur Gesamtreaktionsfolge  $Y_t$  zusammen, wenn statt der isolierten Einzelhandlungen eine Interventionsfolge  $X_t$  auf der Therapeutenseite ablaufen würde. Zur Überprüfung der hypothetischen Modellannahmen dieses zugegebenermaßen sehr einfachen und nicht auf Interaktion ausgerichteten Modells benötigt man die Transferfunktionsanalyse.

Unter einer *bivariaten* Transferfunktion versteht man ein Modell, das die zeitlich verschobenen Einflüsse der exogenen Variablen  $X_t$  auf die abhängige Variable  $Y_t$  beschreibt:

$$(2.37) \quad Y_t = f(X_t) + N_t = Y_t^* + N_t$$

wobei:  $Y_t^*$  den Teil von  $Y_t$  enthält, der exakt durch die Variable  $X$  vorhergesagt bzw. erzwungen werden kann und  
 $N_t$  Prognosefehler und andere ausgelassene exogene Variable  $U, V, W, Z$  repräsentiert. Dabei folgt  $N_t$  einem  $ARIMA(p, d, q)$   $(P, D, Q)_s$ -Modell

(2.37) ähnelt dem Interventionsmodell in Kap. 3.1.3. Es gibt aber hierzu einen fundamentalen Unterschied. Da die Variable  $X$  nicht gesetzt, sondern beobachtet wird, muß das Transfermodell (2.37) empirisch identifiziert werden, bevor die Parameter geschätzt werden können. Es wird sich herausstellen, daß dieser Vorgang wesentlich schwieriger ist als die Aufstellung eines Interventionsmodells.

Die Beeinflussung von  $Y_t^*$  durch  $X_t$  läßt sich allgemein formulieren als Transfermodell ohne  $N_t$ -Komponente:

$$(2.38a) \quad Y_t^* - \delta_1 Y_{t-1}^* - \dots - \delta_r Y_{t-r}^* = \omega_0 X_{t-b} - \omega_1 X_{t-b-1} - \dots - \omega_s X_{t-b-s}$$

oder in Operatorschreibweise

$$(2.38b) \quad (1 - \delta_1 B - \dots - \delta_r B^r) Y_t^* = (\omega_0 - \omega_1 B - \dots - \omega_s B^s) X_{t-b}$$

oder kürzer

$$(2.38c) \quad \delta(B) Y_t^* = \omega(B) X_{t-b} = \omega(B) B^b X_t = \Omega(B) X_t$$

bzw.

$$(2.38d) \quad Y_t^* = \frac{\Omega(B)}{\delta(B)} X_t = \delta(B)^{-1} \Omega(B) X_t = \nu(B) X_t$$

Der lineare Filter (2.38d) kann ausführlich geschrieben werden:

$$(2.39) \quad Y_t^* = (\nu_0 + \nu_1 B + \nu_2 B^2 + \dots) X_t = \nu_0 X_t + \nu_1 X_{t-1} + \nu_2 X_{t-2} + \dots$$

Er enthält einen „moving average“ Operator  $w(B)$ , einen „autoregressiven“ Operator  $\delta(B)$  und einen Verzögerungsindex  $b$ , der angibt, um wieviel Zeiteinheiten später eine Änderung von  $X$  eine Änderung von  $Y$  initiiert. Die Indices  $r, s$  spiegeln das „Gedächtnis“ des Transfermodells wieder: „Soweit reicht die Beeinflussung der gegenwärtigen  $Y_t^*$  durch vergangene  $Y^*$ - und  $X$ -Werte. Die Formeln (2.38a-c) sind der Struktur- und die Formel (2.39) der reduzierten Form in Strukturgleichsmodellen (z. B. LISREL) vergleichbar. Der Filter (2.39) repräsentiert die Beziehung zwischen Input und Output, ohne die innere Struktur  $\Omega(B)$  und  $\delta(B)$  zu berücksichtigen. Sie ähnelt der multiplen Regression, wird aber „linearer Filter“ genannt, um den Bezug zur Zeitreihe deutlich zu machen. Das ursprüngliche Modell (2.37) läßt sich dann formulieren als

$$(2.40) \quad Y_t = \frac{\Omega(B)}{\delta(B)} X_t + N_t = \delta(B)^{-1} \Omega(B) X_t + N_t = v(B) X_t + N_t$$

und graphisch darstellen in Figur 2.16 und 2.17)

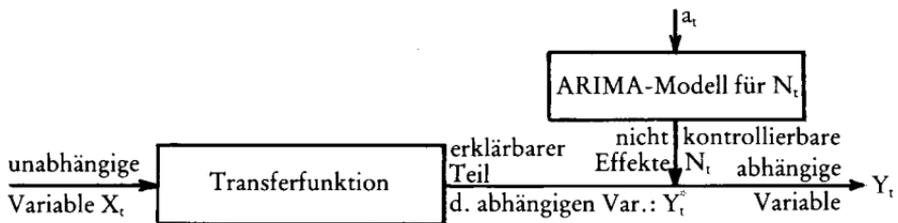


Fig. 2.16: Prozessmodell des Transfermodells (dynamische Form der multiplen Regression)

Sollte man aus inhaltlichen Gründen einen  $d_x$ -fach differenzierten Input mit einem  $d_y$ -fach differenzierten Output  $Y_t$  verknüpfen wollen, führt das zu:

$$(2.41) \quad (1-B)^{d_y} Y_t = v(B) (1-B)^{d_x} X_t + N_t$$

So sind z.B. bei der Fragestellung: „Werden die Veränderungen der Stimmung  $Y_t$  des Pb Z durch Veränderungen des Wetters  $X_t$  beeinflusst?“ Die Grade der Differenzenbildung sind  $d_x = d_y = 1$  und das Transfermodell nimmt dann die Form  $Y_t = Y_{t-1} + v_0(X_t - X_{t-1}) + N_t$  an.

Der Anteil  $N_t$  an  $Y_t$ , der durch  $X$  nicht erklärt wird, ist ein autokorrelierter Prozeß und daher kein weißes Rauschen  $a_t$ . In  $N_t$  sind neben Meßfehlern auch die Einflüsse ausgelassener Variabler enthalten, so daß  $N_t$  einem meist nicht-stationärem ARIMA(p,d,q) (P,D,Q)-Modell folgt.

Wir sehen jetzt, warum die Frage nach der Beeinflussung von  $Y_t$  durch  $X$  nicht mit der multiplen Regression beantwortet werden darf: (a) die Filterkoeffizienten  $v_k$  können nicht mit der normalen OLS-Regression geschätzt werden, weil die  $N_t$  sich nicht unabhängig verteilen und (b) die Filterkoeffizienten spiegeln nicht die direkten Effekte der verschiedenen  $X$  auf  $Y_t$  wieder. Die direkten Effekte sind nur durch die  $w$ -Parameter repräsentiert. Die Frage, die durch die  $w$ -Parameter von  $Q(B)$  beantwortet werden soll, lautet: „Gibt es in  $X_{t-i}$  direkte zusätzliche Effekte auf  $Y_t$ , die nicht schon in der Geschichte von  $Y_t$  enthalten sind, wobei die Geschichte von  $Y_t$  ja unter ständigem Einfluß der Zeitreihe  $X$  stand (s. Figur 2.17).

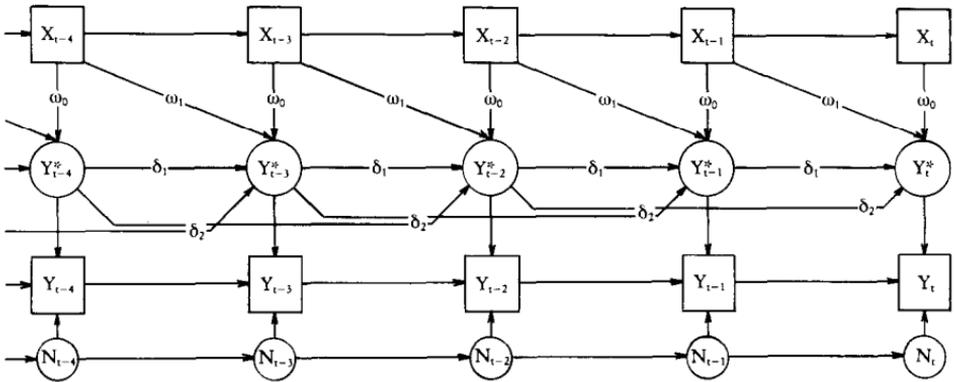


Fig. 2.17: Pfadmodell des bivariaten Transfermodells

$$(1 - \delta_1 B - \delta_2 B^2) Y_t = (\omega_0 - \omega_1 B) X_t + N_t$$

Zur Vervollständigung des Modells (2.40, 2.41) muß die Komponente  $N_t$  nach (2.18) oder (2.19) als ARIMA-Modell abgebildet werden:

$$(2.42a) \quad W_t - \mu_W = \frac{\theta(B)}{\varphi(B)} a_t \quad \text{mit} \begin{cases} W_t = (1-B)^{dN} N_t \\ \mu_W = E(W_t) = \text{Parameter, der} \\ \text{den deterministischen Trend} \\ \text{in } N_t \text{ bestimmt} \end{cases}$$

bzw.

$$(2.42b) \quad N_t = \frac{\mu_W}{(1-B)^{dN}} + \frac{\theta(B)}{(1-B)^{dN} \varphi(B)} a_t$$

Aus (2.40-2.42) läßt sich dann das vollständige Transfermodell mit Veränderungen auf  $X$  und  $Y$  und eventuell nichtstationärem  $N_t$  (s.a. Jenkins, 1979, S. 103) bilden:

$$(2.43a) \quad (1-B)^{dy} Y_t = \frac{\Omega(B)}{\delta(B)} (1-B)^{dx} X_t + \frac{\mu_w}{(1-B)^{dN}} + \frac{\theta(B)}{(1-B)^{dN} \varphi(B)} a_t$$

bzw.

$$(2.43b) \quad (1-B)^{dy+dN} Y_t - \mu_w = \frac{\Omega(B)}{\delta(B)} (1-B)^{dx+dN} X_t + \frac{\theta(B)}{\varphi(B)} a_t$$

Die Filterkoeffizienten  $v_j$  können, wie in Fig. 2.18 gezeigt wird, sehr stark mit den „Gedächtnisindices“  $r, s, b$  variieren.

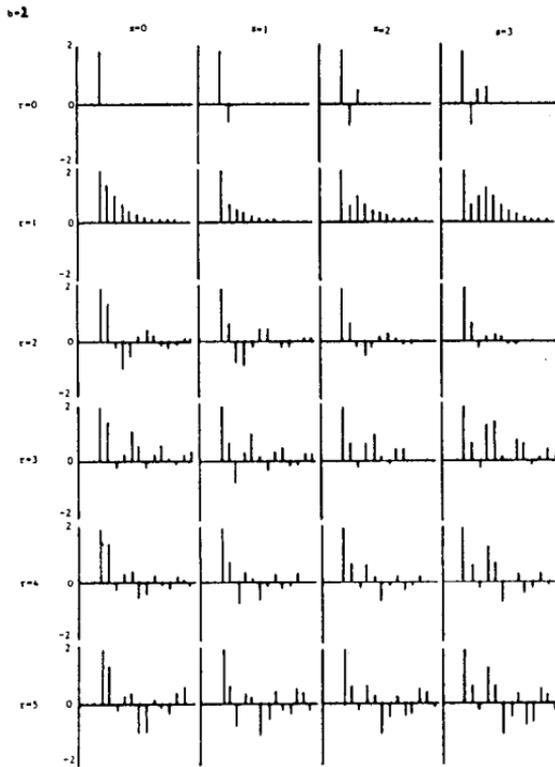


Fig. 2.18: Impuls Response-Parameter  $v_k$  für  $r = 0, 1, 2, 3$  und  $b = 2$  für den Parametersatz  $\delta_1 = .7, \delta_2 = .6, \delta_3 = -.4, \delta_5 = -.2, \omega_1 = .7, \omega_2 = -.5, \omega_3 = -.6$  des Transfermodells (2.38)

Im fehlerfreien theoretischen Modell (2.38) kann man bei Kenntnis der Filterkoeffizienten die Strukturparameter  $\delta$  und  $w$  nach bestimmten Regeln zurückrechnen (Box & Jenkins, 1976, Kap. 10.2.2). Bei der praktischen Datenanalyse sind aber neben den Parametern auch noch die Gedächtnisindices  $r$  und  $s$  sowie der Verzögerungsindex  $b$  unbekannt. Diese müssen festgelegt werden, bevor Parameter geschätzt werden können. Dieses Problem ähnelt der Frage, wieviel

Variable in eine multiple Regression aufzunehmen sind. Erleichtert wird die Beantwortung, wenn unkorrelierte Prädiktoren vorliegen. Bei der Zeitreihenanalyse geht man ähnlich vor.

Man transformiert alle Variablen des Transfermodells

$$(2.44) \quad (1-B)^{dy}Y_t = \frac{\Omega(B)}{\delta(B)} (1-B)^{dx}X_t + N_t$$

so daß die Autokorrelationen der unabhängigen Variablen  $(1-B)^{dx}X_t$  verschwinden. Man partialisiert also alle systematischen Anteile, die nur durch die „Geschichte“ in  $X$  erklärbar und somit redundant sind, heraus. Dieser Vorgang wird „Vorweißen“ genannt. Der vorgeweißte Input  $\alpha_t$  enthält nur noch „neue“ nicht vorhersagbare Information.

Damit die Gleichung (2.44) weiterhin gilt, müssen die Zeitreihen  $(1-B)^{dy}Y_t$  und  $N_t$  derselben Transformation unterworfen werden. Als Ergebnis erhalten wir den in seinen Variablen transformierten Filter:

$$(2.45) \quad \beta_t = v(B)\alpha_t + \varepsilon_t$$

Die neuen Variablenbeziehungen sind graphisch in Figur 2.19 dargestellt. Ein Vergleich mit Figur 2.17 zeigt den neuen - nicht mehr autokorrelierten - Input  $\alpha_t$ :

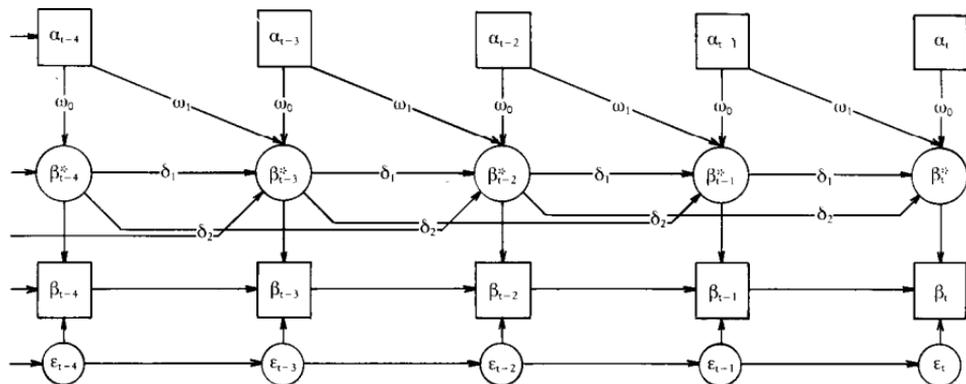


Fig. 2.19: Vorgeweißtes Transfermodell  $\beta_t = v(B)\alpha_t + \varepsilon_t$  mit nicht autokorreliertem Input  $\alpha_t$

Für die Identifikation benötigt man die Kreuzkorrelationsfunktion  $CCF(k) = \rho_{XY}(k)$  und die Kreuzkovarianzfunktion  $\gamma_{XY}(k)$ .

Bei einem bivariaten stationären Prozeß können wir eine Reihe von Kovarianzen betrachten (Figur 2.20)

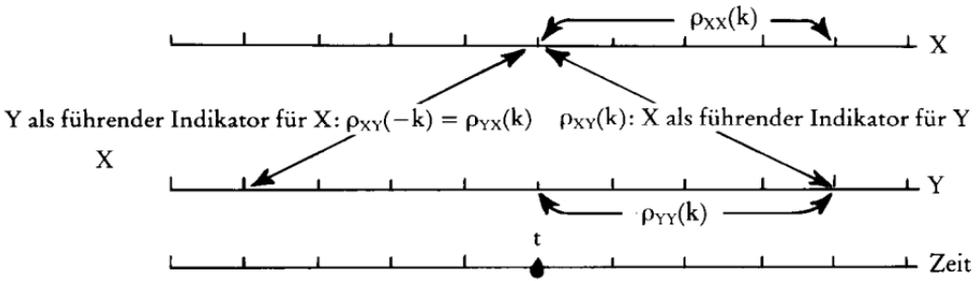


Fig. 2.20: Autokorrelationen und Kreuzkorrelationen eines bivariaten stochastischen Prozesses

Die Kreuzkovarianzen werden für stationäre Zeitreihen  $X_t$ ,  $Y_t$  definiert nach:

$$(2.46a) \quad \begin{aligned} \gamma_{xy}(k) &= E[(X_t - \mu_x)(Y_{t+k} - \mu_y)] & k=0,1,2,\dots \\ &= E[(X_{t-k} - \mu_x)(Y_t - \mu_y)] \end{aligned}$$

und

$$(2.46b) \quad \begin{aligned} \gamma_{yx}(k) &= E[(Y_t - \mu_y)(X_{t+k} - \mu_x)] & k=0,1,2,\dots \\ &= E[(Y_{t-k} - \mu_y)(X_t - \mu_x)] \end{aligned}$$

Die Korrelationsfunktion ergibt sich durch Division von (2.46) durch die Streuungen:

$$(2.47) \quad \rho_{xy}(k) = \gamma_{xy}(k) / (\sigma_x \sigma_y) \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Für die Identifikation des Transfermodells (2.38) ist wichtig, daß die Kreuzkorrelationen zwischen den vorgeweißten Prozessen für bestimmte Lags  $k$  gleich Null sind.

Man kann die Kreuzkorrelationen schätzen mit:

$$(2.48) \quad \text{cov}_{xy}(k) = \begin{cases} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-k} (X_t - \bar{X})(Y_{t+k} - \bar{Y}) & k = 0, 1, 2, \dots \\ \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T+k} (Y_t - \bar{Y})(X_{t-k} - \bar{X}) & k = 0, -1, -2, \dots \end{cases}$$

$$(2.49) \quad r_{xy}(k) = \text{cov}_{xy}(k) / (\sqrt{\text{cov}_{xx}(0)} \sqrt{\text{cov}_{yy}(0)}) \quad k = 0, \pm 1, \pm 2$$

Ein Beispiel für eine Anwendung der Kreuzkorrelation im Bereich der klinischen Psychologie findet sich bei Revenstorf & Keeser (1978) (s.a. Figur 2.21)

in einer Studie zu Steuerungsmöglichkeiten des Zigarettenkonsums. Von Interesse ist hier die Frage, ob die Motivation ein führender Indikator für Zigarettenkonsum in einer Therapie ist.

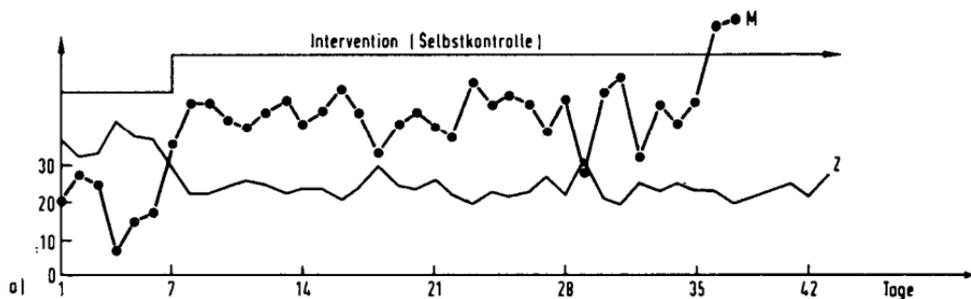


Fig. 2.21a: Zigarettenkonsum (Z) und Therapiemotivation (M) eines Rauchers an 42 aufeinander folgenden Tagen

Die beiden neuen durch Vorweißen gewonnenen Zeitreihen  $\alpha_t$  und  $\beta_t$  können jetzt zur Identifikation von  $r$ ,  $s$  und  $b$  herangezogen werden, da die Filterkoeffizienten  $v_k$  jetzt einfache mit Standardabweichungen verzerrte Kreuzkorrelationen sind

$$(2.50) \quad v_k = \rho_{\alpha\beta}(k) \frac{\sigma_\beta}{\sigma_\alpha}$$

Eine ähnliche Beziehung ist aus der Regression bekannt.

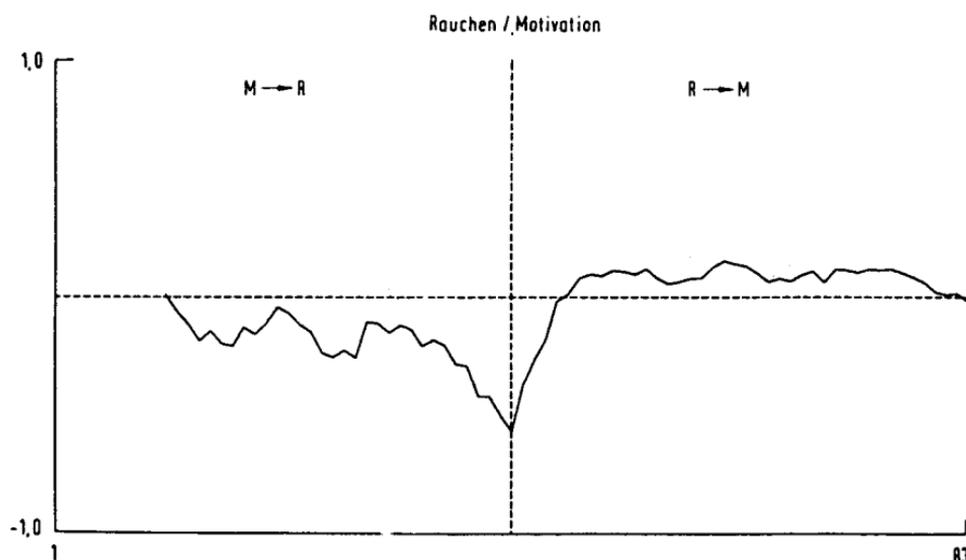


Fig. 2.21b: Kreuzkorrelationsfunktion von Zigarettenkonsum (Z) und Therapiemotivation (die vom Betrag größte Korrelation ist die synchrone Korrelation mit Lag  $k=0$ )

Dort ist das Regressionsgewicht ebenfalls eine mit den Maßstabstreuungen verzerrte Korrelation. Eine Schätzung für (2.50) ergibt sich nach

$$(2.51) \quad \hat{v}_k = r_{\alpha\beta}(k) \frac{s_\beta}{s_\alpha} \quad k=1,2,3,\dots$$

Hätte man die  $v_k$  mit den Originalzeitreihen schätzen wollen, wäre die Analogie zur Regression verloren gegangen, weil in die Schätzungen noch die Autokorrelation  $r_{\cdot}(k)$  der unabhängigen Variablen eingegangen wäre (s. a. McCleary & Hay, 1980, S. 248). Die Autokorrelationen der Zeitreihen treiben die Kreuzkorrelationen von X und Y hoch und suggerieren einen engen Zusammenhang.

Für die Kreuzkorrelationen zweier Variablen, von der die eine nur weißes Rauschen enthält (z.B.  $\alpha_t$ ), hat Bartlett (1955) eine Approximation für das 95%ige Konfidenzintervall

$$(2.52) \quad r_{\alpha\beta}(k) - \frac{2.0}{\sqrt{T-k}} < \varrho_{\alpha\beta}(k) < r_{\alpha\beta}(k) + \frac{2.0}{\sqrt{T-k}}$$

angegeben.

Sind die  $\hat{v}_k$  jetzt bekannt, können die „Gedächtnis“-indices r und s und der Verzögerungsindex b vorläufig bestimmt werden. Hinweise hierfür finden sich bei Box & Jenkins (1976<sup>3</sup>, S. 347).

## Schätzung und Modelltests

Schätzung und Modelltests verlaufen wieder nach einem iterativen Schema (Schätzung evtl. mit dem Computerprogramm von Pack, 1978):

1. Jede nichtstationäre Zeitreihe bis zur Stationarität differenziert
2. Das ARIMA-Modell für die unabhängige Variable X (2.44) wird invertiert (2.45) und der invertierte Operator wird auf alle Variablen des Transfer-N-Modells angewendet (Vorweißen) (2.45)
3. Die Kreuzkorrelationsfunktion der vorgeweißten Zeitreihen  $\alpha_t, \beta_t$  dient zur Identifikation des Transfermodells (s. Box & Jenkins, 1976<sup>3</sup>, S. 347). Die Residuen dieses Modells dienen zur Identifikation des  $N_t$ -Modells.
4. Schätzung aller Parameter des Transfermodells und des ARIMA-Modells des  $N_t$ -Prozesses (alle Parameter müssen signifikant und in den erlaubten Grenzen der Stabilität, Invertierbarkeit, Stationarität liegen)
5. Residuen des gesamten Modells müssen weißem Rauschen entsprechen und dürfen nicht mit dem Regressor  $X_t$  korrelieren (gilt für alle lags k): d.h. alle Kreuzkorrelationen zwischen den Residuen und X müssen nichtsignifikant sein.
6. Modellinterpretation

*Ein empirisches Beispiel*

In der Literatur sind bisher noch nicht viele Anwendungen der Transfermodelltechnik veröffentlicht worden. Ausnahmen sind Helmer & Johansson (1977) und Vigderhous (1978). Die Ergebnisse der letzten Arbeit sollen kurz referiert werden.

Ausgehend von inhaltlichen Überlegungen von Durkheims Theorie zum Selbstmord (1897) wollte Vigderhous den Einfluß der Arbeitslosenquote auf die Suizidneigung (hier: Suizidrate) in den USA untersuchen. Die Zeitreihe findet sich in Figur (2.22)

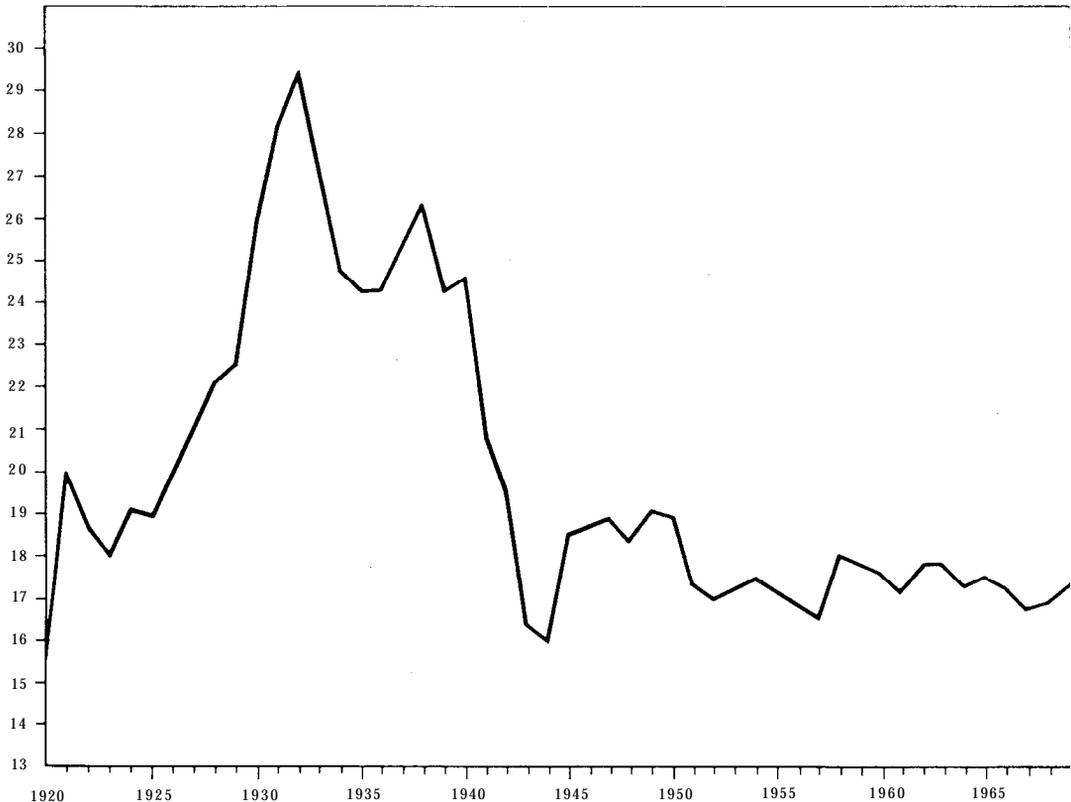


Fig. 2.22: Suizidraten pro 100000 Weiße männlichen Geschlechts zwischen 1920-1969

Das saisonale ARIMA(2,0,0)(0,0,1)<sub>10</sub>-Modell für die Zeitreihe  $X_t$  der unabhängigen Variablen „Arbeitslosenquote“ war:

$$(2.53) \quad X_t - \mu_x = \frac{(1 - \theta_{10} B^{10})}{(1 - \varphi_1 B - \varphi_2 B^2)} a_t = \frac{\theta(B)}{\varphi(B)} a_t \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} \hat{\mu}_x = 6.54 \\ \hat{\theta}_{10} = 0.38 \\ \hat{\varphi}_1 = 1.16 \\ \hat{\varphi}_2 = 0.29 \end{array}$$

Auffallend ist die moving-average-Komponente, die auf einen Zehnjahresrhythmus in der Arbeitslosenquote hindeutet. Mit Hilfe von (2.53) läßt sich  $X_t - \mu_x$  zu weißem Rauschen transformieren

$$(2.54) \quad \frac{\varphi(B)}{\theta(B)} (X_t - \mu_x) = \alpha_t = a_t$$

Dieselbe Transformation  $\varphi(B)/\theta(B)$  wird auf die abhängige Zeitreihe  $Y_t$  der Suicidraten und auf  $N_t$  angewendet. Man erhält dann die vorgeweißten Zeitreihen  $\beta_t$  und  $\varepsilon_t$  aus (2.45).

Die Schätzung der Impuls-Response-Parameter (2.51) des Filters (2.39 bzw. 2.45)

$$\hat{v}_0 = .36, \hat{v}_1 = -.007, \hat{v}_2 = .042, \hat{v}_3 = -.112 \quad \text{mit Index } b=0$$

deuten auf die Synchronität beider Zeitreihen hin. Entweder kovariieren beide ohne Zeitverzug (Lag = 0) (hängen also von einer gemeinsamen Drittvariablen ab), oder die Arbeitslosenquote übt einen sofortigen Einfluß auf die Suizidrate aus.

Das Transfermodell (2.43) wurde als

$$Y_t + 2.296 = 0.3529 X_t + \frac{1}{(1 - 0.84B)} a_t$$

geschätzt (Vigderhous, 1978, S. 44). Alle Parameter sind auf 5% signifikant.

## 2.9 Multivariate Zeitreihenanalyse

Die *univariate Zeitreihenanalyse* ist für Psychologen meist nur im Rahmen des Transfermodells (2.37) zur Abbildung der  $N_t$ -Komponente wichtig. Ähnlich liegen die Verhältnisse zwischen multivariater Zeitreihenanalyse und dem multivariaten Transfermodell. Das multivariate Transfermodell kann dabei als dynamische Erweiterung der multivariaten Regression angesehen werden, wobei die nicht durch unabhängige Variable kontrollierbaren Anteile der abhängigen Zeitreihen einem multivariaten stochastischen Prozeß folgen.

Nehmen wir z.B. die Interaktion einer Dyade. Die Zeitreihe  $Y_{1t}$  repräsentiert z.B. die Häufigkeit einer Verhaltenskategorie A zum Zeitpunkt t bei Person 1

und  $Y_{2t}$  die Häufigkeit einer Verhaltenskategorie B bei Person 2. Damit die geschätzte Beziehungsstruktur zwischen den beiden Zeitreihen von ihren jeweiligen Autokorrelationen nicht verfälscht wird, müssen die redundanten Teile der Zeitreihen aspartialisiert (d.h. „vorgeweißt“) werden. Folgen z.B.  $Y_{1t}$  und  $Y_{2t}$  den univariaten ARIMA-Modellen (2.18, 2.19):

$$(2.55a) \quad (1 - B)Y_{1t} = \theta_{10} + \alpha_{1t}$$

$$(2.55b) \quad (1 - B)Y_{2t} = \theta_{20} + (1 - \theta_{11}B)\alpha_{2t}$$

Analog zu der univariaten Zeitreihenanalyse wird jetzt die Beziehungsstruktur der beiden vorgeweißten Zeitreihen  $\alpha_{1t}$  und  $\alpha_{2t}$  mittels der Kreuzkorrelationsfunktion CCF(k) und der partiellen Kreuzkorrelationsfunktion PCCF(k) untersucht. Moving-average-Prozesse werden durch die CCF(k) und Kreuzregressive Komponenten durch die PCCF(k) identifiziert. Nehmen wir für unser Beispiel an, daß die PCCF(k) für alle k nichtsignifikant ist. Die CCF(k) soll den Verlauf von Figur 2.23 haben. Nur die zwei Kreuzkorrelationen  $r_{\alpha_1\alpha_2} (+1)$  und  $r_{\alpha_1\alpha_2} (-1)$  fallen aus dem 95%igen Konfidenzintervall (2.52) und sind somit signifikant von Null verschieden.

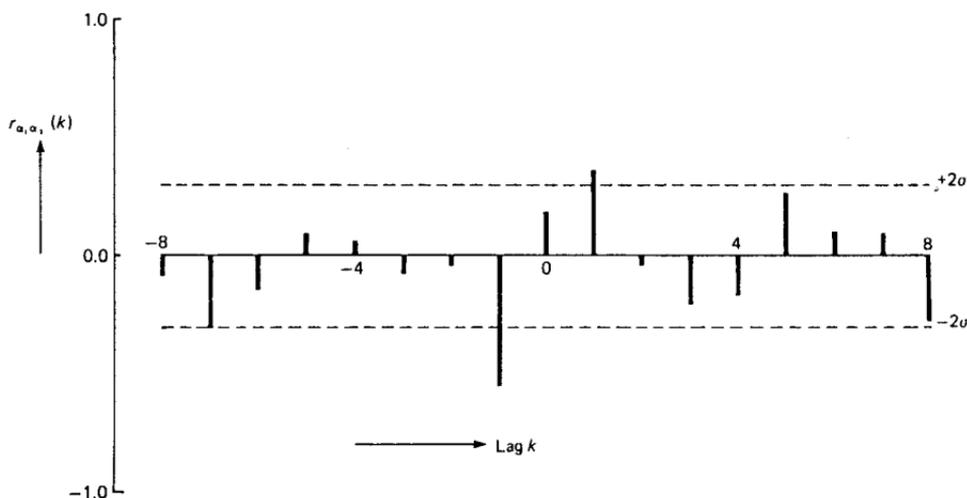


Fig. 2.23: Kreuzkorrelationsfunktion zwischen den zwei vorgeweißten Zeitreihen  $\alpha_{1t}$  und  $\alpha_{2t}$

Ein signifikantes  $r_{\alpha_1\alpha_2} (+1)$  und  $r_{\alpha_1\alpha_2} (-1)$  bedeutet bei gleichzeitigem nicht-signifikanten PCCF(k), daß für die  $\alpha_t$  ein bivariater Moving-Average-Prozess angesetzt werden muß:

$$(2.56a) \quad \alpha_{1t} = a_{1t} - \theta_{12}a_{2,t-1}$$

$$(2.56b) \quad \alpha_{2t} = -\theta_{21}a_{1,t-1} + a_{2t}$$

Setzt man (2.56) in (2.55) ein, erhält man

$$(2.57a) \quad (1 - B)Y_{1t} = \theta_{10} + a_{1t} - \theta_{12}Ba_{2t}$$

$$(2.57b) \quad (1 - B)Y_{2t} = \theta_{20} + (1 - \theta_{11}B)(-\theta_{21}Ba_{1t} + a_{2t}) \\ = \theta_{20} + (-\theta_{21}B + \theta_{11}\theta_{21}B^2)a_{1t} + (1 - \theta_{11}B)a_{2t}$$

oder allgemein in Operatorschreibweise

$$(2.58a) \quad \varphi_{11}(B)(1 - B)Y_{1t} = \theta_{10} + \theta_{11}(B)a_{1t} + \theta_{12}(B)a_{2t}$$

$$(2.58b) \quad \varphi_{22}(B)(1 - B)Y_{2t} = \theta_{20} + \theta_{21}(B)a_{1t} + \theta_{22}(B)a_{2t}$$

läßt sich (2.58) als Matrixgleichung schreiben:

$$(2.59) \quad \begin{bmatrix} \varphi_{11}(B) & \varphi_{12}(B) \\ \varphi_{21}(B) & \varphi_{22}(B) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (1 - B)^{d_1} Y_{1t} \\ (1 - B)^{d_2} Y_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_{10} \\ \theta_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \theta_{11}(B) & \theta_{12}(B) \\ \theta_{21}(B) & \theta_{22}(B) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1t} \\ a_{2t} \end{bmatrix}$$

mit:  $d_1 = d_2 = 1$

und den Operatoren:  $\varphi_{11}(B) = \varphi_{22}(B) = 1$   
 $\varphi_{12}(B) = \varphi_{21}(B) = 0$   
 $\theta_{11}(B) = 1, \theta_{12}(B) = -\theta_{12}$   
 $\theta_{21}(B) = (-\theta_{21}B + \theta_{11}\theta_{21}B^2)$   
 $\theta_{22}(B) = (1 - \theta_{11}B)$

(2.59) läßt sich noch kompakter formulieren als:

$$(2.60) \quad \Phi(B) (1 - B)^d Y_t = \Theta_0 + \Theta(B)a_t$$

Dabei ist (2.60) die multivariate Erweiterung zu (2.18b). Definiert man analog zu (2.19) den Prozeß in Abweichungen ( $W_t - \mu_w$ ) (mit  $W'_t = ((1 - B)^{d_1} Y_{1t}, \dots, (1 - B)^{d_m} Y_{mt})$ ) kann man (2.60) auch als

$$(2.61a) \quad \Phi(B)(W_t - \mu_w) = \Theta(B)a_t \quad \text{multivariates ARIMA}(P,d,Q)\text{-Modell}$$

$$(2.61b) \quad (W_t - \mu_w) = \Phi^{-1}(B)\Theta(B)a_t \quad \text{mit: } \mu_w = \Phi^{-1}(B)\Theta_0$$

schreiben (Jenkins, 1979, S. 111). Die  $a_t$  besitzen dabei die Kovarianzen  $\sigma_{ij} \neq 0$  für Lag  $k=0$  und  $\sigma_{ij} = 0$  für Lag  $k \neq 0$ . Das ARIMA(P,d,Q)-Modell läßt sich ebenfalls wie das univariate um saisonale Komponenten erweitern.

Die Stationaritätsbedingung verändert sich von der univariaten (2.30) zur multivariaten (2.62) und die Invertierbarkeitsbedingung von (2.32) zu (2.63). Die Wurzeln der Determinantengleichungen

$$(2.62) \quad |\varphi(\mathbf{B})| = 0 \quad \text{multivariate Stationaritätsbedingung}$$

$$(2.63) \quad |\theta(\mathbf{B})| = 0 \quad \text{multivariate Invertierbarkeitsbedingung}$$

müssen außerhalb des Einheitskreises in der komplexen Zahlenebene liegen.

Das Output-Modell eines multivariaten nichtseasonalen ARIMA(P,d,Q)-Modells findet sich in Fig. 2.24

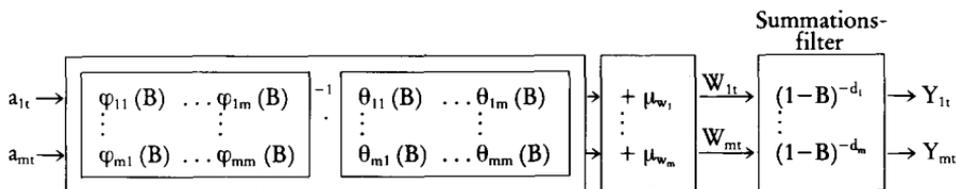


Fig. 2.24: Output-Modell eines multivariaten ARIMA-Modells

Auf andere Modellformen, die z.T. auch unkorrelierte  $\mathbf{a}_t$  zu einem Lag  $k=0$  zulassen, verweisen z.B. Granger & Newbold (1976, 1977), Box & Tiao (1977) sowie Jenkins (1979).

## 2.10 Multiple und multivariate Transfermodelle

### 2.10.1 Multiple Transfermodelle

Nach der Konzeption des multiplen Transfermodells beeinflussen mehrere unabhängige Zeitreihen  $\mathbf{X}_{jt}$  (=Inputs) eine abhängige Zeitreihe  $Y_t$ :

$$(2.64) \quad Y_t = f_1(\mathbf{X}_{1t}) + f_2(\mathbf{X}_{2t}) + \dots + N_t = Y_{1t}^* + Y_{2t}^* + \dots + N_t$$

Das Modell (2.64) kann als dynamische Erweiterung der multiplen Regression angesehen werden. Da jedoch die Kreuzkorrelationen autokorrelierter Zeitreihen sehr hoch und die Residuen ebenfalls autokorreliert sind, dürfen die Parameter des multiplen Transfermodells nicht nach der in der multiplen Regression üblichen Methode der kleinsten Quadrate geschätzt werden.

Wir erweitern den Ansatz des einfachen Transfermodells (2.40) entsprechend (2.64) auf mehrere Inputs  $\mathbf{X}_{jt}$  ( $j=1, \dots, n$ ):

$$(2.65) \quad Y_t = \frac{\Omega_1(\mathbf{B})}{\delta_1(\mathbf{B})} X_{1t} + \frac{\Omega_2(\mathbf{B})}{\delta_2(\mathbf{B})} X_{2t} + \dots + \frac{\Omega_n(\mathbf{B})}{\delta_n(\mathbf{B})} X_{nt} + N_t$$

Entsprechend (2.41) dürfen die Rohwerte  $Y_t, X_{jt}$  aus *inhaltlichen* Gründen unterschiedlich oft differenziert werden, so daß in (2.65) dann Differenzen statt Rohwerte auftauchen:

$$(2.66) \quad (1 - B)^{dY} Y_t = \sum_{j=1}^n \frac{\Omega_j(B)}{\delta_j(B)} (1 - B)^{dX_j} X_{jt} + N_t$$

Anschließend ist noch das eventuell nichtstationäre, saisonale ARIMA-Modell der  $N_t$ -Komponente zu identifizieren und die Parameter zu schätzen. Man erhält dann die multiple Erweiterung von (2.43). Die  $\alpha$ -Parameter werden wieder wie in (2.38) als direkte Effekte von  $X_{jt}$  auf  $Y_t$  interpretiert: „... given that the effect of  $X_t$  on  $Y_t$  may already be contained in the past history of  $Y_t$ , is there any additional information contained in  $X_t$ ?“ (Jenkins, 1979, S. 19).

Die Modellidentifikation des multiplen Modells erfolgt in mehreren Schritten. So wird jede  $X_{jt}$ -Zeitreihe zu  $\alpha_{jt}$  vorgeweißt. Derselben Transformation wird dann die eine abhängige Zeitreihe  $Y_t$   $m$ -fach unterworfen. Man erhält dann die Zeitreihen  $\beta_{jt}$ . Aus den Kreuzkorrelationsfunktionen  $\varrho_{\alpha_j \beta_j}(k)$  werden die Teilmodelle  $v_j(B) = \frac{\Omega_j(B)}{\delta_j(B)}$  vorläufig identifiziert. Danach müssen (a) ein ebenfalls vorläufiges ARIMA-Modell für  $N_t$  gefunden und (b) Modelltests durchgeführt werden. Als erste Approximation des ARIMA(p,d,q)-Modells für  $N_t$  wählt man oft das ARIMA(p,d,q)-Modell für  $Y_t$ . Natürlich muß dieser Versuch revidiert werden, wenn die Modelltests dieses anschließend fordern. Der Prozeß der Identifikation und Schätzung ist abgeschlossen, wenn das Modell nicht überparametrisiert ist, alle Parameter in den zulässigen Grenzen liegen (gilt auch für die Filterkoeffizienten  $v_j(B)$ : Stabilität des Transfermodells),  $a_t$  weißes Rauschen repräsentiert und minimale Fehlervarianz  $\sigma_a^2$  besitzt.

### 2.10.2 Multivariate Transfermodelle

Im multivariaten Transfermodell (einer dynamischen Erweiterung der multivariaten Regression) beeinflussen mehrere unabhängige Zeitreihen  $X_{jt}$  (= Inputs) mehrere abhängige Zeitreihen  $Y_{it}$  (= Outputs).

Wir setzen jetzt für jedes  $Y_{it}$  ( $i=1, \dots, m$ ) ein multiples Transfermodell (2.66) an und erhalten somit  $m$  Transferfunktionen:

$$(2.67) \quad (1 - B)^{dY_i} Y_{it} = \sum_{j=1}^n \frac{\Omega_{ij}(B)}{\delta_{ij}(B)} (1 - B)^{dX_{ij}} X_{jt} + N_{it}$$

$$= \sum_{j=1}^n v_{ij}(B) (1 - B)^{dX_{ij}} X_{jt} + N_{it}$$

Saisonale Modelle lassen sich in ähnlicher Weise formulieren.

Die  $m$  Komponenten  $N_{it}$  können zum stochastischen Vektor  $N_t$  zusammengefaßt werden. Er folgt einem eventuell nichtstationären, saisonalen multivariaten ARIMA-Prozeß. Nach mehreren Iterationen des Identifikations-Schätz- und Prüfverfahrens wird man dann das endgültige Modell aufgestellt haben. Das Input-Output-Modell ist schematisch in Fig. 2.25 dargestellt.

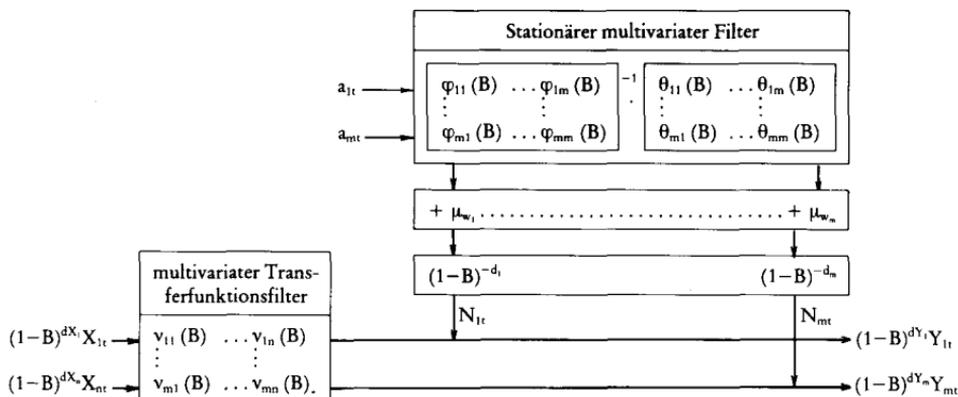


Fig. 2.25: Input-Output-Modell des multivariaten Transfermodells

### 3. Zeitreihenexperimente

( $T \geq 2$ ,  $M = 1$ )

Neben den klassischen Experimenten mit randomisierter Zuweisung von Personen auf die experimentellen Versuchsbedingungen haben in letzter Zeit die auf Campbell (1963) und Campbell & Stanley (1963, 1966) zurückgehenden Quasiexperimente an Boden gewonnen. In ihnen gibt es die Kontrolltechnik der Randomisierung nicht. Man unterscheidet zwei Hauptgruppen von Quasiexperimenten: a) das nichtäquivalente Kontrollgruppendesign (s. Cook & Campbell, 1979; Reichardt, 1979) und b) das Zeitreihenexperiment mit einer ganz bestimmten Versuchseinheit. In einem Zeitreihenexperiment werden vor und nach der Intervention längere Zeit Beobachtungen in festen Zeitabständen erhoben. In  $N = 1$  Studien, die auch „intensive designs“ genannt werden, besteht die Untersuchungseinheit meist aus einer nicht zufällig ausgewählten Person (s. McCain & McCleary, 1979). Für  $N > 1$ -Studien hat sich der Begriff „Querschnitt-Zeitreihenexperiment“ („Cross-sectional time series experiment“) eingebürgert (Simonton, 1977).

### 3.1 N = 1-Experimente

Es gibt u.a. zwei gewichtige Gründe für das intensive Design. Zum einen kann man daran interessiert sein, ob man das Verhalten einer ganz bestimmten Person ändern konnte (ob also eine Intervention erfolgreich war). Zum anderen kann man an der Effektivität eines Treatments interessiert sein, zugleich aber befürchten, daß das Treatment nur für einen kleinen Personenkreis anschlägt. In diesem Fall würde eine klassische Untersuchung, bei der ja Effekte über Personen aggregiert werden, u.U. keine signifikanten Ergebnisse bringen. Es ist dann angebracht, das Treatment an jeder einzelnen Person der Stichprobe zu prüfen.

Speziell in der verhaltenstherapeutisch orientierten klinischen Psychologie wurden eine Reihe von N=1 Designs betrachtet (Chassan, 1979<sup>2</sup>; Barlow & Hersen, 1973; Hersen & Barlow, 1976; Kazdin, 1976; Fichter, 1978; Tyler & Brown, 1968), die aber in den meisten Fällen auch bei  $N > 1$ -Untersuchungen hätten Anwendung finden können. Meist begnügt man sich nicht damit, nach einer gewissen Beobachtungszeit ein Treatment einzuführen, sondern man gliedert den Versuchsplan in mehrere A und B Phasen (z. B.  $A_1B_1A_2B_2$ ), wobei  $A_1$  in den sogenannten „base-line“-Designs eine präexperimentelle Beobachtungsphase darstellt. Diese wird dann von einer Treatment- oder B-Phase abgelöst. Dann folgt wieder eine Beobachtungs- oder Lösungsphase  $A_2$  etc. Ein Beispiel für ein  $A_1B_1C_1B_2C_2$  Experiment findet sich in Figur 3.1. Als akzeptablen Kompromiß zwischen Aufwand und Präzision wird von vielen Autoren das  $A_1B_1A_2B_2$ -Design bezeichnet.

Nach einer Beobachtungsphase (Basislinie)  $A_1$  erfolgt die Intervention  $B_1$ . Nach dem Absetzen der Intervention wird wieder eine Basislinie  $A_2$  beobachtet, der dann wieder eine Intervention  $B_2$  folgt. Untersuchungsziel ist es, Wechsel in den Werten der abhängigen Variablen  $Y_t$  nachzuweisen, die mit dem Wechsel in der unabhängigen Variablen (Intervention) korrespondieren. Dabei wird in der klinischen Praxis oft aus ethischen Gründen das Experiment nach der  $A_1B_1$ -Phase abgebrochen, weil der Verlauf der abhängigen Variablen „erfolgsversprechend“ und ein designgesteuertes Absetzen und Wiederaufnehmen des Treatments nicht Verantwortbar erscheint.

Es sind eine Reihe von Interventionseffekten denkbar (s. Figur 3.2), die auf ihre statistische Signifikanz hin überprüft werden können.

Dabei wirft die statistische Auswertung der Zeitreihenexperimente Probleme auf, die in den sonst üblichen Querschnittuntersuchungen mit Zufallsstichproben und randomisierter Zuteilung der Personen auf die experimentellen Bedingungen nicht auftreten.

So ist die externe Validität eines N=1 Zeitreihenexperiments gleich dreifach gefährdet (Levin, Marascuilo & Hubert, 1978): (a) Da die zu untersuchende

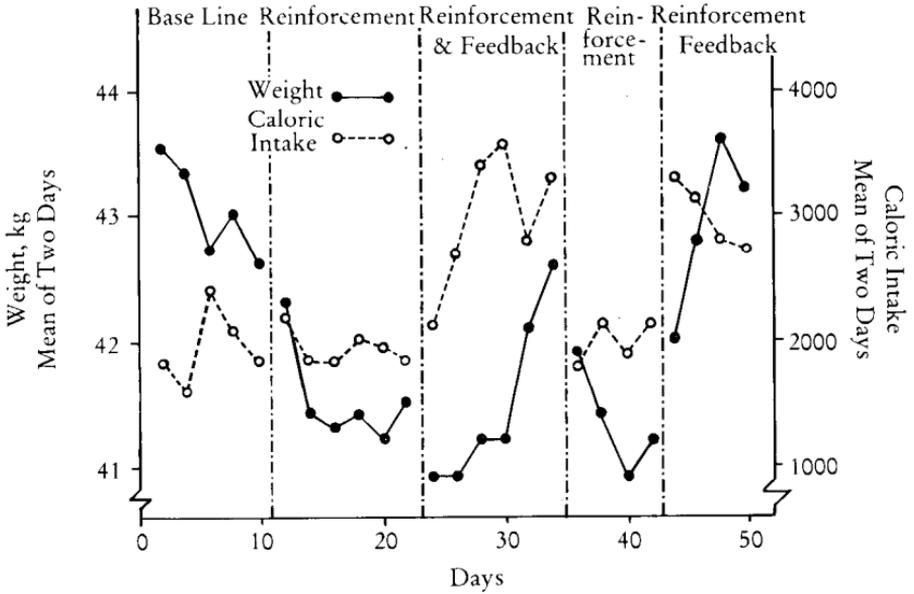


Fig. 3.1: Data from an experiment examining the effect of feedback on the eating behavior of a patient with anorexia nervosa (Patient 4). (Fig. 3, p. 283, from: Agras, W. S., Barlow, D. H., Chapin, H. N., Abel, G. G., and Leitenberg, H. Behavior modification of anorexia nervosa. *Archives of General psychiatry*, 1974, 30, 279-286. Reproduced by Permission.)

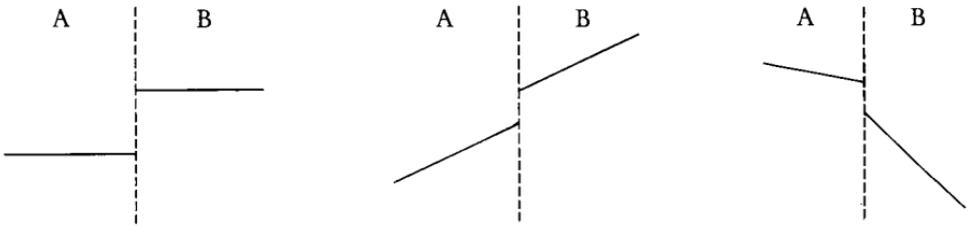


Fig. 3.2: Verlaufsmuster für die  $A_1B_1$ -Phasen eines AB-Designs

Person gezielt und nicht zufällig aus einer Population ausgewählt wurde, ist die Populationsvalidität (Bracht & Glass, 1968) nicht gegeben. Auch wird die Person nicht in zufällig ausgewählten Reiz/Situationskombinationen beobachtet, so daß (b) die ökologische Validität (Bracht & Glass, 1968) beeinträchtigt ist. Zum dritten sind die Beobachtungszeitpunkte oft ebenfalls nicht randomisiert ausgewählt worden, so daß (c) eine Generalisation der Untersuchungsergebnisse auf andere Zeitpunkte unzulässig ist („within-subject generalizability“).

limitation“). Allerdings sieht Edgington (1980, S. 248) allein in der Strategie der randomisierten Auswahl keine Lösung des Problems: „Thus neither random sampling of a population of subjects nor of a population of treatment times would justify the determination of significance by parametric probability tables for one-subject experimental data.“ (Edgington, 1980, S. 248)

Die interne Validität des N=1 Zeitreihenexperiments wirft ebenfalls Probleme auf, die nur teilweise lösbar sind. So liegt nur dann interne Validität vor, wenn alle äußeren Einflüsse so ausgeschaltet sind, daß die Ergebnisse nur durch experimentelle Manipulation erklärbar sind. Eine unerläßliche Bedingung für ein intern valides Experiment ist dabei die randomisierte Zuteilung von Personen auf experimentelle Bedingungen (Campbell & Stanley, 1966). Sie ist für N=1 Studien unerfüllbar. Es lassen sich aber die A und B Phasen in ihrer Reihenfolge randomisiert vorgeben. So meint Edgington (1980): „ . . . statistical tests whose significance is based on random assignment can be validly applied to one-subject experimental data when there has been random assignment of treatment times to treatments (Edgington, 1967; Revusky, 1967)“ (Edgington, 1980, S. 249).

Ein anderes Problem liegt in der u.U. vorliegenden seriellen Abhängigkeit der Daten bzw. der Residuen (wenn die Auswertung nach dem allgemeinen linearen Modell folgt (s.a. Moosbrugger, 1978). Sie kann durch Ermüdung, Lern- oder andere Carry-Over-Effekte entstehen. Tests, (z.B. t-Test, Varianzanalyse etc.), die von der Unabhängigkeit der Residuen ausgehen, sind in ihren Signifikanzaussagen daher oft irreführend (Hibbs, 1974). Sind die Residuen positiv autokorreliert, sind die berechneten t- oder F-Brüche „zu groß“, d.h.: Interventionen erscheinen als effektiv, während „in Wirklichkeit“ nur ein stochastischer Datentrend vorlag. Eine Reihe von Autoren (Shine & Bower, 1971; Gentile, Roden & Klein, 1972; Hartmann, 1974; Keselman & Leventhal, 1974) hat sich wegen unkorrekter Berücksichtigung der Abhängigkeit der Residuen z.T. heftiger Kritik ausgesetzt gesehen (Thoresen & Elashoff, 1974; Levin, Marascuilo & Hubert, 1978; Gottman & Glass, 1978; Bortz, 1977).

### *3.1.1 Verteilungsfreie Prüfmethode: Randomisierungs- bzw. Permutationstests*

Einfache Auswertungsverfahren, die speziell für Zeitreihenexperimente geeignet sind, bieten sich mit den Randomisierungs- oder Permutationstests an (Edgington, 1967, 1969a,b, 1971, 1973, 1975a,b, 1980). Dabei geht die prinzipielle Konstruktionsidee auf Fisher (1951<sup>6</sup>) zurück. Während die Prüfgrößen z.T. völlig äquivalent zu denen der klassischen statistischen Verfahren (t- oder F-Bruch aber auch einfache Mittelwerts- oder Mediandifferenzen) sein können, weichen Nullhypothesenformulierung und Inferenzmodell doch wesentlich vom klassischen Verfahren ab.

Beschänken wir uns hier auch wieder auf das intensive Design. Die Nullhypothese: „Kein Unterschied zwischen A und B Phasen“ wird geprüft im Vergleich mit einer bedingten Wahrscheinlichkeitsverteilung, die sich durch alle theoretisch möglichen Aufteilungen dieser gerade erhobenen Daten auf die Treatments A und B ergibt. So kann z.B. ein Experiment nach der Folge ABBAABA ablaufen. Sind wir an der Effektivität der B-Phasen interessiert, läßt sich d-unterschied zwischen A und B z.B. durch die Mittelwertsdifferenz  $\bar{Y}_B - \bar{Y}_A$  quantifizieren. Zur Signifikanzprüfung stellen wir fest, ob eine gleich große oder größere Mittelwertsdifferenz unter der Nullhypothese unwahrscheinlich ( $p \leq 0.05$ ) ist. Das hängt davon ab, inwieweit andere Aufteilungen der Daten in A und B Phasen eine mindestens ebenso große Mittelwertsdifferenz erbringen. Inferenz beschäftigt sich nicht mehr wie bei klassischen Experimenten mit der Generalisation über Personen und Situationen sondern mit der Generalisation über andere A vs. B Zuweisungen (Baseline vs. Treatmentzuweisungen). Die Nullhypothese wird beibehalten, wenn einfache Umbenennungen der experimentellen Phasen gleiche oder größere Unterschiede (hier: Mittelwertsdifferenzen) häufig auftreten lassen.

Lehmann (1975) bezeichnete dieses Inferenzmodell „Randomisierungsmodell“, das sich logisch vom üblichen „Stichproben/Populationsmodell“ abhebt. Es werden keine Populationsannahmen gemacht, da die beobachteten Daten die Rolle der Population übernehmen.

Wir wollen die Logik eines randomisierten Mittelwertvergleichs an einem numerischen Beispiel von Kazdin (1976) demonstrieren. Statt Mittelwerte können auch andere Maße der zentralen Tendenz (wie Mediane, Proportionen etc.) Verwendung finden. Es werden folgende Daten beobachtet:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	Tag
A <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	B <sub>2</sub>	A <sub>4</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>	Baseline A / Treatment B abhängige Var. Y <sub>t</sub>
20	50	15	10	60	25	65	70	
$\bar{Y}_A = 17.5$				$\bar{Y}_B = 61.25$				Mittelwerte
$\bar{Y}_B - \bar{Y}_A = 43.75$								Differenz

Zur Prüfung der einseitigen Fragestellung nach Überlegenheit von B muß untersucht werden, wie oft andere Aufteilungen der Daten in zwei Gruppen größere Mittelwertsdifferenzen liefern. Es lassen sich  $(n_A + n_B)! / (n_A! n_B!) = 8! / (4! 4!) = 70$  Aufteilungen (Permutationen) der 8 Datenwerte in jeweils zwei 4er Gruppen A' und B' finden. Die vier Aufteilungen mit den größten Mittelwertsdifferenzen sind:

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	Tag	$\bar{Y}_A$	$\bar{Y}_B$	Differenz
1. Aufteilung	A <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	B <sub>2</sub>	A <sub>4</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>	17.50	61.25	43.75	
2. Aufteilung	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	A <sub>4</sub>	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>	23.75	55.00	31.25	
3. Aufteilung	B <sub>1</sub>	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	B <sub>2</sub>	A <sub>4</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>	25.00	53.75	28.75	
4. Aufteilung	A <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	A <sub>4</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>	26.25	52.50	26.25	

Da die Wahrscheinlichkeit, durch andere Aufteilungen der Daten gleiche oder größere Mittelwertsdifferenz als die beobachtete zu erhalten, kleiner als  $p=0.05$  ist (nämlich  $1/70=0.014$ ) wird die Nullhypothese verworfen.

Die Reduktion der Daten zu *Phasenmittelwerten* (oder anderen Summationsmaßen) bringt, wie Levin et al. (1978) gezeigt haben, beträchtliche Vorteile bei der Analyse autokorrelierter Daten. Die Mittelwerte weisen eine stark reduzierte Autokorrelation gegenüber der Originalzeitreihe auf. Besitzt der stochastische Prozeß der Rohdaten z.B. folgende Autokorrelationsfunktion  $\rho(Y_t, Y_{tj}) = \rho^{|j-t|} \geq 0.0$ , ist die Autokorrelation erster Ordnung für Mittelwerte, die aus 6 Einzeldaten pro Phase A oder B berechnet wurden, gleich .094, wenn die Autokorrelation der Rohdaten gleich .40 war. Ist die Autokorrelation erster Ordnung der Variablen gleich .70, ist die Autokorrelation der Mittelwerte, die aus 9 aufeinander folgenden Einzelwerten berechnet wurden, nur noch .199.

Wir wollen an einem Beispiel die Auswertung des häufig verwendeten  $A_1B_1A_2B_2$ -Designs mit Mittelwerten demonstrieren. Obwohl wir hier einen Mittelwertvergleich anstellen, sind wir nicht darauf beschränkt. Andere Zentralitätsmaße (Mediane, Proportionen etc.) führen zur gleichen Auswertungs- und Testprozedur. Im Experiment wurden folgende Daten beobachtet:

1.	2.	3.	4. Phase	
A <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	B <sub>2</sub>	
2.0	7.0	3.0	8.0	Mittelwerte $\bar{Y}_t$
$(7.5 - 2.5) = (\bar{Y}_B - \bar{Y}_A) = 5.0$				Differenz

Zur Überprüfung der einseitigen Fragestellung, ob  $\bar{Y}_B$  signifikant größer ist als  $\bar{Y}_A$ , muß untersucht werden, wie oft andere Aufteilungen der Daten in zwei Gruppen mindestens ebenso große Mittelwertsdifferenzen liefern. Es lassen sich  $(n_A + n_B)! / (n_A! n_B!) = 4! / (2! 2!) = 6$  Aufteilungen (Permutationen) finden:

Aufteilung	1.	2.	3.	4.	Phase	$\bar{Y}_{A'}$	$\bar{Y}_{B'}$	$\bar{Y}_{B'} - \bar{Y}_{A'}$
1	A' <sub>1</sub>	A' <sub>2</sub>	B' <sub>1</sub>	B' <sub>2</sub>	4.5	5.5	1.0	
2	A' <sub>1</sub>	B' <sub>1</sub>	A' <sub>2</sub>	B' <sub>2</sub>	2.5	7.5	5.0	
3	A' <sub>1</sub>	B' <sub>1</sub>	B' <sub>2</sub>	A' <sub>2</sub>	5.0	5.0	0.0	
4	B' <sub>1</sub>	A' <sub>1</sub>	A' <sub>2</sub>	B' <sub>2</sub>	5.0	5.0	0.0	
5	B' <sub>1</sub>	A' <sub>1</sub>	B' <sub>2</sub>	A' <sub>2</sub>	7.5	2.5	-5.0	
6	B' <sub>1</sub>	B' <sub>2</sub>	A' <sub>1</sub>	A' <sub>2</sub>	5.5	4.5	-1.0	

Da die Wahrscheinlichkeit, durch eine andere Aufteilung eine mindestens ebenso große Mittelwertsdifferenz wie die beobachtete zu finden, größer als .05 ist (nämlich exakt 1/6), wird die Nullhypothese beibehalten. Da dieses  $p=1/6=.16$  nach den üblichen Standards zu groß ist, kann das  $A_1B_1A_2B_2$ -Design nicht über Mittelwertvergleiche innerhalb des Randomisierungsinferenzmodell ausgewertet werden! Fügt man eine weitere Baselinephase an ( $A_1B_1A_2B_2A_3$ -Design), lassen sich zwar  $5!/(3!2!) = 10$  Aufteilungen der 5 Mittelwerte finden. Das kleinste  $p$  ist aber im günstigsten Fall bei einseitiger Fragestellung ebenfalls mit  $p=1/10=.10$  zu hoch.

### Ordinale Gewichtungsschemata bei Randomisierungstests

Um ein noch kleineres  $p$  zu erhalten, müssen gerichtete Hypothesen geprüft werden. Eine gerichtete Alternativhypothese ist z.B.:

$$\mu_{A_1} < \mu_{A_2} < \mu_{B_1} < \mu_{B_2} \text{ oder: } \mu_{A_1} < \mu_{A_2} < \{\mu_{B_1}, \mu_{B_2}\}$$

Aus dieser Hypothese leitet sich das ordinale Gewichtungsschema ab: die  $\bar{Y}$  werden entsprechend der prognostizierten Größe mit ihren Rängen gewichtet:

$$g_{A_1} = 1, g_{A_2} = 2, g_{B_1} = 3, g_{B_2} = 4$$

Mit diesen Gewichten werden die empirisch erhaltenen Maße (Mittelwerte, Mediane, Proportionen) multipliziert und aufsummiert:

$$\bar{Y}_{A_1} = 2.0, \bar{Y}_{A_2} = 3.0, \bar{Y}_{B_1} = 7.0, \bar{Y}_{B_2} = 8.0$$

$$\Gamma_{\text{emp}} = \sum_{t=1}^4 g_t \bar{Y}_t = 1 \times 2.0 + 2 \times 3.0 + 3 \times 7.0 + 4 \times 8.0 = 61.0$$

Es bleibt zu prüfen, wie groß die Auftretenswahrscheinlichkeit einer mindestens ebenso großen Summe  $\Gamma$  ist, wenn man die Zuordnung (Benennung) der Maße zu den Phasen  $A_1 - B_2$  permutiert. Die Verteilung der gewichteten Summen  $\Gamma_k$  findet sich in Tabelle 3.1.

Tabelle 3.1: Verteilung gewichteter Summen  $\Gamma_k$  unter der Nullhypothese in einem ABAB-Design

Permutation	1.	2.	3.	4.	Experimentelle Phase	$\Gamma$
K	2.0	7.0	3.0	8.0	Mittelwerte	
1	A' <sub>1</sub>	A' <sub>2</sub>	B' <sub>1</sub>	B' <sub>2</sub>		57
2	A' <sub>1</sub>	A' <sub>2</sub>	B' <sub>2</sub>	B' <sub>1</sub>		52
3	A' <sub>1</sub>	B' <sub>1</sub>	A' <sub>2</sub>	B' <sub>2</sub>		61
4	A' <sub>1</sub>	B' <sub>1</sub>	B' <sub>2</sub>	A' <sub>2</sub>		51
5	A' <sub>1</sub>	B' <sub>2</sub>	A' <sub>2</sub>	B' <sub>1</sub>		60
6	A' <sub>1</sub>	B' <sub>2</sub>	B' <sub>1</sub>	A' <sub>2</sub>		55
7	A' <sub>2</sub>	A' <sub>1</sub>	B' <sub>1</sub>	B' <sub>2</sub>		52
8	A' <sub>2</sub>	A' <sub>1</sub>	B' <sub>2</sub>	B' <sub>1</sub>		47
9	A' <sub>2</sub>	B' <sub>1</sub>	A' <sub>1</sub>	B' <sub>2</sub>		60
10	A' <sub>2</sub>	B' <sub>1</sub>	B' <sub>2</sub>	A' <sub>1</sub>		45
11	A' <sub>2</sub>	B' <sub>2</sub>	A' <sub>1</sub>	B' <sub>1</sub>		59
12	A' <sub>2</sub>	B' <sub>2</sub>	B' <sub>1</sub>	A' <sub>1</sub>		49
13	B' <sub>1</sub>	A' <sub>1</sub>	A' <sub>2</sub>	B' <sub>2</sub>		51
14	B' <sub>1</sub>	A' <sub>1</sub>	B' <sub>2</sub>	A' <sub>2</sub>		41
15	B' <sub>1</sub>	A' <sub>2</sub>	A' <sub>1</sub>	B' <sub>2</sub>		55
16	B' <sub>1</sub>	A' <sub>2</sub>	B' <sub>2</sub>	A' <sub>1</sub>		40
17	B' <sub>1</sub>	B' <sub>2</sub>	A' <sub>1</sub>	A' <sub>2</sub>		53
18	B' <sub>1</sub>	B' <sub>2</sub>	A' <sub>2</sub>	A' <sub>1</sub>		48
19	B' <sub>2</sub>	A' <sub>1</sub>	A' <sub>2</sub>	B' <sub>1</sub>		45
20	B' <sub>2</sub>	A' <sub>1</sub>	B' <sub>1</sub>	A' <sub>2</sub>		40
21	B' <sub>2</sub>	A' <sub>2</sub>	A' <sub>1</sub>	B' <sub>1</sub>		49
22	B' <sub>2</sub>	A' <sub>2</sub>	B' <sub>1</sub>	A' <sub>1</sub>		39
23	B' <sub>2</sub>	B' <sub>1</sub>	A' <sub>1</sub>	A' <sub>2</sub>		48
24	B' <sub>2</sub>	B' <sub>1</sub>	A' <sub>2</sub>	A' <sub>1</sub>		43

Da die beobachtete Reihe von Mittelwerten in einer ordinal gewichteten Summe  $\Gamma$  von 61 resultiert und die Wahrscheinlichkeit, unter der Nullhypothese eine mindest ebenso große Summe zu erhalten, gering ist, (s.a. rechte Spalte in Tab. 3.1) wird  $H_0$  zugunsten von  $H_1$  verworfen: Die Phasen unterscheiden sich signifikant.

#### *Nichtordinale Gewichtungsschemata und Kontraste*

Statt eines ordinalen Gewichtungsschema ist auch ein Intervall- oder Verhältnisschema denkbar, je nachdem wie präzise die Vorhersagen über die empirischen

Maße formuliert werden. Differenzen (Verhältnisse) zwischen den Gewichten entsprechen den erwarteten oder prognostizierten Differenzen (Verhältnissen) in den Summationsmaßen.

Andere Gewichtungsschemata werden als lineare Kontraste verwendet. Ein Beispiel für eine verbal formulierte Hypothese findet sich bei Elashoff & Thorrens (1978, S. 308). Besteht das Experiment z.B. aus fünf Phasen  $A_1B-C_1A_2C_2$  und prognostiziert man (Alternativhypothese  $H_1$ ), daß einerseits die Maße folgende Rangreihe aufweisen:

$$\{\mu_{A_1}, \mu_{A_2}\} < \mu_B < \{\mu_{C_1}, \mu_{C_2}\}$$

und andererseits der Unterschied der A Phasen zur B Phase genauso groß ist wie der Unterschied der C-Phasen zur B-Phase, muß folgende Gleichung gelten

$$((\mu_{A_1} - \mu_B) + (\mu_{A_2} - \mu_B)) = ((\mu_{C_1} - \mu_B) + (\mu_{C_2} - \mu_B))$$

bzw.

$$1 \mu_{A_1} + 1 \mu_{A_2} - 1 \mu_{C_1} - 1 \mu_{C_2} = 0$$

Das Gewichtungsschema lautet dann:

$$g_{A_1} = 1, g_B = 0, g_{C_1} = -1, g_{A_2} = 1, g_{C_2} = -1$$

Die Signifikanz wird dann nach dem üblichen Schema beurteilt: a) Berechnung des  $\Gamma_{emp}$ , der Verteilung der  $\Gamma_k$  unter der Nullhypothese über Permutationen, b) Vergleich des empirisch gewonnenen  $\Gamma_{emp}$  mit der über Permutationen abgeleiteten Prüfverteilung.

Approximierte Prüfverteilung beim Randomisierungstest

Liegen mehr als vier Phasen vor, wird die Ableitung der exakten Verteilung von  $\Gamma$  aufwendig, da die Zahl der zu beachtenden Permutationen stark ansteigt. Bei mindestens vier A-Phasen ( $A_1A_2A_3A_4$ ) und vier B-Phasen ( $B_1B_2B_3B_4$ ) ist die durch ein Gewichtungsschema bestimmte Summe  $\Gamma_k = \sum g_{ik} \bar{Y}_t$  annähernd normalverteilt (Levin, Marascuilo & Hubert, 1978). Die Signifikanz von  $\Gamma_{emp}$  läßt sich an Hand des folgenden z-Wertes prüfen:

$$(3.1) \quad Z_{emp} = \frac{(\Gamma_{emp} - E(\Gamma))}{\sqrt{\text{Var}(\Gamma)}}$$

$$\text{mit } E(\Gamma) \approx \frac{1}{n} \left( \sum_{t=1}^n g_t \right) \left( \sum_{t=1}^n \bar{Y}_t \right)$$

$$\text{und Var } (\Gamma) \approx \frac{1}{n-1} \left[ \sum_{t=1}^n (g_t - \bar{g})^2 \right] \left[ \sum (Y_t - \bar{Y})^2 \right]$$

Als Beispiel soll ein Experiment von acht Phasen dienen ( $A_1 A_2 A_3 A_4 B_1 B_2 B_3 B_4$ -Design). Es wurden die Mittelwerte

$$\bar{Y}_{A_1} = .1, \bar{Y}_{A_2} = .3, \bar{Y}_{A_3} = .4, \bar{Y}_{A_4} = .8, \bar{Y}_{B_1} = .2, \bar{Y}_{B_2} = .5, \bar{Y}_{B_3} = .6, \bar{Y}_{B_4} = .7$$

beobachtet. Die vor dem Experiment aufgestellte Alternativhypothese  $H_1$

$$A_1 < A_2 < A_3 < A_4 < B_1 < B_2 < B_3 < B_4$$

führt zum ordinalen Gewichtungsschema:

$$g_{A_1} = 1, g_{A_2} = 2, g_{A_3} = 3, g_{A_4} = 4, g_{B_1} = 5, g_{B_2} = 6, g_{B_3} = 7, g_{B_4} = 8$$

und zur gewichteten Summe  $\Gamma = \sum_{t=1}^8 g_t \bar{Y}_t = 18.9$ . Der z-Wert ist

$$z = \left[ 18.9 - \frac{36 \times 3.6}{8} \right] / \sqrt{\frac{42 \times 0.42}{7}} = 1.702$$

Bei einseitiger Fragestellung auf dem 5% Niveau ist dieses Ergebnis nicht signifikant.

### 3.1.2 Verteilungsgebundene Prüfverfahren: Lineares Modell

Bei Verwendung linearer Auswertungsverfahren (t-Test, Varianzanalyse etc.) zur Prüfung von Veränderungen bei Längsschnittdaten ist wegen der möglichen seriellen Abhängigkeit der Daten Vorsicht geboten, weil die kritischen t- oder F-Brüche „zu groß“ sein können.

Beschränken wir uns hier wieder auf den Mittelwertvergleich in einem Vorher-Nachher-Design (AB Design). Wären die Daten unabhängig voneinander erhoben (z.B. zwei unabhängige Stichproben für die A- und die B-Phase) könnte man den normalen t-Test mit Hilfe des allgemeinen linearen Modells formulieren. Dabei haben wir von den verschiedenen Möglichkeiten zur Gestaltung der Designmatrix  $X$  eine Form gewählt, die für die Prüfung eines Niveaustiegs besonders sinnvoll erscheint. Wir wählen für das volle Modell:

$$(3.1.2a) \quad \begin{array}{c} Y_{A1} \\ \vdots \\ Y_{Ai} \\ \vdots \\ Y_{ANA} \\ \hline Y_{B1} \\ \vdots \\ Y_{Bj} \\ \vdots \\ Y_{BNB} \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline \beta_1 \\ \hline \beta_2 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \varepsilon_v \\ \hline \end{array}$$

$Y_{Ai}$  = Wert der abhängigen Variablen für die Person  $i$  in der Gruppe A  
 $Y_{Bj}$  = Wert der abhängigen Variablen für die Person  $j$  in der Gruppe B

oder kurz

$$(3.1.2b) \quad y = X_v \beta_v + \varepsilon_v$$

mit Fehlerquadratsumme

$$(3.1.3) \quad F_v^2 = \hat{\varepsilon}'_v \hat{\varepsilon}_v$$

Weisen die Gruppen hinsichtlich der Mittelwerte keine Unterschiede auf, darf der Niveaustiegparameter  $\beta_2$  nicht signifikant sein.

Statt  $\beta_2$  direkt auf Signifikanz zu prüfen, können wir aus dem unter der Alternativhypothese formulierten vollen Modell durch Einführung der Nullhypothese ein reduziertes Modell mit entsprechender Fehlerquadratsumme  $F_f$  herleiten. Die Nullhypothese lautet  $\beta_2=0$  (bzw.  $\mu_A=\mu_B$ ). Das reduzierte Modell nimmt folgende Gestalt an

$$(3.1.4a) \quad \begin{array}{|c|} \hline y_A \\ \hline y_B \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline \beta_r \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \varepsilon_r \\ \hline \end{array}$$

oder kurz

$$(3.1.4b) \quad y = X_r \beta_r + \varepsilon_r$$

mit Fehlerquadratsumme

$$(3.1.5) \quad F_r^2 = \hat{\epsilon}'_r \hat{\epsilon}_r$$

Die Nullhypothese läßt sich über einen F-Bruch prüfen, der in diesem 2-Gruppenfall zu den gleichen Schlüssen führt wie der übliche t-Test:

$$F_{df_1, df_2} = \frac{(F_r^2 - F_v^2)/df_1}{(F_v^2 - 0.0)/df_2} \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} df_1 = p_v - p_r \\ df_2 = N - p_v \end{array}$$

(3.1.6)  $p_v$  = Zahl der linear unabhängigen Prädiktoren im vollen Modell (hier: 2)

$p_r$  = Zahl der linear unabhängigen Prädiktoren im reduzierten Modell (hier: 1)

$N = (N_1 + N_2)$  = Größe der Gesamtstichprobe

Die Angemessenheit dieses Vorgehens hängt von der Gültigkeit der drei Annahmen (3.1.7) ab (s. Searle, 1971; Timm, 1975; Wottawa, 1974):

$$(3.1.7a) \quad y = X\beta + \epsilon \quad (\text{Gültigkeit des Linearmodells})$$

$$(3.1.7b) \quad E(\epsilon) = 0$$

$$(3.1.7c) \quad E(\epsilon\epsilon') = \sigma_\epsilon^2 I \quad (\text{Unabhängigkeit der Residuen})$$

mit  $I$  = Einheitsmatrix

Insbesondere (3.1.7c) ist eine für Längsschnittdaten kritische Annahme. Sie wird bei Querschnittdaten nicht überprüft, da man sich auf die Wirksamkeit der Randomisierung verläßt. Für den Fall abhängiger Messungen ist sie jedoch in der Regel verletzt.

Wollen wir den Niveauanstieg in der B-Phase nicht mehr wie in (3.1.2) und (3.1.4) mit zwei unabhängigen Stichproben sondern mit einer Stichprobe, die zweimal getestet wurde, würden sich in die Modelle (3.1.2) und (3.1.4) Paare voneinander abhängiger Residuen einschleichen. Hat nämlich die Person  $i$  im Durchgang A einen viel höheren (niederen) Wert  $Y_{iA}$  als der Durchschnitt der Gruppe (bzw. als der Gesamtdurchschnitt), sind die zu dieser Person gehörenden Residuen  $\epsilon_{Ai}$  und  $\epsilon_{Bi}$  einander ähnlich (d.h. sie korrelieren), weil wir erwarten, daß der zur Person gehörende 2. Meßwert  $Y_{Bi}$  auch über (bzw. unter) dem Durchschnitt bleibt.

Die diagonale Kovarianzmatrix der Residuen (3.1.7c) muß noch um mindestens einen Korrelationsparameter  $\rho$  erweitert werden zu (3.1.8) (S. 296).

Ignoriert man die Abhängigkeit der Residuen, werden bei positiver Korreliertheit die F-Brüche und damit der  $\alpha$ -Fehler zu groß: die Nullhypothese wird zu oft verworfen. Man kann auf drei Arten dieser Verfälschung entgehen: (a) Korrektur der Freiheitsgrade beim F-Bruch (Box, 1954; Geisser & Greenhouse, 1958; McCall & Applebaum, 1973), (b) Aufspaltung der korrelierten Resi-

(3.1.8)  $E(\varepsilon \varepsilon') = \sigma_\varepsilon^2 \Omega = \sigma_\varepsilon^2 \cdot$

10	0	$\rho_0$	0	1	} A		
01	0	0	$\rho_0$	0		} $\neq \sigma_\varepsilon^2 I$	
0	1	0	0	$\rho$			} N
0	0	0	0	1			
$\rho_0$	0	10	0	0	} B		
0	$\rho$	0	0	1		} N	
0	0	0	1	0			
0	0	0	0	1			

duen in Personeneffekte und unkorrelierte neue Fehler durch Erweiterung der Designmatrix  $X_v$  und  $X_r$  um Personenvektoren (McNeil, Kelly & McNeil, 1975; Pedhazur, 1977) und schließlich (c) multivariate Auswertung (Bock, 1975, 1979; Finn, 1968; Timm, 1975).

Ist man aber aus den verschiedensten Gründen nicht daran interessiert, die Effektivität der Intervention B an mehreren Personen zu prüfen, wendet man sich wieder dem intensiven Design (bzw. dem  $N=1$  Experiment) zu. Wird an einer Person eine Reihe von Meßwerten (= Zeitreihe) beobachtet, kann die Abhängigkeitsstruktur der Residuen wesentlich komplizierter aussehen als z.B. in (3.1.8)\*. So ist einer der allgemeinsten Fälle der theoretischen Abhängigkeitsstruktur (bei homogener Fehlervarianz  $\sigma_{\varepsilon_t}^2 = \sigma_\varepsilon^2$ ):

(3.1.9)  $E(\varepsilon \varepsilon') = \sigma_\varepsilon^2 \Omega = \sigma_\varepsilon^2 \cdot$

1	$\rho_1$	$\rho_2$	...	$\rho_{T-1}$	1	} A		
$\rho_1$	1	$\rho_1$	...	0	0		} 2	
$\rho_2$	$\rho_1$	1	...	0	0			} t
$\rho_3$	$\rho_2$	0	1	0	0			
...	0	0	$\rho_1$	1	0	} T		
0	0	0	$\rho_2$	$\rho_1$	1		} T	
0	0	0	0	0	0			} T
0	0	0	0	0	0			

Beachtet man nicht, daß eventuell  $\sigma_\varepsilon^2 \Omega \neq \sigma_\varepsilon^2 I$  ist, können auch im Zeitreihenexperiment die statistischen Schlüsse erheblich verfälscht werden. Die aus den Daten berechneten F- oder t-Werte sind „zu klein“ oder „zu groß“ (Scheffe, 1959; Gastwirth & Rubin, 1971; Glass, Peckham & Sanders, 1972; Hibbs, 1974; Gottman & Glass, 1978; Revenstorf & Keeser, 1979).

\* Ein autoregressiver Prozeß 1. Ordnung in den Residuen kann mit dem Durbin-Watson-Test geprüft werden (Makridakis & Wheelwright, 1978a,b)

Als Ausweg bietet sich an, die Modelle (3.1.2) und (3.1.4) mit einer zunächst noch unbekanntem Matrix  $A$  so zu transformieren, daß die neuen Residuen  $\varepsilon^+$  wieder unabhängig sind (Hibbs, 1974):

$$(3.1.10a) \quad Ay = AX\beta + A\varepsilon$$

$$(3.1.10b) \quad y^+ = X^+ \beta + \varepsilon^+ \text{ transformiertes Linearmodell}$$

$$(3.1.10c) \quad \Omega^+ = A \Omega A' = I \quad \text{transformierte Korrelationsmatrix der Residuen}$$

$$(3.1.10d) \quad E(\varepsilon^+ \varepsilon^{+'}) = E(A\varepsilon\varepsilon'A') = A E(\varepsilon\varepsilon')A' = \sigma_\varepsilon^2 A \Omega A' = \sigma_\varepsilon^2 I$$

Der Schätzer

$$(3.1.11) \quad \hat{\beta} = (X^{+'}X^+)^{-1}X^{+'}y^+$$

wird auch GLS-Schätzer (generalized least squares) genannt. Diese Regressionsmethode geht auf Aitken (1935) zurück.

Problematisch an der GLS-Methode ist die Schätzung der Matrix  $\Omega$ . Erst wenn man sie geschätzt hätte, ließe sich die Transformationsmatrix nach (3.1.10c) bestimmen. Da die Schätzung der  $Q_j$  bei einer endlichen Zeitreihe mit der Länge  $T$  immer ungenauer wird, je höher die Ordnung der Autokorrelation der Residuen ist, nimmt man für die Residuen einfache ARIMA-Prozesse an. Hierfür gibt Hibbs (1974) verschiedene Transformationsmatrizen  $A$  an.

Praktikabilität erreichte die Interventionsanalyse erst nach einem Artikel von Box & Tiao (1965), der von Glass, Willson & Gottman (1975) speziell für die praktische Einzelfalldiagnostik ausgearbeitet wurde. Da die stochastische Struktur der Residuen nicht bekannt ist, untersuchen Box & Tiao sowie Gottman et al. zuerst die stochastische Struktur der Rohwerte. In einem iterativen Prozeß werden dann ähnlich wie in (3.1.10a) eine Transformation des Datenvektors  $y$  und der Designmatrix  $X$  gesucht, so daß die Residuen den Annahmen des allgemeinen linearen Modells (3.1.7c) entsprechen. Wir wollen an drei Beispielen diese Art der Interventionstestung darstellen.

Folgen die Rohdaten einem moving-average-Prozeß 1. Ordnung (2.13) (ARIMA(0,0,1)) und unterscheiden sich A- und B-Phase nur in ihrem Niveau, ist das Zeitreihenmodell *vor* der Intervention:

$$(3.1.12) \quad y_t = L - \theta_1 a_{t-1} + a_t = f(L, \theta_1, a_{t-1}, a_t) \quad a_t \sim N(0, \sigma^2)$$

eine Funktion eines Levelparameters  $L$ , des moving-average-Parameters  $\theta_1$  und der gegenwärtigen und vergangenen „Fehler“ oder Schocks  $a_t, a_{t-1}$ .

Der von Glass, Willson & Gottman verwendete Levelparameter  $L$  trägt zweierlei Bedeutung. Bei der Formulierung der ARIMA(p,d,q)-Prozesse spielt er die Rolle von  $\mu_y = E(Y_t)$  bzw.  $\mu_w = E(W_t)$  (s.a. Kap. 3). Bei der Transforma-

tion (3.1.10) nehmen die Autoren vereinfachend an, daß alle  $a_t=0$  für  $t < 1$  ist, so daß  $Y_t = L$  für  $t < 1$  ist.

$L$  wäre dann das Niveau der Zeitreihe zum Zeitpunkt  $t=0$ . Die Annahme  $a_t = 0$  für  $t < 1$  wirkt sich natürlich um so schwächer aus, je länger die Zeitreihe ist.

Das Modell nach dem Interventionsbeginn:

$$(3.1.13) \quad Y_t = L + \delta - \theta_1 a_{t-1} + a_t = f(L, \delta, \theta_1, a_t, a_{t-1})$$

unterscheidet sich von (3.1.12) nur durch den Parameter  $\delta$ , der den Niveauunterschied der Zeitreihen in der A- und B-Phase widerspiegelt. Unter der Nullhypothese ist  $\delta$  gleich Null. Für die Auswertung nach dem allgemeinen linearen Modell (3.1.2), (3.1.4) und (3.1.6) stört die Abhängigkeit des Meßwerts  $Y_t$  vom vergangenen Fehler  $a_{t-1}$ . Wir müssen daher neue transformierte Werte  $Y_t^+ = f(Y_t)$  finden, in denen  $a_{t-1}$  nicht mehr enthalten ist. Die neuen Werte  $Y_t^+$  sollen nur noch von  $L, \delta, \theta_1, a_t$  abhängen:

$$(3.1.14) \quad Y_t^+ = f(Y_t) = f(L, \delta, \theta_1, a_t)$$

Wir suchen also ähnlich zu (3.1.10) eine Transformationsmatrix  $A$ . Nimmt man an, daß die  $a_t$  für Zeiten vor der ersten Beobachtung  $Y_1$  Null sind:  $a_t = 0$  für  $t < 1$ , lautet diese Matrix (s. Revenstorff & Keeser, 1978).

$$(3.1.15) \quad A = \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 \dots 0 & 1 \\ \theta_1 & 1 & 0 & 0 \dots 0 & 2 \\ \theta_1^2 & \theta_1 & 1 & 0 \dots 0 & \vdots \\ \theta_1^3 & \theta_1^2 & \theta_1 & 1 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_1^{T-1} & \theta_1^{T-2} & \theta_1^{T-3} & \dots \dots 1 & T \end{array}$$

Zur Hypothesentestung werden wieder zwei Regressionen gerechnet. Für das volle Modell mit dem Ansatz:

$$(3.1.16a) \quad \begin{array}{l} \text{Phase A} \\ Y_1^+ \\ Y_2^+ \\ Y_3^+ \\ \vdots \\ Y_n^+ \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{ccc} 1 & & 0 \\ (1 + \theta_1) & & 0 \\ (1 + \theta_1 + \theta_1^2) & & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ (1 + \theta_1 + \dots + \theta_1^{n-1}) & & 0 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cc} (1 + \theta_1 + \dots + \theta_1^{n-1} + \theta_1^n) & 1 \\ (1 + \theta_1 + \dots + \theta_1^n + \theta_1^{n+1}) & (1 + \theta_1) \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ (1 + \theta_1 + \dots + \theta_1^{T-1}) & (1 + \theta_1 + \dots + \theta_1^{T-n-1}) \end{array} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{c} L \\ \delta \\ \vdots \\ \vdots \\ a_n \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} a_{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ a_T \end{array} \\ \hline \end{array}$$

oder kurz

$$(3.1.16b) \quad y^+ = (X_1^+ | X_2^+) \begin{pmatrix} L \\ \delta \end{pmatrix} + a_{\text{voll}}$$

mit Fehlerquadratsumme

$$(3.1.17) \quad F_v^2(L, \delta, \theta_1) = \hat{a}_{\text{voll}}' \hat{a}_{\text{voll}}$$

und für das reduzierte Modell:

$$(3.1.18) \quad y^+ = (X_1^+) \cdot L + a_{\text{red}}$$

mit Fehlerquadratsumme:

$$(3.1.19) \quad \hat{a}_r' \hat{a}_r = F_r^2(L, \theta_1)$$

Die Nullhypothese  $\delta = 0$  wird mit dem üblichen F-Bruch getestet:

$$(3.1.20) \quad F_{df_1, df_2} = \frac{(F_r^2 - F_v^2)/df_1}{(F_v^2 - 0)/df_2} = \frac{(F_r^2 - F_v^2)/(2-1)}{F_v^2/(T-2)} = t_{T-2}^2$$

Glass, Willson & Gottman (1975, S. 125ff.) bringen als Beispiel für ein Zeitreihenexperiment mit AB-Phasen eine Interventionsevaluation, bei dem die Zeitreihe des störenden Schülerverhaltens einem ARIMA(0,0,1)-Prozeß folgte (s. Figur 3.1.3). Nach dem 21. Tag wurde versucht, das Schülerverhalten zu ändern (Hall et al., 1971). Die geschätzten Parameterwerte betragen  $\hat{L} = 19.24$ ,  $\hat{\delta} = -14.29$ ,  $\theta_1 = -0.34$  und der  $t_{df=38} = [F_{1,38}]^{1/2}$  Wert belief sich auf -16.39, was hoch signifikant war.

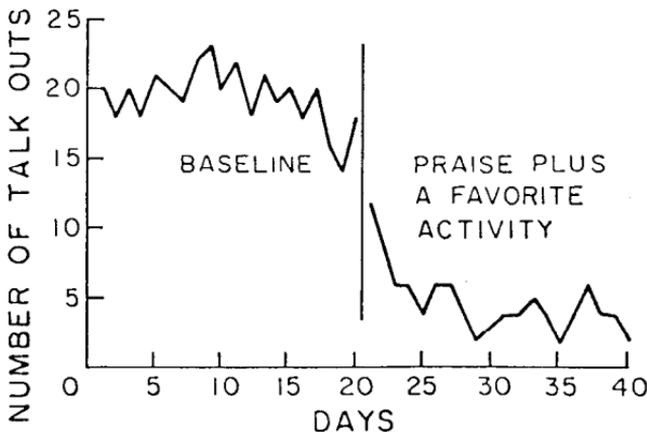


Fig. 3.1.3: Anzahl von Unterrichtsstörungen durch Schwatzen der Schüler vor und nach Interventionsbeginn

Folgen die Rohdaten einem autoregressiven Prozeß 1. Ordnung (s. 2.8d, 2.9a) ARIMA(1,0,0) ist das Zeitreihenmodell *vor* der Intervention:

$$(3.1.21a) \quad Y_t - L = \varphi_1(Y_{t-1} - L) + a_t \quad -1 < \varphi_1 < 1$$

$a_t \sim N(0, \sigma^2)$  weißes Rauschen  
 $t = 1, \dots, N_1 = n$

oder

$$(3.1.21b) \quad Y_t = \varphi_1 Y_{t-1} + L(1 - \varphi_1) + a_t$$

und das Modell nach dem Interventionsbeginn

$$(3.1.22a) \quad Y_t - (L + \delta) = \varphi_1(Y_{t-1} - (L + \delta)) + a_t$$

oder

$$(3.1.22b) \quad Y_t = \varphi_1 Y_{t-1} + (L + \delta)(1 - \varphi_1) + a_t$$

Auch hier ist wieder eine neue Zeitreihe  $Y_t^+ = f(Y_t)$  gesucht, die nicht mehr von den das allgemeine lineare Modell störenden  $Y_{t-1}$  abhängt. Die gesuchte Transformationsmatrix ist (bei Annahme, daß die  $a_t = 0$  für  $t < 1$  und  $Y_0 = L$ ; s. Revenstorff & Keeser, 1978, S. 20).

$$(3.1.23) \quad A = \begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\varphi_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 2 \\ 0 & -\varphi_1 & 1 & \dots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\varphi_1 & 1 & T \end{array}$$

und das volle Modell für den Test auf  $H_0: \delta = 0$

$$(3.1.24) \quad \begin{array}{c} Y_1^+ \\ Y_2^+ \\ \vdots \\ Y_n^+ \\ \hline Y_{n+1}^+ \\ Y_{n+2}^+ \\ \vdots \\ Y_T^+ \end{array} = \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \\ (1 - \varphi_1) & 0 & \\ \vdots & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \\ (1 - \varphi_1) & 0 & \\ \hline (1 - \varphi_1) & 1 & \\ (1 + \varphi_1) & (1 - \varphi_1) & \\ \vdots & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \\ (1 - \varphi_1) & (1 - \varphi_1) & \end{array} \cdot \begin{array}{c} L \\ \delta \end{array} + \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \\ \hline a_{n+1} \\ a_{n+2} \\ \vdots \\ a_T \end{array}$$

Auch hierfür geben Glass, Willson & Gottman (1975) ein Beispiel (Figur 3.1.4). Die Daten stammen aus dem Projekt „Whistlestop“. Zwischen April 1969 und September 1973 wurde die Zahl der Überfälle im Hyde-Park (Chicago) registriert. Die „Intervention“ bestand darin, an die Bürger Pfeifen auszu-teilen, mit denen sie im Notfall die Polizei um Hilfe pfeifen konnten. Die Zeitreihe läßt sich mit einem ARIMA(1,0,0)-Prozeß beschreiben. Die geschätzten Parameter betragen  $\hat{L} = 64.52$ ,  $\hat{\delta} = -5.41$ ,  $\hat{\phi}_1 = .50$ . Der t-Wert belief sich auf  $t_{46} = -.72$  und war somit nicht signifikant, d.h.: das Austeilen der Pfeifen hat die Zahl der Überfälle nicht signifikant reduziert.

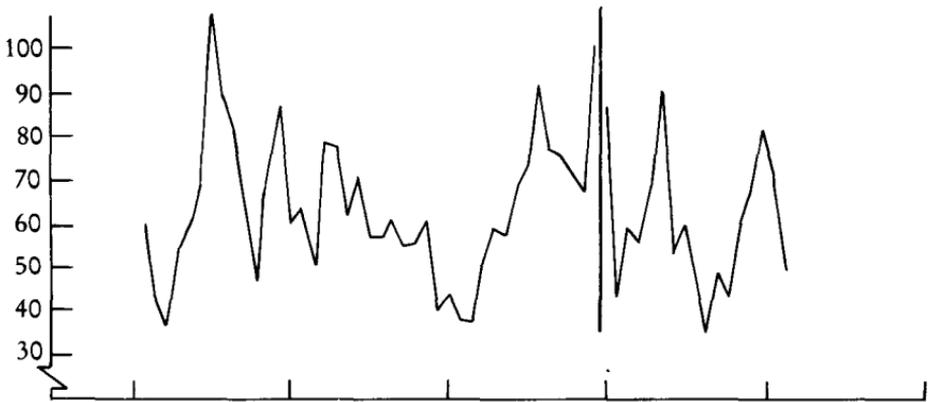


Fig. 3.1.4: Zahl der überfälle pro Monat zwischen April 1969 und September 1973 im Hyde-Park, Chicago, vor und während Projekt „Whistlestop“

Zum Schluß soll an einem ARIMA(0,1,1)-Prozeß der Rohdaten das dritte Beispiel eines Hypothesentests bezüglich des Niveaus der Zeitreihe demonstriert werden. Gottman & Glass (1978) untersuchten, ob der Wert auf einer „Irritierbarkeitsskala“ am Anfang der Menstruationsperiode einer Frau signifikant von den Werten vor und nach dem Anfang der Menstruationsperiode abweicht. Die Rohdaten sind in Figur (3.1.5) dargestellt. Würden die Residuen unabhängig von einander sein, könnte man mit einer Modifikation des allgemeinen linearen Modells (3.1.2), (3.1.4) und (3.1.6) diese Hypothese testen. Das volle Modell hätte dann die Form (3.1.25a) (S. 302)

oder kurz:

$$(3.1.25b) \quad y = (X_1 | X_2) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} + \varepsilon_v$$

und das reduzierte Modell würde sich formulieren lassen als:

$$(3.1.25a) \quad \begin{array}{c} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ Y_{14} \\ Y_{15} \\ Y_{16} \\ \vdots \\ Y_{34} \end{array} = \begin{array}{c|c} \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \beta_1 \\ \beta_2 \end{array} + \begin{array}{c} \varepsilon_v \end{array}$$

$$(3.1.26) \quad y = (X_t) b_1 = e_t$$

Die Hypothese würde dann über den F-Bruch

$$(3.1.27) \quad F_{df_1, df_2} = \frac{(F_r^2 - F_v^2)/df_1}{(F_v^2 - 0.0)/df_2} = \frac{(F_r^2 - F_v^2)/(2-1)}{F_v^2/(T-2)} = t_{df=32}^2$$

getestet.

Jedoch erscheint die Zeitreihe nichtstationär. Das Niveau wandert erheblich während der ersten 13 Tage. Werden dagegen die Daten differenziert, d.h.  $y_t - y_{t-1}$  gebildet, scheint nach dem Autokorrelationsmuster ein ARIMA-(0,1,1)-Prozeß vorzuliegen. Nach dem ARIMA(0,1,1)-Prozeß werden die Daten  $y_t$  nach folgendem Modell vor der „Intervention“ (hier: Anfang der Menstruation) erzeugt:

$$(3.1.28a) \quad (1-B)y_t = y_t - y_{t-1} = -\theta_1 a_{t-1} + a_t \quad \begin{array}{l} -1 < \theta_1 < 1 \\ a_t \sim N(0, \sigma^2) \text{ weißes} \\ \text{Rauschen} \\ a_0 = 0 \\ y_t = Y_t - L \end{array}$$

oder:

$$(3.1.28b) \quad Y_t = L + (1-\theta_1)(a_1 + a_2 + \dots + a_{t-1}) + a_t \quad Y_0 = L$$

und während der „Intervention“ (Menstruation) nach

$$(3.1.29) \quad Y_t = L + \delta + (1-\theta_1)(a_1 + a_2 + \dots + a_{t-1}) + a_t$$

Für die Auswertung nach dem allgemeinen linearen Modell stört, daß  $Y_t$  auch von  $Y_{t-1}$  und  $a_{t-1}$  abhängt.

Das volle Modell lautet dann (Glass, Willson & Gottman, 1978, S. 316):

$$(3.1.30a) \quad \begin{matrix} Y_1^+ \\ Y_2^+ \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ Y_{14}^+ \\ Y_{15}^+ \\ Y_{16}^+ \\ \vdots \\ Y_{34}^+ \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & 0 \\ \theta_1 & 0 \\ \theta_1^2 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \theta_1^{12} & 0 \\ \hline \theta_1^{13} & 1 \\ \theta_1^{14} & \theta_1 \\ \hline \theta_1^{15} & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \theta_1^{33} & 0 \end{matrix} \cdot \begin{matrix} L \\ \delta \end{matrix} + \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{34} \end{matrix}$$

(3.1.30b)  $y^+ = (X_1^+ : X_2^+) \begin{pmatrix} L \\ \delta \end{pmatrix} + a$

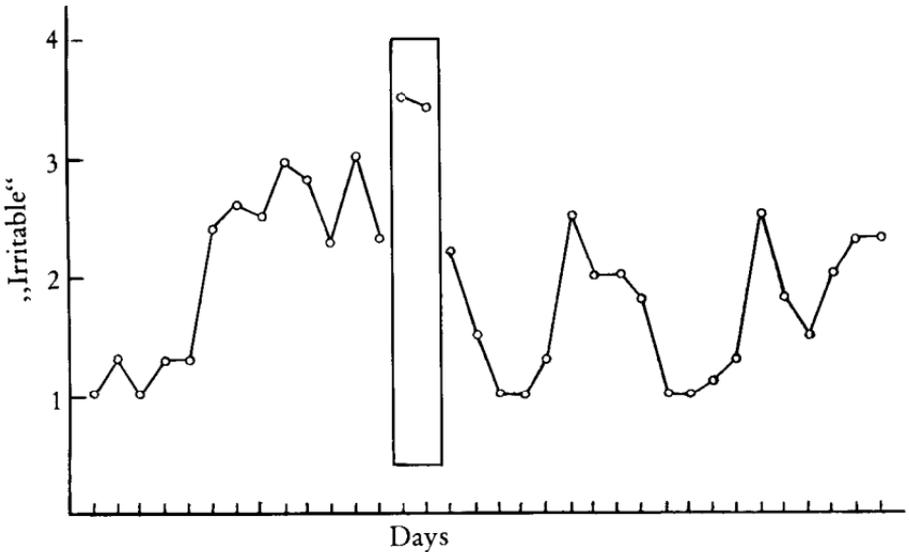


Fig. 3.1.5: Selbsteinschätzung der „Irritierbarkeit“ einer Frau vor, während und nach dem Menstruationsbeginn

Als Schätzungen für die Parameter geben Gottman Glass (1978) an:  $\hat{L} = 1.04$ ,  $\hat{\delta} = 1.21$ ,  $\hat{\theta}_1 = .14$ . Der t-Wert ist  $t_{32} = F_{1,32} = 3.34$  und somit signifikant. Andere Designmatrizen mit bis zu 5 Spalten in der Designmatrix X finden sich bei Meier (1981).

### 3.1.3 Verteilungsgebundene Prüfverfahren: Interventionsanalyse mit dem Transfermodell von Box & Tiao (1975)

Während der Ansatz von Box & Tiao (1965) und Glass et al. (1975) stark am allgemeinen linearen Modell orientiert war, haben Box & Tiao (1975) die Interventionskomponente konsequent in das Zeitreihenmodell integriert.

Das Modell kennt drei Variablensätze: (a) die Interventionsvariable  $I_t$ , die zu bestimmten a priori festgelegten Zeitpunkten die Werte 0 und 1 annimmt, je nachdem ein Interventionseffekt „ein“ oder „aus“ geschaltet wird, (b) die Effektvariable  $Y_t^*$ , die eine Folge dieser Intervention ist und (c) die beobachtbare Zeitreihe  $Y_t$ , die einerseits durch die Effektvariable  $Y_t^*$  andererseits durch anderweitige - nicht kontrollierte - Einflüsse geprägt wird:

$$Y_t = \left\{ \begin{array}{c} \text{Interventionseffekte} \\ Y_t^* \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \text{nichtkontrollierte Effekte} \\ N_t \end{array} \right\}$$

$Y_t^*$  stellt gewissermaßen das Niveau der Zeitreihe dar, das durch Handlungen des Experimentators hergestellt werden kann. Dieses durch Interventionen hergestellte Niveau, wird dann durch andere weitere Einflüsse, die nicht unter Kontrolle stehen, überlagert. Diese unkontrollierten Einflüsse werden in  $N_t$  zusammengefaßt und lassen sich durch ein ARIMA(p,d,q) (P,D,Q)<sub>s</sub>-Modell repräsentieren.

Bei der Interventionsanalyse besteht die Aufgabe,  $Y_t$  wieder in  $Y_t^*$  und  $N_t$  zu zerlegen und die Parameter des Prozesses  $Y_t^*$  zu schätzen. Diese Parameter können als Effektparameter interpretiert und auf Signifikanz geprüft werden. Hätte Hilgard (1933) in einem Experiment zur Zwillingforschung (s. Figur 3.1.6) schon das Methodeninstrumentarium der Interventionsanalyse gekannt und verwendet, hätte er die Zeitreihen  $Y_{tC}$ ,  $Y_{tT}$  (durchgezogen) zerlegen müssen in einen Interventionsanteil  $Y_t^*$  und die nicht durch Intervention zustande gekommene Komponente  $N_t$ . In diesem Fall wäre der natürliche Reife-prozeß jedes Kindes (punktierte Linie) als deterministischer Trend in dem ARIMA(p,d,q)(P,D,Q)<sub>s</sub>-Modell der  $N_t$ -Komponente zu interpretieren. Der Prozeß für  $N_t$  sollte mit den Preinterventionsdaten geschätzt werden (S. 305).

Betrachten wir zunächst das Zeitreihenmodell des Interventionseffektes. In einem ABAB-Design, das sich über 20 Tage erstreckt, wird die Interventionsvariable zweimal eingeschaltet („Stufenimpuls“):

t =	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	A	A	A	A	A	B	B	B	B	B	A	A	A	A	A	B	B	B	B	B
$I_t =$	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1

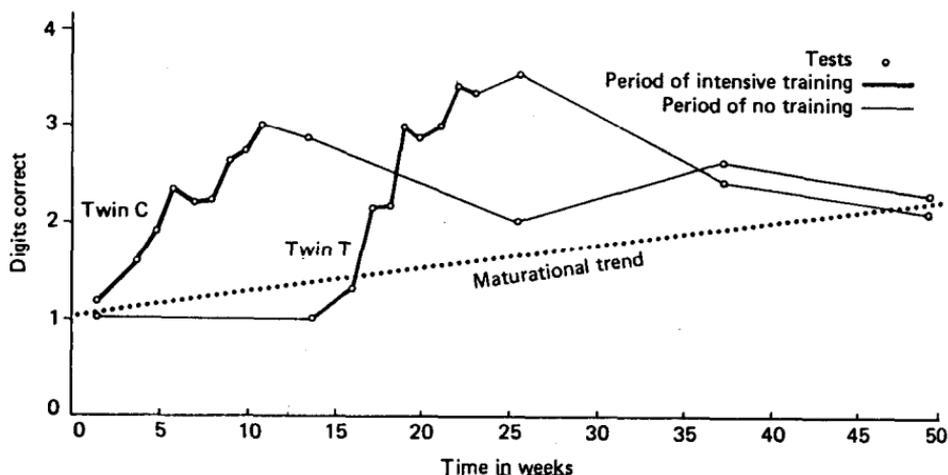


Fig. 3.1.6: Zeitreihenexperiment von Hilgard (1933) mit eineiigen Zwillingen und nichtkontrollierbarem Trend  $N_t$

Vermutet man, daß die Intervention eine abrupte Veränderung von  $Y_t^*$  (Sprung) ohne Zeitverzögerung hervorrufen würde und daß  $Y_t^*$  nur von einem ganz bestimmten Zeitindex  $I_{t-b}$  abhängt, verwenden wir die Transferfunktion 0. Ordnung (Figur 3.1.7a), wenn keine Zeitverzögerung des Interventionseffektes vorliegt (S. 306f.).

$$(3.1.32) \quad Y_t^* = \omega_0 I_t$$

oder wenn sich die Intervention  $b$  Zeitpunkte später auswirkt (Figur 3.1.7b):

$$(3.1.33) \quad Y_t^* = \omega_0 I_{t-b}$$

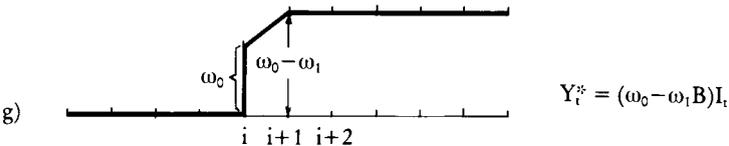
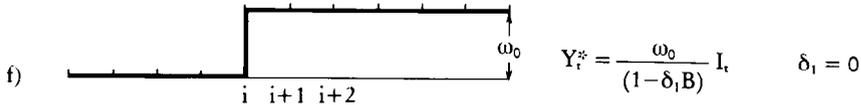
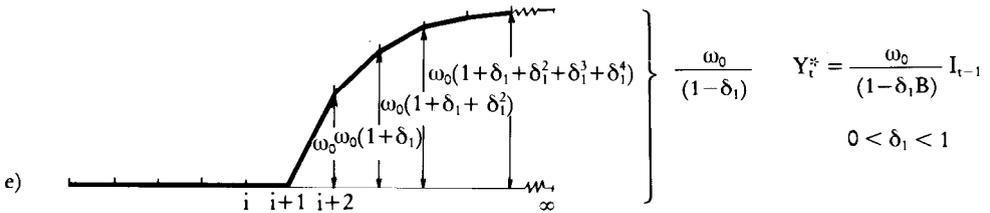
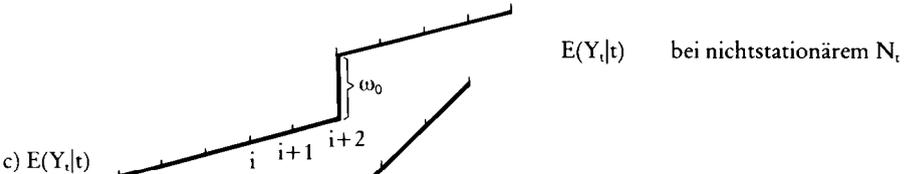
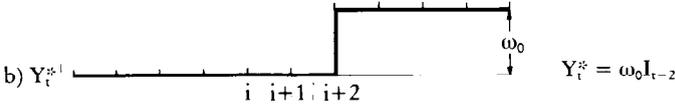
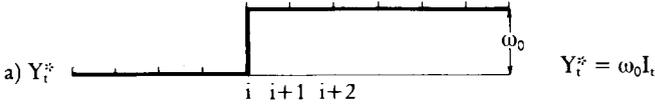
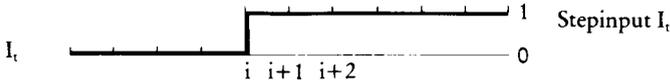
Ist die  $N_t$ -Komponente nichtstationär, verläuft das Niveau der Zeitreihe natürlich anders. So haben wir unter der Annahme, daß  $N_t$  einem linearen deterministischen Trend folgt, für die Niveaus der Zeitreihe  $E(Y_t | t)$  den Verlauf in Figur 3.1.7c.

Tritt der Effekt auf  $Y_t^*$  vermutlich nicht plötzlich ein, sondern steigt nur allmählich an, benötigt man die Transferfunktion 1. Ordnung (Figur 3.7d,e). Liegt keine Verzögerung der Intervention vor, ist diese:

$$(3.1.34a) \quad Y_t^* = \delta_1 Y_{t-1}^* + \omega_0 I_t \quad \text{oder} \quad (1 - \delta_1 B) Y_t^* = \omega_0 I_t$$

oder

$$(3.1.34b) \quad Y_t^* = \frac{\omega_0}{(1 - \delta_1 B)} I_t$$



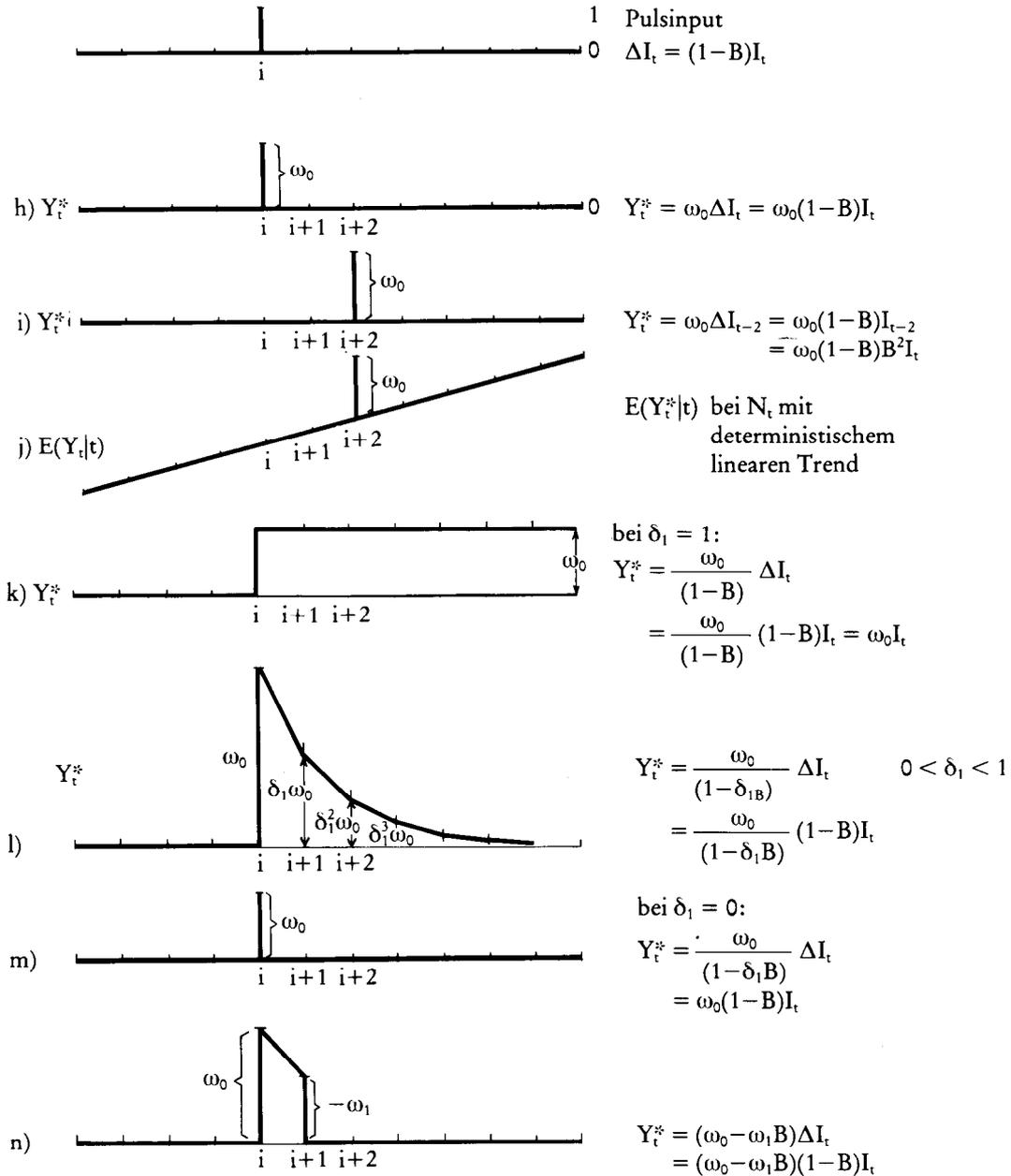


Fig. 3.1.7a-n: Verläufe der abhängigen Zeitreihe, die nur durch die Interventionen „Stepinput“ und „Pulsinput“ erzwungen werden. Diese deterministischen Verläufe werden von nichtkontrollierbaren stochastischen Prozessen überlagert.

bzw. mit Verzögerung des Interventionseffektes:

$$(3.1.35) \quad Y_t^* = \frac{\omega_0}{(1 - \delta_1 B)} I_{t-b} \quad (\text{s. Fig. 3.1.7e})$$

Bei  $\delta_1 = 0$  reduziert sich die Transferfunktion 1. Ordnung auf die der nullten Ordnung (Sprung von  $Y_t^*$  um 1 (s. Figur 3.1.7f und a). Ist dagegen  $\delta_1 = 1$ , haben wir

$$(3.1.36a) \quad (1 - B)Y_t^* = \omega_0 I_t$$

oder

$$(3.1.36b) \quad Y_t^* = Y_{t-1}^* + \omega_0 I_t$$

und damit einen nicht gedämpften Anstieg (Figur 3.1.7d). Die Stabilitätsgrenzen des Transfermodells sind daher  $-1 < \delta_1 < +1$ . Da das Transfermodell (3.1.34) eine Differenzgleichung 1. Ordnung ist, berechnet sich  $Y_t^*$  für die Interventionsperiode (alle  $I_t = 1$ ) als Lösung der Differenzgleichung (3.1.34) zu:

$$Y_{i+n}^* = \sum_{k=0}^n \delta_1^k \omega_0 = \omega_0 \sum_{k=0}^n \delta_1^k \quad \begin{array}{l} i = \text{Interventionsbeginn} \\ I_t = 1 \text{ für } t \geq i \end{array}$$

mit asymptotischem Niveau (s.a. Figur 3.1.7e)

$$Y_\infty^* = \omega_0 \sum_{k=0}^{\infty} \delta_1^k = \frac{\omega_0}{1 - \delta_1} \quad \text{für } |\delta_1| < 1$$

Hat man dagegen die Hypothese, daß  $Y_t^*$  nach dem Beginn der Intervention plötzlich anschnellt, um dann mehr oder minder schnell abzufallen, kann man die Transferfunktion 1. Ordnung beibehalten. Jedoch ist jetzt die Interventionsvariable  $I_t$  zu differenzieren. Das bedeutet inhaltlich:  $Y_t^*$  reagiert jetzt nur noch auf *Veränderungen* der Interventionsvariablen  $I_t$ . Die Differenzierung liefert  $(1 - B)I_t$ , der nicht mehr ein „Stufen-“ sondern ein „Pulsimpuls“ ist:

A	A	A	A	A	B	B	B	B	B
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0

$I_t$  „Stufenimpuls“

$(1 - B)I_t = I_t - I_{t-1}$  „Pulsimpuls“

$(1 - B)I_t$  nimmt nur zu Beginn einer Intervention den Wert 1 an. Es lassen sich jetzt eine Reihe von hypothetischen Effektverläufen  $Y_t^*$  darstellen (s. Figur 3.1.7h-n).

Ist im Modell

$$(3.1.37a) \quad (1 - \delta_1 B) Y_t^* = \omega_0 (1 - B) I_t$$

oder

$$(3.1.37b) \quad Y_t^* = \frac{\omega_0}{(1 - \delta_1 B)} (1 - B) I_t$$

$\delta_1 = 1$ , kürzen sich die Operatoren  $(1 - B)$  weg und es ist  $Y_t^* = \omega_0 I_t$ . Man erhält dann wieder die Transferfunktion 0. Ordnung (= abrupter Sprung) (Figur 3.1.7k).

Das allgemeine Transfermodell

$$(3.1.38a) \quad Y_t^* - \delta_1 Y_{t-1}^* - \delta_2 Y_{t-2}^* - \dots - \delta_r Y_{t-r}^* = \omega_0 I_{t-b} - \omega_1 I_{t-b-1} - \dots - \omega_s I_{t-b-s}$$

läßt sich mit Hilfe der Backshiftoperatoren verkürzt schreiben als

$$(3.1.38b) \quad (1 - \delta_1 B - \dots - \delta_r B^r) Y_t^* = (\omega_0 - \omega_1 B - \dots - \omega_s B^s) I_{t-b}$$

oder

$$(3.1.38c) \quad \delta(B) Y_t^* = \omega(B) I_{t-b}$$

oder

$$(3.1.38d) \quad Y_t^* = \frac{\omega(B)}{\delta(B)} I_{t-b} = \frac{\Omega(B)}{\delta(B)} I_t$$

Dabei spiegeln die Indices  $r, s$  das „Gedächtnis“ der Interventionskomponente wider.

Das Transferfunktionsmodell ist stabil (d.h. explodiert nicht), wenn die Beträge der reellen oder komplexen Wurzeln  $B_j$  des Polynoms

$$(3.1.39) \quad (1 - \delta_1 B - \dots - \delta_r B^r) = 0$$

größer als 1 sind. Die Stabilitätsgrenzen entsprechen numerisch den Grenzen der Stationarität von autoregressiven Prozessen. Für die Transferfunktion 2. Ordnung

$$(3.1.40) \quad (1 - \delta_1 B - \delta_2 B^2) Y_t^* = \omega_0 I_t$$

müssen die Parameter in folgenden Grenzen liegen:

$$\begin{aligned} -1 &< \delta_2 < +1 \\ \delta_1 + \delta_2 &< +1 \\ \delta_2 - \delta_1 &< +1 \end{aligned}$$

Nur dann sind die Wurzeln  $B_j$  des Polynoms  $(1 - \delta_1 B - \delta_2 B^2) = 0$  vom Betrag  $|B_j| > 1$ , wobei sich die Wurzeln berechnen nach

$$B_j = \frac{\delta_1 \pm \sqrt{\delta_1^2 + 4 \delta_2}}{2 \delta_2}$$

Hält man die Interventionsvariable 1, nach dem Zeitpunkt  $t=i$  konstant auf dem Wert 1 (Stepimpuls), ist für die Interventionskomponente  $Y_t^*$  folgendes Niveau zu erwarten:

$$(3.1.41) \quad Y_\infty^* = \frac{(\omega_0 - \omega_1 - \dots - \omega_s)}{(1 - \delta_1 - \dots - \delta_r)} = \frac{\omega(B) \cdot 1}{\delta(B) \cdot 1}$$

Liegen  $k$  Interventionsvariable gleichzeitig vor, kann man das Modell für die erzwungene Zeitreihe (3.1.38) im Sinne einer multifaktoriellen Varianzanalyse bzw. des multiplen Transfermodells (2.65) zum multiplen Interventionsmodell umformulieren:

$$(3.1.42) \quad Y_t^* = \sum_{j=1}^k Y_{jt}^* = \sum_{j=1}^k \left( \frac{\Omega_j(B)}{\delta_j(B)} \right) I_{jt}$$

So kann man sich in einem Wahrnehmungsexperiment, das den Effekt eines Tranquilizers auf die Wahrnehmungsgeschwindigkeit messen soll, den experimentellen Effekt  $Y_t^*$  aus zwei Komponenten zusammengesetzt denken:

$$(3.1.43) \quad Y_t^* = Y_{1t}^* + Y_{2t}^* = f(I_{1t}) + g(I_{2t})$$

Tranquilizergabe

(Stepinput)

Veränderung der experimentellen Situation

(Pulsinput)  $I_{2t} = (1 - B)I_{1t}$

1. Effekt: Veränderung der Wahrnehmungsgeschwindigkeit durch  $I_{1t}$

2. Effekt: Veränderung der Wahrnehmungsgeschwindigkeit durch Sensibilisierung des Pb auf die Veränderung der experimentellen Situation

3. Resultante  $Y_t^*$

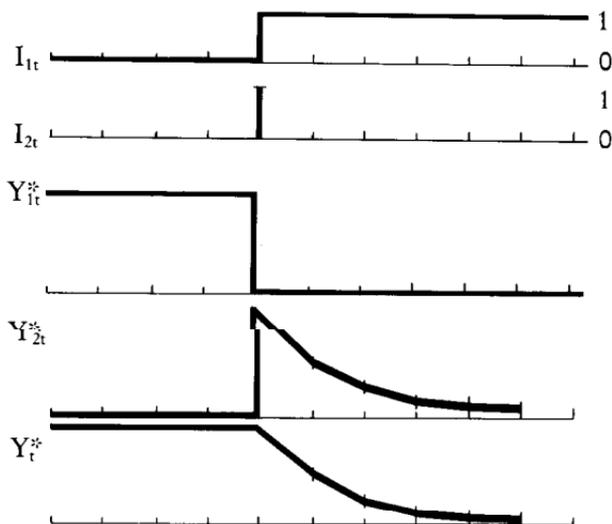


Fig. 3.1.8: Zusammensetzung des deterministischen Teils der Zeitreihe  $Y_t$

Als Ergebnis der experimentellen Faktoren erwarten wir einen langsamen Abfall der Wahrnehmungsgeschwindigkeit. Zu dem determinierten Verlauf  $Y_t^*$  addiert sich dann die Zeitreihe  $N_t$  zur beobachteten Zeitreihe  $Y_t$ :

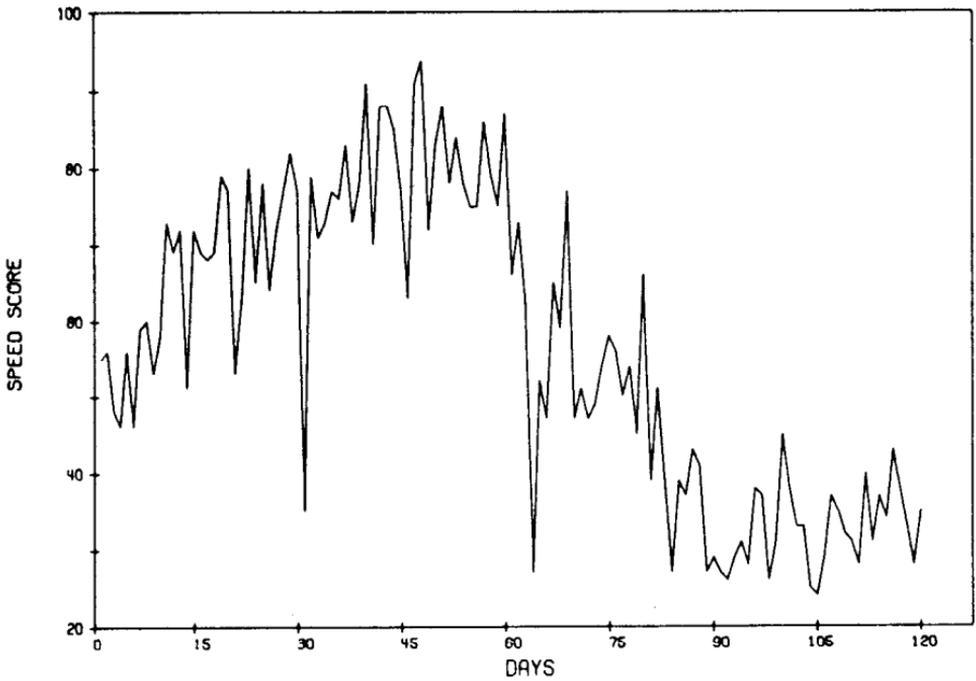


Fig. 3.1.9: Wahrnehmungsgeschwindigkeit vor und während der Medikamentengabe (Interventionsbeginn  $i=61$ )

Mit Hilfe der preexperimentellen Daten läßt sich der  $N_t$ -Prozeß schätzen (McCleary & Hay, 1980):

$$N_t = \frac{(1 - .77B)}{(1 - B)} a_t \quad \text{bzw.:} \quad \begin{aligned} N_t - N_{t-1} &= a_t - .77a_{t-1} \\ N_t &= N_{t-1} + a_t - .77a_{t-1} \end{aligned}$$

so daß das vollständige Interventionsmodell folgende Form annimmt

$$Y_t = Y_{1t}^* + Y_{2t}^* + N_t = \omega_{10}I_{1t} + \frac{\omega_{20}}{(1 - \delta_{21}B)} I_{2t} + N_t$$

mit Schätzungen:

$$Y_t = -28.8^*Y_t + \frac{18.05}{(1 - .51B)}(1 - B)I_t + \underbrace{\frac{(1 - .77^*B)}{(1 - B)}}_{N_t} a_t \quad I_t = \begin{cases} 0 & t < i \\ 1 & i \geq t \end{cases}$$

\*signifikant

In *Feldstudien* hat man natürlich die exogene Variable  $I_t$  nicht unter direkter Kontrolle. So kann man nur Vermutungen anstellen, ob z.B. eine Katastrophe oder Ölpreiserhöhung eine plötzliche oder eine allmähliche Änderung in  $Y_t^*$  erzwingt. Beobachten kann man nur  $Y_t$ .  $I_t$  bleibt im Gegensatz zum *Experiment* unbekannt. Für solche Ex-Post-Datenanalyse, die dem Vorgehen eines Historikers beim Aktenstudium nicht unähnlich ist, empfiehlt es sich folgende Modellfolge zu schätzen und deren Parameterzahl sukzessive zu reduzieren (Tabelle 3.1.2):

Tabelle 3.1.2: Abfolge zur Prüfung von einfachen Interventionsmodellen:

Schätzung des ARIMA (p, d, q) (P, D, Q) <sub>s</sub> -Modells von $N_t$ mit den Präinterventionen			
Schätzung von $Y_t = \frac{\omega_0}{(1-\delta_1 B)} (1-B) I_{t-b} + N_t$ ; dabei werden die $N_t$ -Parameter festgehalten			
ja: permanenter Effekt (s. Fig. 3.1.7k)		nein: flüchtiger Effekt	
$\delta_1 \approx 1$			
Schätzung von $Y_t = \frac{\omega_0}{(1-\delta_1 B)} I_{t-b} + N_t$		ja: Impuls- antwort (s. Fig. 3.1.7m)	nein: allmählich verschwindender Effekt (s. Fig. 3.1.7l)
$\delta_1 \approx 0$			
ja: plötzlich eintretender Effekt (s. Fig. 3.1.7f)	nein: allmählich eintretender Effekt (s. Fig. 3.1.7e)		
$\delta_1 \approx 0$			
Schätzung von $Y_t = \omega_0 I_{t-b} + N_t$ (s. Fig. 3.1.7a, b)	Es bleibt beim Modell $Y_t = \frac{\omega_0}{(1-\delta_1 B)} I_{t-b} + N_t$	Schätzung von $Y_t = \omega_0 (1-B) I_{t-b} + N_t$	Es bleibt beim Modell $Y_t = \frac{\omega_0 (1-B)}{(1-\delta_1 B)} I_{t-b} + N_t$

Ein Beispiel für eine Feldstudie mit einer hypothetisch angenommenen doppelten Interventionsvariablen bezieht sich auf eine Untersuchung von Hibbs (1977) zum Einfluß von Regierungswechsel (1. Interventionsvariable) und veränderter Sozialgesetzgebung (2. Interventionsvariable) auf die Zeitreihe  $Y_t$  der Arbeitslosigkeit in England.

Die Zeitreihe der prozentualen Arbeitslosigkeit findet sich in Figur 3.1.12. Die nichtstationäre  $N_t$ -Komponente wurde mit einem  $ARIMA(1,0,0)(0,1,1)$ -Prozeß gefittet (s.a. 2.25a).

$$(3.1.44) \quad N_t = \frac{\theta_0 + a_t}{(1 - B^4)(1 - \varphi_1 B)}$$

Das vollständige Transfermodell sah folgendermaßen aus:

$$(3.1.45) \quad Y_t = \frac{\omega_{10}}{(1 - \delta_1 B)} G_{t-1} + \frac{\omega_{20}}{(1 - \delta_2 B)} C_t + N_t$$

$Y_t$  = Prozentsatz der Arbeitslosen pro Quartal

$G_t$  = Interventionsvariable  $I_{1t}$  mit den Werten

$C_t$  = Interventionsvariable  $I_{2t}$  mit den Werten

$\left\{ \begin{array}{l} -1: \text{Labourregierung} \\ +1: \text{konserv. Regierung} \\ 0: \text{Zeit vor 1966} \\ 1: \text{Zeit nach 1965 mit} \\ \text{veränderter Sozial-} \\ \text{gesetzgebung} \end{array} \right.$

Hibbs nahm folgenden Verlauf für  $Y_{2t}^* = g(I_{2t})$  an (Figur 3.1.10 und 3.1.7e)

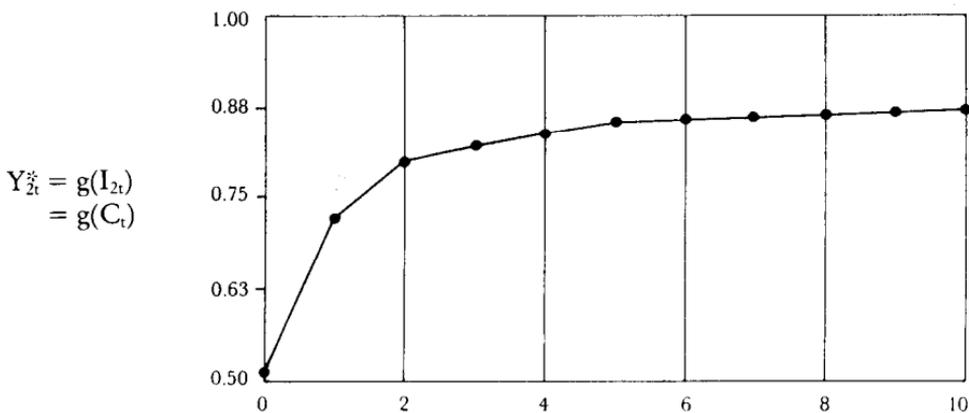


Fig. 3.1.10: Erwartete Niveauveränderung der Zeitreihe  $Y_{2t}^*$ , die nur durch die veränderte Sozialgesetzgebung ab 1965 bestimmt wäre

und folgenden Verlauf für  $Y_{1t}^*$  (Figur 3.1.11 und 3.1.7e).

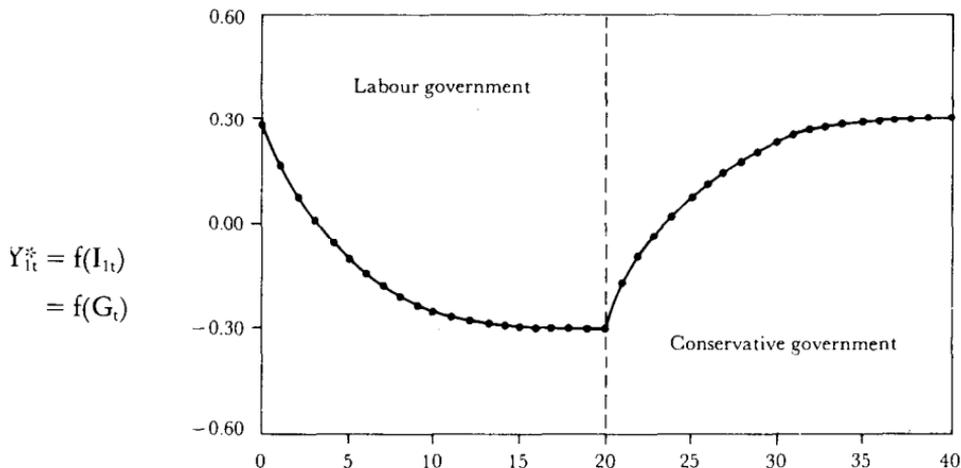


Fig. 3.1.1 : Erwartete Niveauveränderung der Zeitreihe  $Y_{1t}^*$ , die nur durch den Regierungswechsel bestimmt wäre

Ein Vergleich mit Figur 3.1.12 zeigt die gute Datenanpassung des Modells

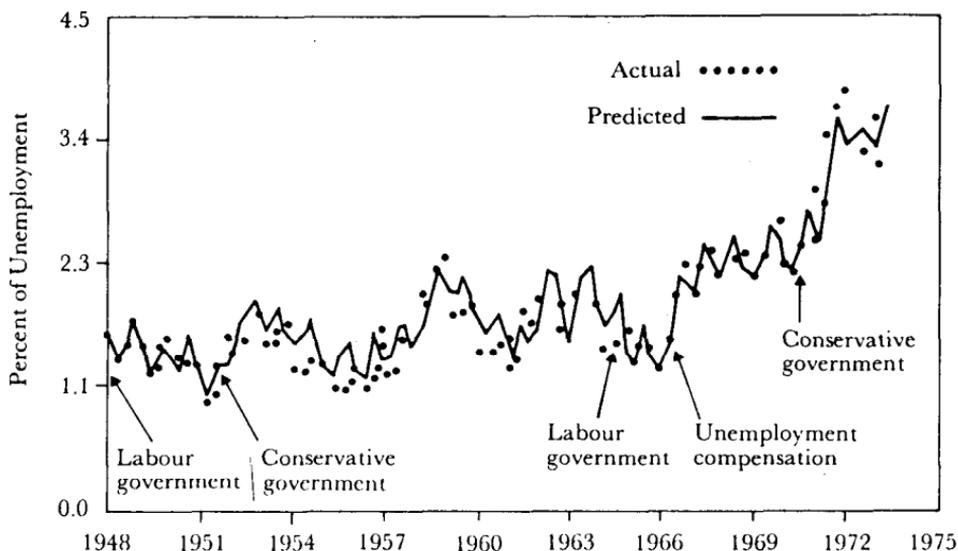


Fig. 3.1.12: Tatsächliche und mit Transfermodell vorhergesagte Arbeitslosenquote in England zwischen 1948 und 1973

Mit den Parametern des Transfermodells lassen sich Effekte isolieren, die im „Zick-Zack“ der Zeitreihe nicht zu erkennen sind.

Würde z.B.  $I_1$  konstant auf  $-1$  gesetzt (Labour immer an der Regierung), müßte das Niveau der Zeitreihe  $Y_t^*$  um  $\omega_0/(1-\delta_1)$  sinken. Beim Wechsel der

Regierungsmacht auf die Konservativen wäre ein Anstieg um den gleichen Betrag zu erwarten, wenn alle anderen Variablen sich nicht ändern würden (Figur 3.1.11). Der isolierte Einfluß der Gesetzgebung auf die Arbeitslosenquote würde sich auf lange Sicht mit einem Anstieg um  $\omega_{20}/(1-\delta_2)$  auf das Niveau  $Y_t^*$  der Zeitreihe auswirken (s.a. Figur 3.1.10).

Allgemein lassen sich Transfer- und  $N_t$ -Modelle folgendermaßen kombinieren: gilt für den Interventionseffekt z.B. das Transfermodell

$$(3.1.46) \quad Y_t^* = (\omega_0 - \omega_1 B)I_t$$

und für das Modell  $N_t$ , das keine Interventionseffekte enthält, ein ARIMA  $(0,1,1)(0,1,1)_{12}$ :

$$(3.1.47a) \quad (1 - B)(1 - B^{12})N_t = (1 - \theta_1 B)(1 - \theta_{12} B^{12})a_t$$

bzw.

$$(3.1.47b) \quad N_t = \frac{(1 - \theta_1 B)(1 - \theta_{12} B^{12})}{(1 - B)(1 - B^{12})} a_t$$

ergibt die Kombination von (3.1.46) und (3.1.47) das vollständige Interventionsmodell

$$(3.1.48) \quad Y_t = (\omega_0 - \omega_1 B)I_t + \frac{(1 - \theta_1 B)(1 - \theta_{12} B^{12})}{(1 - B)(1 - B^{12})} a_t$$

Auf Querverbindungen zwischen den Modellen in Kapitel 3.1.2 und 3.1.3 weisen Möbus, Görlicke & Kröh (1982) hin.

## 3.2 $N > 1$ Quasiexperimentelle Zeitreihendesigns (univariater Fall für eine Gruppe)

### 3.2.1 $N > T, M = 1, G = 1$

Stehen für jeden Meßzeitpunkt mehrere Personen zur Verfügung, liegt eine Zeitreihe von Querschnitten vor. Das quasiexperimentelle Zeitreihendesign mit  $N > 1$  läßt sich damit einordnen in die „Profilanalyse“ oder die „Wachstumskurvenanalyse“ einer Gruppe (s. a. Kap. 5). Auswertungsvorschläge hierzu legten (Algina & Swaminathan, 1977, 1979a, 1979b; Grizzle & Allen, 1969; Khatri, 1966; Marmor & Marmor, 1978; Morrison, 1967; Potthoff & Roy, 1964; Rao, 1959, 1965, 1966, 1967; Simonton, 1977; Swaminathan & Algina, 1977; Timm, 1975) vor.

Wird die Folge der Mittelwerte auf Interventionseffekte überprüft, sind u.a. zwei Nullhypothesen denkbar, die das Fehlen eines solchen Effektes postulieren :

$H_{01}$ : „alle Mittelwerte liegen auf einer *waagrecht*en Linie“

$H_{02}$ : „alle Mittelwerte liegen auf einer *geraden* Linie“

Die Überprüfung kann im Rahmen des allgemeinen linearen Modells (5.42) erfolgen:

$$(3.2.1) \quad {}_N Y_T = {}_N X_G B_T + {}_N E_T$$

wobei:  $N$  =Zahl der Personen

$G$  =Zahl der Gruppen (in 5.42 und bei Timm mit  $I$  bezeichnet)

$T$  = Zahl der Zeitpunkte (in 5.42 und bei Timm mit  $q$  geschrieben)

$Y$  = Rohdatenmatrix der abhängigen Variablen

$X$ = Designmatrix für das Design „zwischen den Gruppen“. Da wir hier nur eine Gruppe betrachten, ist  $X$  ein Spaltenvektor mit Komponenten gleich '1'.

$B$  = Parametermatrix mit Regressionskoeffizienten. Da wir hier nur *eine* Gruppe betrachten, ist  $B$  gleich einem Zeilenvektor  ${}_1 \mu_T'$  mit Populationsmittelwerten.

$E$  = Fehlermatrix

Jede Zeile von  $Y$  verteilt sich unabhängig normal mit Erwartungswertvektor  $\mu'$  und Kovarianzmatrix  $\Sigma$ , so daß

$$E({}_N Y_T) = {}_N X_G B_T = {}_N X_1 \mu_T' \text{ u n d } \text{cov}({}_N Y_T) = {}_N I_N \otimes {}_T \Sigma_T$$

wobei das Kroneckerprodukt z.B. bei Timm (1975, S. 30) erklärt ist.

Die Nullhypothesen  $H_{01}, H_{02}$  lassen sich als Matrixgleichung formulieren:

$$(3.2.2) \quad {}_1 C_1 B_T A_H = {}_1 \Gamma_H$$

wobei:  $C$  = Hypothesenmatrix für Vergleiche „zwischen den Gruppen“ bzw. den Zeilen der Parametermatrix  $B$  (hier ist  ${}_1 C_1 = 1$ )

$A$  = Hypothesenmatrix für die Vergleiche „*innerhalb* der Gruppen“ bzw. den Spalten der Parametermatrix oder „*zwischen* den Zeitpunkten“

$\Gamma$  = rechte Seiten der Hypothesengleichung. Meistens wird  $\Gamma = 0$  gesetzt.

Die Nullhypothese  $H_{01}$  „alle Mittelwerte liegen auf einer *waagrecht*en Linie“ läßt sich als Sammlung von  $H=(T-1)$  Einzelhypothesen

$$(3.2.3a) \quad \begin{aligned} \mu_1 - \mu_2 &= 0 \\ \mu_2 - \mu_3 &= 0 \\ &\vdots \\ \mu_{T-1} - \mu_T &= 0 \end{aligned}$$

oder nach (3.2.2) als Matrixgleichung

$${}_1\mu'_T A_H = {}_10_H$$

(3.2.3b) bzw.

$${}_1B_T A_H = {}_10_H$$

	1	0	0
	-1	1	⋮
	0	-1	⋮
	⋮	⋮	⋮
	⋮	⋮	1
	0	0	-1
$\mu_1 \mu_2 \dots \mu_T$	0	0	⋯ ⋯ ⋯ 0

formulieren. Ähnlich verhält es sich mit der Nullhypothese  $H_{02}$  „alle Mittelwerte liegen auf einer *geraden* Linie“. Dieses bedeutet, daß die Differenzen benachbarter Mittelwerte einander gleich sind. Auch hier können die  $H=(T-2)$  Einzelhypothesen

$$\mu_1 - \mu_2 = \mu_2 - \mu_3$$

$$\mu_2 - \mu_3 = \mu_3 - \mu_4$$

(3.2.4a)

$$\mu_1 - 2\mu_2 + \mu_3 = 0$$

$$\text{oder } \mu_2 - 2\mu_3 + \mu_4 = 0$$

$$\mu_{T-2} - \mu_{T-1} = \mu_{T-1} - \mu_T$$

$$\mu_{T-2} - 2\mu_{T-1} + \mu_T = 0$$

nach (3.2.2) als Matrixgleichung geschrieben werden:

$${}_1\mu'_T A_H = {}_10_H$$

(3.2.4b) bzw.

$${}_1B_T A_H = {}_10_H$$

	1	0	0
	-2	1	⋮
	1	-2	⋮
	0	1	1
	⋮	⋮	-2
	⋮	⋮	1
$\mu_1 \mu_2 \dots \mu_T$	0	0	⋯ ⋯ ⋯ 0

Zur Prüfung der Nullhypothesen kann man mehrere Kriterien verwenden. Die gebräuchlichsten sind Wilks Lambda und Hotelling's  $T^2$  (s. Timm, S. 230). Verwendet man Wilks  $\Lambda$ , muß die Nullhypothese verworfen werden, wenn

$$(3.2.5) \quad \Lambda = \frac{|Q_{\text{voll}}|}{|Q_{\text{restr}}|} < U_{\alpha, df_1 = H, df_2 = 1, df_3 = N - 1}$$

wobei  $|Q_{\text{voll}}|$  = Determinante der Kreuzproduktmatrix (= generalisierte Fehlervarianz) der Fehler des vollen - nicht eingeschränkten - Modells

$|Q_{\text{restr}}|$  = generalisierte Fehlervarianz des eingeschränkten Modells (Modell unter  $H_0$ )

$${}_H Q_{H\text{voll}} = A'Y'[I - X(X'X)^{-1}X']YA = E'E$$

$${}_H Q_{H\text{restr}} = Q_{\text{voll}} + A'\hat{B}'X'X\hat{B}A \text{ mit } \hat{B} = (X'X)^{-1}X'Y = {}_1\hat{\mu}_T$$

Die gleichen Hypothesen lassen sich auch mit Hotelling's  $T^2$  prüfen. Die Nullhypothesen werden verworfen, wenn (Timm, S. 231)

$$(3.2.6) \quad T^2 = N \bar{y}'_T A_H (A'_T S_T A)_H^{-1} A'_T \bar{y}_1 > T_{\alpha, df_1 = H, df_2 = N - 1}$$

wobei:  $\bar{y}'_T = (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_T) =$  Vektor mit Stichprobenmittelwerten

$${}_T S_T = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})(y_i - \bar{y})' = \text{Kovarianzmatrix der Zeitpunkte}$$

Wird die Nullhypothese (3.2.4) beibehalten, ist ein Interventionseffekt unwahrscheinlich. Es kann aber ein deterministischer linearer Trend vorliegen. Muß dagegen die Nullhypothese verworfen werden, kann das an einem nicht-linearen Trend oder an einem signifikanten Effekt liegen.

Nehmen wir z.B. folgendes Beispiel (Algina & Swaminathan, 1977). Das quasiexperimentelle Zeitreihendesign umfaßt zwei A- und B-Phasen. Kovarianzmatrix  $S$  und Mittelwertsvektor  $\bar{y}$  sind in Tabelle 3.2.1 aufgeführt.

Tabelle 3.2.1: Kovarianzmatrix und Mittelwertsvektor in einem Zeitreihendesign

	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	A <sub>4</sub>	A <sub>5</sub>	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>	B <sub>5</sub>
A <sub>1</sub>	1.210									
A <sub>2</sub>	.425	1.254								
A <sub>3</sub>	.849	.694	1.690							
A <sub>4</sub>	.599	.511	.873	1.822						
A <sub>5</sub>	.624	.252	.643	.514	.960					
B <sub>1</sub>	.492	.284	.522	.362	.236	2.560				
B <sub>2</sub>	.592	.275	.588	.403	.335	.696	1.440			
B <sub>3</sub>	.268	.174	.314	.303	.164	.746	.698	1.690		
B <sub>4</sub>	.466	.263	.496	.368	.218	.508	.737	.780	1.960	
B <sub>5</sub>	.264	.194	.240	.089	.092	.499	.735	.492	.505	1.440
$\bar{y}' =$	[10.2	10.6	10.9	11.5	11.9	13.2	14.2	14.9	15.9	16.8]

Die Nullhypothese „alle Mittelwerte liegen auf einer *geraden* Linie“ (3.2.4) führt zu einem Hotelling's  $T^2$  (3.2.6)

$$T^2 = 74.25 > T_{0.01, df_1=8, df_2=39} = 33.9$$

Daher wird die Nullhypothese verworfen. Anschließend stellt sich die Aufgabe, genauere Hypothesen über den Mittelwertsverlauf aufzustellen und zu testen. Entsprechend einem Vorschlag von Potthoff & Roy (1964) wird das

allgemeine Modell (3.2.1) durch die Nachmultiplikation mit der Designmatrix „innerhalb der Personen“ bzw. „zwischen den Zeitpunkten“ verändert zu (s.a. 5.41)

$$(3.2.7) \quad {}_N Y_T = {}_N X_1 B_R P_T + {}_N E_T \quad (P \text{ wird in (5.41) und bei Timm mit } Q \text{ bezeichnet})$$

mit  $\text{cov}(Y) = {}_N I_N \otimes_T \Sigma_T$  ( $R$  gibt die Zahl von Trendkomponenten: konst., lin., quadr. . . . an)

Eine Schätzung für  $\Sigma$  ist  $S = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})(y_i - \bar{y})'$ . Es ist dabei zu beach-

ten, daß  $B$  in (3.2.7) bei  $R < T$  und  $P \neq I$  nicht mehr wie in (3.2.1) die Populationsmittelwerte enthält, sondern grundlegendere Basisparameter, die die Unterschiede zwischen den Populationsmittelwerten beschreiben. Die Matrix  $P$  kann dabei verschiedene Formen je nach spezifiziertem Zeitreihendesign annehmen. So kann  $P$  eine Vandermonde-Matrix (s. Timm, S. 500), eine Matrix mit Koeffizienten orthogonaler Polynome (s. Winer, 1971, S. 878) oder eine Matrix mit normierten orthogonalen Polynomen sein.

Wir wählen hierzu ein kleines Beispiel mit  $N=5$  und  $T=3$

$${}_N Y_T = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 10 \\ 7 & 9 & 11 \\ 6 & 9 & 12 \end{bmatrix} \quad {}_N X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad {}_1 B_R = [b_1 \ b_2 \ b_3]$$

$${}_1 \bar{y}_T = [4 \ 7 \ 10]$$

Ist  $P_1$  eine Vandermonde-Matrix

$${}_R P_{1T} = \left. \begin{array}{l} \text{Zeitpunkte} \rightarrow \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{konstanter} \\ \text{linearer} \\ \text{quadratischer} \end{array} \text{Trend}$$

ist der erwartete Mittelwertsvektor für die drei Zeitpunkte

$${}_1 E(Y)'_T = {}_1 B_{1R} P_{1T} = b_{11} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}' + b_{12} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}' + b_{13} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}'$$

Ist dagegen  $P_2$  eine Matrix mit Koeffizienten *orthogonaler Polynome*,

$${}_R P_{2T} = \left. \begin{array}{l} \text{Zeitpunkte} \rightarrow \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{konstanter} \\ \text{linearer} \\ \text{quadratischer} \end{array} \text{Trend}$$

so ist der erwartete Mittelwertsvektor für die drei Zeitpunkte

$${}_1E(Y)'_T = {}_1B_{2R}P_{2T} = b_{21} \begin{pmatrix} +1 \\ +1 \\ +1 \end{pmatrix}' + b_{22} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ +1 \end{pmatrix}' + b_{23} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}'$$

Ist  $P_3$  eine Matrix mit normierten Koeffizienten orthogonaler Polynome, so daß

$${}_R P_{3T} = \left[ \begin{array}{ccc|l} \text{Zeitpunkte} \rightarrow & & & \\ \hline .577350 & .577350 & .577350 & \text{konstanter} \\ -.707107 & .000000 & .707107 & \text{linearer} \\ .408248 & -.816497 & .408248 & \text{quadratischer} \end{array} \right\} \text{Trend}$$

ist der erwartete Mittelwertsvektor für die drei Zeitpunkte

$${}_1E(Y)'_T = {}_1B_{3R}P_{3T} = b_{31} \begin{pmatrix} +.5 \\ +.5 \\ +.5 \end{pmatrix}' + b_{32} \begin{pmatrix} -.7 \\ 0 \\ +.7 \end{pmatrix}' + b_{33} \begin{pmatrix} .4 \\ -.8 \\ .4 \end{pmatrix}'$$

Ist der Trend vollständig spezifiziert, ist der Grad des Polynoms (T-1). Dann ist  $R=T$  und die Matrix  $P$  quadratisch. In diesem Fall und wenn  $P$  invertierbar ist, gestaltet sich die Schätzung der Regressionskoeffizienten besonders einfach. Die Schätzungen lassen sich nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnen:

$$(3.2.8a) \quad \text{für } P_1: \hat{B}_1 = (X'X)^{-1}X'YP_1^{-1} = \bar{y}'P_1^{-1} = [1.00 \ 3.00 \ 0.00]$$

$$(3.2.8b) \quad \text{für } P_2: \hat{B}_2 = (X'X)^{-1}X'YP_2^{-1} = \bar{y}'P_2^{-1} = [7.00 \ 3.00 \ 0.00]$$

$$(3.2.8c) \quad \text{für } P_3: \hat{B}_3 = (X'X)^{-1}X'YP_3^{-1} = \bar{y}'P_3^{-1} = [12.12 \ 4.24 \ 0.00]$$

Hypothesen über  $B$  werden dann wieder wie unter (3.2.2) geprüft mit

$$(3.2.9) \quad {}_1C_1B_R A_H = {}_1\Gamma_H$$

Die dazugehörigen generalisierten Fehlervarianzen bestimmen sich nach

$$(3.2.10a) \quad |Q_{\text{voll}}| = |A'P^{-1}Y'[I - X(X'X)^{-1}X']YP^{-1}A|$$

$$(3.2.10b) \quad |Q_{\text{restr}}| = |Q_{\text{voll}} + (C\hat{B}A)'[C(X'X)^{-1}C']^{-1}(C\hat{B}A)|$$

Die Nullhypothese: „es liegt kein linearer oder quadratischer ‘Trend vor‘“, führt zu folgender Hypothesengleichung (3.2.11) (S. 321).

Oft muß aber  $R < T$  angenommen werden: die Zahl der Effekte, die die Variation der Mittelwertsreihe beschreibt, ist kleiner als die Zahl der Zeitpunkte. Hierdurch fließen schon in die Formulierung der Designmatrix  $P$  Hypothesen ein, die auf ihre Berechtigung hin überprüft werden müssen. Dieser nur im Falle  $R < T$  vorzuschaltende Hypothesentest ist als „test of the fit of the model“ (Grizzle & Allen, 1969) bekannt geworden. Für diese und die

$$(3.2.11a) \quad {}_1C_1 B_3 A_2 = {}_1I_2$$

$$(3.2.11b) \quad \begin{array}{c} \text{konst.} \\ \text{lin.} \\ \text{quadr.} \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline b_1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline b_2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline b_3 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 0 \ 0 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 1 \ 0 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 0 \ 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} \text{konst.} \\ \text{lin.} \\ \text{quadr.} \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 0 \ 0 \\ \hline \end{array}$$

$b_1$  = Regressionskoeffizient für Konstante

$b_2$  = Regressionskoeffizient für linearen Trend

$b_3$  = Regressionskoeffizient für quadratischen Trend

weiteren Betrachtungen empfiehlt es sich, das Linearmodell (3.2.7) zu vereinfachen. Multipliziert man beide Seiten von (3.2.7) mit  $\frac{1}{N} X'$  von links

$$\frac{1}{N} ({}_1X'_N Y_T) = \frac{1}{N} ({}_1X'_N X_1 B_R P_T) + \frac{1}{N} ({}_1X'_N E_T)$$

erhält man

$$(3.2.12a) \quad {}_1\bar{y}'_T = {}_1\bar{B}'_R P_T + {}_1\bar{e}'_T \quad \text{da:} \quad \frac{1}{N} X'X = 1$$

bzw. transponiert:

$$(3.2.12b) \quad {}_T\bar{y}_1 = {}_T P'_R B'_1 + {}_T \bar{e}_1$$

ein Linearmodell in den Mittelwerten:

$$(3.2.12c) \quad \begin{array}{|c|} \hline A_1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 10.2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline A_2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 10.6 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline A_3 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 10.9 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline A_4 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 11.5 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline A_5 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 11.9 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \dots \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline {}_T P'_R \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline b_1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline b_2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \vdots \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline b_R \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline {}_T \bar{e}_1 \\ \hline \end{array}$$

Je nach der Form der Zeitdesignmatrix  $P'$  lassen sich jetzt verschiedene Mittelwertsverläufe modellieren:

a) das Modell einer permanenten Niveauveränderung:

$$\begin{array}{l}
 \text{A-Phase} \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \hline
 \text{B-Phase} \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \text{T}
 \end{array}
 \begin{array}{|c|}
 \hline
 10.2 \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \hline
 13.2 \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \hline
 \text{T}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{|c|c|}
 \hline
 1 & 0 \\
 1 & 0 \\
 1 & 0 \\
 \vdots & \vdots \\
 \vdots & \vdots \\
 \hline
 \vdots & 1 \\
 \vdots & 1 \\
 \vdots & 1 \\
 1 & 1 \\
 1 & 1 \\
 \hline
 \text{T} & \text{T}
 \end{array}
 \begin{array}{|c|}
 \hline
 b_1 \\
 b_2 \\
 \hline
 \text{T} \bar{e}_1
 \end{array}
 +
 \begin{array}{|c|}
 \hline
 \text{T} \bar{e}_1 \\
 \hline
 \end{array}$$

b) das Modell einer vorübergehenden Niveauveränderung:

$$\begin{array}{l}
 \text{A-Phase} \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \hline
 \text{B-Phase} \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \text{T}
 \end{array}
 \begin{array}{|c|}
 \hline
 10.2 \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \hline
 13.2 \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \hline
 \text{T}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{|c|c|}
 \hline
 1 & 0 \\
 1 & 0 \\
 \vdots & \vdots \\
 \vdots & \vdots \\
 1 & 0 \\
 \hline
 1 & 1 \\
 1 & 0 \\
 \vdots & \vdots \\
 \vdots & \vdots \\
 1 & 0 \\
 \hline
 \text{T} & \text{T}
 \end{array}
 \begin{array}{|c|}
 \hline
 b_1 \\
 b_2 \\
 \hline
 \text{T} \bar{e}_1
 \end{array}
 +
 \begin{array}{|c|}
 \hline
 \text{T} \bar{e}_1 \\
 \hline
 \end{array}$$

c) das Modell einer abklingenden Niveauveränderung

$$\begin{array}{l}
 \text{A-Phase} \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \hline
 \text{B-Phase} \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \text{T}
 \end{array}
 \begin{array}{|c|}
 \hline
 10.2 \\
 10.6 \\
 10.9 \\
 11.5 \\
 11.9 \\
 \hline
 13.2 \\
 14.2 \\
 14.9 \\
 15.9 \\
 16.8 \\
 \hline
 \text{T}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{|c|c|}
 \hline
 1 & 0 \\
 1 & 0 \\
 1 & 0 \\
 1 & 0 \\
 1 & 0 \\
 \hline
 1 & 1 \\
 1 & .5 \\
 1 & .25 \\
 1 & .125 \\
 1 & .0625 \\
 \hline
 \text{T} & \text{T}
 \end{array}
 \begin{array}{|c|}
 \hline
 b_1 \\
 b_2 \\
 \hline
 \text{T} \bar{e}
 \end{array}
 +
 \begin{array}{|c|}
 \hline
 \text{T} \bar{e} \\
 \hline
 \end{array}$$

d) das Modell mit höherem gemeinsamen Trend (lin., quadr., kub.)

A-Phase	10.2	1	-9	6	-42	$\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{matrix}$	$+ \bar{e}$	
	10.6	1	-7	2	14			
	10.9	1	-5	-1	35			
	11.5	1	-3	-3	31			
	11.9	1	-1	-4	12			
B-Phase	13.2	1	1	-4	-12	$\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{matrix}$		$+ \bar{e}$
	14.2	1	3	-3	-31			
	14.9	1	5	-1	-35			
	15.9	1	7	2	-14			
	16.8	1	9	6	42			

e) das Modell mit Trends und Niveauänderung (gemeins. lin. Trend)

A-Phase	10.2	1	-9	0	$\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{matrix}$	$+ \bar{e}$	
	10.6	1	-7	0			
	10.9	1	-5	0			
	11.5	1	-3	0			
	11.9	1	-1	0			
B-Phase	13.2	1	1	1	$\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{matrix}$		$+ \bar{e}$
	14.2	1	3	.5			
	14.9	1	5	.25			
	15.9	1	7	.125			
	16.8	1	9	.0625			

f) das Modell mit Strukturbruch (veränderte Regressionen im Sinne einer neuen Konstanten und Steigung)

A-Phase	10.2	1	-2	0	0	$\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{matrix}$	$+ \bar{e}$	
	10.6	1	-1	0	0			
	10.9	1	0	0	0			
	11.5	1	1	0	0			
	11.9	1	2	0	0			
B-Phase	13.2	0	0	1	-2	$\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{matrix}$		$+ \bar{e}$
	14.2	0	0	1	-1			
	14.9	0	0	1	0			
	15.9	0	0	1	1			
	16.8	0	0	1	2			

g) das Modell mit veränderten Trends, so daß  $R = 6$  ist: bei Verwendung der Vandermode-Matrix (links) und orthogonaler Polynome (rechts)

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \text{A-Phase} \\ \text{B-Phase} \end{array} \\
 \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 16 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 25 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 25 \end{array} \right] \\ \text{1...r} \quad \text{1...r} \end{array} \\
 \end{array} = P'$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \text{A-Phase} \\ \text{B-Phase} \end{array} \\
 \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{cccccc} 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right] \\ \text{1...r} \quad \text{1...r} \end{array} \\
 \end{array} = P'$$

Besitzen die A- und B-Phasen unterschiedliche Länge (z.B.:  $T_A=5$  und  $T_B=6$ ), dann kann das Modell mit veränderten nichtlinearen Trends folgendermaßen formuliert werden (h) (S. 325).

Sind die Trends für A- und B-Phasen voll spezifiziert, so daß  $R = T_A + T_B$  wird  $P$  quadratisch von der Ordnung  $T_A + T_B$  (s. Modell i auf S. 325).

In diesem Fall ist aber der Vektor  $\bar{e} = 0$ , weil sich die  $T_A$  Mittelwerte der A- und die  $T_B$  Mittelwerte der B-Phase perfekt durch Polynome vom Grade  $r_A=T_A-1$  und  $r_B=T_B-1$  abbilden lassen.

Der Mittelwertsvektor  $\bar{e}$  in a)-h) läßt sich als Mittelwertsvektor zusätzlicher im Design  $P$  „vergessener“ Variabler auffassen. Trifft das Linearmodell a)-h) zu, darf der Mittelwertsvektor  $\bar{e}$  der „fehlenden“ Variablen nicht signifikant von Null abweichen, da

$${}_{T-R}E(\bar{y})_1 = {}_{T-R}P'_R B_1 \quad \text{und} \quad {}_{T-R}E(\bar{e})_1 = {}_{T-R}0_1$$

ist, wenn das Modell gilt.

Daher muß geprüft werden, ob der Mittelwertsvektor  $\bar{e}$  oder der linear transformierte Vektor  $H'\bar{e}$  signifikant von Null abweicht. Hierzu suchen wir eine nicht verschwindende Matrix  $H'$ , so daß

$${}_{T-R}H'_T P'_R = 0$$

ist. Dann transformieren wir (3.2.12b) zu

$$(3.2.13) \quad {}_{T-R}H'_T \bar{y}_1 = {}_{T-R}H'_T P'_R B_1 + {}_{T-R}H'_T \bar{e}_1$$

h) das Modell mit veränderten nichtlinearen Trends ( $R = 8 < T_A + T_B$ ) bei unterschiedlich langen A- und B-Phasen

bei Verwendung der Vandermonde-Matrix		und bei orthogonalen Polynomen																																																
A-Phase	<table border="1"> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>4</td><td>8</td></tr> <tr><td>1</td><td>3</td><td>9</td><td>27</td></tr> <tr><td>1</td><td>4</td><td>16</td><td>64</td></tr> <tr><td>1</td><td>5</td><td>25</td><td>125</td></tr> </table> 	1	1	1	1	1	2	4	8	1	3	9	27	1	4	16	64	1	5	25	125	<table border="1"> <tr><td>1</td><td>-2</td><td>2</td><td>-1</td></tr> <tr><td>1</td><td>-1</td><td>-1</td><td>2</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>-2</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>-1</td><td>-2</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td>1</td></tr> </table> 	1	-2	2	-1	1	-1	-1	2	1	0	-2	0	1	1	-1	-2	1	2	2	1								
1	1	1	1																																															
1	2	4	8																																															
1	3	9	27																																															
1	4	16	64																																															
1	5	25	125																																															
1	-2	2	-1																																															
1	-1	-1	2																																															
1	0	-2	0																																															
1	1	-1	-2																																															
1	2	2	1																																															
B-Phase	 <table border="1"> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>4</td><td>8</td></tr> <tr><td>1</td><td>3</td><td>9</td><td>27</td></tr> <tr><td>1</td><td>4</td><td>16</td><td>64</td></tr> <tr><td>1</td><td>5</td><td>25</td><td>125</td></tr> <tr><td>1</td><td>6</td><td>36</td><td>216</td></tr> </table>	1	1	1	1	1	2	4	8	1	3	9	27	1	4	16	64	1	5	25	125	1	6	36	216	 <table border="1"> <tr><td>1</td><td>-5</td><td>5</td><td>-5</td></tr> <tr><td>1</td><td>-3</td><td>-1</td><td>7</td></tr> <tr><td>1</td><td>-1</td><td>-4</td><td>4</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>-4</td><td>-4</td></tr> <tr><td>1</td><td>3</td><td>-1</td><td>-7</td></tr> <tr><td>1</td><td>5</td><td>5</td><td>5</td></tr> </table>	1	-5	5	-5	1	-3	-1	7	1	-1	-4	4	1	1	-4	-4	1	3	-1	-7	1	5	5	5
1	1	1	1																																															
1	2	4	8																																															
1	3	9	27																																															
1	4	16	64																																															
1	5	25	125																																															
1	6	36	216																																															
1	-5	5	-5																																															
1	-3	-1	7																																															
1	-1	-4	4																																															
1	1	-4	-4																																															
1	3	-1	-7																																															
1	5	5	5																																															

$P' = \begin{bmatrix} P'_1 & 0 \\ 0 & P'_2 \end{bmatrix}$

i) das Modell mit veränderten nichtlinearen Trends ( $R = 11 = T_A + T_B$ ) bei unterschiedlich langen A- und B-Phasen

A-Phase	<table border="1"> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>:</td><td>1</td><td>2</td><td>4</td><td>8</td></tr> <tr><td>:</td><td>1</td><td>3</td><td>9</td><td>27</td></tr> <tr><td>:</td><td>1</td><td>4</td><td>16</td><td>64</td></tr> <tr><td>P</td><td>1</td><td>5</td><td>25</td><td>125</td></tr> </table>  	1	1	1	1	1	:	1	2	4	8	:	1	3	9	27	:	1	4	16	64	P	1	5	25	125	<table border="1"> <tr><td>1</td><td>-2</td><td>2</td><td>-1</td><td>1</td></tr> <tr><td>:</td><td>1</td><td>-1</td><td>-1</td><td>2</td></tr> <tr><td>:</td><td>1</td><td>0</td><td>-2</td><td>0</td></tr> <tr><td>:</td><td>1</td><td>1</td><td>-1</td><td>-2</td></tr> <tr><td>P</td><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td>1</td></tr> </table>  	1	-2	2	-1	1	:	1	-1	-1	2	:	1	0	-2	0	:	1	1	-1	-2	P	1	2	2	1										
1	1	1	1	1																																																										
:	1	2	4	8																																																										
:	1	3	9	27																																																										
:	1	4	16	64																																																										
P	1	5	25	125																																																										
1	-2	2	-1	1																																																										
:	1	-1	-1	2																																																										
:	1	0	-2	0																																																										
:	1	1	-1	-2																																																										
P	1	2	2	1																																																										
B-Phase	 <table border="1"> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>:</td><td>1</td><td>2</td><td>4</td><td>8</td></tr> <tr><td>:</td><td>1</td><td>3</td><td>9</td><td>27</td></tr> <tr><td>:</td><td>1</td><td>4</td><td>16</td><td>64</td></tr> <tr><td>:</td><td>1</td><td>5</td><td>25</td><td>125</td></tr> <tr><td>9</td><td>1</td><td>6</td><td>36</td><td>216</td></tr> </table>	1	1	1	1	1	:	1	2	4	8	:	1	3	9	27	:	1	4	16	64	:	1	5	25	125	9	1	6	36	216	 <table border="1"> <tr><td>1</td><td>-5</td><td>5</td><td>-5</td><td>1</td></tr> <tr><td>:</td><td>1</td><td>-3</td><td>-1</td><td>7</td></tr> <tr><td>:</td><td>1</td><td>-1</td><td>-4</td><td>4</td></tr> <tr><td>:</td><td>1</td><td>1</td><td>-4</td><td>-4</td></tr> <tr><td>:</td><td>1</td><td>3</td><td>-1</td><td>-7</td></tr> <tr><td>9</td><td>1</td><td>5</td><td>5</td><td>5</td></tr> </table>	1	-5	5	-5	1	:	1	-3	-1	7	:	1	-1	-4	4	:	1	1	-4	-4	:	1	3	-1	-7	9	1	5	5	5
1	1	1	1	1																																																										
:	1	2	4	8																																																										
:	1	3	9	27																																																										
:	1	4	16	64																																																										
:	1	5	25	125																																																										
9	1	6	36	216																																																										
1	-5	5	-5	1																																																										
:	1	-3	-1	7																																																										
:	1	-1	-4	4																																																										
:	1	1	-4	-4																																																										
:	1	3	-1	-7																																																										
9	1	5	5	5																																																										

Ist das Modell korrekt, ist unter  $H_0$

$$(3.2.14) \quad E(H'y) = E(H'e) = 0$$

$H'$  kann als Zeilenbasis von  $[T_R P'_R (P P')_R^{-1} P_T - T_I T]$  bestimmt werden (Grizzle & Allen, 1969, S. 366). So ist z.B. als eine Möglichkeit

$$(3.2.15) \quad T_{-R} H'_T = T_{-R} T_T [P'_R (P_T P')_R^{-1} P_T - T_I T]$$

mit beliebiger Matrix  $T$  denkbar. Weitere Vorschläge finden sich bei Grizzle & Allen (1969), Swaminathan & Algina (1977), Timm (1975, S. 496). Besonders einfach läßt sich  $H$  finden, wenn  $P'$  eine Matrix mit orthogonalen Polynomkoeffizienten ist. Die Zeilen von  $H'$  bestehen dann aus „überflüssigen“ ( $T - R$ ) Polynomkoeffizienten, wie man an den schraffierten Teilen der Matrix  $P'$  in i) sieht, wenn man für A- und B-Phase verschiedene Polynome von gemeinsamem Grade (und damit  $R = 8$ ) annimmt.

Bildet man aus diesen Spalten die Zeilen der Matrix  $H'$ , ist das Produkt  $H'P_h = 0$ :

$$(3.2.16) \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & \begin{array}{c} 1 \ -2 \ 2 \ -1 \\ 1 \ -1 \ -1 \ 2 \\ 1 \ 0 \ -2 \ 0 \\ 1 \ 1 \ -1 \ -2 \\ 1 \ 2 \ 2 \ 1 \end{array} & & \begin{array}{c} 0 \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \hline & & & \begin{array}{c} 1 \ -5 \ 5 \ -5 \\ 1 \ -3 \ -1 \ 7 \\ 1 \ -1 \ -4 \ 4 \\ 1 \ 1 \ -4 \ -4 \\ 1 \ 3 \ -1 \ -7 \\ 1 \ 5 \ 5 \ 5 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 1 \ -4 \ 6 \ -4 \ 1 \\ \\ \\ \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ \\ \\ \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ \\ \\ \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ \\ \\ \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 0 \\ \\ \\ \end{array} & \begin{array}{c} 1 \ -3 \ 2 \ 2 \ -3 \ 1 \\ 1 \ 5 \ -10 \ 10 \ -5 \ 1 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ \\ \\ \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ \\ \\ \end{array} \\ \hline \end{array}$$

Die Adäquatheit des Modells (d.h., ob  $E(\bar{e}) = 0$  ist), läßt sich dann mit Hotelling's  $T^2$  prüfen. Die Nullhypothese wird verworfen, wenn

$$(3.2.17) \quad T^2 = N_1 \bar{y}'_T H_{T-R} (H'_T S_T H)_{T-R}^{-1} H'_T \bar{y}_1 > F_{\alpha, df_1, df_2}$$

wobei:  $S$  = Kovarianzmatrix der Zeitpunkte

$$df_1 = T - R$$

$$df_2 = N - (T - R)$$

Ist der Trend nicht vollständig spezifiziert ( $R < T$ ), verändert sich der Maximum-Likelihoodschätzer von (3.2.8) zu (3.2.18) (s.a. Khatri, 1966; Jöreskog, 1979, S. 314; vgl. a. (5.45))

$$(3.2.18) \quad {}_1\hat{B}_R = {}_1(X'_N X)^{-1} X'_N Y_T S^{-1} P'_R (P_T S_T^{-1} P')_{R}^{-1} = {}_1\bar{y}'_T S_T^{-1} P'_R (P S^{-1} P')_{R}^{-1}$$

Hypothesen werden wieder wie nach (3.2.9) formuliert. Für den Test auf einen Interventionseffekt lautet die Hypothesengleichung (3.2.9) für die Modelle a)-c)

$$[1] \ [b_1 \ b_2] \ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = [0]$$

für Modell e)

$$[1] \ [b_1 \ b_2 \ b_3] \ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = [0]$$

für Modell f):  $H_0$  kein Strukturbruch  $b_1 = b_3$  und  $b_2 = b_4$

$$[1] \quad \boxed{b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad b_4} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 \\ \hline 0 & -1 \\ \hline \end{array} = \boxed{0 \quad 0}$$

für Modell g):  $H_0$  kein Strukturbruch

$$[1] \quad \boxed{b_1 \quad b_2 \quad b_3} \quad \boxed{b_4 \quad b_5 \quad b_6} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline \dots & \dots & \dots \\ \hline -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \\ \hline \end{array} = \boxed{0 \quad 0 \quad 0}$$

Die Prüfung der Hypothesen kann wieder über Wilks' Lambda erfolgen, wobei die Berechnung der generalisierten Fehlervarianzen wegen der Nichtinvertierbarkeit der nichtquadratischen Matrix  $P$  nach (5.47) erfolgt (dort ist für  $K$  die Matrix  $P$  einzusetzen).

Die Nullhypothese wird verworfen, wenn

$$\Lambda = \frac{|Q_{\text{voll}}|}{|Q_{\text{restr}}|} < U_{\alpha, df_1=H, df_2=G, df_3=N-G-(T-R)}$$

ist. Wir werden im Kap. 7.2 zeigen, wie man (3.2.18) und einfache Hypothesen („Sind Parameter Null oder einander gleich?“) mit LISREL prüfen kann.

### 3.2.2 $G > 1$ Quasiexperimentelle Zeitreihendesigns bei mehreren Gruppen

Hierzu erhält die Designmatrix  $X$  und die Matrix  $B$  eine Erweiterung auf  $G$ -Spalten bzw.  $G$ -Zeilen, wie es in (3.2.1) schon angedeutet ist. In (3.2.8) wird der Mittelwertsvektor  $\bar{y}_T$  durch eine Mittelwertsmatrix  ${}_G\bar{Y}'_T$  ersetzt. Siehe auch Näheres im Kapitel 5 über Varianzanalyse.

### 3.2.3 $M > 1$ Quasiexperimentelle Zeitreihendesigns mit mehreren abhängigen Variablen

Bei  $M > 1$  abhängigen Variablen wird die Matrix  $P$  in (3.2.7) erweitert zu

		1 ... T		1 ... T
1	R	P	0	0
⋮		0	⋮	0
⋮		0	⋮	0
1	R	0		P
⋮				
		1 ..... M		

die Matrix  $Y$  in (3.2.7) zu:

		1 ... T		1 ... T
1	N	$Y_1$	.....	$Y_M$
⋮				
⋮				

und die Matrix (bzw. Vektor)  $B$  in (3.2.7) zu

		1 ... R		1 ... R
1	G	$B_1$	.....	$B_M$
⋮				
⋮				

Die Testkriterien verändern sich dazu analog. Näheres siehe auch im Kapitel 5 über Varianzanalyse und Timm (1975, S. 507f.).

#### 4. Veränderungsmessung mit Hilfe von Differenzenwerten

$$N > 1, T = 2$$

Werden zu zwei Zeitpunkten  $t_1$  (Pretest) und  $t_2$  (Posttest) Messungen  $Y_1$  und  $Y_2$  erhoben, kann man den Differenzwert  $D = Y_2 - Y_1$  als ein Maß für Veränderung ansehen. Dieses Pretest-Posttestkonzept spielt z.B. in der Lernfähigkeitsdiagnostik bei Lerntests (Guthke 1976, 1977, 1980; Clauss, Guthke & Lehwald, 1978; Melchinger, 1978; Möbus, 1981) und in der Hirnschadendiagnostik (Möbus & Wallasch, 1977; Becker & Schmidtke, 1977) eine Rolle. Die methodischen Überlegungen sollen an einem inhaltlich zwar trivialen, dafür

aber einfachen Beispiel („Gewichtsveränderung“ durch eine Erholungskur) diskutiert werden.

Vorerst soll der Differenzwert  $D = Y_2 - Y_1$  (Dabei sei  $Y_2$  der Endwert (z.B.: Gewicht nach Erholungskur) und  $Y_1$  der Anfangswert (z.B.: Gewicht vor Kur)) betrachtet werden. Die Konzeption für diesen Veränderungsindex ist sehr einfach. Die Anfangs- und Endwerte müssen nur Intervallskalen aufweisen, damit die Differenzbildung sinnvoll ist. Allseits bekannt sind diese Differenzen als Basis zur Berechnung des Mittelwerttests bei verbundenen Stichproben. Dabei wird die Hypothese überprüft, ob global (für die Gesamtgruppe) eine Veränderung stattgefunden hat. Neben dieser skizzierten Verwendung des Differenzscores zur Analyse von Globalveränderung kann der Differenzwert auch zur Analyse bzw. Prognose *individueller* Veränderung herangezogen werden. Unter welchen Bedingungen erlaubt der Differenzwert dann optimale Schlüsse?

Die Konstruktion eines Index kann aus mehreren Gründen erfolgen. So kann man die Variablenzahl reduzieren wollen oder neue Aussagen beabsichtigen, die mit den Ausgangsvariablen nur schwer möglich wären. Diese zweite Absicht ist aber nur dann realisierbar, wenn eine relativ starke Unabhängigkeit zwischen den Ausgangsvariablen und dem Index existiert. Wie groß diese Unabhängigkeit ist, soll mit Hilfe der Korrelation zwischen Anfangswert und Differenzwert untersucht werden. Analoge Ergebnisse kann man für die Korrelation zwischen Differenzwert und Endwert erreichen.

#### 4.1 Korrelation zwischen Anfangswert und Differenzwert

Falls die Varianz der Anfangswerte:  $V(Y_1)$  größer oder gleich der Varianz der Endwerte  $V(Y_2)$  ist, ist die Korrelation zwischen Anfangswert  $Y_1$  und Differenzwert  $D$  negativ:

$$\rho(Y_1, D) \leq 0 \text{ bei } V(Y_1) \geq V(Y_2)$$

Denn die Korrelation zwischen  $Y_1$  und  $D = Y_2 - Y_1$  ist:

$$\rho(Y_1, D) = \rho(Y_1, Y_2 - Y_1) = \frac{\text{Cov}(Y_1, D)}{\sqrt{V(Y_1) \cdot V(D)}}$$

$$V(D) = V(Y_2 - Y_1) = V(Y_1) + V(Y_2) - 2 \text{Cov}(Y_1, Y_2)$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Y_1, D) &= \text{Cov}(Y_1, Y_2 - Y_1) = \text{Cov}(Y_1, Y_2) - \text{Cov}(Y_1, Y_1) \\ &= \text{Cov}(Y_1, Y_2) - V(Y_1) \end{aligned}$$

$$\rho(Y_1, D) = \frac{\text{Cov}(Y_1, Y_2) - V(Y_1)}{\sqrt{V(Y_1)} \sqrt{V(Y_1) + V(Y_2) - 2 \text{Cov}(Y_1, Y_2)}}$$

Im Nenner erhält man die Normierung der Cov ( $Y_1, D$ ). Zur Abschätzung, wann der Korrelationskoeffizient negativ ist, muß der Zähler betrachtet werden.

Allgemein gilt:  $\sqrt{V(Y_1) \cdot V(Y_2)} \geq \text{Cov}(Y_1, Y_2)$

Laut Voraussetzung ist:  $V(Y_1) \geq V(Y_2)$

$$\begin{aligned} V(Y_1) &= \sqrt{V(Y_1) V(Y_1)} \geq \sqrt{V(Y_1) V(Y_2)} \geq \text{Cov}(Y_1, Y_2) \\ 0 &\geq -V(Y_1) + \text{Cov}(Y_1, Y_2) = \text{Cov}(Y_1, D) \\ \rho(Y_1, D) &\leq 0 \text{ falls } V(Y_1) = V(Y_2) \\ &\quad \text{oder } V(Y_1) > V(Y_2) \end{aligned}$$

Falls die Varianz  $V(Y_1) < V(Y_2)$  ist, kann der Korrelationskoeffizient durchaus positiv sein; daher ist die Tendenz zu einer negativen Korrelation (in der Literatur bekannt unter dem Stichwort: „Regression zum Mittelwert“) zwischen Anfangswert und Differenzwert entscheidend bestimmt durch die Varianzen der Werte zu beiden Zeitpunkten. Coleman (1968) charakterisiert diese Tendenz als „negativen Feedback“, der ein System stabil erhält. Bei positiver Korrelation müßte bei Fortschreiten des Prozesses wegen der permanent zunehmenden Varianz ein explosiver Prozeß vorliegen: Je größer die individuelle positive Abweichung vom Anfangsmittelwert ist, desto größer ist die individuelle Zunahme. Entsprechendes gilt spiegelbildlich für individuelle negative Abweichungen,

Als Konsequenz für eine Längsschnittstudie ergibt sich, daß Maßnahmen verhindert werden sollten, die zu einer „künstlichen“ Varianzstabilisierung führen könnten. So sollte man Meßinstrumente, die nur einen beschränkten Ausschnitt eines Bereichs messen (Ceiling effect) oder eine Standardisierung der Variablen für die Zeitpunkte (Normierung von Instrumenten) vermeiden. Zumindest müssen bei der Interpretation eines „negativen Feedbacks“ solche varianzstabilisierenden Maßnahmen mit berücksichtigt werden, Im Allgemeinen kann man von der Abhängigkeit vom Anfangs- und Veränderungswert ausgehen:

## 4.2 Schätzung individueller Veränderungswerte

Ist man an der Prognose individueller Veränderungswerte bzw. der Prognose des jeweiligen Endwertes interessiert, muß man untersuchen, in welchem Ausmaß die Anfangswerte mit berücksichtigt werden sollen.

Für eine solche Prognose könnte man folgende drei Verfahren vorschlagen:

1. a) Berechnung eines globalen Erwartungswertes:  $E(Y_2 - Y_1) = E(D)$

b) Endwert (geschätzt):  $\hat{y}_{v2} = y_{v1} + E(D)$ ;  $v$  = Personenindex

\* Z.B.: Bereiter, 1963.

2. a) Berechnung eines bedingten Erwartungswertes: Regression 1. Art:  
 $E(Y_2 | Y_1 = y_{v1})$  für alle verschiedenen  $y_{v1}$   
 b) Endwert (geschätzt):  $\hat{y}_{v2} = E(Y_2 | Y_1 = y_{v1})$
3. a) Unter der zusätzlichen Annahme, daß der bedingte Erwartungswert von  $Y_2$  eine lineare Funktion der Anfangswerte ist:  
 $E(Y_2 | Y_1 = y_{v1}) = a + by_{v1}$ , kann die Steigung  $b$  und der Abschnitt auf der  $y_2$ -Achse berechnet werden  
 (Regression 2. Art; s.a. Fisz, 1973)  
 b) Endwert (geschätzt):  $\hat{y}_{v2} = a + by_{v1}$

Beispiel: Erholungskur

		Y <sub>1</sub>				
		40	50	60	70	
Gewicht	80	0	0	.25	.75	.25
nach	70	0	.25	.50	.25	.25
Kur: Y <sub>2</sub>	60	.25	.50	.25	0	.25
	50	.75	.25	0	0	.25
		.25	.25	.25	.25	

pro Spalte in der Tabelle: bedingte Wahrscheinlichkeiten bzw. bedingte relative Häufigkeiten

$$E(D) = E(Y_2 - Y_1) = E(Y_2) - E(Y_1) = 65 - 55 = 10$$

$$E(Y_2 | 40) = 60 * .25 + 50 * .75 = 52.5$$

$$E(Y_2 | 50) = 60 \quad E(Y_2 | 60) = 70 \quad E(Y_2 | 70) = 77.5$$

$$a = E(Y_2) - bE(Y_1) = 65 - .85 * 55 = 18.25$$

$$b = \frac{\text{cov}(Y_1, Y_2)}{\sqrt{V}(Y_1) \sqrt{V}(Y_2)} = \frac{106.25}{\sqrt{125} \sqrt{125}};$$

Prognosen für  $y_2$ -Werte bei den 3 Verfahren

bei Y <sub>1</sub>	$\hat{Y}_2$ (Verf. 1)	$\hat{Y}_2$ (Verf. 2)	$\hat{Y}_2$ (Verf. 3)
40	40 + 10 = 50	52.5	18.25 + .85 * 40 = 52.25
50	50 + 10 = 60	60	18.25 + .85 * 50 = 60.75
60	60 + 10 = 70	70	18.25 + .85 * 60 = 69.25
70	70 + 10 = 80	77.5	18.25 + .85 * 70 = 77.75

In diesem Beispiel sind die Varianzen zu beiden Zeitpunkten gleich. Der Anfangsmittelwert ist 55. Methoden 2 und 3 zeigen eine stärkere Regression zum Mittelwert als Methode 1, d.h. die Schätzungen für den 2. Zeitpunkt liegen bei Methode 2 und 3 näher beim Mittelwert als bei Methode 1.

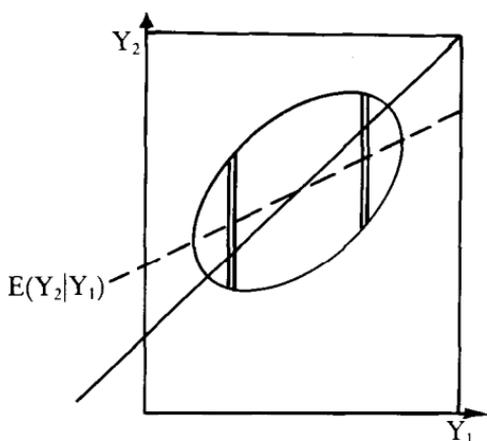


Fig. 4.1: Bivariate Normalvert. mit Hauptachse ——— und Regression  $E(Y_2 | Y_1)$

Als individuelle Abweichungen ergeben sich für die 3 Methoden:

- 1:  $Abw. = y_{v2} - \hat{y}_{v2} = y_{v2} - y_{v1} - E(D)$  (= Residuen bei Regression  
Konst. ohne Anfangswert)
- 2:  $Abw. = y_{v2} - \hat{y}_{v2} = y_{v2} - E(Y_2 | y_{v1})$  (= Residuen bei Regression  
1. Art mit Anfangswert)
- 3:  $Abw. = y_{v2} - \hat{y}_{v2} = y_{v2} - (a + by_{v1})$  (= Residuen in Regression  
 $= y_{v2} - by_{v1} - a$  2. Art mit Anfangswert  
Konst.)

Unter der Bezeichnung „Überkorrektur - Unterkorrektur - Dilemma“ hat Bereiter (1963) das Problem behandelt, wie bei den Differenzwerten die Anfangswerte berücksichtigt und nach den Anfangswerten korrigierte Veränderungswerte erzeugt werden sollen.

In Methode 1 wird durch Subtraktion nach den Anfangswerten korrigiert. Diese Korrektur berücksichtigt aber überhaupt nicht die Art der bivariaten Verteilung zwischen Anfangswert und Endwert. An Verteilungsinformation wird der Mittelwert berücksichtigt, der allerdings nur Informationen über die *Randverteilungen* enthält.

Bei den Methoden 2 und 3 wird die Art der bivariaten Verteilung berücksichtigt. Die Abweichungen sind dabei optimal (im Sinne der Fehlerminimierung) korrigiert.

Bei individuellen Prognosen sollte man entsprechend Cronbach & Furby (1970) nach Möglichkeit alle Informationen berücksichtigen, die man zur Verfügung hat. Darunter fällt auch der Anfangswert. Zur Berücksichtigung der

Information über Meßfehler wurden spezielle Formeln entwickelt. Eine Übersicht findet sich bei Petermann (1978).

Bei *globalen* Fragestellungen („Gibt es in einer gegebenen Population eine Wirkung der Kur?“) ist eine Korrektur nach den Anfangswerten nicht erforderlich. Eine solche Fragestellung sei „*unbedingt*“ genannt. Fragestellungen, bei denen die unterschiedlichen Anfangswerte mitberücksichtigt (etwa: „Welche Wirkung ist für eine bestimmte Person zu erwarten?“) und irgendwie konstant gehalten werden sollen, heißen „*bedingte*“ Fragestellungen (s. Bock, 1975).

### 4.3 Der Differenz- bzw. Endwert in der Regressionsanalyse

Wir wollen jetzt den Einfluß von Drittvariablen auf die Veränderung D untersuchen.

*Differenz- bzw. Endwert als abhängige Variable:*

Für die Form der Beziehung zwischen Differenzwert und einer Drittvariablen wird ein lineares Modell gewählt, wobei der Anfangswert auf der Seite der unabhängigen Variablen auftaucht („bedingte“ Fragestellung).

(4.1)

$$\begin{array}{ccccccc}
 \begin{array}{|c|} \hline D_1 \\ \hline D_2 \\ \hline \dots \\ \hline D_N \\ \hline \end{array} & = & \begin{array}{|c|} \hline Y_{12} - Y_{11} \\ \hline Y_{22} - Y_{21} \\ \hline \dots \\ \hline Y_{N2} - Y_{N1} \\ \hline \end{array} & = & \overbrace{\begin{array}{|c|} \hline Y_{11} \\ \hline Y_{21} \\ \hline \dots \\ \hline Y_{N1} \\ \hline \end{array}}^{\text{Anfangswert}} & \cdot & \begin{array}{|c|} \hline b_1 \\ \hline \end{array} & + & \overbrace{\begin{array}{|c|} \hline X_{12} \dots X_{1m} \\ \hline X_{22} \dots X_{2m} \\ \hline \dots \\ \hline X_{N2} \dots X_{Nm} \\ \hline \end{array}}^{\text{unabhängige Variable (incl. Scheinvariable mit Werten 1 für Regressionskonstante)}} & \cdot & \begin{array}{|c|} \hline b_2 \\ \hline b_3 \\ \hline \dots \\ \hline b_m \\ \hline \end{array} & + & \begin{array}{|c|} \hline \epsilon_1 \\ \hline \epsilon_2 \\ \hline \dots \\ \hline \epsilon_N \\ \hline \end{array} \\
 d & = & y_2 - y_1 & = & y_1 & \cdot & b_1 & + & X & \cdot & b & + & \epsilon
 \end{array}$$

Durch Umformung der Gleichung (4.1) kann man erreichen, daß nur noch der Endwert auf der linken Seite steht:

(4.2) 
$$y_2 = y_1 b_1 - y_1 + Xb + \epsilon = y_1(b_1 - 1) + Xb + \epsilon$$

Man sieht, daß die Regressionskoeffizienten der Drittvariablen unverändert bleiben. Eine einfache Umformung erfährt nur der Regressionskoeffizient des Anfangswerts. Dies trifft auch für die Schätzungen zu. Da auch die Varianzen der Schätzer in beiden Fällen gleich sind, ist es für die Praxis irrelevant, ob man den Endwert oder den Differenzenwert als abhängige Variable wählt.

Diese Überlegungen sind auch auf Gleichungssysteme (s. Roskam, 1979) und auf Regressionen mit fehlerbehafteten Variablen (Werts & Linn, 1970) übertragbar. Jedoch gilt diese Invarianz nur für den Fall der bedingten Fragestellung. Anderweitig können sich alle Schätzungen für die Koeffizienten  $b_i$  ( $i=2, \dots, m$ ) ändern.

Bei unbedingter Fragestellung gilt:

$$(4.3) \quad b_D = b_E - b_A \quad \text{wobei:}$$

$b_D$  Regressionskoeffizienten  
bei Differenz als abhängige Variable  
 $b_A$  bei Anfangswert als abhängige Variable  
 $b_E$  bei Endwert als abhängige Variable

Die unabhängigen Variablen müssen identisch sein.

#### *Der Differenzwert als unabhängige Variable*

Es sei  $Z$  eine abhängige Variable (z.B. subjektive Befindlichkeit nach einer Kur) und die unabhängigen Variablen bestünden aus dem Anfangswert  $Y_1$ , dem Differenzwert  $D$  und anderen Drittvariablen  $X_i$  ( $i=2, \dots, m$ ).

Die multiple Regression sei in Matrixform gegeben:

$$(4.4) \quad z = y_1 b_0 + d b_1 + Xb + \varepsilon = y_1 b_0 + (y_2 - y_1) b_1 + Xb + \varepsilon$$

Durch Umformung von (4.4) kann man erreichen, daß nicht mehr die Differenz  $(y_2 - y_1)$  sondern nur noch der Anfang- und Endwert in der Gleichung vorkommen:

$$(4.5) \quad z = y_1 b_0 - y_1 b_1 + y_2 b_1 + Xb + \varepsilon = y_1 (b_0 - b_1) + y_2 b_1 + Xb + \varepsilon$$

Man sieht wiederum, daß die Regressionskoeffizienten der Drittvariablen  $X$  invariant gegenüber der Wahl von Differenz oder Endwert auf der Prädiktorseite sind. Dasselbe gilt für die Schätzer  $b$  und deren Varianzen.

#### *Partielle Korrelation zwischen Differenzwert und Drittvariablen bei bedingter Fragestellung*

Im Spezialfall einer einzigen Drittvariablen  $X$  gilt:

$$(4.6) \quad \varrho_{DX, Y_1} = \varrho_{Y_2 X, Y_1} \quad \text{wobei: } \varrho_{DX, Y_1} = \text{partielle Korrelation}$$

zw. Differenzwert und  
Drittvariablen unter  
Konstanthaltung des  
Anfangswertes  $Y_1$

Dieses Ergebnis ist nicht weiter überraschend, da die Regressionskoeffizienten in den entsprechenden Gleichungen (4.2) und (4.4) invariant gegenüber der Wahl von Differenz- oder Endwert sind. Diese Invarianz überträgt sich dabei auf die partiellen Korrelationskoeffizienten (s. Yule & Kendall, 1964).

### Vergleich von bedingter und unbedingter Fragestellung

Der Vergleich ist bekannt geworden unter dem Begriff des „Lord’schen Paradoxon“. Dabei wird einer unbedingten Analyse von Differenzwerten eine Kovarianzanalyse der Endwerte (mit den Anfangswerten als Kovariabler) gegenübergestellt.

Lord bezieht sich in seinem Beispiel auf die Gewichtsveränderung von Jungen und Mädchen im Zeitraum von September bis Juni (Bock, 1975, S. 490f.):

#### Lord’s paradox:

Suppose a large university obtains measurements, at the beginning and end of the school year, of the weight of each student who takes his meals in the university dining halls. When the resulting data are classified by sex of student, their scatter plot takes the form shown schematically in Figur 4.2. The 45 line represents equality of weights in September and June. The ellipses of concentration represent the presumably bivariate normal distribution of weight on the two occasions.

Suppose two statisticians analyse these data for differences in weight gain of men versus women. The *first statistician* analyses simple gain scores and concludes that “as far as these data are concerned, there is no evidence of any interesting effect of the school diet (or of anything else) on student weight; in particular, there is no evidence of any differential effect on the two sexes, since neither group shows any systematic change.”

The *second statistician*, on the other hand, decides to do an analysis of covariance.

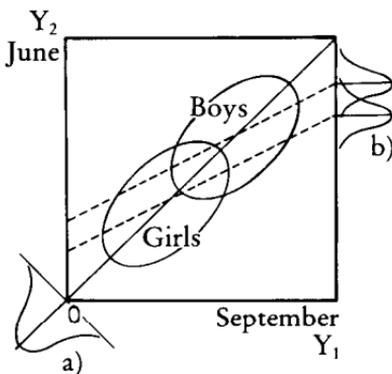


Fig. 4.2: Verteilung der Zunahme bei a) unbedingter, b) bedingter Analyse



Der interessierende Effektunterschied ist dann durch den Parameter  $a_U$  repräsentiert.

Durch den Test der Hypothese  $H_0 : a_U = \frac{1}{2} (b_M - b_W) = 0$  kann die unbedingte Fragestellung beantwortet werden.

Der angeführte Kovarianzansatz berücksichtigt den Anfangswert als Unabhängige:

$$(4.9) \quad \begin{matrix} \sigma \\ \tau \end{matrix} \begin{matrix} \left\{ \begin{matrix} Y_{12} \\ \dots \\ Y_{12} \\ Y_{1+1,2} \\ \dots \\ Y_{N2} \end{matrix} \right. \\ \left\{ \begin{matrix} Y_{11} \\ \dots \\ Y_{11} \\ Y_{1+1,1} \\ \dots \\ Y_{N1} \end{matrix} \right. \end{matrix} = \begin{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \dots & \dots \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ \dots & \dots \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_G \\ c_U \end{bmatrix} + \begin{matrix} \begin{bmatrix} Y_{11} \\ \dots \\ Y_{11} \\ Y_{1+1,1} \\ \dots \\ Y_{N1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \end{bmatrix} + \begin{matrix} \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \dots \\ \epsilon_1 \\ \epsilon_{1+1} \\ \dots \\ \epsilon_N \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Die Untersuchung der Fragestellung kann dabei wieder durch die Hypothese  $H_0 : c_U = 0$  geprüft werden.

Wie schon oben erwähnt, verändern sich weder die Parameterwerte  $c_G, c_U$  noch deren Varianzen, wenn man als abhängige Variable den Endwert  $Y_2$  durch die Differenz  $D$  ersetzt (nur bei  $c_1$  ergäben sich Unterschiede). Aus diesem Grund liegt der Unterschied in den beiden Analyseformen nicht in der Verwendung von Differenz- oder Endwert als abhängiger Variablen, sondern nur in Aufnahme oder Nichtaufnahme des Anfangswertes als zusätzlicher Kovariaten begründet. Entscheidend ist also die Wahl einer bedingten oder unbedingten Fragestellung.

*Regressionskoeffizienten bei bedingter und unbedingter Fragestellung*

Die Unterschiede zwischen den Regressionskoeffizienten bei bedingter und unbedingter Fragestellung ergeben sich aus der Betrachtung, eine weitere unabhängige Variable in einer Regressionsanalyse wegzulassen bzw. hinzuzunehmen.

Das Regressionsmodell für die bedingte Fragestellung ist:

$$(4.10) \quad \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ N \end{matrix} \begin{matrix} \left[ \begin{matrix} y_2 \end{matrix} \right] = \begin{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1 & X & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b \end{bmatrix} + \begin{matrix} \left[ \begin{matrix} \epsilon \end{matrix} \right] \end{matrix} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \left[ \begin{matrix} b_1 \\ b \end{matrix} \right] = \text{Vektor mit} \\ \text{Regressions-} \\ \text{koeffizienten} \end{matrix}$$

und das Regressionsmodell für die unbedingte Fragestellung (ohne Anfangswerte  $Y_1$ )

$$(4.11) \quad \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ N \end{array} \begin{array}{|c|} \hline y_2 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline X \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline c \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \varepsilon \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline c \\ \hline \end{array} = \text{Vektor mit} \\ \text{Regressions-} \\ \text{koeffizienten}$$

Dann gilt die einfache Umrechnungsformel:

$$(4.12) \quad \hat{b} = \hat{c} - \hat{s} \hat{b}_1 \quad \text{bzw.} \quad \hat{c} = \hat{b} + \hat{s} \hat{b}_1$$

Dabei ist  $\hat{s}$  der geschätzte Regressionsvektor der Hilfsgleichung:

$$(4.13) \quad y_1 = Xs + \varepsilon''$$

Man sieht, daß nur dann  $\hat{c} = \hat{b}$  sein kann, wenn einerseits der Regressionskoeffizient  $b_1$  im Rahmen der bedingten Analyse (4.10) Null ist, oder andererseits  $s$  in (4.13) dem Nullvektor entspricht. Erweiterungen auf mehrere unterdrückte Variable sind ebenfalls möglich (Nagl, 1983). Die gleichen Überlegungen gelten auch für die Erwartungswerte (s.a. „Spezifikationsanalyse“ von Theil, 1971).

#### 4.4 Kovarianz- bzw. Regressionsmodell bei zeitbezogenen Daten

Mit Hilfe der Regressionsanalyse<sup>7</sup> kann man allgemein die direkten Effekte der „unabhängigen“ Variable auf die abhängige isolieren: jeder Regressionskoeffizient stellt den Effekt der unabhängigen auf die abhängige Variable unter Konstanthaltung der übrigen Regressoren dar. Die „unabhängigen“ Variablen selber dürfen korreliert sein (Fig. 4.3) (S. 339).

Voraussetzung für eine richtige Konstanthaltung ist aber, daß keine Fehlspezifikation des Modells oder Verletzungen der Modellannahmen vorliegen.

Hierbei sind unter anderem\*\* folgende Fehlermöglichkeiten zu beachten:

- Es könnte sein, daß bei einer Kovarianzanalyse für verschiedene Gruppen, die z.B. durch die qualitativen Ausprägungen der Faktoren gebildet wur-

---

\* Da das Kovarianzmodell bei fixen Faktoren als Spezialfall des Regressionsmodells formulierbar ist (z.B. Searle, 1971), gelten die folgenden Bemerkungen über die Regressionsanalyse auch für die Kovarianzanalyse.

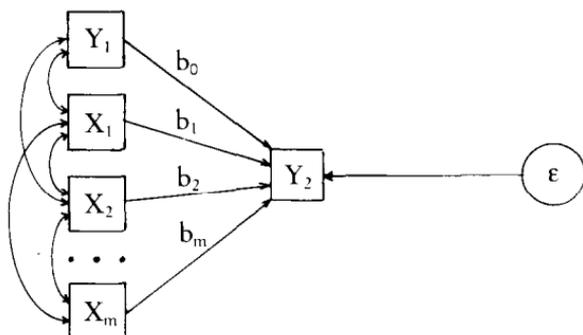
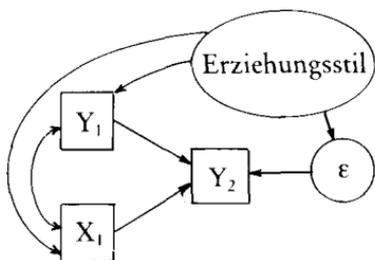


Fig. 4.3: Graph für multiple Regression

den, unterschiedliche Steigungen zutreffen (hierfür gibt es den Test für die Homogenität der Regressionen s. Bock, 1975). In diesem Fall müßte eine Intra-Class-Regression durchgeführt werden (s. Searle, 1971, S. 355), bei der die Steigungen für die Gruppen unterschiedlich sein könnten.

- Wichtige Regressoren (auch Potenzen von oder Interaktionen zwischen Regressoren) könnten im Modell fälschlicherweise nicht berücksichtigt worden sein.
- Der dritte mögliche Fehler ist wohl der gravierendste. Es könnte sein, daß die Störgröße  $\epsilon$  mit einem Regressor (= unabhängige Variable) kovariert. In diesem Fall ist eine wesentliche Grundvoraussetzung für das Schätzen der Regressionskoeffizienten verletzt (s. Goldberger, 1964).



Erziehungsstil wird fälschlich aus der Analyse ausgelassen

$Y_1$ : Angst mit 10 J.

$Y_2$ : Angst mit 15 J.

$X_1$ : Selbstsicherheits-training : 1

Kontrollgruppe : 0

Fig. 4.4: „wahres“ Kausalmodell (in die statistische Analyse werden fälschlich nur die Variablen  $X_1, Y_1$  und  $Y_2$  aufgenommen)

\*\* Weitere Fehlspezifikationen liegen vor, wenn etwa die Annahme der Homogenität der Varianzen der verschiedenen  $\epsilon$  nicht gegeben ist (siehe dazu: Goldberger, 1964), oder die Effekte mit den Regressoren korrelieren (siehe dazu: Werts & Linn, 1971).

Da  $\epsilon$  nur ein Störglied ist, das selbst wiederum eine Menge von Einflüssen repräsentiert (s. Theil, 1971), ist es möglich, daß (a) eine Komponente von  $\epsilon$  eine „unabhängige“ Variable (z.B.  $Y_1, X_1$ ) beeinflusst (s. Figur 4.4), (b) eine Komponente von  $\epsilon$  von einer externen Größe (z.B. Erziehungsstil) beeinflusst wird, die auch auf eine unabhängige Variable (z.B.  $X_1, Y_1$ ) „wirkt“; (c) eine unabhängige Variable (z.B.  $X_1, Y_1$ ) eine Komponente von  $\epsilon$  beeinflusst; (d) Meßfehler in den „unabhängigen“ Variablen (z.B.  $Y_1, X_1$ ) zu einer Komponente von  $\epsilon$  werden (s.a. u.).

Alle vier Möglichkeiten (a)-(d) führen zur Kovariation zwischen  $\epsilon$  und den unabhängigen Variablen und führen zu inkonsistenten Schätzungen. Mögliche Abhilfen wären:

### 1. Randomisierung:

Es wird per Zufall entschieden, wer im Selbstsicherheitstraining aufgenommen wird. Dadurch wird es sehr wahrscheinlich, daß die Variable „Training/Nichttraining“ mit keiner anderen Variablen zum Zeitpunkt der Randomisierung korreliert. Gleiches gilt auch für die Korrelation mit Komponenten von  $\epsilon$ . Darüber hinaus braucht man im allgemeinen auch keine Kovariate (hier: Angst mit 10 Jahren) mehr, nach der bereinigt werden soll. Mit großer Wahrscheinlichkeit korreliert die Trainingsvariable auch nicht mehr mit der Kovariaten. Eine ausführliche Behandlung dieses Gedankens findet sich bei Miller (1971). Sie zeigt allerdings auch, wie neue Schätzprobleme durch die Randomisierung auftauchen können.

Aber auch aus ethischen und therapeutischen Gründen kann das aus statistischen Überlegungen wohl wünschenswerte Randomisieren problematisch sein.

### 2. Einführung weiterer unabhängiger Variabler in die Regression:

Hierdurch kann man unter Umständen ebenfalls erreichen, daß die Kovarianz verschwindet.

### 3. Berücksichtigung von Meßfehlern:

Im Rahmen der Regressionsanalyse sollte berücksichtigt werden, daß nicht alle Variablen exakt gemessen werden können. Die gemessenen manifesten Variablen ( $Y_i$ ) setzen sich dann zusammen aus einem wahren Wert ( $\eta_i$ ) und einem Meßfehler ( $\epsilon_i$ ). Man ist oft interessiert an der Beziehung zwischen den „wahren“ Werten (s. Figur 4.5).

Durch Einsetzung von

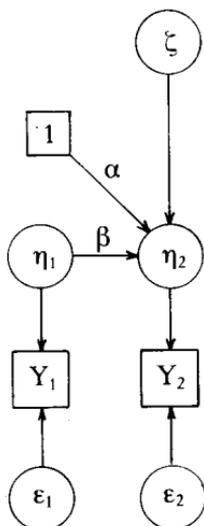
$$\eta_1 = Y_1 - \epsilon_1, \eta_2 = Y_2 - \epsilon_2 \quad \text{in} \quad \eta_2 = \alpha + \beta \eta_1 + \zeta$$

erhält man:

$$Y_2 = \alpha + \beta Y_1 + \underbrace{(\epsilon_2 - \beta \epsilon_1)}_{\zeta}$$

Störglied bei üblicher Regressionsanalyse

Graphisch:



algebraisch:

$$(4.14) \quad \begin{array}{ll} \text{a) } Y_1 = \eta_1 + \varepsilon_1 & \text{Meß-} \\ \text{b) } Y_2 = \eta_2 + \varepsilon_2 & \text{konzeption} \\ \hline \text{c) } \eta_2 = \alpha + \beta \eta_1 + \zeta & \text{Relation der} \\ & \text{latenten Variablen} \end{array}$$

Dabei wird angenommen, daß  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  jeweils nicht mit  $\eta_1, \eta_2$  korrelieren und  $\text{cov}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 0$  (Klassische Annahme) ist.

Zudem wird angenommen, daß auch das Störglied ( $\zeta$ ) nicht mit  $\eta_1, \varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  korreliert.

Fig. 4.5: Pfadmodell für 2 Zeitpunkte

Man kann zeigen, daß dieses Störglied mit  $Y_1$  (= unabhängige Variable bzw. Pretest) korreliert. Daher sind (wie oben dargelegt) die üblichen Regressionsverfahren nach der Methode der kleinsten Quadrate nicht anwendbar (s.a. Goldstein, 1979). Allerdings sind ML-Schätzungen möglich, wie Kendall & Stuart II (1973) gezeigt haben. Sie beschränken sich aber im Gegensatz zu uns auf den Fall  $\sigma_{\zeta}^2 = 0$ . Die Schätzgleichungen lauten:

$$(4.15) \quad \begin{array}{ll} \text{a) } E(\eta_1) = \mu \triangleq \bar{Y}_1 \quad (= \text{Mittelwert}) & \\ \text{b) } E(\eta_2) = \alpha + \beta \mu \triangleq \alpha + \beta \bar{Y}_1 & \sigma_{\eta_1}^2 = \text{Varianz}(\eta_1) \\ \text{c) } \sigma_{\eta_1}^2 + \sigma_{\varepsilon_1}^2 \triangleq S_{Y_1}^2 & S_{Y_1}^2 = \text{Varianz von } Y_1 \text{ in} \\ \text{d) } \beta^2 \cdot \sigma_{\eta_1}^2 + \sigma_{\zeta}^2 + \sigma_{\varepsilon_2}^2 \triangleq S_{Y_2}^2 & \text{der Stichprobe} \\ \text{e) } \beta \cdot \sigma_{\eta_1}^2 \triangleq \widehat{\text{cov}}(Y_1, Y_2) = S_{Y_1 Y_2} & \text{Analog für } \sigma_{\eta_2}^2 \text{ und } S_{Y_2}^2 \\ & S_{Y_1 Y_1} \left\{ \begin{array}{l} \text{Kovarianz von } Y_1 \text{ und} \\ Y_2 \text{ in der Stichprobe} \end{array} \right. \end{array}$$

Insgesamt sind fünf Gleichungen in sieben Unbekannten  $\mu, \alpha, \beta, \sigma_{\eta_1}^2, \sigma_{\varepsilon_1}^2, \sigma_{\varepsilon_2}^2, \sigma_{\zeta}^2$  gegeben. Daraus sieht man, daß man ohne Beschränkungen keine eindeutige Lösung für die 7 Unbekannten erhalten kann. Daher sind für die Lösung Zusatzannahmen erforderlich. Die beiden ersten Gleichungen reichen gerade aus,  $\mu$  und  $\alpha$  zu berechnen, falls  $\beta$  gegeben ist. Wir beschränken uns daher auf die Berechnung von  $\beta$ :

*Situation A:* Fehlervarianzen bekannt, Correction of Attenuation.

Angenommen, es seien  $\sigma_{\epsilon_1}^2$  und  $\sigma_{\epsilon_2}^2$  bekannt. Das bedeutet, daß man die Reliabilität der Meßinstrumente kennt. Man kann auf Grund der Gleichungen:

$$\sigma_{\eta_1}^2 = \sigma_{y_1}^2 - \sigma_{\epsilon_1}^2 \text{ und } \beta \cdot \sigma_{\eta_1}^2 = \sigma_{y_1 y_2}$$

den Schätzer  $\hat{\beta}$  für  $\beta$  erhalten:

$$\hat{\beta} = \frac{S_{y_1 y_2}}{S_{y_1}^2 - \sigma_{\epsilon_1}^2}$$

Diesen Schätzer könnte man auch mit Hilfe der „Correction of Attenuation“ erhalten (siehe Isaak (1970)).

Aus der Gleichung  $\sigma_{\xi}^2 = \sigma_{y_2}^2 - \sigma_{\epsilon_2}^2 - \beta^2 \sigma_{\eta_1}^2$  kann man, ohne zu einem Widerspruch zu gelangen,  $\hat{\sigma}_{\xi}^2$  berechnen.

### Situation B: Strukturelle Relation

Es wird angenommen, daß  $\sigma_{\xi}^2 = 0$  ist. Damit enthält die Relation in den wahren „latenten“ Variablen kein Störglied  $\xi$ . Die möglicherweise notwendige Konstante wird von  $a$  absorbiert. Kendall & Stuart wählen den Begriff „Strukturelle Relation“. Die Beziehung zwischen den Variablen soll *exakt* sein. Ungenauigkeiten kommen nur durch Meßfehler zustande.

Für Schätzungen für  $\beta$  sind etliche Spezialfälle zu unterscheiden, da ja immer noch 6 Unbekannte bei 5 Gleichungen vorhanden sind. Je nach Annahme, resultiert ein anderer Schätzer (s.a. Kendall & Stuart, 1973<sup>3</sup>; Isaak, 1970). Wird etwa angenommen, daß  $\sigma_{\epsilon_1}^2$  (Meßfehlervarianz zum 1. Zeitpunkt) bekannt ist, dann gilt wie oben

$$\hat{\beta} = \frac{S_{y_1 y_2}}{S_{y_1}^2 - \sigma_{\epsilon_1}^2} \quad \text{falls } \sigma_{\epsilon_1}^2 < S_{y_1}^2$$

Ist dagegen  $\sigma_{\epsilon_2}^2$  bekannt, resultiert als Lösung:

$$\hat{\beta} = \frac{S_{y_2}^2 - \sigma_{\epsilon_2}^2}{S_{y_1 y_2}} \quad \text{falls } \sigma_{\epsilon_2}^2 < S_{y_2}^2$$

Falls aber Annahmen über das Verhältnis der Meßfehlervarianzen  $\sigma_{\epsilon_1}^2 = \lambda \sigma_{\epsilon_2}^2$  gemacht werden (wenn bei einem Längsschnitt angenommen werden darf, daß mit demselben Meßinstrument gemessen wurde:  $\sigma_{\epsilon_1}^2 = \sigma_{\epsilon_2}^2$  und  $\lambda = 1$ ) resultiert eine sehr komplexe Formel für  $\beta$ . Können dagegen  $\sigma_{\epsilon_1}^2$  und  $\sigma_{\epsilon_2}^2$  als bekannt vorausgesetzt werden, ist das Gleichungssystem überbestimmt und es empfiehlt sich ein iteratives Verfahren (siehe Kendall & Stuart, 1973). Die resultierenden Schätzer sind ML-Schätzer und damit konsistent.

In der Praxis lassen sich die Annahmen oft nicht gewinnen bzw. begründen, die zur Schätzung von  $\beta$  und  $a$  notwendig sind. Ein Ausweg bietet sich bei Einführung von Paralleltests (bzw. kongenerischen Tests) (Werts, Jöreskog &

Linn (1972) und Werts & Linn (1972)) oder bei Messungen zu mehr als 2 Zeitpunkten (z.B.: Wiley (1970), Jöreskog (1979)). Werden die Schätzer dann noch mit dem Computerprogramm LISREL iterativ bestimmt, erhält man datenadäquate  $\beta$  und  $\hat{\alpha}$ .

## 4.5 Reliabilität - Stabilität

Bereiter (1963) hat angenommen, daß die Korrelation zwischen Anfangswert ( $Y_1$ ) und Endwert ( $Y_2$ ) ein Maß für die Reliabilität sei. Schreibt man die Korrelation mit Hilfe der oben bereitgestellten Formeln:

$$(4.16) \quad r_{(y_1, y_2)} = \frac{S_{y_1 y_2}}{\sqrt{S_{y_1}^2 \cdot S_{y_2}^2}} \quad (\text{durch Einsetzen der Formeln (4.15)})$$

$$\hat{=} \frac{\beta \sigma_{\eta_1}^2}{\sqrt{(\sigma_{\eta_1}^2 + \sigma_{\varepsilon_1}^2) (\beta^2 \sigma_{\eta_1}^2 + \sigma_{\xi}^2 + \sigma_{\varepsilon_2}^2)}}$$

scheint es zweifelhaft, daß (4.16) die Formel für die Reliabilität ist. Falls allerdings:

$\sigma_{\varepsilon_1}^2 = \sigma_{\varepsilon_2}^2$  (eine Annahme, die wohl sinnvoll ist: die Fehlervarianzen des Meßinstrumentes bleiben für die Zeitpunkte gleich)

und

$\beta = 1$  (Regressionskoeffizient = 1)

und

$\sigma_{\xi}^2 = 0$  (keine Störgrößen wirken auf den wahren Wert bei 2. Messung ein)

als Annahmen gelten, kann man die Korrelation als Reliabilität deuten:

Dann wird aus (4.16)

$$\frac{\sigma_{\eta_1}^2}{\sqrt{(\sigma_{\eta_1}^2 + \sigma_{\varepsilon_1}^2) (\sigma_{\eta_1}^2 + \sigma_{\varepsilon_1}^2)}} = \frac{\sigma_{\eta_1}^2}{(\sigma_{\eta_1}^2 + \sigma_{\varepsilon_1}^2)} = \frac{\text{Varianz der „wahren“ Werte}}{\text{Varianz der gemessenen Werte}}$$

(siehe Wiley (1970)). Besonders die Annahmen  $\beta=1$  und  $\sigma_{\xi}^2=0$  sind problematisch. Denn diese Parameter ermöglichen Aussagen über die Stabilität der wahren Variable über die Zeit hinweg. Unter welchen Annahmen eine solche Trennung von Reliabilität und Stabilität (auch bei Verletzungen von klassischen Meßannahmen) möglich ist, haben Wheaton et al. (1977) zusammenfassend dargestellt.

## 5. Wachstumskurven- und Varianzanalyse

Zur Analyse des Trends über mehrere Zeitpunkte hinweg kann die Varianzanalyse verwendet werden (siehe Winer (1971)). Dabei kann man verschiedene Arten der Beschreibung von Trends unterscheiden (siehe Bock (1975)). Der Faktor „Zeit“ selbst wird bei Trendüberlegungen meist als fixer Faktor konzipiert (siehe Gaito I. & Wiley D. E. (1963), Bock (1975)).

Im klassischen Modell werden restriktive Annahmen für die Fehlerstruktur gemacht (siehe Kap. 5.1.1), so daß bei Verletzungen dieser Fehlerstruktur nur noch konservative approximative Tests möglich sind (Greenhouse & Geisser, 1959). Daher hat Bock 1963 (siehe auch Bock (1975)) Modelle vorgeschlagen, die auf multivariaten Konzepten beruhen und die er selbst als *ungewichtete (exakte) multivariate Varianzanalyse* bezeichnet (Bock, 1979). Diese Analyse hat allerdings den Nachteil, daß bei unvollständiger Spezifikation (siehe bei (5.19)) des Trends keine effizienten Schätzer resultieren. Die Wachstumskurvenanalyse (Khatrı (1966), Potthoff & Roy (1964)) liefert auch bei nicht vollständiger Spezifikation des Trends effiziente Schätzer. Bock (1979) bezeichnet sie auch als *„gewichtete multivariate Varianzanalyse“*.

Wir werden diese Analyseformen darstellen, wobei einerseits die Fehlerannahmen des klassischen Modells kritisch untersucht und dann durch allgemeinere Annahmen ersetzt werden.

### 5.1 Der Eingruppenfall

#### 5.1.1 Der „wiederholte Messungen“-Ansatz ( $T \geq 2$ , $G = 1$ , $N > 1$ )

Im Rahmen von Überlegungen zur Analyse von Experimenten ist es üblich, die Messungen zu den verschiedenen Zeitpunkten bei verschiedenen Personen als Realisierung folgenden linearen Modells anzusehen:

$$(5.1) \quad Y_{vt} = \mu + \pi_v + \tau_t + \varepsilon_{vt}$$

Die Meßwerte  $Y_{vt}$  werden als lineare Funktion folgender Effekte konzipiert:

1. Generelles Niveau (oft auch als Konstante, bzw. generelles Mittel bezeichnet).
2. Effekte der Zeitpunkte  
 $\tau_t$  ( $t=1, \dots, T$ ) : konstant über Personen
3. Personenniveau ( $\pi_v$  :  $v=1, \dots, N$ ) : konstant über die Zeitpunkte.

4. Störglied ( $\epsilon_{vt}$  :  $t=1,2$ ;  $v=1,\dots,N$ ) für jede Person und jeden Zeitpunkt. Dieser Parameter kann auch als Interaktion zwischen Zeit und Personen interpretiert werden (siehe: Winer, 1971).

Dieses Modell ist ein Spezialfall des in der Varianzanalyse standardmäßig verwendeten Modellansatzes.

Zur Diskussion der Parameter läßt sich folgendes anmerken:

- Zu 4.) Die Störgröße  $\epsilon_{vt}$  wird von vornherein üblicherweise als Zufallsgröße konzipiert, die einen Erwartungswert von 0 und eine Varianz von  $\sigma_\epsilon^2$  für alle  $\epsilon_{vt}$  hat:

$$(5.2) \quad \epsilon_{vt} \sim (0, \sigma_\epsilon^2).$$

Ebenfalls wird angenommen, daß die  $\epsilon_{vt}$ -Größe unkorreliert mit jeder anderen  $\epsilon_{v't'}$  ist.

- Zu 3.) Der Personeneffekt wird im Rahmen des „gemischten Modells“ als Zufallsgröße konzipiert. Dabei interessiert nicht der einzelne Effekt, sondern die Varianz dieser Zufallsgröße. Es wird angenommen, daß die Varianz für alle N Effekte gleich ist:

$$(5.3) \quad \text{Var}(\pi_v) = \sigma_\pi^2 \quad (v=1,\dots,N)$$

Weiter wird angenommen, daß die Kovarianz zwischen verschiedenen Effekten 0 ist:

$$\text{Cov}(\pi_v, \pi_{v'}) = 0 \quad (v \neq v'; v, v' = 1, \dots, N)$$

und auch:

$$(5.4) \quad \text{Cov}(\pi_v, \epsilon_{vt}) = 0$$

Der Erwartungswert von jedem  $\pi_v$ :

$$(5.5) \quad E(\pi_v) = 0$$

- Zu 2.) Bei einer Analyse von Trends sind die Effekte der Zeitpunkte von zentralem Interesse, manchmal werden allerdings eher andere Arten der Darstellungen gesucht, als jedem Zeitpunkt selbst einen Effekt bestimmter Größe zuzuordnen (siehe auch Reparametrisierungen, Kap. 5.1.2). Bei Trendanalysen nimmt man meist den Zeitfaktor als fix an.

Für die möglichen  $Y_{vt}$ -Meßwerte bei gegebener Anzahl von Personen (=N) und Zeitpunkten (=T) ergibt sich explizit die Vektor- bzw. Matrixform (ausgerollte Form):

		Zeit- effekte	Personen- effekte	Störeffekte (= Fehler)
1. Person	$\begin{pmatrix} Y_{11} \\ \dots \\ Y_{1T} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \tau_1 \\ \dots \\ \tau_T \end{pmatrix}$	$\mathbf{1} \cdot \pi_1$	$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \dots \\ \varepsilon_{1T} \end{pmatrix}$
N. Person	$\begin{pmatrix} Y_{N1} \\ \dots \\ Y_{NT} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \tau_1 \\ \dots \\ \tau_T \end{pmatrix}$	$\mathbf{1} \cdot \pi_N$	$\begin{pmatrix} \varepsilon_{N1} \\ \dots \\ \varepsilon_{NT} \end{pmatrix}$

Für die v-Person:

$$\begin{pmatrix} Y_{v1} \\ Y_{v2} \\ \dots \\ Y_{vT} \end{pmatrix} = \mathbf{1} \mu + \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \dots \\ \tau_T \end{pmatrix} + \mathbf{1} \cdot \pi_v + \begin{pmatrix} \varepsilon_{v1} \\ \varepsilon_{v2} \\ \dots \\ \varepsilon_{vT} \end{pmatrix}$$

(5.6)

$$y_v = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}}_{T+1} \underbrace{\begin{pmatrix} \mu \\ \tau_1 \\ \tau_2 \\ \dots \\ \tau_T \end{pmatrix}}_{\tau} + \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}}_{T+1} \underbrace{\begin{pmatrix} \pi_v \\ \varepsilon_{v1} \\ \varepsilon_{v2} \\ \dots \\ \varepsilon_{vT} \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} \pi \\ \varepsilon \end{pmatrix}}$$

Es ist auch oft üblich die Darstellung (5.6) als die „ausgerollte Form folgender Matrixschreibweise zu bezeichnen (s. Timm, 1975; McDonald & Swaminathan, 1973) :

$$(5.7a) \quad N \begin{pmatrix} \overbrace{Y_{11} \dots Y_{1T}}^T \\ \overbrace{Y_{21} \dots Y_{2T}}^T \\ \dots \\ \overbrace{Y_{v1} \dots Y_{vT}}^T \\ \dots \\ \overbrace{Y_{N1} \dots Y_{NT}}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \overbrace{\mu + \tau_1, \dots, \mu + \tau_T}^T \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \dots \\ \pi_v \\ \dots \\ \pi_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \overbrace{1 \ 1 \ \dots \ 1}^T \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \dots \varepsilon_{1T} \\ \varepsilon_{21} \dots \varepsilon_{2T} \\ \dots \\ \varepsilon_{v1} \dots \varepsilon_{vT} \\ \dots \\ \varepsilon_{N1} \dots \varepsilon_{NT} \end{pmatrix}$$

$$(5.7b) \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \overbrace{\mu, \tau_1, \dots, \tau_T}^{T+1} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \pi_1 \ \varepsilon_{11} \dots \varepsilon_{1T} \\ \pi_2 \ \varepsilon_{21} \dots \varepsilon_{2T} \\ \dots \\ \pi_v \ \varepsilon_{v1} \dots \varepsilon_{vT} \\ \dots \\ \pi_N \ \varepsilon_{N1} \dots \varepsilon_{NT} \end{pmatrix} = H' \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = H'$$

Beide Formen haben gewisse Vorteile. Während die Wachstumskurvenanalyse und die Tests im allgemeinen multivariaten Modell meist in übersichtlicher Matrixform (5.7) formuliert werden (Timm, 1975; Jöreskog, 1979; Morrison, 1976), wird die ausgerollte Form bei der univariaten Varianzanalyse und bei „Pooling Cross Sections with Times Series Analysis“ verwendet. Zudem ist die ausgerollte Form flexibler, etwa bei Berücksichtigung von „missing data“ für verschiedene Zeitpunkte bei verschiedenen Personen. Wir werden in der folgenden Darstellung meistens die „ausgerollte Form“ verwenden. Als allgemeine Operation für das Ausrollen (also aus einer Matrix einen Vektor zu machen) wurde eingeführt (z.B. McDonald & Swaminathan, 1973):

$$(5.8) \quad \text{vec} \begin{pmatrix} Y_{11} & \dots & Y_{1T} \\ \dots & \dots & \dots \\ Y_{N1} & \dots & Y_{NT} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11} \\ \dots \\ Y_{1T} \\ \dots \\ Y_{N1} \\ \dots \\ Y_{NT} \end{pmatrix} \quad \text{mit der Regel:} \\ \text{vec}(ABC) = A \otimes C' \text{vec}(B)$$

Unter den Annahmen (5.1) bis (5.5) erhält man für die Varianzen von  $Y_{vt}$ :

$$\text{Var}(Y_{vt}) = \text{Var}(\pi_v + \varepsilon_{vt}) = \sigma_\pi^2 + \sigma_\varepsilon^2$$

und für die Kovarianzen von  $Y_{vt}$  und  $Y_{vt'}$ :

$$\text{Cov}(Y_{vt}, Y_{vt'}) = \sigma_\pi^2 \text{ für } t \neq t'$$

Die Matrixform als Varianz-Kovarianzmatrix für die v-Person ist:

$$(5.9a) \quad \text{cov} \begin{pmatrix} Y_{v1} \\ Y_{v2} \\ \dots \\ Y_{vT} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_\pi^2 & \sigma_\pi^2 & \sigma_\pi^2 \\ \sigma_\pi^2 & \sigma_\pi^2 & \sigma_\pi^2 \\ \dots & \dots & \dots \\ \sigma_\pi^2 & \sigma_\pi^2 & \sigma_\pi^2 \end{pmatrix}}_T + \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_\varepsilon^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\varepsilon^2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \sigma_\varepsilon^2 \end{pmatrix}}_T = \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_\pi^2 + \sigma_\varepsilon^2 & \sigma_\pi^2 & \sigma_\pi^2 \\ \sigma_\pi^2 & \sigma_\pi^2 + \sigma_\varepsilon^2 & \sigma_\pi^2 \\ \dots & \dots & \dots \\ \sigma_\pi^2 & \sigma_\pi^2 & \sigma_\pi^2 + \sigma_\varepsilon^2 \end{pmatrix}}_T \quad \left. \vphantom{\begin{pmatrix} Y_{v1} \\ Y_{v2} \\ \dots \\ Y_{vT} \end{pmatrix}} \right\} T$$

$$(5.9b) \quad = \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho \\ \rho & 1 & \rho \\ \rho & \rho & 1 \end{bmatrix} \cdot (\sigma_\pi^2 + \sigma_\varepsilon^2) \quad \text{wobei} \quad \rho =: \frac{\sigma_\pi^2}{\sigma_\pi^2 + \sigma_\varepsilon^2} \quad \left[ = \text{Intraclass}^* \right. \\ \left. \text{Korrelation} \right]$$

In dieser Form der Varianz-Kovarianz-Matrix werden die speziellen Eigenschaften sichtbar:

1. Homoskedastizität über die Zeitpunkte hinweg
2. Die spezielle Symmetrie (compound symmetry), die einerseits durch die Unkorreliertheit der Störglieder zwischen verschiedenen Zeitpunkten, andererseits durch die konstante Korrelation benachbarter oder weit auseinander liegender Messungen bedingt ist. Dabei entsteht die Korrelation vermittels des Personenfaktors.

Diese beiden Annahmen sind simultan testbar über den von Wilks (1932) vorgeschlagenen Likelihoodratiotest, für den Box (1949) approximative  $\chi^2$ - und F-Verteilungen vorgeschlagen hat (Morrison, 1976, S. 250). Huynh & Feldt (1970) haben nachgewiesen, daß für bestimmte Tests im Rahmen dieses Modells etwas weniger restriktive Annahmen bezüglich der Kovarianzen nötig sind. Greenhouse & Geisser (1959) haben approximative Grenzen gefunden für „konservative“ Tests, die bei nicht allzu großer Modellverletzung für das Testen der Mittelwerthypothesen verwendet werden können (siehe auch Morrison, S. 214ff.). Diese Überlegungen zeigen, daß Tests im Rahmen des „Mixed“-Modells auch bei Modellverletzungen gerade noch tragbar sind.

### Kritik an den Annahmen:

Die durch  $\varepsilon_{vt}$  repräsentierten Störglieder stellen selbst Einflüsse dar, die einer Vielfalt von Prozessen unterworfen sein können. Gerade bei Beobachtungen über die Zeit ist es naheliegend, Prozesse zu vermuten, die aufgrund ihrer zeitlichen Kontinuität Kovarianzen zwischen den Störgliedern erzeugen. Formalisiert werden solche Prozesse meist durch autoregressive bzw. Moving-Average-Prozesse (siehe Box & Jenkins (1970)). Beide Arten der Prozesse in den Störgliedern produzieren eine Kovarianzstruktur in den  $\varepsilon_{vt}$  ( $t = 1, \dots, T$ ), in der nebeneinander liegende Zeitpunkte höher korrelieren als weiter auseinander liegende. Das würde bei  $T=4$  zu folgender Form von Kovarianzstruktur zwischen  $\varepsilon_{vt}$  führen:

$$(5.10) \quad \text{cov} \begin{pmatrix} \varepsilon_{v1} \\ \varepsilon_{v2} \\ \varepsilon_{v3} \\ \varepsilon_{v4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \rho_3 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_3 & \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \sigma_\varepsilon^2 \quad \text{wobei} \quad 1 \geq \rho_1 \geq \rho_2 \geq \rho_3$$

Auch die Annahme der Homoskedastizität ist bei manchen Anwendungen zu restriktiv, da die Variabilität eines Prozesses im Laufe der Zeit zu- bzw. abnehmen kann. Das könnte selbst ein interessanter Aspekt eines Prozesses sein und sollte daher nicht von vornherein fälschlicherweise durch zu restriktive Annahmen ausgeschlossen werden.

Eine generelle Alternative\*\* zu den Restriktionen bezüglich E ist, die Kovarianzmatrix *völlig* ohne Restriktionen zu belassen

\* Siehe Winer (1971) und Nerlove (1971a,b)

\*\* Neben dieser Alternative gibt es auch die Möglichkeit, spezielle Annahmen für  $\varepsilon$  (z.B. ARIMA) und damit für die Kovarianzen von  $\varepsilon$  zu wählen (siehe z.B. Jöreskog (1979)).

$$(5.11) \quad \text{cov} \begin{pmatrix} \varepsilon_{v1} \\ \varepsilon_{v2} \\ \vdots \\ \varepsilon_{vT} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \cdots & \sigma_{1T} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2T} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{T1} & \sigma_{T2} & \cdots & \sigma_{TT} \end{bmatrix} \varepsilon = \Sigma_{\varepsilon}$$

Für die Kovarianzmatrix von  $Y_{vt}$  ergibt sich dann noch:

$$(5.12) \quad \text{cov} \begin{pmatrix} Y_{v1} \\ Y_{v2} \\ \vdots \\ Y_{vT} \end{pmatrix} = \text{cov} \begin{pmatrix} \pi_v + \varepsilon_{v1} \\ \pi_v + \varepsilon_{v2} \\ \vdots \\ \pi_v + \varepsilon_{vT} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{\pi}^2 & \sigma_{\pi}^2 & \cdots & \sigma_{\pi}^2 \\ \sigma_{\pi}^2 & \sigma_{\pi}^2 & \cdots & \sigma_{\pi}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{\pi}^2 & \sigma_{\pi}^2 & \cdots & \sigma_{\pi}^2 \end{bmatrix} + \Sigma_{\varepsilon} =: \Sigma_e$$

wobei mit  $e$  die Summe der Elemente:  $\varepsilon_{vt} = \pi_v + \varepsilon_{vt}$  abgekürzt werden soll.

Diese erweiterte Annahme trifft man in den sogenannten „multivariaten“ Modellen an, in denen die  $T$  Messungen der *einen* inhaltlichen Variablen als  $T$  Variable aufgefaßt werden (siehe Kap. 3.2 und Bock 1963, 1975, 1979). Voraussetzung ist allerdings, daß das  $N$  so groß ist, daß die Tests der multivariaten Hypothesen noch durchgeführt werden können.

### 5.1.2 Zur Identifikation und Interpretation der Effektparameter

Man nimmt an, daß die Verteilung der abhängigen Variablen durch die Erwartungswerte:  $E(y_v)$  und durch die Kovarianzen  $\text{Cov}(y_v)$  beschrieben werden können. Andererseits wird unterstellt, daß die  $Y$ -Werte durch das Modell bestimmt sind. Die Frage der Identifikation bezieht sich darauf, inwiefern aus den Erwartungswerten und den Kovarianzen von  $y$  die Modellparameter  $\mu$ ,  $\tau_1, \dots, \tau_T$  und  $\Sigma_e$  eindeutig berechnet werden können. Dabei bezieht sich die Identifikation auf die Population und deren Parameter, nicht aber auf die Stichprobenschätzungen.

Da gilt, daß die Kovarianzmatrix der  $Y$ -Werte gleich  $\Sigma_e$  ist (siehe 5.12), können diese Modellparameter eindeutig berechnet werden. Man kann jedoch im allgemeinen multivariaten Ansatz die Parameter  $\sigma_{\pi}^2$  und die Matrix der Kovarianzen  $\Sigma_{\varepsilon}$  nicht eindeutig bestimmen. Dies wäre für den restringierten Fall (Compound Symmetry) möglich. Dort gibt es die Gleichungen:

$$(5.13) \quad \text{Var}(Y_{vt}) = \sigma_{\pi}^2 + \sigma_{\varepsilon}^2 \quad \text{und} \quad \text{Cov}(Y_{vt}, Y_{vt'}) = \sigma_{\pi}^2$$

so daß  $\sigma_{\pi}^2$  und  $\sigma_{\varepsilon}^2$  eindeutig berechenbar sind.

Aus den Erwartungswerten kann man versuchen, die übrigen Modellparameter:  $\mu$ ,  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_T$  aus den Gleichungen (5.14) herzuleiten:

$$(5.14) \quad E \begin{pmatrix} Y_{v1} \\ \dots \\ Y_{vT} \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \dots \\ \mu_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 \dots 0 \\ & \dots \\ & 0 \dots 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu \\ \tau_1 \\ \dots \\ \tau_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu + \tau_1 \\ \dots \\ \mu + \tau_T \end{pmatrix}$$

$$\mu = H \quad \tau$$

Die restlichen Summanden fallen weg, da zu den Modellannahmen (5.2, 5.5) gehört, daß die Erwartungswerte der  $\pi$ 's und  $\varepsilon$ 's Null sind. Man sieht, daß man  $T + 1$  Modellparameter aus den  $T$  Erwartungswerten nicht eindeutig berechnen kann.

### *Restriktionen und schätzbare Funktionen:*

Um die Eindeutigkeit herzustellen, könnte man einfach zusätzlich die Restriktionen einführen, daß  $\mu$  oder  $\sum_{\tau=1}^T \tau_\tau$  oder  $\tau_1$  gleich Null ist. Dadurch könnte man jeweils alle Modellparameter eindeutig aus den Erwartungswerten berechnen. Allerdings müßten für solche Annahmen Begründungen geliefert werden.

Ein anderer Weg läge nicht im Interesse an Einzelparametern, sondern an speziellen, eindeutig bestimmbar Linearkombinationen der Parameter („schätzbare Funktionen“, s.a. Scheffè, 1959).

Im folgenden sollen einige speziell im Rahmen von Zeitsequenzen interessierende Typen solcher Funktionen betrachtet werden. Diese Funktionen in den „alten Parametern“  $\mu$ ,  $\tau_\tau$  werden dann jeweils als neue Parameter bezeichnet. Im allgemeinen sollen diese der Einfachheit halber als Funktionen in den Erwartungswerten  $\mu_t$  geschrieben werden. Das hat darüber hinaus den Vorteil, daß es sich dann auf jeden Fall um schätzbare Funktionen handeln muß. Diese Typen werden anhand von Beispielen eingeführt.

### *Typ 1: Abweichungskontraste*

Beispiel: Es werde nach der 1. Messung des Gewichts eine Behandlung durchgeführt. Insgesamt werden 3 Messungen vorgenommen ( $T = 3$ ).

Dabei könnte man sich für die Unterschiede zwischen der 1. und der  $t$ . Messung interessieren. Zusätzlich soll ein Parameter für das generelle Niveau eingeführt werden. Dann erhält man für die neuen Parameter folgende Funktionen in den „alten“ Parametern bzw. in den Erwartungswerten:

$$\begin{aligned}\gamma_0 &= \frac{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3}{3} = \mu + \frac{\tau_1 + \tau_2 + \tau_3}{3} \\ \gamma_1 &= \mu_1 - \mu_2 = \tau_1 - \tau_2 \\ \gamma_2 &= \mu_1 - \mu_3 = \tau_1 - \tau_3\end{aligned}$$

oder in Matrixform:

$$(5.15) \quad \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix}$$

neue
Erwar-
alte  
Parameter
tungswerte
Parameter

Diese Linearkombinationen in den Modellparametern sind im Rahmen dieses Modells eindeutig, da sie auch zugleich als Linearkombinationen in den 1. Momenten dargestellt sind.

### Typ 2: Helmertkontraste

Bei gleicher Fragestellung könnte eine andere Differenzbildung folgende sein:

Neben dem generellen Niveau:  $\gamma_0 = \frac{1}{T}(\mu_1 + \mu_2 \dots + \mu_T)$  interessiert der

Unterschied zwischen der ersten und dem Mittel der restlichen Messungen, der Unterschied zwischen der zweiten und dem Mittel der restlichen Messungen usw. (siehe Bock, 1975, Finn, 1974). Für das obige Beispiel ist bei  $T=3$

$$\begin{aligned}\gamma_0 &= \frac{1}{3}(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) = \mu + \frac{1}{3}(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3) \\ \gamma_1 &= \mu_1 - \frac{1}{2}(\mu_2 + \mu_3) = \tau_1 - \frac{1}{2}(\tau_2 + \tau_3) \\ \gamma_2 &= \mu_2 - \mu_3 = \tau_2 - \tau_3\end{aligned}$$

in Matrixschreibweise:

$$(5.16) \quad \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix}$$

### Typ 3: Polynomkontraste

Beispiel: Im Rahmen einer Entwicklungsstudie könnte der zeitliche Verlauf der intellektuellen Entwicklung Untersuchungsgegenstand sein: Ist neben der generellen Höhe ein linearer, quadratischer, kubischer usw. Verlauf zu berücksichtigen?

$$(5.17) \quad \mu_t = \gamma_0 t^0 + \gamma_1 t + \dots + \gamma_p t^p; \quad \gamma_0 \text{ gibt den Beitrag der Konstanten an,} \\ \gamma_1 \text{ gibt den Beitrag der Geraden an,} \\ \text{u.s.w., die in } \mu_t \text{ nachweisbar sind}$$

Für 3 Zeitpunkte (Zeit = 1,2,3):

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \mu + \tau_1 = \gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 \\ \mu_2 &= \mu + \tau_2 = \gamma_0 + \gamma_1 2 + \gamma_2 4 \\ \mu_3 &= \mu + \tau_3 = \gamma_0 + \gamma_1 3 + \gamma_2 9 \end{aligned}$$

in Matrixform:

$$(5.18) \quad \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} = \begin{matrix} t^0 & t^1 & t^2 \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} \quad K \text{ ist eine} \\ \text{Vandermodematrix} \\ \text{(s. Timm, 1975)}$$

Diese Spezifikation ist *vollständig*, da bei 3 Zeitpunkten ein quadratischer Trend nachweisbar ist. Für T Zeitpunkte kann man immer ein Polynom T-1. Ordnung anpassen. Aus inhaltlichen Gründen könnte dagegen bekannt sein, daß zwar für T Zeitpunkte Messungen vorliegen, aber ein Polynom T-j. Ordnung ( $j > 1$ ) zur Beschreibung des Trends ausreicht (bei 3 Zeitpunkten soll neben der Konstanten der lineare Trend genügen). Eine solche Spezifikation heißt *unvollständig*.

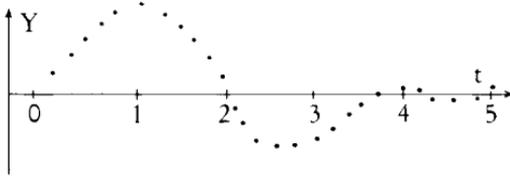
Z.B.

$$(5.19) \quad \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \end{bmatrix}$$

### Typ 4: Fourier-Kontraste

Bei Trends, die als periodische Schwankungen darstellbar sind, sind Polynome keine optimale Form der Darstellung. Dann ist es naheliegend, auf Sinus- (bzw. Cosinus) Funktionen zurückzugreifen.

Beispiel: Nach Darbietung eines Reizes werden EEG-Ströme gemessen  $Y$ . Dabei könnte man etwa folgenden Verlauf feststellen, der durch Sinusfunktionen gut beschreibbar wäre:



Es wird versucht, den Trend in Sinusschwingungen mit unterschiedlicher Frequenz und Phasenverschiebung zu zerlegen:

$$(5.20) \quad \mu_t = \gamma_0 + C_1 \cdot \sin(\alpha_1 t + \varphi_1) + C_2 \cdot \sin(\alpha_2 t + \varphi_2)$$

Hier sind zwar nur 2 unterschiedliche Sinusschwingungen enthalten, jedoch ist dieser Ansatz generell für mehrere Frequenzen (z. B.: Anderson, 1971; Fuller, 1976) erweiterbar.

$\alpha_1, \alpha_2$ : 2 verschiedene Frequenzen

$\varphi_1, \varphi_2$ : die dazugehörigen Phasenverschiebungen der Sinusfunktion (Bei  $t=0$  hat die Sinusfunktion den Wert des Phasenwinkels  $\varphi_i$ ).

Die Größen  $\alpha$  und  $\varphi$  werden in Grad oder Bogenmaß angegeben.

$C_1, C_2$ : die Koeffizienten der Amplituden messen die Stärke des Variierens der Sinusfunktionen der entsprechenden Frequenz.

Da versucht werden soll,  $\mu_t$  in lineare Funktionen zu zerlegen, kann man mit der obigen Darstellung noch nicht zufrieden sein, da Koeffizienten  $\alpha_i$  und  $\varphi_i$  vorkommen, von denen der Sinus zu berechnen ist; ein weiterer Schritt zu einer Linearisierung kann durch folgende Umformung gemacht werden:

$$(5.21) \quad C_1 \sin(\alpha_1 t + \varphi_1) = C_1 \sin(\alpha_1 t) \cdot \cos \varphi_1 + C_1 \cdot \cos(\alpha_1 t) \cdot \sin \varphi_1 \\ = \gamma_2 \sin(\alpha_1 t) + \gamma_1 \cos(\alpha_1 t)$$

$$(5.22) \quad \text{mit } \gamma_2 = C_1 \cos \varphi_1 \text{ und } \gamma_1 = C_1 \sin \varphi_1$$

Entsprechend kann man auch den 3. Summanden von (5.20) zerlegen, so daß man

$$(5.23) \quad \mu_t = \gamma_0 + \gamma_1 \cos(\alpha_1 t) + \gamma_2 \sin(\alpha_1 t) + \gamma_3 \cos(\alpha_2 t) + \gamma_4 \sin(\alpha_2 t)$$

erhält.

Wären  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  bekannt, könnte man dieses Gleichungssystem zur Berechnung der  $\gamma_i$  mit  $\sin(\alpha_i t)$ ,  $\cos(\alpha_i t)$  als Bekannten verwenden. Aus den Koeffizienten  $\gamma_i$  könnte man dann mit Hilfe der Gleichungen (5.22) die Amplituden  $C_1$  und die Phasen  $\varphi_1$  errechnen.

Eine Möglichkeit der Bestimmung der  $\alpha_1$  läge in deren systematischen Variation (siehe Bloomfield, 1976). Andererseits zeigt die Fourieranalyse (siehe Fuller und Bloomfield), daß bei endlich vielen Meßzeitpunkten sogar jede Funktion durch eine Summe von Sinus- und Cosinusfunktionen (ähnlich 5.23) dargestellt werden kann, falls genauso viele Koeffizienten  $\gamma_i$  berücksichtigt werden wie Zeitpunkte vorliegen. Dabei kann man für die Frequenzen  $\alpha_i$  folgende einfache Form verwenden:

$$(5.24a) \quad \alpha_i = \frac{2 \cdot \pi}{T} i \text{ (im Bogenmaß); } i = 1, \dots, L$$

$$(5.24b) \quad = \frac{360}{T} \cdot i \text{ (in Grad) wobei } L \text{ größte ganze Zahl ist, die kleiner (gleich) } T/2 \text{ ist.}$$

Sind in obigem Beispiel 5 Messungen bekannt, ist  $L = 2$  (da 2 die größte ganze Zahl, die kleiner als  $5/2$  ist). Die beiden  $a_i$  sind gemäß (5.24b):

$$\alpha_1 = \frac{360^\circ}{5} \cdot 1 = 72^\circ; \quad \alpha_2 = \frac{360^\circ}{5} \cdot 2 = 144^\circ$$

In (5.23) eingesetzt erhält man daher für  $\mu_t$ :

$$(5.25) \quad \mu_t = \gamma_0 + \gamma_1 \cos(72 \cdot t) + \gamma_2 \sin(72 \cdot t) + \gamma_3 \cos(144 \cdot t) + \gamma_4 \sin(144 \cdot t)$$

Die Sinus- und Cosinuswerte sind unmittelbar als feste Größen berechenbar. Die Matrixgleichung ist für  $T = 5$

$$(5.26) \quad \begin{array}{|c|} \hline \mu_0 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|ccccc|} \hline 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & .31 & .95 & -.81 & .59 \\ 1 & -.81 & .59 & .31 & -.95 \\ 1 & -.81 & -.59 & .31 & .95 \\ 1 & .31 & -.95 & -.81 & -.59 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \\ \hline \end{array}$$

Kon Cos Sin Cos Sin  
stante (72 · t) (72 · t) (144 · t) (144 · t)

(höhere Frequenz = schnellere Schwingungen)

Man beachte, daß die Summe der Produkte der Elemente aus je zwei verschiedenen Spalten Null ergibt.

Denn es gilt allgemein:

$$(5.27a) \quad \sum_{t=0}^{T-1} \cos(\alpha_i t) \cdot \sin(\alpha_j t) = 0 \quad \text{gemischt: Sinus und Kosinusprodukte}$$

$$(5.27b) \quad \sum_{t=0}^{T-1} \cos(\alpha_i t) \cos(\alpha_j t) = 0 \quad (j \neq i) \quad \begin{array}{l} \text{Kosinusprodukte mit} \\ \text{unterschiedlicher} \\ \text{Frequenz} \end{array}$$

$$(5.27c) \quad \sum_{t=0}^{T-1} \sin(\alpha_i t) \sin(\alpha_j t) = 0 \quad (j \neq i) \quad \begin{array}{l} \text{Sinusprodukte mit} \\ \text{unterschiedlicher} \\ \text{Frequenz} \end{array}$$

$$(5.27d) \quad \sum_{t=0}^{T-1} \sin^2(\alpha_i t) = \sum_{t=0}^{T-1} \cos^2(\alpha_i t) = \frac{T}{2} \quad \text{für } i \neq 0 \quad i \neq T/2$$

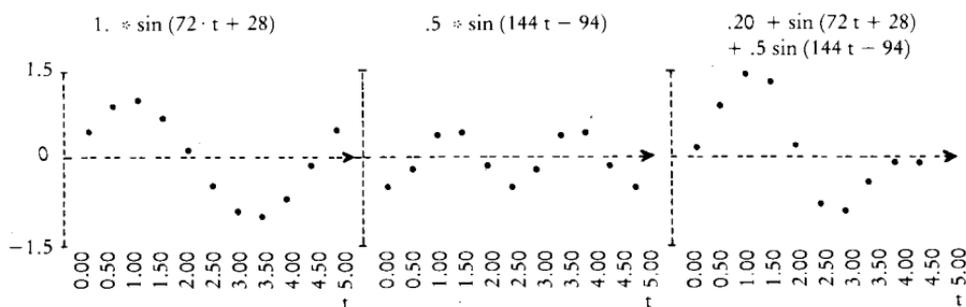
Für ein konkretes Zahlenbeispiel sei  $C_1 = 1$  und  $C_2 = .5$ , für  $\gamma_0 = .20$ ,  $\varphi_1 = 28^\circ$ ,  $\varphi_2 = -94^\circ$ .

Die  $\gamma_i$  ( $i=1 \dots 4$ ) ergeben sich aus Formel (5.22):  $\gamma_1 = .47$ ,  $\gamma_2 = .883$   
 $\gamma_3 = -.50$ ,  $\gamma_4 = -.035$

Man erhält

$$\text{für die } \mu\text{'s: } \frac{\mu_0 \mid \mu_1 \mid \mu_2 \mid \mu_3 \mid \mu_4}{.17 \mid 1.56 \mid .22 \mid -.88 \mid -.07}$$

Der Übersicht halber wurden die einzelnen Komponenten und die Gesamtfunktion geplottet (mit Zwischenpunkten):



### Einsetzung der Reparametrisierungstypen

Durch die 4 Typen von Kontrasten wurden jeweils neue Parameter  $\gamma$  eingeführt. Das Modell (5.6) werde nun in den neuen Parameter angesetzt. Dabei ist es nur notwendig, für die  $v$ -te Person in die alte Parametrisierung:

$$(5.28a) \quad y_v = H\tau + e_v \quad \text{bzw.}$$

$$(5.28b) \quad y_v = \mu + e_v \quad \text{die neuen Parameter } \gamma \text{ einzusetzen.}$$

Für die Typen 1 und 2 ist  $\gamma$  als Linearkombination von  $\mu$  bzw.  $H\tau$  geschrieben:

$$(5.29) \quad \gamma = R\mu = RH\tau$$

Da aber  $\mu$  ersetzt werden soll, muß  $\mu$  vorweg noch als Funktion von  $\gamma$  dargestellt werden:

Es sei  $R$  eine Matrix, deren Inverse existiert. Dann erhält man:

$$(5.30) \quad R^{-1}\gamma = \mu = H\tau$$

Somit lautet das reparametrisierte Modell für die  $v$ te Person

$$(5.31) \quad y_v = R^{-1}\gamma + e_v$$

In Beispiel 1 ist:

$$R\mu = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix} \quad \mu = R^{-1} \cdot \gamma = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 1/3 \\ 1 & -2/3 & 1/3 \\ 1 & 1/3 & -2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix}$$

In Beispiel 2 ist:

$$R\mu = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix} \quad \mu = R^{-1} \cdot \gamma = \begin{bmatrix} 1 & 2/3 & 0 \\ 1 & -1/3 & 1/2 \\ 1 & -1/3 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix}$$

Die Matrix  $R^{-1}$  stellt eine Basismatrix der neuen Parametrisierung dar. Sie wird meist mit  $K$  abgekürzt (siehe Bock, 1975, 1979). Daher kann man Gleichung (5.31) auch so schreiben:

$$(5.32) \quad y_v = K\gamma + e_v$$

Bei den Typen 3 und 4 wurde  $\mu$  von vornherein als Funktion von neuen Variablen aufgefaßt, deren Stärke durch den Parametervektor  $\gamma$  untersucht werden soll, so daß die Inverse von  $R$  nicht zu berechnen ist; die Einsetzung kann ohne Umrechnung unmittelbar vorgenommen werden.

$$\text{Bei Beispiel 3 ist: } K = \begin{matrix} & t^0 & t^1 & t^2 \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix} & \text{bei vollständiger} & & \\ & \text{Spezifikation des Trends} & & \end{matrix}$$

Bei Beispiel 4 ist  $K$  durch die Matrix der  $\cos(\alpha_i \cdot t)$  bzw.  $\sin(\alpha_i \cdot t)$  gegeben.

Auch bei diesem Beispiel wäre es leicht möglich, eine unvollständige Spezifikation vorzunehmen, falls man aus inhaltlichen Gründen höhere Frequenzen weglassen könnte.

### *Orthogonale Reparametrisierung:*

Aus der Regressionsanalyse ist bekannt, daß die Interpretation der Parameter einfach ist, wenn die unabhängigen Variablen nicht miteinander korrelieren. Zu- oder Wegnahme eines Prädiktors verursacht keine Veränderung der Regressionskoeffizienten.

Diesen Vorteil versucht man auch bei der orthogonalen Reparametrisierung zu nutzen. Sie liegt dann vor, wenn gilt:

$$K'K = \text{Diagonalmatrix}$$

Diese Eigenschaft trifft für die Helmertkontraste, wegen (5.27) für die Fourierkontraste und für die orthogonalen Polynome (siehe auch Anderson (1971), Bock (1975)) zu.

Beispiel: bei  $T = 3$  lautet die  $K$ -Matrix bei orthogonalen Polynomen:

$$K = \begin{array}{|ccc|} \hline 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{weitere Beispiele kann man z.B. in Bock (1975)} \\ \text{tabelliert finden} \end{array}$$

## 5.2 Berücksichtigung von gruppenspezifischen Faktoren

$$(T \geq 2, G \geq 2, N \geq G, N \geq T)$$

Soll im Modell berücksichtigt werden, daß für unterschiedliche Gruppen von Personen spezifische Gruppenhaupt- bzw. Veränderungseffekte zu erwarten sind (Interaktion zwischen Zeit und Gruppen, wobei jede der Gruppen  $N_1, \dots, N_G$  Personen enthält), ist folgendes Modell üblich:::

$$Y_{vit} = \mu + \alpha_i + \pi_{v(i)} + \tau_t + (\alpha\tau)_{it} + \varepsilon_{vit}$$

Gegenüber dem Modell (5.1) sind hier Parameter für die Gruppenhaupteffekte ( $\alpha_i, i = 1, \dots, G$ ) und für die Interaktion zwischen Gruppen und Zeitpunkte

---

\* Siehe Winer (1971), Bock (1975), Finn (1969). Finn trennt in eine Interaktion zwischen Zeit  $x$  Personeneffekt und ein Störglied. Da dieser Interaktionseffekt nur schätzbar ist, wenn jede Person zu jedem Zeitpunkt mehrmals gemessen wird, lassen wir ihn weg.

$(\alpha\tau)_{it}$  enthalten. Für  $\pi_{v(i)}$  gelte:  $v$  variiert zwischen 1 bis  $N$ . Das  $(i)$  soll angeben, zu welcher Gruppe die  $v$ -te Person gehört. Zudem seien die Personeneffekte wiederum Zufallsgrößen mit den Annahmen (5.3 - 5.5). Für  $\varepsilon_{vt}$  gelten die gleichen Überlegungen wie in Kapitel 5.1.1.

Mit diesen Annahmen erhält man als Erwartungswerte der  $Y_{vit}$ :

$$(5.33) \quad E(Y_{vit}) = \mu_{it} = \mu + \alpha_i + \tau_t + (\alpha\tau)_{it}$$

Die Anzahl der Modellparameter  $(\mu, \alpha_i, \tau_t, (\alpha\tau)_{it})$  ist:  $1 + G + T + G \cdot T$ . Diese lassen sich nicht eindeutig aus den  $G \cdot T$  Erwartungswerten  $\mu_{it}$  herleiten. Es liegt ein Identifikationsproblem vor.

Es soll daher versucht werden, eine Reparametrisierung zu finden, die höchstens  $G \times T$  schätzbare lineare Funktionen als neue Parameter enthält. Wir wollen einen Weg wählen, der von den  $\mu_{it}$  ausgeht, die als bekannt vorausgesetzt werden dürfen. Ferner arbeiten wir mit Kontrasttypen, die schon für den Fall ohne Gruppenfaktor vorgestellt wurden (gruppenspezifische Parametrisierung). In einem weiteren Schritt sollen dann diese neuen Parameter für Gruppenvergleiche noch weiter zerlegt werden (gruppenübergreifende Parametrisierung). Diese Überlegungen lassen sich wiederum an einem Beispiel gut veranschaulichen.

*Beispiel:* Es seien 2 Gruppen ( $G = 2$ ), die zu 3 Zeitpunkten ( $T = 3$ ) gemessen wurden, gegeben. Das Modell kann geschrieben werden als:

$$Y_{vit} = \mu_{it} + \pi_{v(i)} + \varepsilon_{vt}$$

Die Erwartungswerte für die 1. Gruppe sollen dargestellt werden als orthogonale Polynome:

$$(5.34) \quad \begin{array}{|c|} \hline \mu_1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \mu_{11} \\ \mu_{12} \\ \mu_{13} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{ccc} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \\ \hline \end{array} = K \cdot \begin{array}{|c|} \hline b_1 \\ \hline \end{array}$$

wobei  $b_{11}$  das generelle Niveau  
 $b_{12}$  den zusätzlichen linearen Trend  
 $b_{13}$  den zusätzlichen quadratischen Trend  
für die 1. Gruppe als neue Parameter repräsentieren

Für die 2. Gruppe ist:

$$(5.35) \quad \begin{array}{|c|} \hline \mu_2 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \mu_{21} \\ \mu_{22} \\ \mu_{23} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{ccc} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \\ \hline \end{array} = K \cdot \begin{array}{|c|} \hline b_2 \\ \hline \end{array}$$

Die Parameter  $b_{21}, b_{22}, b_{23}$  stellen für die 2. Gruppe die neuen Parameter dar.

Die Matrixform für beide Gruppen ist:

$$(5.36) \quad \begin{array}{c} \mu_1 \\ \mu_2 \end{array} = \begin{array}{c} \mu_{11} \\ \mu_{12} \\ \mu_{13} \\ \mu_{21} \\ \mu_{22} \\ \mu_{23} \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline K & O \\ \hline \hline O & K \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} b_{11} \\ b_{12} \\ b_{13} \\ b_{21} \\ b_{22} \\ b_{23} \end{array} = ({}_2I_2 \otimes K) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array} = {}_2I_2$$

wobei das Kroneckerprodukt:  $\otimes$  bedeutet:

$$(5.37) \quad A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot B & \dots & a_{1m} \cdot B \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} \cdot B & \dots & a_{nm} \cdot B \end{pmatrix}$$

Diese Art der gruppenspezifischen Reparametrisierung verwenden Jöreskog (1979) und Morrison (1976). Sie ist wegen ihrer Übersichtlichkeit leicht zu interpretieren.

In einem weiteren Schritt könnte man versuchen, die gruppenspezifischen Trendparameter in solche umzuformen, die einerseits einen generellen gruppenunspezifischen Trend, andererseits gruppenspezifische Trendunterschiede repräsentieren. Manche dieser so gewonnenen Parameter können dann wiederum als Haupteffekte - andere als Interaktionsparameter - interpretiert werden.

*Fortsetzung der Beispiels:*

Gesucht sind Parameter, die die folgenden Eigenschaften haben:\*

Durchschnitt des	Niveaus	$\begin{array}{ c } \hline b_{11}^* \\ b_{12}^* \\ b_{13}^* \\ \hline \end{array}$	$=$	$= 1/2$	$\begin{array}{ c } \hline b_{11} + b_{21} \\ b_{12} + b_{22} \\ b_{13} + b_{23} \\ \hline \end{array}$	$=$
	linearen Trends					
	quadratischen Trends					
Gruppenunterschiede im	Niveau	$\begin{array}{ c } \hline b_{21}^* \\ b_{22}^* \\ b_{23}^* \\ \hline \end{array}$	$=$	$= 1/2$	$\begin{array}{ c } \hline b_{11} - b_{21} \\ b_{12} - b_{22} \\ b_{13} - b_{23} \\ \hline \end{array}$	$=$
	linearen Trend					
	quadratischen Trend					

\* Es ergibt sich folgende Interpretation von  $b^*$  in der Terminologie von Haupt- und Interaktionsparametern (siehe Bock (1975))

Durchschnitt im Niveau	}	Haupteffekte (Zeit)
Durchschnitt im linearen Trend		
Durchschnitt im quadrat. Trend		
Unterschied im Niveau	}	Haupteffekte (Gruppe)
Unterschied im lin. Trend		
Unterschied im quadrat. Trend	}	Interaktion (Zeit x Gruppe)

$$= \begin{array}{|ccc|ccc|} \hline 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ \hline \hline 1/2 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1/2 & 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & -1/2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline b_{11} \\ \hline b_{12} \\ \hline b_{13} \\ \hline \hline b_{21} \\ \hline b_{22} \\ \hline b_{23} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|cc|} \hline 1/2 I & 1/2 I \\ \hline \hline 1/2 I & -1/2 I \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline b_1 \\ \hline \hline b_2 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline b_1^* \\ \hline \hline b_2^* \\ \hline \end{array}$$

Die obige Gleichung bleibt sicher gültig bei Einführung der identischen Matrix:

$$I = \begin{array}{|cc|} \hline I & O \\ \hline O & I \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|} \hline \mu_1 \\ \hline \mu_2 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|cc|} \hline K & O \\ \hline O & K \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|cc|} \hline I & I \\ \hline I & -I \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|cc|} \hline 1/2 I & 1/2 I \\ \hline 1/2 I & -1/2 I \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline b_1 \\ \hline b_2 \\ \hline \end{array}$$

Durch Ausrechnen

$$\mu = \begin{array}{|cc|} \hline K & K \\ \hline K & -K \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline b_1^* \\ \hline b_2^* \\ \hline \end{array} = \left[ \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{array} \right]_{K_D} \otimes K \cdot \begin{array}{|c|} \hline b_1^* \\ \hline b_2^* \\ \hline \end{array}$$

wegen Definition von  $b^*$

Die Gruppennittel lassen sich durch eine solche Umformung somit in den neuen Parametern  $b_1^*$  und  $b_2^*$  darstellen:

$$(5.38) \quad \begin{array}{|c|} \hline \mu_1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|cc|} \hline K & K \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline b_1^* \\ \hline b_2^* \\ \hline \end{array}; \quad \begin{array}{|c|} \hline \mu_2 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|cc|} \hline K & -K \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline b_1^* \\ \hline b_2^* \\ \hline \end{array}$$

Für jedes  $\mu_{it}$  ist damit eine Linearkombination in den neuen Parametern gegeben; daher kann man in der Modellgleichung für  $\mu_1$  und  $\mu_2$  nach (5.38)  $b_1^*$  und  $b_2^*$  einsetzen.

Es seien im Beispiel 3 Männer und 2 Frauen zu 3 Zeitpunkten untersucht worden. Die Modellgleichungen sind in Matrixform (s. S. 361).

Die Matrix  $G$  hat pro Person eine Zeile. Die Spalte gibt an, aus welcher Gruppe die Person stammt. Sie vervielfacht die entsprechenden Zeilen von  $K_D$  in dem Ausmaß der Gruppengrößen, wobei  $K_D$  die Kontrastbasismatrix für die Gruppenvergleiche ist.

Im Rahmen dieses Beispiels wurde eine Form des Modells eingeführt, die ganz allgemein für verschiedenartige Designs verwendet werden kann. Dieser neue

♂ 1. Gruppe	1. P.	$Y_{111}$ $Y_{112}$ $Y_{113}$	$\mu_1$	+	Durch Ein- setzen von (38)	$K$ $K$	$b_1^*$	+	$\pi_{1(1)} + \epsilon_{11}$ $\pi_{1(1)} + \epsilon_{12}$ $\pi_{1(1)} + \epsilon_{13}$	} $e_1$						
	2. P.	$Y_{211}$ $Y_{212}$ $Y_{213}$									$\mu_1$	$\pi_{2(1)} + \epsilon_{21}$ $\pi_{2(1)} + \epsilon_{22}$ $\pi_{2(1)} + \epsilon_{23}$	$K$ $K$	$b_2^*$	$\pi_{2(1)} + \epsilon_{21}$ $\pi_{2(1)} + \epsilon_{22}$ $\pi_{2(1)} + \epsilon_{23}$	} $e_2$
	3. P.	$Y_{311}$ $Y_{312}$ $Y_{313}$									$\mu_1$	$\pi_{3(1)} + \epsilon_{31}$ $\pi_{3(1)} + \epsilon_{32}$ $\pi_{3(1)} + \epsilon_{33}$	$K$ $K$		$\pi_{3(1)} + \epsilon_{31}$ $\pi_{3(1)} + \epsilon_{32}$ $\pi_{3(1)} + \epsilon_{33}$	
♀ 2. Gruppe	4. P.	$Y_{421}$ $Y_{422}$ $Y_{423}$	$\mu_2$	+		$K$ $-K$		+	$\pi_{4(2)} + \epsilon_{41}$ $\pi_{4(2)} + \epsilon_{42}$ $\pi_{4(2)} + \epsilon_{43}$	} $e_4$						
	5. P.	$Y_{521}$ $Y_{522}$ $Y_{523}$									$\mu_2$	$\pi_{5(2)} + \epsilon_{51}$ $\pi_{5(2)} + \epsilon_{52}$ $\pi_{5(2)} + \epsilon_{53}$	$K$ $-K$		$\pi_{5(2)} + \epsilon_{51}$ $\pi_{5(2)} + \epsilon_{52}$ $\pi_{5(2)} + \epsilon_{53}$	} $e_5$

↑  
Zeitpunkte

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes K$$

$$+ \begin{bmatrix} b_1^* \\ b_2^* \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \end{bmatrix}$$

Das Schreiben mit Hilfe des Kroneckerprodukts macht das wiederholte Schreiben der Kontrastmatrizen überflüssig.

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes K$$

$$+ \begin{bmatrix} b_1^* \\ b_2^* \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \end{bmatrix}$$

Durch das Einführen der Matrix  $G$  (Gruppenbelegungsmatrix) kann man die Matrix  $K_1$ , die bei der Parametrisierung eingeführt wurde, wieder verwenden.

Ansatz zerlegt komplexe Designs in einfache (einfaktorielle) und setzt sie mit Hilfe von Kroneckerprodukten zum geforderten eventuell multifaktoriellen Design zusammen. Beispiele wurden von Zelen & Federer (1966) und von Bock (1975) für viele Designs gezeigt.

Aufgrund dieser Überlegungen kann man daher auch für den allgemeinen Fall das varianzanalytische Modell für wiederholte Messungen (wie im Beispiel) in ausgerollter Form darstellen (5.39).

Für  $X$  könnte man auch  $G \cdot K_D$  einsetzen, wobei  $K_D$  dann die Designmatrix für einen Faktor (wie im Beispiel) oder aber eine Designmatrix für ein mehrfaktorielles Design wäre (s. Bock, 1975).

$G$  gäbe dann wieder durch Einsetzen in den entsprechenden Zeilen und Spalten für jede Person an, zu welcher Gruppe sie gehört. Andererseits könnte

(5.39)

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \dots \\ \hline T \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline y_1 \\ \hline \dots \\ \hline y_2 \\ \hline \dots \\ \hline \dots \\ \hline \dots \\ \hline y_v \\ \hline \dots \\ \hline \dots \\ \hline y_N \\ \hline \dots \\ \hline T \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \text{{}_N X_1 \otimes K} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{|c|} \hline b_1 \\ \hline \dots \\ \hline b_2 \\ \hline \dots \\ \hline b_1 \\ \hline \dots \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline e_1 \\ \hline \dots \\ \hline e_2 \\ \hline \dots \\ \hline \dots \\ \hline e_v \\ \hline \dots \\ \hline \dots \\ \hline e_N \\ \hline \dots \\ \hline T \\ \hline \end{array}
 \end{array}$$

$y = X \otimes K \quad b \quad + \quad e$

man auch für  $K$  jede von den im vorigen Abschnitt besprochenen Typen einsetzen. Sie könnte sich darüber hinaus bei zusätzlichem Design in den wiederholten Messungen (z.B. Swaminathan & Algina, 1977) oder bei Mehrfachantworten (s.U.) selbst wieder aus einfachen Typen zusammensetzen.

Der Erwartungswert von  $y$  kann geschrieben werden als:

(5.40a)  $E(y) = (X \otimes K) b$

Die Kovarianz von  $y_v$  (für die  $v$ -te Person) wurde schon in (5.12) behandelt. Die Kovarianz für  $y$  (alle Personen) ist

(5.40b)

$$\text{cov} \left( \begin{array}{|c|} \hline y_1 \\ \hline \dots \\ \hline y_N \\ \hline \end{array} \right) = \text{cov} \left( \begin{array}{|c|} \hline e_1 \\ \hline \dots \\ \hline e_N \\ \hline \end{array} \right) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \Sigma_e & \dots & O \\ \hline \dots & \dots & \dots \\ \hline O & \dots & \Sigma_e \\ \hline \end{array} = I_N \otimes \Sigma_e$$

\* Im vollständigen Modell ist  $p=T$  und im unvollständigen  $p < T$

Das obige „ausgerollte“ Gleichungssystem (5.39) läßt sich „engerollt“ in Matrixschreibweise formulieren:\*

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \vdots \\ \hline N \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline Y_{11} \dots Y_{1T} \\ \hline \dots \\ \hline Y_{N1} \dots Y_{NT} \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \vdots \\ \hline N \\ \hline \end{array}
 =
 \begin{array}{|c|} \hline X \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \vdots \\ \hline I \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline b_{11} \dots b_{1p} \\ \hline \dots \\ \hline b_{I1} \dots b_{Ip} \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \vdots \\ \hline p \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline K' \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \vdots \\ \hline N \\ \hline \end{array}
 +
 \begin{array}{|c|} \hline e_{11} \dots e_{1T} \\ \hline \dots \\ \hline e_{N1} \dots e_{NT} \\ \hline \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|} \hline 1 \dots T \\ \hline \end{array} \\
 \begin{array}{|c|} \hline N Y_T \\ \hline \end{array}
 =
 \begin{array}{|c|} \hline 1 \dots I \\ \hline \end{array} \\
 \begin{array}{|c|} \hline B_p \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline 1 \dots T \\ \hline \end{array}
 +
 \begin{array}{|c|} \hline Q_T \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline 1 \dots T \\ \hline \end{array}
 +
 \begin{array}{|c|} \hline N E_T \\ \hline \end{array}
 \end{array}$$

Der Erwartungswert ist:

$$E(Y) = {}_N X_I B_p Q_T$$

In dieser Weise wird meist das Wachstumskurvenmodell formuliert (siehe z.B. Timm (1975), Grizzle & Allen (1969), Morrison (1976)).\*\*

Wegen der Einheitlichkeit der Terminologie formulieren wir das Modell auch als

$${}_N Y_q = {}_N X_I B_p Q_q + {}_N E_q$$

Man sieht dabei, daß diese Form auch eine Verallgemeinerung des multivariaten Modells in der an Querschnittdaten orientierten Varianz- bzw. Regressionsanalyse darstellt, denn der Ansatz der multivariaten Analyse lautet (siehe Timm, 1975) :

$$(5.42) \quad {}_N Y_T = {}_N X_I B_T + {}_N E_T$$

(5.42) ist identisch mit (5.41), wenn Q die Einheitsmatrix:  ${}_T I_T$  ist.

Da das Wachstumskurvenmodell nur eine spezielle Schreibweise der Varianzanalyse mit abhängigen Messungen darstellt, ist auch klar, daß das Wachstumskurvenmodell keine Neuentwicklung ist, wie Timm schreibt. Es erlaubt aber, in Weiterentwicklung des „gemischten Modells“, die restriktiven Bedingungen für die Störglieder fallen zu lassen.

\* Nach Formel (5.8):  $\text{vec}(ABC) = A \otimes C' \text{vec}(B)$

\*\* Bei allen genannten Autoren werden mehr oder weniger stark unterschiedliche Notationen verwendet. Um nicht noch eine weitere einzuführen, schließen wir uns in der Notation Timm an. Daher muß  $K'$  als Q geschrieben werden und T als q. Die Anzahl der Gruppen G wird mit I bezeichnet.

### 5.3 Schätzung des Modells

Für die Ableitung der Schätzer des Modells ist die ausgerollte Form vorteilhafter. Die Störglieder sind nicht unabhängig identisch verteilt. Daher kann keine OLS-Schätzung (Ordinary Least Squares), sondern es muß GLS (Generalized Least Squares) verwendet werden, damit effiziente Schätzer entstehen (siehe Theil, 1970).

Dann ist:\*

$$(5.43) \quad \hat{b} = [(X \otimes K)'(I \otimes \Sigma_e)^{-1}(X \otimes K)]^{-1}[(X \otimes K)'(I \otimes \Sigma_e)^{-1}] y$$

Nach mehreren algebraischen Umformungen mit Hilfe der Regeln für Kronecker-Produkte erhält man:

$$(5.44) \quad \hat{b} = \{[(X'X)^{-1}X'] \otimes [(K'\Sigma_e^{-1}K)^{-1}K'\Sigma_e^{-1}]\} y$$

Dieses Ergebnis kann man wieder „einrollen“ (s.a. McDonald & Swaminathan, 1973) :

$$(5.45) \quad \begin{bmatrix} \hat{b}_{11} & \dots & \hat{b}_{1p} \\ & \dots & \\ \hat{b}_{11} & \dots & \hat{b}_{1p} \end{bmatrix} = \hat{B} = (X'X)^{-1}X'Y\Sigma_e^{-1}K(K'\Sigma_e^{-1}K)^{-1}$$

oder mit  $Q=K'$

$$= (X'X)^{-1}X'Y\Sigma_e^{-1}Q'(Q\Sigma_e^{-1}Q')^{-1}$$

Bei dieser allgemeinen Schätzung für B ist es notwendig, daß  $\Sigma_e$  bekannt ist. Das kann im allgemeinen nicht vorausgesetzt werden.  $\Sigma_e$  kann aber im Rahmen einer ML-Schätzung (Maximum Likelihood) zusätzlich geschätzt werden. Für einige wichtige Spezialfälle muß die Kenntnis von  $\Sigma_e$  nicht vorausgesetzt werden. Es resultieren daher einfachere Schätzverfahren für folgende Spezialfälle:

1. Bei der multivariaten - an Querschnittsdaten orientierten Varianz- oder Regressionsanalyse ist  $K = I$  (s.o.)

Durch Einsetzen in (5.45) erhält man:

$$\begin{aligned} \hat{B} &= (X'X)^{-1}X'Y\Sigma_e^{-1}I(I'\Sigma_e^{-1}I)^{-1} = \\ &= (X'X)^{-1}X'Y\Sigma_e^{-1}\Sigma_e && \text{Da } (A^{-1})^{-1} = A \\ &= (X'X)^{-1}X'Y \end{aligned}$$

Da sich  $\Sigma_e$  wegekürzt, ist die Kenntnis von  $\Sigma_e$  für die Schätzung nicht erforderlich.

---

\* Während für das Modell:

$y = Zb + e$ ; mit  $\text{Cov}(e) = \sigma^2 V$   
 der OLS-Schätzer  $\hat{b} = (Z'Z)^{-1}Z'y$  ist,  
 hat der GLS-Schätzer die Form:  $\hat{b} = (Z'V^{-1}Z)^{-1}Z'V^{-1}y$   
 hier:  $Z = (X \otimes K)$ ;  $\text{Cov}(e) = I \otimes \Sigma_e = V$

2. Es sei  $K$  eine quadratische Matrix, deren Inverse existiert. Das ist der Fall bei *vollständiger Spezifikation* der Trendparameter.

Falls die Inverse von  $K$  existiert, gilt:

$$(K' \Sigma_e^{-1} K)^{-1} = K^{-1} \Sigma_e K'^{-1} \quad \text{wegen } (AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

Durch Einsetzen in (5.45) erhält man:

$$\begin{aligned} \hat{B} &= (X'X)^{-1} X' Y \Sigma_e^{-1} \underbrace{K(K^{-1} \Sigma_e K'^{-1})}_{I} \\ &= (X'X)^{-1} X' Y K'^{-1} \end{aligned}$$

Falls zusätzlich gilt, daß  $K$  orthonormal ist; gilt damit auch  $K'^{-1} = K = (X'X)^{-1} X' Y K$

Diese Lösung ist genau das Produkt der üblichen MANOVA-Schätzung (unter Spezialfall 1.) mit der Kontrastmatrix für die Zeitpunkte:  $K$ .

Für diesen Spezialfall gelten auch die Schätzungen von Bock (1963), Finn (1969) und Bock (1975).

3. Falls die Compound-Symmetry-Annahme für die  $\Sigma_e$ -Matrix zutrifft, kann man zeigen (siehe Morrison (1976), Theil (1971) und Bock (1979)), daß bei *unvollständiger Spezifikation* des Trends gilt:

$$\hat{B} = (X'X)^{-1} X' Y K (K'K)^{-1}; \quad \text{(auch hier ist die Schätzung von } \Sigma_e \text{ nicht notwendig)}$$

Falls  $K'K = I$  (orthonormale Kontraste) erhält man wieder wie unter 2.:

$$\hat{B} = (X'X)^{-1} X' Y K$$

Falls aber eine *unvollständige* Spezifikation des Trends vorliegt ( $K$  ist nicht quadratisch) und keine ganz spezielle Annahme (wie bei Punkt 3.) über  $\Sigma_e$  gemacht werden kann, gelten die einfachen Ergebnisse für den Schätzer von  $B$  nicht mehr. Dann sind auch die Schätzungen, die Bock (1963, 1975) und Finn (1969, S. 408) vorschlagen, nicht effizient.

Gerade dieser Fall ist aber interessant, da man auch Schätzungen erhalten sollte, die nicht (bei gegebenem  $T$ ) auch noch die unwichtigen Polynome höchstmöglicher Ordnung, mitfitten. Ein Grund hierfür könnte die durch einen Adäquatheitstest gewonnene Erkenntnis sein, daß Polynome höherer Ordnung nur insignifikante Beiträge leisten. Finn (1969, S. 408) berichtet einen solchen Fall. Leider schätzt er dann die Parameter fälschlicherweise nach Spezialfall 2.

Khatri (1966) hat einen ML-Schätzer für diesen generellen Fall gefunden.

$$\hat{B} = [(X'X)^{-1} X' Y D^{-1} K (K' D^{-1} K)^{-1}]$$

wobei  $D = {}_T Y'_N (I_N - N X_I (X'_N X_I)^{-1} X'_N) Y$ ;

dabei ist  $D$  der Schätzer von  $(N-k)\Sigma_e$ ;

mit  $k = \text{Rang}(X)$

## 5.4 Hypothesentests

Die Möglichkeit, Hypothesen zu testen, entspricht in diesem allgemeinen zeitbezogenen Modell dem Vorgehen beim multivariaten Querschnittmodell (siehe Timm, 1975):

$$(5.46) \quad \begin{array}{ll} H_0 : {}_g C_1 B_p A_u = {}_g \Gamma_u & \text{Nullhypothese} \\ H_1 : C B A \neq \Gamma & \text{Alternativhypothese} \end{array}$$

wobei:

- ${}_g C_1$ : Hypothesenmatrix für Vergleiche zwischen den „Gruppen“ bzw. den Zeilen der Parametermatrix  $B$   
Techn. Anm.: es wird angenommen, daß  $g \leq I$  und  $\text{Rang}(C) = g$
- ${}_p A_u$ : Hypothesenmatrix für Vergleiche „zwischen den Zeiteffekten“, „innerhalb der Gruppen“, bzw. zwischen den Spalten der Parametermatrix  $B$ .  
Techn. Anm.:  $\text{Rang}(A) = u \leq p$
- ${}_g \Gamma_u$ : wird meist  $0$  gesetzt, es könnten aber auch andere konstante Werte sein.

In allen 3 Matrizen können Werte frei gewählt werden und damit beliebige Hypothesen getestet werden. Die Anzahl der Zeilen von  $C$  und Anzahl Spalten von  $A$  kann im Rahmen der technischen Bedingungen ebenfalls frei gewählt werden. Damit ist die Testung einzelner oder simultaner Mehrfachhypothesen möglich. Die Anzahl der simultan getesteten Hypothesen beläuft sich auf  $g \cdot u$ .

Für den Aufbau der Teststatistiken werden zwei Matrizen mit Fehlerquadratsummen und Fehlerkreuzprodukten berechnet:

$$(5.47a) \quad \text{a) Hypothesenmatrix} \quad : Q_H = {}_u A'_p \hat{B}'_1 C'_g (C_1 R_1 C'_1)^{-1} C_1 \hat{B}_p A_u$$

$$(5.47b) \quad \text{b) Fehlermatrix*} \quad : Q_E = {}_u A'_p (K' D^{-1} K)^{-1} {}_p A_u$$

(Errormatrix)

wobei außer  $R$  alle Matrizen bereits eingeführt sind; für  $R$  erhält man folgendes, etwas komplizierten Ausdruck (siehe Morrison (1976)):

$$(5.48) \quad R = (X'X)^{-1}(X'X + X'Y[D^{-1} - D^{-1}K(K'D^{-1}K)^{-1}K'D^{-1}]Y'X)(X'X)^{-1}$$

Der komplizierte Ausdruck läßt sich für  $R$  stark vereinfachen, falls  $K$  eine quadratische Matrix ist, für die die Inverse existiert: (bei vollständiger Spezifikation des Trends ist  $p=T$ )

---

\*  $Q_E$  wird manchmal auch als Fehlermatrix des vollen Modells bezeichnet ( $= Q_{\text{voll}}$ )  
 $Q_{\text{restr}} = Q_E + Q_H$  ( $=$  Fehlermatrix des durch die Nullhypothese restringierten Modells)

$$\text{Denn: } (D^{-1} - D^{-1}K(K'D^{-1}K)^{-1}K'D^{-1}) = \\ (D^{-1} - D^{-1}K \underbrace{K^{-1}D}_{I} \underbrace{K^{-1}K'}_{I} D^{-1}) = 0 \\ \underbrace{\hspace{10em}}_I$$

$$(5.49) \quad \text{Daher: } R = (X'X)^{-1}$$

Diesem Spezialfall wurde in der Literatur besondere Aufmerksamkeit gewidmet (Bock (1963), Bock (1975), Bock (1979)).

Mit Hilfe von  $Q_H$  und  $Q_E$  können verschiedene Testkriterien aus den Wurzeln der Determinantengleichung  $|Q_H - \Lambda Q_E| = 0$  (Eigenwerte) hergeleitet werden (siehe Morrison):

- Roys - größtes Wurzelkriterium
- Lawley - Hotelling's-Spurstatistik
- Wilks Lambda

Das gebräuchlichste Prüfkriterium ist wohl Wilks Lambda. Es kann als Verhältnis zweier Determinanten errechnet werden:

$$\Lambda = \frac{|Q_E|}{|Q_E + Q_H|}$$

Die Verteilung von  $\Lambda$  ist bekannt als U-Verteilung (siehe Timm (1975)) mit 3 Parametern, die tabelliert vorliegt:

$$\Lambda \sim U(u, g, N - I - (q - p))^*$$

Als Approximation kann auch die  $\chi^2$ -Verteilung genommen werden (nach Bartlett (1947); F-Verteilungs-Approximationen siehe Box (1949), Morrison (1976)).

$-[N - I - (q - p) - \frac{1}{2}(u - g + 1)] \ln(\Lambda)$  ist approximativ  $\chi^2$  verteilt mit  $g \cdot u$  Freiheitsgraden.

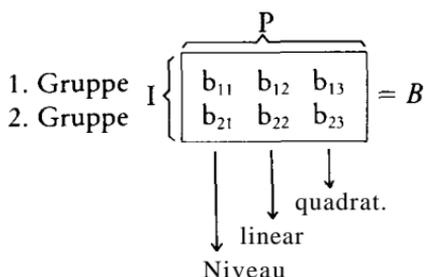
*Fortsetzung des Beispiels:*

Angenommen, es sollte die Null-Hypothese  $H_0$  überprüft werden: Es gibt keine Unterschiede im quadratischen und linearen Trend zwischen den Gruppen (keine Überschneidungen der Trendlinien = *keine Interaktion*).

Bei der *gruppenspezifischen* Parametrisierung bedeuten die Koeffizienten der Matrix B:

---

\*  $q$  ist im vorliegenden Fall gleich  $T$ ; bei vollständiger Spezifikation ist  $q - p = 0$ .  $q$  ist bei Multiresponses gleich  $M \times T$



Die *Hypothese* lautet für diese Parametrisierung:

$$\begin{array}{l} b_{12} = b_{22} \Rightarrow b_{12} - b_{22} = 0 \\ b_{13} = b_{23} \Rightarrow b_{13} - b_{23} = 0 \end{array} \quad \text{und}$$

In der allgemeinen Hypothesenform (5.46) lautet:

$$H_0: \begin{array}{|c|} \hline 1, -1 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|ccc|} \hline b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline 0 \ 0 \\ 1 \ 0 \\ 0 \ 1 \\ \hline \end{array} = (b_{12} - b_{22}, b_{13} - b_{23}) = (0, 0)$$

$$H_0: \quad {}_1C_2 \quad B \quad \cdot \quad {}_3A_2 \quad = (0, 0)$$

Bei der *gruppenübergreifenden* Parametrisierung bedeuten die Koeffizienten der Matrix B (siehe oben Seite 359):

Gruppendurchschnitt  
Gruppenunterschied

$$\begin{array}{c} \boxed{\begin{array}{ccc} b_{11}^* & b_{12}^* & b_{13}^* \\ b_{21}^* & b_{22}^* & b_{23}^* \end{array}} \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \text{linear} \quad \text{quadrat.} \\ \text{Niveau} \end{array}$$

Die Hypothese lautet für diese Parametrisierung:

$$b_{22}^* = 0 \quad \text{und} \quad b_{23}^* = 0$$

In der allgemeinen Hypothesenform (5.46) ist:

$$H_0: \begin{array}{|c|} \hline 0, 1 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|ccc|} \hline b_{11}^* & b_{12}^* & b_{13}^* \\ b_{21}^* & b_{22}^* & b_{23}^* \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline 0 \ 0 \\ 1 \ 0 \\ 0 \ 1 \\ \hline \end{array} = (b_{22}^*, b_{23}^*) = (0, 0)$$

$$H_0: \quad {}_1C_2 \quad \cdot \quad B \quad \cdot \quad {}_3A_2 \quad = (0, 0)$$

Bei beiden Parametrisierungen resultieren die gleichen Testergebnisse.

### 5.3 Mehrfachantwort (echt multivariate) -Analyse\*

$$T \geq 2; M \geq 2; N \geq T * M$$

Obwohl schon bisher von multivariater Analyse die Rede war (die T-Messungen auf einer Variablen pro Person können als T-Variablen angesehen werden), wurde jeweils nur eine einzige, über die Zeitpunkte hin inhaltlich gleiche Variable betrachtet (z.B.: Entwicklung bezüglich der Schulangst).

Man könnte auch versuchen, simultan mehrere Variablen (z.B.: Schulangst und Lernerfolg) in ihrer Entwicklung über die Zeitpunkte hinweg zu betrachten. Diese Erweiterung ist leicht ins Wachstumskurvenmodell zu integrieren.

Beispiel: Die Variablen „Schulangst“ und „Lernerfolg“ werden bei Schülern und Schülerinnen zu drei Zeitpunkten beobachtet.

Die Modelle für die Analysen der *einzelnen* Variablen wären dann:

Schulangst:

$$\begin{array}{c}
 1 \\
 \delta : \\
 \vdots \\
 \varphi : \\
 \vdots \\
 N
 \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline E(Y_1 | X) \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline X \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline B_1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline Q_1 \\ \hline \end{array} = X \cdot (B_1 \cdot Q_1)$$

Lernerfolg:

$$\begin{array}{c}
 1 \\
 \delta : \\
 \vdots \\
 \varphi : \\
 \vdots \\
 N
 \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline E(Y_2 | X) \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline X \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline B_2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline Q_2 \\ \hline \end{array} = X \cdot (B_2 \cdot Q_2)$$

und zusammengefaßt:

$$\begin{array}{c}
 1 \dots T \quad 1 \dots T \quad 1 \dots I \quad 1 \dots I \quad 1 \dots T1 \dots T \\
 \delta : \\
 \vdots \\
 \varphi : \\
 \vdots \\
 N
 \end{array}
 \begin{array}{|c|c|} \hline E(Y_1 | X) & E(Y_2 | X) \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline X \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline B_1 Q_1 & B_2 Q_2 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline X \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline B_1 & B_2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline Q_1 & 0 \\ \hline 0 & Q_2 \\ \hline \end{array}$$

\* Diese Analyseart heißt bei Bock (1975, S. 502): Analysis of Multiple Repeated Measurement Variables, bei Timm (S. 507): das Multivariate Response Growth Curves Design.

Dabei darf durchaus angenommen werden (unter Umständen nach entsprechenden Tests), daß für die beiden Variablen unterschiedliche Trendkomponenten zutreffen. So kann z.B. für die „Schulungst“ nur ein linearer, für den „Lernerfolg“ sowohl ein linearer wie auch ein quadratischer Trend zutreffen.

Damit hat man als generelles Modell:

$$(5.50) \quad {}_N Y_{(M \cdot T)} = {}_N X_I B_p \underbrace{Q_{M \cdot T}}_q + {}_N \underbrace{E_{M \cdot T}}_q$$

$$\text{wobei } {}_1 B_p = \left[ \underbrace{B_1}_{p_1} \mid \underbrace{B_2}_{p_2} \mid \dots \mid \underbrace{B_M}_{p_M} \right];$$

$$Q = p \left\{ \begin{array}{ccc|c} Q_1 & O & & O \\ O & Q_2 & & O \\ \hline O & O & & Q_M \\ \hline \end{array} \right\}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{M \cdot T}$

$$\text{und } E = [E_1 \mid E_2 \mid \dots \mid E_M]$$

Das Modell (5.50) weist gegenüber (5.41) eine stärkere Strukturierung der Matrizen auf. So sind die Matrizen  $B$ ,  $Q$  und  $Y$ ,  $E$  aus Teilmatrizen zusammengesetzt. Die Zeilen von  $Y$  sind voneinander unabhängig (Zufallsauswahl der Personen).

Daß auch die Testmöglichkeiten im gleichen Rahmen wie vorher existieren, ergibt sich schon daraus, daß multivariate Tests schon bei  $M = 1$  vorgesehen wurden.

## 6. Pooling von „Querschnitt“- mit „Zeitreihen“-Analyse

Im Jahre 1966 veröffentlichten Balestra, P. & Nerlove, M. einen Artikel, der die Formulierung: „Pooling“ von Querschnitt- und Zeitreihendaten enthielt. Unter diesem Stichwort sind dann in der Folge eine Reihe von Veröffentlichungen entstanden, die sich mit der Konzeption eines solchen Modells und den damit zusammenhängenden Schätzproblemen beschäftigten (z.B. Amemiya, T., 1967; Mundlak, 1978; Hall, 1978; Wallace & Hussain, 1969).

### 6.1 Modellüberlegungen

Ein einfaches Modell in der Zeitreihenanalyse ist das autoregressive 1. Ordnung :

$$(6.1) \quad Y_t = b Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

für die  $T$ -Zeitpunkte:

$$\begin{aligned} Y_2 &= b Y_1 + \varepsilon_2 \\ Y_3 &= b Y_2 + \varepsilon_3 \\ &\dots \\ Y_T &= b Y_{T-1} + \varepsilon_T \end{aligned}$$

Die  $\varepsilon_t$  (Störglieder) repräsentieren wieder Effekte von Variablen, die nicht explizit im Modell enthalten sind. Es wird angenommen, daß die  $\varepsilon$ 's unkorreliert sind mit Erwartungswert 0 und Varianz  $\sigma_\varepsilon^2$  für alle  $\varepsilon_t$  (Nerlove, 1971, S. 360).

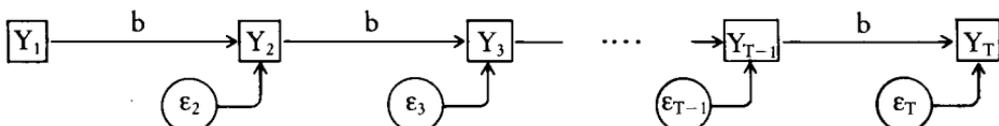


Fig. 6.1: AR(1)-Prozeßmodell

Bei Zeitreihendaten wird für einen Zeitpunkt jeweils nur eine Messung in den Variablen verlangt. Falls aber bei mehreren Personen solche Zeitreihendaten erhoben werden können, sollte pro Person noch ein spezieller Effekt vorgesehen werden, der die Unterschiede zwischen den Personen berücksichtigt: so daß folgendes Modell notwendig wird (bei Annahme einer linearen Wirkung des Personeneffekts:  $\pi_v$ ):

$$(6.2) \quad Y_{vt} = aY_{v,t-1} + \overbrace{\pi_v}^* + \varepsilon_{vt}$$

Als weiteren Schritt, die Variaten in  $Y_t$  adäquat zu beschreiben, schlägt Nerlove (1971) vor, noch zusätzlich einen allgemeinen Zeiteffekt zu berücksichtigen:

$$(6.3) \quad Y_{vt} = aY_{v,t-1} + \pi_v + \tau_t + \varepsilon_{vt}$$

Ein ähnliches Modell ist uns aber bereits aus der Modellgleichung (5.1) bekannt. Allerdings wurde dort  $Y_{v,t-1}$  nicht als unabhängige Variable berücksichtigt. Bei der bedingten Analyse bei 2 Zeitpunkten wurde der Anfangswert als unabhängige Variable mit verwendet. Es war aber kein  $\pi_v$  für die Personeneffekte vorgesehen. Es handelt sich hier also um ein Modell, das im Sinne einer Varianzanalyse ebenfalls Kovariaten (zusätzliche quantitative Variable) enthält.

\* In der Formulierung von Nerlove M. (1971, S. 360) wird für:  $\pi_v = \mu_i$  und für  $\varepsilon_{vt} = v_{it}$  gewählt.

Die  $\pi_v$  repräsentieren die Effekte von nicht explizit mit in die Analyse aufgenommenen Variablen, die konstant über die Zeit hinweg wirken.

Das Modell wird meist aber noch allgemeiner angesetzt (siehe z.B.: Mundlak (1978))

$$(6.4) \quad Y_{vt} = \sum_{i=1}^K X_{ivt} b_i + e_{vt} \quad \text{wobei: } e_{vt} = \pi_v + \tau_t + \varepsilon_{vt}$$

in Matrixform: 
$$\begin{bmatrix} y \\ \vdots \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ \vdots \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ \vdots \\ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ \vdots \\ \end{bmatrix}$$

Dabei können die  $X$ -Werte einfach wieder verzögerte  $Y$ -Werte (z.B.:  $Y_{v,t-1}, \dots, Y_{v,t-m}$ ) oder zusätzliche unabhängige Variable (kontemporär oder verzögert) sein.

Über die Spezifikation von  $\pi_v$ , und  $\tau_t$  ist eine Kontroverse entstanden, die jedem „Varianzanalytiker“ vertraut ist: Sind die Koeffizienten  $\pi_v$  und  $\tau_t$  jeweils fixe Größen (fixer Faktor) oder zufällige Variablen (Zufallsfaktor)?

Im Rahmen des gemischten Modells und der Wachstumskurvenanalyse wurde  $\tau_t$  als fixer Effekt angesehen (mit Reparametrisierungen) und  $\pi_v$  als zufälliger.

Werden beide als fix angesehen, liegt die übliche Spezifikation für das gewöhnliche Regressionsmodell (OLS) vor. Es gibt hier jedoch eine Ausnahme.

Falls zeitverzögerte Variable ( $Y_{t-i}$ ) auf der Seite der unabhängigen Variablen auftauchen, kann man nicht mehr davon ausgehen, daß die unabhängigen Variablen feste Größen im Sinne des klassischen Modells, sondern zufallsbehaftete Variable sind. Die klassischen Schätzmethoden liefern allerdings weiterhin konsistente und effiziente Schätzungen, falls angenommen werden darf, daß die *zufallsbehafteten* unabhängigen Variablen (hier  $Y_t$ ) mit den Störgliedern ( $\varepsilon_t$ ) nicht korrelieren.

Im Rahmen des „Pooling“ wird meist angenommen, daß die Effekte  $\pi_v$  und  $\tau_t$  Zufallsvariable mit den üblichen Annahmen sind (siehe auch oben (S. 344f.)). Es sei die Summe über die Komponenten mit  $e_{vt}$  abgekürzt:

$$(6.5) \quad \begin{array}{ll} \text{a) } e_{vt} = \pi_v + \tau_t + \varepsilon_{vt} & 1. \text{ wobei Kovarianzen zwischen den Komponenten Null sind} \\ \text{b) } \text{Cov}(\pi_v, \tau_t) = \text{Cov}(\pi_v, \varepsilon_{vt}) = \text{Cov}(\tau_t, \varepsilon_{vt}) = 0 & 2. \text{ Kovarianzen zwischen je zwei verschiedenen Variablen einer Komponente sind Null} \\ \text{c) } \begin{array}{l} \text{Var}(\tau_t) = \sigma_\tau^2 \\ \text{Var}(\varepsilon_{vt}) = \sigma_\varepsilon^2 \\ \text{Var}(\pi_v) = \sigma_\pi^2 \end{array} & 3. \text{ Homoskedastizität} \end{array}$$

Als Varianz-Kovarianzmatrix für den Vektor  $e$  ergibt sich damit (mit  $e_v$  als Teilvektor für die  $v$ -te Person):

$$\begin{aligned}
 (6.6) \quad \Sigma_e = \text{cov} \left( \begin{array}{c} T\{e_1 \\ e_2 \\ \dots \\ e_N\} \end{array} \right) &= \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & A & B & \\ \hline & B & A & \\ \hline & & & \\ \hline & B & B & A \\ \hline \end{array} = \\
 &= ({}_N I_N \otimes I_T I_T') \sigma_\pi^2 + (I_N I_N' \otimes {}_T I_T) \sigma_\tau^2 + ({}_N I_N \otimes {}_T I_T) \sigma_\epsilon^2 \\
 \text{mit } {}_T A_T &= I_T I_T' \sigma_\pi^2 + {}_T I_T \sigma_\tau^2 + {}_T I_T \sigma_\epsilon^2 = \\
 &= \begin{array}{|c|c|c|} \hline \sigma_\pi^2 \dots \sigma_\pi^2 & \sigma_\tau^2 \dots 0 & \sigma_\epsilon^2 \dots 0 \\ \hline \dots & \dots & \dots \\ \hline \sigma_\pi^2 \dots \sigma_\pi^2 & 0 \dots \sigma_\tau^2 & 0 \dots \sigma_\epsilon^2 \\ \hline \end{array} + \\
 {}_T B_T &= {}_T I_T \sigma_\tau^2 = \begin{array}{|c|} \hline \sigma_\tau^2 \dots 0 \\ \hline \dots \\ \hline 0 \dots \sigma_\tau^2 \\ \hline \end{array}
 \end{aligned}$$

Falls die übrigen unabhängigen Variablen als Konstanten aufgefaßt werden können, stimmt die Kovarianzmatrix aller  $y$ -Werte mit der der  $e$ -Werte\* überein.

### Beispiel:

Als abhängige Variable werde Schulangst untersucht. Es kann angenommen werden, daß die Angst zum gegenwärtigen Zeitpunkt ( $Y_t$ ) durch das Ausmaß der Angst im vorherigen Zeitpunkt ( $Y_{t-1}$ ) beeinflusst wird. Andererseits sei das Ausmaß der Angst auch vom empfundenen Strafausmaß ( $X_t$ ) abhängig. Es werden dabei mehrere Personen zu vier Zeitpunkten untersucht.

$\pi_v$  seien die zeitlich konstanten Effekte einer Fülle nicht erfaßter Variablen, die personenspezifisch\*\* auf das Angstniveau Auswirkungen haben.

$\tau_t$  sind die zeitlich wirkenden Effekte nicht explizit erhobener Variablen.

$\epsilon_{vt}$  repräsentieren die personenspezifisch über die Zeit variabel wirkenden Effekte.

Das Modell lautet:

\*5 Dieses Modell haben auch Fuller & Battese (1974) betrachtet und effiziente und konsistente Schätzer dafür entwickelt.

$$Y_{vt} = a_1 Y_{v,t-1} + a_2 X_{vt} + \pi_v + \tau_t + \epsilon_{vt}$$

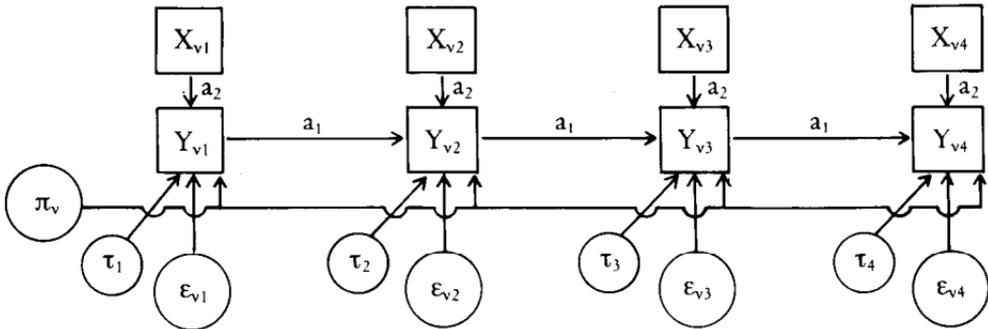


Fig. 6.2: Prozeßmodell für die v-te Person

Als Kritik an einem solchen Modell kann man leicht vorbringen, daß zeitlich weitere Abhängigkeiten zu berücksichtigen wären (siehe oben zur Kritik der Compound-Symmetry):

- in den X- bzw. Y-Variablen (diese Abhängigkeiten sind leicht ohne grundsätzliche Änderungen der Form des Modells (6.4) zu berücksichtigen): So könnte man auch unterschiedliche Koeffizienten zwischen Zeitpunkten fordern.
- in den  $\tau$ 's oder  $\epsilon$ 's: (1) Bei den  $\tau$ 's könnte man solche Abhängigkeiten im Sinne des ARIMA-Modells postulieren. (2) Bei den  $\epsilon$ 's wären solche Abhängigkeiten wieder möglich. Sie würden nicht global sondern spezifisch für jede Person sein. Da Silva (1975) hat ein moving-average-Modell\*\*\* dieser Art und die dazugehörigen Schätzmethoden entwickelt. Dabei setzt er allerdings voraus, daß die gemessenen unabhängigen Variablen nichtstochastisch sind (es dürften in diesem Modell keine zeitverzögerten abhängigen Variablen auf der Prediktorseite auftreten).

Eine interessante Mischung von Abhängigkeiten hat Parks (1967) in sein Modell aufgenommen. Es sieht einen autoregressiven Prozeß 1. Ordnung für die Summe der drei Komponenten

$$e_{vt} = \rho_v e_{v,t-1} + \epsilon_{vt} \text{ mit } e_{vt} = \pi_v + \tau_t + \epsilon_{vt}$$

vor. Dabei ist sogar zugelassen, daß die  $\epsilon_{vt}$  kovariieren.

\*\* Die Personeneffekte sind von vornherein als zeitinvariant konzipiert worden. Daher ist es nicht sinnvoll, bei den  $\pi$ 's Zeitabhängigkeiten anzunehmen. Zeitabhängigkeit tritt allerdings dann ein, wenn  $e_{vt} = \pi_v + \epsilon_{vt} + \tau_t$  als autoregressiver Prozeß angesetzt wird (Parks, 1967; Jöreskog, 1979).

\*\*\*  $\epsilon_{vt} = \alpha_0 u_t + \alpha_1 u_{t-1} + \dots + \alpha_M u_{t-M}$  wobei die  $u_t$  unabhängige Zufallsvariable mit gleicher Varianz sind.

## 6.2 Schätzprobleme

Als Schätzer für die Gleichung (6.4) mit der Kovarianzstruktur (6.6) kann der GLS-Schätzer

$$\hat{b}_{\text{GLS}} = (X' \Sigma_e^{-1} X)^{-1} X' \Sigma_e^{-1} y$$

verwendet werden. Da aber  $\Sigma_e$  meist unbekannt ist, muß  $\Sigma_e$  ebenfalls geschätzt werden. Das naheliegendste ist daher, den ML-Schätzer zu nehmen, zumal er im Rahmen von leicht zugänglichen Programmen (z.B. LISREL) implementiert ist. Bei kleinen Stichproben ( $N \leq 50$ ) ist allerdings größte Vorsicht geboten, wie Simulationen gezeigt haben (Nerlove (1971) und Hannan M. T. & Young A. A. (1977)), wenn stochastische unabhängige Variable vorliegen (z.B. ein zeitverzögertes Y als unabhängige Variable). Für kleinere Stichproben sind andere GLS-Schätzverfahren (siehe Nerlove (1971) Fuller & Battese (1974) und Henderson (1971)) vorteilhafter. Die einfachste Strategie  $b$  zu schätzen, ist allerdings anzunehmen, daß die Komponenten  $\pi_v$ ,  $\tau_t$  fixe Effekte sind, da dann gewöhnliche OLS-Schätzer verwendet werden können mit  $\pi_v$  und  $\tau_t$  als Parameter von „Dummies“. Dies wird auch die „Within-Covarianz“-Technik genannt und wurde auf ihre Anwendbarkeit als Annäherung für die GLS-Techniken untersucht (Wallace & Hussain (1969)). Leider erhält man nur asymptotische (bei  $T N \rightarrow \infty$ ) Annäherungen, falls zudem keine zeitverzögerten Y als zusätzliche unabhängige Variable auftauchen.

Mundlak (1978) hat in einem Versuch, eine Synthese zwischen den beiden Alternativen „fixe oder zufällige Effekte“ zu finden, nachweisen können, daß der GLS-Ansatz die eventuell bestehende Abhängigkeit der Effekte von der unabhängigen Variablen X vernachlässige. Falls dieser Einfluß berücksichtigt werden muß, ist der übliche GLS-Schätzer verzerrt, während über die „Within-Covarianz“-Technik der adäquate Schätzer gefunden wird.

## 7. Strukturgleichungsmodelle

$$T \geq 2, M \geq 2, N > \{M, T\}$$

Strukturgleichungsmodelle stellen eine Synthese aus Regression, Pfadanalyse, ökonometrischen Modellen und Faktorenanalyse dar. Mit ihrer Hilfe wird versucht, multivariate Einflußstrukturen zwischen latenten Variablen oder manifesten Indikatoren abzubilden (Jöreskog, 1973, 1979). Im Gegensatz z.B. zu varianzanalytischen Methoden werden explizit Hypothesen über das Geflecht von Variablenbeziehungen aufgestellt und getestet. Dabei werden von den meisten Autoren ganz im Sinne der Pfad- oder Faktorenanalyse meist nur Korrelations- oder Kovarianzmuster der Variablen untersucht (Jöreskog,

1979; Jöreskog & Sörbom, 1976, 1977; Roskam, 1976, 1979). Erst in letzter Zeit wurden auch vereinzelt Arbeiten publiziert, die Mittelwertsstrukturen und Veränderungen auf latenten Variablen untersuchten (Sörbom, 1976, 1979).

Gemäß unserer eingangs erwähnten theoretischen Orientierung befassen wir uns nur am Rande mit rein korrelativen Studien, da hier sowohl Varianz- als Mittelwertsveränderungen unberücksichtigt bleiben und somit keine testbaren zeitbezogenen Hypothesen über Verläufe gemacht werden können. Auch kovarianzorientierte Modelle wollen wir nur kurz streifen. Wir verweisen hierzu auf die Literatur. Statt dessen wollen wir uns ausführlicher mit der Analyse von strukturierten Mittelwerten auf manifesten und latenten Variablen in Mehrgruppendesigns befassen. Alle Analysen werden im Rahmen des LISREL-Modells und seiner entsprechenden Terminologie behandelt (s. a. Jöreskog, 1979; Sörbom, 1979).

## 7.1 Kovarianz- und korrelationsorientierte Analysen von Zeitreihen von Querschnitten: Stabilität von Konstrukten

Da in den weiteren Erörterungen immer wieder das LISREL-Modell vorausgesetzt wird, soll es hier kurz behandelt werden. In ein LISREL (linear structural relations model) gehen Zufallsvektoren von latenten abhängigen  $\eta' = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m)$  und latenten unabhängigen Variablen  $\xi' = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  ein. Zwischen den latenten Variablen besteht die multivariate Regressionsbeziehung

$$(7.1) \quad \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ m \end{array} \boxed{B} \cdot \begin{array}{c} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \eta_m \end{array} = \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ m \end{array} \boxed{\Gamma} \cdot \begin{array}{c} \xi_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \xi_n \end{array} + \begin{array}{c} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \xi_m \end{array} \quad \text{Strukturmodell der} \\ \text{laternen Variablen}$$

1 ... m                      1 ... n

mit:  ${}_m B_m$  = Regressionsmatrix mit Gewichten für die latenten endogenen Variablen  $\eta$

${}_m \Gamma_n$  = Regressionsmatrix mit Gewichten für die latenten exogenen Variablen  $\xi$

${}_m \xi_1$  = Vektor mit Gleichungsfehlern

Die Vektoren der latenten  $\eta$  und  $\xi$  können nicht direkt beobachtet werden. Gemessen werden statt dessen ihre Indikatoren  $y' = (Y_1, \dots, Y_p)$  und  $x' =$

$(X_1, \dots, X_q)$ . Die Beziehungen zwischen den Indikatoren und den latenten Variablen werden auch hier wieder durch multivariate Regressionen gekennzeichnet, die Faktorstrukturen der Faktorenanalyse ähneln:

$$(7.2) \quad \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_p \end{bmatrix} = \mathbf{A}_y \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_p \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_q \end{bmatrix} = \mathbf{A}_x \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_q \end{bmatrix}$$

mit:  $\mathbf{A}_y$  = Regressionsmatrix der  $y$  auf die  $\eta$   
 $\mathbf{A}_x$  = Regressionsmatrix der  $x$  auf die  $\xi$   
 $\varepsilon, \delta$  = Meßfehlervektoren

In dem einfachen LISREL-Modell werden eine Reihe von Annahmen eingebracht, die nachher z.T. fallengelassen werden können. So wird angenommen, daß  $E(\eta) = E(\xi) = E(\zeta) = E(\delta) = E(\varepsilon) = 0$  und  $E(\eta \cdot \varepsilon') = E(\zeta \cdot \delta') = E(\xi \cdot \zeta') = 0$  und  $B$  nichtsingulär ist. Die Kovarianzmatrix der Indikatoren ist dann

$$(7.3) \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{yy} & \Sigma_{yx} \\ \Sigma_{xy} & \Sigma_{xx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_y (\mathbf{B}^{-1} \mathbf{\Gamma} \mathbf{\Phi} \mathbf{\Gamma}' \mathbf{B}'^{-1} + \mathbf{B}^{-1} \mathbf{\Psi} \mathbf{B}'^{-1}) \mathbf{A}_y' + \mathbf{\Theta}_\varepsilon \mathbf{A}_y \mathbf{B}^{-1} \mathbf{\Gamma} \mathbf{\Phi} \mathbf{A}_x' & \\ \mathbf{A}_x \mathbf{\Phi} \mathbf{\Gamma}' \mathbf{B}'^{-1} \mathbf{A}_y' & \mathbf{A}_x \mathbf{\Phi} \mathbf{A}_x' + \mathbf{\Theta}_\delta \end{bmatrix}$$

mit folgenden Kovarianzmatrizen der latenten Variablen:

	$\varepsilon'$	$\delta'$	$\zeta'$	$\eta'$	$\xi'$
$\varepsilon$	$\mathbf{\Theta}_\varepsilon$	0	0	0*	0
$\delta$	0	$\mathbf{\Theta}_\delta$	0	0	0*
$\zeta$	0	0	$\mathbf{\Psi}$	0	0*
$\eta$	0*	0	0	$\mathbf{B}^{-1} \mathbf{\Gamma} \mathbf{\Phi} \mathbf{\Gamma}' \mathbf{B}'^{-1} + \mathbf{B}^{-1} \mathbf{\Psi} \mathbf{B}'^{-1}$	$\mathbf{B}^{-1} \mathbf{\Gamma} \mathbf{\Phi}$
$\xi$	0	0*	0*	$\mathbf{\Phi} \mathbf{\Gamma}' \mathbf{B}'^{-1}$	$\mathbf{\Phi}$

(7.4)

Die dick umrandeten Matrizen enthalten Parameter, die direkt zu schätzen sind. Dabei gibt es neben unbekanntem freien Parametern solche, die einander gleich sein sollen (constrained Parameters) oder andere, die auf einen bestimmten Wert fixiert sind (mit \* markiert). Die P-Matrizen in (7.4) sind nach Voraussetzung Null. Nicht markierte Kästchen in (7.4) enthalten ebenfalls verschwindende Kovarianzen. Die Parameter in den umrandeten Matrizen werden mit Maximum-Likelihood-Methoden geschätzt. Weitere Einzelheiten (auch über das Identifikationsproblem und über die Likelihoodquotiententests zum Hypothesentesten etc.) finden sich bei Jöreskog (1973) und Long (1976).

Wir wollen die Methode an einem Test-Retest-Design mit 2 Variablen zu jedem Meßzeitpunkt demonstrieren. Die beiden Variablen sollen Indikatoren für ein Konstrukt sein. Ist man daran interessiert, ob das Konstrukt im *korrelativen* Sinn über die Zeit hinweg konstant geblieben ist, muß man  $\varrho(\xi, \eta)$  schätzen und gegen die Hypothese  $\varrho(\xi, \eta) = 1.0$  testen. Zu  $t_0$  werden 2 Indikatoren  $X_1$  und  $X_2$  der latenten Variablen  $\xi$  gemessen. Zum zweiten Zeitpunkt  $t_1$  werden die beiden Indikatoren  $Y_1$  und  $Y_2$  beobachtet. Das zugrunde liegende Pfadmodell ist in Fig. 7.1 und (7.5) sowie (7.6) dargestellt.

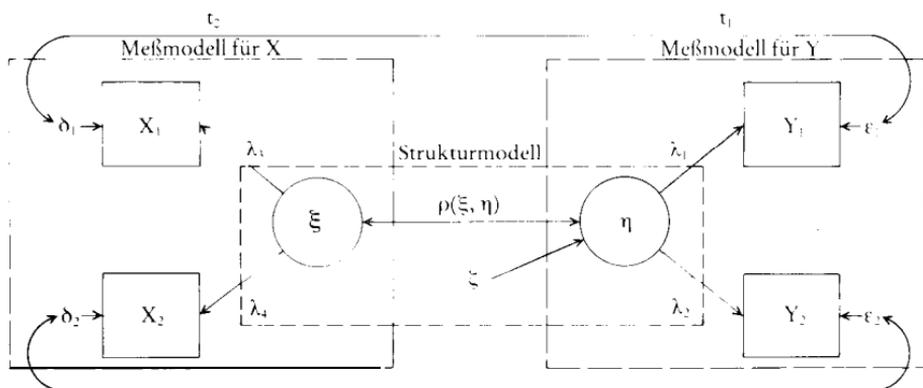


Fig. 7.1: Pfadmodell „Zwei-Wellen-Zwei-Variablen“ zur Überprüfung der korrelativen Stabilität des Konstrukts  $\xi$

$$(7.5a) \quad \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0^* \\ \lambda_2 & 0^* \\ 0^* & \lambda_3 \\ 0^* & \lambda_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} \quad \theta_\varepsilon = \begin{bmatrix} \sigma_{\varepsilon_1}^2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0^* & \sigma_{\varepsilon_2}^2 & \cdot & \cdot \\ \sigma_{\varepsilon_1 \delta_1} & 0^* & \sigma_{\delta_1}^2 & \cdot \\ 0^* & \sigma_{\varepsilon_2 \delta_2} & 0^* & \sigma_{\delta_2}^2 \end{bmatrix}$$

$$(7.5b) \quad y = A_y \eta + \varepsilon \quad \text{alle } Y, X \text{ als Abweichungswerte}$$

Wir gehen gleich von korrelierten Fehlervariablen  $E(\delta_1, \varepsilon_1) \neq 0$  und  $E(\delta_2, \varepsilon_2) \neq 0$  aus. Wir vermuten also, daß die Korrelation zwischen den Variablen  $X_1$  und

$Y_1$  sowie  $X_2$  und  $Y_2$  höher ist als es nur auf Grund ihrer Abhängigkeit von  $\xi$ ,  $\eta$  und deren Korrelation  $\rho(\xi, \eta)$  zu vermuten wäre. In dem LISREL-Modell (7.5b) fällt uns auf, daß durch Umbenennung  $\eta_1 \leftarrow \eta$ ,  $\eta_2 \leftarrow \xi$ ,  $Y_3 \leftarrow X_1$ ,  $y_4 \leftarrow X_2$ ,  $\varepsilon_3 \leftarrow \delta_1$ ,  $\varepsilon_4 \leftarrow \delta_2$  das Meßmodell (7.2)  $x = A_x \xi + \delta$  nicht mehr auftaucht („no X Option“). Dieses zunächst verwirrende Vorgehen ist aber notwendig, wie ein Blick auf (7.4) zeigt, da im „normalen“ LISREL-Modell (7.1-7.4) Kovarianzen zwischen  $\delta, \varepsilon$  nicht vorgesehen sind. Im Strukturmodell (7.6)

$$(7.6a) \quad \begin{bmatrix} 1^* & 0^* \\ 0^* & 1^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ \xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix} \quad \Psi = \begin{bmatrix} 1^* & \cdot & \cdot \\ \rho(\xi, \eta) & 1^* & \cdot \end{bmatrix}$$

$$(7.6b) \quad B \cdot \eta = \zeta \quad * \text{ fixierter Wert}$$

werden dann durch die Gleichsetzung  $B = Z$  die ursprünglichen „Gleichungsfehler“  $\zeta$  umdefiniert zu  $\zeta_1 \Rightarrow \eta$  und  $\zeta_2 \Rightarrow \xi$ . Das ist sinnvoll, weil die Kovarianzmatrix  $\Psi$  der Gleichungsfehler (hier jetzt: der latenten Variablen  $\xi, \eta$ ) direkt als Parameter schätzbar ist (vgl. 7.4). Damit statt der  $\text{Kov}(\xi, \eta)$  die  $\text{Korr}(\xi, \eta)$  geschätzt wird, legen wir  $\psi_{11} = \psi_{22} = 1.0$  fest.

Es stehen den 10 Kovarianzen der Indikatoren 11 unbekannte Parameter ( $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \sigma_{\varepsilon_1}^2, \sigma_{\varepsilon_2}^2, \sigma_{\delta_1}^2, \sigma_{\delta_2}^2, \sigma_{\delta_1 \varepsilon_1}, \sigma_{\delta_2 \varepsilon_2}$  und  $\rho(\xi, \eta)$ ) gegenüber. Das Modell ist nicht identifiziert. Eine Vereinfachung würde es bedeuten, wenn man von parallelen Prätests  $X_1$  und  $X_2$  ausgehen könnte. In diesem Falle könnte man  $\lambda_3 = \lambda_4$  setzen. Das Modell wäre dann gerade identifiziert: alle Parameter sind eindeutig aus Kovarianzen und Varianzen schätzbar. Wir wollen dieses Modell als „volles Modell“ bezeichnen.

Da das Meßmodell  $x = A_x \xi + \delta$  fehlt, vereinfacht sich die Kovarianzmatrix (7.3) zu (7.7)

$$(7.7) \quad \Sigma = A_y (B^{-1} \Psi B'^{-1}) A'_y + \Theta_\varepsilon$$

und da  $B = Z$  gesetzt wurde zu (7.8) auf S. 380.

Die Korrelation zwischen den latenten Variablen ist dann:

$$(7.9) \quad \rho(\xi, \eta) = \left[ \frac{\text{Kov}(X_2, Y_1) \cdot \text{Kov}(X_1, Y_2)}{\text{Kov}(X_1, X_2) \cdot \text{Kov}(Y_1, Y_2)} \right]^{1/2} = \left[ \frac{\lambda_1 \lambda_4 \rho \cdot \lambda_2 \lambda_3 \rho}{\lambda_4^2 \cdot \lambda_1 \lambda_2} \right]^{1/2}$$

Sie kann durch die Stichprobenkovarianzen der Kovarianzmatrix  $S$  geschätzt werden.

Um die Hypothese  $\rho(\xi, \eta) = 1.0$  zu testen, wird das „volle Modell“ durch die Restriktion  $\psi_{21} = 1.0$  in das „reduzierte Modell“ überführt. Das reduzierte Modell ist dann überidentifiziert, da es nur noch 9 Parameter besitzt.

$$(7.8a) \quad \Sigma = A_y \Psi A'_y + \theta_\epsilon$$

$$(7.8b) \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \text{Var}(Y_1) & \cdot & \cdot & \cdot \\ \text{Kov}(Y_2, Y_1) & \text{Var}(Y_2) & \cdot & \cdot \\ \text{Kov}(X_1, Y_1) & \text{Kov}(X_1, Y_2) & \text{Var}(X_1) & \cdot \\ \text{Kov}(X_2, Y_1) & \text{Kov}(X_2, Y_2) & \text{Kov}(X_2, X_1) & \text{Var}(X_2) \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \text{Matrixmultiplikation} \\ \text{nach dem Falkschema} \\ \text{(in Zurmühl, 1964)} \end{matrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0^* \\ \lambda_2 & 0^* \\ 0^* & \lambda_4 \\ 0^* & \lambda_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^* & \rho(\xi, \eta) \\ \rho(\xi, \eta) & 1^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & 0^* & 0^* \\ 0^* & 0^* & \lambda_4 & \lambda_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_{\epsilon_1}^2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0^* & \sigma_{\epsilon_2}^2 & \cdot & \cdot \\ \sigma_{\delta_1, \epsilon_1} & 0^* & \sigma_{\delta_1}^2 & \cdot \\ 0^* & \sigma_{\delta_2, \epsilon_2} & 0^* & \sigma_{\delta_2}^2 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 + \sigma_{\epsilon_1}^2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_1 \lambda_2 & \lambda_2^2 + \sigma_{\epsilon_2}^2 & \cdot & \cdot \\ \lambda_1 \lambda_4 \rho + \sigma_{\delta_1, \epsilon_1} & \lambda_2 \lambda_4 \rho & \lambda_4^2 + \sigma_{\delta_1}^2 & \cdot \\ \lambda_1 \lambda_4 \rho & \lambda_2 \lambda_4 \rho + \sigma_{\delta_2, \epsilon_2} & \lambda_4^2 & \lambda_4^2 + \sigma_{\delta_2}^2 \end{bmatrix}$$

Maximum-Likelihoodschätzungen des Parametervektors  $\Theta$  erhält man bei multivariater Normalverteilung der Indikatoren, wenn man die Anpassungsfunktion

$$F \{ \Sigma(\Theta) \} = \ln |\Sigma(\Theta)| + \text{Spur} \{ S \Sigma^{-1}(\Theta) \} - \ln |S| - p$$

(mit  $p =$  Zahl der Indikatoren) minimiert. Ist die aus den Modellparametern  $\Theta$  rückgerechnete Kovarianzmatrix  $\Sigma(\Theta)$  gleich der Stichprobenkovarianzmatrix  $S$ , ist  $F = 0$ . Sollen zusätzlich zu den Kovarianzen z.B. im Rahmen der multivariaten Wachstumskurvenanalyse auch noch der Mittelwertsvektor  $\mu_z(\Theta)$  an den Stichprobenmittelwertsvektor  $\bar{z}$  angepaßt werden, muß

$$F \{ \Sigma(\Theta), \mu_z(\Theta) \} = \ln |\Sigma(\Theta)| + \text{Spur} \{ S \Sigma^{-1}(\Theta) \} + (\bar{z} - \mu_z(\Theta))' \Sigma^{-1}(\Theta) (\bar{z} - \mu_z(\Theta)) - \ln |S| - p$$

minimiert werden. Die Variable  $(N-1) \cdot F$  verteilt sich nach der Chi-Quadratverteilung.

Hypothesentests erfolgen nach der Likelihoodquotientenmethode. Es können nur ineinander „geschachtelte“ Modelle getestet werden. Das reduzierte Mo-

dell (hier mit  $p_{\text{red}} = 9$  Parametern) wird zugunsten des nicht eingeschränkten, vollen Modells (hier mit  $p_{\text{voll}} = 10$  Parametern) verworfen, wenn

$$\chi_{\text{red}}^2 - \chi_{\text{voll}}^2 = N \cdot F_{\text{red}} - N \cdot F_{\text{voll}} > \chi_{1-\alpha, df_{\text{diff}}}^2 \quad (\text{hier: } \chi_{.95, df=1}^2 = 3.84)$$

wobei:  $F_{\text{voll}}$  in diesem Fall gleich Null ist

$$df_{\text{diff}} = df_{\text{red}} - df_{\text{voll}} \quad (\text{hier: } 1 - 0 = 1)$$

$$df_{\text{red}} = \text{Anzahl der unabhängigen Parameter } p_{\text{voll}} - \text{Anzahl der unabhängigen Parameter } p_{\text{red}} \quad (\text{hier } 10 - 9 = 1)$$

$$df_{\text{voll}} = \text{Anzahl der Parameter } p_{\text{voll}} - \text{Anzahl der Parameter, die man benötigt, um } S \text{ bzw. } \bar{z} \text{ perfekt anzupassen (hier: } 0)$$

Die Stabilitätsschätzung der Konstrukte (7.9) ist trotz ihrer methodischen Eleganz nur von geringem Wert. Läßt sich die Nullhypothese  $g(\xi, \eta) = 1.0$  nicht zurückweisen, können dennoch Mittelwerts- und Varianzveränderungen eingetreten sein. Andererseits bedeutet die Verwerfung der Nullhypothese *nicht*, daß die Konstrukte verschieden sind. Es kann sein, daß einige Personen äußeren Einflüssen unterlagen, die ihre Position auf den Indikatoren relativ zu den anderen Personen verändert haben. So wäre es bei einer Stichprobe von  $N$  Personen denkbar, daß eine Teilstichprobe zwischen Prä- und Posttest (Gewichtsmessungen auf 2 Waagen, die als Indikatoren dienen) eine individuell angepaßte Gewichtsreduktion mitmacht. Eine andere Stichprobe nimmt an einer Kreuzfahrt auf einem Luxusdampfer (durchschnittliche Gewichtszunahme ca. 2 kg pro Woche) teil. Der Rest achtet penibel auf sein Gewicht. Die Korrelation des Konstrukts  $\xi$  (= wahres Gewicht, gemessen auf 2 Waagen  $X_1, X_2$  zum Zeitpunkt  $t_0$ ) mit dem Konstrukt  $\eta$  (= wahres Gewicht gemessen auf 2 anderen Waagen  $Y_1, Y_2$  zum Zeitpunkt  $t_1$ ) dürfte nahe Null liegen. Der Schluß,  $\xi$  und  $\eta$  wären daher inhaltlich verschieden oder die Meßinstrumente unbrauchbar, ist falsch, da man die substantiellen exogenen Einflüsse nicht explizit mitberücksichtigt. Solche exogenen Einflüsse sind dabei die Intensität der Kur, des Trainings etc.

Modelle, die die endogene Entwicklung und exogene Einflüsse berücksichtigen, sind alle den systemtheoretischen Modellen zuzurechnen. Diese werden wir in Kapitel 7.3 als zeitdiskrete und in Kapitel 9. als zeitkontinuierliche behandeln.

## 7.2 Wachstumskurvenanalyse als Strukturgleichungsmodell

Wie wir in Kapitel 5. und 3.2 gesehen haben, gestalten sich Schätzung und Hypothesenprüfung im multivariaten Wachstumskurvenmodell (3.2.7) bzw. (5.41) und im echt multivariaten Modell (Kap. 3.2.3) bzw. (5.50) als besonders schwierig, wenn im Modell



und das Meßmodell für Gruppe  $g = 1, 2, \dots, G$  für  $Y$ :

$$y = A_y \cdot \eta + 0$$

$$\begin{bmatrix} Y_{t_1} \\ Y_{t_2} \\ Y_{t_3} \\ Y_{t_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -3 & 9 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_{g_1} \\ e_{g_2} \\ e_{g_3} \\ b_{g_3} \\ b_{g_1} \\ b_{g_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

*konst. lin. quadr.*

und für  $X$ :  $X = \xi = 1$

Durch Verlängerung der Vektoren  $y, \eta, \Gamma, \xi$  und Erweiterung der Matrizen  $A_y, B$  entlang der Hauptdiagonalen erhält man die LISREL-Spezifikation für die *echt* multivariate Wachstumskurvenanalyse für  $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$ .

Sind die Fehler  $e_{g1}, \dots, e_{gT}$  autokorreliert, muß die Submatrix in der linken oberen Ecke von  $B$  so spezifiziert werden, daß  $T \cdot e = \varepsilon$  ist mit unabhängigen  $\varepsilon$ . Für einen autoregressiven Prozeß 1. Ordnung  $e_t = \beta_t e_{t-1} + \varepsilon_t$  nimmt die Matrix

$$B = \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 & 1 & & & 0 \\ t_2 & -\beta_2 & 1 & & 0 \\ t_3 & & -\beta_3 & 1 & 0 \\ t_4 & & & -\beta_4 & 1 \\ & 0 & & & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Es lassen sich dann die in LISREL möglichen Hypothesen (Prüfung der Gleichheit und des Verschwindens von Parametern innerhalb und zwischen den Gruppen) prüfen.

Will man z.B. einen *Schereneffekt* der Mittelwertsverläufe (*Interaktion zwischen Gruppen und Zeit*) prüfen, stellt man folgende Nullhypothese auf:

$$H_0: \text{keine Interaktion } b_{11} = b_{21} \text{ (Gleichheit des lin. Trends)} \\
 b_{12} = b_{22} \text{ (Gleichheit des quadr. Trends)}$$

Der Haupteffekt der Zeit wird geprüft mit folgender Nullhypothese:

$$\begin{aligned} H_0: \text{kein Zeiteffekt } b_{11} = b_{21} = 0 & \text{ (Verschwinden d. lin. Trends)} \\ b_{12} = b_{22} = 0 & \text{ (Verschwinden d. quadr. Trends)} \end{aligned}$$

Für den Haupteffekt der Gruppen benötigt man die Nullhypothese:

$$\begin{aligned} H_0: \text{kein Gruppeneffekt } b_{10} = b_{20} & \text{ (identische Mittelwerts-} \\ b_{11} = b_{21} & \text{ Verläufe)} \\ b_{12} = b_{22} & \end{aligned}$$

### 7.3 Erwartungswertorientierte Analysen von Zeitreihen von Querschnitten: Zeitbezogene Hypothesen für diskrete Zeitpunkte

Bei der Evaluation von Interventionsprogrammen in Kontrollgruppendesigns treten oft nichtsignifikante Ergebnisse auf. Es gibt nun verschiedene inhaltliche Erklärungen für solche Ergebnisse, die mit dem Prozeßcharakter der Untersuchung zusammenhängen. So kann z.B. ein *Dosierungsproblem* (Möbus, 1981) vorliegen: die Intervention war *effektiv* aber *zeitlich* zu *kurz* angesetzt, um statistisch signifikant zu sein. Es kann auch sein, daß die gesamte Untersuchung wegen des u. U. langsamen Ablaufs der psychischen Lernvorgänge zeitlich *zu komprimiert* war. Die gesamte Untersuchung müßte eventuell verlängert werden, um signifikante Effekte zu sichern. So kann sich die Frage stellen: „Von welchem Zeitpunkt an erwarte ich einen signifikanten Unterschied in den Mittelwertsvektoren zwischen Kontroll- und Experimentalgruppe. Diese Frage kann mit klassischen statistischen Verfahren (Varianz-, Faktorenanalyse etc.) nicht geleistet werden, weil sie als statische Modelle die zeitliche Prozeßstruktur der empirischen Phänomene nur ungenügend modellieren. Selbst die für die Analyse zeitbezogener Daten gerne herangezogene Varianzanalysevariante „Wachstumskurvenanalyse“ (Khatrı, 1966; Timm, 1975) besteht im Prinzip nur aus einer Polynomannäherung der Mittelwertsverläufe. Eine inhaltliche Begründung für die Beschreibung von Entwicklungsverläufen mit Polynomen wird in der Regel nicht gegeben.

Statt dessen wollen wir Längsschnittdaten in diskreter Zeit mit Differenzgleichungssystemen und in kontinuierlicher Zeit mit Differentialgleichungssystemen (Kap. 9) analysieren. Beide Modelltypen sind im Gegensatz zu varianzanalytischen Methoden in dem Sinne dynamisch, daß alle Variablen bzw. Variablenänderungen explizit Funktionen der Zeit sind. Mit den dynamischen Modellen läßt sich die *Transferstruktur* der Variablen untereinander und der Einfluß exogener Variabler abschätzen. Anschließend sind mit den so gewon-

nenen Parametern *Prognosen* und *Simulationen* der erwarteten Entwicklungsverläufe möglich (u.a. Markus & Zajonc, 1977). Im Gegensatz zu den kovarianzorientierten „expost“-Analysen ist dabei die *Formulierung zeitbezogener Hypothesen* möglich: „Wir erwarten unter bestimmten Rahmenbedingungen zu einem *vorher festgelegten* Zeitpunkt einen Mittelwertsvektor  $\mu(t)$  mit den Werten  $\mu_1(t) \dots \mu_m(t)$ .“ Diese Hypothese läßt sich dann multivariat (z.B. mit Hotelling's  $T^2$ ) testen. Dabei ist zu erwarten, daß wir „gegen uns arbeiten“: je größer die Prognosedistanz, desto größer die Wahrscheinlichkeit der Modellfalsifikation. Muß die Prognose falsifiziert werden, gibt es dafür u.a. fünf Erklärungen: (a) vom Forscher nicht bemerkte Änderung des in der Empirie „geltenden“ Gesetzes, (b) Formulierung eines von Anfang an falschen Modells für das Prozeßphänomen, (c) Nichtbeachtung relevanter Variabler, (d) mangelnde Kontrolle der exogenen Randbedingungen oder deren falsche Vorhersage, (e) falsche Messung des Anfangszustandes (Pretest). Die Testung eines Modells entlang der Zeitachse verläuft offensichtlich wesentlich strenger als Modellkontrollen oder Anpassungstests in einem nicht zeitlich aufgespannten Rahmen. Zur Frage der Prognosedistanz sei auf Drösler (1976) verwiesen.

Nehmen wir z.B. an, daß die Daten eines Test-Retest-Designs Realisationen eines multivariaten autoregressiven Prozesses 1. Ordnung „in diskreter“ Zeit sind. Kompliziertere Modelle (s. Chow, 1975) können wegen der Beschränkung auf 2 Meßzeitpunkte nicht formuliert werden. Die Prozeßgleichung lautet:

$$(7.11a) \quad E \{ X(t) | X(t-1) \} = A X(t-1) + b$$

oder für die Mittelwerte

$$(7.11b) \quad \mu(t) = A \mu(t-1) + b$$

Die Parametermatrix  $A$  spiegelt die Einflüsse der Pretests auf die Posttests wider. Sie stellt also die zeitdiskrete Transferstruktur dar. Dagegen repräsentiert der Parametervektor  $b$  die Stärken äußerer Einflüsse, die zu einer Scheinvariablen mit dem Wert 1 für alle Variablen und Zeitpunkte zusammengefaßt wurden, auf die Posttestvariablen  $X(t)$  wieder (s.a. Steyer, 1980).  $A$  und  $b$  können mit LISREL als multivariate Regression der Posttests auf die Pretests geschätzt werden:

$$(7.12a)$$

$$\begin{array}{|c|} \hline 1^* & 0^* \\ \hline \vdots & \vdots \\ \hline 0^* & 1^* \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline X_1(t) = \eta_1 \\ \hline \vdots \\ \hline X_m(t) = \eta_m \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \vdots \\ \hline b \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline X_1(t-1) = \xi_1 \\ \hline \vdots \\ \hline X_m(t-1) = \xi_m \\ \hline \hline 1 = \xi_{m+1} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \zeta_1 \\ \hline \vdots \\ \hline \zeta_m \\ \hline \end{array}$$

$$(7.12b) \quad B \eta = \Gamma \xi + \zeta \quad A_y = I \quad A_x = I \quad \Theta_\varepsilon = 0 \quad \Theta_\delta = 0$$

Zur Simulation der erwarteten Entwicklungsverläufe werden die Lösungen des Differenzgleichungssystems

$$(7.13a) \quad E\{X(t) | X(0)\} = A^t X(0) + \left\{ \sum_{i=0}^{t-1} A^i \right\} b = \left\{ \begin{array}{l} \text{endogene} \\ \text{Entwicklung} \\ \text{seit } t=0 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{auf exogenen} \\ \text{Einfluß rück-} \\ \text{führbare} \\ \text{Entwicklung} \end{array} \right\}$$

oder für die Mittelwerte

$$(7.13b) \quad \mu(t) = A^t \mu(0) + \left\{ \sum_{i=0}^{t-1} A^i \right\} b = R A^t R^{-1} \mu(0) + \left\{ \sum_{i=0}^{t-1} R A^i R^{-1} \right\} b$$

berechnet, wobei

- $A^t$  = Transitionsmatrix des Anfangszustandes
- $\mu(t)$  = Mittelwertsvektor zum Zeitpunkt  $t$
- $\mu(0)$  = Mittelwertsvektor zum Zeitpunkt 0 (= Anfangszustand)
- $\left\{ \sum A^i \right\}$  = Transitionsmatrix des konstanten Inputs  $b \cdot 1$
- $A^i$  =  $i$ -faches Produkt von  $A$  (z.B.:  $A^2 = AA$ )
- $R$  = Matrix mit rechten Eigenvektoren von  $A$
- $\Lambda$  = Diagonalmatrix mit Eigenwerten von  $A$  ( $A$  muß diagonalisierbar sein)

Das Verhalten eines *dynamischen* Systems (7.11; 7.13) ist am leichtesten in der Basis der Eigenvektoren (s. 7.13b, rechts) beschreibbar. Hier ist das System entkoppelt, d.h. die Variablen beeinflussen sich wechselseitig nicht mehr. Wachstum, Schrumpfung oder Oszillation der neuen entkoppelten Variablen werden durch die Eigenwerte beschreibbar. Ist ein Eigenwert vom Betrage größer als 1, ist das System instabil: die Variablen wachsen ohne Grenze. Sind alle Eigenwerte von  $A$  vom Betrage kleiner als 1, ist das System asymptotisch stabil: es strebt einer Ruhelage zu, wenn sich die äußeren Einflüsse nicht ändern. Sind die Eigenwerte konjugiert komplex, treten Oszillationen in den erwarteten Mittelwertsverläufen auf.

Es liegt hier ein Vergleich mit der Hauptkomponentenanalyse nahe. Dort sind in der Basis der Eigenvektoren nicht dynamische sondern *statische* Verhältnisse entkoppelt. Die neuen Variablen (= Hauptkomponenten) korrelieren nicht mehr. Die Eigenwerte reflektieren nicht die dynamische sondern die statische Wichtigkeit der neuen entkoppelten Variablen im Sinne von Varianzaufklärungen. Jedoch treten in der Hauptkomponentenanalyse keine konjugiert komplexen oder negativen Eigenwerte auf, da dort statt einer nichtsymmetrischen Regressionsmatrix eine symmetrische positiv semidefinite(gramsche) Korrela-

tionsmatrix faktorisiert wird. Statische Verhältnisse zwischen Variablen werden als symmetrische Korrelationsbeziehungen, dynamische Verhältnisse als nichtsymmetrische Regressionsbeziehungen aufgefaßt.

Man kann die Zusammenfassung aller exogener Einflüsse in *eine* Scheinvariable fallen lassen und statt dessen  $n$  exogene Einflüsse betrachten. Dann erweitert sich (7.11) zu (7.14) und (7.13) zu (7.15):

$$(7.14) \quad \mu(t) = A\mu(t-1) + Bu(t-1) \quad mB_n = \text{Matrix mit Gewichten} \\ \text{der exogenen} \\ \text{Variablen}$$

$$(7.15) \quad \mu(t) = A^t\mu(0) + \sum_{i=0}^{t-1} A^i Bu(t-1-i)$$

Damit ist (7.14) der zeitdiskrete Spezialfall von (9.6) und (7.15) von (9.3). Wenn man gewillt ist, nur Prognosen für regelmäßig wiederkehrende Zeitpunkte zu treffen und zu akzeptieren, daß zwischen diesen Zeitpunkten Unkenntnis über die Zustände des multivariaten Systems herrscht, kann man sich mit den einfacheren zeitdiskreten Modellen begnügen. Sollen jedoch die Prozeßparameter im Sinne von psychologischen Theorien „kausal“ interpretiert werden, ist die Wahl eines zeitdiskreten oder zeitkontinuierlichen Modells für die Interpretationen entscheidend.

Ist der Parameter  $a_{ij}$  im zeitkontinuierlichen Modell gleich Null, ist der entsprechende Parameter im zeitdiskreten Modell (7.15) sehr wahrscheinlich ungleich Null! Behauptet man also im zeitkontinuierlichen Modell, daß die Variable  $i$  den Zuwachs oder Veränderung von Variable  $j$  nicht steuert, muß man im zeitdiskreten Modell das Gegenteil behaupten:  $i$  beeinflusst  $j$ !

Als Beispiel für die Anwendung eines zeitdiskreten Modells soll die Auswertung der Daten aus einer Untersuchung von Hamouzova & Würthner (1976) dienen, die ein Kontrollgruppendesign zum Intelligenzcoaching des IST durchführten. Die Parameterschätzungen, die mit LISREL durchgeführt wurden, finden sich für das System (7.11) in Tabelle 7.1.

Während in der Gruppe A (intensives Training) jeweils der zum Posttest parallele Prätest der beste Einzelprädiktor ist, „zerfasert“ sich die Matrix  $A$  der Kontrollgruppe (s. Tabelle 7.1 rechts). Es scheint durch das Lernen von Denkstrategien eine Stabilisierung der Tests im korrelativen Sinne eingetreten zu sein (Tabelle 7.1, links). Zur Simulation der erwarteten Entwicklungsverläufe (Trajektorien) wird die Lösung des Differenzgleichungssystems (7.13) berechnet und geplottet (Fig. 7.1). Obwohl es bei zeitdiskreten Modellen unzulässig ist, haben wir der besseren Lesbarkeit halber die Entwicklungskurven durchgezogen. Es zeigen sich deutliche Unterschiede zwischen den beiden

Tabelle 7.1: Systemmatrizen  $A$  und Inputvektoren  $b$  für die Intensivtrainingsgruppe A und die Kontrollgruppe K (Die Parameter wurden im Rahmen einer multivariaten Regression der 9 I-S-T Posttests auf die 9 parallelen I-S-T Pretests geschätzt. Der jeweils größte Koeffizient einer Zeile wurde eingerahmt. Es erscheinen nur Koeffizienten vom Betrage größer als .10)

		Trainingsgruppe A								
		Pretests								
Posttests	SE	WA	AN	GE	ME	RA	ZR	FA	WÜ	$b$
SE	<b>.28</b>	.13	.16	.18						5.08
WA	.15	<b>.17</b>	.12		.14		.11	.10		4.99
AN		.18	<b>.95</b>		-.26		.28	-.29		1.98
GE	.60	-.33	.42	<b>.68</b>	.56		-.36	-.15	-.31	2.83
ME	-.12		.22	-.14	<b>.74</b>			.39		1.34
RA		.32				<b>.66</b>			.14	-.69
ZR	.28	.26	.16		-.18		<b>.53</b>			-.29
FA	-.30	.14	.24					<b>.55</b>	.17	4.96
WÜ	.23	-.11						.17	<b>.60</b>	2.59

		Kontrollgruppe K								
		Pretests								
Posttests	SE	WA	AN	GE	ME	RA	ZR	FA	WÜ	$b$
SE	<b>.32</b>			.16	.12	.12				5.06
WA	.13	.27	<b>.39</b>					.30	<b>-.39</b>	5.74
AN	<b>.90</b>	.11	<b>.47</b>	-.11	-.31	.19	.13	.15	-.26	-3.10
GE	.36		<b>.70</b>	.12	.17	-.11			-.19	4.87
ME			-.24	.34	<b>.62</b>	-.12	.12			.14
RA	.15	-.13	.23		.11	<b>.77</b>	.15			-.37
ZR	.26	-.10					<b>.64</b>	.16		.59
FA		-.16	.12				.17	<b>.53</b>	.27	2.31
WÜ	.17	-.36	.22	-.29			.34	.30	<b>.48</b>	2.69

Gruppen, die nach der Simulation mit Formel (7.13) frühestens nach 2 Monaten bzw. 24 Stunden verteiltem Training ( $8 \times 3$  Stunden) zu erwarten wären. Auf Grund der Simulation kann man vermuten, daß das Coaching effektiv (wenn auch verbesserungswürdig) aber zeitlich zu kurz angelegt war, um einen signifikanten Schereneffekt zwischen den Gruppen auf einigen Untertests deutlich werden zu lassen. Diese Vermutungen ließen sich auch an einer Längsschnittuntersuchung kreuzvalidieren (Möbus, 1981).

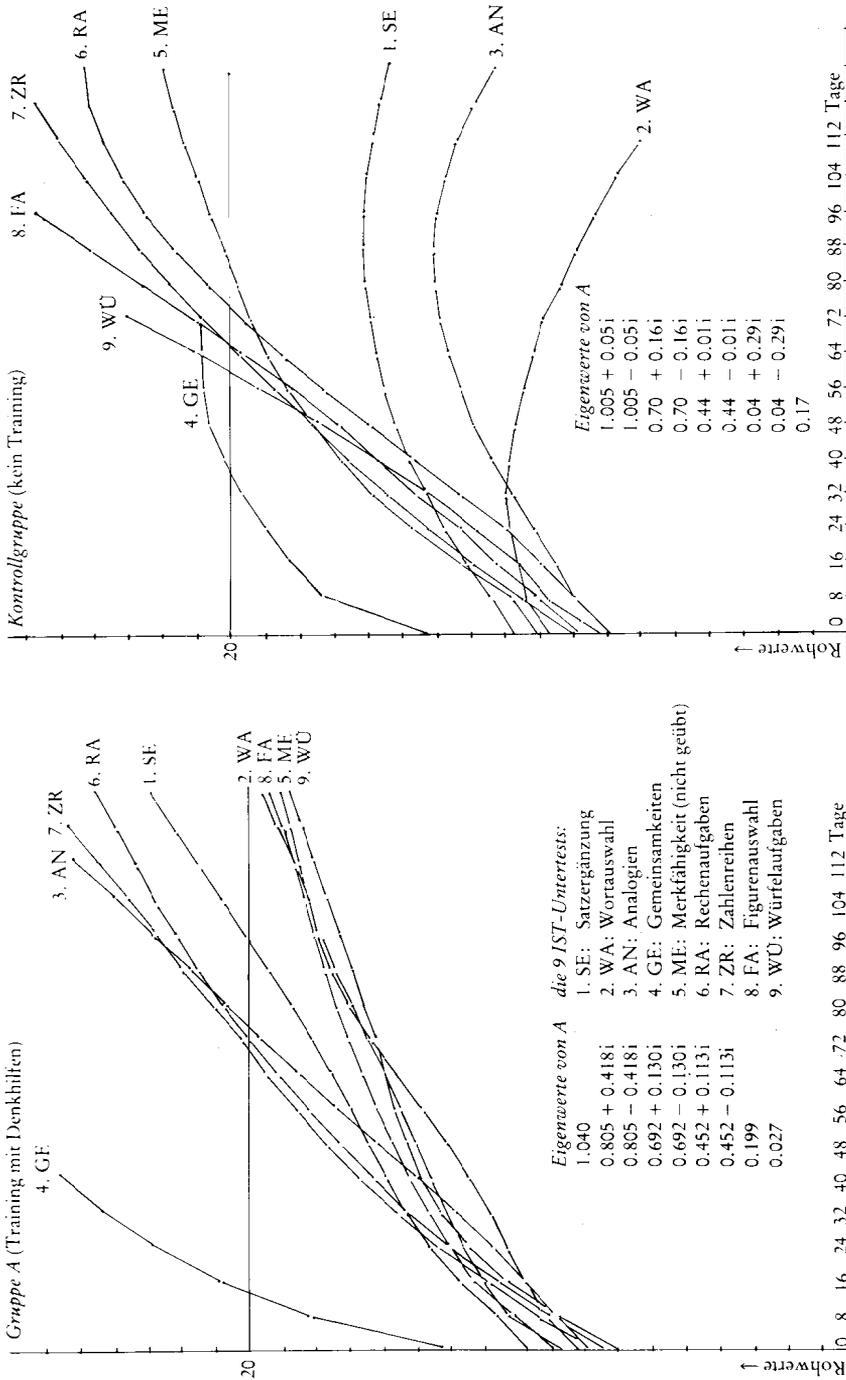


Fig. 7.1: Zwischen dem 1.-8. Tag beobachtete und dann anschließend mit Formel (7.13) simulierte Entwicklungsverläufe für die 9 I-S-T Untertests (SE = Satzergänzung, WA = Wortauswahl, AN = Analogien, GE = Gemeinsamkeiten, ME = Merkfähigkeit (wurde nicht trainiert), RA = Rechenaufgaben, ZR = Zahlenreihen, FA = Figurenauswahl, WÜ = Würfelaufgaben). Da bis auf GE alle Tests nur 20 Aufgaben besitzen, wurde bei  $X = 20$  eine waagerechte Linie eingezeichnet. Höhere Testleistungen wären nur zu erwarten, wenn man die Tests mit weiteren Aufgaben aufstocken würde.

## 7.4 Erwartungswertorientierte Analysen von Zeitreihen von Querschnitten: Schereneffekte bei Mittelwertsverläufen auf latenten Variablen

Bisher wurden nur die Mittelwertsverläufe auf manifesten Variablen untersucht. Dieses gilt auch für uni- wie auch multivariate Varianzanalysen. Ist man jedoch nicht an den Indikatormittelwerten sondern an Konstruktmittelwerten interessiert, führen die bisher behandelten Ansätze nicht zum Ziel. Diese Fragestellung läßt sich jedoch mit einem speziell erweitertem LISREL-Modell behandeln.

Dazu wird das ursprünglich von Jöreskog (1973) formulierte LISREL-Modell (7.1) und (7.2) nach einem Vorschlag von Sörbom (1979) erweitert zu

$$(7.16a) \quad \text{Strukturmodell} \quad B\eta = \alpha + \Gamma\xi + \zeta = [\alpha : \Gamma] \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ \xi \end{bmatrix} + [\zeta]$$

$$(7.16b) \quad 1. \text{ Meßmodell} \quad y = \nu_y + A_y\eta + \varepsilon = [\nu_y : A_y] \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ \eta \end{bmatrix} + [\varepsilon]$$

$$(7.16c) \quad 2. \text{ Meßmodell} \quad x = \nu_x + A_x\xi + \delta = [\nu_x : A_x] \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ \xi \end{bmatrix} + [\delta]$$

wobei  $\alpha$ ,  $\nu_y$  und  $\nu_x$  Vektoren mit Regressionskonstanten sind.

Es wird nicht mehr angenommen, daß  $E(\xi) = 0$  und  $E(\eta) = 0$  sind. Die Erwartungswerte der latenten Konstrukte der 1. Welle (Pretests) sind

$$(7.17a) \quad E(\xi) = \kappa$$

und die der 2. Welle (Konstrukte der Posttests)

$$(7.17b) \quad E(\eta) = B^{-1}[\alpha : \Gamma] \begin{bmatrix} \dots \\ 1 \\ \dots \end{bmatrix} + B^{-1}[E(\zeta)] = B^{-1}[\alpha : \Gamma] \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ \kappa \end{bmatrix}$$

und die der manifesten Variablen:

$$(7.17c) \quad E(x) = \nu_x + A_x \kappa = [\nu_x : A_x] \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ \kappa \end{bmatrix}$$

sowie

$$(7.17d)$$

$$E(y) = [\nu_y : A_y] \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ \eta \end{bmatrix} + E(\varepsilon) = [\nu_y : A_y] \begin{bmatrix} \dots \\ 1 \\ \dots \\ B^{-1}[\alpha : \Gamma] \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ \kappa \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \nu_y + A_y B^{-1}(\alpha + \Gamma\kappa)$$

In einer *einzigen* Population sind die Parameter  $\nu_y, \nu_x, \alpha, \kappa$  nicht identifiziert. Analysiert man jedoch simultan mehrere Gruppen, wie es z.B. bei einem Kontrollgruppendesign der Fall sein kann, gibt es einfache Restriktionen, die es ermöglichen, die Mittelwertparameter zu identifizieren (s. Sörbom, 1979). In der LISREL-Terminologie nimmt das Modell (7.16) die Struktur (7.18) oder noch allgemeiner (7.19) an. Dabei ändert sich die Parametermatrix  $\Sigma$  in (7.3) zur Momentenmatrix (um Null) der Indikatoren  $y$  und  $x$  sowie der Scheinvariablen 1:

(7.18a) Strukturmodell

$$\begin{bmatrix} 1^{**} & 0'^{**} & 0'^{**} \\ 0^{**} & B & -\Gamma \\ 0^{**} & 0^{**} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \eta \\ \xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1^{**} \\ \alpha \\ \kappa \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \xi \\ \xi - E(\xi) \end{bmatrix}$$

(7.18b) Meßmodell

$$\begin{bmatrix} z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nu_y & A_y & 0^{**} \\ \nu_x & 0^{**} & A_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \eta \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \delta \end{bmatrix}$$

oder noch allgemeiner:

(7.19a) Strukturmodell

$$\begin{bmatrix} I^{**} & 0^{**} & -\nu_y & -A_y & 0^{**} \\ 0^{**} & I^{**} & -\nu_x & 0^{**} & -A_x \\ 0^{**} & 0^{**} & 1^{**} & 0^{**} & 0^{**} \\ 0^{**} & 0^{**} & -\alpha & B & -\Gamma \\ 0^{**} & 0^{**} & -\kappa & 0^{**} & I^{**} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ x \\ 1 \\ \eta \\ \xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \delta \\ 1 \\ \xi \\ \xi - E(\xi) \end{bmatrix} \quad B\eta = \xi$$

(7.19b) Meßmodell

$$\begin{bmatrix} z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I^{**} & 0^{**} & 0^{**} & 0^{**} & 0^{**} \\ 0^{**} & I^{**} & 0^{**} & 0^{**} & 0^{**} \\ 0^{**} & 0^{**} & 1^{**} & 0^{**} & 0^{**} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ x \\ 1 \\ \eta \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad y = A_y \eta$$

Die zu analysierende Matrix ist nicht mehr wie im ursprünglichen LISREL-Modell die Kovarianzmatrix  $S$  der Indikatoren sondern die Momentenmatrix der Indikatoren ( $z$  und der Scheinvariablen 1) um Null:

$$(7.20) \quad M = \begin{array}{|c|c|} \hline S + \bar{z}\bar{z}' & \bar{z} \\ \hline \bar{z}' & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N zz' & \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N z \cdot 1 \\ \hline \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N 1 \cdot z' & \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N 1 \cdot 1 \\ \hline \end{array}$$

wobei  $S$  = Kovarianzmatrix der  $z$   
 $S + \bar{z}\bar{z}'$  = Momentenmatrix der  $z$  um Null  
 $\bar{z}$  = Mittelwertsvektor der  $z$  = Produkt-Moment der  $z$   
mit der Scheinvariablen 1

Wir wollen jetzt die Fragestellung: „Wie verändern sich Gruppenunterschiede zwischen Konstruktmittelwerten zu diskreten Zeitpunkten?“ mit LISREL behandeln. Dazu nehmen wir das Beispiel von Jöreskog und Sörbom (1976). Es soll untersucht werden, ob sich zwischen den beiden Gruppen ein Schereneffekt herausbildet. Jeweils 2 Untertests des Sequential Test of Educational Progress (STEP) dienen als Indikatoren für die latenten Variablen  $\xi$  (1. Welle) und  $\eta$  (2. Welle). Die Kovarianzmatrizen und Mittelwerte finden sich in Tabelle 7.2. Nach (7.20) lassen sich die Momentmatrizen um Null berechnen, die dann dem LISREL-Modell (7.18) für die Maximum-Likelihoodschätzungen als Daten dienen (Tabelle 7.3). Für jede der beiden Gruppen wird ein Modell (7.18) aufgestellt, dabei werden folgende Restriktionen eingeführt: (1) die Parameter des Meßmodells sind für beide Gruppen gleich, (2) die Parameter  $\kappa$  der Bezugsgruppe („Jungen mit akademischem Curriculum“) werden Null gesetzt: damit sind die Mittelwerte der latenten Variablen  $\xi_1$  und  $\eta_1$  der Bezugsgruppe in den Nullpunkt verschoben. Die Einschränkung (1) bedeutet nicht die Gleichsetzung der Kovarianzmatrizen sondern ermöglicht es erst, indikatorspezifische Mittelwertsunterschiede im Konstruktraum abzubilden. Die Parameterschätzungen finden sich in Tabelle 7.4.

Es lassen sich zwei gruppenspezifische Regressionen im Raum der latenten Variablen schätzen (s.a. Figur 7.2)

$$(7.21a) \quad \text{für Jungen mit „akademischem“ Curriculum:} \\ \eta_1 = .963 \xi_1 + \zeta_1$$

$$(7.21b) \quad \text{für Jungen mit „nichtakademischem“ Curriculum:} \\ \eta_2 = -6.121 + .811 \xi_1 + \zeta_2$$

Die Mittelwerte auf den latenten Variablen sind

$$(7.22a) \quad \text{für Jungen mit „akademischem“ Curriculum:} \\ \xi_1 = 0.0^* \quad \eta_1 = 0.0^*$$

(7.22b) für Jungen mit „nichtakademischem“ Curriculum:  
 $\xi_2 = -13.75 \quad \bar{\eta}_2 = -17.27$

Es zeigt sich, daß die Mittelwertsdifferenz *auf den latenten Variablen* größer wird. Signifikanztests lassen sich durchführen, wenn man durch entsprechende Restriktionen, das volle Modell reduziert und die beiden Likelihoods mit einem Likelihoodquotiententest vergleicht. Will man z.B. die Hypothese testen, daß kein Schereneffekt vorliegt, kann man die Restriktion testen, daß die Steigungen der beiden Regressionen gleich sein sollen.

Das Modell ist im Grunde ein statisches Modell, weil man im Gegensatz zum vorher behandelten Differenzgleichungssystem, keine expliziten Extrapolations- und Prognosevorschriften zur Hand hat. Hier wird ganz deutlich, daß das Modell aus der regressions- und faktorenanalytischen Denkschule der Statistik stammt. Andererseits ist es möglich, die dynamischen zeitdiskreten oder zeitkontinuierlichen Systeme auf latente Variablen auszudehnen. Hierzu müssen die Outputmatrizen  $H$  in (9.1b) und (9.2b) und die Inputmatrizen  $B$  bestimmte Strukturen annehmen. So darf  $H$  nicht gleich  $I$  sein, sondern muß ähnlich wie die Lambda-Matrizen in den LISREL-Meßmodellen spezifiziert sein. Sinnvolle Modelle müssen auch hier bestimmten Kriterien genügen. So

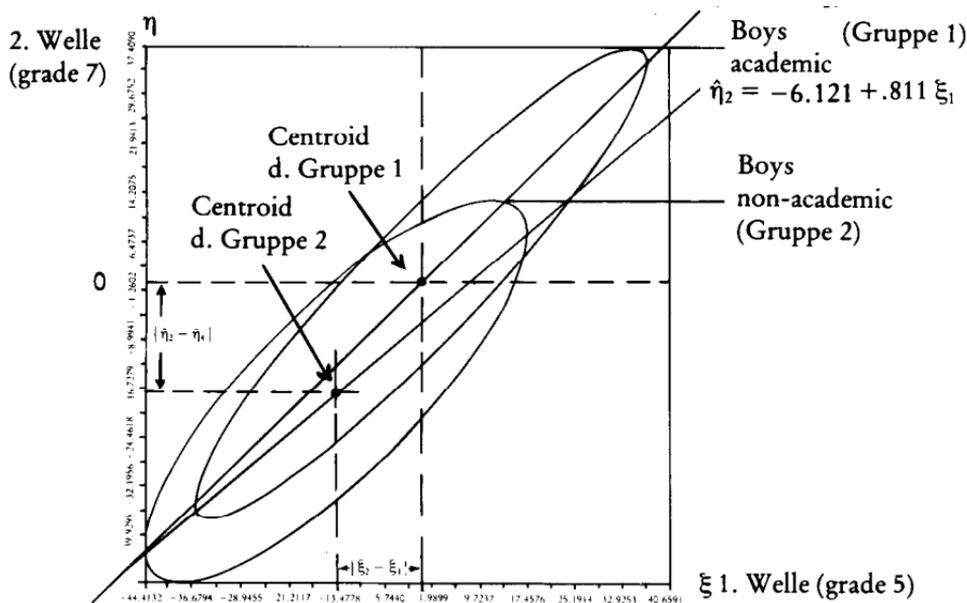


Fig. 7.2: Raum der latenten Variablen für die 1. und 2. Welle: Regressionen der latenten Variablen der 2. Welle auf die 1. Welle für die beiden Curriculumsgruppen

sind Fragen der Beobachtbarkeit und Kontrollierbarkeit zu untersuchen (s.a. Athans et al., 1974).

Tabelle 7.2: Stichprobenkovarianzmatrizen für zwei Curricula

Boys academic (N = 373)				
STEP reading, grade 5 $X_1$	281.349			
STEP writing, grade 5 $X_2$	184.219	182.821		
STEP reading, grade 7 $Y_1$	216.739	171.699	283.289	
STEP writing, grade 7 $Y_2$	198.376	153.201	208.837	246.069
Boys non-academic (N = 249)				
STEP reading, grade 5 $X_1$	174.485			
STEP writing, grade 5 $X_2$	134.468	161.869		
STEP reading, grade 7 $Y_1$	129.840	118.836	228.449	
STEP writing, grade 7 $Y_2$	102.194	97.767	136.058	180.460
Mittelwerte				
	Boys academic		Boys non-academic	
STEP reading, grade 5 $X_1$	262.236		248.675	
STEP writing, grade 5 $X_2$	258.788		246.896	
STEP reading, grade 7 $Y_1$	275.630		258.546	
STEP writing, grade 7 $Y_2$	269.075		253.349	

Tabelle 7.3 : Zu analysierende Momentenmatrizen M

	Gruppe 1: „akademisches“ Curriculum					Gruppe 2: „nichtakad.“ Curriculum				
	$X_1$	$X_2$	$Y_1$	$Y_2$	Konst.	$X_1$	$X_2$	$Y_1$	$Y_2$	Konst.
$X_1$	69029	.	.	.	.	62025	.	.	.	.
$X_2$	68041	67159	.	.	.	61537	61120	.	.	.
$Y_1$	72478	71496	76237	.	.	64443	63966	67101	.	.
$Y_2$	70755	69795	74372	72660	.	63097	62637	65638	64340	.
1	262	258	275	269	1	248	246	258	253	1

Tabelle 7.4: Parameterschätzungen mit LISREL

Gruppe 1: „akademisches“ Curriculum

Strukturmodell

$$\begin{bmatrix} 1^* & 0^* & 0^* \\ 0^* & 1^* & 0^* \\ 0^* & -\Gamma & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1^* \\ \kappa \\ \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \xi - E(\xi) \\ \zeta \end{bmatrix}$$

mit  $I = 1^*$ ,  $-\Gamma = -.963$ ,  $B = 1^*$ ,  $\kappa = 0^*$ ,  $\alpha = 0^*$

Meßmodell

$$\begin{bmatrix} z \\ x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{x_1} = 262 & 1^* & 0^* \\ v_{x_2} = 258 & \lambda_{x_2} = .839 & 0^* \\ v_{y_1} = 275 & 0^* & 1^* \\ v_{y_2} = 269 & 0^* & \lambda_{y_2} = .895 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \xi \\ \eta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta \\ \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$z = \begin{bmatrix} v_x & \Lambda_x & 0^* \\ v_y & 0^* & \Lambda_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \xi \\ \eta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta \\ \varepsilon \end{bmatrix}$$

Gruppe 2: „nichtakademisches“ Curriculum

Strukturmodell

$$\begin{bmatrix} 1^* & 0^* & 0^* \\ 0^* & 1^* & 0^* \\ 0^* & -.811 & 1^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1^* \\ -13,75 \\ -6,121 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \xi - E(\xi) \\ \zeta \end{bmatrix}$$

## 8. Markoff-Modelle für qualitative Variable bei diskreter Zeit

Während bei den quantitativen Variablen die Variablenwerte zu verschiedenen Zeitpunkten (oder daraus abgeleitete andere Maße wie Differenzen oder Verhältnisse) als Operationalisierung von Veränderungen gelten, betrachtet man bei qualitativen Variablen analog dazu Veränderungen in den Wahrscheinlichkeiten, sich in bestimmten Zuständen zu befinden (s. Coleman, 1968). Die dabei verwendeten Modelle sind meistens die zeitdiskreten Markoff-Ketten, die in die Klasse der Differenzgleichungssysteme einzuordnen sind. Anwendungen finden sich bei der Beschreibung von Konditionierungs-, Konzeptlern-, Informationsspeicherungs-, Denk- und Interaktionsprozessen (Atkinson & Estes, 1963; Estes & Suppes, 1974; Deppe, 1977; Fararo, 1973; Greeno, 1974; Harder, 1973; Laming, 1973; Levine & Burke, 1972; Massy et al., 1970; Miller & Chomsky, 1963; Rapoport, 1963; Restle & Greeno, 1970; Revenstorff et al., 1977; Tack, 1976).



$$(8.5) \quad \boxed{p'(t_2)} = \boxed{p'(t_1)} \cdot \boxed{P(t_1, t_2)}$$

*In den bedingten Wahrscheinlichkeiten sind alle Informationen enthalten, die die Veränderung zwischen zwei Zeitpunkten charakterisieren.*

Manchmal werden auch zwei Prozesse miteinander kombiniert, so daß nur noch eine einzige Übergangsmatrix  $P(t_1, t_2)$  vorliegt (Greeno, 1974). So kann die Variable Y beim einfachen Alles-oder-nichts-Lernen zwei Ausprägungen besitzen: S = Information gespeichert, U = Information nicht im Gedächtnis gespeichert. Die Übergangsmatrix des Lernprozesses könnte folgendermaßen aussehen:

$$P_1(t_1, t_2) = \begin{array}{l} \text{Information ge-} \\ \text{speichert } S(t_1) \\ \text{Information nicht} \\ \text{im Gedächtnis ge-} \\ \text{speichert } U(t_1) \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline S(t_2) & U(t_2) \\ \hline 1 & 0 \\ \hline a & (1 - a) \\ \hline \end{array}$$

S und U sind dabei latente, nicht direkt beobachtbare Zustände. a repräsentiert einen unbekanntem Parameter, der durch Daten geschätzt werden muß.

Aus den Antworten einer Person ist aber nicht ein direkter Schluß auf die latenten Zustände S, U der Person möglich. Sie kann trotz nicht gespeicherter Information richtige Reaktionen (z. B. Raten in einem multiple choice Fragebogen) zeigen. Dieser zweite Prozeß (Performanzmodell) besitzt ebenfalls eine Übergangsmatrix

$$P_2(t_1, t_2) = \begin{array}{l} \text{Information ge-} \\ \text{speichert } S(t_1) \\ \text{Information nicht} \\ \text{gespeichert } U(t_1) \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline \text{richtige} & \text{falsche} \\ \text{Reaktion } C(t_2) & \text{Reaktion } E(t_2) \\ \hline 1 & 0 \\ \hline p & (1 - p) \\ \hline \end{array}$$

C und E sind jetzt direkt beobachtbare manifeste Zustände. Beide Prozesse lassen sich kombinieren mit neuen Zuständen SC, UC und UE. Dabei kann

nur das Auftreten von UE direkt über die nicht korrekten Antworten einer VP beobachtet werden. Die Übergangsmatrix des kombinierten Lern-Performanzmodells ist

	SC( $t_2$ )	UC( $t_2$ )	UE( $t_2$ )
	Speicherung und korrekte Reaktion	keine Speicherung und korrekte Reak- tion	keine Speicherung und Fehler (nicht korrekte Reaktion)
$P(t_1, t_2) =$	SC( $t_1$ )	UC( $t_1$ )	UE( $t_1$ )
	1	0	0
	a	(1 - a) p	(1 - a) (1 - p)
	a	(1 - a) p	(1 - a) (1 - p)

Die Modelle mit latenten Zuständen werfen eine Reihe von Problemen auf, die unter 8.8.2 noch gesondert besprochen werden.

Auf ähnliche Weise wie in (8.5) wird die Zustandsverteilung des 2. Zeitpunkts in die des 3. Zeitpunkts transformiert:

$$(8.6) \quad p'(t_3) = p'(t_2) \cdot P(t_2, t_3)$$

Durch Substitution von (8.5) für  $p'(t_2)$  in (8.6) erhält man dann

$$(8.7) \quad p'(t_3) = p'(t_1) \cdot P(t_1, t_2) P(t_2, t_3)$$

Allgemein bekommt man durch wiederholtes Einsetzen für mehrere Zeitpunkte ( $t_1 < t_2 < t_3 \dots < t_m$ )

$$(8.8) \quad p'(t_m) = p'(t_1) \cdot P(t_1, t_2) \cdot P(t_2, t_3) \cdots P(t_{m-1}, t_m) = p'(t_1) \cdot \prod_{i=2}^m P(t_{i-1}, t_i)$$

Andererseits könnte man auch die Wahrscheinlichkeiten zum Zeitpunkt  $t_m$  aus den Wahrscheinlichkeiten  $p'(t_1)$  und den bedingten Wahrscheinlichkeiten  $P(t_1, t_m)$  erhalten:

$$(8.9) \quad p'(t_m) = p'(t_1) \cdot P(t_1, t_m)$$

Auf den ersten Blick würde man vermuten, daß  $P(t_1, t_m)$  gleich dem Produkt

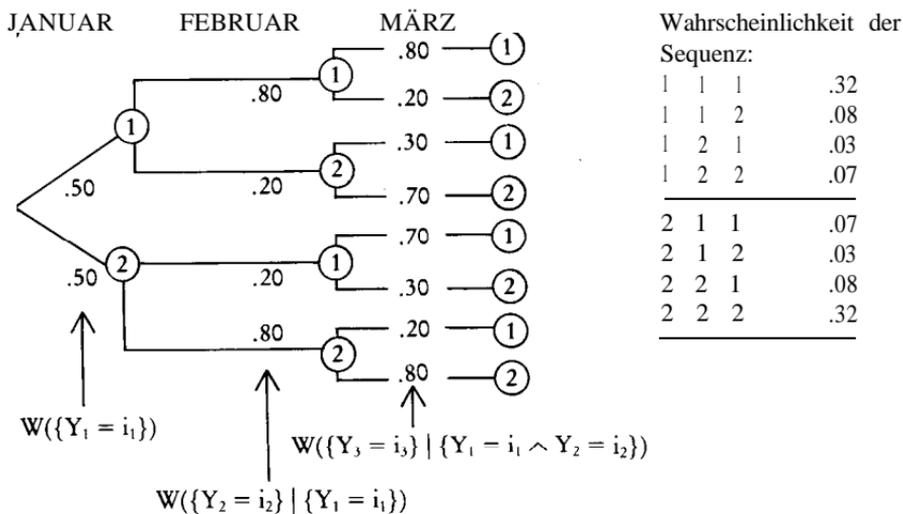
$\prod_{i=2}^m P(t_{i-1}, t_i)$  sein müßte. Dieses gilt nicht allgemein. Das soll an folgendem

Beispiel gezeigt werden.

*Beispiel:*

Die untersuchte Variable Y habe zwei Ausprägungen: 1 = gesund geschrieben, 2 = krank geschrieben. Aufgrund jahrelanger Erfahrung wisse man, daß nach

einer im Dezember durchgeführten Therapie für die drei Zeitpunkte Januar ( $t_1$ ), Februar ( $t_2$ ) und März ( $t_3$ ) folgende Wahrscheinlichkeiten gelten, gesund bzw. krank geschrieben worden zu sein:



Aus diesen Wahrscheinlichkeiten kann man dann die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Sequenzen berechnen:

$$\begin{aligned} W(\{Y_1 = i_1 \wedge Y_2 = i_2 \wedge Y_3 = i_3\}) &= W(\{Y_3 = i_3 \mid \{Y_1 = i_1 \wedge Y_2 = i_2\}\}) \\ &\quad \cdot W(\{Y_2 = i_2 \mid \{Y_1 = i_1\}\}) \\ &\quad \cdot W(\{Y_1 = i_1\}) \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit für den 1. Ast des Wahrscheinlichkeitsbaumes (Sequenz: 1 | 1) ist:

$$W(\{Y_1 = 1 \wedge Y_2 = 1 \wedge Y_3 = 1\}) = .80 \cdot .80 \cdot .50 = .32$$

Die Matrizen für die bedingten Wahrscheinlichkeiten kann man aus den Werten für die Sequenzen berechnen. Man erhält als Matrix der bedingten Wahrscheinlichkeiten für den Übergang von Januar auf Februar:

$$P(t_1, t_2) = \begin{array}{c} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \end{array} \begin{array}{cc} \textcircled{1} & \textcircled{2} \\ \begin{array}{cc} .80 & .20 \\ .20 & .80 \end{array} \end{array}$$

und für den Übergang von Februar auf März:

$$P(t_2, t_3) = \begin{matrix} \textcircled{1} & \textcircled{2} \\ \begin{matrix} \textcircled{1} & \textcircled{2} \\ \begin{matrix} .78 & .22 \\ .22 & .78 \end{matrix} \end{matrix} \end{matrix} = \begin{bmatrix} .80 * .80 + .20 * .70 & .20 * .30 + .80 * .20 \\ .80 * .20 + .20 * .30 & .20 * .70 + .80 * .80 \end{bmatrix}$$

Nach Formel (8.7) ist dann damit die Verteilung  $p'(t_3)$  (Wahrscheinlichkeiten im März, gesund bzw. krank geschrieben zu sein):

$$\begin{aligned} p'(t_1) \cdot P(t_1, t_2) \cdot P(t_2, t_3) &= \\ &= (.5, .5) \cdot \begin{matrix} \begin{matrix} .80 & .20 \\ .20 & .80 \end{matrix} & \begin{matrix} .78 & .22 \\ .22 & .78 \end{matrix} \end{matrix} = (.5, .5) \cdot \begin{matrix} \begin{matrix} .668 & .332 \\ .332 & .668 \end{matrix} \end{matrix} = (.5, .5) = p'(t_3) \end{aligned}$$

oder direkt nach Formel (8.9):

$$p'(t_1) \cdot P(t_1, t_3) = (.5, .5) \cdot \begin{matrix} \begin{matrix} .70 & .30 \\ .30 & .70 \end{matrix} \end{matrix} = (.5, .5) = p'(t_3)$$

Die beiden Matrizen (im Beispiel doppelt angestrichen) stimmen nicht überein. Das Produkt von Matrizen mit bedingten Wahrscheinlichkeiten ist nicht selbst die entsprechende Matrix der bedingten Wahrscheinlichkeiten. Das trifft nur dann zu, wenn die sogenannte „Markoffannahme“ (siehe unten) erfüllt ist.

### b) Markoffannahme und einige Bezeichnungen

Bei bedingten Wahrscheinlichkeiten gilt im allgemeinen (z.B. bei 3 Zeitpunkten) (8.10) nicht. Falls die Gleichheit gefordert wird, spricht man bei diesem Beispiel von „Markoffannahme 1. Ordnung“. Diese Annahme vereinfacht die theoretische Analyse der Prozesse und deren Schätzbarkeit erheblich.

$$(8.10) \quad \mathbb{W}(\{Y_t = i_t\} \mid \{Y_{t-2} = i_{t-2}, Y_{t-1} = i_{t-1}\}) = \mathbb{W}(\{Y_t = i_t\} \mid \{Y_{t-1} = i_{t-1}\})$$

im obigen Beispiel ist für  $i_t = 1, i_{t-1} = 1, i_{t-2} = 1$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{W}(\{Y_3 = 1\} \mid \{Y_1 = 1, Y_2 = 1\}) &= .80 \neq \\ \mathbb{W}(\{Y_3 = 1\} \mid \{Y_2 = 1\}) &= .78 \end{aligned}$$

Man müßte bei mehreren Zeitpunkten die ganze Vergangenheit des Prozesses mitberücksichtigen; dadurch ergäbe sich bei lang dauernden Prozessen eine immense Fülle von bedingten Wahrscheinlichkeiten. Darüber hinaus wären auch Prognosen unmöglich, da für jede Vergangenheit (spezielle Sequenz von Ausprägungen) völlig neue unbekannte bedingte Wahrscheinlichkeiten für die Prognosen benötigt würden.

Die Markoffeigenschaft eines Prozesses erlaubt es, nicht die gesamte Vergangenheit berücksichtigen zu müssen. Falls dann die Gleichung (8.10) gilt, wäre damit die Markoweigenschaft 1. Ordnung gegeben, da die Wahrscheinlichkeit, welchen Zustand der Prozeß zum Zeitpunkt  $t$  annimmt, nur vom unmittelbar vorher stattfindenden Ereignis abhängt.

Ein Prozeß  $k$ -ter Ordnung wird durch folgende Forderung charakterisiert:

$$(8.11) \quad \begin{aligned} W(\{Y_t = i_t\} \mid \{Y_1 = i_1, Y_2 = i_2, \dots, Y_{t-k}, \dots, Y_{t-1} = i_{t-1}\}) = \\ W(\{Y_t = i_t\} \mid \{Y_{t-k} = i_{t-k}, \dots, Y_{t-1} = i_{t-1}\}) \end{aligned}$$

Dabei sei  $Y_1$  der Wert zu Beginn des Prozesses. Die Wahrscheinlichkeit, welchen Zustand  $i_t$  der Prozeß zum  $t$ -ten Zeitpunkt annimmt, hängt nur vom Verlauf des Prozesses während der letzten  $k$  Zeitpunkte ab. Frühere Zustände spielen keine Rolle mehr. Prozesse, die für diskrete Zeitpunkte betrachtet werden, heißen mit dieser Annahme *Markoffketten  $k$ -ter Ordnung*.

c) Falls zusätzlich die bedingten Wahrscheinlichkeiten für alle Zeitpunkte  $t$  gleich sind, spricht man von einer homogenen (auch stationären) Markoffkette.

Ein Spezialfall ist der unabhängige Prozeß (Markoffkette 0-ter Ordnung), bei dem gilt (independent trial process):

$$W(\{Y_t = i_t\} \mid \{Y_1 = i_1, Y_2 = i_2, \dots, Y_{t-1} = i_{t-1}\}) = W(\{Y_t = i_t\})$$

Dabei hängt das Ergebnis zum Zeitpunkt  $t$  überhaupt nicht von der Vergangenheit ab.

## 8.1 Markoffketten 1. Ordnung mit einer Variablen

Man kann wieder wie bei Gleichung (8.8) die Verteilung für einen bestimmten Zeitpunkt  $t$  mit Hilfe der Übergangswahrscheinlichkeiten und der Anfangsverteilung berechnen.

$$(8.12) \quad p'(t) = p'(1) \prod_{s=2}^t P(s-1, s)$$

Andererseits gilt aber auch:

$$(8.13) \quad p'(t) = p'(1) P(1,t)$$

Infolge der Markoweigenschaft stimmt aber nun  $P(1,t)$  mit dem Produkt:

$\prod_{s=2}^t P(s-1,s)$  überein\*. Zudem kann man jetzt für *theoretische* Analysen die

Anfangsverteilung frei wählen und so Konsequenzen unterschiedlicher Anfangsverteilungen simulieren.

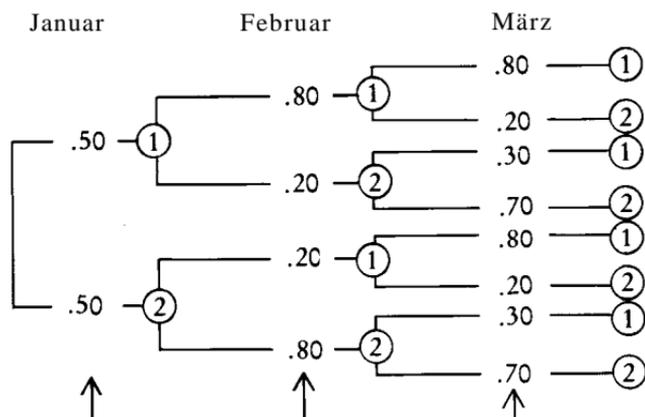
Falls der Prozeß (Zeit-)homogen ist, wird die Gleichung (8.12) noch einfacher. Denn dann gilt:  $P(s-1,s) = P(t-1,t) = P$  und damit

$$(8.14) \quad p'(t) = p'(1) \underbrace{P \dots P}_{2 \dots t} = p'(1) P^{(t-1)}$$

Diese Formel weist Ähnlichkeit zur Berechnung der „Lösung“ (= Trajektorie, Erwartungswertverläufe) von Differenzgleichungssystemen ohne exogenen Input auf (siehe 7.13)

Fortsetzung des Beispiels mit 2 Modifikationen:

Falls der „Wahrscheinlichkeitsbaum“ monatlicher jeweils eintägiger therapeutischer Behandlung wie in der nachfolgenden Figur aussähe, läge Markoffeigenschaft 1. Ordnung vor.



$$\underline{W(\{Y_1 = i_1\}), W(\{Y_2 = i_2\} \mid \{Y_1 = i_1\}) W(\{Y_3 = i_3\} \mid \{Y_1 = i_1, Y_2 = i_2\})}$$

\* Damit kann man Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen weiter auseinanderliegenden Zeitpunkten durch Multiplikation der Matrizen der Übergänge von benachbarten Zeitpunkten gewinnen.

Die Zustandswahrscheinlichkeiten für den März sind je nach Gesundheitszustand im Februar verschieden. Jedoch wirkt sich der jeweilige Gesundheitszustand im Januar nicht mehr auf die Wahrscheinlichkeiten im März aus. Man kann diesen Sachverhalt auch noch anders formulieren. Man kann z.B. folgende Wahrscheinlichkeit berechnen:

$$\mathbb{W}(\{Y_3 = i_3\} \mid \{Y_2 = i_2\})$$

z.B.:  $\mathbb{W}(\{Y_3 = 1\} \mid \{Y_2 = 1\}) = .80$

Da diese (und auch die anderen Möglichkeiten) jeweils gleich

$\mathbb{W}(\{Y_3 = 1\} \mid \{Y_1 = 1, Y_2 = 1\}) = .80$   
 und  $\mathbb{W}(\{Y_3 = 1\} \mid \{Y_1 = 2, Y_2 = 1\}) = .80$   
 sind, ist die Markoffeigenschaft erster Ordnung gegeben (bei nur 3 Zeitpunkten lassen sich höhere Ordnungen nicht mehr überprüfen)

Als Übergangsmatrizen hat man:

$$P(2, 3) = {}_{t_2} \begin{array}{c|c} & t_3 \\ \hline & \begin{array}{cc} .80 & .20 \\ .30 & .70 \end{array} \end{array}$$

$$P(1, 2) = {}_{t_1} \begin{array}{c|c} & t_2 \\ \hline & \begin{array}{cc} .80 & .20 \\ .20 & .80 \end{array} \end{array}$$

Der Prozeß ist nicht homogen, da  $P(2,3) \neq P(1,2)$  mit Anfangsverteilung  $p'(1) = (.5, .5)$  ist.

Der Prozeß soll nun noch weiter durch die Annahme modifiziert werden, daß auch  $P(1,2)$  gleich  $P(2,3)$  ist; zudem sei angenommen, daß der Prozeß mit der gleichen Übergangsmatrix in derselben Weise fort dauert:

$$P_{(t, t-1)} = \begin{array}{c|c} \textcircled{1} & \textcircled{2} \\ \hline \textcircled{1} & \begin{array}{cc} .80 & .20 \\ .30 & .70 \end{array} \\ \textcircled{2} & \end{array}$$

Würde folgende Anfangsverteilung gelten:

$$p(0) = (1, 0)$$

würden alle Personen im Januar gesund geschrieben sein.

Ist für die darauffolgenden Monate entsprechend der angegebenen Übergangswahrscheinlichkeiten mit Krankheitsfällen zu rechnen, kann man den Anteil der verbliebenen „Gesunden“ für jeden Monat herleiten:

Abnahme der Wahr-  
scheinlichkeit,  
„gesund“ „krank“ „gesund“ zu sein

(8.15)

1    0	.80   .20 .30   .70	=	.80   .20	.20	Februar
.80   .20	.80   .20 .30   .70	=	.70   .30	.10	März
.70   .30	.80   .20 .30   .70	=	.65   .35	.05	April
.65   .35	.80   .20 .30   .70	=	.625   .375	.025	Mai

Diese Ergebnisse hätten aber auch nach (8.14) über die Potenzen von  $P$  berechnet werden können:

$$P^2 = \begin{bmatrix} .70 & .30 \\ .45 & .55 \end{bmatrix} \quad P^3 = \begin{bmatrix} .65 & .35 \\ .525 & .475 \end{bmatrix} \quad P^4 = \begin{bmatrix} .625 & .375 \\ .5625 & .4375 \end{bmatrix}$$

Die Verteilung für Mai ist:  $p'(4) = p'(0) \cdot P^4 = \begin{bmatrix} .625 & .375 \end{bmatrix}$

Bei näherer Betrachtung der Potenzen von  $P$  fällt auf, daß pro Spalte die Differenzen zwischen den Übergangswahrscheinlichkeiten bei zunehmenden Exponenten immer kleiner werden. Daher liegt es nahe, zu fragen, ob bei zunehmendem Potenzieren eine Übergangsmatrix mit gleichen Zeilen resultiert.

Im Beispiel ist:

$$P^5 = \begin{bmatrix} .6062 & .3938 \\ .5906 & .4094 \end{bmatrix} \quad \text{oder} \quad P^8 = \begin{bmatrix} .5977 & .4023 \\ .6016 & .3984 \end{bmatrix}$$

Schon bei einer Potenz von 8 erhält man eine Matrix, deren Zeilen fast gleich  $\begin{bmatrix} .60 & .40 \end{bmatrix}$  sind.

Allgemein gilt für Übergangsmatrizen, die bei irgendeiner Potenz nur noch positive Elemente haben, (so daß der Übergang von jedem zu jedem anderen Zustand möglich ist):

$$(8.16) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} P^t = \begin{bmatrix} \pi' \\ \dots \\ \pi' \end{bmatrix} \quad \text{wobei } \pi' \text{ ein Zeilenvektor ist} \\ \text{mit } \sum_{i=1}^K \pi_i = 1 \text{ und } 0 < \pi_i < 1$$

Die Kenntnis des gegenwärtigen Zustands des Prozesses bietet keine zusätzliche Information für die Prognose eines in weiter Zukunft liegenden Zustandes (Für jemand, der jetzt gesund geschrieben ist, gilt die gleiche Wahrscheinlichkeit, in ferner Zukunft gesund geschrieben zu sein wie für einen jetzt gerade krank geschriebenen).

Ferner stellt der Vektor  $\pi'$  die Verteilung dar, die ein konstant wirkender Prozeß nicht mehr ändert (stationäre Verteilung, bzw. Gleichgewichtszustand).

Man kann zeigen (Ferschl, 1970), daß

$$(8.17) \quad \pi' = \pi' P$$

ist.

Für das Beispiel ist:  $\pi' = (.60 \ .40)$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline .60 & .40 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline .80 & .20 \\ \hline .30 & .70 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline .60 & .40 \\ \hline \end{array}$$

Aus der Relation (8.17) läßt sich die stationäre Verteilung auch rechnerisch (unter Berücksichtigung, daß  $\sum \pi_i = 1$  ist) sehr einfach bestimmen. Es gibt noch eine dritte Interpretation für  $\pi$ . Läuft ein solcher Prozeß ab, verweilt eine Person einen bestimmten Anteil der Zeitpunkte in einem der Zustände.  $\pi$  gibt dann (bei  $t \rightarrow \infty$ ) den Anteil der Zeitpunkte an, zu denen sich die Person im Zustand  $i$  aufgehalten hat.

Eine weitere Interpretation des Prozesses mit Hilfe von  $\pi$  bezieht sich auf die „Erstrückkehrzeit“. Darunter versteht man die Zeit  $s$ , die zwischen dem Verlassen des Zustandes  $i$  zum Zeitpunkt  $t$  und der Rückkehr nach  $i$  zum Zeitpunkt  $t+s$  verstreicht.

Die mittlere Rückkehrzeit für den Zustand  $i$  ist:

$$\mu_i = \frac{1}{\pi_i}$$

Für das Beispiel ist:

$$\mu_G = \frac{1}{.60} = 1.66$$

$$\mu_K = \frac{1}{.40} = 2.50$$

d.h.: falls jemand krank geschrieben wird, dauert es im Schnitt 1.66 Monate bis er wieder gesund wird.

Wir haben mit diesen Interpretationen von  $\pi$  einige wichtige Aspekte herausgegriffen. Cox, D. R. & Miller, H. D. (1968), Kemeny & Snell (1965), Ferschl (1970) geben weitere Details und Beweise.

In der Literatur sind verschiedene *Arten von Markoffketten (bzw. Zuständen)* bekannt geworden.

#### a) Reguläre oder ergodische Markoffketten

Kemeny & Snell (1965) bezeichnen solche Markoffketten als regulär, bei denen Übergänge von allen zu allen Zuständen bei irgendeiner Potenz von  $P$  möglich sind.

Die Aussage (8.16) gilt nur für reguläre Ketten. In unserem Beispiel ist schon für die erste Potenz der Matrix  $P$  (also für  $P$  selbst) jeder Übergang möglich. Deshalb ist diese Markoffkette regulär.

#### b) Absorbierende Ketten

Falls mindestens ein Zustand existiert, der zwar erreicht, aber nicht mehr verlassen werden kann, heißt die Kette absorbierend und der Zustand selbst ebenso.

Gerade bei bestimmten theoriegeleiteten Modellen treten solche absorbierende Zustände immer wieder auf. Etwa in der Lerntheorie (siehe Bower & Trabasso (1964), Simon & Newell (1974) oder Greeno (1974) oder aber bei Modellen zum moralischen Urteil nach Kohlberg (Murray et al. (1970)).

#### *Beispiel* (moralisches Urteil)

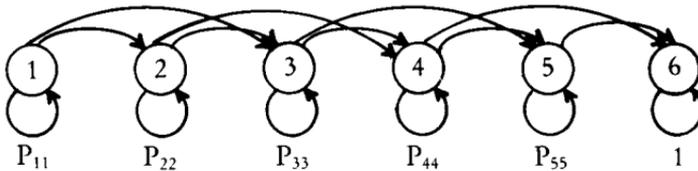
Nach Kohlberg gibt es 6 Stufen der moralischen Entwicklung. Hat jemand eine bestimmte Stufe erreicht, kann er nicht mehr auf eine niedrigere Stufe zurückfallen. Damit ist die oberste Stufe ein absorbierender Zustand. Die Übergangsmatrix von einem Zeitpunkt zum nächsten könnte dann folgende Form haben (s. S. 407 o.).

Man kann die Erreichbarkeit von bestimmten Stufen auch in der Form von gewichteten Graphen darstellen. Dabei treten die Wahrscheinlichkeiten als Gewichte auf (s. Ferschl, 1970; und mit speziellem Bezug zu entwicklungspsychologischen Stufentheorien s. Singer & Spilerman, 1979a).

		t + 1					
		1	2	3	4	5	6
t	Stufe 1	$P_{11}$	$P_{12}$	$P_{13}$	0	0	0
	Stufe 2	0	$P_{22}$	$P_{23}$	$P_{24}$	0	0
	Stufe 3	0	0	$P_{33}$	$P_{34}$	$P_{35}$	0
	Stufe 4	0	0	0	$P_{44}$	$P_{45}$	$P_{46}$
	Stufe 5	0	0	0	0	$P_{55}$	$P_{56}$
	Stufe 6	0	0	0	0	0	1

Dabei wurde noch zusätzlich angenommen, daß in einer Zeitperiode nicht mehr als 2 höhere Stufen erreicht werden können.

Für das Kohlberg-Beispiel ist der Graph:



Es können bei diesen Ketten bezüglich der Zeit bis zur Absorption eine Fülle von Fragestellungen behandelt werden:

- Wie sieht die Verteilung dieser Zeit bei bestimmten Startzuständen aus?
- Wie groß ist die durchschnittliche Zeit bis zur Absorption?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit in einem bestimmten Zustand absorbiert zu werden, wenn mehrere Absorptionszustände möglich sind?

Zur Beantwortung solcher klassischer Fragen gibt es eine Reihe von ausgearbeiteten Theorien (siehe Cox & Miller (1968), Ferschl (1970)).

Neben diesen beiden Arten von Ketten gibt es noch weitere Spezialfälle (s. a. Ferschl (1970)).

## 8.2 Markoffketten 2. Ordnung (1 Variable)

Bei Markoffketten 1. Ordnung „beeinflusst“ nur der unmittelbar letzte Zustand vor dem Übergang den Übergang zum nächsten Zustand. Das gilt unabhängig von der Verweilzeit in einem bestimmten Zustand. Falls „mehr Vergangenheit“ berücksichtigt werden soll, muß man zu Ketten höherer Ordnung übergehen. Dabei kann die gewohnte Matrixdarstellung beibehalten werden. Es muß nur die Zahl der Zustände erweitert werden. Das soll an der Erweiterung einer Kette 1. Ordnung zu einer Kette 2. Ordnung erläutert werden

(siehe Anderson (1979)). Markoffketten höherer Ordnung treten speziell bei sozialen Interaktionsprozessen auf (Revenstorf & Vogel, 1979).

Es seien ursprünglich  $K$  Zustände gegeben; so kann man  $K^2$  neue Zustände wie folgt definieren:

$t - 2$	1 ... 1	2 ... 2	.	..	K... K	Quellen der Übergänge
$t - 1$	1 ... K	1 ... K	.	.	1... K	
neue Zustände	... K K+1 ... 2K ...					... K <sup>2</sup>

Das gleiche gilt für die Ziele der Übergänge. Damit geht die Zeitsequenz von je 2 Zeitpunkten in die Definition der neuen Zustände mit ein.

### Fortsetzung des Beispiels:

Gegeben waren jeweils 2 Zustände („gesund“, „krank“). Auf Grund von Tests (siehe später) bzw. theoretischen Überlegungen könnte man zum Schluß kommen, daß für Übergangswahrscheinlichkeiten nicht nur der letzte, sondern die beiden letzten Zustände berücksichtigt werden müssen:

In Tabellenform (Matrixform):

$t-2$	$t-1$	1	2
1	1	.90	.10
1	2	.40	.60
2	1	.70	.30
2	2	.20	.80

Bei einer Kette 1. Ordnung müßten die beiden Teiltabellen übereinstimmen.

Falls sie nicht übereinstimmen, ist das ein Indiz für einen Prozeß 2. Ordnung.

Diese Matrixform ist nicht quadratisch wie das etwa bei der Übergangsmatrix  $P$  der Fall war. Das kann man aber leicht durch eine andere Anordnungsart erreichen:

		$t-1$	1	1	2	2																		
		$t$	1	2	1	2																		
$t-2$	$t-1$																							
1	1		.90	.10	0	0	=	<table border="1"> <tr> <td><math>P_{111}</math></td> <td><math>P_{112}</math></td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>0</td> <td><math>P_{121}</math></td> <td><math>P_{122}</math></td> </tr> <tr> <td><math>P_{211}</math></td> <td><math>P_{212}</math></td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>0</td> <td><math>P_{221}</math></td> <td><math>P_{222}</math></td> </tr> </table>	$P_{111}$	$P_{112}$	0	0	0	0	$P_{121}$	$P_{122}$	$P_{211}$	$P_{212}$	0	0	0	0	$P_{221}$	$P_{222}$
$P_{111}$	$P_{112}$	0	0																					
0	0	$P_{121}$	$P_{122}$																					
$P_{211}$	$P_{212}$	0	0																					
0	0	$P_{221}$	$P_{222}$																					
1	2		0	0	.40	.60																		
2	1		.70	.30	0	0																		
2	2		0	0	.20	.80																		

Dabei sind wieder alle Zeilensummen gleich 1. Verschiedene Übergangswahrscheinlichkeiten müssen Null gesetzt werden, da nur jene Übergänge möglich sind, bei denen die Zustände zum Zeitpunkt  $t-1$  übereinstimmen.

Die Verteilungen für bestimmte „Zeitpunkte“ haben dann ebenfalls  $K^2$  Zustände. Die Wahrscheinlichkeiten für Zeitpunkt  $t$  geben an, zum Zeitpunkt  $t-1$  im Zustand  $i$  und zum Zeitpunkt  $t$  in  $j$  zu sein:

$$p'(t) = (p_{11}(t), \dots, p_{ij}(t), \dots, p_{KK}(t))$$

Die Übergangsmatrix  $P$  ist eine  $K^2 \times K^2$  Matrix, deren Elemente zur Hälfte Nullen sind.

Durch diese Umformulierung können die Ketten 2. Ordnung formal gleich behandelt werden wie die Ketten 1. Ordnung. Auch für solche Matrizen kann man den Vektor  $\pi$  berechnen. Er repräsentiert die Wahrscheinlichkeiten, daß jemand bei hinreichend lange dauerndem Prozeß zum Zeitpunkt  $t-1$  in  $i$  und zum Zeitpunkt  $t$  in  $j$  ist.

Weitere Beispiele finden sich bei Anderson (1954, S. 56).

### 8.3 Markoffketten mit mehreren Variablen

Auch die Erweiterung auf mehrere Variable bringt keine grundsätzlichen Schwierigkeiten. Es wird wiederum der Zustandsraum erweitert.

*Beispiel* „Sehen - Kaufen“ nach Anderson (1954)

Die beiden Variablen besitzen folgende Ausprägungen

A: Sehen einer Warenanzeige	ja	:	1
	nein	:	2
B: Kauf einer Ware	ja	:	1
	nein	:	2

Für jeden Zeitpunkt gibt es eine Verteilung:  $p'(t) = (p_{11}^{(t)} p_{12}^{(t)} p_{21}^{(t)} p_{22}^{(t)})$ .

wobei  $p_{12}(t)$  bedeutet: Wahrscheinlichkeit, zum Zeitpunkt  $t$  eine Anzeige für die Ware gesehen zu haben ( $A=1$ ) und die Ware nicht gekauft zu haben ( $B=2$ ).

$$p_{12}(t) = W(\{A=1, B=2\})$$

Zudem gibt es die Übergangsmatrix:

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 11 & 12 & 21 & 22 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 11 \\ 12 \\ 21 \\ 22 \end{matrix} & \begin{bmatrix} p_{11,11} & p_{11,12} & p_{11,21} & p_{11,22} \\ p_{12,11} & p_{12,12} & p_{12,21} & p_{12,22} \\ p_{21,11} & p_{21,21} & p_{21,21} & p_{21,22} \\ p_{22,11} & p_{22,12} & p_{22,21} & p_{22,22} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad \text{wobei}$$

$p_{12,21}$  = Wahrscheinlichkeit, zum Zeitpunkt  $t$  eine Anzeige gesehen, aber nicht die Ware gekauft zu haben und danach zum Zeitpunkt  $t + 1$  eine Anzeige nicht gesehen, aber die Ware gekauft zu haben.

$t + 1$

Zu den oben besprochenen Analysen könnte man noch eine weitere anfügen, in der untersucht wird, ob die Veränderungen des *Seh-* und *Kaufverhaltens* unabhängig sind. Bei Unabhängigkeit der Veränderung müßte gelten:

$$p_{ij,hk} = p_{ih}^A \cdot p_{jk}^B$$

Im Beispiel ist:

$$\begin{matrix} p_{ih}^A & \text{die Übergangswahrscheinlichkeiten für Sehen (A) und} \\ & \text{die entsprechende Übergangswahrscheinlichkeit für} \\ p_{jk}^B & \text{Kauf (B)} \end{matrix}$$

Für solche Fragestellungen hat Anderson (1954) ebenfalls einen Test entwickelt.

## 8.4 Schätzung der Übergangswahrscheinlichkeiten

Es sind 3 Fälle zu unterscheiden:

- Stehen sehr lange Beobachtungsreihen ( $T \rightarrow \infty$ ) bei einer Person ( $N = 1$ ) zur Verfügung (Mikrodaten), können die Schätzer von Bartlett (1951) Verwendung finden (siehe auch Anderson & Goodman (1957)).
- Stehen Daten von *vielen* Personen zur Verfügung, bei denen jeweils die vollen Sequenzen bekannt sind, liegen ebenfalls Mikrodaten vor.
- Erhebt man von mehreren Personen nicht unmittelbar die Sequenzen, sondern nur die Häufigkeiten pro Zeitpunkt, liegen Makrodaten vor.

Für die Mikrodaten-Situation haben Anderson & Goodman (1957) Maximumlikelihood-Schätzer entwickelt. Lee, Judge & Zehner (1977) referieren diese und stellen zudem Bayes- und Makrodatenschätzer vor.

Der Einfachheit halber werden wir uns hier mit einigen ML-Schätzern für Mikrodaten begnügen. Hat man folgende Beobachtungen  $y_{vt}$  gemacht, ( $t = 1, \dots, T$  und  $v = 1, \dots, N$ ) können die Werte  $y_{vt}$  selbst jeweils die Nummer eines Zustandes  $i$  ( $i = 1, \dots, K$ ) annehmen.

Aus diesen Sequenzen kann man folgende Häufigkeiten berechnen:

$n_{ij}(t)$  Anzahl der Personen, die zum Zeitpunkt  $(t-1)$  in  $i$  und zum Zeitpunkt  $t$  in  $j$  sind.

#### 8.4.1 bei Zeitinhomogenität

Es wird nicht vorausgesetzt, daß alle Übergangswahrscheinlichkeiten für die verschiedenen Zeitpunkte gleich sind. Dann erhält man folgende ML-Schätzer:

$$\hat{p}_i(t) = \frac{n_i(t)}{N} \quad i = 1, \dots, K; t = 1, \dots, T$$

$$\hat{p}_{ij}(t-1, t) = \frac{n_{ij}(t)}{n_i(t-1)} \quad i, j = 1, \dots, K; t = 2, \dots, T$$

Dabei ist  $n_{i\cdot}(t-1) = \sum_{j=1}^K n_{ij}(t)$  (Zeilensumme)

$$= \sum_{l=1}^K n_{li}(t-1) \text{ (Spaltensumme)}$$

#### 8.4.2 bei Zeithomogenität

Die Übergangswahrscheinlichkeiten werden als konstant über die Zeitpunkte hinweg vorausgesetzt.

Dann gilt:

$$\hat{p}_i = \frac{n_i}{N} \quad \text{wobei: } n_{ij} = \sum_{t=2}^T n_{ij}(t)$$

$$\hat{p}_{ij} = \frac{n_{ij}}{n_i} \quad n_i = \sum_{j=1}^K n_{ij}$$

Die Schätzer sind approximativ normal verteilt, so daß man leicht Konfidenzintervalle angeben kann. Streuung und Kovarianzen der Schätzer finden sich auch bei Anderson (1979).

## 8.5 Tests

Testmöglichkeiten sollten zumindest für einige wichtige Fragestellungen angegeben werden:

a) Spezielle Wahrscheinlichkeiten:

Sind die Wahrscheinlichkeiten gleich speziellen Werten? (etwa in homogenen Ketten)

$$H_0 : p_{ij} = p_{ij}^0; \quad \text{wobei } p_{ij}^0 \text{ ein festgelegter Wert sein kann}$$

b) Zeithomogenität: Sind die Übergangswahrscheinlichkeiten konstant für die verschiedenen Zeitpunkte?

$$H_0 : p_{ij}(t-1, t) = p_{ij}(s-1, s) \quad \begin{array}{l} s, t = 2, \dots, T \\ s \neq t \end{array}$$

c) Ordnungshypothese: Ist eine Markoffkette eine 1. oder 2. Ordnung?

$$H_0 : p_{ijl}(t-2, t-1, t) = p_{ijl}(t-1, t) \text{ für alle passenden } t$$

Diese Fragestellung läßt sich erweitern auf beliebige Ordnungen. Ein wichtiger Spezialfall dabei ist, ob es sich um einen Prozeß 0-ter Ordnung handelt (Unabhängigkeit)

d) Gruppenhomogenität: Gelten für verschiedene Gruppen (z.B. Männer, Frauen) gleiche Übergangswahrscheinlichkeiten?

$$H_0 : p_{ij}^{(m)} = p_{ij}^{(w)} \quad \begin{array}{l} m : \text{für „männlich“} \\ w : \text{für „weiblich“} \end{array}$$

Für diese und weitere Hypothesen haben Anderson & Goodman (1957) sowohl gewöhnliche Anpassungstests (Pearson) als auch die Likelihood-verhältnistests entwickelt. Wir haben die Teststatistiken für die 4 Arten der Fragestellungen in der Tabelle auf S. 413 zusammengestellt.

## 8.6 Spezielle Probleme und Lösungen bei der Anwendung von Markoffketten

Im Rahmen von wiederholten Messungen an verschiedenen Personen wird vorausgesetzt, daß für jede Person die gleichen Übergangswahrscheinlichkeiten gelten. (Eine Annahme, die auch bei einem gewöhnlichen Regressionsmodell vorliegt, da jeweils unterstellt wird, daß die Regressionskoeffizienten für alle Personen die gleichen sind.)

		$\chi^2$ -Verteilte Teststatistik	Freiheits- grade
Spezielle Wahrschein- lichkeiten	$H_0: p_{ij} = p_{ij}^0$ $j = 1, \dots, K$	$x_i = n_i \sum_{j=1}^K \frac{(\hat{p}_{ij} - p_{ij})^2}{p_{ij}}$	$K - 1$
	$H_0: p_{ij} = p_{ij}^0$ $i = 1, \dots, K$ $j = 1, \dots, K$	$\sum_{i=1}^K x_i$	$K(K - 1)$
Zeithomo- genität	$H_0: p_{ij}(t-1, t) = p_{ij}$ für $i, j = 1, \dots, K$ $t = 2, \dots, T$	$\sum_{t=2}^T \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K n_i(t-1) \frac{(\hat{p}_{ij}(t-1, t) - \hat{p}_{ij})^2}{\hat{p}_{ij}}$	$K(K - 1)$ $(T - 2)$
Ordnung der Kette (im Bei- spiel: Kette st 1. Ord.) Voraus. : Zeit- homogenität	$H_0: p_{ijl} = p_{jl}$ $i, j, l = 1, \dots, K$	$\sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K \sum_{l=1}^K n_{ij} \frac{(\hat{p}_{ijl} - \hat{p}_{jl})^2}{\hat{p}_{jl}}$	$K(K - 1)^2$
Gruppen- homogenität (unter Vor- aussetzung von Zeithomogen.) g: Anzahl Gruppen	$H_0: p_{ij}^{(h)} = p_{ij}^{(h')}$ $i, j = 1, \dots, K$ $h, h' = 1, \dots, g$	$\sum_{h=1}^g \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K n_i^{(h)} \frac{(\hat{p}_{ij}^{(h)} - \hat{p}_{ij})^2}{\hat{p}_{ij}}$ wobei $\hat{p}_{ij}^{(h)}$ für die Gruppen ein- zeln, $\hat{p}_{ij}$ für alle Gruppen ge- meinsam geschätzt wird. $n_i^{(h)}$ Anzahl im i ten Zustand in h- ter Gruppe	$(g - 1) \cdot$ $K(K - 1)$

Die Abkürzungen für die Schätzer  $\hat{p}_{ij}$  usw. stimmen mit den oben eingeführten überein.

Bei der Analyse mit Markoffkettenmodellen konnte immer wieder die Beobachtung gemacht werden, daß (8.17) nicht gilt:

$$(8.17) \quad P(1, t) = \prod_{i=2}^t P(i-1, i) \quad = \quad P^{(t-1)}$$

bei Homogenität

(siehe z.B. Singer & Spilerman\*, 1976; Coleman, 1964). Dabei waren die Diagonalelemente der Matrix  $P^{(t-1)}$  fast immer kleiner als die Elemente der Matrix:  $P(1,t)$ :

$$(8.18) \quad p_{ii}^{(t-1)} < p_{ii}(1,t); \quad p_{ii}^{(t-1)} \in P^{(t-1)}$$

Diese Beobachtung kennen wir aber schon vom obigen Beispiel. Die Gleichheit (8.17) muß ohnehin nur gelten, falls die Markoffeigenschaft gegeben ist. Das hieße dann allerdings, daß in Anwendungen selten Markoffeigenschaft zu erwarten wäre, und daß damit empirische Analysen mit Hilfe von Markoffmodellen wegen nicht erfüllbarer Bedingungen aufgegeben werden müßten.

Dieses Phänomen, so fanden Blumen, Kogan & McCarthy (1955), kann aber auch andere Gründe haben. Es kann sein, daß für zwei Gruppen von Personen jeweils eine Markoffkette (etwa 1. Ordnung) mit nicht identischen Übergangswahrscheinlichkeiten zutrifft. Analysiert man fälschlicherweise beide Gruppen zusammen, betrachtet man eine *Mischung* von Prozessen, für die dann sowohl die etwa vorher vorhandene Homogenität als auch die Markoffeigenschaft nicht mehr gilt. Coleman (1964) wiederum konnte nachweisen, daß dieses Phänomen auch durch *Meßfehler* zustande kommen kann. Das heißt: es gilt zwar für die untersuchte Variable voll die Markoffeigenschaft; da aber die Variable nicht fehlerfrei gemessen werden kann, gilt sie nicht mehr für die meßfehlerbehaftete Variable.

Ein weiterer Grund für die Abweichung von den Markoffannahmen kann auch darin gesehen werden, daß sich die Bedeutung bzw. die Attraktivität der Zustände und damit der Übergangswahrscheinlichkeiten im Laufe der Zeit ändern: bei verschiedenen Berufsgruppen in Mobilitäts-, bei Orten im Rahmen von Wanderungsstudien (Ginsberg, 1971), oder bei sozialpsychologischen Experimenten (Conlisk (1976)).

Für Markoffmodelle gilt, daß die Wahrscheinlichkeit, in einer Klasse länger als eine bestimmte Zeit  $t$  zu bleiben, negativ-exponentiell verteilt ist. Das bedeutet, daß die Wahrscheinlichkeit, sehr lange in einem bestimmten Zustand zu bleiben, mit zunehmender Zeit gegen 0 geht. Dies widerspricht aber vielen in den Sozialwissenschaften betrachteten Prozessen (McGinnis (1968)). Oft trifft zu: „Je länger jemand in einem Zustand war, desto eher bleibt er.“ McGinnis bezeichnete dieses Phänomen als das: „Gesetz der *kumulativen Trägheit*“ (Inertia).

Ein weiteres Problem bei der Anwendung von Markoffketten ist die *Diskrettheit des* Zeitparameters, da ja Übergänge jederzeit stattfinden können (Singer & Spilerman (1976)).

---

\* Singer & Spilerman beziehen sich im Gegensatz zu (8.17) nicht auf die Wahrscheinlichkeiten sondern auf deren Schätzer.

Im Folgenden sollen einige Ansätze besprochen werden, die als Lösungen für die obigen Probleme angesehen werden können.

## 8.7 Einführung unabhängiger Variablen

### 8.7.1 Subgruppenmodelle

Die Gesamtheit wird in mehrere Subgruppen aufgeteilt, für die dann eventuell die Markoffeigenschaften gelten könnten.

### 8.7.2 Übergangswahrscheinlichkeiten als Funktionen von unabhängigen Variablen

Die Aufteilung in mehrere Subgruppen ist in der Praxis nur beschränkt möglich. Je mehr Gruppen es gibt, desto weniger Häufigkeiten stehen für das Schätzen der Wahrscheinlichkeiten zur Verfügung. Deshalb realisierte Spilerman (1972) dann einen Vorschlag von Anderson (1954).

$$(8.19) \quad p_{ij} = \mu_{ij} + b_{ij1} X_1 + \dots + b_{ijm} X_m$$

Die Übergangswahrscheinlichkeiten werden als lineare Funktion eines Globalparameters  $\mu_{ij}$  und von Einflüssen der Eigenschaften der verschiedenen Personen angesehen. Dieses Modell läßt nicht nur zu, die Populationsheterogenität sondern auch das Problem des Attraktivitätswandels der Zustände zu berücksichtigen. Das geschieht, indem in manchen der unabhängigen Variablen die Eigenschaften der Zustände operationalisiert werden\*, (siehe Horan (1976) und Ginsberg (1972)), wobei Ginsberg (1972) allerdings kein lineares Modell sondern ein logistisches\*\* verwendet hat.

$$\ln \frac{p_{ij}}{1 - p_{ij}} = \mu_{ij} + \sum_{e=1}^m b_{ije} X_e$$

Darüber hinaus ist auch die Verwendung von log-linearen oder Probitmodellen möglich.

---

\* Falls in den unabhängigen Variablen nur die Eigenschaften von Zielzuständen (j) operationalisiert werden, die nicht unterschiedliche Effekte für verschiedene Ursprünge (i) sind, kann angenommen werden, daß für alle i die Effekte gleich sind. Dann kann statt  $b_{ij}$ , einfach  $b_j$ , gesetzt werden.

\*\* Ronning (1980) hat für Makrodaten ebenfalls ein logistisches Modell mit den entsprechenden Schätzproblemen vorgestellt.

### 8.7.3 Interaktive Markoffketten

Speziell für Problemstellungen, bei denen das Verhalten, einen Zustand zu wechseln, vom Verhalten anderer Personen abhängt, wurde das „interaktive“ Modell entwickelt (Conlisk (1976)). Conlisk zeigt die Brauchbarkeit des Modells an mehreren Beispielen mit sozialpsychologischen Problemstellungen. Dabei wird angenommen, daß die Wahrscheinlichkeit  $p_{ij}$  zerlegt werden kann nach :

$$p_{ij} = (a_{ij} + b_{ij} * p_i) / S_j \quad S_j \text{ ist eine Normierungsgröße}$$

Die Übergangswahrscheinlichkeit ist einmal bestimmt durch einen konstant bleibenden Überganganteil  $a_{ij}$  und durch einen Anteil, der von der Randwahrscheinlichkeit  $p_i$  abhängt. Ist  $b_{ij}$  negativ, wird die Übergangswahrscheinlichkeit kleiner, wenn die Randwahrscheinlichkeit hoch besetzt ist („Exklusivitätswanderung“); ist  $b_{ij}$  positiv, steigt die Wahrscheinlichkeit eines Übergangs jeweils in einen stark besetzten Zustand („Nachahmungswanderung“).

Im wesentlichen ist dieses Modell ein Spezialfall von 8.7.2 wobei hier die Attraktivität bzw. Nichtattraktivität der Zustände durch die Randwahrscheinlichkeiten operationalisiert wird.

## 8.8 Einführung latenter Klassen

### 8.8.1 Mover-Stayer-Modell

Während bei 8.7.1 aufgrund der Kenntnis von Variablenwerten a priori-Gruppen gebildet werden können, für die dann u.U. die Markoffeigenschaft gilt, liegt hier eine anders geartete Situation vor. Es sollen Gruppen a posteriori erschlossen werden. Blumen, Kogan & McCarthy (1955) untersuchten Mobilitätsvorgänge. Sie schlugen für eine adäquatere Beschreibung der Prozesse vor, die Personen in zwei Gruppen zu teilen. Eine Gruppe („stayer“) bleibt tendenziell immer im gleichen Zustand. Ihr Anteil an der Gesamtheit für Zustand  $i$  sei  $S_i$ . Sie besitzt eine besonders einfache Übergangsmatrix: die Einheitsmatrix  $1$ . Die andere Personengruppe („mover“) bewegt sich nach gleichen Übergangswahrscheinlichkeiten von Zeitpunkt zu Zeitpunkt. Ihr Anteil an der Gesamtheit beträgt pro Zustand  $i$  den Wert  $(1 - S_i)$ .

Es läßt sich nicht beobachten, ob eine Person ein Mover oder ein Stayer ist. Diese Eigenschaft muß indirekt erschlossen werden. Es handelt sich hier um ein Modell mit 2 latenten Klassen, für das Goodman (1961) spezielle Schätzmethoden entwickelt hat. Erweiterungen auf mehrere latente Klassen wurden von Spilerman (1972) durchgeführt.

### 8.8.2 Generelles Modell latenter Zustände

Während im Mover-Stayer-Modell die Zustände beobachtbar bleiben, aber 2 latente Gruppen gefunden werden müssen, innerhalb derer dann jeweils ein Markoffprozeß abläuft, werden in diesem Modell die Zustände neu etabliert. Die latenten Zustände sind über die „Responsewahrscheinlichkeiten (RW)“ mit den manifesten (gemessenen) Zuständen verknüpft. Die RW geben an, mit welcher Wahrscheinlichkeit jemand auf einem manifesten Zustand zu finden ist, falls er sich in einem bestimmten latenten Zustand befindet. über diese RW kann man dann versuchen, zu interpretieren, welche Bedeutung den latenten Klassen zukommt. Ähnliche Interpretationsvorgänge finden sich z.B. bei der Faktorenanalyse (mit manifesten Items). Deren Ladungen werden als latente Variablen (Faktoren) interpretiert. Von primärem Interesse sind aber die Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen den latenten Klassen.

Eine Fülle solcher Modelle werden in Wiggins (1973) und in Lazarsfeld & Henry (1968) vorgestellt. Die Vielzahl der Modelle ist auf verschiedene Annahmen bezüglich der Randwahrscheinlichkeiten, der latenten Übergangswahrscheinlichkeiten und der Zahl der betrachteten Zeitpunkte zurückzuführen. Für jeden Modelltyp werden ebenfalls die Identifikationsmöglichkeiten untersucht, um Response- und Übergangswahrscheinlichkeiten berechnen zu können. Sind die Parameter identifiziert, können sie mit Methoden von Goodman (1974) geschätzt werden.

Das Modell latenter Zustände kann auch als „Fehlermodell“ interpretiert werden, in dem die latenten Zustände als wahre und die manifesten als die entsprechenden fehlerbehafteten Zustände betrachtet werden. Die Responsewahrscheinlichkeiten geben an, mit welcher Wahrscheinlichkeit jemand in den richtigen oder falschen Zustand klassifiziert wird (vergleiche auch mit dem Alles-oder-nichts-Modell weiter oben). Solche Modelle sind näher bei Murray et al. (1971) dargestellt.

## 8.9 Weitere Modelle: zeitkontinuierliche Markoffprozesse

Falls der Zeitparameter kontinuierlich ist, spricht man von Markoffprozessen (z.B. Cox & Miller, 1968). Man kann die Beschreibung des Prozesses dann nicht mehr wie im diskreten Fall mit einer Differenzgleichung (vgl. 8.5) sondern nur noch mit einer Differentialgleichung vornehmen:

$$(8.19) \quad \frac{dp'(t)}{dt} = p'(t)Q \quad 0 < t < +\infty$$

Die Elemente von  $Q$  werden als Übergangsraten bzw. Intensitäten bezeichnet.

Sie sind keine Wahrscheinlichkeiten. Zwar erhält man als Lösung für die Differenzgleichung (8.5)

$$p'(t) = p'(0) P^t = p'(0)P(0,t) \quad (t = 0,1,2, \dots)$$

Diese Gleichung gibt die Zustandswahrscheinlichkeiten zum *diskreten* Zeitpunkt  $t$  in Abhängigkeit vom Anfangszustand  $t=0$  an. Da im diskreten Modell die Zeit „Löcher“ hat, sollte man das kontinuierliche Modell bevorzugen. Die entsprechende Lösung der Differentialgleichung (8.19) ist

$$(8.20) \quad p'(t) = p'(0)e^{Qt}$$

$$\text{wobei gilt:} \quad e^{Qt} = I + tQ + \frac{t^2}{2!}Q^2 + \frac{t^3}{3!}Q^3 + \dots$$

$$q_{ij} > 0 \quad (i \neq j) \quad \text{und} \quad q_{ii} = - \sum_{j=1}^K q_{ij}$$

Sie gibt die Zustandswahrscheinlichkeiten für *jeden beliebigen* Zeitpunkt  $t$  in Abhängigkeit vom Anfangszustand  $t = 0$  an. Identifikation und Schätzung der Intensitäten sind z.Z. noch nicht voll gelöst. Für entsprechende Überlegungen bei nichtprobabilistischen Modellen verweisen wir auf Kapitel 9.

Zeitkontinuierliche Markoffprozesse finden sich meist z.Z. nur in theoretischen Analysen (Barholomew, 1973; Laming, 1973; Schweitzer, 1978). Bei Coleman (1964, 1968, 1980) werden die Übergangintensitäten  $q_{ij}$  - wie die Übergangswahrscheinlichkeiten in (8.19) - in additive Effekte zerlegt:

$$(8.20) \quad q_{ij} = \mu_{ij} + b_{ij1}X_1 + \dots + b_{ijm}X_m$$

Dabei können die  $x$ -Variablen als die externen Einflüsse auf die Übergangsraten und die Koeffizienten  $b_{ijk}$  als die Stärke dieser Einflüsse interpretiert werden.

Coleman sieht darin die Möglichkeit einer kausalen Interpretation (Coleman (1966)). Einen ähnlichen Weg haben Tuma et al. (1979) eingeschlagen. Andress (1980) bringt Beispiele für praktische Anwendungen.

Semimarkoffprozesse ermöglichen *es, die Zeitpunkte des Wechsels der Zustandes und Übergänge in andere Zustände zu entkoppeln*. Dadurch ist es auch möglich, Konzeptionen wie das „Gesetz der Kumulativen Trägheit“ (siehe oben) mit zu berücksichtigen (siehe z.B.: Ginsberg (1971)). Anwendungen in Entscheidungsprozessen bringt Howard (1971).

## 9. Multivariate „Zeitreiben“- und Panelanalyse mit zeitkontinuierlichen Modellen

### 9.1 „Zeitreihenanalyse“ ( $N=1$ , $T \gg M$ , $M > 1$ )

Bei der Analyse von Zeitreihen kann man auf verschiedene Modellvorstellungen zurückgreifen, die entweder eher *datenorientiert* (wie z.B. die Arima-Modelle) oder eher *theorieorientiert* (wie z.B. die zeitdiskreten oder zeitkontinuierlichen Systemmodelle) sind (s.a. Lewandowski, 1980). Bei der Analyse multivariater Zeitreihen mit rein datenorientierten Modellen (Akaike, 1974, 1976; Hannan, 1970, 1976; Priestley, 1978) sind die Identifikationsschwierigkeiten noch erheblich größer als bei den einfachen Arima-Modellen. Sie dürften noch weiter zunehmen, wenn man zusätzliche Erweiterungen in die Raumdimension vornimmt. Solche Modelle könnten besonders für ökologische Fragestellungen, die Veränderungen von Phänomenen über Zeit und Raum zum Untersuchungsziel haben, von Interesse sein (Pfeifer & Deutsch, 1980).

Wir wollen uns hier mit relativ stark theorieorientierten zeitkontinuierlichen Systemen befassen. Das Interesse an solchen Modellen gründet sich auf vier Überlegungen:

- a) die Zeit hat keine „Löcher“
- b) Prognosen sollen für beliebig wählbare Zeitpunkte möglich sein
- c) Suche nach Parameterinvarianz ist bei Kreuzvalidierungen oberstes Ziel
- d) kausal-inhaltliche Interpretationen sollen auf der Prozeßebene des Phänomens erfolgen

Zu a,b) wäre folgendes zu sagen. Alle zeitdiskreten Modelle sind an einem bestimmten Zeittakt der Messung und Prognose gebunden. Liegen z.B. für den multivariaten autoregressiven Prozeß (7.11) die Meßzeitpunkte  $t$  und  $t-1$  ein Jahr auseinander, sind Prognosen mit (7.13) nur für ganz Vielfache dieser Zeitdistanz möglich. Man kann dann Prognosen nur im Jahresrhythmus erstellen. Für alle anderen Zeitpunkte lassen zeitdiskrete Modelle keine Aussagen zu.

Die Suche nach Parameterinvarianz sollte ein fundamentaler Vorgang bei Kreuzvalidierungen sein. Leider wird er beim Umgang mit zeitdiskreten Modellen nicht berücksichtigt, wenn zwei Forscher für ihre Längsschnittuntersuchung verschiedene Meßintervalle benutzen. Sind die Meßintervalle  $t$ -( $t-1$ ) bei zwei Untersuchungen verschieden lang, sind die Parameter der zeitdiskreten Modelle (z.B. die Regressionsgewichte in 7.11) auch dann verschieden, wenn alle Beobachtungen aus einem einzigen zeitkontinuierlichen Modell (z. B. 9.3) stammen! Das bedeutet, daß man Längsschnittuntersuchungen nur

kreuzvalidieren kann, wenn man entweder die Parameter der zeitkontinuierlichen Modelle vergleicht oder in beiden Untersuchungen gleich lange Zeitintervalle zwischen den Messungen vorliegen hat.

Die Überlegung d) bezieht sich auf den wichtigen Aspekt der inhaltlichen Theoriebildung. Man kann an Hand (9.6) und (9.7) zeigen, daß Kausalaussagen im Sinne „Variable i beeinflusst Variable j“ von der Wahl zwischen zeitdiskreter vs. zeitkontinuierlicher Modellbildung abhängen.

Beeinflußt im zeitkontinuierlichen Modell (9.2, 9.3) die Variable i die Veränderung der Variablen j nicht, ist der Parameter  $a_{ij}$  in (9.6) gleich Null. Im entsprechenden zeitdiskreten Modell (9.7) wird aber der entsprechende Regressionsparameter  $f_{ji}$  wegen der Reihenentwicklung (9.8) im allgemeinen ungleich Null sein. Das führt zur Konsequenz, daß man im zeitdiskreten Modell Variableneinflüsse vermutet, die im zeitkontinuierlichen Modell nicht vorhanden sind!

Man muß sich daher bei der Formulierung dynamischer Theorien entscheiden, *auf welcher Zeitebene Formulierung und Hypothesenprüfung* erfolgen sollen. *Man darf zeitkontinuierliche Theorien nicht mit zeitdiskreten Methoden prüfen.*

Bei zeitkontinuierlichen Modellen hegt man die intuitiv einleuchtende Vorstellung von nicht sprunghaften sondern stetigen Variablenänderungen. Sind die im Modell enthaltenen Variablen stetige, nach der Zeit differenzierbare Funktionen, kann man Richtung und Stärke der Variablenänderungen durch deren Ableitungen nach der Zeit angeben (s. z.B. Voedodsky, 1969; McClelland, 1979; Goldstein, 1979).

Jeder, der sich im Rahmen der psychologischen Testtheorie mit Itemcharakteristikkurven befaßt hat, wird als diskretes Modell die Guttman-Skala und als kontinuierliches Modell das Rasch-Modell kennengelernt haben. Neben der üblichen Interpretation als Itemcharakteristikkurven kann man sie aber auch als Entwicklungskurven einer einzigen Person verwenden. Sie beschreiben in beiden Fällen die Lösungswahrscheinlichkeit einer Aufgabe in Abhängigkeit von der Fähigkeit  $\xi$ . Wächst die Fähigkeit einer Person, legt die Itemcharakteristik die erwartete Lösungswahrscheinlichkeit fest. Dabei ist die Form der Kurve für alle Personen gleich, wenn das Modell gilt. So ist die Itemcharakteristikkurve im Birnbaum-Modell (s. Fischer, 1974, S. 204)

$$p(\xi) = \frac{e^{\alpha(\xi - \sigma_j)}}{1 + e^{\alpha(\xi - \sigma_j)}} \quad \sigma_j = \text{Schwierigkeit des Items } j$$

Lösung einer Differentialgleichung

$$\frac{dp(\xi)}{d\xi} = \dot{p}(\xi) = [\alpha(1-p(\xi))] \cdot p(\xi)$$

mit nichtkonstantem Koeffizienten:  $[\alpha(1-p(\xi))]$

Die Veränderung der Lösungswahrscheinlichkeit (bzw. Veränderungsrate) ist eine Funktion der Lösungs- und Versagerwahrscheinlichkeit und einer Konstanten alpha. Ist alpha (= Trennschärfeparameter) gleich 1, liegt der Spezialfall des Birnbaum-Modells nämlich das Rasch-Modell vor. Zusammenfassend läßt sich sagen, daß die Itemcharakteristikkurven in der Testtheorie „Lösungen“ einfacher Differentialgleichungen sind, die das Wachstum von Lösungswahrscheinlichkeiten beschreiben, wenn die Fähigkeit wächst.

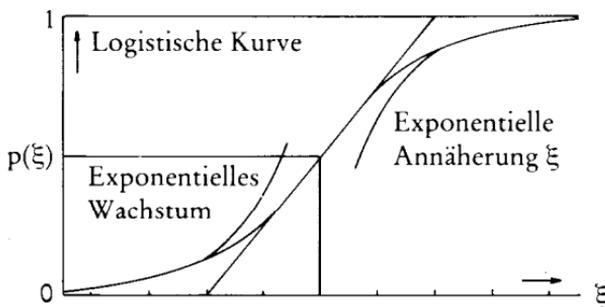


Fig. 9.1: Die logistische Kurve ist die Lösung der Differentialgleichung  $\dot{p}(\xi) = \alpha(1-p(\xi))p(\xi)$ . Sie ist durch drei Parameter bestimmt: den Grenzwert 1, den Mittelwert (Schwierigkeit des Items  $\sigma$ ) und die Ratenkonstante  $\alpha$ , die das exponentielle Wachstum der Anfangsphase und die exponentielle Annäherung an den Grenzwert 1 in der Endphase beschreibt. Dazwischen liegt eine Phase fast linearen Wachstums, die etwa bei  $\sigma-2/\alpha$  beginnt und bei  $\sigma+2/\alpha$  endet. Hier schneidet die Tangente im Mittelpunkt  $\sigma$  die Grenzen 0 und 1 (s.a. Ebenhöf, 1975, S. 44).

Systeme von Differentialgleichungen sind in der Psychologie spätestens seit der Formalisierung der Gruppentheorie von Homans durch Simon (1952, 1957) bekannt geworden. Ausführliche Diskussionen des theoretischen Modells von Simon finden sich bei Rapoport (1963, 1980), Ziegler (1972), Andreski (1977) und Deppe (1977). Nach Deppe läßt sich die Simonsche Formalisierung darstellen als Differentialgleichungssystem (d.h. als gekoppeltes zeitkontinuierliches multivariates System) in zwei Variablen:

1. Gleichung:  $\frac{dS(t)}{dt} = \dot{S}(t) = f_1(A,S)$
2. Gleichung:  $\frac{dA(t)}{dt} = \dot{A}(t) = f_2(A,S,E)$

$$\text{mit: } \frac{\partial f_1}{\partial A} > 0, \frac{\partial f_1}{\partial S} < 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial S^2} > 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial S} > 0, \frac{\partial f_2}{\partial E} > 0, \frac{\partial f_2}{\partial A} < 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 f_2}{\partial A^2} > 0$$

wobei: I = Ausmaß der Interaktion innerhalb einer Gruppe

A = Ausmaß der Aktivität

S = Ausmaß der Sympathie

E = Ausmaß der extern geforderten Aktivität

(exogene Variable)

Verbal formuliert bedeutet die 1. Gleichung: die Veränderungsrate der Sympathie zum Zeitpunkt t wird gedämpft durch hohe Sympathiewerte und gefördert durch hohe Aktivität. Die 2. Gleichung läßt sich beschreiben als: Die Veränderungsrate der Aktivität zum Zeitpunkt t wird gedämpft durch hohe Aktivitätswerte und gefördert durch hohe Sympathie- sowie extern geforderter Aktivität. Die Lösung des Differentialgleichungssystems würde bei bekannten Werten der Variablen zum Zeitpunkt t=0 Prognosen für jeden beliebigen Zeitpunkt t erlauben, wenn das Modell gilt.

Ähnliche deterministische zeitkontinuierliche Systeme behandelten Rashevsky (1939), Richardson (1948), Blalock (1969), Przeworski & Soares (1977), Wotawa (1979), Rapoport (1980) und im Rahmen der Leistungsmotivationsforschung Loose (1964), Loose & Koran (1975), Loose & Unruh (1977) sowie Kuhl & Blankenship (1979).

Im Gegensatz zu den oben erwähnten Autoren wollen wir uns nicht nur auf theoretische Analysen beschränken, sondern auch die Identifikation und die Schätzung von Systemen (zumindestens ansatzweise) behandeln. Daher beschränken wir uns auf lineare Systeme, deren Koeffizienten nicht von der Zeit abhängen. Die Dynamik eines solchen mehrvariablen Systems kann dann durch eine Anzahl interdependenter Differentialgleichungen und einer Ausgangsgleichung beschrieben werden. Die Gleichungen für den Zeitpfad (Trajektorie) im Variablenraum (Zustandsraum oder „state space“) lauten, wenn die Parameter zeitabhängig sind:

$$(9.1a) \quad \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad \text{Zustandsgleichung}$$

$$(9.1b) \quad y(t) = H(t)x(t) \quad \text{Ausgangsgleichung}$$

mit:  $\dot{x}(t)$  = Vektor mit Ableitungen  $dx_i(t)/dt$  ( $i=1, \dots, M$ )

$A(t), B(t), H(t)$  = zeitabhängige Parametermatrizen, die unbekannt sind

$x(t)$  = Vektor mit Werten der Zustandsvariablen (können auch latente Variablen sein)

$u(t)$  = Vektor mit Werten äußerer Einflußvariabler

$y(t)$  = Vektor mit meßbaren Ausgangsindikatoren des Systems zum Zeitpunkt  $t$

Sind, wie wir schon oben angedeutet haben, die Parameter aus Vereinfachungsgründen zeitunabhängig, vereinfacht sich (9.1) zu:

$$(9.2a) \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$(9.2b) \quad y(t) = Hx(t)$$

Im folgenden wollen wir uns auf das System (9.2) beschränken. Sind alle Variablen  $x$  direkt beobachtbar, kann die Matrix  $H = I$  gesetzt werden. In diesem Fall liegen keine latenten Variablen vor.

$H$  ist daher mit der  $A_y$ -Matrix im Meßmodell von LISREL vergleichbar. Das Prozeßmodell (9.2a) weist aber zum Strukturmodell einen fundamentalen Unterschied auf. In (9.2a) werden die *Veränderungen* von endogenen Variablen beschrieben, während in dem „normalen“ - von Jöreskog bekannten - LISREL-Modell die *Meßwerte* zum Zeitpunkt  $t$  beschrieben werden. Eine dynamisierte Form eines LISREL-Modells wird weiter unten bei den diskreten Approximationen vorgestellt.

Wird  $H = I$  gesetzt, ist die „Lösung“ des linearen Systems (s.a. Chan, Chan & Chan, 1972; Athans, Dertouzos, Spann & Mason, 1974)

$$(9.3) \quad x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{endogene} \\ \text{Entwicklung} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{exogener} \\ \text{Einfluß} \end{array} \right\}$$

mit der Transitionsmatrix

$$(9.4) \quad e^{A(t)} = I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \frac{A^3t^3}{3!} + \dots = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{A^K t^K}{K!}$$

Die verbale Interpretation der „Lösung“ (9.3) ist einfach. Die Werte des Variablenvektors zum Zeitpunkt  $t$  hängen von den Werten zum Zeitpunkt  $t_0$  (d.h. von der Vorgeschichte), von der endogenen Entwicklung (d.h. der inneren Entwicklung ohne äußere Einflüsse) und dem Einfluß äußerer Variabler ab.

Endogene Entwicklung und äußerer Einfluß überlagern sich bei geeigneter Formulierung des Modells additiv. Die „Lösung“ erlaubt es, bei bekannten Parametermatrizen  $A$ ,  $B$ ,  $H$  und Anfangszustand  $x(t_0)$  und bekanntem Input  $u(\tau)$  (für alle  $\tau < t$ ) den Zustandsvektor  $x(t)$  zu berechnen. Die Beschränkung auf das deterministische System (9.1-9.3) wird weiter unten fallen gelassen.

Werden nur zu diskreten Zeitpunkten  $t=0, T, 2T, \dots$  Beobachtungen erhoben und nimmt man an, daß der Input  $u(t)$  stückweise konstant ist:

$$(9.5) \quad u(\tau): \quad u(kT) = u(kT + \tau) \quad 0 \leq \tau < T$$

So ist es möglich,  $x(t)$  zu den diskreten Zeitpunkten  $t=0, T, 2T \dots$  mittels der diskreten Zustandsgleichung zu bestimmen, wenn wir einmal von Meßfehlern und Prozeßfehlern etc. absehen. Die diskrete Zustandsgleichung lautet:

$$(9.6) \quad x[(k+1)T] = e^{AT}x(kT) + \int_0^T e^{A\tau}d\tau Bu(kT)$$

oder als Differenzgleichung

$$(9.7) \quad \begin{aligned} x[(k+1)T] &= F(T)x(kT) + G(T)u(kT) \\ \text{mit: } F(T) &= e^{AT} \quad \text{und} \quad G(T) = \int_0^T e^{A\tau}d\tau B = (e^{AT}-I)A^{-1}B = \\ &= A^{-1}(e^{AT}-I)B \end{aligned}$$

zu bestimmen. Die Differenzgleichung (9.7) entspricht genau dem multivariaten autoregressiven Prozeß 1. Ordnung (= multivariate Regression) (7.11) für die Erwartungswerte

$$\begin{aligned} \text{mit } F(T) &= A & \mu(t-1) &= x(kT) \\ G(T) &= b & \text{und } u(kT) &= 1 \end{aligned}$$

(9.7) zeigt ferner, wie das zeitkontinuierliche die Grundlage des zeitdiskreten Modells bildet.

Die Reihenentwicklung von  $F(T)$  kann statt nach (9.4) auch rekursiv erfolgen (Cadzow & Martens, 1970):

$$(9.8) \quad F(T) = e^{AT} \approx \left[ I + AT \left[ I + \frac{AT}{2} \left[ I + \frac{AT}{3} \left[ I + \dots \frac{AT}{L-1} \left[ I + \frac{AT}{L} \dots \right] \right] \right] \right] \right]$$

Für die Matrix  $G(T)$  läßt sich ein ähnlich rekursiver Ausdruck angeben:

$$(9.9) \quad G(T) = (e^{AT}-I)A^{-1}B \approx T \left[ I + \frac{AT}{2} \left[ I + \frac{AT}{3} \left[ I + \dots + \frac{AT}{L-1} \left[ I + \frac{AT}{L} \dots \right] \right] \right] \right] B$$

An Hand der Reihenentwicklung (9.8) wird auch die eingangs entwickelte Überlegung von der Divergenz zeitkontinuierlicher und zeitdiskreter Kausalinterpretationen deutlich. Aus  $a_{ji}=0$  in (9.8) folgt nicht, daß auch  $f_{ji}=0$  ist.

Man kann das inhomogene System (9.2a) in ein homogenes (9.10) umformulieren, wenn  $u(t)$  konstant bleibt. Die Bestimmung von (9.9) erübrigt sich dann:

$$(9.10a) \quad \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ x(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ x(t) \end{bmatrix}$$

$$(9.10b) \quad \dot{x}_e(t) = A_e x_e(t)$$

mit der gegenüber (9.3) vereinfachten Lösung (9.11)

$$(9.11) \quad x_e(t) = e^{A_e(t-t_0)} x(t_0)$$

Nach (9.11) kann man dann (9.7) zur Lösung eines homogenen Systems verwandeln in :

$$(9.12) \quad \begin{bmatrix} u[(k+1)T] \\ \hline x[(k+1)T] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{A_e T} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u[kT] \\ \hline x[kT] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \hline G(T) & F(T) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u[kT] \\ \hline x[kT] \end{bmatrix}$$

Wir wollen jetzt ein inhaltliches Beispiel für ein Differentialgleichungssystem (9.2a, 9.3, 9.7) geben. Es findet sich in einer Längsschnittuntersuchung von Doreian & Hummon (1976) zur Analyse der Popularitätszyklen von Regierung, Opposition und Liberalen in England. Als Daten dienten monatliche Umfragen zur Popularität der drei politischen Gruppen und monatlich erhobene Indikatoren wichtiger ökonomischer Variabler (s. Figur 9.2). Das mathe-

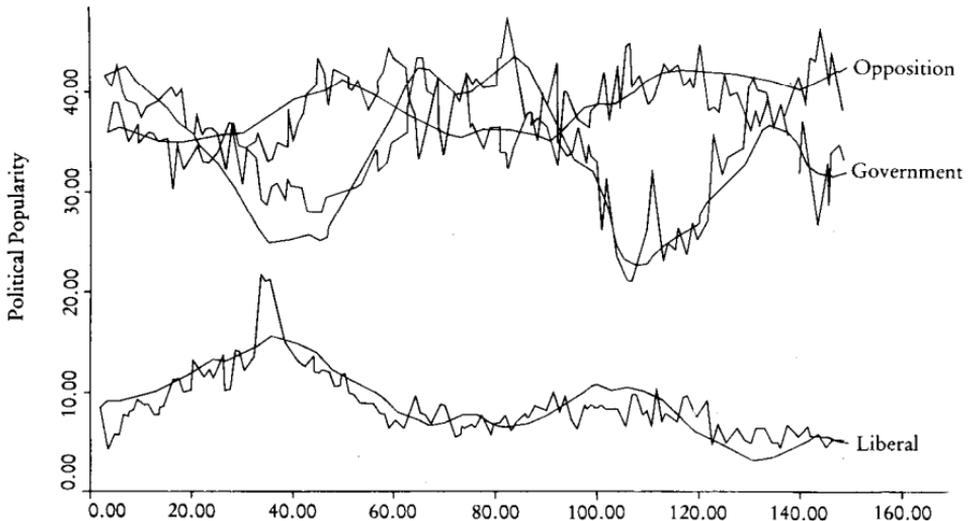


Fig. 9.2: aus Doreian & Hummon (1976): Monatliche Popularitätsentwicklung in England für Regierung, Opposition und Liberale  
Zackenlinie = empirische Zeitreihen  
glatte Kurve = Modellprognosen

Tabelle 9.1: Differentialgleichungsmodell des politischen Klimas in England nach Doreian & Hummon (1976)

$$\begin{bmatrix} \frac{d \text{Pop}_R(t)}{dt} \\ \frac{d \text{Pop}_O(t)}{dt} \\ \frac{d \text{Pop}_L(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \text{Pop}_R(t) \\ \text{Pop}_O(t) \\ \text{Pop}_L(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} & b_{16} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} & b_{26} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} & b_{36} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \text{In}(t) \\ \text{Un}(t) \\ \text{BP}(t) \\ \text{BR}(t) \\ \text{Cy}(t) \\ C \end{bmatrix}$$

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t)$$

mit:  $\frac{d \text{Pop}_i(t)}{dt}$  = Veränderung der Popularität von Gruppe  $i$   $\begin{cases} i=R & \text{für die Regierung} \\ i=O & \text{für die Opposition} \\ i=L & \text{für die Liberalen} \end{cases}$

- $\text{In}(t)$  = Inflationsindex (Preisniveau/Lohnniveau) zum Zeitpunkt  $t$
- $\text{Un}(t)$  = Prozentsatz der Arbeitslosen zum Zeitpunkt  $t$
- $\text{BP}(t)$  = Zahlungsbilanz  $\left( \frac{\text{Wert der Exporte} - \text{Wert der Importe}}{\text{Preisniveau}} \right)$  zum Zeitpunkt  $t$
- $\text{BR}(t)$  = Diskontsatz der Bank von England zum Zeitpunkt  $t$
- $\text{Cy}(t)$  = Scheinvariable, die zwischen zwei Wahlterminen eine umgekehrte U-Funktion beschreibt. Cy soll den Popularitätsbonus der Opposition widerspiegeln. Dieser nimmt in der Mitte zwischen zwei Wahlen für die Opposition ein Maximum an, wie sich an den für England typischen Nachwahlergebnissen ablesen läßt
- $C$  = Scheinvariable, die für alle  $t$  den Wert 1 annimmt

matische Modell (Tabelle 9.1) repräsentiert die inhaltliche Hypothese, daß Popularitätsänderungen der drei gesellschaftlichen Gruppen sich wechselseitig beeinflussen und von der ökonomischen Entwicklung als äußerem Einfluß abhängen. Das dem System (9.2a) entsprechende inhaltliche Modell findet sich in Tabelle (9.1).

Die Parameter der Systemmatrix  $A$  bestimmen die Entwicklung des Systems vollkommen, wenn keine äußeren Einflüsse vorliegen. Ist z.B.  $a_{12}$  negativ, würde damit die Popularität der Opposition den Zuwachs der Regierungspopularität hemmen. Ist ein Element  $a_{ii}$  auf der Hauptdiagonale von  $A$  negativ, dämpft die Variable  $i$  sich selbst: hohe Werte von Variable  $i$  steuern einen Abfall der Zuwachsrates von  $i$ . So sind z.B. Sättigungs-, Regressions- bzw. Decken(„ceiling“)effekte konsistent beschreibbar.

Kennt man die Parametermatrizen  $A$  und  $B$ , den Anfangszustand des Variablenvektors  $x(t_0)$  und den Verlauf der äußeren Einflüsse, kann man die Werte der Zustandsvariablen mit der „Lösung“ des Differentialgleichungssystems (9.3) bzw. (9.6, 9.7) prognostizieren. Ideal wäre es natürlich, wenn die äußeren Einflüsse unter vollständiger Kontrolle wären und wenn die Beschreibung des Systems durch  $x$  vollständig wären. Dieser „ideale“ Zustand ist in der Psychologie grundsätzlich nicht erreichbar. Zum einen haben wir es mit offenen Systemen zu tun, die nicht vollständig beschreibbar sind. Zum anderen haben wir das „inverse“ Problem zu lösen: Ausgehend von der Gültigkeit des Modells (9.2) und multivariaten Beobachtungen zu diskreten Zeitpunkten sind die Parameter von  $A$  und  $B$  zu schätzen. Danach erst sind Prognosen mit (9.3) oder (9.7) über die zukünftige Entwicklung von  $x(t)$  möglich. Natürlich hängen diese Prognosen von den Vermutungen oder der Kontrolle über die Rahmenbedingungen (d.h. über  $u(t)$ ) ab.

Das dynamische Verhalten eines Differentialgleichungssystems läßt sich an den Eigenwerten der Matrix  $A$  ablesen. Sind die Eigenwerte von  $A$  verschieden, ist  $A$  kanonisch zerlegbar (Athans et al., 1974):

$$(9.13) \quad A = P \Lambda P^{-1}$$

mit:  $\Lambda$  = Diagonalmatrix mit reellen oder konjugiert komplexen Eigenwerten

$P$  = Matrix, deren Spalten aus den Eigenvektoren von  $A$  bestehen (reell oder konjugiert komplex)

Systeme lassen sich nach ihrem Verhalten in drei Klassen aufteilen (s. Tabelle 9.2; Figur 9.3). So gibt es asymptotisch stabile, stabile und instabile Systeme. Beispiele hierfür finden sich in Figur 9.2. Welcher Fall vorliegt, kann an den Eigenwerten von  $A$  abgelesen werden, ohne für alle  $t \rightarrow \infty$  (9.3) ausrechnen zu müssen. Eine Übersicht über die Kriterien findet sich in Tabelle 9.3.

Tabelle 9.2: Stabilitätsdefinitionen für

asymptotische Stabilität	$ x(t)  \rightarrow 0$ bei $t \rightarrow \infty$ (s. Fig. 9.3a)	varianzminimierend
Stabilität	$ x(t)  < \infty$ bei $t \rightarrow \infty$ (s. Fig. 9.3b)	varianzminimierend
Instabilität	$ x(t)  \rightarrow \infty$ bei $t \rightarrow \infty$ (s. Fig. 9.3c)	varianzmaximierend

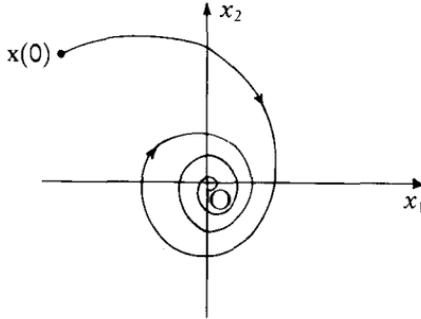
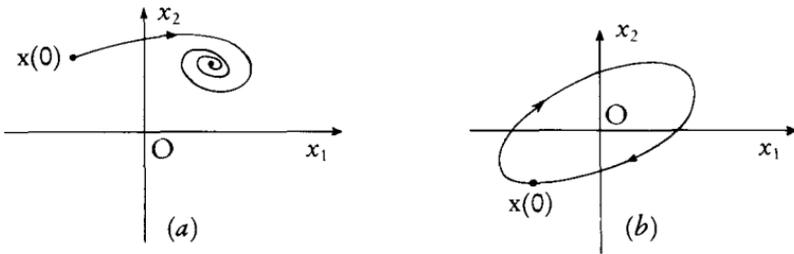
Fig. 9.3a: Asymptotische Stabilität eines Differentialgleichungssystems: dargestellt als Trajektorie (Zeitpfad) im zweidimensionalen Zustandsraum, der durch die Variablen  $x_1$  und  $x_2$  aufgespannt wird

Fig. 9.3b: Stabile Systeme und ihre Trajektorien

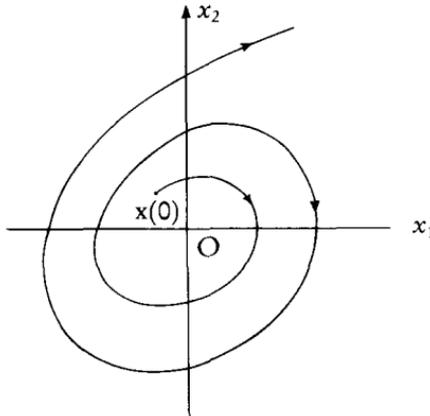


Fig. 9.3c: Beispiel der Trajektorie eines instabilen Systems

Tabelle 9.3: Stabilität und Instabilität von  $\dot{x}(t) = Ax(t)$  in Abhängigkeit der Eigenwerte  $\lambda_i$  der Matrix  $A$ 

asymptotische Stabilität (Figur 9.3a)	alle Eigenwerte von $A$ (einfache oder mehrfache) besitzen negative Realteile $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$
Stabilität (9.3b)	alle Eigenwerte besitzen nichtpositive Realteile $\operatorname{Re}(\lambda_i) \leq 0$ sind die Realteile $\operatorname{Re}(\lambda_k) = 0$ , müssen die Eigenwerte verschieden sein $\lambda_j \neq \lambda_k$ für alle $j \neq k$
Instabilität (9.3c)	ein oder mehrere Eigenwerte besitzen positive Realteile $\operatorname{Re}(\lambda_i) > 0$ bzw. für einige $j$ und $k$ gilt: $\operatorname{Re}(\lambda_j) = \operatorname{Re}(\lambda_k) = 0$ und $\operatorname{Im}(\lambda_j) = \operatorname{Im}(\lambda_k)$ . Letzteres bedeutet die Existenz mehrfacher Eigenwerte mit verschwindendem Realteil

An dieser Stelle erscheint ein Vergleich mit der Hauptkomponentenanalyse nützlich. Während bei ihr eine *symmetrische* Korrelationsmatrix  $R$  kanonisch nach (9.14) zerlegt wird,

$$(9.14) \quad R = P A P' = P A P^{-1}$$

um neue *unkorrelierte* Variable zu erhalten, zerlegt man hier die *nichtsymmetrische* Systemmatrix  $A$  nach (9.13), um neue *entkoppelte* Variable zu bestimmen. Während die Eigenwerte in der Hauptkomponentenanalyse die *statischen* Verhältnisse im Sinne von Varianzaufklärungen widerspiegeln, steuern die Eigenwerte des Differentialgleichungssystems die *Wachstumsraten* im neuen entkoppelten Variablensystem. Das kann man daran erkennen, wenn man die Transitionsmatrix  $e^{A(t-t_0)}$  der „Lösung“ (9.3) mit Hilfe von (9.13) anders darstellt:

$$(9.15) \quad e^{At} = P e^{A't} P^{-1}$$

und

$$e^{A't} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_m t} \end{bmatrix}$$

$A$  soll verschiedene Eigenwerte besitzen. Sind die Eigenwerte von  $A$  nicht verschieden, kann eine Diagonalisierung nur annähernd über die Jordansche Normalform (Zurmühl, 1968) erfolgen.

### 9.1.1 Stochastische Systeme

Für empirische Fragestellungen in der Psychologie sind die Systeme (9.1) und (9.2) zu idealistisch. Wir müssen von gestörten Variablenbeziehungen und Meßfehlern ausgehen. Ist das stochastische Modell spezifiziert, schließen sich Identifikation und Schätzung des Modells an. Die Schätzung der Parameter wird entweder mittels einer multivariaten Zeitreihe oder mit multivariaten Paneldaten vorgenommen.

Der Einfachheit halber sollen hier nur Systeme 1. Ordnung (d.h. es treten nur einfache Ableitungen im Modell auf) betrachtet werden. Systeme höherer Ordnung können durch geeignete Transformationen auf Systeme 1. Ordnung zurückgeführt werden (s.a. Chan, Chan & Chan, 1972). Ein lineares zeitunabhängiges stochastisches System nimmt dann folgende Form an:

$$(9.16a) \quad \dot{x}(t) = A(\delta)x(t) + B(\delta)u(t) + \varrho(t)$$

$$(9.16b) \quad y(t) = H(\delta)x(t) + \varepsilon(t)$$

wobei:  $x(t)$  = Vektor mit Zufallsvariablen, die zu diskreten Zeitpunkten beobachtet werden können

$A(\delta)$  = Parametermatrix, deren Elemente Funktionen eines Vektors  $\delta$  mit Basisparametern sind (im folgenden wird  $A(\delta)$  mit  $A$  abgekürzt)

$B(\delta)$  = Vektor oder Matrix mit Gewichten für die exogenen Variablen

$H(\delta)$  = Gewichtsmatrix (Regressionsmatrix) der u.U. latenten Zustandsvariablen  $x(t)$  für die meßbaren Indikatoren  $y(t)$  (entspricht der  $A_y$ -Matrix in LISREL)

$u(t)$  = Vektor mit exogenen Variablen, die zu diskreten Zeitpunkten beobachtet werden können (muß kontrollierbar sein und darf daher keine Zufallsvariable sein)

$\varrho(t)$  = Vektor mit Störungen (Fehlern) in den Ableitungen  $\dot{x}(t)$  (= Prozeßfehler)

$\varepsilon(t)$  = Vektor mit Meßfehlern

Der Vektor  $\varrho(t)$  weicht wesentlich von den normalen bekannten Meßfehlern ab, weil er eine Störung in der Ableitung ist. Er ist daher sehr erratisch. Eine ausführliche Diskussion findet sich z.B. bei Phillips & Wickens (1978, S. 454-458) und Schuss (1980).

Die erratische Charakteristik des Fehlers kann man an einem einfachen Beispiel nur annähernd verdeutlichen. Hat man sich vorgenommen, eine 500 km lange Strecke in 5 Stunden mit dem Pkw zu durchfahren, läßt sich diese (kognitive) Modellvorgabe nicht einhalten. Mai wird die Modellgeschwindigkeit  $dx/dt$  überschritten ( $Q(t) > 0$ ), mal wird sie unterschritten ( $Q(t) < 0$ ),

obwohl am Ende der 5 Stunden das Integral dieses Fehlers sehr klein oder sogar Null sein kann (z.B. nur 1 km bis zum Ziel nach exakt 5 Stunden Fahrt). Weil der Prozeßfehler in stochastischen Differentialgleichungsmodellen grundsätzlich anders ist, als man es aus der „normalen“ Statistik gewohnt ist, machen viele Autoren vereinfachende Annahmen. Oft wird ein deterministisches Prozeßmodell (9.16a) ohne Prozeßfehler mit Meßfehler  $s(t)$  angenommen.

Für die weiteren Betrachtungen sollen die Parameter reell sein. Zusätzlich soll  $A$  verschiedene Eigenwerte mit negativem Realteil besitzen.

Tabelle 9.4: Trivariate Zeitreihe, die dem Modell (9.19) entspricht (aus Phillips, 1972)

$t$	$C(t)$	$Y(t)$	$K(t)$	
0	20.001465	20.001294	40.002760	Für die im folgenden Abschnitt behandelten Panelmodelle haben wir diese Zeitreihe uminterpretiert: Statt der Zeitreihe einer Person (gemessen an 26 Zeitpunkten) liegen die Daten von 13 Personen (gemessen zu 2 Zeitpunkten) vor.
1	20.724659	21.873653	40.319084	
2	19.500591	20.517932	41.772445	
3	17.740573	16.459774	40.902389	
4	16.797718	12.794065	36.626464	
5	16.304851	14.501026	32.963211	
6	13.996612	13.712356	32.426635	
7	15.690959	11.987287	32.672866	
8	13.092237	9.756517	28.897232	
9	14.220060	12.906684	27.340717	
10	15.704090	16.940200	30.263877	
11	17.718055	17.428257	30.470222	
12	19.487106	23.287891	34.520500	
13	21.442127	25.636001	37.044532	
14	24.951919	30.484500	45.467407	
15	26.961414	32.732826	48.174156	
16	27.625804	34.344078	56.707367	
17	29.802745	33.231643	62.022628	
18	30.370506	29.752571	65.508667	
19	27.389129	21.525676	60.045471	
20	24.136940	18.777145	52.820404	
21	21.597133	17.251140	47.556259	
22	20.041355	14.616481	42.308754	
23	18.967193	16.165267	35.948036	
24	18.595157	19.830234	32.583084	
25	20.269153	23.141529	37.360000	

Beobachtungen mit gleichen zeitlichen Abständen, die durch (9.16) erzeugt werden, genügen dem autoregressiven Schema (9.17), wenn  $u(t)$  stückweise konstant ist.

$$(9.17) \quad x(t) = e^A x(t-1) + A^{-1}(e^A - I)B u(t-1) + \xi(t)$$

$$(9.18a) \quad \text{mit: } \xi(t) = \int_{t-1}^t e^{A(t-\tau)} \varrho(\tau) d\tau$$

und

$$(9.18b) \quad E[\xi(t)\xi(t)'] = \Omega \neq I$$

Die vorstehenden Gedankengänge sollen an einem Beispiel von Phillips (1972) dargestellt werden. Es liegt eine multivariate Zeitreihe (s. Tabelle 9.4) vor, die zu 26 Zeitpunkten „beobachtet“ wurde. Phillips generierte die Zeitreihe nach folgendem stochastischem Differentialgleichungssystem:

$$(9.19) \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda & \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{c}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{k}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha & \alpha(1-\beta) & 0 \\ \lambda & -\lambda & 0 \\ 0 & \gamma v & -\gamma \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c(t) \\ y(t) \\ k(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [F] + \begin{bmatrix} \varrho_1(t) \\ \varrho_2(t) \\ \varrho_3(t) \end{bmatrix}$$

mit dem Parametervektor  $\delta' = (\alpha, \lambda, \gamma, v, \beta) = (0.6, 4.0, 0.4, 2.0, 0.25)$ , der Matrix  $\Omega \neq I$  und dem konstanten äußeren Einfluß  $F = 5$  für alle Zeitpunkte  $t=0, \dots, 25$ .

Da sich (9.19) nicht in der Form von (9.2a) befindet, muß die zweite Gleichung von (9.19) durch Einsetzen von  $k(t)$  umgeformt werden zu (9.20). Erst (9.20) erlaubt Stabilitätsbetrachtungen.

$$(9.20) \quad \begin{bmatrix} \dot{c}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{k}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha & \alpha(1-\beta) & 0 \\ \lambda & \lambda(\gamma v - 1) & -\lambda\gamma \\ 0 & \gamma v & -\gamma \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c(t) \\ y(t) \\ k(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [F] + \begin{bmatrix} \varrho_1(t) \\ \varrho_2(t) \\ \varrho_3(t) \end{bmatrix}$$

Setzt man die Parameterwerte ein, erhält man:

$$(9.21) \quad \begin{bmatrix} \dot{c}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{k}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -.6 & .45 & 0 \\ 4. & -.8 & -1.6 \\ 0 & .8 & -.4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c(t) \\ y(t) \\ k(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [5] + \begin{bmatrix} \varrho_1(t) \\ \varrho_2(t) \\ \varrho_3(t) \end{bmatrix}$$

mit den Eigenwerten:  $\lambda_1 = -1.56579$

$$\lambda_2 = -0.1171 - 0.37358i$$

$$\lambda_3 = -0.1171 + 0.37358i$$

an den Eigenwerten (vgl. Tabelle 9.3) und den „Daten“ (vgl. Tabelle 9.4) erkennt man die asymptotische Stabilität des Systems.

### 9.1.2 Diskrete Approximation des stochastischen zeitkontinuierlichen Modells

Die Identifikation der Parameter von (9.19) wirft schwierige Probleme auf (vgl. Phillips, 1973).

Zudem setzen Schätzverfahren, die das kontinuierliche Modell direkt schätzen wollen, gute Startwerte voraus, da es sich um ein nichtlineares Schätzproblem (nichtlinear in den Parametern) handelt. Es erhebt sich die Frage, ob es nicht relativ einfache Methoden gibt, mit denen man wenigstens eine diskrete Approximation des kontinuierlichen Modells (9.19) schätzen kann.

Dazu wird jede Einzelgleichung in (9.16) über ein Einheitszeitintervall (Abstand zwischen zwei Messungen)  $(t-1, t)$  integriert. Für die linken Seiten erhalten wir

$$\int_{t-1}^t \dot{x}(\tau) d\tau \approx x(t) - x(t-1) = \Delta x_i(t)$$

Die rechten Seiten enthalten Terme  $\int_{t-1}^t x(\tau) d\tau$ , die nach der Trapezregel durch den Mittelwert  $\bar{x}(t) = \frac{[x(t) + x(t-1)]}{2}$  approximiert werden können. So

wird das Modell (9.19) durch (9.22) diskret approximiert:

$$(9.22) \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda & \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta c(t) \\ \Delta y(t) \\ \Delta k(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha & \alpha(1-\beta) & 0 \\ \lambda & -\lambda & 0 \\ 0 & \gamma v & -\gamma \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{c}(t) \\ \bar{y}(t) \\ \bar{k}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot [F] + \begin{bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \\ \eta_3(t) \end{bmatrix}$$

mit  $\eta(t) = \int_{t-1}^t \varrho(\tau) d\tau$

(9.22) kann dann mit dem bekannten LISREL-Programm von Jöreskog & Sörbom, das ursprünglich für die Schätzung von Strukturgleichungssystemen entwickelt wurde, geschätzt werden. Allerdings sind die Schätzungen, wegen der Linearisierung nicht unverzerrt. Zur Schätzung mit LISREL ändern wir das von Jöreskog (1973) vorgeschlagene Modell<sup>1</sup>:- in einigen Punkten zu folgendem Gleichungstripel ab:

$$(9.23a) \quad \text{die Struktur- (bzw. hier) Prozeßgleichung} \\ B\eta(t) = \Gamma\xi(t) + \zeta$$

$$(9.23b) \quad \text{das Meßmodell 1: } x(t) = A_y\eta(t)$$

$$(9.23c) \quad \text{das Meßmodell 2: } x(t-1) = A_x\xi(t) = I\xi(t)$$

\* Die hier verwendete Symbolik hält sich an Jöreskog; daher ist  $\eta$  in (9.22) von  $\eta$  in (9.23) verschieden.

Tabelle 9.5: LISREL-Modell zur diskreten Approximation des stochastischen Differentialgleichungssystems (9.16) nach dem Vorbild von (9.19)

(9.23a) Strukturgleichung

$\eta_1$	$\eta_2$	$\eta_3$	$\eta_4$	$\eta_5$	$\eta_6$	$\eta_7$	$\eta_8$	$\eta_9$	$\eta_{10}$
$\Delta C$	$\Delta Y$	$\Delta K$	$\bar{C}(t)$	$\bar{Y}(t)$	$\bar{K}(t)$	$C(t)$	$Y(t)$	$K(t)$	$K(t)$
1	0	0	$\alpha$	$-\alpha(1-\beta)$	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	$-\lambda$	0	0	0
0	0	1	0	$-\gamma v$	$\gamma$	0	0	0	0
0	0	-1	-1	1	0	1	0	0	0
1	0	0	-2	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	-2	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	-2	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	-1	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	-1	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	-1

$B\eta = \Gamma\xi + \zeta$

(9.23b) Meßmodell 1

0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

$x(t) = A_1 \eta$

$\eta_1$	$\eta_2$	$\eta_3$	$\vdots$	$\eta_{10}$
----------	----------	----------	----------	-------------

=

$C(t)$	$Y(t)$	$K(t)$
--------	--------	--------

(9.23c) Meßmodell 2

1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1

$x(t-1) = A_2 \xi$

$\xi_1$	$\xi_2$	$\xi_3$	$\xi_4$
---------	---------	---------	---------

=

$C(t-1)$	$Y(t-1)$	$K(t-1)$	$F$
----------	----------	----------	-----

$\eta_7 = \bar{C}(t) + \Delta K - \bar{Y}(t)$

0	0	0	0	$\alpha$
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

$C(t-1) Y(t-1) K(t-1) F$

+

$\xi_1$	$\xi_2$	$\xi_3$	$\xi_4$
---------	---------	---------	---------

$\eta_1$	$\eta_2$	$\eta_3$	$\eta_4$	$\eta_5$	$\eta_6$	$\eta_7$	$\eta_8$	$\eta_9$	$\eta_{10}$
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	-------------

=

-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	-2	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	-2	0	0	0	0	0	0
-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0

- mit  $A_y$  = Gewichtsmatrix der latenten endogenen Variablen  $\eta$  für die manifesten endogenen Variablen  $x(t)$
- $\eta$  = Vektor mit „latenten“ abhängigen Variablen
- $\xi$  =  $x(t-1)$  = Vektor mit manifesten exogenen Variablen
- $\zeta$  = Vektor mit Gleichungsfehlern (entsprechend dem  $\eta$  in (9.22))

Die Gleichungen (9.23) sind ausführlich in Tabelle 9.5 dargestellt. Die ersten 3 Gleichungen in Tabelle 9.5 bilden das Modell (9.22) ab. Die zweite Gleichung erlaubt es, durch die Einführung einer neuen Variablen  $\eta_7 = \tilde{c}(t) + \Delta K - \bar{y}(t)$  den Parameter  $\lambda$ , der in (9.22) ursprünglich in drei Spalten auftrat, nur einmal zu verwenden. Gleichung 4 in Tabelle 9.5 definiert die Variable  $\eta_7$  aus  $\eta_3, \eta_4, \eta_5$ . Die Gleichungen 5-7 definieren die Variablen  $\eta_4, \eta_5, \eta_6$  (= Mittelwerte) mit Hilfe der  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  (= Differenzen) und der vorherbestimmten  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ . Die  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  (= Differenzen) werden ihrerseits dann in den Gleichungen 8-10 definiert.

Bevor das Modell (Tabelle 9.5) geschätzt werden kann, muß der Identifikationsstatus der Parameter gesichert sein. Parameter sind dann identifiziert, wenn sie eindeutig schätzbar sind. Eine detaillierte Behandlung dieses Problems findet sich bei Phillips & Wickens (1978, S. 451 ff.).

Das Computerprogramm LISREL versucht die aus den Daten (Tabelle 9.4) berechnete empirische Momentenmatrix um Null S (Tabelle 9.6) durch die Matrix 2, die eine Funktion der gesuchten Parameter ist, zu approximieren. Dabei wird die Funktion F (s. Kap. 7.1) minimiert. Eine Gegenüberstellung

Tabelle 9.6: Momentenmatrix S um Null für die Rohdatenmatrix X aus Tabelle 9.4

	C(t)	Y(t)	K(t)	C(t-1)	Y(t-1)	K(t-1)	F
C(t)	445.152						
Y(t)	448.203	464.606					
K(t)	896.869	894.515	1820.809				
C(t-1)	443.137	441.044	897.991	444.721			
Y(t-1)	448.397	456.520	904.930	445.443	459.187		
K(t-1)	890.901	874.339	1815.169	898.583	891.937	1828.987	
F	102.626	101.931	206.544	102.572	101.303	207.073	25.000

$$S = \frac{1}{N} X'X$$

der mit Hilfe von LISREL geschätzten Parameter und der von Phillips vorgegebenen Werte findet sich in Tabelle 9.7. Die durch die diskrete Approximation gewonnenen Schätzungen stimmen für diesen Datensatz gut mit den Parametern überein. Nur  $\hat{\lambda}$  weicht stärker von  $\lambda$  ab.

Tabelle 9.7: LISREL-Schätzungen für die diskrete Approximation eines zeitkontinuierlichen Modells

Parameter	LISREL- Parameter	Startwerte für LISREL	Schätzungen mit LISREL	rückgerechnete Schätzungen für Modell (9.20)
$\alpha = .60$	$\beta_{14} = \alpha$	$= .600$	$\hat{\beta}_{14} = .635$	$\hat{\alpha} = .635$
$\beta = .25$	$\beta_{15} = -\alpha(1-\beta)$	$= .450$	$\hat{\beta}_{15} = -.486$	$\hat{\beta} = .235$
$\lambda = 4.00$	$\beta_{27} = -\lambda$	$= -4.000$	$\hat{\beta}_{27} = -3.201$	$\hat{\lambda} = 3.201$
$v = 2.00$	$\beta_{35} = -\gamma v$	$= -.800$	$\hat{\beta}_{35} = -.819$	$\hat{v} = 2.012$
$\gamma = .40$	$\beta_{36} = \gamma$	$= .400$	$\hat{\beta}_{36} = .407$	$\hat{\gamma} = .407$
	$\gamma_{14} = \alpha$	$= .600$	$\hat{\psi}_{14} = .635$	
	$\psi_{11}$	$= 1.000$	$\hat{\psi}_{11} = 1.321$	Momentenmatrix $\Psi$ der Gleichungs- fehler $\zeta$
	$\psi_{21}$	$= .0$	$\hat{\psi}_{21} = .000$	
	$\psi_{22}$	$= 1.000$	$\hat{\psi}_{22} = 31.200$	
	$\psi_{31}$	$= .0$	$\hat{\psi}_{31} = .000$	
	$\psi_{32}$	$= 1.000$	$\hat{\psi}_{32} = -11.02$	
	$\psi_{33}$	$= 1.000$	$\hat{\psi}_{33} = 4.178$	

Das Anpassungschiquadrat beträgt 4.3896 (df=9) mit einem p=.88, was eine sehr gute Modellanpassung bedeutet. Startwerte mit nur einer Dezimalstelle weisen auf einen konstant gehaltenen Parameter hin. Die rückgerechneten Schätzungen in der rechten Spalte werden durch algebraische Manipulationen aus den LISREL-Schätzungen zurückgerechnet.

### 9.1.3 Identifikation und Schätzung des zeitkontinuierlichen Systems

Die Parameterschätzung eines zeitkontinuierlichen Modells mit Messungen, die zu diskreten Zeitpunkten erhoben wurden, ist nicht ohne Probleme, wie sich in einer Reihe von Veröffentlichungen gezeigt hat (Coleman, 1968; Land, 1970, 1971; Hummon et al., 1975; Arminger, 1976; Doreian & Hummon, 1976, 1977, 1979). Zum Teil sind die angegebenen „Lösungen“ der Differentialgleichungssysteme nicht korrekt, zum Teil wird dem Fehlermodell zuwenig Aufmerksamkeit geschenkt. Allen Arbeiten aber ist die Nichtbeachtung des Identifikationsproblems gemeinsam: Unter welchen Bedingungen sind die Pa-

parameter aus den Daten eindeutig schätzbar? Zwar sind die Matrizen des zeitdiskreten Systems  $F(T)$  und  $G(T)$  in (9.7) eindeutig und leicht als Regressionsparameter mit LISREL schätzbar. Uns interessieren hier aber die Matrizen des kontinuierlichen Systems  $A$ ,  $B$  und  $H$ . Wie wir weiter unten sehen werden, sind  $A$ ,  $B$  und  $H$  nur unter sehr strengen theoretischen Vorannahmen über die „kausalen“ Beziehungen der Variablen eindeutig aus Fund  $G$  erschließbar. Die Strenge der Vorannahmen geht weit über die Anforderungen bezüglich der Identifizierbarkeit bei normalen Pfad- oder Strukturmodellen hinaus.

Ein Hauptproblem bei der Schätzung liegt in der Mehrdeutigkeit der Matrixgleichung

$$(9.25) \quad F(T) = e^{AT}$$

begründet. Es genügt nicht, wie von den oben genannten Autoren vorgeschlagen, den Logarithmus der Matrix  $F$  zu bilden (Der Logarithmus einer Matrix ist z.B. erklärt bei Gröbner (1966, S. 208)). Der Logarithmus ist nicht definiert, wenn ein Eigenwert von  $F$  im Realteil negativ ist und nicht eindeutig, wenn Eigenwerte konjugiert komplex auftreten, was auf schwingende Zeitreihen hindeutet. Das gleiche Problem tritt auf, wenn man die Intensitäten in zeitkontinuierlichen Markoffprozessen schätzen will (Singer & Spilerman, 1976). Singer & Spilerman (1976) zeigen an einem Beispiel, wie die Transitionsmatrix  $F(T)$  des diskreten Systems vollkommen kompatibel mit zwei Systemmatrizen  $A_1$  und  $A_2$  ist. Jedoch beschreiben  $A_1$  und  $A_2$  zwei vollkommen verschiedene zeitkontinuierliche Veränderungsprozesse:

$$(9.26) \quad F(T) = e^{A_1 T} = e^{A_2 T}$$

$$\text{mit } F(T) = \begin{bmatrix} .234 & .252 & .264 & .250 \\ .252 & .237 & .245 & .266 \\ .268 & .255 & .230 & .247 \\ .248 & .271 & .248 & .233 \end{bmatrix}$$

$$\text{und} \quad A_1 = \quad \quad \quad A_2 =$$

$$\begin{bmatrix} -3.350 & 0.134 & 0.067 & 3.149 \\ 3.132 & -3.306 & 0.144 & 0.030 \\ 0.035 & 3.233 & -3.395 & 0.127 \\ 0.137 & 0.033 & 3.149 & -3.319 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -3.329 & 3.312 & 0.005 & 0.012 \\ 0.033 & -3.337 & 3.209 & 0.095 \\ 0.016 & 0.023 & -3.334 & 3.295 \\ 3.294 & 0.050 & 0.027 & -3.371 \end{bmatrix}$$

Es lassen sich also alternative interne „Kausal“prozesse bei unverändertem Input-Outputverhalten des Modells formulieren.'

Nach  $A_1$  liegt folgende „Kausal“kette vor:

$$X_4 \rightarrow \dot{X}_1, X_1 \rightarrow \dot{X}_2, X_2 \rightarrow \dot{X}_3, X_3 \rightarrow \dot{X}_4$$

und nach  $A_2$  verläuft die Beeinflussung:

$$X_4 \rightarrow \dot{X}_3, X_3 \rightarrow \dot{X}_2, X_2 \rightarrow \dot{X}_1, X_1 \rightarrow \dot{X}_4$$

„Many state-variable representations can result in the same input-output system function“ (Athans et al., 1974, S. 430ff.).

Wir wollen nun zeigen, wie Parameter in zeitkontinuierlichen linearen Systemen mit konstanten Koeffizienten identifiziert werden können. Dabei wird sich herausstellen, daß das System (9.20) identifiziert bzw. überidentifiziert und daß das Modell in Tabelle (9.1) *nicht* identifiziert ist. Letzteres trifft auch auf einige Modelle von Coleman (1968), Land (1970, 1971), Hummon et al. (1975) und Arminger (1976) zu, soweit sie als lineare Differentialgleichungssysteme (9.1) oder (9.16) formuliert sind.

Zur Sicherstellung der Identifikation der Parameter müssen den Matrizen Restriktionen auferlegt werden, so daß ausgehend vom Input-Output-Verhalten nur noch eine einzige Modelldarstellung möglich ist.

Das Input-Output-Verhalten eines Systems ohne Berücksichtigung der internen Repräsentation läßt sich durch die Input-Output-Gleichung (s.a. Athans, 1974) beschreiben:

$$\begin{aligned}
 Y(s) &= G(s) U(s) \\
 \text{mit: } Y(s) &= \text{Laplace transformierte von } Y(t) \\
 U(s) &= \text{Laplace transformierte von } U(t) \\
 G(s) &= H(sI - A)^{-1}B = \text{Transfermatrix des transformierten} \\
 &\quad \text{Systems (9.1)} \\
 s &= \text{skalare komplexe Variable}
 \end{aligned}$$

Jedes Element der Transfermatrix steht für eine Input-Output-Verknüpfung. Zum Begriff der Laplace-Transformation sei auf Howard (1971, Vol. II, S. 700ff.), Löhr (1979), McGill (1963) und Restle & Greeno (1970, S. 287f.) verwiesen.

Das Problem der Identifizierbarkeit der Systemparameter reduziert sich dann auf die Frage, ob sich die Parameter in  $A$ ,  $B$  und  $H$  eindeutig aus den Elementen der Transfermatrix  $G(s)$  erschließen lassen (Bellman & Astrom, 1970; Hart & Mulholland, 1979). Dazu muß die Matrix  $G(s)$  symbolisch (d.h. nichtnumerisch) hergeleitet werden. Jedes Element der Transfermatrix  $G(s)$  ist dann ein Bruch von Polynomen in  $s$ . Die Polynomkoeffizienten stellen dann Funktionen der Systemparameter in  $A$ ,  $B$  und  $H$  dar. Diese sind dann identifiziert, wenn bei Kenntnis der Polynomkoeffizienten ein Rückschluß prinzipiell möglich wäre. In diesem Fall würde ein nichtlineares Gleichungssystem mit den im Prinzip aus Messungen bekannten Polynomkoeffizienten  $p$  auf der einen und

den Parametern in A, B und H auf der anderen Seite lösbar oder überbestimmt sein:

$$p = f(A, H, B)$$

Wir wollen dieses an zwei Beispielen demonstrieren. Betrachten wir zunächst das 2-Variablen-Modell:

$$(9.27a) \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} [u(t)]$$

$$(9.27b) \quad y(t) = Ix(t) \quad \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Die Inverse  $(sI - A)^{-1}$  läßt sich am einfachsten mit einem Algorithmus von Leverrier (s.a. Frame, 1964; Cadzow & Martens, 1970) bestimmen. Die Transfermatrix  $G(s)$  ist dann ein Vektor mit zwei Elementen, da wir nur eine unabhängige Variable  $u(t)$  und zwei abhängige Variable (Ausgänge)  $y_1(t)$  und  $y_2(t)$  haben. Es gibt daher zwei Eingang-Ausgangsbeziehungen. Für  $G(s)$  finden wir:

$$(9.28) \quad G(s) = (sI - A)^{-1}b = \frac{1}{|sI - A|} \begin{bmatrix} b_1(s - a_{22}) + b_2a_{12} \\ b_1a_{21} + b_2(s - a_{11}) \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \frac{sb_1 - (b_1a_{22} - b_2a_{12})}{s^2 - s(a_{11} + a_{22}) - (-a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21})} \\ \frac{sb_2 - (b_2a_{11} - b_1a_{21})}{s^2 - s(a_{11} + a_{22}) - (-a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21})} \end{bmatrix}$$

Es bleibt zu prüfen, ob die Koeffizienten von  $s$  einen eindeutigen Schluß auf die Modellparameter zulassen. Die Polynomkoeffizienten  $c_j$  lassen sich aus dem Input-Outputverhalten bestimmen und stellen Funktionen der Modellparameter dar:

$$\begin{array}{ll} c_1 = b_1 & c_4 = + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ c_2 = - b_1a_{22} + b_2a_{12} & c_5 = b_2 \\ c_3 = - a_{11} - a_{22} & c_6 = - b_2a_{11} + b_1a_{21} \end{array}$$

Wir haben jetzt ein nichtlineares Gleichungssystem von sechs Gleichungen in sechs Unbekannten  $(b_1, b_2, a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})$ , dessen Lösbarkeit zu prüfen ist.

Betrachten wir nun als zweites Beispiel den Identifikationstatus von (9.20). Phillips (1972) wies in seiner Veröffentlichung ihn nicht nach. Das wollen wir jetzt nachholen. Die Transfermatrix nimmt folgende Gestalt an:

$$(9.29) \quad G(s) = (sI - A)^{-1}B = \frac{1}{|sI - A|} \operatorname{adj}(sI - A)B$$

$$= \left[ \begin{array}{c} \frac{s^2\{\alpha\} + s\{-\alpha\lambda(\gamma\nu - 1) + \alpha\gamma\} + \alpha\lambda\gamma}{s^3 - s^2\{-\alpha + \lambda(\gamma\nu - 1) - \gamma\} - s\{\alpha\lambda(\gamma\nu - \beta) - \gamma(\alpha + \lambda)\} + \alpha\lambda\gamma\beta} \\ \frac{s\{\alpha\lambda\} + \alpha\lambda\gamma}{s^3 - s^2\{..} \quad ..\} - s\{..} \quad ..\} + \alpha\lambda\gamma\beta} \\ \frac{\alpha\lambda\gamma\nu}{s^3 - s^2\{..} \quad ..\} - s\{..} \quad ..\} + \alpha\lambda\gamma\beta} \end{array} \right]$$

mit:

$$H = I$$

$$B = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} -\alpha & \alpha(1-\beta) & 0 \\ \lambda & \lambda(\gamma\nu - 1) & -\lambda\gamma \\ 0 & \gamma\nu & -\gamma \end{bmatrix}$$

Es ist dann zu prüfen, ob die Koeffizienten der Polynome in  $s$  eindeutig in die Modellparameter  $\alpha, \lambda, \gamma, \nu, \beta$  rückführbar sind, d.h. das nichtlineare Gleichungssystem (9.30) eindeutig lösbar oder überbestimmt ist:

$$(9.30) \quad \begin{array}{ll} c_1 = \alpha & c_6 = \alpha\lambda\gamma\nu \\ c_2 = -\alpha\lambda(\gamma\nu - 1) + \alpha\gamma & c_7 = -(-\alpha + \lambda(\gamma\nu - 1) - \gamma) \\ c_3 = \alpha\lambda\gamma & c_8 = -(\alpha\lambda(\gamma\nu - \beta) - \gamma(\alpha + \lambda)) \\ c_4 = \alpha\lambda & c_9 = \alpha\lambda\gamma\beta \\ c_5 = \alpha\lambda\gamma & \end{array}$$

Die Parameter sind identifiziert, weil:

$\alpha = c_1$   $\lambda = c_4/c_1$   $\gamma = c_5/c_4$   $\nu = c_6/c_5$   $\beta = c_9/c_5$  und überidentifiziert, wenn man noch die anderen Restriktionen hinzuzieht.

Die Identifikation von zeitkontinuierlichen Modellen erweist sich als relativ kompliziert, wenn man mehr als drei Variable betrachtet.

Ist das Modell identifiziert, kann es geschätzt werden. Hierzu bieten sich verschiedene Möglichkeiten an, die von verschiedenen Annahmen bezüglich Fehlerverteilungen, Likelihoodfunktionen und apriori-Verteilungen der Parameter abhängen. So kann man unter der Annahme (9.18b)  $\Omega = I$  eine Datenanpassung nach der Methode der kleinsten Quadrate (OLS) vornehmen:

$$(9.31) \quad \sum \{y(t) - \hat{y}(t)\}' \{y(t) - \hat{y}(t)\} = \min!$$

wobei die Modellprognosen  $\hat{y}(t)$  den Output des Modells (9.16) repräsentieren. Sie werden zweckmäßigerweise über numerische Integration (Shampine, Watts & Davenport, 1976) oder mittels (9.6), (9.7) berechnet. Die Funktion (9.31) kann dann numerisch minimiert werden mit einem Programm zur nichtlinearen Regression (Ralston, Jennrich, Sampson & Uno, 1979).

Eine Schätzung des Systems (9.20) mit den Daten aus Tabelle 9.4 liefert folgende Werte (Tabelle 9.8).

Tabelle 9.8: Direkte Schätzungen eines zeitkontinuierlichen Modells mit der nichtlinearen Regression BMDPAR

Parameter	Startwerte für BMDPAR	Schätzungen mit BMDPAR	Standardschätz- fehler
$\alpha =$	.60	.941	.129
$\beta =$	.25	.153	.022
$\lambda =$	4.00	1.275	.383
$\mathbf{v} =$	2.00	1.989	.053
$\gamma =$	.40	.653	.179
$C(0)$	} „wahre“ Anfangszustände im Zeitpunkt $t=0$	16.92	2.624
$Y(0)$		26.32	2.078
$K(0)$		44.65	2.188

Fehlerquadratsumme  $SS = 856.87$

Die Schätzungen des hier verwendeten exakten Modells stimmen nicht so gut mit den Parametern überein wie die per LISREL im diskret approximierten Modell gewonnenen (vgl. mit Tabelle 9.7). Jedoch ist der Datenfit relativ gut (s. Figur 9.4), obwohl die Inspektion der Residuen den Verdacht auf positive Autokorrelation aufkommen läßt. Es bleibt zu vermuten, daß das einfache OLS-Kriterium (9.31) wegen (9.18b) nicht angemessen ist.

Für den Fall  $\Omega \neq I$  wurde von Phillips (1972) ein iteratives Schätzverfahren nach der Methode der gewichteten Kleinstquadrate (WLS) vorgeschlagen. Minimiert wird dabei:

$$(9.32) \quad \sum \{y(t) - \hat{y}(t)\}' S \{y(t) - \hat{y}(t)\} = \min!$$

mit positiv definierter Gewichtsmatrix  $S$

Auf die Minimierung der generalisierten Fehlervarianz (= Determinante der Fehlerkreuzproduktmatrix)

$$(9.33) \quad \left| \sum_t \{y(t) - \hat{y}(t)\} \{y(t) - \hat{y}(t)\}' \right| = \min!$$

läuft die Berechnung von Quasi-Maximum-Likelihood (Bergstrom & Wymer, 1976) bzw. Bayes-Schätzern (Box & Tiao, 1973, S. 421ff.) hinaus.

Werden die Modellprognosen  $Y(t)$  als „Lösung“ des Differentialgleichungssystems über ein numerisches Integrationsverfahren (z.B. Runge-Kutta) be-

stimmt (s.a. Chan, Chan & Chan, 1972), ist es möglich, mit Dummy- oder Scheinvariablen Interventionseffekte auf der Inputseite des zeitkontinuierlichen multivariaten Systems so zu modellieren, wie es für eine diskrete univariate Zeitreihe von Revenstorff & Keeser (1979, S. 209) und von McCain & McCleary (1979, S. 261 ff.) vorgeführt wurde.

PLOT OF ZEIT VERSUS PREDICTED AND OBSERVED CYK AND VERSUS RESIDUAL

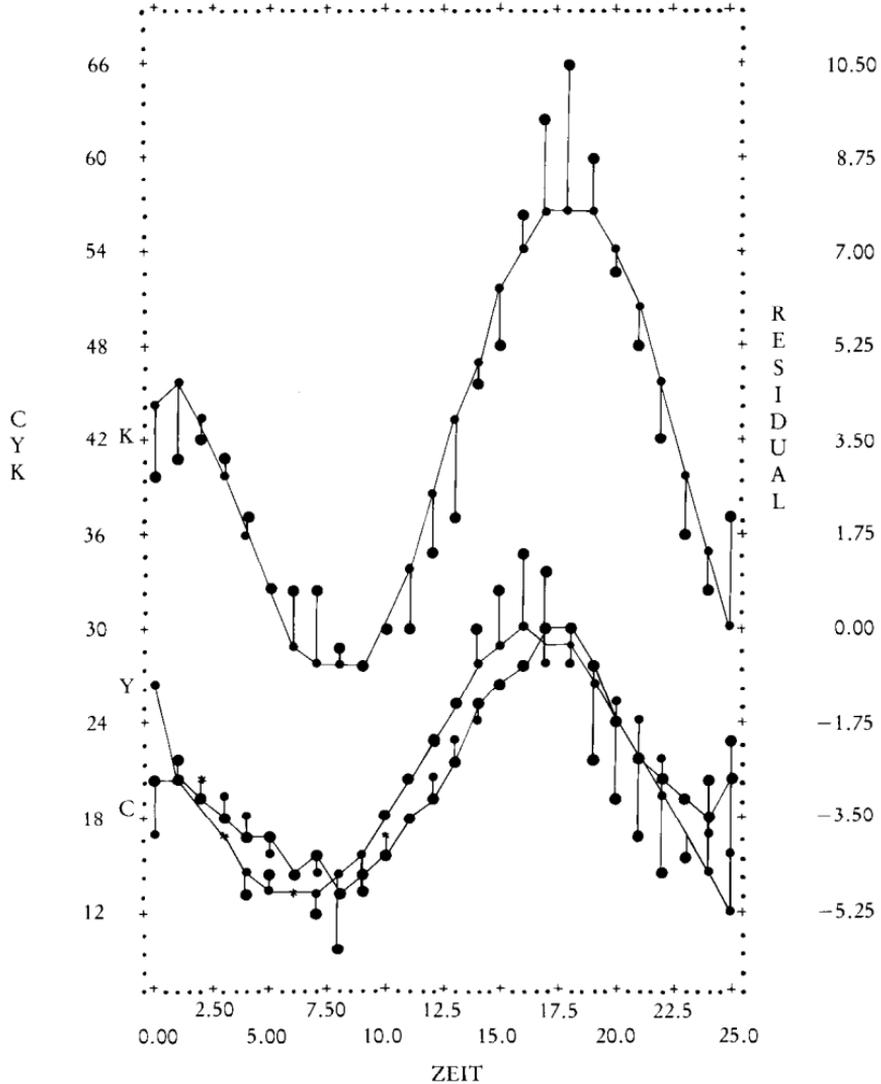


Fig. 9.4: Plot der multivariaten Zeitreihe mit den Variablen  $C(t)$ ,  $Y(t)$ ,  $K(t)$  aus Tabelle 9.4 (schwarze Punkte) und Modellprognose des nach dem Kriterium (9.31) angepaßten Differentialgleichungsmodell (9.20) mit den Parameterschätzungen aus Tabelle 9.8

## 9.2 Panelanalyse (repeated-measurements) ( $N > M$ , $T \geq 2$ , $M > 1$ )

### 9.2.1 Zeitkontinuierliches Modell

Oftmals ist es leichter mehrere Personen zu wenigen Zeitpunkten (z.B.  $T=2$ ) zu beobachten, als an *einer* Person eine ausreichend lange Zeitreihe (z.B.  $T=30$ ). In ersterem Fall liegt dann eine Zeitreihe von Querschnitten (repeated-measurements-design, Panelanalyse) vor. Es ist allgemein üblich, solche Daten varianzanalytisch im Sinne der Wachstumskurvenanalyse zu untersuchen. Dabei werden Entwicklungsverläufe rein deskriptiv durch Polynome beschrieben. Sind  $T$  Zeitpunkte erhoben, lassen sich Polynome bis zum Grade  $T-1$  anpassen. Eine theoretische Begründung für die Beschreibung von Entwicklungsverläufen durch diesen Polynomansatz wird im allgemeinen *nicht gegeben* (s. z.B. Bock, 1979). Außerdem sind bei 2 Messungen nur lineare Extrapolationen als Prognose möglich. Will man mit 2-Punkt-Messungen nicht-lineare Verläufe simulieren oder vorhersagen, muß man systemtheoretische Methoden (s.a. Kap. 7.3 und dieses Kapitel) heranziehen.

Wir setzen hier ein theoretisches Modell für den *Veränderungsprozeß* an. Ähnlich verfahren Singer & Spilerman (1979), jedoch ohne Lösungen für das Identifikations- und Schätzproblem anzugeben.

Ist das Veränderungsmodell formuliert und identifiziert, werden Entwicklungskurven hergeleitet. Diese sind im Gegensatz zum klassischen Wachstumskurvenmodell keine Polynome. Für die Schätzung der Parameter benötigt man mindestens zwei Meßzeitpunkte (Wellen). Ein dritter Zeitpunkt dient zur Testung des Modells. Weicht die Modellprognose (z.B. ein erwarteter Mittelwertsvektor zum Zeitpunkt  $t$ ) signifikant vom empirischen Befund (beobachteter Mittelwertsvektor) ab, gibt es drei mögliche Ursachen:

- a) Das Modell ist falsch spezifiziert. So können die Variablenbeziehungen falsch postuliert sein oder der Prozeß fordert ein Modell mit zeitabhängigen Konstanten (das Modell „altert“).
- b) Wesentliche Variable wurden nicht im Modell aufgenommen (das Modell ist zu einfach, kein empirischer Gehalt)
- c) Die Entwicklung der Rahmenbedingungen  $u(t)$  war entweder nicht unter Kontrolle des Forschers oder wurde von ihm nicht richtig antizipiert. Diese Gefahr ist bei allen Quasiexperimenten und Paneluntersuchungen vorhanden.

Weicht die Modellprognose nicht von den Beobachtungen ab, halten wir das Modell bei. Es zeigt sich hier klarer als bei anderen statistischen Modellen, wie wichtig die äußeren Einflüsse  $u(t)$  für die zeitlichen Verläufe sind. Die Kenntnis der Ausgangswerte  $X(0)$  und die Kenntnis der Modellparameter genügen nicht, um Prognosen richtig zu stellen. Erst wenn die Kontrolle der Rahmenbedingungen  $u(t)$  oder deren Prognostizierbarkeit gewährleistet ist, sind Prognosen möglich.

In einer Test-Retest-Situation (Panelmodell) werden, statt an einem Meßwertträger T Beobachtungen zu erheben, N Personen zu T=2 Zeitpunkten auf M Variablen gemessen. Die „Lösung“ des Systems (9.3) ist in diesem Fall:

$$(9.34) \quad {}_M X_N(1) = e^A {}_M X_N(0) + \int_0^1 e^{A\tau} d\tau B u = e^A {}_M X_N(0) + (e^A - I)A^{-1}b$$

wenn die Zeitspanne zwischen den Messungen  $\Delta t = 1$  gesetzt und die äußeren Einflüsse zu einer Variablen  $u(t)$  zusammengefaßt wird, die sich über das Zeitintervall nicht verändert. Zur Verdeutlichung haben wir einmal den Datensatz aus Tabelle 9.4 in einen Datensatz aus einer Paneluntersuchung uminterpretiert und zum anderen drei häufig in der Empirie auftretende Veränderungsprozesse konstruiert. Die Systemgleichungen finden sich in (9.20) und in Tabelle 9.9. Die „Daten“ sind in Tabelle 9.4 und 9.10 aufgeführt.

Der erste Prozeß A weist einen „*Regressionseffekt*“ auf: Personen mit niedrigen Werten verbessern sich, während sich Personen mit hohen Werten auf beiden Variablen verschlechtern.

Der zweite Prozeß zeigt einen *ceiling- oder Deckeneffekt*: Personen mit hohen Werten verbessern sich kaum noch, während starke Verbesserungen bei Personen mit „Nachholbedarf“ zu beobachten sind.

Der dritte Prozeß C zeigt einen *varianzmaximierenden* Prozeß: die interindividuellen Differenzen werden im multivariaten Raum teilweise größer.

Tabelle 9.9: Koeffizienten der linearen inhomogenen Differentialgleichungssysteme  $X(t) = A x(t-1) + b$  für die Datensätze A, B und C

---

System A: mit Regres- sionseffekt	$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.39680 & 0.19812 \\ -0.37355 & -0.38008 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2.13339 \\ 7.84964 \end{bmatrix}$ <p>Eigenwerte: <math>\lambda_1 = -.38844 + .27192 i</math>  <math>\lambda_2 = -.38844 - .27192 i</math></p>
System B: mit Decken- od. Sätti- gungseffekt	$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.23180 & -0.13938 \\ -0.09131 & -0.15063 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6.68670 \\ 4.34701 \end{bmatrix}$ <p>Eigenwerte: <math>\lambda_1 = -.07132</math>  <math>\lambda_2 = -.31111</math></p>
System C	$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.18064 & -0.20209 \\ -0.26588 & -0.12308 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5.39616 \\ 5.51296 \end{bmatrix}$ <p>Eigenwerte: <math>\lambda_1 = -.08172</math>  <math>\lambda_2 = -.38544</math></p>

---

Tabelle 9.10: Fiktive Datensätze A, B und C zur Schätzung von Differenzen- und Differentialgleichungssystemen

Nr. der Person	Datensatz A				Datensatz B				Datensatz C			
	Regressionseffekt		Deckeneffekt		Prätest		Posttests		Prätests		Posttests	
	(1. Welle)	(2. Welle)	(1. Welle)	(2. Welle)	(1. Welle)	(2. Welle)	(1. Welle)	(2. Welle)	(1. Welle)	(2. Welle)	(1. Welle)	(2. Welle)
	X <sub>10</sub>	X <sub>20</sub>	X <sub>11</sub>	X <sub>21</sub>	X <sub>10</sub>	X <sub>20</sub>	X <sub>11</sub>	X <sub>21</sub>	X <sub>10</sub>	X <sub>20</sub>	X <sub>11</sub>	X <sub>21</sub>
1	1	1	2	5	1	1	6	6	1	1	6	6
2	1	5	3	9	4	7	8	10	7	7	10	10
3	1	8	3	11	1	10	5	13	12	12	13	13
4	1	11	4	13	7	4	11	7	15	15	15,5	15,5
5	1	14	5	15	10	1	14	4	17	17	17,1	17,1
6	2	17	7	16	1	15	4	17	1	4	4	9
7	5	19	8	17	4	12	7,5	14	4,5	10	5,5	13
8	9	20	11	17	7	9	11	10	6	14,5	6,5	16,5
9	12	20	13	17	10	6	14	7	6,5	17,5	6,5	18
10	14	20	14	16	4	16	8	17	6,5	19	6,5	19,1
11	16	19	14	13	1	19	4	19,5	7	2	11	3
12	17	15	14	11	8	18	10	18,5	13	3,5	15,5	4
13	17	10	15	9	7	13	10	14	16,5	4	17,5	4
14	16	7	14	7	15	1	18	1,5	18	4	18,5	4
15	16	4	14	5	18	2	19	4	19	4	19,1	4
16	14	4	12	4	14	6	16	8				
17	8	1	9	5	18	8	19	11				
18	4	1	5	5	13	19	14	19				
19	4	6	6	10	15	19	15,5	19				
20	6	12	8	14	13	15	14	15,5				
21	8	15	11	16	15	14	16	15				
22	13	15	13	12	16	16	16,5	16,5				
23	11	13	12	11	19	13	19	14				
24	9	12	10	13	19	15	19	15,5				
25	10	10	9	11	19	17	19	17,3				
26	14	10	12	9	18	19	18,2	19				
27	13	5	11	7	19	19	19,1	19,1				
28	7	4	8	8	14	12	15	13				

Die Prozeße des „Regressionseffekts“, des „Deckeneffekts“ und der „Differenzierung“ sind in Figur 9.5-7 im bivariaten Testraum durch Veränderungskurven (Zeitpfade, Trajekturen) dargestellt. Punkte stellen die Testwerte dar und Pfeile geben die unter dem jeweiligen Modellparametersatz (Tabelle 9.9) erwarteten Veränderungswege (Lernkurven, Trajektorien) an. Beobachtet

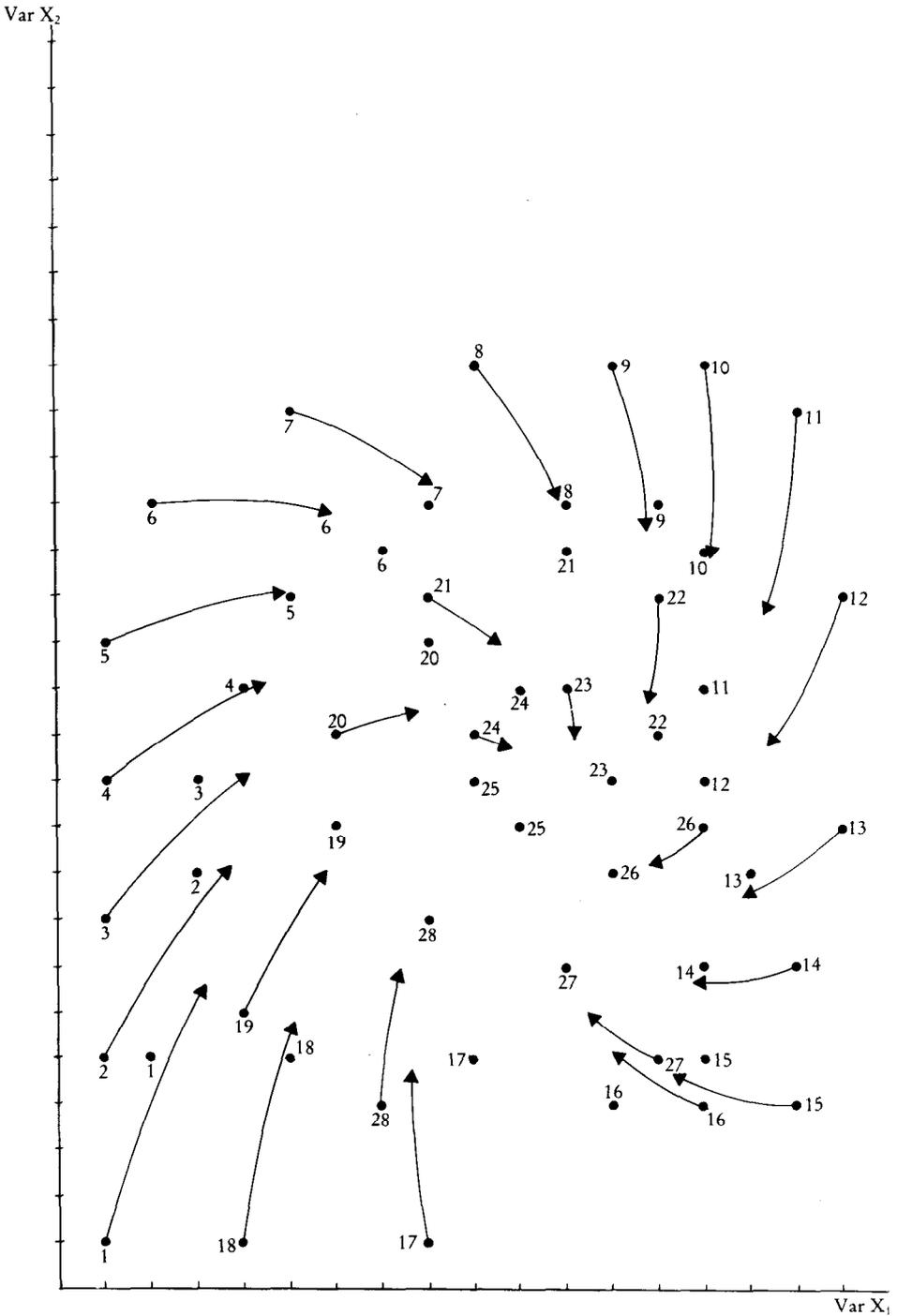


Fig. 9.5: Prozeß A mit „Regressionseffekt“ auf Test  $X_1$  u.  $X_2$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.39680 & 0.19812 \\ -0.37355 & -0.38008 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2.13339 \\ 7.84964 \end{bmatrix}$$

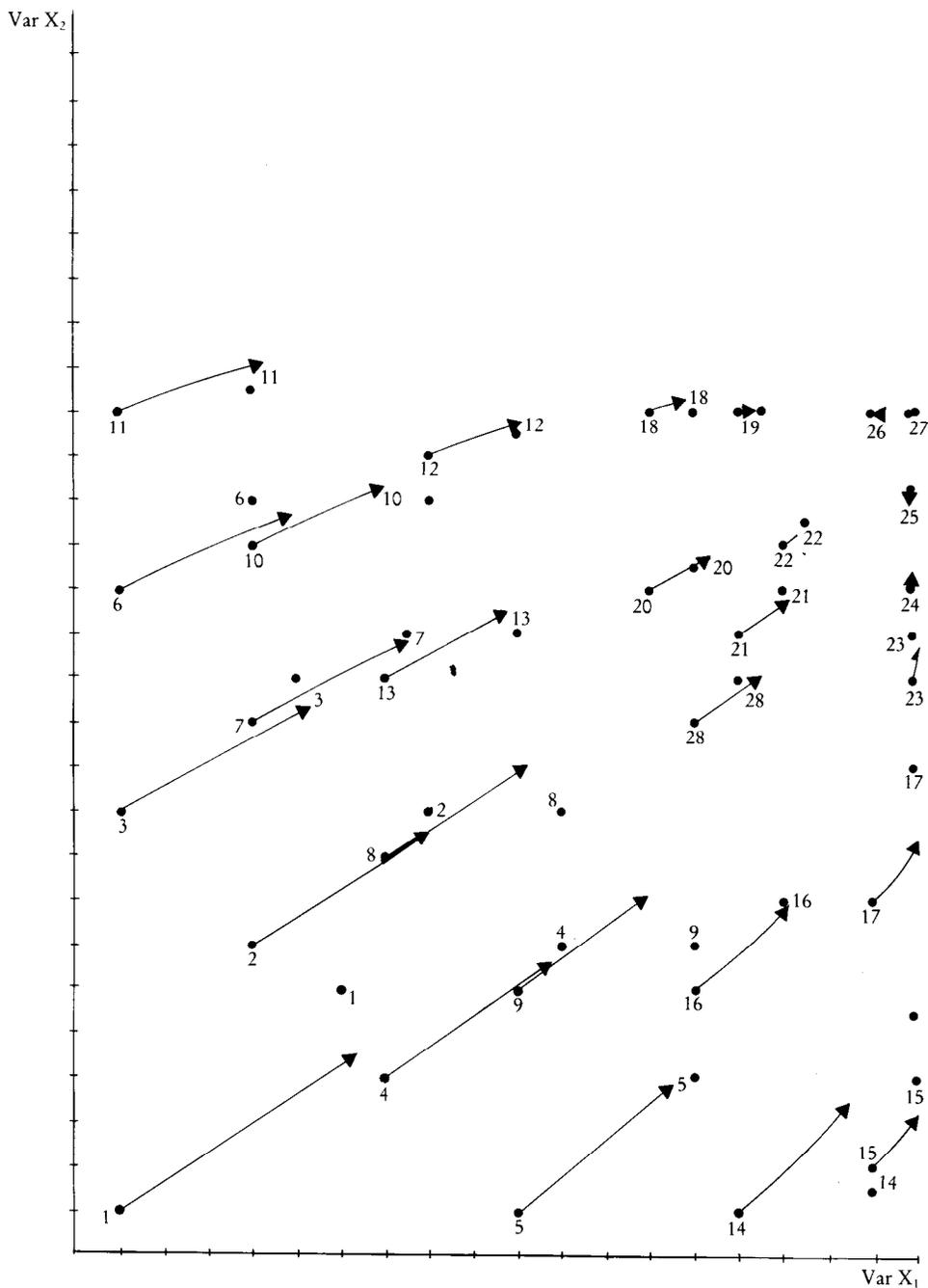


Fig. 9.6: Prozeß B mit „Ceiling- bzw. Deckeneffekt“ auf  $X_1$  u.  $X_2$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.23180 & -0.13938 \\ -0.09131 & -0.15063 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6.68670 \\ 4.34701 \end{bmatrix}$$



werden aber nur Prätest (Anfang des Veränderungsweges) und Posttest. Die erwarteten Veränderungswege gelten unter der Bedingung vorliegender Pretestwerte. Will man zusätzlich „wahre“ Pretestwerte zulassen, müssen längere Zeitreihen vorliegen. Allerdings tritt dann das Problem inzidenteller Parameter auf, weil für jede Person ein derartiger „wahrer“ Pretestvektor eingeführt wird (s.a. Fischer, 1974, S. 350f.; Neyman & Scott, 1948).

Für alle Überlegungen gilt hier folgende Rahmenbedingung: während alle Parameter für alle Personen gleich sind, dürfen Anfangswerte (Pretests), Endwerte (Posttests) und damit die erwarteten Verläufe (Lern- oder Entwicklungskurven) von Person zu Person verschieden sein. *Damit ist es möglich, die verschiedensten Effekte (Regressionseffekt, Ceilingeffekt etc.) unter einem einheitlichen Prozeßgesichtspunkt zusammenzufassen.*

### 9.2.2 Diskrete Approximation des stochastischen zeitkontinuierlichen Panelmodells mit LISREL

Die Approximation der Systeme A („Regressionseffekt“), B („Ceiling-Effekt“) und C (Tabelle 9.9) mittels LISREL erfolgt genauso wie es für die multivariate Zeitreihe im Abschnitt 9.1.2 gezeigt wurde. Jedoch muß das in Tabelle 9.5 gezeigte Modell an einigen Punkten abgeändert werden. Es liegen ja nur zwei Variable vor und die Matrix A weist keine Nulleinträge auf. Die Ergebnisse der linearen Approximation finden sich in Tabelle 9.11.

Tabelle 9.11: Approximation der Systeme A („Regressionseffekt“), B („Ceilingeffekt“) und C („Differenzierung“) mit LISREL

---

System A: „Regressionseffekt“

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.399 & +0.192 \\ -0.362 & -0.382 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2.217 \\ 7.750 \end{bmatrix}$$

Matrix  $\Psi = \begin{bmatrix} 0.756 & \\ & 1.245 \end{bmatrix}$  alle | t-Werte | > 1.976  
 $p=1.00$  mit  $df=0$

System B: „Ceilingeffekt“

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.230 & -0.138 \\ -0.090 & -0.150 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6.631 \\ 4.315 \end{bmatrix}$$

Matrix  $\Psi = \begin{bmatrix} 0.224 & \\ & 0.552 \end{bmatrix}$  alle | t-Werte | > 1.778  
 $p=1.00$  mit  $df=0$

System C: „Differenzierung“

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.178 & -0.197 \\ -0.260 & -0.121 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5.301 \\ 5.412 \end{bmatrix}$$

Matrix  $\Psi = \begin{bmatrix} 0.637 & \\ & 0.792 \end{bmatrix}$  alle | t-Werte | > 2.63  
 $p=0.2995$  mit  $df=1$

---

Die angeführten Modelle  $\dot{x}(t) = Ax(t) + b$  beziehen ihre Parameter aus einem LISREL-Modell, das ähnlich zu dem in Tabelle 9.5 gezeigtem ist. Dabei bildet die Matrix  $-A$  einen Teil der Betamatrix und der Vektor  $b$  einen Teil der  $\Gamma$ -Matrix in LISREL. Bei Modellen mit mehr Variablen entscheidet die Auswahl der Startwerte über den Erfolg des Schätzverfahrens. Eine Prozedur, die sich für die Startwertbestimmung bis zu 9 Gleichungen bewährt hat ist in Möbus (1983) beschrieben.

Obwohl die über LISREL gewonnenen Schätzungen nicht mehr als 0.1 von den Parametern in Tabelle 9.9 abweichen, sollte vor einer Generalisation dieser erfreulichen Ergebnisse auf „echte“ Daten gewarnt werden. Die Güte der Approximation dürfte von Faktoren wie Fehlervarianzen, Schnelligkeit der Veränderungen und Zeitintervall zwischen den Messungen abhängen. Es werden hierzu noch genauere Studien notwendig sein.

### 9.2.3 Identifikation und Schätzung der zeitkontinuierlichen Panelmodelle

Lassen sich nicht alle Parameter eindeutig schätzen, oder müssen aus inhaltlichen Gründen Modelle restringiert werden, können Parameter auf Konstante fixiert werden oder es können Gleichheitsrelationen zwischen den Parametern spezifiziert werden (so z.B. für d. „Regressionseffekt“). Eine solche Annahme wäre z.B.  $a_{11} = a_{22}$ :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad [u(t)]$$

Nach (9.28) vereinfacht sich das nichtlineare Gleichungssystem zur Identifikationsprüfung zu

$$\begin{aligned} c_1 &= b_1 & c_4 &= -(a_{11}^2 + a_{12}a_{21}) \\ c_2 &= -(b_1a_{11} + b_2a_{12}) & c_5 &= b_2 \\ c_3 &= 2a_{11} & c_6 &= -(b_2a_{11} + b_1a_{21}) \end{aligned}$$

Damit sind die Parameter identifiziert, wie sich durch Einsetzen feststellen läßt:

$$\begin{aligned} b_1 &= c_1 & a_{21} &= (-c_6 - c_5c_3/2)/c_1 \\ b_2 &= c_5 & a_{12} &= (-c_2 - c_1c_3/2)/c_5 \\ a_{11} &= c_3/2 \end{aligned}$$

Schätzungen mit dem Programm BMDPAR (Möbus, 1983) nach dem einfachen OLS-Kriterium (9.31) lauten für das nichteingeschränkte Modell mit  $a_{11} \neq a_{22}$ :

Tabelle 9.12: Direkte Schätzung des Systems A „Regressionseffekt“ mit BMDPAR und numerischer Bestimmung der Veränderungsverläufe (= Lernkurven, Trajektorien) über numerische Integration des Differentialgleichungssystems

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -.39671 & +.19816 \\ -.37351 & -.38007 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2.13292 \\ 7.84969 \end{bmatrix}$$

Fehlerquadratsumme: 37.72

An den negativen Koeffizienten  $a_{11}$  und  $a_{22}$  erkennt man die Selbstdämpfung der Variablen: Je höher die Pretestwerte  $X(0)$  einer Person, desto kleiner der Zuwachs. Damit ist ein typischer Regressionseffekt auf beiden Variablen  $X_1$  und  $X_2$  beschrieben. Es sollten in Zukunft individuelle Veränderungsprozesse nicht mehr durch die Differenz  $x_i(t) - x_i(0)$  der Meßwertvektoren der Person  $i$ , sondern durch deren Pretestvektor  $x_i(0)$ , dem Parametersatz A, B **und** dem Verlauf der äußeren Einflüsse  $u(t)$  beschrieben werden. Der Einfachheit halber, haben wir hier angenommen, daß sich alle äußeren Einflüsse in einer Summationsvariablen  $u(t)$  vereinigen ließen. Dabei sollten sich die Stärke der Variable  $u(t)$  in der Zeit zwischen Post- und Prätest nicht ändern:  $u(t) = 1$ . Diese Einschränkung kann man im Prinzip fallen lassen, wenn man  $u(t)$  öfter mißt oder die Entwicklung von  $u(t)$  selbst steuert oder den Verlauf von  $u(t)$  prognostizieren kann. Steuert der Forscher die unabhängige Variable  $u(t)$ , liegt eine dynamische Version des klassischen Experiments vor. Dazu gibt es eine sehr lesenswerte Arbeit von Thalmaier (1979), die sich mit der kognitiven Bewältigung der optimalen Steuerung eines dynamischen Systems befaßt.

Die Systeme B („Ceilingeffekt“) und C („Differenzierung“) lassen sich ähnlich identifizieren und schätzen. Bei dem Modell (9.20) wurde die Identifizierung der Parameter schon in (9.29) und (9.30) gezeigt. Um jetzt den ursprünglich

Tabelle 9.13 : Direkte Schätzung des Modells (9.20) mit Paneldaten aus Tabelle 9.4 mittels BMDPAR und numerischer Bestimmung der Veränderungsverläufe

Parameter aus Modell (9.20)	Schätzungen mit nichtlinearer Regression BMDPAR
$\alpha = .600$	.620
$\beta = .250$	.198
$\lambda = 4.000$	3.231
$\nu = 2.000$	1.994
$\gamma = .400$	.384

als Zeitreihe angelegten Datensatz in einen Datensatz aus einer Test-Retest- (oder Panel-)untersuchung umzuinterpretieren, haben wir jeweils zwei Zeitpunkte zum Datensatz einer Person zusammengefaßt. Es ergaben sich also 13 „Versuchspersonen“. Die Daten wurden dann entsprechend der Personennummer (rechter Rand der Tabelle 9.4) in eine neue Rangreihe gebracht (gemischt), um auch den letzten Eindruck einer Zeitreihe zu verwischen. Die Schätzungen nach BMDPAR (Fortran-Code in Möbus, 1983) sind in Tabelle 9.13 aufgeführt.

Dabei stimmen die Schätzungen mit Panel„daten“ (Tab. 9.13) besser mit den wahren Parametern  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\lambda$ ,  $\gamma$ ,  $\nu$  überein als die Schätzungen auf der Basis der Originalzeitreihe (Tab. 9.8)! Dieses ist ein weiterer Hinweis auf die Autokorreliertheit der Residuen.

## 10. *Schlußbemerkungen*

Wir haben die Veränderungsmessung, -analyse und -prognose unter dem Blickwinkel betrachtet, daß mit den Ergebnissen einer empirischen Längsschnittuntersuchung prinzipiell Handlungsanweisungen zur Optimierung von psychologischen Interventionen gegeben werden können.

Für dieses Ziel sind einige Methoden (z.B. Arima(p,d,q)-Modelle, varianzanalytische Wachstumskurvenmodelle, einfache Markoffketten, Pfadanalysen mit Korrelationsmatrizen) weniger und andere (Transfermodelle, Systemtheoretische Modelle) besser geeignet.

Für alle Typen von Anwendungen gilt aber, daß Veränderungsmessung nicht bei einer individuellen Z-Punkt-Messung und deren Interpretation („Person A hat sich von  $t_1$  nach  $t_2$  um  $\Delta X$  verbessert“) stehen bleiben darf, sondern, daß die Messungen als eventuell meßfehlerbehaftet und als Realisationen eines multivariaten stochastischen Prozesses, der äußeren Einflüssen unterliegt, begriffen werden müssen. Veränderungsmessung bedeutet dann:

- a) Quantifizierung der Realisationen  $x_i(t)$  des Pbn  $i$
- b) Schätzung der Prozeßparameter
- c) Quantifizierung bzw. Kontrolle der exogenen Einflüsse

Bei der Einzelfallanalyse benötigt man hierzu längere Zeitreihen. Die Zahl der Zeitpunkte kann reduziert werden, wenn man mehrere Personen simultan betrachtet und die Annahme aufstellt, daß alle Personen mit Prozessen beschreibbar sind, die gleiche Parameter besitzen (z.B. Panelanalyse).

Legt man diese Maßstäbe an, kann man eine Vielzahl von Methoden als wenig richtungsweisend einstufen und somit ein wenig Ordnung in das Methoden-„chaos“ bringen.

*Literatur*

- Aitken, A. C. 1935. On Least Squares and Linear Combination of Observations, *Proceedings of the Royal Society of Edinburg*, 55.
- Akaike, H. 1974. Markovian Representation of Stochastic Processes and its Application to the Analyses of Autoregressive Moving Average Processes. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 26, 363-387.
- Akaike, H. 1976. Canonical Correlations Analysis of Time Series and the Use of an Information Criterion. In: Mehra, R. & Lainiotis D. G. (Eds.): *Advances and Case Studies in System Identification*. New York: Academic Press.
- Algina, J. & Swaminathan, H. 1977. A Procedure for the Analysis of Time-Series Designs. *J. of Experimental Education*, 45, 56-60.
- Algina, J. & Swaminathan, H. 1979a. Application of Growth Curve Methodology to the Analysis of Interrupted Time Series Designs. Paper presented at the AERA-Congress, San Francisco.
- Algina, J. & Swaminathan, H. 1979b. Alternatives To Simonton's Analyses of the Interrupted and Multiple-Group Time-Series Designs. *Psychological Bulletin*, 86, 919-926.
- Amemiya, T. 1967. A Note on the Estimation of Balestra-Nerlove Models. Technical Report Nr. 4., Inst. of Math. Studies in the Social Sciences. Stanford University.
- Anderson, O. D. 1975. *Time Series Analysis and Forecasting: The Box-Jenkins Approach*. London: Butterworths.
- Anderson, T. W. 1954. Probability Models of Analyzing Time Changes in Attitudes. In: Lazarsfeld, P. F. (Ed.): *Mathematical Thinking in the Social Sciences*. Glencoe.
- Anderson, T. W. 1971. *The Statistical Analysis of Time Series*. New York: Wiley.
- Anderson, T. W. 1978. Repeated Measurements in Autoregressive Processes. *Journal of the American Statistical Association*, 73, 371-378.
- Anderson, T. W. 1979. Panels and Time Series Analysis: Markov Chains and Autoregressive Processes. In: Merton et al. (Eds.): *Qualitative and Quantitative Social Research*. New York.
- Anderson, T. W. & Goodman, L. A. 1957. Statistical Inference about Markov Chains. *Annals of Math. Statistics*, 28, 89-110.
- Andreski, S. 1977. *Die Hexenmeister der Sozialwissenschaften*. München: Deutscher Taschenbuch Verlag.
- Andress, H. J. 1980. Methoden temporaler Analyse. Arbeitsbericht Nr. 9, Universität Bielefeld, Fakultät für Soziologie.
- Arminger, G. 1976. Analyse und Auswertung von Paneluntersuchungen. In: Holm K. (Hrsg.): *Die Befragung*, 4, 134-235. München: Francke.
- Athans, M., Dertouzos, M. L., Spann, R. N. & Mason, S. J. 1974. *Systems, Networks and Computation: Multivariable Methods*. New York: Mc Graw Hill.

- Atkinson, R. C. & Estes, W. K. 1963. Stimulus Sampling Theory. In: Luce, R. D., Bush, R. R., Galanter, E. (Eds.): *Handbook of Mathematical Psychology* (Vol. II), 121-268.
- Balestra, P. & Nerlove, M. 1966. Pooling Cross Section and Time Series Data in the Estimation of a Dynamit Model: The Demand for Natural Pass. *Econometrica* (34), 585-612.
- Baltes, P. B. 1979. Einige Beobachtungen und Überlegungen zur Verknüpfung von Geschichte und Theorie der Entwicklungspsychologie der Lebensspanne. In: Baltes, P. B. & Eckensberger, L. H. (Hrsg.): *Entwicklungspsychologie der Lebensspanne*. Stuttgart, 13-33.
- Baltes, P. B. & Nesselroade, J. 1979. Die entwicklungspsychologische Analyse von individuellen Unterschieden in mehreren Meßgrößen. In: Baltes, P. B. & Eckensberger, L. H. (Hrsg.): *Entwicklungspsychologie der Lebensspanne*. Stuttgart, 145-178.
- Bartholomew, D. J. 1967. *Stochastic Models for Social Processes*. New York: Wiley.
- Barlow, D. H., Hersen, M. 1973. Single-Case Experimental Designs. *Archive of General Psychiatry*, 29, 319-325.  
 Designs für Einzelfalexperimente. In: Petermann, F. (Hrsg.): 1977, *Methodische Grundlagen klinischer Psychologie*. Weinheim: Beltz, 64-83.
- Bartlett, M. S. 1947. Multivariate Analysis. *Journal of the Royal Statistical Society Supplement, Series B*, (9), 176-197.
- Bartlett, M. S. & Diananda, P. H. 1950. Extension of Quenouille's Test for Autoregressive Schemas. *Journal of the Royal Statistical Society, B* 12, 108ff.
- Bartlett, M. S. 1951. The Frequency Goodness of Fit Test for Probability Chains. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 86-95.
- Bartlett, M. S. & Rajalkashman, D. V. 1953. Goodness-of-Fit Tests for Simultaneous Autoregressive Series. *Journal of the Royal Statistical Society*, 315, 107ff.
- Becker, P. & Schmidtke, A. 1977. Intelligenz und Hirnschädigung in ihrer Beziehung zur intellektuellen Lernfähigkeit. *Heilpädagogische Forschung*, VII.
- Bellman, R. & Astrom, K. J. 1970. On Structural Identifiability. *Mathematical Biosciences*, 7, 329-339.
- Bereiter, C. 1963. Some Persisting Dilemmas in the Measurement of Change. In: Harris, Ch. (Ed.): *Problems in Measuring Change*. Madison, Wisconsin.
- Bergstrom, A. R. & Wymer, C. R. 1976. A Model of Disequilibrium Neoclassical Growth and its Application to the UK. In: Bergstrom, A. R.: *Statistical Inference in Continous Time Models*. Amsterdam: North Holland Publ. Company, 267-327.
- Blalock, H. M. 1969. *Theory Construction: From Verbal to Mathematical Formulations*. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice Hall.
- Bloomfield, P. 1976. *Fourier Analysis of Time Series: An Introduction*. New York: Wiley.
- Blumen, I., Kogan, M. & McCarthy, P. J. 1955. The Industrial Mobility of Labor as a

- Probability Process. Ithaka, New York: Cornell Studies of Industrial and Labor Relations, Volume 6.
- Bock, R. D. 1963. Multivariate Analysis of Variance of Repeated Measurements. In: Harris, Ch. (Ed.): Problems in Measuring Change. Madison, Wisc.
- Bock, R. D. 1975. Multivariate Statistical Methods in Behavioral Research. New York: Mc Graw-Hill.
- Bock, R. D. 1979. Univariate and Multivariate Analysis of Variance of Time-Structured Data. In: Nesselroade, J. R. & Baltes, P. B. (Eds.): Longitudinal Research in the Study of Behavior and Development. New York: Academic Press.
- Bortz, J. 1977. Lehrbuch der Statistik. Berlin: Springer.
- Bower, C. P., Padia, W. L. & Glass, G. V. 1974. TMS: Two Fortran IV Programms for the Analysis of Time-series Experiments. Boulder, Co.: Laboratory of Educational Research.
- Bower, G. H. & Trabasso, T. R. 1964. Concept Identification. Studies in Mathematical Psychology (R. C. Atkinson (Ed.)), Stanford.
- Box, G. E. P. 1949. A General Distribution Theory for a Class of Likelihood Criteria. *Biometrika*, 36, 317-346.
- Box, G. E. P. 1954. Some Theorems on Quadratic Forms Applied in the Study of Analysis of Variance Problems: I. „Effect of Inequality of Variances in the One-Way Classification“. *Annals of Mathematical Statistics*, 25, 290-302.
- Box, G. E. P. & Jenkins, G. M. 1976<sup>3</sup>. Time Series Analysis: Forecasting and Control. San Francisco: Holden-Day.
- Box, G. E. P. & Pierce, D. A. 1970. Distribution of Residual Autocorrelations in Autoregressive Integrated Moving Average Time Series Models. *Journal of the American Statistical Association*, 64, 1509.
- Box, G. E. P. & Tiao, G. C. 1965. A Change in Level of a Non-Stationary Time Series. *Biometrika*, 52, 181-192.
- Box, G. E. P. & Tiao, G. C. 1973. Bayesian Inference in Statistical Analysis. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publ. Co.
- Box, G. E. P. & Tiao, G. C. 1975. Intervention Analysis with Applications of Economic and Environmental Problems, *Journal of the American Statistical Association*, 70, 70-79.
- Box, G. E. P. & Tiao, G. C. 1977. A Canonical Analysis of Multiple Time Series. *Biometrika*, 64, 355ff.
- Bracht, G. H. & Glass, G. V. 1968. The External Validity of Experiments. *American Educational Research Journal*, 5, 437-474.
- Cadzow, J. A. & Martens, H. R. 1970. Discrete-Time and Computer Control Systems. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, Inc.
- Campbell, D. T. 1963. From Description to Experimentation: Interpreting Trends as Quasi-Experiments. In: Harris, Ch. (Ed.): Problems in Measuring Change. Madison, Wisc.

- Campbell, D. T. & Stanley, J. C. 1963. Experimental Designs for Research on Teaching. In: Gage, N. L., (Ed.): Handbook on Teaching. Chicago: Rand Mc Nally.
- Campbell, D. T. & Stanley, J. C. 1966. Experimental and Quasi-Experimental Designs for Research. Chicago: Rand Mc Nally.
- Cattell, R. B. 1963. The Structuring of Change by P-Technique and Incremental R-Technique. In: Harris, Ch. (Ed.): Problems in Measuring Change. Madison, Wisc.
- Chan, S. P., Chan, S. Y. & Chan, S. G. 1972. Analysis of Linear Networks And Systems: A Matrix-Oriented Approach with Computer Applications. Reading, Mass.: Addison-Wesley.
- Chassan, J. B. 1979<sup>2</sup>. Research Design in Clinical Psychology and Psychiatry. New York: Halsted Press.
- Chatfield, C. 1975. The Analysis of Time Series: Theory and Practice. London: Chapman & Hall.
- Chow, G. C. 1975. Analysis and Control of Dynamit Economic Systems. New York: Wiley.
- Clauss, G., Guthke, J. & Lehwald, G. (Hrsg.), 1978. Psychologie und Psychodiagnostik lernaktiven Verhaltens. Berlin.
- Coleman, J. S. 1964. Introduction to Mathematical Sociology. New York: The Free Press.
- Coleman, J. S. 1966. Causal Models for qualitative Attributes. In: H. O. A. Wold (Ed.): Model Building in the Human Sciences. Monaco.
- Coleman, J. S. 1966. Causal Models for qualitative Attributes. In: H. O. A. Wold Blalock, A. B. (Eds.): Methodology in Social Research. New York: Mc Graw-Hill.
- Coleman, J. S. 1980. Unveröffentlichtes Manuskript.
- Cook, T. D. & Campbell, D. T. 1979. Quasi-Experiments: Nonequivalent Control Groups Designs. In: Cook & Campbell (Eds.): Quasi-Experimentation: Design & Analysis Issues for Field Settings, 95-146. Chicago: Rand Mc Nally.
- Cooley, W. W. & Lohnes, P. R. 1971. Multivariate Data Analysis. New York: Wiley.
- Conlisk, J. 1976. Interactive Markov Chains. Journal of Math. Sociology (4), 157-185.
- Cox, D. R. & Miller, H. D. 1968. The Theory of Stochastic Processes. London: Methuen.
- Cronbach, L. J. & Furby, L. 1970. How should we measure "Change" - or should we? Psychological Bulletin (74), 68-80.
- Da Silva, J. G. C. 1975. The Analysis of Cross-sectional Time Series Data. Institut of Statistics Mimeograph Series No. 1011. Raleigh, N. C.: North Carolina State University (Ph. D. Dissertation).
- Deppe, W. 1977. Formale Modelle in der Psychologie. Stuttgart: Kohlhammer.

- Doreian, P. & Hummon, N. P. 1976. *Modelling Social Processes*. Amsterdam: Elsevier.
- Doreian, P. & Hummon, N. P. 1977. Estimates for Differential Equation Models of Social Phenomena. In: Heise, P. R. (Ed.): *Sociological Methodology*, 180-208. San Francisco: Jossey-Bass Publ.
- Doreian, P. & Hummon, N. P. 1979. Estimating Differential Equation Models on Time Series: Some Simulation Evidence. *Sociological Methods & Research*, 8, 3-33.
- Drösler, J. 1976. Welche Zeiträume lassen sich mit psychologischen Prognosen überbrücken? In: Tack, W. H. (Hrsg.): *Bericht über den 30. Kongreß der Deutschen Gesellschaft für Psychologie in Regensburg*, 2, 3-14.
- Ebenhöh, W. 1975. *Mathematik für Biologen und Mediziner*. Heidelberg: Quelle & Meyer.
- Edgington, E. S. 1967. Statistical Inference from  $N = 1$  experiments. *The Journal of Psychology*, 65, 195-199.
- Edgington, E. S. 1969a. *Statistical Inference: The Distribution-free Approach*. New York: Mc Graw Hill.
- Edgington, E. S. 1969b. Approximate Randomization Tests. *Journal of Psychology*, 72, 143-149.
- Edgington, E. S. 1971. Randomization Tests with Statistical Control over Concomitant Variables. *Journal of Psychology*, 79, 13-19.
- Edgington, E. S. 1973. Randomization Tests: Computer Time Requirements. *Journal of Psychology*, 85, 89-95.
- Edgington, E. S. 1975a. Randomization Tests for One-Subject Operant Experiments. *Journal of Psychology*, 90, 57-68.
- Edgington, E. S. 1975b. Randomization for Predicted Trends. *Canadian Psychological Review*, 16, 49-53.
- Edgington, E. S. 1980. *Randomization Tests*. New York: Marcel Dekker.
- Elashoff, J. D. & Thoresen, C. E. 1978. Choosing a Statistical Method for Analysis of an Intensive Experiment. In: Kratochwill, Th. R. (Ed.), *Single Subject Research: Strategies for Evaluating Change*. New York: Academic Press, 287-311.
- Estes, W. K. & Suppes, P. 1974. Foundations of Stimulus Sampling Theory, In: Krantz, D. H., Atkinson, R. C., Luce, R. D., Suppes, P. (Eds.), *Contemporary Developments in Mathematical Psychology (Vol. 1): Learning, Memory and Thinking*, 163-184.
- Fararo, Th. J. 1973. *Mathematical Sociology*. New York: Wiley.
- Ferschl, F. 1970. *Markoffketten*. Berlin: Springer.
- Fichter, M. M. 1979. Versuchsplanung experimenteller Einzelfalluntersuchungen in der Psychotherapieforschung. In: Petermann, F. & Hehl (Hrsg.), *Einzelfallanalyse*. München: Urban & Schwarzenberg, 140-158.

- Finn, J. D. 1969. Multivariate Analysis of Repeated Measures Data, *Multivariate Behavioral Research*, 4, 391-413.
- Finn, J. D. 1974. *A General Model for Multivariate Analysis*. New York: Holt, Rinehart & Winston.
- Fischer, G. 1974. *Einführung in die Theorie psychologischer Tests*. Bern: Verlag Hans Huber.
- Fischer, G. H. 1976. Some Probabilistic Models for Measuring Change. In: De Gruijter, D. N. M. & van der Kamp, L. J. Th. (Eds.), *Advances in Psychological and Educational Measurement*. New York, 97-110.
- Fischer, G. H. 1977. Some Probabilistic Models for the Description of Attitudinal and Behavioral Changes under the Influence of Mass Communication. In: Kempf, W. F. & Repp, B. H. (Eds.), *Mathematical Models for Social Psychology*. Bern: Huber 102-151.
- Fischer, G. H. 1978. Probabilistic Test Models and their Applications. *The German Journal of Psychology*, 2, 298-319.
- Fisher, R. A. 1951<sup>6</sup>. *The Design of Experiments*, London: Hafner.
- Fisz, M. 1966, 1973<sup>2</sup>. *Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik*. Berlin.
- Frame, J. S. 1964. Matrix Functions and Applications. *IEEE Spectrum*, Vol. 1, No. 6, June.
- Fuller, W. A. 1976. *Introduction to Statistical Time Series*. New York: Wiley.
- Fuller, W. A. & Battese, 1974. Estimation of Linear Models with Crossed Error Structure, *Journal of Econometrics*, 2, 67-78.
- Gaito, J. & Wiley, D. E. 1963. Univariate Analysis of Variance Procedures in the Measurement of Change. In: Harris, Ch. (Ed.), *Problems in Measuring Change*. Madison Wisconsin.
- Gastwirth, J. L. & Rubin, H. 1971. Effects of Dependence on the Level of Some One-Sample Tests. *Journal of the American Statistical Association*, 66, 816-820.
- Geisser, S. & Greenhouse, S. W. 1958. "An Extension of Box's Results on the Use of the F-Distribution in Multivariate Analysis". *The Annals of Mathematical Statistics*, 29, 885-891.
- Gentile, J. R., Roden, A. H. & Klein, R. D. 1972. An Analysis of Variance Model for the Intrasubject Replication Design. *Journal of Applied Behavior Analysis*, 5, 193-198.
- Ginsberg, R. B. 1971 (1). Semi-Markov Processes and Mobility. *Journal of Math. Sociology*, 233-263.
- Ginsberg, R. B. 1972 (2). Incorporating Causal Structure and Exogenous Information with Probabilistic Models: with Special Reference to Choice, Gravity, Migration and Markov Chains, *Journal of Math. Sociology*, 83-103.
- Glass, G. V., Peckham, P. D. & Sanders, J. R. 1972. Consequences of Failure to Meet Assumptions Underlying the Fixed-Effects Analyses of Variance and Covariance. *Review of Educational Research*, 42, 237-288.

- Glass, G. V., Willson, U. L. & Gottman, J. M. 1975. Design and Analysis of Time-Series Experiments. Boulder, Co.: Colorado Associated University Press.
- Goldberger, A. S. 1964. Econometric Theory. New York: Wiley.
- Goldstein, H. 1979. Some Models for Analysing Longitudinal Data on Educational Attainment. Journal of the Royal Statistical Soc., Series A, 142, 407-442.
- Goldstein, H. 1979. The Design and Analysis of Longitudinal Studies. New York: Academic Press.
- Goodman, L. A. 1961. Statistical Methods for the Mover-Stayer Model. Journal of the American Statistical Association, 56, 841-868.
- Goodman, L. A. 1974. Exploratory Latent Structure Analysis Using Both Identifiable and Unidentifiable Models, Biometrika, 215-231.
- Gottman, J. M. 1981. Time Series Analysis. Cambridge: Cambridge University Press.
- Gottman, J. M. & Glass, G. V. 1978. Analysis of Interrupted Time-Series Experiments. In: Kratochwill, T. R. (Ed.), Single Subject Research: Strategies For Evaluating Change. New York: Academic Press, 197-235.
- Gottman, J. M. & Leiblum, S. R. 1974. How to do Psychotherapy and How to Evaluate it. New York: Holt, Rinehart & Winston.
- Granger, C. W. J. & Newbold, P. 1976. Identification of Two-way Causal Systems. In: Intriligator, M. D. (Ed.), Frontiers of Quantitative Economics II. Amsterdam.
- Granger, C. W. J. & Newbold, P. 1977. Forecasting Economic Time Series. New York.
- Greenhouse, S. W. & Geisser, S. 1959. On Methods in the Analysis of Profile Data. Psychometrika, 24, 95-112.
- Greeno, J. G. 1974. Representation of Learning as Discrete Transition in a Finite State Space. In: Krantz, D. H. et al. (Eds), Contemporary Developments in Mathematical Psychology: Learning Memory and Thinking, 1-43, San Francisco: Freeman.
- Grizzle, J. & Allen, D. M. 1969. Analysis of Growth and Dose Response Curves. Biometrics, 25, 357-381.
- Gröbner, W. 1966. Matrizenrechnung. Mannheim: BI-Verlag.
- Guthke, J. 1976. Entwicklungsstand und Probleme der Lernfähigkeitsdiagnostik, Teil I/II. Zeitschrift für Psychologie.
- Guthke, J. 1977<sup>3</sup>. Zur Diagnostik der intellektuellen Lernfähigkeit. Berlin.
- Guthke, J. 1980. Die Relevanz des Lerntestkonzepts für die klinisch-psychologische Diagnostik - demonstriert am Beispiel der Diagnostik der geistigen Behinderung und der frühkindlichen Hirnschädigung. Probleme und Ergebnisse der Psychologie, 72, 5-21.
- Hall, B. H. 1978. A General Framework for the Time Series-Cross Section Estimation. Annales de L'Insee Nr. 30-31, 177-202.
- Hall, R. V., Fox, R., Willard, D., Goldsmith, L., Emerson, M., Owen, M., Davis, F.

- & Porcia, E. 1971. The Teacher as Observer and Experimenter in the Modification of Disputing and Talking-out Behaviors. *Journal of Applied Behavior Analysis*, 4, 141-149.
- Hamouzova, M. & Würthner, K. 1976. Der Einfluß zweier Trainingsmethoden auf die Intelligenztestleistung Erwachsener. Unveröfftl. Diplomarbeit, Psychologisches Institut der Universität Heidelberg.
- Hannan, E. J. 1970. *Multiple Time Series*. New York: J. Wiley & Sons.
- Hannan, E. J. 1976. The Identification and Parametrization of ARMAX and State Space Forms. *Economics*, 44, 713-722.
- Hannan, M. T. & Young, A. A. 1977. Estimation in Panel Models: Results on Pooling Cross-Sections and Time Series. *Sociological Methodology*, 52-82.
- Harder, Th. 1973. *Dynamische Modelle in der empirischen Sozialforschung*. Stuttgart, Teubner.
- Harris, Ch. W. (Ed.), 1963. *Problems in Measuring Change*. The University of Wisconsin Press.
- Harris, Ch. 1963. Canonical Factor Models for the Description of Change. In: Harris, Ch. (Ed.), *Problems in Measuring Change*. Madison Wisconsin.
- Hart, M. C. & Mulholland, R. J. 1979. Structural Identifiability of Compartmental Systems Based upon Measurements of Accumulated Tracer in Closed Pools. *Mathematical Biosciences*, 47, 239-253.
- Hartmann, D. P. 1974. Forcing Square Pegs Into Round Holes: Some Comments on "An Analysis-of-Variance Model for the Intrasubject Replication Design". *Journal of Applied Behavior Analysis*, 7, 635-638.
- Helmer, R. M. & Johannsson, J. K. 1977. An Exposition of the Box-Jenkins Transfer Function Analysis with an Application to the Advertising-Sales Relationships. *Journal of Marketing Research*, 14, 227-239.
- Henderson, C. R. 1971. Comment on "The Use of Error Component Models in Combining Cross Section with Time Series Data". *Econometrica* (39), 397-401.
- Henry, N. W. 1973. Measurement Models for Continuous and Discrete Variables. In: Goldberger, A. S. & Duncan O. D. (Eds), *Structural Equation Models in the Social Sciences*. New York: Seminar Press.
- Hersen, M. & Barlow, D. H. 1976. *Single-Case Experimental Designs: Strategies for Studying Behavior Change*. New York: Pergamon Press.
- Hibbs, D. A. 1974. Problems of Statistical Estimation and Causal Inference in Time-Series Regression Models. In: Costner, H. S. (Ed.), *Sociological Methodology*, 1973-1974, 252-308. San Francisco: Jossey-Bass Publishers.
- Hibbs, D. A. Jr. 1977. On Analyzing the Effects of Policy Interventions: BOX-JENKINS and BOX-TIAO vs. Structural Equation Models. In: Heise, D. R. (Ed.), *Sociological Methodology*, 137-179. New York: Jossey Bass.
- Hilgard, J. R. 1933. The Effect of Delayed Practice on Memory and Motor Performance Studied by the Method of Co-twin Control. *Genetic Psychology Monographs*, 6, 67ff.

- Holtzman, W. H. 1963. Statistical Models for the Study of Change in the Single Case. In: Harris, Ch. (Ed.), Problems in Measuring Change. Madison Wisconsin.
- Horan, P. H. 1976. Structure and Change in Occupational Mobility: a Markov Approach. *Quality & Quantity*, 10, 321-340.
- Horst, P. 1963. Multivariate Models for Evaluating Change. In: Harris, Ch. (Ed.), Problems in Measuring Change. Madison Wisconsin.
- Howard, R. A. 1971. Dynamic Probabilistic Systems, Vol. 1: Markov Models, Vol. II: Semimarkov and Decision Processes. New York: Wiley.
- Huba, G. J., Lawler, W. G., Stallone, F. & Fieve, R. R. 1976. The Use of Autocorrelation Analysis in the Longitudinal Study of Mood Patterns in Depressed Patients. *British Journal of Psychiatry*, 128, 146-155.
- Hummon, N. P., Doreian, P. & Teuter, K. 1975. A Structural Control Model of Organizational Change. *American Sociological Review*, 40, 813-824.
- Huynh, Huynh & Feldt, LS. 1970. Conditions under which Mean Square Ratios in Repeated Measurements Designs Have Exact F-Distributions. *Journal of the American Statistical Association*, 65, 1582-1589.
- Isaak, P. D. 1970. Linear Regression, Structural Relations and Measurement Error. *Psychological Bulletin*, 73, 213-218.
- Jenkins, G. M. 1979. Practical Experiences with Modeling and Forecasting Time Series. Jersey, Channel Island: GJP Ltd.
- Jöreskog, K. G. 1973. A General Method for Estimating a Linear Structural Equation System. In: Goldberger, A. S. & Duncan, O. D. (Eds), *Structural Equation Models in The Social Sciences*. New York: Seminar Press, 85-112.
- Jöreskog, K. G. 1979. Statistical Estimation of Structural Models in Longitudinal Developmental Investigations. In: Nesselroade, J. R. & Baltes, P. B. (Eds), *Longitudinal Research in the Study of Behavior and Development*. New York: Academic Press, 303-351.
- Jöreskog, K. G. & Sörbom, D. 1976. Statistical Models and Methods for Test-Retest-Situations. In: De Gruijter, D. N. M. & van der Kamp, L.J. Th. (Eds), *Advances in Psychological and Educational Measurement*. New York, 135-157.
- Jöreskog, K. G. & Sörbom, D. 1977. Statistical Models and Methods for Analysis of Longitudinal Data. In: Aigner, P. J. & Goldberger, A. S. (Eds), *Latent Variables in Socio-Economic-Models*. Amsterdam, 285-325.
- Kazdin, A. E. 1976. Statistical Analysis for Single-Case Experimental Designs. In: Hersen, M. & Barlow, D. H. (Eds), *Single-Case Experimental Designs: Strategies for Studying Behavior Change*. New York: Pergamon Press.
- Kaiser, H. F. 1963. Image Analysis. In: Harris, Ch. (Ed.), Problems in Measuring Change. Madison Wisconsin.
- Kemeny, J. G. & Snell, I. L. 1965. *Finite Markov Chains*. New York.
- Kendall, M. G. & Stuart, A. 1973. *The Advanced Theory of Statistics II*. London: Griffin & Co., 3. Auflage.

- Keselman, H. J. & Leventhal, L. 1974. Concerning the Statistical Procedures Enumerated by Gentile et al.: Another Perspective. *Journal of Applied Behavior Analysis*, 7, 632-645.
- Khatri, C. G. 1966. A Note on a MANOVA Model Applied to Problems in Growth Curve. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 18, 75-86.
- Kleiter, E. 1979. Clusteranalytische Struktur-Veränderungsmessung zur Abbildung von Lernen als Struktur-Veränderung. Vortrag auf dem IPN-Seminar „Veränderungsmessung zur Diagnose und Prognose von Lerneffekten“, 1.-5. Oktober 1979 im Institut für Pädagogik der Naturwissenschaften, Kiel.
- Kleiter, E. & Petermann, F. 1977. *Abbildung von Lernwegen*. München: Oldenbourg.
- Kormann, A. 1981. Veränderungsmessung. In: Schiefele, H. & Krapp, A. (Eds), *Handlexikon der Pädagogischen Psychologie*. München: Ehrenwirth.
- Kormann, A. 1979. Lerntests - Versuch einer kritischen Bestandsaufnahme. In: Eckensberger, L. H. (Ed.), *Bericht über den 31. Kongreß der Deutschen Gesellschaft für Psychologie*, Göttingen, Bd. 2, 85-95.
- Krapp, A. & Schiefele, H. 1976. *Lebensalter und Intelligenzentwicklung*. München.
- Kuhl, J. & Blankenship, V. 1979. The Dynamic Theory of Achievement Motivation: From Episodic To Dynamic Thinking. *Psychological Review*, 86, 141-151.
- Kuriakjian, B. & Zelen, M. 1962. A Calculus for Factorial Arrangements. *Annales of Math. Statistics* (33), 609-619.
- Laming, D. 1973. *Mathematical Psychology*. London: Academic Press.
- Land, K. C. 1970. Mathematical Formalization of Durkheim's Theory of Division of Labor. In: Borrgatta, E. F. & Bohrnstedt, G. W. (Eds), *Sociological Methodology 1970*. San Francisco: Jossey-Bass Inc., 257-282.
- Land, K. C. 1971. Formal Theory. In: Costner, H. L. (Ed.), *Sociological Methodology 1971*, 175-220. San Francisco: Jossey-Bass Inc.
- Lazarsfeld, O. & Henry, N. W. 1968. *Latent Structure Analysis*. Boston (Mass.): Houghton Mifflin.
- Lee, T. C., Judge, G. G. & Zehner, A. 1977. *Estimating the Parameters of the Markov Probability Model from Aggregate Time Series Data*. Amsterdam: North-Holland.
- Lehman, E. L. 1975. *Nonparametrics: Statistical Methods Based on Ranks*. San Francisco: Holden-Day.
- Levin, J. R., Marascuilo, L. A. & Hubert, L. J. 1978. N = Nonparametric Randomization Tests. In: Kratochwill, Th. R. (Ed.), *Single Subject Research*. New York: Academic Press, 167-196.
- Levine, G. & Burke, C. J. 1972. *Mathematical Model Techniques for Learning Theories*. New York: Academic Press.
- Lewandowski, R. 1980. *Prognose- und Informationssysteme*. Berlin: W. de Gruyter.
- Löhr, H. J. 1979. *Beispiele und Aufgaben zur Laplace-Transformation*. Braunschweig: Vieweg & Sohn.

- Long, J. S. 1976. Estimation and Hypothesis Testing in Linear Models Containing Measurement Error: A Review of Jöreskog's Model for the Analysis of Covariance Structures. *Sociological Methods & Research*, 5, 157-206.
- Loose, K. D. 1964. Using an Energy Systems Approach in Modeling Achievement Motivation and Some Related Sociological Concepts. Unpublished Doctoral Dissertation. The University of Florida, August 1964.
- Loose, K. D. & Koran, J. J. Jr. 1975. A Procedure for the Investigation of Hypothesized Relationships Among Dynamic Variables Over Time. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association. Washington, D. C., April 1975.
- Loose, K. D. & Unruh, W. R. 1977. An Analysis of Interaction of Anxiety, Aspiration Level And Ability Derived From Ecological Systems Theory. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association. San Francisco, April 1976 und *Reviews In Education*.
- Loose, K. D. & Unruh, W. R. 1977. An Ecological System Model For Increasing Predictive Validity by Using Variables Frequently Excluded from Regression Analysis. A Paper Presented at the Third International Symposium on Educational Testing, Leyden, June 1977.
- Lord, F. M. 1963. Elementary Models for Measuring Change. In: Harris, Ch. (Ed.), *Problems in Measuring Change*. Madison Wisconsin.
- Makridakis, S. & Wheelwright, S. C. 1978a. *Interactive Forecasting: Univariate and Multivariate Methods*. San Francisco: Holden-Day.
- Makridakis, S. & Wheelwright, S. C. 1978b. *Forecasting: Methods and Applications*. New York: John Wiley.
- Malinvaud, E. 1970 (2). *Statistical Methods of Econometrics*. Amsterdam: North Holland.
- Markus, G. B. & Zajonc, R. B. 1977. Systems Simulation of Family Configuration and Intellectual Development: A Simulation. *Behavioral Science*, 22, 137-142.
- Marmor, Y. S. & Marmor, M. 1978. Comment on Simonton's Cross-Sectional Time Series Experiments: Some Suggested Statistical Analysis. *Psychological Bulletin*, 85, 1102-1103.
- Massy, W. F., Montgomery, D. B. & Morrison, D. Y. 1970. *Stochastic Models of Buying Behavior*. Cambridge, Mass.: The M.I.T. Press.
- McCain, L. J. & McCleary, R. 1979. The Statistical Analysis of the Simple Interrupted Time-Series Quasi-Experiment. In: Cook, Th. D. & Campbell, D. T. (Eds), *Quasi-Experimentation: Design & Analysis Issues for Field Settings*. Chicago: Rand McNally College Publishing Co., 233-293.
- McCall, R. B. & Applebaum, M. I. 1973. Bias in the Analysis of Repeated Measures Designs: Some Alternative Approaches, *Child Development*, 44, 401-415.
- McCleary, R. & Hay, R. A. 1980. *Applied Time Series Analysis For The Social Sciences*, Beverly Hills: Sage Publications.

- McClelland, J. L. 1979. On the Time Relations of Mental Processes: An Examination of Systems of Processes in Cascade. *Psychological Review*, 86, 287-330.
- McDonald, R. P. & Swaminathan, H. 1973. A Simple Matrix Calculus with Applications to Multivariate Analysis. *General Systems*, 18, 37-54.
- McGill, W. J. Stochastic Latency Mechanisms. In: Luce, R. D., Bush, R. R. & Galanter, E. (Eds), *Handbook of Mathematical Psychology*, Vol. 1, 309-360.
- McGinnis, R. 1968. A Stochastic Model of Social Mobility. *American Sociological Review*, 33, 712-722.
- McNeil, K. A., Kelly, F. J. & McNeil, J. T. 1975. Testing Research Hypothesis Using Multiple Linear Regression. Carbondale and Edwardsville: Southern Illinois University Press.
- McSweeney, A. J. 1978. The Effects of Response Cost on the Behavior of a Million Persons: Charging for Directory Assistance in Cincinnati. *Journal of Applied Behavioral Analysis*, 11, 47-51.
- Meier, F. 1981. Zur Gewinnung und Bedeutungsuzuordnung personspezifischer Prozeßparameter der Befindlichkeit. *Diagnostica*, 27, 23-38.
- Melchinger, H. 1978. Intelligenz als Lernfähigkeit: Ein empirischer Beitrag zum Lern-testkonzept. Inaug. Dissertation am Institut für Psychologie (FB 12) der FU Berlin.
- Metz-Göckel, H. 1979. Das Messen von Veränderungen in Einstellung und Verhalten. In: Heinerth, K. (Ed.), *Einstellung und Verhalten*, München, 356-389.
- Miller, A. D. 1971. Logic of Causal Analysis: From Experimental to Nonexperimental Designs. In: Blalock, H. M. (Ed.), *Causal Models in the Social Sciences*. Chicago: Aldine, 273-294.
- Miller, G. A. & Chomsky, N. 1963. Finitary Models of Language Users. In: Luce, R. D., Bush, R. R. & Galanter, E. (Eds), *Handbook of Mathematical Psychology*. Vol. 11, 419-491.
- Möbus, C. 1981. Zur Beschreibung und Analyse kurz- und langfristiger Testintelligenzveränderungen mit zeitdiskreten und zeitkontinuierlichen dynamischen Modellen. In: Michaelis (Ed.), *Bericht über den 32. Kongreß der Deutschen Gesellschaft für Psychologie*, Zürich: 22. 09. 80-25. 09. 80. Göttingen.
- Möbus, C. 1983. Identification and Fitting of Continuous Time Models with Two-Wave Data (in preparation).
- Möbus, C., Göricke, G. & Kröh, P. 1982. Statistical Analysis of Single-Case Experimental Designs: Conditional Equivalence of the General-Linear-Model Approach of Glass, Willson & Gottman with the Intervention Model of Box & Tiao (in press).
- Möbus, C. & Wallasch, R. 1977. Zur Erfassung von Hirnschädigungen bei Kindern: Nichtlineare Entscheidungsregeln auf der Basis von Veränderungsmessungen und des Jackknife. *Diagnostica*, 227-251.
- Moosbrugger, H. 1978. *Multivariate Statistische Analyseverfahren*. Stuttgart: Kohlhammer.

- Morrison, D. F. 1976<sup>2</sup>. *Multivariate Statistical Methods*. New York: McGraw Hill.
- Mundlak, Y. 1978. On The Pooling of Time Series and Cross Section Data. *Econometrica*, 46, 69-85.
- Murray, J. R., Wiley, D. E. & Wolfe, R. G. 1971. *New Statistical Techniques for Evaluating Longitudinal Models*. Human Development, 14, 142-148.
- Nagl, W. H. 1983. *Längsschnittmethoden*. Arbeitsbericht des Zentrums I, Universität Konstanz.
- Namboodiri, N. K., Carter, L. F. & Blalock, H. M. 1975. *Applied Multivariate Analysis And Experimental Designs*. New York: McGraw Hill.
- Nelson, C. R. 1973. *Applied Time Series Analysis*. San Francisco: Holden Day, Inc.
- Nerlove, M. 1971a. A Note on Error Components Models. *Econometrica*, 39, 383-396.
- Nerlove, M. 1971b. Further Evidence on the Estimation of Dynamic Economic Relations from a Time Series of Cross Sections. *Econometrica*, 39, 359-382.
- Nelson, Ch. R. 1973. *Applied Time Series Analysis*. San Francisco: Holden-Day.
- Nesselroade, J. R. & Baltes, P. B. 1979. *Longitudinal Research in the Study of Behavior and Development*. New York: Academic Press.
- Neymann, J. & Scott, E. L. 1948. Consistent Estimates Based on Partially Consistent Observations. *Econometrica*, 16, 1-10.
- Pack, D.J. 1978. *A Computer Program for the Analysis of Time-Series-Models Using the Box-Jenkins Philosophy*. Hatboro, Pa.: Automatic Forecasting Systems.
- Parks, R. W. 1967. Efficient Estimation of a System of Regression Equations when Disturbances are Both Serially and Contemporaneously Correlated. *Journal of the American Association*, 62, 500-509.
- Pawlik, K. (Ed.). 1976. *Diagnose der Diagnostik*. Stuttgart: Klett.
- Pedhazur, E. J. 1977. Coding Subjects in Repeated Measures Designs. *Psychological Bulletin*, 84, 298-305.
- Petermann, F. 1978. *Veränderungsmessung*. Stuttgart: Kohlhammer.
- Petermann, F. & Hehl, F. J. (Eds), 1979. *Einzelfallanalyse*. München.
- Pfeiffer, P. E. & Deutsch, S. J. 1980. A Three Stage Iterative Procedure for Space-Time Modeling. *Technometrics*, 22, 35-47.
- Phillips, P. C. B. 1972. The Structural Estimation of a Stochastic Differential Equation System. *Econometrica*, 40, 1021-1041.
- Phillips, P. C. B. & Wickens, M. R. 1978. *Exercises In Econometrics*, Vol. II. Oxford: Philip Allan Publishers Ltd.
- Potthoff, R. F. & Roy, S. N. 1964. A Generalized Multivariate Analysis of Variance Model Useful Especially in Growth Curve Problems. *Biometrika*, 51, 313-326.
- Priestley, M. D. 1980. *System Identification, Kalman Filtering and Stochastic Control*. Paper presented at the Conference of the Institute of Mathematical Statistics on Time Series Analysis. JA, 1978. Zitiert nach SAS User's Guide.

- Przeworski, A. & Soares, G. A. D. 1977. Theorien auf der Suche nach einer Kurve: Strukturelle Interpretation der Linkswahl. In: Schmutzter, M. E. A. (Ed.), *Mathematische Methoden in der Politikwissenschaft*. München: Oldenbourg, 31-70.
- Quenouille, M. H. 1949. Approximate Tests of Correlation in Time Series. *Journal of the Royal Statistical Society*, B 11, 68.
- Quenouille, M. H. 1957. *The Analysis of Multiple Time Series*. London.
- Ralston, M. L., Jennrich, R. J., Sampson, P. F. & Kuo, F. K. 1979. Fitting Pharmacokinetic Models with BMDPAR, BMDP Technical Report No. 58.
- Rao, C. R. 1959. Some Problems Involving Linear Hypothesis in Multivariate Analysis. *Biometrika*, 46, 49-58.
- Rao, C. R. 1965. The Theory of Least Squares When the Parameters are Stochastic and its Application to the Analysis of Growth Curves. *Biometrika*, 52, 447-458.
- Rao, C. R. 1966. Covariance Adjustment und Related Problems in Multivariate Analysis. In: Krishnaiah, P. R. (Ed.), *Multivariate Analysis I*. New York: Academic Press.
- Rao, C. R. 1967. Least Square Using an Estimated Dispersion Matrix and its Application to Measurements of Signals. *Proceedings of the 5th Berkely Symposium on mathematical statistics*. Berkely: University of California Press.
- Rapoport, A. 1963. Mathematical Models of Social Interaction. In: Luce, R. D., Bush, R. R. & Galanter, E. (Eds), *Handbook of Math. Psychology*, Vol. II, 493-578.
- Rapoport, A. 1980. *Mathematische Methoden in den Sozialwissenschaften*. Würzburg: Physica-Verlag.
- Rashevsky, N. 1939. Studies in the Mathematical Theory of Human Relations. *Psychometrika*, 4, 221-239.
- Reichardt, Ch. S. 1979. The Statistical Analysis of Data from Nonequivalent Group Designs. In: Cook & Campbell (Eds), *Quasi-Experimentation. Design & Analysis Issues for Field Settings*, 147-205. Chicago: Rand McNally.
- Renn, H. 1973. *Die Messung von Sozialisierungswirkungen*. München.
- Restle, F. & Greeno, J. G. 1970. *Introduction to Mathematical Psychology*. Reading, Mass.: Addison-Wesley.
- Revenstorf, D. 1979. *Zeitreihenanalyse für klinische Daten: Methodik und Anwendungen*. Weinheim: Beltz Verlag.
- Revenstorf, D. & Keeser, W. 1979. *Zeitreihenanalyse von Therapieverläufen*. In: Petermann, F. & Hehl, F. J. (Eds), *Einzelfallanalyse*. München: Urban & Schwarzenberg, 183-228.
- Revenstorf, D. & Vogel, B. 1979. Zur Analyse qualitativer Verlaufsdaten - ein Überblick. In: Petermann, F. & Hehl, F. J. (Eds), *Einzelfallanalyse*, 229-250.
- Revenstorf, D., Wegschneider, R., Fitting, U. & Mai, N. 1977. Markov Models of Gaming Behavior in Experimental Non-Zero-Sum Games. In: Kempf, W. F. & Repo, B. H. (Eds), *Mathematical Models for Social Psychology*. Bern: Huber.

- Richardson, L. F. 1948. War Moods. *Psychometrika*, 13, 147-174.
- Ronning, G. 1980. ökonometrische Analyse von aggregierten Tendenzdaten aus Panelerhebungen. Vortrag im statistischen Seminar. Universität Konstanz.
- Roskam, E. E. 1976. Multivariate Analysis of Change and Growth: Critical Review and Perspectives. In: Gruijter, D. N. M. & van der Kamp, L. J. Th. (Eds), *Advances in Psychological and Educational Measurement*. New York: J. Wiley, 111-133.
- Roskam, E. E. 1979. Varianzanalytische Verfahren und Strukturmodelle für Längsschnittdaten. Vortrag auf dem Seminar „Veränderungsmessung zur Diagnose und Prognose von Lerneffekten“ am Institut der Pädagogik der Naturwissenschaften, 01. 05.-05. 10. 1979.
- Rost, J. & Spada, H. 1978. Probabilistische Testtheorie. In: Klauer, K. J. (Ed.), *Handbuch der Pädagogischen Diagnostik*, Bd. 1. Düsseldorf, 59-97.
- Rudinger, G. & Lantermann, E. D. 1978. Probleme der Veränderungsmessung in individuellen und gruppentypischen Entwicklungsverläufen. In: Oerter, R. (Ed.), *Entwicklung als lebenslanger Prozeß*. Frankfurt/M., 178-226.
- Scheffé, H. 1959. *The Analysis of Variance*. New York: John Wiley & Sons.
- Schuss, Z. 1980. *Theory and Applications of Stochastic Differential Equations*, New York: Wiley.
- Schweitzer, W. 1978. Modelle zur Erfassung von Wanderungsbewegungen. Meisenheim am Glan: Verlag Anton Hain.
- Searle, S. R. 1971. *Linear Models*. New York: Wiley.
- Shampine, L. F., Watts, H. A. & Davenport, S. M. 1976. Solving Nonstiff Ordinary Differential Equations - the State of the Art. *SIAM Review*, 18, 376-441.
- Shine, L. C. & Bower, S. M. 1971. A One-Way Analysis of Variance for Single-Subject Designs. *Educational and Psychological Measurement*, 31, 105-113.
- Simon, H. A. 1952. A Formal Theory of Interaction in Social Groups. *Am. Sociological Review*, 17, 202-211.
- Simon, H. A. 1957. *Models of Man*. New York: Wiley.
- Simon, H. A. & Newell, A. 1974. Thinking Processes. In: Krantz, D. H., Atkinson, R. C., Luce, R. D. & Suppes, P. (Eds): *Contemporary Developments in Mathematical Psychology. Learning, Memory and Thinking*. San Francisco.
- Simonton, D. K. 1977. Cross-Sectional Time Series Experiments: Some Suggested Statistical Analyses. *Psychological Bulletin*, 84, 489-502.
- Singer, B. 1981. Estimation of Nonstationary Markov Chains from Panel Data, In: Leinhardt, S. (Ed.): *Sociological Methodology*. San Francisco: Jossey-Bass, 319-337.
- Singer, B. & Spilerman, S. 1976a. Representation of Social Processes by Markov Models. *American Journal of Sociology*, 82, 1-53.
- Singer, B. & Spilerman, S. 1976b. Some Methodological Issues in the Analysis of Longitudinal Surveys. *Annales of Economic & Social Measurement*, 447ff.

- Singer, B. & Spilerman, S. 1979a. Mathematical Representations of Development Theories. In: Nesselrode, J. R. & Baltes, P. B. (Eds): *Longitudinal Research in the Study of Behavior and Development*. New York: Academic Press, 155-177.
- Singer, B. & Spilerman, S. 1979b. Clustering on the Main Diagonal in Mobility Matrices. In: Schuessler, K. F. (Ed.): *Sociological Methodology*. San Francisco, 172-208.
- Slutzky, E. 1937. The Summation of Random Causes as the Source of Cyclic Processes. *Econometrica*, 5, 105-146.
- Sörbom, D. 1976. A Statistical Model for the Measurement of Change in True Scores. In: De Gruijter, D. N. M. & van der Kamp, L. J. Th. (Eds): *Advances in Psychological and Educational Measurement*. New York, 159-170.
- Sörbom, D. 1979. LISREL IV with Structured Means. Workshop „Lineare Strukturgleichungsmodelle“ am Zentrum für Umfragen und Analysen, ZUMA in Mannheim, Oktober 1979.
- Spilerman, S. 1972. Extensions of the Mover-Stayer Model. *American Journal of Sociology*, 78, 599-626.
- Spilerman, S. 1972. The Analysis of Mobility Processes by the Introduction of Independent Variables into a Markov Chain. *American Sociological Review*, 37, 277-294.
- Steyer, R. 1980. Stochastische Prozesse und kausale Abhängigkeit. Vortrag auf dem XXII. Internationalen Kongreß für Psychologie, Leipzig, 6.-12. Juli 1980.
- Storm, R. 1969. *Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Leipzig: VEB Fachbuchverlag.
- Straka, G. 1974. *Forschungsstrategien zur Evaluation von Schulversuchen*. Weinheim.
- Swaminathan, H. & Algina, J. 1977. Analysis of Quasi-experimental Time-series Designs. *Journal of Multivariate Behavioral Research*, 12, 111-131.
- Tack, W. H. 1976. *Stochastische Lernmodelle*. Stuttgart: Kohlhammer.
- Thalmaier, A. 1979. Zur kognitiven Bewältigung der optimalen Steuerung eines dynamischen Systems. *Zeitschrift für experimentelle und angewandte Psychologie*, 26, 388-421.
- Theil, H. 1971. *Principles of Econometrics*. New York: Wiley.
- Thoresen, C. E. & Elashoff, J. D. 1974. An Analysis of Variance Model for Intrasubject Replication Design: Some Additional Comments. *Journal of Applied Behavior Analysis*, 7, 639-642.
- Timm, N. H. 1975. *Multivariate Analysis with Applications in Education and Psychology*. Monterey, Calif.: Brooks/Cole Publ. Co.
- Tucker, L. R. 1963. Implications of Factor Analysis of Three-Way Matrices for Measurement of Change. In: Harris, Ch. (Ed.): *Problems in Measuring Change*. Madison, Wisconsin.
- Tuma, N. B., Hannan, M. T. & Groenveld, L. P. 1979. Dynamic Analysis of Event Histories. *American Journal of Sociology*, (84), 820-854.
- Tuma, N. B. & Hannan, M. T. 1979. Approaches to the Censoring Problems in

- Analysis of Event Histories. In: Schuessler, K. F. (Ed.): *Sociological Methodology*. San Francisco. 209-240.
- Tuma, N. B. 1980. When Can Interdependence In A Dynamic System of Qualitative Variables be Ignored? In: Schuessler, K. F. (Ed.): *Sociological Methodology*. San Francisco, 358-391.
- Tyler, V. D. & Brown, G. D. 1968. Token Reinforcement of Academic Performance with Institutionalized Delinquent Boys. *Journal of Educational Psychology*, 59, 164-168.
- Vigderhous, G. 1978. Forecasting Sociological Phenomena: Application of Box-Jenkins Methodology to Suicide Rates. In: Schuessler, K. F. (Ed.): *Sociological Methodology*, 20-51, San Francisco: Jossey-Bass.
- Voevodsky, J. 1969. Quantitative Behavior of Warring Nations. *Journal of Psychology*, 72, 269-292.
- Walker, A. M. 1931. On the Periodicity in Series of Related Terms. *Proceedings of the Royal Society of London*, A 131, 518-532.
- Wallace, T. D. & Hussain, A. 1969. The Use of Error Components Models in Combining Cross Section with Time Series Data. *Econometrica*, (37), 55-72.
- Wasserman, S. S. 1980. A Stochastic Model for Directed Graphs with Transition Rates Determined by Reciprocity. In: Schuessler, K. F. (Ed.): *Sociological Methodology*. San Francisco: Jossey-Bass, 392-412.
- Webster, H. & Bereiter, C. 1963. The Reliability of Changes Measured by Mental Test Scores. In: Harris, Ch. (Ed.): *Problems in Measuring Change*. Madison, Wisconsin.
- Werts, C. E. & Linn, R. L. 1970. A General Linear Model for Studying Growth. *Psychological Bulletin*, 73, 17-22.
- Werts, C. E. & Linn, R. L. 1971. Considerations When Making Inferences Within the Analysis of Covariance model. *Educational and Psychological Measurement*, 31, 407-416.
- Werts, C. E. & Linn, R. L. 1972. Corrections for Attenuation. *Educational and Psychological Measurement*, (32), 117-127.
- Werts, C. E. & Jöreskog, K. G. & Linn, R. L. 1972. A Multitrait-Multimethod Model for Studying Growth. *Educational and Psychological Measurement*, (32), 655-678.
- Wheaton, B., Mutherr, B., Alwin, D. F., Summers, G. F. 1977. Assessing Reliability and Stability in Panel Models. *Sociological Methodology*, 84-136.
- Wiggins, L. M. 1973. *Panel Analysis: Latent Probability Models for Attitude and Behavior Processes*. Amsterdam: Elsevier.
- Wiley, D. E. & Wiley, J. A. 1970. The Estimation of Measurement Error in Panel Data. *American Sociological Review*, (35), 112-117.
- Wilks, S. S. 1932. Certain Generalizations in the Analysis of Variance, *Biometrika*, 24, 471-494.

- Wilson, G. T. 1973. The Estimation of Parameters in Multivariate Time Series models. *Journal of the Royal Statistical Society*, B 35, 76ff.
- Winer, B. J. 1971. *Statistical Principles in Experimental Design*. New York: Mc Graw Hill.
- Wottawa, H. 1974. Das Allgemeine Lineare Modell - Ein universelles Auswertungsverfahren. *EDV in Medizin und Biologie*, 3, 65-73.
- Wottawa, H. 1979. *Grundlagen und Probleme von Dimensionen in der Psychologie*. Meisenheim: Hain.
- Yule, G. U. 1926. Why Do We Sometimes Get Nonsense-Correlations Between Time Series? A Study in Sampling and the Nature of Time Series. *Journal of the Royal Statistical Society*, 89, 1-64.
- Yule, G. U. & Kendall, M. G. 1964. *An Introduction to the Theory of Statistics*. London: Griffin (4. Auflage).
- Zelen, M. & Federer, W. T. 1964. Applications of the Calculus for Factorial Arrangements. II Designs with Twoway Elimination of Heterogeneity. *Annales of Math. Statistics*, 35, 658-672.
- Ziegler, R. 1972. *Theorie und Modell*. München: Oldenbourg.
- Zimmermann, P. 1979. Zur Zeitreihenanalyse von Stimmungsskalen. *Diagnostica*, 25, 24-48.
- Zurmühl, R. 1964<sup>4</sup>. *Matrizen*. Berlin: Springer-Verlag.