

---

# **Stochastische Modellerstellung für das Verhalten von Fahrern im Straßenverkehr**

**Michael Langner**

---

Von der Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften  
der Carl von Ossietzky Universität Oldenburg  
zur Erlangung des Grades und Titels eines

**DOKTORS DER NATURWISSENSCHAFTEN  
DR. RER. NAT.**

angenommene Dissertation

von Herrn Michael Langner  
geboren am 24.03.1979 in Papenburg

Gutachter: Prof. Dr. Joachim Peinke  
Zweitgutachter: Prof. Dr. Martin Fränze  
Tag der Abgabe: 31.01.2014  
Tag der Disputation: 05.06.2014

# Inhaltsverzeichnis

<b>Zusammenfassung</b>	<b>1</b>
<b>1 Einführung</b>	<b>3</b>
Literaturverzeichnis . . . . .	9
<b>2 Grundlagen der Statistik</b>	<b>11</b>
2.1 1-Punkt Statistik . . . . .	11
2.2 2-Punkt Statistik . . . . .	17
2.3 Markov-Ketten . . . . .	22
Literaturverzeichnis . . . . .	25
<b>3 Langevin-Analyse</b>	<b>27</b>
3.1 Langevin-Gleichung . . . . .	27
3.2 Bestimmung von Drift- und Diffusionskoeffizienten . .	30
3.3 Höhere Dimensionen . . . . .	32
Literaturverzeichnis . . . . .	34
<b>4 Anwendungen</b>	<b>37</b>
4.1 Häufig auftretende Markov-Systeme . . . . .	37
4.2 Beispiele mit experimentellen Datensätzen . . . . .	43
4.2.1 Lenkverhalten von Fahrern in Kurven . . . . .	43
4.2.2 Rayleigh-Bénard Experiment . . . . .	48
4.3 Weitere Verbesserungen . . . . .	52
4.3.1 Nicht-äquidistante Zeitreihen . . . . .	52
4.3.2 Kontinuierliche Klassen . . . . .	54
4.3.3 Koordinatentransformationen . . . . .	58
Literaturverzeichnis . . . . .	59

<b>5</b>	<b>Langevin Modelle im Rahmen der Fahrermodellierung</b>	<b>61</b>
5.1	Experimente im Rahmen des IMoST Projektes . . . . .	62
5.2	Vorbereitung der Daten . . . . .	66
5.3	Erste Analyse der Daten . . . . .	68
5.3.1	Vorher-/Nachhereinfädler . . . . .	68
5.4	Durchführen der Langevin-Analyse . . . . .	68
5.4.1	Das verwendete Gitter . . . . .	69
5.4.2	Nicht-äquidistante Daten . . . . .	70
5.4.3	Korrektur erster Ordnung . . . . .	71
5.4.4	Die Langevin-Gleichungen . . . . .	72
5.5	Analyse der Vektorfelder . . . . .	73
5.5.1	Vektorfelder beim Nachhereinfädeln . . . . .	75
5.5.2	Ausgewählte Klassen beim Nachhereinfädeln . . . . .	81
5.5.3	Vektorfelder beim Vorhereinfädeln . . . . .	89
5.5.4	Ausgewählte Klassen beim Vorhereinfädeln . . . . .	90
5.6	Monte Carlo Simulationen . . . . .	98
5.6.1	Methode A - Verwenden der Mittelwerte der Ortsinkremente in jeder Klasse . . . . .	98
5.6.2	Methode B - Verwenden der Mittelwerte für Ort und Geschwindigkeiten . . . . .	100
5.6.3	Methode C - Verwenden aller möglichen Verhaltensweisen für Ort und Geschwindigkeiten . . . . .	101
5.6.4	Modellierung von unterschiedlichen Verhaltensweisen - Vorher- und Nachhereinfädler . . . . .	104
5.7	Vereinfachungen . . . . .	105
	Literaturverzeichnis . . . . .	110
<b>6</b>	<b>Fahrer, Fahrzeug und Sicherheit</b>	<b>111</b>
6.1	Fahrzeugmodell . . . . .	111
6.2	Deterministisches Model . . . . .	115
6.3	Sicherheitsbewertung . . . . .	120
6.3.1	“Time to collision”(ttc) und “time to act”(tta) . . . . .	120
6.3.2	Prädiktion . . . . .	124
6.3.3	Prädiktionsfelder . . . . .	125
6.4	Vergleich zwischen deterministischen und stochastischen Modellen . . . . .	130
	Literaturverzeichnis . . . . .	133
<b>7</b>	<b>Schlusswort</b>	<b>135</b>

<b>8 Anhang</b>	<b>137</b>
8.1 Computerprogramme . . . . .	137
8.1.1 Erstellen und Ausführen eines Langevin-Modells	139
8.1.2 Simulationen . . . . .	140
Literaturverzeichnis . . . . .	142
<b>Lebenslauf</b>	<b>143</b>
<b>Publikationsliste</b>	<b>145</b>
<b>Erklärung</b>	<b>147</b>



## **Zusammenfassung**

In dieser Arbeit geht es um die Modellierung des Fahrerverhaltens von Autofahrern. Im Zentrum steht dabei eine statistische Methode, bei der das richtige Verhalten des Systems von Fahrzeug und Fahrer erlernt wird. Die Modellierung findet also größtenteils automatisch statt. Dazu wird ein Modell erstellt, das auf Differentialgleichungen basiert, deren Koeffizienten direkt aus Datensätzen ermittelt werden. Ein solches auf sogenannten Langevin-Gleichungen basierendes Modell teilt das Systemverhalten in zwei unterschiedliche Komponenten auf: Zum einen in eine deterministische Komponente, die das mittlere Verhalten wiedergibt, sowie in eine stochastische Diffusionskomponente, welche die statistischen Abweichungen und Varianzen repräsentiert. Obwohl diese Methode Modelle direkt aus Datensätzen ableitet, muss der Modellierer die Daten entsprechend vorbereiten sowie eine Umgebung schaffen, in welcher die mitunter umfangreichen Modelle abgelegt, verwaltet und ausgeführt werden können.

## Abstract

This thesis is about modelling the behavior of drivers in the automotive domain. It focuses on a stochastic method able to learn the behavior of a system, that takes the human behavior into account. The modelling is done automatically through learning. The model is based on statistical quantities directly estimated from the data and used in differential equations. This so called Langevin method therefore divides a system into two components: The deterministic component that gives the average behavior and the diffusion component that represents the stochastic variance. Although the method creates the model directly and automatically from the given data, it is necessary to prepare the data correctly and support an environment in which the model could be stored, analyzed and executed in an efficient way.

# Kapitel 1

## Einführung

Die Erforschung und Modellierung von Verkehr ist heute fester Bestandteil interdisziplinärer Forschung. Es geht dabei zum Beispiel um Aspekte wie Sicherheit sowie die Effizienz eines Verkehrsmittels und seiner Infrastruktur. Dabei stellen unterschiedliche Verkehrsmittel ganz unterschiedliche Ansprüche. Im Luftverkehr, in der Schifffahrt und beim Schienenverkehr stehen die einzelnen Verkehrsteilnehmer ständig miteinander in Verbindung und können auf diese Weise, wenn nötig von einer Zentrale aus, optimal mit Informationen versorgt werden. Dies steigert die Effizienz und Sicherheit gewaltig, auch wenn dafür erhebliche zusätzliche Investitionen nötig werden. Dies wird ermöglicht durch feste Fahrpläne, sowie eine große Anzahl an Passagieren oder Fracht pro Gefährt und ist deshalb nur schwer auf den Individualverkehr, insbesondere dem Straßenverkehr, zu übertragen. Ein weiterer großer Unterschied ist, dass im Individualverkehr einzelne, oft sehr unterschiedliche Individuen aufeinandertreffen, die alle oft unbekannte Ziele verfolgen. Es besteht somit ein Mangel an Informationen, der eine gute Organisation erheblich erschwert. Leider wird diese individuelle Freiheit mit größerer Ineffizienz (Staus) und geringerer Sicherheit (mehr Unfälle pro Person) erkaufte. Um diesen Nachteilen entgegenzuwirken wird heute immer mehr versucht, die Fahrer von Automobilen mit Hilfe von Navigations- und Assistenzsystemen zu unterstützen. Navigationssysteme erlauben es heute nahezu optimale Routen zu berechnen, sowie Staus und Baustellen zu umfahren, während Assistenzsysteme die Sicherheit in bestimmten Fahrsituationen erhöhen.

Diese Systeme richten sich in erster Linie nach den physikalischen Gegebenheiten: Fahrzeugmechanik oder Streckengeometrie. Viel komplizierter wird es, wenn man versucht, den Menschen mit in die Assistenzsystementwicklung einzubeziehen. Hierbei kommt es nicht nur auf die Reaktionszeiten/Motorik und die Wahrnehmung des Fahrers an, sondern auch darauf wie der Fahrer im allgemeinen auf bestimmte Situationen reagiert. Besonders deutlich wird dies in Situationen, in denen der Fahrer relativ frei in seinem Verhalten ist. Würde ein Assistenzsystem ständig versuchen diese Freiheit einzuschränken, so würde ein solches System vermutlich ignoriert oder hätte sogar negative Folgen für das Gesamtverhalten, da es den Fahrer ablenkt. Um dies zu verhindern muss ein Assistenzsystem das normale Verhalten des Fahrers kennen und analysieren, um nicht ständig mit ihm in Konflikt zu geraten. Da diese Analyse aufwendig ist, werden Assistenzsysteme meist so angelegt, dass sie nur in Notsituationen eingreifen, z.B. um eine Notbremsung durchzuführen, die sonst vom Fahrer nicht mehr durchgeführt werden könnte.

Um das Verhalten von Fahrern und Fahrzeugen im Straßenverkehr zu untersuchen sind vielfältige Methoden bekannt, die alle ihre eigenen Vor- und Nachteile mit sich bringen. Oft werden gar nicht einzelne Fahrzeuge untersucht, sondern nur Abstraktionen, wie Verkehrsaufkommen oder Verkehrsdichten in Straßennetzen oder sehr spezifische Situationen, wie z.B. Einparken, Abstandhalten oder Autobahnfahrten. Wichtig bei diesen Systemen ist auch die Frage nach dem Automatisierungsgrad. Assistenzsysteme müssen nicht immer passiv sein, sondern können zumindest theoretisch auch aktiv in das Fahrverhalten eingreifen. Ein fernes Ziel ist beispielsweise das autonome Fahren, wo das Fahrzeug vollständig von einem Computer gesteuert wird. Zwar wird das Problem durch das Weglassen des Menschen erst einmal vereinfacht, doch autonome Fahrzeuge müssen auch mit nicht autonomen Fahrzeugen zusammen am Verkehr teilnehmen, was dann wieder Modelle für vom Menschen gesteuerte Fahrzeuge erforderlich macht.

Der Straßenverkehr stellt ein ungemein komplexes System dar. Das Straßennetz auf dem sich die Fahrzeuge bewegen, wobei jedes Fahrzeug seine eigenen Ziele verfolgt, ist ein typisches Beispiel für ein System bestehend aus Systemen (engl. System of Systems - SoS). Würde man versuchen das Verhalten eines solchen Systems präzise zu beschreiben, wäre ein großer Aufwand nötig, da jedes System aus Subsystemen besteht, die wiederum Systeme darstellen, welche ihrerseits aus Subsys-

temen bestehen. Wichtig ist es hier einen Weg zu finden, mit möglichst geringem Aufwand aussagekräftige Modelle und Analysen zu erhalten, wobei für gewöhnlich auf Abstraktionen zurückgegriffen wird. Typische Themengebiete sind hierbei z.B: Staubildung [1, 2], Verkehrsauslastung in Straßennetzen, Automatisiertes Fahren und Sicherheit.

Methoden, die eher das makroskopische Straßennetz modellieren sind zum Beispiel komplexe Netzwerke [3] oder Graphen [4]. Netzwerke bestehen dabei zum Beispiel aus Knoten und Verbindungen, wobei die Knoten für die Straßen und die Verbindungen für die Kreuzungen stehen (vgl. Abbildung 1.1). Bei derart abstrakten Darstellungen gehen oft Informationen verloren, z.B. wie in diesem Fall Distanzen. Graphen dagegen versuchen das Netz etwas genauer darzustellen. Sie erinnern mehr an Straßenkarten, wobei sich dann auf den Straßen Fahrzeuge bewegen, die bestimmten Gesetzmäßigkeiten (z.B. Erhaltungssätzen [5]) genügen. Beide Methoden werden aber meist eingesetzt, um ganze Straßennetze und deren Auslastung zu modellieren und sind somit sehr großskalig angelegt.

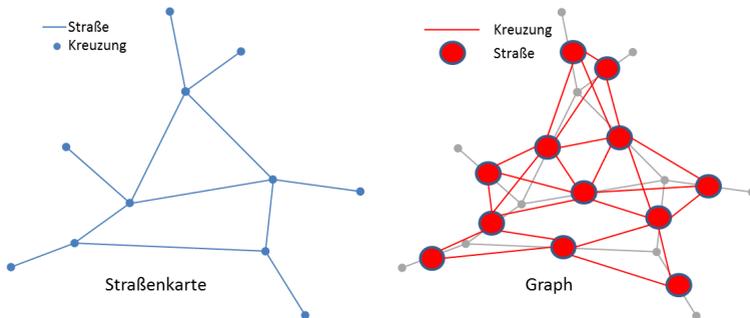


Abbildung 1.1: Beispiel für ein in einen Graphen umgewandeltes Straßennetz.

Alternativ werden auch gerne abstrakte statistische Größen herangezogen. Besonders beliebt sind TTC (time to collisions) [6] oder stochastische Prozesse [7].

Möchte man dagegen konkretes Verhalten (Trajektorien) modellieren, bei dem es tatsächlich um jede Lenkradbewegung geht, sind regelbasierte Modelle üblich. Dabei wird betrachtet in welcher Situation sich ein Fahrzeug befindet und entsprechend eine Verhaltensregel aufgestellt. Diese Regeln können dabei sowohl deterministischer als auch sta-

tistischer Natur sein. Statistische Modelle haben besonders dann einen Vorteil gegenüber deterministischen wenn es darum geht, das menschliche Verhalten abzubilden, insbesondere in Situationen, in denen der Fahrer gewisse Freiheiten in seinem Verhalten besitzt. Diese Freiheiten findet man bereits dann, wenn es nur darum geht einer Spur zu folgen. Während es einfach wäre ein gültiges Verhalten durch deterministische Regeln zu erzeugen, so wird beim Vergleich mit experimentellen Daten deutlich, dass hierdurch viele Details verloren gingen. Das menschliche Fahrerverhalten ist komplexer, da es einem realen Fahrer nicht möglich ist perfekt zu agieren. Ein deterministisches Modell wäre in der Lage, eine Kurvenfahrt durch einen einzigen Einlenkwinkel zu ermöglichen, doch in der Realität wird dieser Winkel nie erreicht, da es dem Fahrer gar nicht möglich ist diesen Winkel derartig genau anzusteuern, das keine zukünftigen Korrekturen mehr nötig wären. Das Ergebnis sind Schwankungen um den idealen Wert herum (vgl. Abb. 1.2), die nur schwer von einem deterministischen regelbasierten Model generiert werden könnten, da die selben Situationen niemals exakt die selben Aktionen nach sich ziehen. Eine statistische Beschreibung macht dies jedoch leicht möglich.

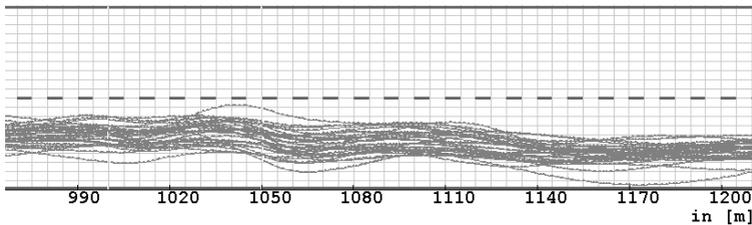


Abbildung 1.2: Eine Menge von Trajektorien aus experimentellen Daten gewonnen. Die stochastischen Varianzen (Oszillationen) sind sehr deutlich zu erkennen.

In dieser Arbeit soll es vor allem um das kleinskalige Verhalten und dessen statistische Beschreibung gehen. Die Methode die zur Anwendung kommt nennt sich Langevin-Analyse und beruht auf dem Prinzip der stochastischen Differentialgleichungen. Ein solches Modell kann direkt aus einem Datensatz erlernt werden und eignet sich deshalb auch als Methode zur Analyse von experimentellen Daten. Dabei werden die Daten in einen Drift- und einen Diffusionsterm aufgeteilt. Die Drift be-

schreibt den deterministischen Anteil, während die Diffusion die stochastische Komponente zusammenfasst. Die Drift kann dabei auch als Kraftfeld oder Potential dargestellt werden. Die Idee Potentiale oder Kraftfelder einzusetzen um Fahrerverhalten zu beschreiben ist bereits recht alt [8] (ähnlich wie in 1.3), doch erst mit der heutigen Rechenkapazität ist es möglich dies auch ernsthaft durchzuführen [9]. Die Methode der Langevin-Analyse ist bereits sehr verbreitet in der Physik und wird hier auf vielfältige Weise eingesetzt: Beispielsweise bei der Analyse von Oberflächenstrukturen [10], Herzrhythmen [11], Finanzphysik [12], Windenergie [13] oder menschliche Bewegungsabläufe [14].

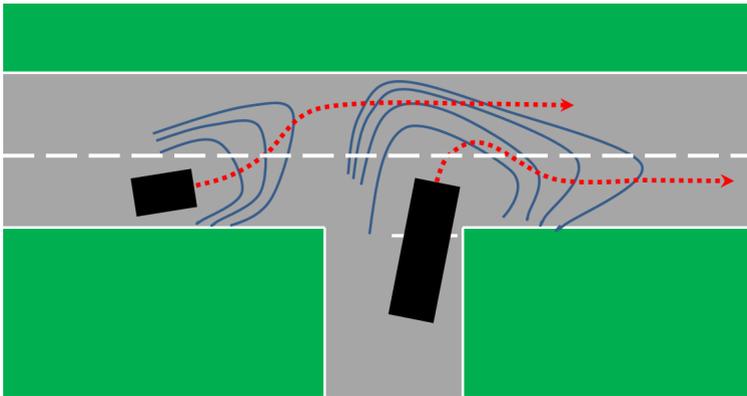


Abbildung 1.3: Beispielszenario für durch Potentiale gesteuerte Fahrzeuge.

Im 2. Kapitel sollen zuerst Grundlagen der Statistik wiederholt werden, bevor es dann im 3. Kapitel um die Langevin-Analyse geht. Im 4. Kapitel wird die Methode dann auf einfache Daten angewendet, um zu zeigen wie sie funktioniert und auch um auf typische Probleme hinzuweisen, die dabei auftreten können. Erst im 5. Kapitel geht es dann um das Thema Fahrermodellierung. Dieses Kapitel basiert größtenteils auf den im Projekt IMoST (Integrated Modelling for Safe Transportation) Projekt gesammelten Daten. Hier wird ausführlich beschrieben, wie die stochastischen Modelle erstellt wurden und wie die Trajektorien aussehen, die von diesem Modell erzeugt werden. Im 6. Kapitel geht es um weiterführende Arbeiten, die die Fahrermodellierung betreffen. Es wird ein einfaches Fahrzeugmodell vorgestellt, welches es erlaubt,

das stochastische Modell auf seine physikalische Korrektheit hin zu überprüfen. Darüber hinaus wird ein deterministisches Fahrermodell vorgestellt, welches es erlaubt optimales Verhalten zu bestimmen. Dieses wird benötigt, um anschließend ein Kritikalitätsmaß einzuführen, welches Auskunft darüber geben soll, wie sicher oder risikoreich eine Fahrsituation eigentlich ist.

Hervorzuheben ist, dass die Untersuchungen zum Fahrerverhalten mit Datensätzen aus dem IMoST Projekt stattfanden. ‘Integrated Modelling for Safe Transportation’ (IMoST) war ein vom niedersächsische Ministerium für Wissenschaft und Kultur gefördertes Projekt, das in einer Kooperation der Universität Oldenburg, dem OFFIS in Oldenburg sowie dem DLR in Braunschweig bearbeitet wurde. Insbesondere die Experimente wurden vom DLR durchgeführt, während die Nachbearbeitung und Aufbereitung an allen drei Standorten stattfand.

## Literaturverzeichnis

- [1] B. S. Kerner. *Introduction to Modern Traffic Flow Theory and Control*. Springer Verlag, 2009.
- [2] G.Orosz; R. E. Willson; G. Stepan. Traffic jams: dynamics and control. *Phil. Trans. R. Soc. A*, 368:4455–4479, 2010.
- [3] S. Lämmer; B. Gehlsen; D. Helbing. Decentralised control of material or traffic flows in networks using phase-synchronisation. *Physica A*, 363:89–95, 2006.
- [4] M.B. Hu; R. Jiang; Y.-H. Wu; W.-X. Wang; Q.-S. Wu. Urban traffic from the perspective of dual graph. *Eur. Phys. J. B*, 63:127–133, 2008.
- [5] M. Caramia; C. D’Apice; B. Piccoli; A. Sgalambro. Fluidsim: A car traffic simulation prototype based on fluid dynamic. *Algorithms*, 3:294–310, 2010.
- [6] L.J. Wang; H. Zhang; H.D. Meng; X.Q. Wang. A model based on TTC to describe how drivers control their vehicles. *The European Physical Journal B*, 66:149–153, 2008.
- [7] S. Kriso; J. Peinke; R. Friedrich; P. Wagner. Reconstruction of dynamical equations for traffic flow. *Physics Letters A*, 299:287–291, 2002.
- [8] J. J. Gibson; L. E. Crooks. A theoretical field-analysis of automobile-driving. *The American Journal of Psychology*, 51:453–471, 1938.
- [9] J.C. Gerdes; E.J. Rossetter. A unified approach to driver assistance systems based on artificial potential fields. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 123:431–438, 2001.
- [10] M. Waechter; F. Riess; Th. Schimmel; U. Wendt; J. Peinke. Stochastic analysis of different rough surfaces. *The European Physical Journal B*, 41:259–277, 2004.
- [11] F. Ghasemi; M. Sahimi; J. Peinke; M.R.R. Tabar. Analysis of non-stationary data for heart-rate fluctuations in terms of drift and diffusion coefficients. *Journal of Biological Physics*, 32:117–128, 2006.

- [12] Ch. Renner; J. Peinke; R. Friedrich. Markov properties of high frequency exchange rate data. *Physica A*, 298:499, 2001.
- [13] M. Wächter; P. Milan; T. Mücke; J. Peinke. Power performance of wind energy converters characterized as stochastic processes: applications of the Langevin power curve. *Wind Energy*, 14:711–717, 2011.
- [14] J. Gottschall; J. Peinke; V. Lippens; V. Nage. Exploring the dynamics of balance data - movement variability in terms of drift and diffusion. *Physics Letters A*, 373:811, 2009.

# Kapitel 2

## Grundlagen der Statistik

Im Folgenden sollen einige Grundlagen der Statistik behandelt werden (siehe hierfür auch Standardliteratur wie [1]). Dies ist nötig, da in den folgenden Kapiteln immer wieder auf die hier eingeführten Begriffe zurückgegriffen wird. Begonnen wird mit den Methoden der 1-Punkt Statistik, die sich vor allem mit der Verteilung von Werten in Datenreihen beschäftigt. Danach wird die 2-Punkt Statistik behandelt, die eine weitergehende Charakterisierung ermöglicht. Abschließend wird auf die Eigenschaften von stochastischen Datenreihen eingegangen.

Es werden hierbei vor allem diskrete Datenreihen behandelt, da die hier vorgestellten Methoden später zur Analyse von diskreten Datensätzen herangezogen werden.

### 2.1 1-Punkt Statistik

Die 1-Punkt Statistik erlaubt die Charakterisierung von Datenreihen, insbesondere wenn diese stochastische Komponenten besitzen wie die in Abb. 2.1 dargestellte. Eine solche Datenreihe bestehe aus  $n$  Werten und sei folgendermaßen definiert:

$$x_i = \{x_0, x_1, \dots, x_i, \dots, x_n\} \quad (2.1)$$

mit  $x \in \mathbb{R}$  sowie  $i \in \mathbb{N}$ .  $i$  zählt hierbei die Werte ab.

Wichtig ist hierbei die Wahrscheinlichkeitsdichte  $p(x_i)$ . Sie errechnet sich aus der Häufigkeit mit der Werte in der Datenreihe auftauchen,

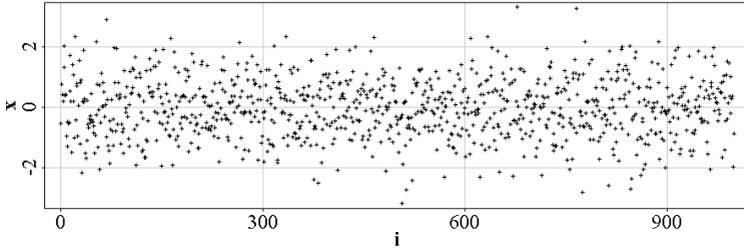


Abbildung 2.1: Beispiel für eine typische unkorrelierte Datenreihe

normiert durch die Gesamtmenge an Werten  $n$ . Im Falle einer diskreten Datenreihe werden hierfür die Werte der Datenreihe in Klassen (engl. Bins)  $j$  eingeteilt. Jede Klasse steht stellvertretend für alle Werte die in einen kleinen Wertebereich von  $x \pm \Delta x$  fallen und fasst diese zusammen. Die Klassen sollten genügend klein sein, um Unsicherheiten zu minimieren, aber auch groß genug so das genügend Einzelwerte in jede Klasse fallen. Nun zählt man einfach die Anzahl von Werten die in jede Klasse fallen und erhält somit ein sogenanntes Histogramm  $H_j(x)$ . Normiert man noch diese Häufigkeiten indem man sie durch die Gesamtzahl an Werten  $n$  dividiert, so erhält man die gesuchten empirischen Einzelwahrscheinlichkeiten  $p_j(x)$  für jede Klasse. Diese Einzelwahrscheinlichkeiten bilden oft einen Funktionsverlauf (vgl. Abb. 2.2) der im diskreten Fall Wahrscheinlichkeitsmassefunktion (engl. Probability Mass Function (PMS))  $p_j(x)$  oder im kontinuierlichen Fall, hin zu immer kleineren Klassengrößen bei gleichzeitig unendlicher Datenmenge, auch Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (engl. Probability Density Function (PDF))  $p(x)$  genannt wird. Dabei gilt für  $p(x)$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1 \quad (2.2)$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $p(x)$  selbst lässt sich durch ihre sogenannten statistischen Momente charakterisieren. Bestimmt werden diese folgendermaßen:

$$m_k = \sum_{j=0}^J x_j^k p(x_j) \quad (2.3)$$

Dabei zählt der Index  $i$  die einzelnen Werte der Datenreihe ab, sowie  $j$  die unterschiedlichen Klassen bis zur maximalen Klasse  $J$ . Für den

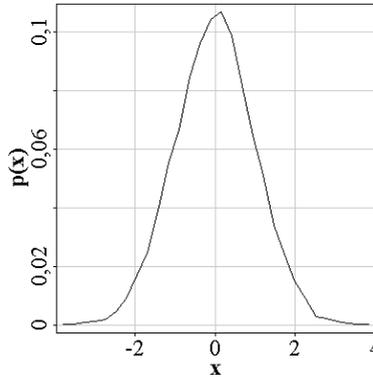


Abbildung 2.2: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der in 2.1 gezeigten Datenreihe. Es handelt sich um eine Standardnormalverteilung mit  $\mu = 0$  und  $\sigma = 1$

kontinuierlichen Fall gilt:

$$m_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k p(x) dx \quad (2.4)$$

Der Wert von  $k$  entscheidet über die Ordnung des Momentes.

Das Moment erster Ordnung steht für den Mittelwert  $\mu$  auch Erwartungswert genannt. Anschaulich steht dieser Wert für den Schwerpunkt der sogenannten Wahrscheinlichkeitsmasse, welche der Fläche zwischen Abszissenachse und Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion entspricht. Dies ist nicht zu verwechseln mit dem wahrscheinlichsten Wert, welcher, wenn vorhanden, durch das globale Maximum der PDF festgelegt wird. Tatsächlich kann es sein, dass der Mittelwert gar nicht in der Datenreihe vorkommt und die Wahrscheinlichkeit  $p(\mu)$  damit sogar Null ist. Besonders der Begriff Erwartungswert scheint in diesem Zusammenhang oft sehr irreführend. Oft wird der Mittelwert durch aufsummieren der Einzelwerte und anschließendes dividieren durch  $n$  bestimmt:

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n x_i = \langle x \rangle \quad (2.5)$$

Dies wird auch als arithmetisches Mittel bezeichnet, und wird in Gleichungen durch spitze Klammern verdeutlicht.

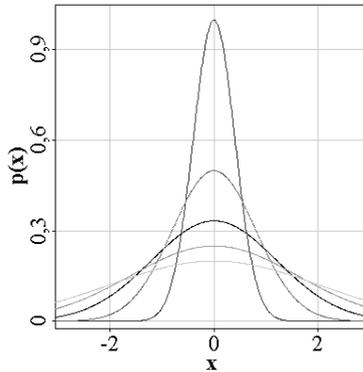


Abbildung 2.3: Normalverteilungen mit unterschiedlicher Standardabweichung. Die Werte reichen von  $\sigma = 0.4$  bis  $\sigma = 1.8$

Das Moment zweiter Ordnung steht für die Varianz  $\sigma^2$ .  $\sigma$  selbst wird dabei Standardabweichung genannt. Anschaulich repräsentiert sie die Streuung der Werte (vgl. Abb. 2.3). Oftmals wird die Varianz durch das sogenannte zweite zentrierte Moment ersetzt. Dabei wird der Mittelwert von den Einzelwerten der Datenreihe abgezogen, um die Streuung um den Mittelwert herum zu ermitteln. Die Varianz wird folgendermaßen ermittelt:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=0}^n (x_i - \langle x \rangle)^2 \quad (2.6)$$

Das Moment dritter Ordnung steht für die Schiefe (engl. skewness). Die Schiefe gibt die Neigung der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion nach 'rechts' (kleine Werte) oder 'links' (größere Werte) an. Dabei stehen positive Werte für eine Neigung nach 'rechts', sowie negative Werte für eine Neigung nach 'links' (vgl. Abb. 2.4). Zu beachten ist das eine Schiefe ungleich Null die Symmetrie der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion zerstört. Oft wird auch dieser Wert beim Berechnen zentriert, sowie noch zusätzlich durch die Standardabweichung normiert. Üblicherweise errechnet sich die Schiefe deshalb folgendermaßen:

$$v = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \left( \frac{x_i - \langle x \rangle}{\sigma} \right)^3 \quad (2.7)$$

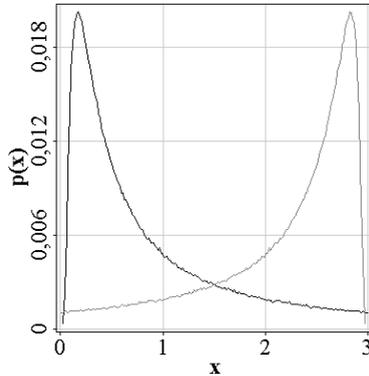


Abbildung 2.4: Verteilung mit positiver (schwarz) und negativer (grau) Schiefe

Das Moment vierter Ordnung steht für die Wölbung oder Spitzheit (engl. kurtosis, vgl. Abb. 2.5). Anschaulich könnte man mit dieser Größe beschreiben, wie stark die Werte konzentriert sind. Eine hohe Wölbung bedeutet, dass die Verteilung mehr aus extremen Werten besteht, während ein kleiner Wert zur Folge hat, dass die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion bauchiger ausfällt. Auch dieser Wert wird oft als zentriertes Moment verwendet, sowie durch die Standardabweichung normiert:

$$w = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \left( \frac{x_i - \langle x \rangle}{\sigma^2} \right)^4 \quad (2.8)$$

Meistens beschränkt man sich auf diese ersten vier Momente, doch generell kann eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion eine unendliche Anzahl von Momenten besitzen, oder auch kein einziges bestimmbares wie im Falle einiger Lévy-Verteilungen. Erwähnenswert ist das Pawula-Theorem, welches besagt, dass das dritte und alle folgenden Momente Null sind, sofern das vierte Null ist. Die Form der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $p(x)$  fasst die Informationen der 1-Punkt Statistik zusammen, so dass zwei Datensätze mit der gleichen PDF auch dieselbe 1-Punkt Statistik aufweisen. Es gibt einige bekannte Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen, die recht häufig vorkommen.

Die Gleichverteilung ist die einfachste Verteilung und besitzt eine konstante Wahrscheinlichkeitsdichte über ihren ganzen Definitionsbereich.

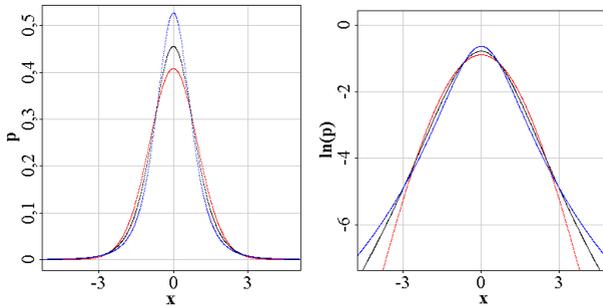


Abbildung 2.5: Verteilungen mit unterschiedlicher Spitzheit (Kurtosis). Es wurden für die Kurtosis Werte von 0,2, 2 und 100 verwendet. Man beachte das die bauchigen Funktionen weniger Extremwerte besitzen als die Spitzen.

bereich. Diese Art der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion kommt sehr häufig vor. Zum Beispiel als Münzwurf oder beim Würfeln (mit einem Würfel). Besonders wichtig ist sie, da sie oft die einzige zur Verfügung stehende Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung ist, die einem beim Programmieren zur Verfügung steht, allerdings können andere Verteilungen von ihr abgeleitet werden.

Wenn man viele gleich verteilte Zufallswerte addiert, so konvergieren ihre Summe gegen die sogenannte Normal- oder Gaußverteilung. Hat man nur eine endliche Anzahl an Zufallswerten, so entspricht die Verteilung einer Binominalverteilung. Die Gaußverteilung ist in der Natur genauso wie in vielen Modellen sehr verbreitet. Dies liegt nicht zuletzt daran, dass sie bereits durch die ersten zwei Momente vollständig bestimmt wird und somit als erste Näherung für viele Systeme benutzt wird. Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion einer Normalverteilung lautet:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (2.9)$$

Der Spezialfall von  $\mu = 0$  sowie  $\sigma = 1$  nennt sich Standardnormalverteilung.

Darüber hinaus gibt es noch die Lévy-Verteilung, die eine allgemeinere Form der Normalverteilung darstellt. Sie besitzt einen so genannten 'Heavy Tail', welcher die extremsten Ereignisse enthält. Sie ist somit bei Zeitreihen zu finden, die mitunter extrem große Extremwerte

oder Ausreißer enthalten (eine solche Zeitreihe wird auch als Intermitent bezeichnet), allerdings besitzt sie keine definierten Momente, da diese gegen unendlich gehen.

In der Datenanalyse hängt die Genauigkeit, mit der die Momente bestimmt werden können, von der Datenmenge sowie von der Komplexität des Datensatzes ab. Generell wird immer angenommen, dass die Momente von einem unendlich langen Datensatz  $n \rightarrow \infty$  bestimmt werden. Dies ist aber in der Realität nicht möglich. Die Genauigkeit der Momente, besonders die des Mittelwertes, ist entscheidend für die Fehlerabschätzung in der Messtechnik. Dort wird der Fehler des Mittelwertes folgendermaßen definiert:

$$\Delta\mu = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (2.10)$$

Hervorzuheben ist hier, dass dieser Fehler mit der Datenmenge  $n$  immer kleiner wird und zwar halbiert er sich für das Vierfache der Datenmenge. Leider gilt diese Abschätzung nur für normal verteilte Datenreihen, z.B. für die fehlerbehafteten Werte von Einzelmessungen. Bei komplexeren Systemen funktioniert diese Abschätzung streng genommen leider nicht mehr, dennoch wird der Faktor  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  häufig als grobe Fehlerabschätzung eingesetzt.

Die 1-Punkt Statistik erlaubt nur die Charakterisierung von Einzelwerten, die nicht zeitlich miteinander verbunden oder sonst in irgend einer Weise miteinander korreliert sind. Dies hat zur Folge, dass jeder Wert gegen einen anderen der Reihe ausgetauscht werden kann (vgl. Abb. 2.6) ohne dass sich ihre PDF oder statistischen Momente ändern. Im Extremfall kann man also die Werte nach ihrer Größe ordnen, ohne an der Wahrscheinlichkeitsdichte etwas zu verändern. Das bedeutet, sobald die Abfolge der Werte eine Rolle spielt, reicht die 1-Punkt Statistik nicht mehr aus (vgl. [2], [3]). Zeitreihen und ähnliche Datenreihen, wo die Einzelwerte eine feste Position in der Datenreihe besitzen, sind nur mit der sogenannten 2-Punkt Statistik zu charakterisieren, auf welche im folgenden Abschnitt eingegangen wird.

## 2.2 2-Punkt Statistik

Die 2-Punkt Statistik wird auf Datenreihen angewendet, bei denen die Abfolge der Einzelwerte eine entscheidende Bedeutung besitzt. Dies

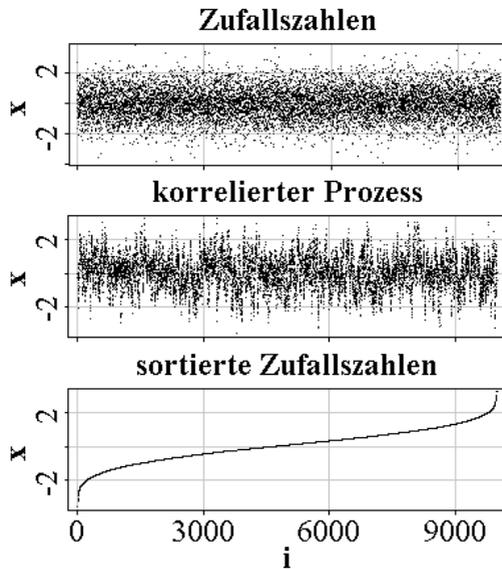


Abbildung 2.6: Unterschiedliche Datenreihen mit identischer PDF (Standardnormalverteilung). Die offensichtlich unterschiedlichen Zeitreihen können nicht mit Methoden der 1-Punkt Statistik unterschieden werden.

bedeutet, dass jedem Einzelwert auch eine feste Position in der Reihe zugeordnet wird. Alle Zeitreihen erfüllen diese Bedingung, weshalb meistens auch die Variable  $t$  verwendet wird, um die Position in der Reihe festzulegen. Eine solche Zeitreihe sei definiert durch:

$$x(t) = \{x(t_0), \dots, x(t_i), \dots, x(t_n)\} \quad (2.11)$$

mit  $x, t \in \mathbb{R}$  sowie  $i \in \mathbb{N}$  zusätzlich muss  $t$  noch folgende Bedingung erfüllen:

$$t_i < t_{i+1} \quad (2.12)$$

Diese Bedingung sorgt für ein streng monotonen Ansteigen der Zeitwerte. In vielen Fällen ist die zeitliche Distanz der Punkte eine Konstante. In diesen Fällen spricht man von einer äquidistanten Zeitreihe. Dabei

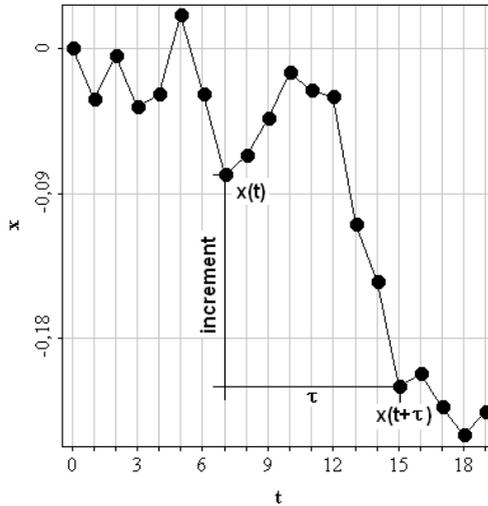


Abbildung 2.7: Beispiel für ein Inkrement. Es wird gebildet durch die Differenz zweier um  $\tau$  voneinander entfernt liegender Werte.

wird der Kehrwert dieser Distanz als Aufnahmezeit (engl. Samplingfrequenz) bezeichnet:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \quad (2.13)$$

2-Punkt Statistik bedeutet, dass man sich die Statistik von jeweils zwei unterschiedlichen Punkten der Zeitreihe ansieht und sie anschließend zu einem Wert vereint. Eine Möglichkeit ist hierbei das sogenannte Inkrement. Hierbei handelt es sich um die Differenz zweier Werte mit konstantem zeitlichem Abstand  $\tau$ :

$$x'_\tau(t) = x(t + \tau) - x(t) \quad (2.14)$$

Das Inkrement (vgl. 2.7) stellt hierbei die Änderungsrate von  $x(t)$  dar. Normiert man  $x'_\tau$  noch indem man durch  $\tau$  teilt, so ist das Inkrement auch für nicht-äquidistante Zeitreihen definiert.

Bildet man nun die Inkremente der Zeitreihe mit  $\tau = t_{i+1} - t_i$ , so besteht  $x'_\tau(t)$  aus höchstens  $n - 1$  Werten. Diese Werte werden dann wie in

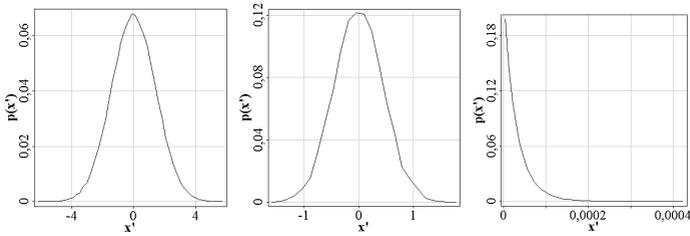


Abbildung 2.8: Inkrement PDF( $\tau = 1$ ) der Datenreihen aus 2.6

der 1-Punkt Statistik behandelt, was bedeutet, dass man die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion und die Momente dieser Folge von Inkrementen bestimmt (vgl. Abb. 2.8). Um hervorzuheben, dass es sich hierbei um eine Inkrementstatistik handelt, werden die Momente nun Strukturfunktionen genannt. Hierbei ist zu bedenken, dass im allgemeinen diese Strukturfunktionen und somit auch die zugehörige Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Inkremente vom gewählten  $\tau$  abhängen. Ein schönes Beispiel hierfür ist die atmosphärische Turbulenz. Sieht man sich die Inkrementstatistik einer aufgenommenen Windgeschwindigkeit an (Abb. 2.9), so fällt auf, dass die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion bei sehr großen  $\tau$  annähernd einer Normalverteilung ähnelt, bei kleinem  $\tau$  allerdings deutlich davon abweicht. Man spricht hierbei von einer Skalenabhängigkeit der Strukturfunktionen, weshalb es wichtig ist die Skala  $\tau$  anzugeben, für welche die Strukturfunktionen oder Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Inkremente bestimmt wurden. Zeigt eine Inkrement-Wahrscheinlichkeitsdichte auf einer bestimmten Skala ein deutlich erhöhtes Auftreten von extremen Werten wie in der atmosphärischen Turbulenz bei kleinen  $\tau$  (vgl. [3]), so spricht man von Intermittenz. Dieser Begriff bedeutet, dass es sporadisch extreme Ereignisse gibt, die eine sprunghafte Änderung bewirken. Ein gegenüber der Normalverteilung erhöhtes Auftreten von Windböen extremer Stärke ist ein typisch intermittentes Phänomen.

Neben dieser Inkrementstatistik gibt es noch weitere statistische Methoden, die zur 2-Punkt Statistik gezählt werden. Die Autokorrelationsfunktion oder Autokovarianzfunktion basiert auf dem Produkt zweier zeitlich durch  $\tau$  getrennter Punkte und anschließender Integration in der Zeit. Dies wird für unterschiedliche  $\tau$  wiederholt. Es gilt folgende

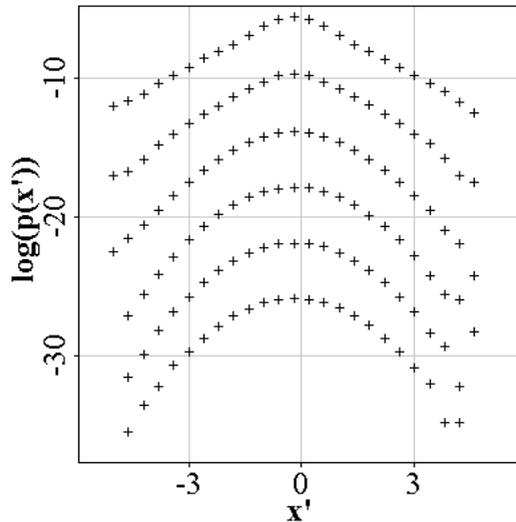


Abbildung 2.9: Beispiele für die Inkrement-PDF bei unterschiedlichen Inkrementlängen. Der Übersichtlichkeit halber in y-Richtung verschoben. Die Inkrementlänge wächst von oben nach unten

Definition:

$$\psi(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{T-\tau} x(t)x(t+\tau)dt \quad (2.15)$$

Hier steht T für den von der Zeitreihe abgedeckten Zeitraum. Wie bei den Strukturfunktionen hängt der Wert der Autokorrelation von der gewählten Skala  $\tau$  ab. Eines der häufigsten Anwendungsgebiete ist das ermitteln von Wiederholungen oder Ähnlichkeiten in der Zeitreihe, was zu einem lokalen Maximum der Funktion führt. Die Autokorrelation besitzt immer ein Maximum für  $\tau = 0$  und die Zeitreihe ist hier maximal korreliert, da identisch mit sich selbst. Zur Normierung werden alle Werte der Autokorrelationsfunktion durch diesen Wert geteilt, was für  $\psi(\tau = 0) = 1$  bedeutet. Im Falle jeglichen Fehlens einer Korrelation spricht man auch von einer  $\delta$ -Korrelation, da nur für  $\tau = 0$  ein Wert ungleich von Null zu finden ist.

Alternativ zur Autokorrelationsfunktion kann auch die spektrale Leistungsdichte  $S(f)$  (vgl. Abb. 2.10) dargestellt werden.  $f$  steht hierbei für die Frequenz. Dabei wird ein Signal so transformiert, das die

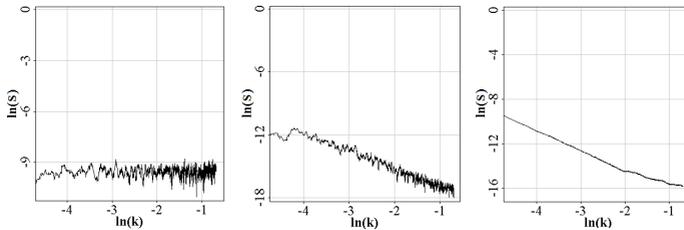


Abbildung 2.10: Leistungsspektren der Datenreihen aus 2.6. Da es sich um eine Methode der 2-Punkt Statistik handelt können nun deutliche Unterschiede ausgemacht werden.

Leistung in Abhängigkeit der Frequenz aufgetragen wird. Die ermöglicht die Analyse eines Signals hinsichtlich periodischer Anteile und ihres Anteils am Zeitsignal. Beide Darstellungen sind über das Wiener-Chintschin-Theorem miteinander verbunden. Es gilt:

$$S(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau \quad (2.16)$$

bzw.

$$\psi(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{i2\pi f\tau} df \quad (2.17)$$

## 2.3 Markov-Ketten

Eine stochastische Zeitreihe  $x(t)$  besteht aus einer Abfolge von Werten, die im Gegensatz zu einer deterministischen Zeitreihe auch eine stochastische Komponente enthält. Es handelt sich ferner um eine Markov-Kette, wenn der nächste Wert  $x(t + \tau)$  einer Zeitreihe nur von einer begrenzten Menge an diskreten vergangenen Ereignissen abhängt. Im zeitkontinuierlichen Fall spricht man dagegen von einem Markov-Prozess. Hängt der nächste Wert  $x(t + \tau)$  ausschließlich vom aktuellen  $x(t)$  ab, so spricht man von einem Markov-Prozess erster Ordnung. Formal gilt somit für die Wahrscheinlichkeit,  $x(t + \tau)$  als nächsten Wert zu erhalten, die Bedingung:

$$p(x(t + \tau)|x(t), x(t - \tau), \dots) = p(x(t + \tau)|x(t)) \quad (2.18)$$

In dieser Gleichung bedeutet  $p(x|b)$ , dass man  $p(x)$  unter der Bedingung/Berücksichtigung von  $b$  erhält.  $p(x)$  wird in diesem Zusammenhang auch Übergangswahrscheinlichkeit genannt. Bei einem Markov Prozess erster Ordnung spielt es somit keine Rolle, ob man weitere vorhergehende Zeitpunkte mit einbezieht, da sie keine neuen Informationen enthalten, die für den aktuellen Schritt von Bedeutung wären. Ist die Übergangswahrscheinlichkeit  $p(x(t + \tau)|x(t))$  konstant für alle Einzelschritte der Markov-Kette, so spricht man von einer stationären Übergangswahrscheinlichkeit. Das Gegenteil wäre eine in-stationäre oder auch transiente Übergangswahrscheinlichkeit, die somit auch von  $t$  abhängt. Eine weitere wichtige Eigenschaft ist die Rekurrenz. Ein Zustand oder Wert heißt rekurrent, wenn die Wahrscheinlichkeit für ein Wiederauftreten in der Markov-Kette nicht null ist, während das Gegenteil ein transienter Zustand wäre. Dabei kann eine Markov-Kette durchaus in einem transienten Zustand beginnen, aber nach einiger Zeit in eine Folge rekurrenter Zustände münden.

Stellt sich nur die Frage, wie man feststellt, ob eine Zeitreihe nun der Markov-Eigenschaft genügt oder nicht. Die Markov-Eigenschaft zu prüfen stellt sich leider als schwierig heraus. Es gibt zwar Möglichkeiten wie den Wilcoxon-Test [4] oder das Überprüfen der bedingten Wahrscheinlichkeiten, doch diese Möglichkeiten erfordern oft große Datenmengen und erlauben keine definitiven Aussagen. Generell kann man allerdings bestimmte Funktionen ausschließen, die der Markov Eigenschaft immer widersprechen. Alle Zeitreihen mit Mehrdeutigkeiten sind zumindest im eindimensionalen Fall problematisch. Dazu zählen Schwingungen aber auch in-stationäre Zeitreihen. In solchen Fällen ist es nötig, die in-stationären Anteile zu extrahieren (engl. detrending), bevor man das System analysiert.

Zeitreihen, die der Markov-Eigenschaft genügen, haben den Vorteil, das man nur die Übergangswahrscheinlichkeiten kennen muss, um das System zu beschreiben. In der realen Welt gibt es viele Beispiele für physikalische Systeme, die sich hervorragend als Markov-System beschreiben lassen. Dabei ist allerdings die Skala auf der man den Markov-Prozess annimmt, entscheidend. Dies lässt sich leicht an einem Beispiel verdeutlichen. Das wohl bekannteste Beispiel für einen Markov-Prozess ist die Brownsche-Bewegung [5]. Dabei wird der Weg modelliert, den ein Teilchen durch einen Flüssigkeitstropfen nimmt. Auf seinem Weg kollidiert das Teilchen unzählige Male mit den Teilchen der Flüssigkeit und ändert so sporadisch seine Richtung. Da es

unmöglich ist, jeden Zusammenstoß deterministisch zu erfassen, wird hier ein stochastischer Ansatz formuliert. Dabei ist die Skala entscheidend, auf der man diese Modellierung durchführt. Wählt man eine Skala kleiner als die mittlere freie Weglänge, so müsste das System aus stark korrelierte deterministische Folgen bestehen (das Teilchen bewegt sich zwischen den Stößen vollkommen geradlinig), die überhaupt keine stochastische Komponente enthalten. Andererseits führt die Wahl einer sehr großen Skala zu vollkommen zufälligen Werten ohne jede Struktur oder Korrelation, was als Modell ebenfalls nur unzureichend wäre. Ähnliche Beispiele lassen sich auch in der Turbulenz [6] oder Thermodynamik finden. Wählt man die richtige Skala, so kann die Brownsche-Bewegung als Wiener-Prozess beschrieben werden. Der Wiener-Prozess ist ein normal verteilter Markov-Prozess erster Ordnung mit Erwartungswert  $\mu = 0$  und Varianz  $\sigma = \tau$  für jeden Einzelschritt. Da die Einzelwerte keinerlei Korrelation zueinander aufweisen spricht man auch von  $\delta$ -korrelierten Zufallszahlen:

$$\langle W(t)W(t') \rangle = 2\delta(t - t') \quad (2.19)$$

Meistens ist man nicht an den Übergangswahrscheinlichkeiten interessiert, sondern man möchte eine Gleichung, die es ermöglicht Zeitreihen zu generieren, die die Eigenschaften der Markov-Kette nachahmen. Man möchte also eine Schritt-für-Schritt Simulation des Systems durchführen. Eine solche Simulation wird Monte-Carlo-Simulation genannt und beispielsweise mit Hilfe einer stochastischen Differentialgleichung durchgeführt. Wie man eine solche Gleichung aus Daten ableitet und für Simulationen einsetzt ist Thema des folgenden Kapitels. Beispiele findet man dagegen im übernächsten Kapitel.

## Literaturverzeichnis

- [1] Bronstein; Semendjajew; Musiol; Mühlig. *Taschenbuch der Mathematik*. B. G. Teubner, 1958.
- [2] H. Risken. *The Fokker-Planck equation 2nd edn*. Springer Verlag, 1989.
- [3] A. Morales; M. Wächter; J. Peinke. Characterization of wind turbulence by high-order statistics. *Wind Energy*, 15(3):391–406, April 2012.
- [4] D. Kleinhans; R. Friedrich; M. Waechter; J. Peinke. Markov properties in presence of measurement noise. *Physical Review E*, 76: 041109, 2007.
- [5] A. Einstein. Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen. *Annalen der Physik*, 322:549–560, 1905.
- [6] St. Lueck; Ch. Renner; J. Peinke; R. Friedrich. The Markov-Einstein coherence length - a new meaning for the Taylor length in turbulence. *Phys. Lett. A*, 359:335, 2006.



# Kapitel 3

## Langevin-Analyse

Die Langevin-Analyse ist eine Methode zur Ermittlung stochastischer Differentialgleichungen, die direkt auf einen Datensatz angewendet wird. Damit stellt sie eine Methode zur Verfügung, die es erlaubt ein Modell zu errechnen, um es anschließend in einer Monte-Carlo Simulation einzusetzen, was dann, im besten Fall, zu im statistischen Sinne mit dem Original identischen simulierten Daten führt. Die Methoden und Erkenntnisse über Markov-Systeme und ihre Beschreibung durch Langevin-Gleichungen wurde von vielen Wissenschaftlern untersucht. Unter anderem von Einstein [1], Kolmogorov [2] und vielen anderen [3, 4, 5, 6].

### 3.1 Langevin-Gleichung

Ausgangspunkt für die Langevin-Analyse [7] ist die Zeitreihe  $x(t)$  eines stationären Markov-Systems erster Ordnung. Die Stationarität ist dabei notwendig und muss gegebenenfalls durch “detrending” oder “windowing” [8] hergestellt werden. Ein Markov-Prozess erster Ordnung kann durch die Übergangswahrscheinlichkeiten bedingt auf seinen aktuellen Zustand definiert werden. Die Entwicklung der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsverteilung wird beschrieben durch die Fokker-Planck Gleichung. Diese Gleichung ist eine spezielle Form der allgemeineren Chapman-Kolmogorov-Gleichung, die man nach einer Taylorentwicklung erhält. Diese spezielle Taylorentwicklung wird nach der

zweiten Ordnung abgebrochen und auch Kramers-Moyal Entwicklung genannt. Die Fokker-Planck Gleichung lautet:

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} [A(x, t)p(x, t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [B(x, t)p(x, t)] \quad (3.1)$$

Dabei haben  $A(x, t)$  und  $B(x, t)$  eine spezielle anschauliche Bedeutung. Sie stehen für die Drift- und Diffusionskomponenten der Wahrscheinlichkeitsverteilung. Die Drift steht dabei für eine Verschiebung und die Diffusion für ein Auseinanderlaufen der Verteilung. Definiert sind sie folgendermaßen:

$$A = \langle \Delta x \rangle = \frac{1}{\tau} \int \Delta x T_{ab} d\Delta x \quad (3.2)$$

$$B_j = \langle \Delta x^2 \rangle = \frac{1}{\tau} \int \Delta x^2 T_{ab} d\Delta x \quad (3.3)$$

$T_{ab}$  steht dabei für die Übergangswahrscheinlichkeit um vom Wert  $a$  nach  $b$  zu gelangen. Die Fokker-Planck-Gleichung hat die Form einer linearen partiellen Differentialgleichung. Die Langevin-Gleichung wird von der Fokker-Planck-Gleichung abgeleitet und beschäftigt sich mit den eher mikroskopischen meist stochastischen Veränderungen in der Markov-Kette. Sie hat die Form einer stochastischen partiellen Differentialgleichung und lautet:

$$\dot{x}(t) = D^{(1)}(x) + \sqrt{D^{(2)}(x)} \tilde{\Gamma}(t) \quad (3.4)$$

Hierbei steht  $D^{(1)}(x)$  für den Drift und  $D^{(2)}(x)$  für die Diffusion (Volatilität). Es handelt sich im allgemeinen um von  $x$  abhängige Koeffizienten.  $\tilde{\Gamma}(t)$  steht hierbei für Zufallszahlen, die im Idealfall einem weißen Rauschen entsprechen. Das heißt es handelt sich um normal-verteilte Zufallszahlen mit dem Mittelwert  $\mu = 0$  und der Standardabweichung  $\sigma = 1$ . Dazu kommt, dass die Zufallszahlen  $\delta$ -korreliert sein müssen, was ein konstantes Leistungsspektrum  $S(f)$  zur Folge hat.

Möchte man nun eine Monte-Carlo Simulation durchführen, so definiert die Langevin-Gleichung das Inkrement welches benötigt wird um vom aktuellen Wert zum nächsten zu gelangen. Folglich wird folgende Form der Gleichung eingesetzt um eine Simulation durchzuführen:

$$x(t) = x(t - \tau) + D^{(1)}(x(t - \tau))\tau + \sqrt{D^{(2)}(x(t - \tau))}\tau\Gamma(t) + O(\tau) \quad (3.5)$$

Der Term  $O(\tau)$  symbolisiert Terme höherer Ordnung, die eventuell von Bedeutung sind [9, 10]. Der wesentliche Unterschied zur vorhergehenden Gleichung wird durch das Zeitinkrement  $\tau$  eingeführt.  $\tau$  definiert hierbei den zeitlichen Abstand zwischen zwei aufeinander folgenden Werten, also die Samplingfrequenz der simulierten Zeitreihe. Diese Gleichung macht auch deutlich welche Bedeutung den Drift- und Diffusionskoeffizienten zukommt. Der Drift bewirkt eine deterministische Änderung bedingt auf dem vorhergehenden Wert  $x(t - \tau)$ . Es handelt sich hierbei um den Mittelwert der für den aktuellen Schritt nötigen Normalverteilung. Die Diffusionskoeffizienten modifizieren dagegen die Standardabweichungen der normal-verteilten Zufallszahlen in  $\Gamma(t)$ , so das die endgültigen Werte um den Mittelwert herum zufällig variiert werden. Das sowohl Drift- als auch Diffusionskoeffizient dabei mit  $\tau$  skaliert werden ist nicht überraschend, doch auch das Rauschen  $\tilde{\Gamma}(t)$  muss über  $\tau$  integriert werden und wird dadurch zu  $\Gamma(t)$ .

Neben der Charakterisierung durch die Wahrscheinlichkeitsdichte, sowie der Momente und Strukturfunktionen, wird auch oft das zugehörige Potential eines Markov-Prozesses betrachtet. Das Potential errechnet sich aus der Drift des Systems durch:

$$\phi = - \int D^{(1)}(x) dx \quad (3.6)$$

Diese Darstellung der Drift macht vor allem stabile(lokale Minima) und instabile Fixpunkte(lokale Maxima) im System deutlich.

Terme dritter oder höherer Ordnung werden bei der Langevin-Gleichung für gewöhnlich ignoriert, können aber eine wichtige Rolle spielen, besonders im Falle von Systemen mit nicht-normal verteiltem Rauschen, großen Zeitschritten  $\tau$  oder für die korrekte analytische Bestimmung der Drift- und Diffusionskoeffizienten. Ob die Annahme, dass zwei Terme ausreichen gerechtfertigt ist, kann allerdings geprüft werden. Laut dem sogenannten Pawula Theorem ist es ausreichend zu prüfen ob das vierte Moment  $D^{(4)} = 0$  ist. Wenn dies der Fall ist, so ist auch das dritte, sowie alle höheren Momente Null, und somit leisten sie keinen Beitrag zum Modell mehr. Das Problem dabei ist, das bei realen Messungen nahezu immer  $D^{(4)} > 0$  ist. Der Beitrag von  $D^{(4)}$  sollte deshalb klein ausfallen, doch fällt die Entscheidung darüber was in diesem Zusammenhang klein ist, schwer.

## 3.2 Bestimmung von Drift- und Diffusionskoeffizienten

Wenn nun ein Langevin-Modell erstellt werden soll, so ist offenbar die Bestimmung der Drift- und Diffusionskoeffizienten entscheidend. Genau dies ist allerdings die große Stärke eines Langevin-Modells, denn die notwendigen Koeffizienten lassen sich direkt aus den Zeitreihen ableiten, die man modellieren möchte. Für die Driftkoeffizienten gilt:

$$D^{(1)}(X) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} M^{(1)}(x, \tau) \quad (3.7)$$

wobei  $M^{(1)}(x, \tau)$  für den Kramer-Moyal-Koeffizienten erster Ordnung steht:

$$M^{(1)}(x, \tau) = \langle x(t + \tau) - X \rangle |_{x(t)=X} \quad (3.8)$$

für den Diffusionskoeffizienten gilt:

$$D^{(2)}(X) = \frac{1}{2} \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} M^{(2)}(x, \tau) \quad (3.9)$$

wobei  $M^{(2)}(x, \tau)$  für den Kramer-Moyal-Koeffizienten zweiter Ordnung steht:

$$M^{(2)}(x, \tau) = \langle (x(t + \tau) - X)^2 \rangle |_{x(t)=X} \quad (3.10)$$

Auffällig ist hierbei, dass die Kramers-Moyal-Koeffizienten im wesentlichen mit der ersten und zweiten Strukturfunktion übereinstimmen. Es handelt sich also um eine Form von Inkrementstatistik und damit um eine 2-Punkt Statistik, welche insbesondere die Dynamik der Zeitreihe erfasst.

Um diese Gleichungen zu interpretieren, ist es nötig die Vorgehensweise beim Bestimmen der Koeffizienten genauer auszuführen.

Zuerst müssen die Werte der Zeitreihe in Klassen (engl. Bins, vgl. Abb. 3.1) unterteilt werden. Dies geschieht auf die selbe Weise wie beim Erstellen eines Histogramms oder der Wahrscheinlichkeitsdichte. Die Größe der Klassen ist hierbei entscheidend. Einerseits möchte man die Klassen so klein wie nur irgend möglich halten, denn dies erhöht die Auflösung des späteren Modells. Andererseits müssen aber auch genügend Werte in jede Klasse fallen, da sonst die Genauigkeit der späteren Koeffizienten leidet. Welche Klassengröße gewählt werden muss hängt von der Datenmenge und darüber hinaus auch von der Komplexität des

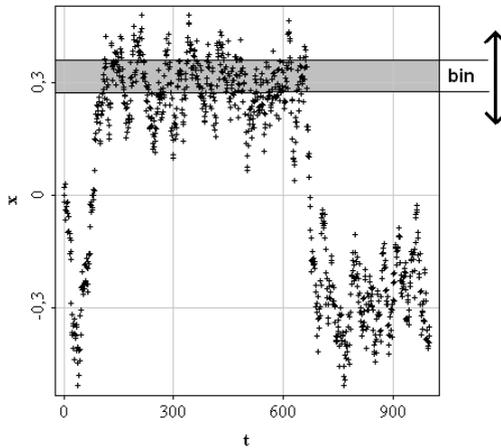


Abbildung 3.1: Schematische Darstellung einer Klasse. Es werden nur die Inkremente benutzt, deren erster Punkt  $x(t)$  innerhalb des markierten Bereichs liegt.

Systems ab. Eine generelle Empfehlung gibt es nicht. Die gewählten Klassen tauchen in Gleichungen als  $X$  auf.

Als nächstes wird eine Matrix erstellt, die die Größe von  $i_{max} \times n_{\tau}$  besitzt.  $i_{max}$  steht dabei für die Anzahl der unterschiedlichen Klassen und  $n_{\tau}$  ist ein Wert, welcher angibt, über wie viele unterschiedliche  $\tau$  später gemittelt/interpoliert werden soll. Dies definiert auch das maximale  $\tau_{max}$  welches für die maximale zeitliche Distanz (Skala) steht, die berücksichtigt werden soll. Die Matrix wird nun mit den Werten der Inkremente gefüllt. Dabei werden die Mittelwerte für jede Klasse und für alle  $\tau$  in die Matrix eingetragen, so das für jede Klasse und für jedes betrachtete  $\tau$  das zugehörige mittlere Inkrement (für  $M^{(1)}$ ) beziehungsweise das Quadrat der Inkremente (für  $M^{(2)}$ ) in der Matrix zu finden ist.

Anschließend sieht man sich an, wie sich diese Werte innerhalb einer Klasse mit steigendem  $\tau$  verhalten. Gesucht wird dabei nach einem möglichst linearen Abschnitt der Werte über  $\tau$  (vgl. Abb. 3.2). Dieser lineare Bereich wird durch ein minimales und maximales  $\tau$  begrenzt.

Abschließend ermittelt man die Drift- und Diffusionskoeffizienten durch Mittlung aller Karmers-Moyal-Koeffizienten einer Klasse, die

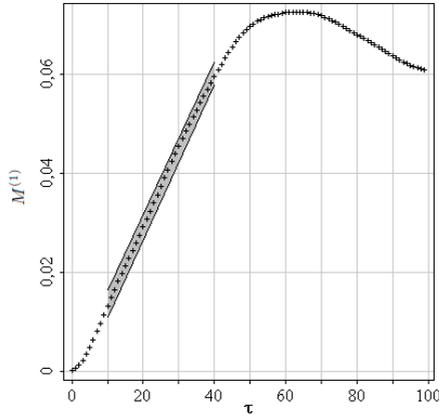


Abbildung 3.2: Beispiel für die Abhängigkeit von  $M^{(n)}$  von  $\tau$ . Für die Bestimmung von  $D^{(n)}$  wird nur der markierte lineare Bereich herangezogen.

man dazu vorher noch durch ihre zugehörigen  $\tau$  teilen muss. Dabei werden alle Werte, die im linearen Bereich liegen, berücksichtigt. Alternativ kann auch die Steigung der Momente über  $\tau$  mittels linearer Regression bestimmt werden. Dies macht das Bestimmen der Koeffizienten weniger anfällig gegen Messrauschen [11, 12]. Damit hat man nun für jede Klasse einen mittleren Wert für den zugehörigen Drift- und Diffusionskoeffizienten gefunden. Abschließend kann es nötig sein z.B. bei ungenügender Samplingrate, Störungen zu korrigieren. Für einige Systeme sind in einem solchen Fall sogar exakte Korrekturen möglich [13].

### 3.3 Höhere Dimensionen

Die Langevin-Analyse kann auch auf höhere Dimensionen erweitert werden. In diesem Fall besteht jeder Zustand des Systems nicht mehr nur aus einem einzelnen Wert  $x(t)$ , sondern einem Zustandsvektor  $\vec{x}(t)$  mit  $n$  Komponenten. Dadurch wird die Drift in der Langevin-Gleichung zu einem Driftvektor  $D_i^{(1)}(\vec{x})$  und die Diffusion zu einer Diffusionsma-

trix  $D_{i,j}^{(2)}(\vec{x})$ . Die Langevin-Gleichung für den zwei-dimensionalen Fall sieht nun für jede Komponente des Zustandsvektors folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} x_i(t + \tau) &= x_i(t) \\ &+ D_i^{(1)}(\vec{x}_i(t))\tau \\ &+ \sum_k \sqrt{D_{ik}^{(2)}(\vec{x}_i(t))} \tau \Gamma_i(t) + \mathcal{O}(\tau) \end{aligned} \quad (3.11)$$

für die Drift- und Diffusionskoeffizienten gelten nun:

$$D_i^{(1)}(\vec{x}) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} M_i^{(1)}(\vec{x}, \tau) \quad (3.12)$$

mit

$$M_i^{(1)}(\vec{x}, \tau) = \langle x_i(t + \tau) - X_i \rangle \Big|_{x_i(t) = \vec{x}_i} \quad (3.13)$$

$$D_{i,j}^{(2)}(\vec{x}) = \frac{1}{2} \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} M_{i,j}^{(2)}(\vec{x}, \tau) \quad (3.14)$$

mit

$$\begin{aligned} M_{i,j}^{(2)}(\vec{x}, \tau) &= \\ &\langle (x_i(t + \tau) - X_i)(x_j(t + \tau) - X_j) \rangle \Big|_{x_{i,j}(t) = \vec{x}_{i,j}} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Dabei stehen  $i$  und  $j$  für die jeweiligen Dimensionen und nicht mehr für die Einzelwerte der Zeitreihen, so das ein Zustandsvektor die Form  $(x_i, x_j)$  besitzt. Zu beachten ist, das jede der Zeitreihen nun eine eigene Einteilung in Klassen besitzt. Im zweidimensionalen Fall entspricht dies einem Gitter, das über den Zustandsraum gelegt wird. Jedes Gitterelement besitzt dabei zwei Drift-Koeffizienten und eine  $2 \times 2$  Matrix als Diffusionsmatrix. Diese Matrix ist allerdings symmetrisch, was im zweidimensionalen zu drei unterschiedlichen Werten führt. Die Diagonale der Matrix besitzt die Diffusionskoeffizienten jeder Einzeldimension und die nicht-diagonalen Elemente repräsentieren die Korrelation zwischen den Dimensionen. Oft wird versucht, diese nicht-diagonale Komponente durch Koordinatentransformationen zu eliminieren oder doch zumindest klein zu halten. Dies reduziert den notwendigen Umfang/Speicherbedarf des Modells, was bei höher-dimensionalen Systemen von großer Bedeutung ist.

## Literaturverzeichnis

- [1] A. Einstein. Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen. *Annalen der Physik*, 322:549–560, 1905.
- [2] A.N. Kolmogorov. Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Mathematische Annalen*, 104:415–458, 1931.
- [3] H. Risken. *The Fokker-Planck equation 2nd edn*. Springer Verlag, 1989.
- [4] C.W. Gardiner. *Handbook of Stochastic Methods*. Springer, Berlin, 1985.
- [5] P. Hänggi; H. Thomas. Stochastic processes: Time evolution, symmetries and linear response. *Physical Reports*, 88:207–319, 1982.
- [6] H. Haken. *Synergetics: Introduction and Advanced Topics*. Springer, Berlin, 2004.
- [7] R. Friedrich; J. Peinke; M. Sahimi; M. R. R. Tabar. Approaching complexity by stochastic methods: From biological systems to turbulence. *Physics Reports*, 506 Issue 5:87–162, 2011.
- [8] A.M. van Mourik; A.Daffertshofer; P.J. Beek. Estimating Kramers-Moyal coefficients in short and non-stationary data sets. *Physics Letters A*, 351:13–17, 2006.
- [9] R. Friedrich; Ch. Renner; M. Siefert; J. Peinke. Comment on indispensable finite time corrections for Fokker-Planck equations from time series data. *Phys. Rev. Lett.*, 89:149401, 2002.
- [10] J. Gottschall; J. Peinke. On the definition and handling of different drift and diffusion estimates. *New Journal of Physics*, 10:083034, 2008.
- [11] F. Böttcher; J. Peinke; D. Kleinhans; R. Friedrich; P.G. Lind; M.Haase. Reconstruction of complex dynamical systems affected by strong measurement noise. *Phy. Lett.*, 97:090603, 2006.

- [12] D. Kleinhans; R. Friedrich; M. Waechter; J. Peinke. Markov properties in presence of measurement noise. *Physical Review E*, 76:041109, 2007.
- [13] C. Anteneodo; R. Riera. Exact corrections for finite-time drift and diffusion coefficients. *arXiv*, 0905:3196v1, 2009.



# Kapitel 4

## Anwendungen

In diesem Kapitel geht es um die Anwendung der Langevin-Analyse. Einige Datensätze machen es nötig die Methode zu modifizieren oder zu verallgemeinern. Die dabei entstehenden Ergebnisse müssen diskutiert und interpretiert werden. Des weiteren werden in diesem Kapitel auch meine persönlichen Erfahrungen mit der Methode aufgeführt, in der Hoffnung, dass sie für andere von nutzen sein werden.

### 4.1 Häufig auftretende Markov-Systeme

Im folgenden sollen einige Beispiele den Umgang mit der Langevin-Analyse erläutern. Beginnen werden wir mit einem einfachen Prozess, dessen Drift- und Diffusionskoeffizienten jeweils konstant sind:

$$\dot{x}(t) = D^{(1)} + \sqrt{D^{(2)}}\tilde{\Gamma}(t) \quad (4.1)$$

mit

$$D^{(1)} = a \quad D^{(2)} = b \quad (4.2)$$

Dabei hat der Drift die Eigenschaft den Mittelwert der Verteilung ständig zu erhöhen ( $D^{(1)} > 0$ ), zu verringern ( $D^{(1)} < 0$ ) oder konstant ( $D^{(1)} = 0$ ) zu halten. Ist der Drift gleich Null, so spricht man auch von einem Wiener-Prozess und entspricht einem einfachen Aufsummieren von Zufallszahlen. Die Diffusion gibt hierbei an, wie stark die Zeitreihe um den Driftwert herum variiert. Das besondere ist, dass der Wiener

Prozess keinen Fixpunkt besitzt, was dazu führt, dass der Mittelwert der Zeitreihe nicht bestimmbar ist, oder, wenn  $D^{(1)} = 0$ , im Unendlichen gegen Null geht, aber im Endlichen stark davon abweichen kann (siehe Abb. 4.1). Diese Form des stochastischen Prozesses wird vor allem zur Beschreibung der Brownschen Bewegung (vgl. Abb. 4.2) genutzt, die den zufälligen Weg eines Partikels durch eine Flüssigkeit beschreibt.

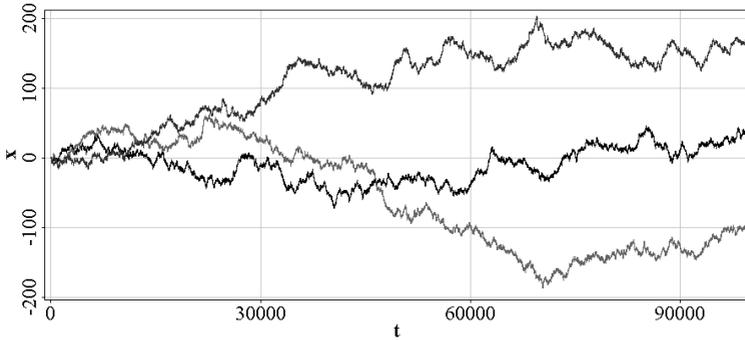


Abbildung 4.1: Drei unterschiedliche Realisierungen eines Wiener Prozesses mit  $D^{(1)} = 0$  und  $D^{(2)} = 0.1$ .

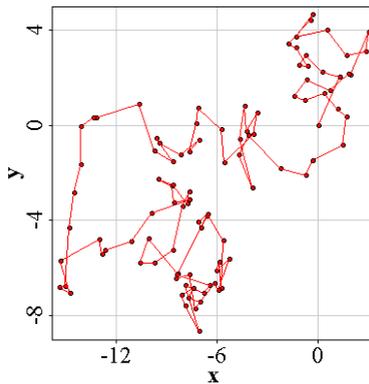


Abbildung 4.2: Beispiel für eine Brownsche Bewegung basierend auf Wiener Prozessen.

Im Allgemeinen sind die Drift und Diffusionskoeffizienten nicht un-

abhängig von  $x$ . Das nächst komplexere Beispiel wäre der Ornstein-Uhlenbeck Prozess. Bei diesem Prozess ist der Driftkoeffizient linear von  $x$  abhängig. Die Differentialgleichung lautet für diesen Fall:

$$\dot{x}(t) = D^{(1)}(x) + \sqrt{D^{(2)}}\tilde{\Gamma}(t) \quad (4.3)$$

mit

$$D^{(1)} = ax \quad D^{(2)} = b \quad (4.4)$$

hierbei sollte  $a < 0$  sein, damit ein Fixpunkt bei  $x = 0$  entsteht. Auch dieser Prozess findet viele Anwendungsbeispiele, z.B. bei thermalen Fluktuationen um einen Mittelwert. Anders als der Wiener-Prozess ist der Ornstein-Uhlenbeck Prozess auf einen bestimmten Wertebereich begrenzt (Mittelwert existiert), allerdings sind mit immer geringerer Wahrscheinlichkeit auch Extremereignisse möglich (siehe 4.3). Die auf diese Weise generierte Zeitreihe besitzt eine normal-verteilte Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion.

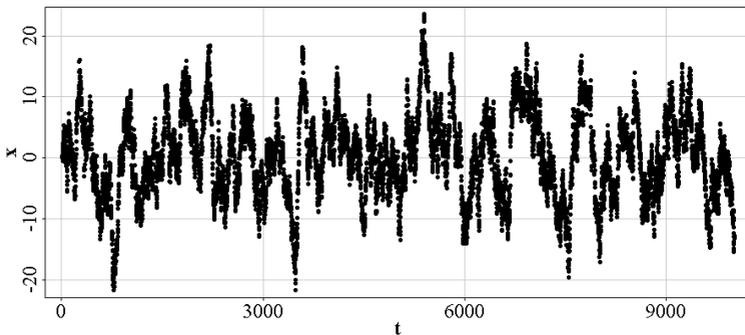


Abbildung 4.3: Ein Ornstein-Uhlenbeck Prozess mit  $D^{(1)} = -0.01x$  und  $D^{(2)} = 1$ .

Wenn nun auch noch die Diffusion von  $x$  abhängt, so handelt es sich meist um eine quadratische Abhängigkeit.

$$\dot{x}(t) = D^{(1)}(x) + \sqrt{D^{(2)}(x)}\tilde{\Gamma}(t) \quad (4.5)$$

mit

$$D^{(1)} = ax \quad D^{(2)} = bx^2 \quad (4.6)$$

Ein derartiger Prozess ist durch die Drift weiterhin auf Werte in der Umgebung des Mittelwertes beschränkt, doch extreme Ereignisse können nun deutlich häufiger auftreten als im Ornstein-Uhlenbeck Prozess (vgl. Abb. 4.4).

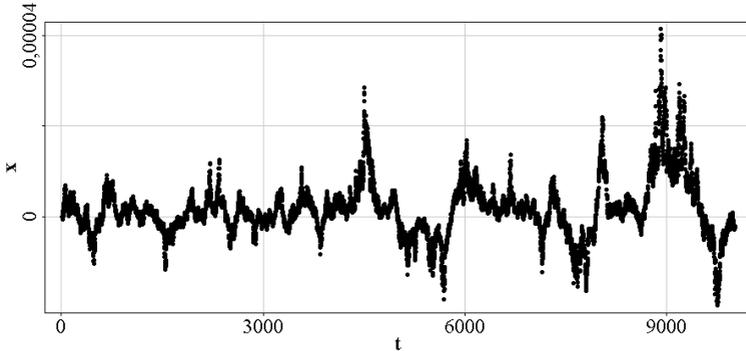


Abbildung 4.4: Ein Prozess mit  $D^{(1)} = -0.001x$  und  $D^{(2)} = 0.01x^2$ .

Die bisher betrachteten Beispiele besaßen immer nur höchstens einen Fixpunkt, in Form eines Mittelwertes. Ein stabiler Fixpunkt wird dabei immer durch einen Nulldurchgang der Driftfunktion definiert, wobei von positiven zu negativen Werten übergegangen wird. Ein Nullpunkt, bei dem von negativen zu positiven Werten gewechselt wird produziert einen instabilen Fixpunkt. Es gibt allerdings auch Beispiele mit zwei oder mehr Fixpunkten. Ist die Driftfunktion ein Polynom dritter Ordnung (vgl. Abb. 4.5), mit drei unterschiedlichen Nulldurchgängen, so erhält man ein System mit zwei voneinander getrennten stabilen Fixpunkten, sowie einem instabilen. Die zugehörige Differentialgleichung lautet:

$$\dot{x}(t) = D^{(1)}(x) + \sqrt{D^{(2)}(x)}\tilde{\Gamma}(t) \quad (4.7)$$

mit

$$D^{(1)} = ax^3 \quad D^{(2)} = b \quad (4.8)$$

Besonders deutlich wird ein solches System durch sein Potential veranschaulicht. Das Potential besitzt zwei Minima getrennt von einem lokalen Maximum. Ein solches Potential wird auch bipolar genannt. Das Maximum hat hierbei die Funktion einer Potenzialbarriere, die die beiden stabilen Fixpunkte voneinander trennt. Kommt nun eine genügend

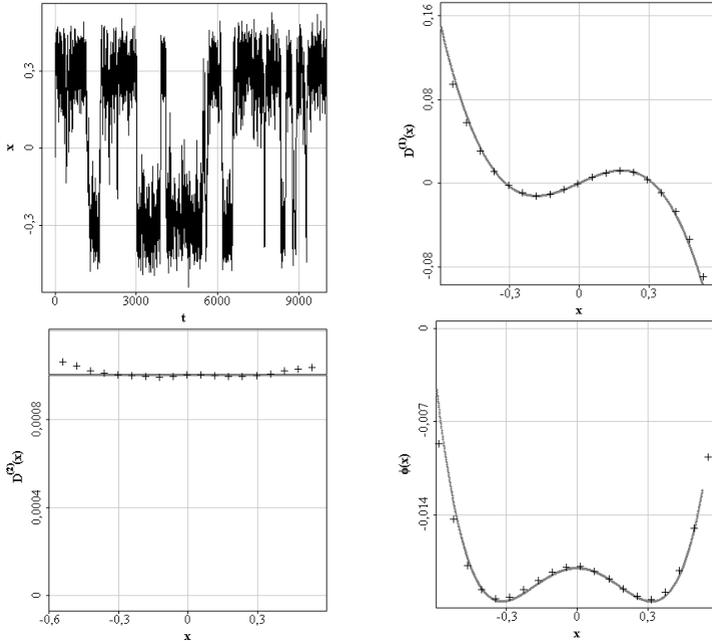


Abbildung 4.5: Beispiel eines bimodalen Systems generiert aus Gleichung 4.8. Die Drift  $D^{(1)} = 0,1x - x^3$  folgt einem Polynom 3. Grades und die Diffusion  $D^{(2)} = 0,001$  ist konstant. Das Potential  $\phi$  zeigt die zwei stabilen Fixpunkte welche durch eine Potentialbarriere voneinander getrennt werden.

starke Diffusionskomponente hinzu, so kann es passieren, dass die Barriere überwunden wird. Wie oft dagegen von einem stabilen Fixpunkt zum anderen gewechselt wird hängt vom Verhältnis zwischen der Höhe der Barriere und der Stärke der Diffusion ab.

Als letztes Beispiel sei noch ein zweidimensionales System genannt, der sogenannte Limit-Cycle. Dabei beschreibt die stochastische Funktion einen Kreis in einer zweidimensionalen Ebene (vgl. Abb. 4.6). Dieses System ist deshalb so interessant, weil man mit ihm auch Systeme definieren kann, die aus Schwingungen bestehen (vgl. Abb. 4.7), die man im eindimensionalen Fall gar nicht als Markov-Prozess beschrei-

ben kann.

$$\dot{x}(t) = D_x^{(1)}(x,y) + \sqrt{D_x^{(2)}}\tilde{\Gamma}_1(t) \quad (4.9)$$

$$\dot{y}(t) = D_y^{(1)}(x,y) + \sqrt{D_y^{(2)}}\tilde{\Gamma}_2(t) \quad (4.10)$$

mit

$$D_x^{(1)} = x - y - (x^2 + y^2)x \quad D_x^{(2)} = c_1 \quad (4.11)$$

$$D_y^{(1)} = x + y - (x^2 + y^2)y \quad D_y^{(2)} = c_2 \quad (4.12)$$

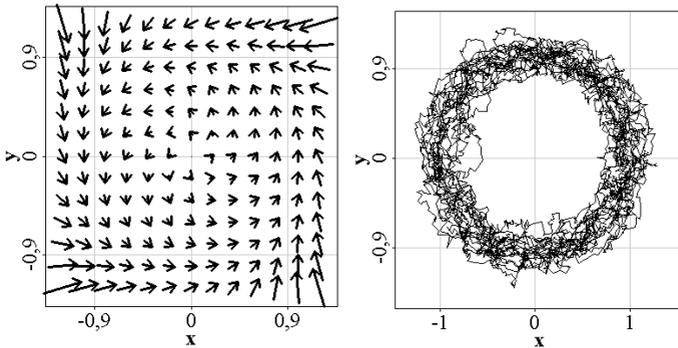


Abbildung 4.6: Beispiel eines Limit-Cycles gewonnen aus den Gleichungen 4.11 und 4.12. Links ist das Vektorfeld der Driftkomponenten zu sehen, rechts eine mögliche Realisierung

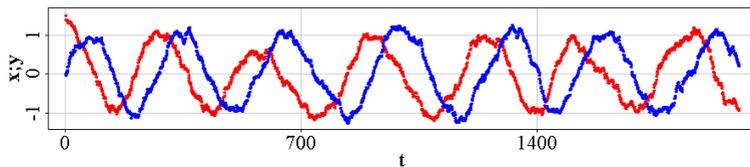


Abbildung 4.7: Der zwei-dimensionale Prozess, aufgeteilt in seine Komponenten  $x$ (rot) und  $y$ (blau).

Sieht man sich nun die  $x$  und  $y$  Komponenten getrennt von einander an, so erkennt man das einer Schwingung ähnelnde Verhalten. Generell

können viele nicht-Markov Systeme beim Übergang in höhere Dimensionen in Markov-Systeme zerlegt werden.

Weitere numerische Beispiele sind zu finden in [1].

## 4.2 Beispiele mit experimentellen Datensätzen

Im Folgenden sollen nun einige Beispiele gezeigt werden, bei denen Datensätze hinsichtlich ihrer Drift- und Diffusionskoeffizienten untersucht werden. Dabei werden vor allem Anwendungen und Erfahrungen behandelt, die von mir persönlich durchgeführt bzw. gesammelt wurden. Zahlreiche weitere Beispiele für Anwendungen können in der Literatur gefunden werden. Beispielsweise bei der Analyse von Oberflächenstrukturen [2], Herzrhythmen [3], Finanzphysik [4], Windenergie [5], Klima [6], Turbulenz [7, 8], Verkehrsfluss [9], elektrischen Oszillatoren [10, 11], Segregation [12] oder menschlichen Bewegungsabläufen [13].

### 4.2.1 Lenkverhalten von Fahrern in Kurven

Das Erste Beispiel stammt aus dem IMoST Projekt und benutzt Daten aus einem Fahrsimulatorexperiment, welche vom DLR Braunschweig durchgeführt wurde. Es zeigt ein Beispiel für das Lenkverhalten eines Autofahrers während er durch eine Kurve fährt. Die Daten zeigen, dass der Fahrer seinen Einlenkwinkel um einen Mittelwert herum variiert. Der Mittelwert entspräche dem perfekten Wert um durch die Kurve zu kommen, und müsste, einmal erreicht, nicht mehr geändert werden. Der Mensch ist aber nicht in der Lage oder gewillt mit dieser Präzision zu reagieren und verursacht Abweichungen zum idealen Verhalten. Die Folge ist, dass der Fahrer ständig den Lenkwinkel variieren muss, um auf diese Abweichungen zu reagieren. Dies geschieht in einer nicht vorhersehbaren Weise und ähnelt damit einem stochastischen Prozess, was den Einsatz der Langevin-Analyse nahelegt.

Der hier gezeigte Datensatz (Abb. 4.8) besteht aus einer Aneinanderreihung von Einzeldatensätzen. Eine einzelne Kurvenfahrt dauert nur wenige Sekunden, doch um genügend Daten zusammen zu bekommen, werden die Daten der Einzelfahrten aneinandergereiht. Hierdurch stehen etwa 100000 Werte zur Verfügung. Möchte man nun die Drift-

und Diffusionskoeffizienten bestimmen, so ist zu bedenken, das durch das Aneinanderreihen ungewöhnliche Inkremente an den Übergängen zwischen den Datensätzen entstehen könnten. Deshalb sind alle Inkremente auszuschließen, die von einer Einzelfahrt in eine andere reichen. Dies macht es erforderlich, das man sich neben den Werten der Zeitreihe auch den Datensatz merkt, aus dem die Werte stammen. Im allgemeinen genügt hier eine einfache Nummerierung der Datensätze mit einem Index. Stimmen also diese Indexwerte des betrachteten Inkrement nicht überein, so ist dieses zu ignorieren. Dies bedeutet, dass zwar kein Unterschied zwischen den Einzelfahrten gemacht wird, aber die Übergänge zwischen ihnen ignoriert werden. Durch die Mittlung beim Bestimmen der Drift und Diffusionskoeffizienten werden die Datensätze dann vereint und eine Unterscheidung zwischen den einzelnen Datensätzen wird unmöglich.

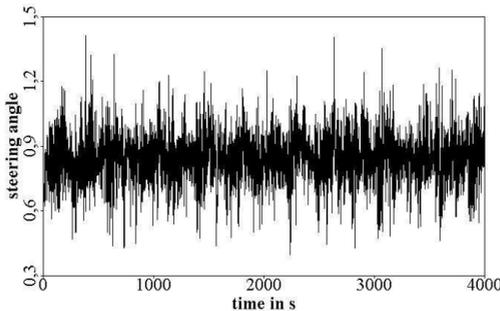


Abbildung 4.8: Lenkverhalten eines Autofahrers beim passieren einer Kurve.

Als erstes werden die Daten in 20 Klassen unterteilt. Dann werden die Kramers-Moyal Koeffizienten  $M^{(1)}(x, \tau)$  bestimmt. Dabei wird zunächst ein recht hoher Wert für  $\tau_{max}$  verwendet, nämlich  $30\tau$ . Das bedeutet, dass wir Inkremente zwischen 1 und dem 30-fachen der Samplingrate benutzen, welche in diesem Beispiel  $50ms$  beträgt.

Schaut man sich nun die Entwicklung von  $M^{(1)}$  über  $\tau$  an (Abb. 4.9), so findet man heraus, dass die Werte im Bereich von einem  $\tau$  und etwa  $20\tau$  linear verlaufen. Damit wird für die Bestimmung der Drift- und Diffusionskoeffizienten das  $\tau_{max}$  auf 20 gesetzt. Dass die Kurve den Ursprung schneidet, ist bei der Analyse von Datensätzen nicht immer ge-

geben. Es kann zum Beispiel passieren, dass die Daten durch Messrauschen verfälscht wurden. In einem solchen Fall führt dieses Rauschen zu einem Anstieg aller Kramers-Moyal Koeffizienten. Dieser Offset kann zu großen Fehlern bei der Bestimmung der Drift- und Diffusionskoeffizienten führen, sofern man sie durch Mittelung bestimmt. Alternativ kann mittels linearer Regression ein linearer Fit durch die selektierte lineare Region bestimmt werden. Die Steigung des linearen Fits bestimmt dabei ebenfalls den Koeffizienten, ohne dabei von einem Offset abhängig zu sein. Obwohl dieser Weg etwas aufwendiger ist, liefert er doch im allgemeinen sicherere Ergebnisse, da man ein Messrauschen niemals ganz ausschließen kann.

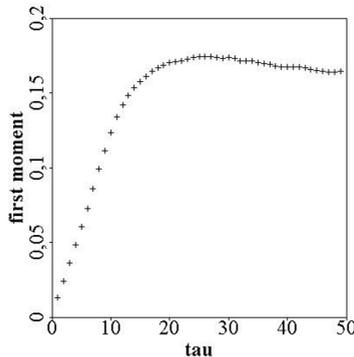


Abbildung 4.9:  $\tau$  Abhängigkeit der Momente

Schaut man sich nun die auf diese Weise ermittelten Drift- und Diffusionskoeffizienten an (Abb. 4.10), so fällt auf, dass besonders im zentralen Bereich wo die meisten Werte zu finden sind, die Kurven einfachen Polynomen zu folgen scheinen. Für den Drift gilt ein fast linearer Zusammenhang, mit einem Nulldurchgang der etwa dem Mittelwert der Daten entspricht. Das zugehörige Potential entspricht einer Parabel, und zeigt damit deutlicher, dass das System eigentlich nur durch einen dynamischen Rauschanteil aus seinem zentralen Fixpunkt gerissen werden kann. Die Diffusion zeigt ebenfalls eine Parabel. Dies bedeutet, dass sich das System insgesamt ruhiger verhält, solange es sich nur um den Fixpunkt herum bewegt. Weicht es von diesem ruhigeren Bereich ab, so steigt nicht nur die deterministische Reaktion des Potentials, sondern auch die durch das Rauschen verursachte Unsicherheit oder Volatilität

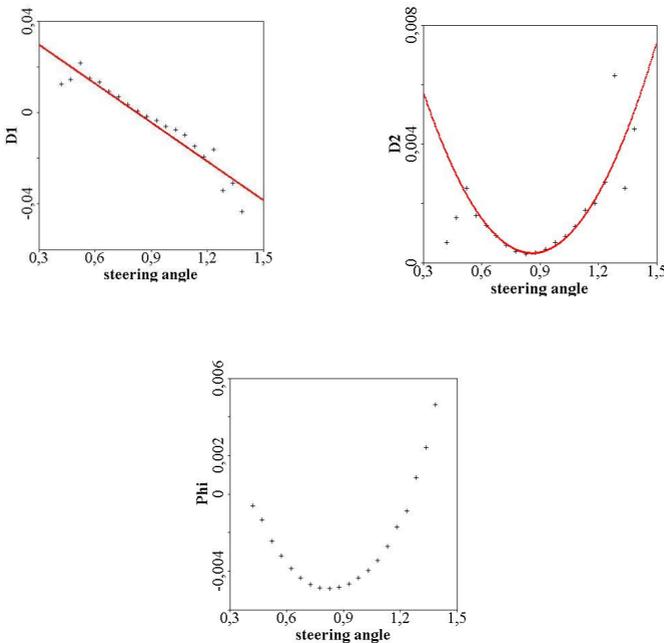


Abbildung 4.10: Drift- Diffusion und Potential der Lenkbewegungen

an, was zu größeren Sprüngen im Verhalten führen kann.

Für gewöhnlich werden die Verläufe des Drift- und Diffusionskoeffizienten durch Polynome angenähert. Für den Drift wird in diesem Fall ein linearer Fit verwendet, während für die Diffusion ein Polynom zweiten Grades genutzt werden kann. Auf diesem Wege kann das Ergebnis oft auf wenige Werte reduziert werden. Die genauen Werte der Koeffizienten der Polynome werden dann gerne herangezogen, um sie mit Werten aus andern Datensätzen zu vergleichen. Oftmals lassen sich so Änderungen oder Unterschiede in recht ähnlichen Systemen erfassen oder hervorheben, was für stochastische Systeme von großem Nutzen ist, da kleinere Unterschiede an den Daten selbst oder deren statistischen Momenten oft nur schwer zu identifizieren sind.

Hat man nun die Drift- und Diffusionskoeffizienten bestimmt, so hat man alles, was man für eine Monte-Carlo Simulation des Systems

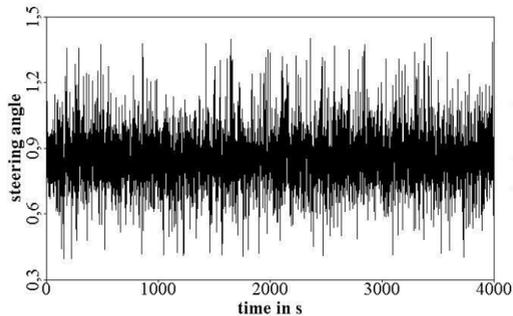


Abbildung 4.11: Rekonstruktion basierend auf den Drift- und Diffusionskoeffizienten

benötigt (Abb. 4.11). Um die Qualität der so entstehenden Zeitreihe zu untersuchen, kann man sich wieder die Momente dieser neuen Zeitreihe ansehen. Auch der Vergleich der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsdichten ist möglich.

Ein Grund für Abweichungen zwischen Original und Simulation liegt in der begrenzten Genauigkeit, mit der die Koeffizienten bestimmt wurden. Dies führt besonders in den nur schwach besetzten Bereichen der Originaldaten zu abweichendem Verhalten. Dies gilt insbesondere für die Minimal- und Maximalwerte des Systems. Hier kann es passieren, dass es zu einem künstlich überhöhten Auftreten extremer Ereignisse kommt, da das System nicht durch hinreichend starke Barrieren daran gehindert wird. Entweder legt man Grenzwerte fest, die dazu führen, dass eine neue Zufallszahl gezogen wird, sobald die Grenzwerte überschritten würden oder man stärkt die Barrieren durch das Verwenden der funktionalen Näherungen, indem man sie in die nicht definierten Bereiche fortsetzt (extrapoliert). Beide Möglichkeiten können aber zu systematischen Fehlern im Modell führen, da sie entweder unrealistisch sind oder nicht verifiziert werden können.

Trotz aller Sorgfalt kann es passieren, dass die Wahrscheinlichkeitsdichtfunktion der Originaldaten von der der Simulation abweicht. Dies ist besonders dann der Fall, wenn man nur kurze Simulationen durchführt, und so der Simulation nicht genug Zeit lässt, alle Möglichkeiten genügend oft zu simulieren. Dieses Problem kann umgangen werden, indem man die zu erwartende Wahrscheinlichkeitsdichtfunktion direkt

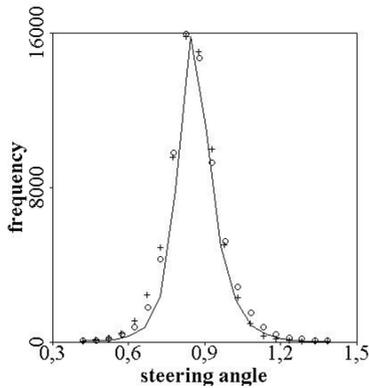


Abbildung 4.12: Vergleich der Histogramme vom Originaldatensatz(O) mit der Rekonstruierten(+). Die durchgehende Linie steht für das theoretische Resultat.

aus den Drift- und Diffusionskoeffizienten ermittelt. Hierzu wird folgende Gleichung von der Fokker-Planck Gleichung abgeleitet:

$$p(x) = N_0 e^{-\psi(x)} \quad (4.13)$$

mit

$$\psi(x) = \ln(D^{(2)}(x)) - \int^x dy \frac{D^{(1)}(y)}{D^{(2)}(y)} \quad (4.14)$$

Wie in Abbildung 4.12 zu sehen ist, erlaubt es diese Methode, die relative Häufigkeit für einen Wert in der Zeitreihe zu bestimmen. Um absolute Häufigkeiten zu erhalten, muss die Zeitreihe allerdings noch mit  $N_0$  normiert werden. Hierzu wird  $N_0$  meistens so gewählt, dass man eine möglichst gute Übereinstimmung mit der Wahrscheinlichkeitsdichtfunktion der Originalzeitreihe erhält.

## 4.2.2 Rayleigh-Bénard Experiment

Das nächste Beispiel stammt aus einem so genannten Rayleigh-Bénard Experiment. Dabei handelt es sich um einen zylindrischen Behälter, der mit Wasser gefüllt, von unten geheizt und von oben gekühlt wird. Dabei entsteht im inneren eine Rollen-artige Konvektionsströmung, die sich

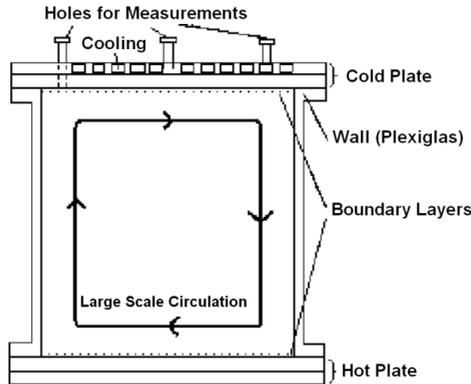


Abbildung 4.13: Experimenteller Aufbau eines Rayleigh-Benard Experiments

ständig neu ausrichtet (vgl. Abb. 4.13). Misst man nun die Geschwindigkeit an einem Punkt innerhalb dieser Strömung, so sieht es so aus als ob sich die Strömungsrichtung von Zeit zu Zeit umkehrt. Die resultierende Zeitreihe ist ein schönes Beispiel für ein System mit zwei, durch eine Potentialbarriere von einander getrennten, Zuständen oder stabilen Fixpunkten. Komplexere Systeme mit mehreren Fixpunkten erfordern allerdings auch eine größere Menge an Daten. Die Daten (Abb. 4.14) aus dem hier angedeuteten Experiment sind mit 32000 allerdings nicht sehr umfangreich. Die Daten wurden mit einem Ultraschallsensor aufgenommen, der sich die Reflexion an dem Wasser hinzugefügten Partikeln zunutze macht. Das Experiment fand bei einer Rayleighzahl von  $Ra = 6.8 \times 10^9$  statt. Besonders hervorzuheben ist, dass die Zelle horizontal ausgerichtet war (Genauigkeit  $>0.02^\circ$ ), da dieser Umstand große Auswirkungen auf das Experiment und das System besitzt.

Schaut man sich das Histogramm (Abb. 4.18) an, so wird die bimodale Natur des Systems [14, 15] deutlich, wobei aber zu erkennen ist, dass das System den einen Fixpunkt dem anderen gegenüber bevorzugt. Bestimmt man nun die Drift- und Diffusionskoeffizienten (Abb. 4.16), so erhält man für die Drift ein Polynom 3. Grades und für das Rauschen ein Polynom 4. Grades. Die Driftfunktion kann ebenfalls wieder als Potentialfunktion dargestellt werden. Dies macht die Natur des Systems

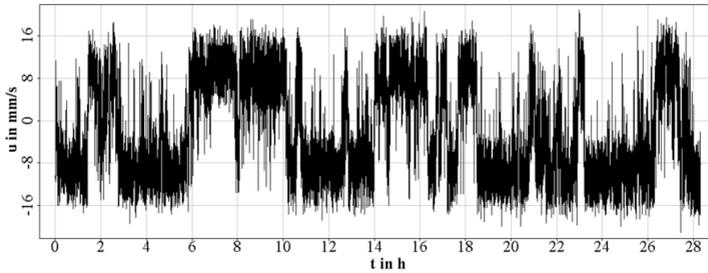


Abbildung 4.14: Eine aus dem Rayleigh-Benard Experiment gewonnene Geschwindigkeitsmessung

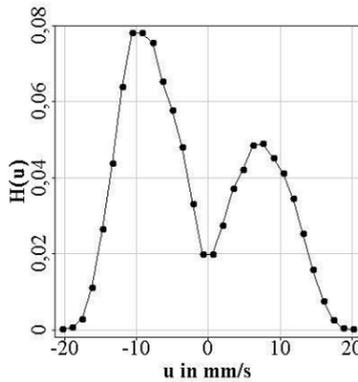


Abbildung 4.15: Histogramm der Originaldaten

besonders deutlich. Die beiden stabilen Fixpunkte sind hier deutlich als Potentialminima zu erkennen, die durch eine Potentialbarriere voneinander getrennt sind. Auch die leichte Asymmetrie in der Häufigkeit taucht hier wieder auf und führt zu unterschiedlich tiefen Potentialmulden. Interessant ist, dass die Diffusion im Bereich der Barriere ebenfalls ein Maximum aufweist. Dies bedeutet, dass das System in diesem Bereich besonders instabil ist.

Bevor eine Zeitreihe in ein Langevin-System umgewandelt wird, ist es nötig zu prüfen, ob die Zeitreihe überhaupt ein Markov-System ist. Leider ist es bei der hier vorliegenden Datenmenge völlig unmög-

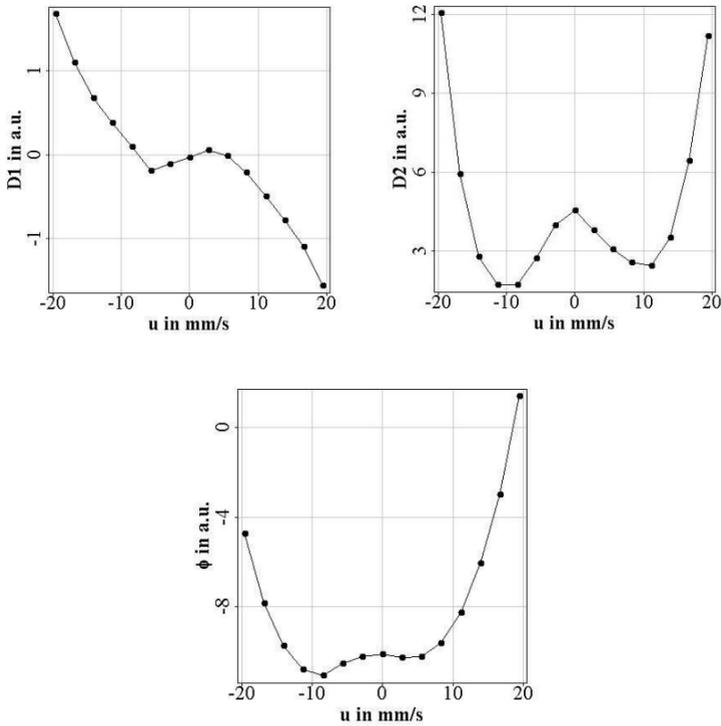


Abbildung 4.16: Drift, Diffusion und das Potential der Rayleigh-Bénard Daten.

lich, bedingte Wahrscheinlichkeiten heranzuziehen. Stattdessen wurde in diesem Fall die Langevin-Gleichung nach  $\tilde{\Gamma}(t)$  umgestellt:

$$\tilde{\Gamma}(t) = \frac{1}{\sqrt{D^{(2)}(x(t))\tau}}(x(t+\tau) - x(t) - \tau D^{(1)}(x(t))) \quad (4.15)$$

Sind also die Drift- und Diffusionskoeffizienten bestimmt, so können die theoretischen Zufallszahlen, aus denen die Originalzeitreihe besteht, bestimmt werden. Das Rauschen im System, sofern es sich um einen Markov-Prozess handelt, sollte somit  $\delta$ -korreliert sein. Um dies zu überprüfen wird die Autokorrelationsfunktion von  $\tilde{\Gamma}(t)$  betrachtet. Tatsächlich fällt die Korrelation sofort auf nahezu Null zurück, was bei

einer  $\delta$ -Korrelation auch zu erwarten ist. Leider muss man sich hier tatsächlich die Autokorrelation des Rauschens ansehen, anstatt einfach nur die Autokorrelation des Messsignals zu betrachten (vgl. Abb. 4.17). Das Messsignal besitzt nämlich durchaus eine korrelierte Komponente, welche mit der Rotationsdauer der Konvektionsrolle korreliert ist. Darüber hinaus ist  $\delta$ -korreliertes Rauschen allein höchstens ein Hinweis auf Markov-ähnliches Verhalten, aber kein direkter Beweis.

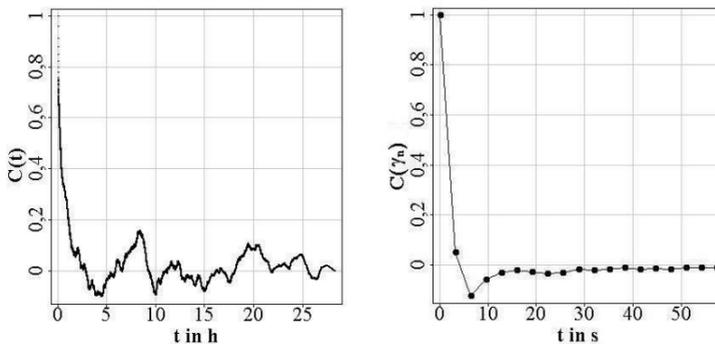


Abbildung 4.17: Autokorrelation der Originaldaten sowie des rekonstruierten Rauschens

Zum Schluss wird eine Monte-Carlo Simulation durchgeführt und die so entstandene Zeitreihe als Histogramm (Abb. 4.18) mit dem theoretisch zu erwartenden verglichen.

## 4.3 Weitere Verbesserungen

Es gibt noch weitere Methoden, die die Modelle, die man aus Daten gewinnt, verbessern können. Einige davon sollen im folgenden besprochen werden.

### 4.3.1 Nicht-äquidistante Zeitreihen

Ein oft auftretendes Problem sind nicht-äquidistante Zeitreihen. Der Einfachheit halber setzen die meisten Algorithmen äquidistante Zeitreihen mit konstanter Samplingfrequenz voraus. Es spielt oft auch eine

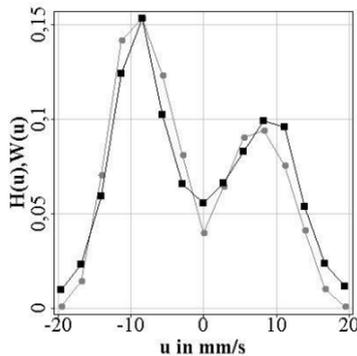


Abbildung 4.18: Histogramm der original Zeitreihe verglichen mit dem Histogramm der Simulation

Rolle auf welche Art die Daten nicht-äquidistant sind. Dabei kann es sich um fehlende Datenpunkte handeln (siehe 4.19), was dann beim Anwenden eines Algorithmus welcher äquidistante Daten voraussetzt, dazu führt, dass bestimmte Momente plötzlich mit einem Mehrfachen ihres tatsächlichen Wertes in die Berechnung eingehen, was zum Teil drastische Fehler verursacht (siehe 4.20). Eine weitere Möglichkeit wäre, dass die Zeitstempel einer Zeitreihe unsauber synchronisiert wurden. Dies führt ebenfalls zu Fehlern bei der Bestimmung von Koeffizienten, wirkt sich allerdings weniger drastisch aus, sofern die Koeffizienten über einen genügend großen  $\tau$ -Bereich bestimmt werden. Drastischer und problematischer sind dagegen Zeitreihen, die von Natur aus nicht äquidistant sind, da die Zeit sich aus einem nicht-linearen Zusammenhang ergibt.

Eine übliche Methode, mit nicht-äquidistanten Daten umzugehen, ist die Verwendung von Interpolationsalgorithmen. Dabei können z.B. per linearer Regression oder durch das Verwenden von Splines fehlende Zeitpunkte ergänzt oder verschoben werden. Dies hat auf den ersten Blick kaum Auswirkungen auf die Daten. Plötzlich verschwinden die Lücken in den Daten und alles Fehlende scheint vernünftig und sinnvoll ergänzt. Versucht man nun von einer auf diese Weise modifizierten Zeitreihe die Drift und Diffusionskoeffizienten zu bestimmen, so gelingt dies zumindest für die Drift ganz gut, doch für die Diffusion erhält man

dagegen drastisch abweichende Koeffizienten (siehe 4.21). Spätestens wenn man versucht, Daten mit dem so erstellten Modell zu generieren, stellt man fest, dass das Ergebnis falsch ist. Der Grund liegt in der Interpolation. Diese berücksichtigt nämlich keine Rausch- oder Diffusionsterme, sondern erzeugt eine starke kurzzeitige Korrelation zwischen den Punkten, die es im Original gar nicht gibt. Das Rauschen auf diesen Skalen wird somit quasi herausgefiltert was natürlich eine Bestimmung der stochastischen Komponente unmöglich macht. Um ein auf diese Weise bestimmtes Modell zu nutzen, wird deshalb meist ein künstlich vom Modellierer festgelegter Rauschanteil hinzugefügt, damit überhaupt ein brauchbares Resultat generiert werden kann. Dies ist natürlich eine wenig elegante Methode, da ja die Modellierung aus den Daten heraus gerade die besondere Stärke der Langevin-Analyse sein soll.

Glücklicherweise gibt es aber eine simple Alternative. Anstatt die Datensätze zu verändern, kann man den verwendeten Algorithmus zur Bestimmung der Drift- und Diffusionskoeffizienten erweitern. Hierzu muss bei der Bestimmung der Kramers-Moyal Koeffizienten darauf geachtet werden, dass alle jetzt kontinuierlich verteilten  $\tau$ -Werte berücksichtigt werden. Während man bei einer diskreten Verteilung der  $\tau$ -Werte alle Inkremente mit dem selben  $\tau$  durch Mittlung zusammenfasst, verzichtet man bei kontinuierlichen  $\tau$ -Werten auf diesen Schritt und wendet die lineare Regression zur Bestimmung von Drift und Diffusionskoeffizienten direkt auf alle vorkommenden Inkremente an, die in dem gewählten  $\tau$ -Regime liegen. Man muss nun natürlich eine lineare Regression verwenden, die für nicht-äquidistante Zeitreihen geeignet ist. Ein solcher Algorithmus ist z.B. zu finden in [16]. Mit dieser Methode lassen sich selbst bei nicht-äquidistanten Daten korrekte Resultate erzielen (siehe 4.22).

### 4.3.2 Kontinuierliche Klassen

Die Drift- und Diffusionskoeffizienten folgen oft einem einfachen funktionalen Zusammenhang, so dass sie leicht an ein Polynom angepasst werden können. Doch dies ist nicht immer so. Manchmal besitzen die Verläufe der Funktionen der Koeffizienten kleinere Details, die sich nicht so einfach durch einfache Polynome ausdrücken lassen. Dies gilt besonders für aus experimentellen Daten gewonnene Koeffizienten. In solchen Fällen erweist es sich als vorteilhaft etwas genauer hinzuschauen. Da in den meisten Fällen die Datenmenge begrenzt ist, ist eine wei-

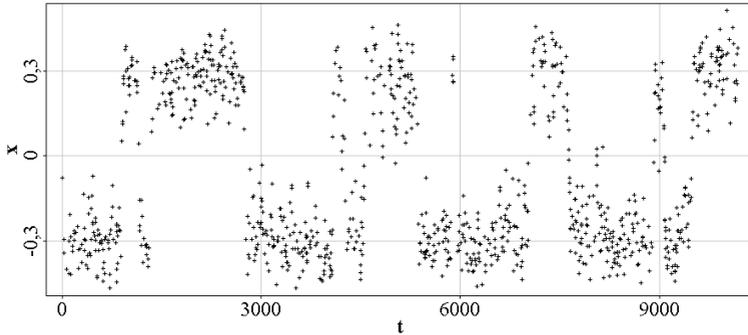


Abbildung 4.19: Eine bimodale nicht-äquidistante Zeitreihe. Erstellt aus der in Abbildung 4.5, gezeigten Zeitreihe indem zufällig jedes Element mit 90% Wahrscheinlichkeit gelöscht wurde.  $D^{(1)} = 0.1x - x^3$ ,  $D^{(2)}=0.001$ .

tere Verkleinerung der Klassen oft nicht möglich oder mit zu großen Ungenauigkeiten verbunden.

Es ist aber oft so, dass gerade die Wahl der Klassen entscheidende Auswirkungen auf das spätere Modell hat. Wie bereits erwähnt kann die Größe einer Klasse nicht verändert werden, dies gilt aber nicht für ihre Position.

Eine gängige Methode, die Position und Größe der Klassen zu wählen, sieht vor, dass man sich für eine bestimmte Anzahl von Klassen entscheidet und anschließend die Klassen so verteilt, dass sie sich gegenseitig berühren und dabei den Wertebereich vom Maximum zum Minimum abdecken. Diese Methode hat den Vorteil, dass die Klassen nur durch einen einzigen Parameter (ihre Anzahl) definiert werden. Leider bringt diese Methode aber auch Nachteile mit sich. Möchte man nun zwei Zeitreihen miteinander vergleichen, so werden sich die Position und die Größe der Klassen voneinander unterscheiden. Ohne eine Korrektur oder Normierung führt diese Methode immer zu unterschiedlichen Ergebnissen, da sich die Maxima und Minima eines stochastischen Systems in jedem experimentellen oder begrenzten Datensatz unterscheiden, selbst dann wenn sie dem selben System angehören. Ein weiterer Nachteil ist, dass man für gewöhnlich nur eine geringe Anzahl an Klassen für das Modell wählt und somit Details leicht verloren gehen können, weil sie einfach übersehen oder der statistischen Ungenauigkeit

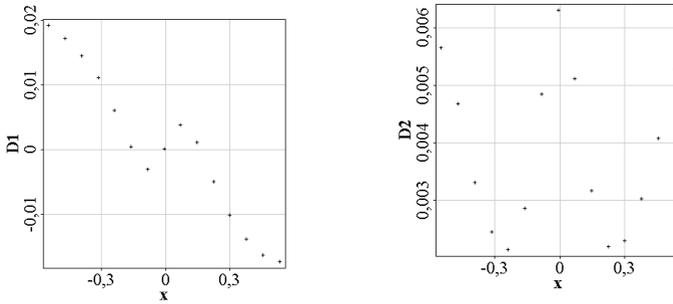


Abbildung 4.20: Drift und Diffusion von 4.19 ermittelt durch Algorithmus für äquidistante Zeitreihen.

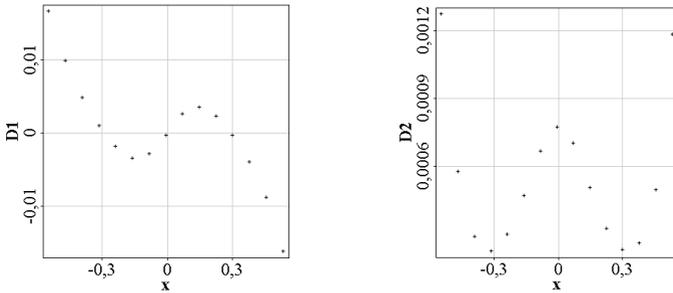


Abbildung 4.21: Drift und Diffusion von 4.19 ermittelt nach Anpassung der Samplingrate durch Splineinterpolation.

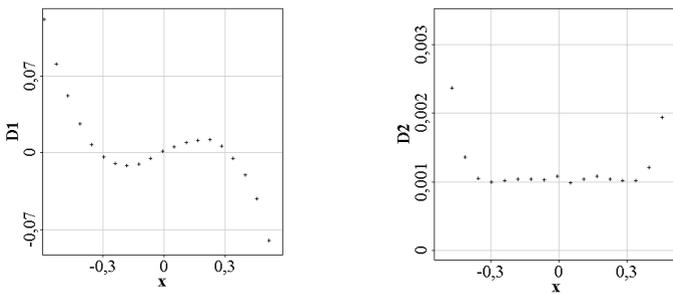


Abbildung 4.22: Drift und Diffusion von 4.19 ermittelt durch Algorithmus für nicht-äquidistante Zeitreihen.

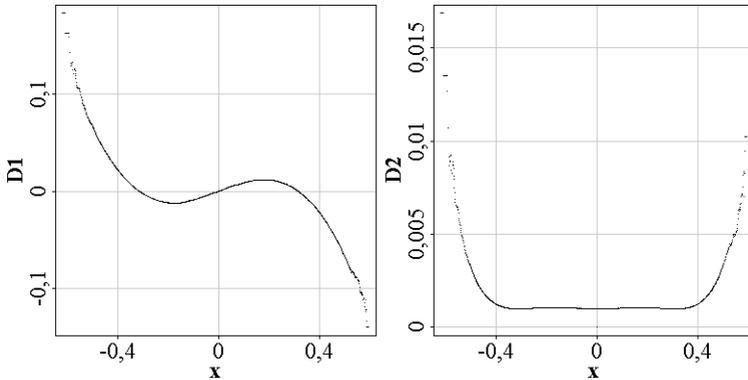


Abbildung 4.23: Drift und Diffusion errechnet aus 4.19. Es wurden hierfür 1000 Klassen benutzt, allerdings die selbe Klassengröße wie in vorhergehenden Berechnungen(vgl. 4.22).

zugeschrieben werden.

Um dies zu vermeiden, ist es sinnvoller nur die Größe der Klassen festzulegen und anschließend die Klasse in kleinen Schritten über den Wertebereich der Zeitreihe zu schieben. Wird für die Schrittweite ein genügend kleiner Wert gewählt, so entgehen einem keine Details aufgrund einer zu geringen Anzahl an Punkten (vgl. Abb. 4.23). Auch das Ergebnis wirkt viel detaillierter und kann beim Bestimmen von Näherungen oder Fitten viel präzisere Ergebnisse liefern.

Versucht man nun verschiedene Zeitreihen des gleichen Systems zu vergleichen, so verwendet man einfach die selbe Klassengröße und erhält somit Werte, die miteinander vergleichbar sind, unabhängig von den Maximal- und Minimalwerten in der Zeitreihe.

Ein weiterer nützlicher Effekt ist, dass man auch recht große Klassen wählen kann, um Lücken in der Verteilung zu schließen, die sonst zu Problemen beim Rekonstruieren führen würden, da es nicht möglich ist für diese Lücken Drift- und Diffusionskoeffizienten zu ermitteln. Dies erweist sich besonders in zwei- oder höher-dimensionalen Systemen als äußerst nützlich.

### 4.3.3 Koordinatentransformationen

Besonders in zweidimensionalen Systemen können die Langevin-Gleichungen oft recht komplizierte Formen annehmen. Dabei ist es oft möglich die Beschreibung solcher Systeme zu vereinfachen, indem man sich für ein passenderes Koordinatensystem entscheidet. Ein gutes Beispiel hierfür sind Kreisprozesse. Anstatt in kartesischen Koordinaten zu arbeiten, erhöht sich die Qualität oft erheblich beim Übergang in ein polares Koordinatensystem. Zum einen verbessert sich die Aufteilung der Daten in Klassen. Im Zweidimensionalen haben die Klassen die Form von kleinen Flächensegmenten. Diese Segmente können allerdings für Artefakte bei der Bestimmung von Drift und Diffusionskoeffizienten verantwortlich sein, weshalb die Segmente an den generellen Verlauf der Zeitreihe in der zweidimensionalen Ebene angepasst werden sollten. Deshalb bietet sich für einen zyklischen Prozess eine auf Polarkoordinaten basierende Beschreibung an.

In zweidimensionalen Systemen werden die einzelnen Schritte der Monte-Carlo-Simulationen oft besser durch Richtung  $\alpha$  (z.B. durch einen Winkel von 0 bis 360 Grad) und Betrag  $r$  definiert als durch  $dx$  und  $dy$ . Dies liegt vor allem daran, dass Richtung und Betrag sich oft ganz unabhängig voneinander entwickeln können. Zum Beispiel könnte die Geschwindigkeit eines Objekts konstant bleiben, seine Richtung sich allerdings ändern. Dies gilt insbesondere für Fahrzeuge im Straßenverkehr, wo die Geschwindigkeiten sich oft an den maximal zulässigen Werten orientieren, die Richtung in die man sich bewegt aber vom Straßenverlauf diktiert wird. Am Besten wäre es in diesem Fall natürlich, die Koordinaten am Streckenverlauf zu orientieren sowie eine Beschreibung zu verwenden, die Richtung und Geschwindigkeit möglichst unabhängig voneinander beschreiben. Ein Beispiel hierfür findet man im nächsten Kapitel.

## Literaturverzeichnis

- [1] S. Siegert; R. Friedrich; J. Peinke. Analysis of data sets of stochastic systems. *Phys. Lett. A*, 243:275–280, 1998.
- [2] M. Waechter; F. Riess; Th. Schimmel; U. Wendt; J. Peinke. Stochastic analysis of different rough surfaces. *The European Physical Journal B*, 41:259–277, 2004.
- [3] F. Ghasemi; M. Sahimi; J. Peinke; M.R.R. Tabar. Analysis of non-stationary data for heart-rate fluctuations in terms of drift and diffusion coefficients. *Journal of Biological Physics*, 32:117–128, 2006.
- [4] Ch. Renner; J. Peinke; R. Friedrich. Markov properties of high frequency exchange rate data. *Physica A*, 298:499, 2001.
- [5] M. Wächter; P. Milan; T. Mücke; J. Peinke. Power performance of wind energy converters characterized as stochastic processes: applications of the Langevin power curve. *Wind Energy*, 14:711–717, 2011.
- [6] P. Sura. Stochastic Analysis of Southern and Pacific ocean sea surface winds. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 60:654–666, 2002.
- [7] Ch. Renner; J. Peinke; R. Friedrich. Experimental indications for Markov properties of small-scale turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 433:383, 2001.
- [8] M. Siefert; J. Peinke. On a multi-scale approach to analyze the joint statistics of longitudinal and transverse increments experimentally in small scale turbulence. *APS*, 123-QED, 2004.
- [9] F. Lenz; D. Herde; A. Riegert; H. Kantz. Bivariate time-periodic Fokker-Planck model for freeway traffic. *Eur. Phys. J. B*, 72:467–472, 2009.
- [10] M. Siefert; A. Kittel; R. Friedrich; J. Peinke. On a quantitative method to analyze dynamical and measurement noise. *Europhys. Lett.*, 61:466–472, 2003.

- 
- [11] M. Siefert; J. Peinke. Reconstruction of the deterministic dynamics of stochastic systems. *Journal Of Bifurcation And Chaos*, 14 No. 6, 2004.
- [12] M. Kern; O. Buser; J. Peinke; M. Siefert; L. Vulliet. Stochastic analysis of single particle segregational dynamics. *Phys. Let. A*, 336:428–471, 2005.
- [13] J. Gottschall; J. Peinke; V. Lippens; V. Nage. Exploring the dynamics of balance data - movement variability in terms of drift and diffusion. *Physics Letters A*, 373:811, 2009.
- [14] K. R. Sreenivasan; A. Bershadskii; J.J. Niemela. Mean wind and its reversal in thermal convection. *Physical Review E*, 65:056306, 2002.
- [15] E. Brown; G. Ahlers. Rotations and cessations of the large-scale circulation in turbulent Rayleigh-Bénard convection. *Journal Fluid Mechanics*, 568:351–386, 2006.
- [16] W. H. Press; S. A. Teukolsky; W. T. Vetterling; B. P. Flannery. *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, 2007.

## **Kapitel 5**

# **Langevin Modelle im Rahmen der Fahrermodellierung**

In diesem Kapitel geht es um die im Rahmen von IMoST erstellten Modelle und Analysen von Fahrerverhalten. Dabei kommen vor allem die in den vorhergehenden Kapiteln eingeführten Methoden zum Einsatz. Zuerst sollen hier die Daten aus dem Simulator näher vorgestellt werden. Anschließend werden die Daten so modifiziert, dass sie eine für die Anwendung der Langevin-Analyse geeignete Form erhalten. Schließlich wird das Langevin-Modell erstellt. Anschließend werden Monte-Carlo Simulationen durchgeführt und die so entstandenen simulierten Daten mit den Originaldaten verglichen. Eine früher Versuch die Langevin-Analyse auf die in IMoST gesammelten Daten anzuwenden kann in [1] gefunden werden, jedoch fehlen viele der hier vorgestellten Feinheiten, welche die Qualität der Ergebnisse deutlich verbessert haben.

## 5.1 Experimente im Rahmen des IMoST Projektes

Für die folgende Modellierung des Fahrerverhaltens werden Daten aus dem IMoST Projekt verwendet. Die hier verwendeten Daten wurden mit Hilfe eines Fahrsimulators (VR-Lab:CAVE) vom Deutschen Luft und Raumfahrtzentrum (DLR) in Braunschweig gewonnen. Der dortige Simulator besteht aus einem fensterlosen Raum, auf dessen Wände eine virtuelle Simulation projiziert wird. Im Zentrum des Raumes befindet sich ein Fahrersitz sowie ein Armaturenbrett mit Lenkrad, Rückspiegeln und Pedalen für Bremse und Beschleunigung. Eine Gangschaltung gibt es nicht, bzw. wurde nicht benötigt, da in allen Simulationen ein Automatikgetriebe verwendet wird. Die Lenkradposition sowie die beiden Pedalstellungen werden über AD-Wandler an den Simulator weitergegeben, der daraus mittels eines Fahrzeugmodells Reaktionen des Fahrzeugs generiert. Zusammen mit allen simulierten Fahrzeugen wird die Ego-Perspektive des Fahrers dann auf die Leinwände projiziert. Da der Simulator keine Rückwand besitzt werden anstelle der Rückspiegel Monitore verwendet, auf denen eine entsprechende Rücksicht angezeigt wird.

Mit Hilfe dieses Simulators können nun verschiedene Szenarien generiert und das menschliche Fahrerverhalten in bestimmten Situationen untersucht werden. Dazu muss zuerst ein Szenario gewählt werden. Im Rahmen des IMoST Projektes hat man sich für das Einfädeln auf eine Autobahn entschieden. Hierbei handelt es sich um ein Manöver, das eine große Bandbreite von unterschiedlichen Variationen ermöglicht. Für unser erstes Experiment wurde aber ein vergleichbar einfaches Szenario gewählt. Auf der Autobahn sollte sich ein zweites simuliertes Fahrzeug mit vordefiniertem Abstand und vordefinierter Geschwindigkeit von hinten nähern. Der Fahrer müsste dann selbst entscheiden, ob er möglichst schnell beschleunigt, um noch vor dem simulierten Fahrzeug auf die Autobahn zu wechseln, oder ob er lieber wartet und das andere Fahrzeug zuerst passieren lässt.

Um die Versuchsbedingungen exakt zu beschreiben, soll zuerst die verwendete Strecke vorgestellt werden (vgl. Abb. 5.1). Das Szenario beginnt mit Segment 1. Dieses Segment entspricht einer zweispurigen geraden 500m langen Straße, wobei das vom Fahrer gesteuerte Fahrzeug bereits bei einer Streckenposition von 300m initialisiert wird. Das

Fahrzeug steht zu Beginn der Simulation still, was eine notwendige Anfangsbedingung für den Simulator darstellt. Die Aufgabe des Fahrers ist es, das Fahrzeug auf diesem Segment möglichst auf 80km/h zu beschleunigen. Die nächsten zwei Segmente stellen eine Linkskurve dar. Sie besitzt eine Länge von  $2 \cdot 250\text{m}$  und einen Kurvenradius von 200m. Auch in den Kurven soll eine Geschwindigkeit von etwa 80km/h gehalten werden. Nach der Kurve wurde ein weiteres gerades Segment eingefügt. Dieses Segment ist nur 50m lang, doch es soll auch nur dazu dienen, den Übergang von der Linkskurve in die folgende Rechtskurve abzuschwächen. Dies ist nötig, um zu verhindern, dass das Verhalten in der Linkskurve Einfluss auf das Verhalten in der Rechtskurve nimmt. Diese Kurve ist wieder  $2 \cdot 250\text{m}$  lang und besitzt ebenfalls einen Kurvenradius von 200m. Allerdings besitzt der zweite Teil der Kurve nur noch eine Spur. Bis hier gilt ebenfalls eine Geschwindigkeitsbeschränkung von 80km/h. Diese Einschränkung wird für die folgenden Segmente aufgehoben. Das nächste 87m lange Segment entspricht einer weiteren leichten Rechtskurve und bildet das Anschlussstück zur Autobahn. Der Kurvenradius ist diesmal mit 1000m ungleich größer. Dieses Segment mündet in der Einfädelspur der Autobahn. Um zu verhindern, dass bereits zu diesem Zeitpunkt auf eventuell vorhandene Fahrzeuge auf der Autobahn reagiert wird, befindet sich eine virtuelle Mauer zwischen diesem Segment und der Autobahn. Das nächste Segment entspricht nun der Autobahn mit Einfädelspur. Die Einfädelspur ist 350m lang und mündet dann in der Standspur. Die Autobahn selbst ist zweispurig, so dass auch Überholmanöver möglich sind. Das letzte Segment entspricht der zweispurigen Autobahn sowie dem Standstreifen. Sobald das Einfädelmanöver vom Fahrer abgeschlossen wird, soll er auf diesem Segment auf den Standstreifen fahren und dort zum stehen kommen. Dies ist nötig, da der Simulator dadurch für den nächsten Versuchslauf vorbereitet wird. Dieses letzte Segment ist eigentlich eine sehr leichte Rechtskurve mit einem Kurvenradius von 5540m.

Während des Experiments 1a wird jeweils ein einzelnes Fahrzeug auf der Autobahn simuliert. Initialisiert wird dieses Fahrzeug sobald von Segment 6 auf Segment 7 gewechselt wird. Dieses simulierte Fahrzeug  $B$  wird so generiert, dass es zu diesem Zeitpunkt eine feste Geschwindigkeitsdifferenz  $\Delta v$  und Distanz  $\Delta s$  zum Ego-Fahrzeug  $A$  besitzt (vgl. Abb. 5.2). Dabei wird das simulierte Fahrzeug immer hinter dem Ego-Fahrzeug und mit höherer Geschwindigkeit generiert. Für die Geschwindigkeitsdifferenzen wurden Werte von 20km/h, 30km/h oder

Nr.	Length	Radius	Lanes	Speed limit
1	500m	-	2	80km/h
2	250m	200m	2	80km/h
3	250m	200m	2	80km/h
4	50m	-	2	80km/h
5	250m	200m	2	80km/h
6	250m	200m	1	80km/h
7	87m	1000m	1	-
8	350m	-	3	-
9	1000m	5540m	3	-

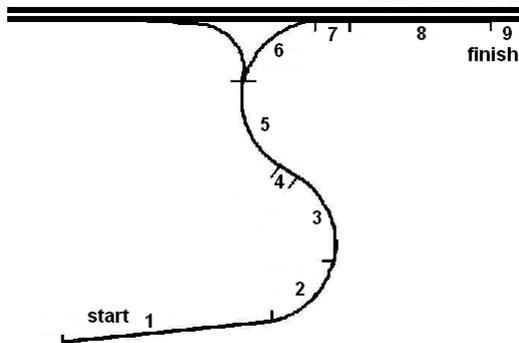


Abbildung 5.1: Übersicht des simulierten Streckenverlaufs, sowie eine Liste der einzelnen Streckensegmente und ihrer Parameter.

40km/h gewählt und für die Distanz 20m, 30m oder 40m. Bei diesen Werten ist zu erwarten, dass bei kleiner Distanz und hoher Geschwindigkeit der Fahrer, dass simulierte Fahrzeug passieren lassen muss, bevor er selbst auf die Autobahn wechseln kann. Andersherum muss der Fahrer dies nicht, wenn die Distanz groß und die Geschwindigkeitsdifferenz klein ausfällt. Diese zwei Gruppen werden im folgenden als Nachher- sowie Vorhereinfädler bezeichnet, je nachdem, ob sie vor oder nach dem passieren des anderen Fahrzeugs einen Spurwechsel durchführen. Das simulierte Fahrzeug bewegt sich während des Experiments mit konstanter Geschwindigkeit und verbleibt immer auf der selben Spur. Wichtig

zu erwähnen ist auch, dass die Abfolge der unterschiedlichen Szenarien zufällig war, um zu verhindern, dass die Fahrer sich auf das Szenario einstellen können. Aus dem selben Grund befindet sich zwischen Segment 6-7 und der Autobahn eine virtuelle Mauer, so dass die Autobahn erst beim Einfädeln einzusehen ist.

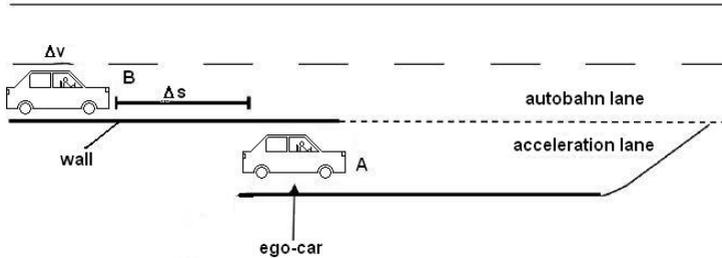


Abbildung 5.2: Definition des Einfädelszenarios in Experiment 1a. Die Distanz  $\Delta s$  und die Geschwindigkeitsdifferenz  $\Delta v$  wurden variiert.

Für Experiment 1c wurde das Einfädelszenario erweitert. Anstatt nur eines Fahrzeugs auf der Autobahn gibt es nun eine Kolonne von Fahrzeugen, die alle den gleichen Abstand zu einander haben.

Für das Experiment wurden insgesamt 16 Versuchspersonen eingeladen. Jede Versuchsperson sollte jedes der neun unterschiedlichen Szenarien mindestens viermal bewältigen. Dies ergibt theoretisch 64 Fahrten für jedes Szenario, allerdings mussten einige Fahrten nachträglich aussortiert werden, da es offensichtlich wurde, dass einige Fahrer Risiken eingehen, die sie in der Realität niemals eingehen würden. Trotzdem blieben über 500 Fahrten für die Auswertung übrig.

Die Daten können dann vom Simulator abgefragt werden. Dabei sollte eine Frequenz von 20Hz verwendet werden, jedoch hat sich gezeigt, dass die Computer des Simulators nicht korrekt synchronisiert wurden, weshalb es mitunter zu Lücken in den Daten kommt. Die Daten sind also nicht immer streng äquidistant. Für die spätere Auswertung sind vor allem die Trajektorien der Fahrzeuge interessant. An erster Stelle stehen dabei die Koordinaten  $x(t)$  und  $y(t)$ . Die  $x$ -Koordinate besitzt dabei eine Auflösung von 1cm und die  $y$ -Koordinate eine Auflösung von 10cm. Erst im Folgeexperimenten 1c besitzt auch die  $y$ -Koordinate eine Auflösung von 1cm. Interessant für die spätere Mo-

dellierung ist, dass die Geschwindigkeit und die Beschleunigung in den Daten nicht direkt voneinander abgeleitet wurden. Die Geschwindigkeit ist mit wesentlich höherer Genauigkeit gegeben als die Auflösung der Koordinaten es zuließe. Dieser Umstand wird später schwerwiegende Folgen für die Modelle haben, da nicht zuletzt hierdurch auch ein Modell für die Geschwindigkeit nötig sein wird, um ein gutes Geschwindigkeitsverhalten zu erhalten. Beschleunigungswerte gibt es in 1a keine, doch in 1c sind die Werte vorhanden. Leider ist es für Experiment 1a nicht möglich, die Beschleunigungswerte aus den Geschwindigkeiten abzuleiten, da durch das Ableiten die statistischen Fehler zu groß werden.

Neben den für die Trajektorien wichtigen Parametern werden auch die Zustände des Lenkrades, des Gaspedals und der Bremse angegeben. Leider ist kein Fahrzeugmodell bekannt, das diese Werte mit den Trajektorien verbindet, da dieses Bestandteil des fertigen Simulators ist und nicht eingesehen werden kann (Im nächsten Kapitel wird allerdings versucht, ein Fahrzeugmodell aus den Datensätzen abzuleiten).

## 5.2 Vorbereitung der Daten

Bevor mit der Langevin-Analyse begonnen werden kann müssen die Daten aus den Experimenten vorbereitet werden.

Für die spätere Analyse und Modellierung werden vor allem die Ortskoordinaten verwendet. Das Koordinatensystem deckt die komplette simulierte Ebene ab. Da ein Großteil dieser Ebene leer ist, bedeutet dies eine enorme Verschwendung von Speicher für die spätere Anwendung der Langevin-Analyse. Deshalb wird im folgenden eine Koordinatentransformation durchgeführt. Nach dieser Transformation soll die x-Achse mit dem rechten Fahrbahnrand identisch sein. Die y-Achse dagegen soll orthogonal dazu sein und somit die Position auf der Spur wiedergeben.

Die x-Achse kann sehr einfach generiert werden. In den Daten gibt es einen Parameter (DTP0), welcher angibt, wie viel Strecke noch bis zum Segment 7 vorhanden ist. Dieser Parameter muss nur durch einen Offset von 1637.27m erhöht werden, damit der Punkt mit dem Streckenbeginn übereinstimmt. Für die y-Achse wird der in den Daten verwendete Abstand zum Seitenstreifen verwendet. Damit wären die Koordinaten eigentlich gegeben, doch leider sind genau diese gegebenen

Parameter an einigen Stellen fehlerhaft. Dies macht eine Reihe von Korrekturen notwendig.

Die x-Achse muss für alle Werte größer als 1300m um zwei Meter reduziert werden, um eine Lücke zwischen Segment 5 und 6 zu schließen. Für die y-Achse dagegen sind eine ganze Reihe von Korrekturen notwendig. Zuerst müssen alle y-Werte um 0.7m erhöht werden. Das Segment 8 muss anschließend dagegen um 0.2m und Segment 9 um 0.35m verringert werden. Was bleibt ist ein Fehler auf dem Einfädelsegment. Dort werden alle y-Werte, die in einen Bereich zwischen 4.82m und 4.95m fallen würden, an einer imaginären Achse bei 4.95m gespiegelt. Wahrscheinlich die Folge eines fehlerhaften Bits im Simulator. Um diesen Fehler zu korrigieren wird jeder Wert der in den Bereich zwischen 4.95m und 5.08m fällt geprüft. Für diesen Bereich hat man sowohl korrekte Werte als auch fehlerhafte Werte. Um einen fehlerhaften Wert von einem korrekten zu unterscheiden, wird für jeden Wert der theoretisch gespiegelte Wert errechnet. Befindet sich dieser theoretische Wert näher an seinem direkten Vorgänger als der in den Daten enthaltene, so wird der theoretische Wert verwendet. Auf diese Weise konnte der Fehler korrigiert und das neue Koordinatensystem verwendet werden.

Wie das neue Koordinatensystem genau aussieht kann der folgenden Abbildung 5.3 entnommen werden.

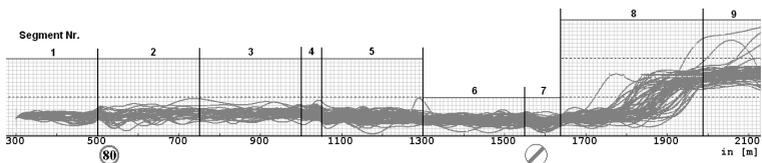


Abbildung 5.3: Die linearisierte Strecke. Die Nummern stehen für die Segmente und können in Tabelle 5.1 nachgelesen werden

Jetzt werden Geraden in einem kartesischen Koordinatensystem und Kurven in einem polaren Koordinatensystem dargestellt. Im Falle einer Kurve kommt es hierbei zu Verzerrungen je größer unser y-Wert wird und je kleiner der Kurvenradius ist. Diese Verzerrung führt allerdings selbst im schlimmsten Fall (200m Kurvenradius, Unterschied zwischen innerem und äußerem Fahrbahnrand) nur zu einer Verzerrung von gerade mal 1.5% eines x-Wertes und kann deshalb vernachlässigt werden.

Der Grund warum das neue Koordinatensystem besser ist als das Ursprüngliche, ist, neben dem viel geringeren Speicherplatzbedarf, dass sich die longitudinale und transversale Komponente jetzt sehr leicht voneinander trennen lassen. Die longitudinale Komponente enthält nun fast ausschließlich das Beschleunigen und Bremsen entlang der Strecke, während die transversale Komponente vor allem die Lenkmanöver enthält. Das spätere Langevinmodell wird ebenfalls entlang der Achsen dieses neuen Koordinatensystems gebildet und somit ebenfalls eine Aufteilung in eine longitudinale und transversale Komponente enthalten, was eine leichtere Interpretation der Drift- und Diffusionskoeffizienten ermöglicht. Tatsächlich erlaubt es dieses Koordinatensystem ein eigentlich höherdimensionales Problem in mehrere eindimensionale zu zerlegen, was den Datenbedarf deutlich verringert, da dieser nun nicht mehr exponentiell sondern nur linear ansteigt.

## 5.3 Erste Analyse der Daten

### 5.3.1 Vorher-/Nachhereinfädler

Die folgende Tabelle (Abb. 5.4) zeigt den Anteil der Nachhereinfädler aus Experiment 1a in Abhängigkeit von Ortsdifferenz und Geschwindigkeitsdifferenz. Es wird deutlich, dass bei 20m Ortsdifferenz kaum ein Fahrer daran dachte das Risiko eines frühen Spurwechsels einzugehen. Ähnlich sieht es für die Fälle 30m bei 30-40km/h sowie 40m bei 40km/h aus, wo nur ein bis zwei einen frühen Spurwechsel gewagt haben. Die Fälle 30m bei 20km/h und 40m bei 30km/h sind dagegen gute Beispiele für Datensätze mit möglichst freier Entscheidung. Die spätere Modellierung sollte sich deshalb auf diese Daten konzentrieren. Der einzige Fall für einen nahezu bedingungslosen frühen Spurwechsel liegt bei 40m und 20km/h.

## 5.4 Durchführen der Langevin-Analyse

Hier soll nun beschrieben werden, wie die Daten und die Methode verwendet werden, um die Drift- und Diffusionskoeffizienten des Langevin-Modells zu bestimmen.

/	20m	30m	40m
<b>20km/h</b>	90%	34%	3%
<b>30km/h</b>	100%	96%	53%
<b>40km/h</b>	100%	100%	98%

Abbildung 5.4: Übersicht über den Anteil der Nachher-Einfädler

### 5.4.1 Das verwendete Gitter

Dank des neuen Koordinatensystems ist die Strecke nun völlig linear. Die Daten ähneln streckenweise den typischen Zeitreihe wie sie in den vorigen Kapiteln (3-4) behandelt wurden. Doch dem ist nicht so, denn im Gegensatz zu vorher bildet die  $x$ -Achse nun keine Zeit mehr ab. Obwohl es sich bei der  $x$ -Koordinate nach der Transformation wieder um eine geordnete Folge von monoton ansteigenden Werten handelt, sind die Daten in  $x$ -Richtung nicht äquidistant. Im besten Fall handelt es sich hierbei um einen Continuous Time Random Walk (CTRW). Die  $x$ -Achse stellt hier allerdings ebenfalls ein Langevin-System dar, das benötigt wird um die Geschwindigkeit des Fahrzeugs zu modellieren. Darüber hinaus ist das Verhalten von der allgemeinen Situation abhängig. Deshalb muss hier leider ein etwas anderer Weg eingeschlagen werden.

Generell kann man sagen, dass je nach Position auf der Strecke ein anderes Verhalten nötig ist. Mit Verhalten ist hierbei sowohl das Lenken als auch das Beschleunigen oder Bremsen gemeint. Es muss also auf die Position  $(x(t), y(t))$  des Fahrzeugs auf der Strecke bedingt werden, die durch das neue Koordinatensystem gegeben ist. Als nächstes sollte man die Klassen für die man die Drift- und Diffusionskoeffizienten bestimmen will festlegen. Diese Klassen bilden ein Gitter aus Rechtecken, das die Strecke abdeckt. Jede Position des Fahrzeugs fällt also in eines dieser Rechtecke und die darin enthaltenen Koeffizienten bestimmen das weitere Verhalten des Fahrzeugs. Jedes dieser Rechtecke sollte zum einen klein genug sein um ein nahezu stationäres Verhalten in seinem inneren zu rechtfertigen. Andererseits sollte es groß genug sein, um genügend Daten für eine Bestimmung von Drift und Diffusion zu ermöglichen.

Für den vorliegenden Fall wird für die  $x$ -Achse eine Klassengröße von 10m gewählt. Eine Distanz von 10m erlaubt bei einer Geschwin-

digkeit von etwa 20m/s eine zeitliche Auflösung von etwa einer halben Sekunde. Obwohl der Fahrer sicherlich schneller reagieren kann, so ist durch die Trägheit des Fahrzeugs eine Verhaltensänderung der Trajektorie sehr viel langsamer. Für die Y-Achse wird eine Auflösung von 10 Klassen pro Spur verwendet. Diese Auflösung genügt bereits um die meisten Details im Model abzubilden.

Ein weiterer wichtiger Punkt ist, dass es besonders beim Einfädelszenario nicht genügend Daten gibt, um den gesamten möglichen Raum mit Trajektorien abzudecken. Um leere Klassen im Modell zu vermeiden, wird die Größe beim Bestimmen der Drift und Diffusion verdoppelt, was bedeutet, das sich benachbarte Klassen zum Teil überlappen. Dies hat den selben Effekt wie ein Unschärfefilter bei einem Bild.

### 5.4.2 Nicht-äquidistante Daten

Ein großes Problem stellt die nicht-äquidistanz der Daten in der Zeit da. Obwohl die Daten mit 20Hz aufgenommen wurden, treten Fehler in Form von fehlenden Messpunkten auf. Dies war besonders für das Experiment 1a der Fall. Eine Möglichkeit dieses Problem zu lösen besteht darin, die fehlenden Punkte mit einem Cubic-Spline zu interpolieren (siehe [2]). Ein Cubic-Spline nähert den Verlauf einer Funktion einem Polynom dritter Ordnung an und ermöglicht somit eine stetige Verbindung der Punkte. Dies gilt selbst für die Ableitung der interpolierten Funktion, was bei einer linearen Interpolation nicht der Fall wäre. Zumindest für die Bestimmung der Drift funktioniert diese Methode sehr gut (siehe hierzu auch [1]), jedoch die Diffusion wird stark beeinträchtigt. Da es beim Anwenden dieser Methode unmöglich wird eine Diffusion zu ermitteln, muss meist eine künstliche Diffusion eingesetzt werden, um dennoch ein halbwegs brauchbares Ergebnis zu erhalten.

Viel besser ist es dagegen, die Methode der Bestimmung von Drift- und Diffusionskoeffizienten zu modifizieren. Im Falle der vorliegenden Daten aus IMoST handelt es sich meist nur um fehlende Einzelpunkte oder Abschnitte. Die Abschnitte ohne Lücken folgen dagegen den erwünschten 20Hz. Es treten also nicht beliebige Werte für  $t$  auf. Deshalb ist es weiterhin möglich, die Zeit in diskrete Klassen zusammenzufassen. Nur beim Mitteln der Kramers-Moyal-Koeffizienten muss man entsprechend aufpassen, denn man muss nun nicht mehr durch die Menge an Punkten, die für jedes  $\tau$  in eine Klasse fallen teilen, sondern durch die Menge der tatsächlich gefundenen Inkremente.

Alternativ kann man auch gleich einen Fit durch die Gesamtmenge an Inkrementen legen und so direkt die Drift und Diffusion bestimmen. Dieser Ansatz wurde von Julia Gottschall verwendet und benötigt überhaupt keine diskreten Zeiten mehr[3].

Im folgenden wird eine Kombination aus beiden Methoden verwendet. Es werden keine diskreten Klassen mehr verwendet. In Folge dessen werden die Kramers-Moyal-Koeffizienten auch nicht mehr gemittelt (Spitze Klammern entfallen), sondern es wird gleich ein linearer Fit auf die Kramers-Moyal-Koeffizienten angewendet, um aus dessen Steigung die Drift- und Diffusionskoeffizienten zu ermitteln.

$$M_i^{(1)}(\mathbf{x}, t, \tau) = (x_i(t + \tau) - X_i) \Big|_{x_i(t)=X_i} \quad (5.1)$$

$$M_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, t, \tau) = ((x_i(t + \tau) - X_i)(x_j(t + \tau) - X_j)) \Big|_{x_{i,j}(t)=X_{i,j}} \quad (5.2)$$

### 5.4.3 Korrektur erster Ordnung

Wie bereits angedeutet ist die Bestimmung der Diffusion besonders schwierig. Dies liegt zum einen daran, dass das Rauschen in den Daten relativ gering ist und auf kleinen Skalen (<1s) sogar völlig zu verschwinden scheint. Zum anderen sind die Klassen für die Bestimmung der Drift- und Diffusionskoeffizienten recht groß. Dies hat zur Folge, dass viele Inkremente vollständig innerhalb der eigenen Klasse liegen. Wenn etwas derartiges geschieht, wird die Diffusion durch den starken Drift verfälscht, denn sie wird dabei oft deutlich überschätzt. Um dem entgegen zu wirken ist es nötig, die bei der Berechnung verwendeten Inkremente vom Driftanteil zu bereinigen. Allgemein ist diese Methode identisch mit der Verwendung der Korrektur erster Ordnung von Diffusionskoeffizienten. Die Gleichung für  $D^{(2)}$  lautet für nicht-äquidistante Zeitreihen (siehe Abschnitt 5.4.2) nun:

$$M_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, t, \tau) = ((x_i(t + \tau) - X_i - \tau D_i^{(1)}(X_i)) \cdot (x_j(t + \tau) - X_j - \tau D_j^{(1)}(X_j))) \Big|_{x_{i,j}(t)=X_{i,j}} \quad (5.3)$$

Diese Korrektur macht es also notwendig, zuerst  $D^{(1)}$  zu bestimmen bevor überhaupt die Diffusion ermittelt werden kann. Erst durch die Verwendung dieser Korrektur ist es möglich sinnvolle Diffusionswerte zu erhalten.

#### 5.4.4 Die Langevin-Gleichungen

Nachdem nun die Drift- und Diffusionskoeffizienten bestimmt wurden, können die zugehörigen Langevin-Gleichungen aufgestellt werden. Für den Pfad im Raum wird folgende Gleichung verwendet:

$$\begin{aligned} x_i(t + \tau) &= x_i(t) \\ &+ D_x^{(1)}(X, Y)\tau \\ &+ \sqrt{D_{xx}^{(2)}(X, Y)}\tau\Gamma(t) + \mathcal{O}(\tau) \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} y_i(t + \tau) &= y_i(t) \\ &+ D_y^{(1)}(X, Y)\tau \\ &+ \sqrt{D_{yy}^{(2)}(X, Y)}\tau\Gamma(t) + \mathcal{O}(\tau) \end{aligned} \quad (5.5)$$

Wie auffällt werden nur die Diagonalelemente der Diffusionsmatrix verwendet. Dies ist deshalb ausreichend, da das System in eine longitudinale und eine transversale Komponente aufgeteilt wurde. Die longitudinale Komponente, die vor allem die Geschwindigkeit des Fahrzeugs bestimmt, ist dabei etwa Zehn mal größer als die Transversale. Dadurch wird die Geschwindigkeit des Fahrzeugs vor allem durch die longitudinale Komponente bestimmt, während die Lenkbewegungen vor allem durch die transversale Komponente bestimmt werden. Zwar ist bei extremen Einlenkwinkeln bei großer Geschwindigkeit eine Abhängigkeit gegeben, doch dieses Regime wird in den hier durchgeführten Experimenten nie erreicht, da die Kurvenradien der Strecke immer sehr großzügig gewählt wurden und somit extreme Einlenkwinkel vermieden werden.

Später wird sich herausstellen, dass das Modell für den Ort nicht ausreicht, um auch die Geschwindigkeiten korrekt zu beschreiben, da das Modell für den Ort nur sehr ungenaue und verrauschte Geschwindigkeiten generieren wird. Wären die Ortskoordinaten genauer, so

könnte man sich wahrscheinlich auf einen einfachen Filter zur Glättung der generierten Geschwindigkeiten beschränken. Unter den gegebenen Umständen werden jedoch folgende Langevin-Gleichungen verwendet um die Geschwindigkeiten korrekt zu simulieren:

$$\begin{aligned} v_{xi}(t + \tau) &= v_{xi}(t) \\ &+ D_{vx}^{(1)}(X, Y, v_x, v_y) \tau \\ &+ \sqrt{D_{vx}^{(2)}(X, Y, v_x, v_y)} \tau \Gamma(t) + \mathcal{O}(\tau) \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} v_{yi}(t + \tau) &= v_{yi}(t) \\ &+ D_{vy}^{(1)}(X, Y, v_x, v_y) \tau \\ &+ \sqrt{D_{vy}^{(2)}(X, Y, v_x, v_y)} \tau \Gamma(t) + \mathcal{O}(\tau) \end{aligned} \quad (5.7)$$

Wie in den Gleichungen beschrieben, hängen die Koeffizienten nun nicht mehr nur von  $X$  und  $Y$  ab, sondern sind auch von  $v_x$  und  $v_y$  abhängig. Anders als bei  $X$  und  $Y$  werden die Werte von  $v_x$  und  $v_y$  nicht in Klassen unterteilt, da hierfür einfach nicht genügend Werte vorhanden sind. Entweder wird ein einfacher Mittelwert für alle  $v_x$  und  $v_y$  verwendet oder es wird unter den in den Daten enthaltenen unterschiedlichen Geschwindigkeiten die nächstliegende/ähnlichste ausgewählt. Trotz dieses Unterschiedes werden die Geschwindigkeitsinkremente weiterhin auch auf  $X$  und  $Y$  bedingt und sind somit mit dem Modell für den Ort verbunden. Damit man die Geschwindigkeit auf den Ort bedingen kann muss zuvor auch der Ort nach 5.4 und 5.5 simuliert werden.

## 5.5 Analyse der Vektorfelder

Unter Verwendung der im vorigen Abschnitt vorgestellten Modifikationen können nun die Drift- und Diffusionskoeffizienten aus den Daten ermittelt werden. Das Ergebnis sind stochastische Vektorfelder. Jede Klasse enthält dabei zum einen Werte für den transversalen und longitudinalen Drift ( $D_x^{(1)}$ ,  $D_y^{(1)}$ ), sowie die zugehörige Diffusion ( $D_x^{(2)}$ ,  $D_y^{(2)}$ ). Dabei kann man entweder die Verteilung der Drift und Diffusion innerhalb einer Klasse betrachten oder man sieht sich nur die mittleren

Ergebnisse für eine Klasse an, kann dann allerdings das komplette Feld überblicken.

Zuerst soll der Inhalt einer Klasse an einem Beispiel betrachtet werden. Jede Klasse besitzt für jede Vektorkomponente mindestens eine Drift- sowie eine Diffusionskomponente. Abbildung 5.5 zeigt ein Beispiel anhand von Geschwindigkeitsinkrementen, die sich aus den Ortskoordinaten errechnen lassen. In dieser Graphik wird für die Achsenbeschriftung  $v_x$  sowie  $v_y$  verwendet, da hier sowohl Drift als auch Diffusion dargestellt werden, welche die Einheiten von Geschwindigkeiten aufweisen. Später werden auch  $a_x$  sowie  $a_y$  verwendet, sofern es sich um Drift und Diffusion im Beschleunigungsraum (Geschwindigkeitsinkremente) handelt. Die Pfeile stellen hierbei die Drift dar, während die grauen Bereiche für das Doppelte der Standardabweichung stehen, die durch die Diffusion verursacht wird. Jeder der in diesem Beispiel gezeigten Pfeile repräsentiert das Verhalten eines einzelnen Fahrversuchs. Um die einzelnen Pfeile von einander unterscheiden zu können, wird der Index  $k$  verwendet ( $D_{x,k}^{(1)}$ ,  $D_{y,k}^{(1)}$  sowie  $D_{x,k}^{(2)}$ ,  $D_{y,k}^{(2)}$ ), welcher die unterschiedlichen Koeffizienten abzählt. Im Falle einer Monte-Carlo Simulation würde ein solcher Pfeil als Schritt für  $\Delta x$  und  $\Delta y$  gewählt und dieser dann durch die Diffusion so modifiziert, dass er zumindest mit 95-prozentiger Sicherheit innerhalb des grauen Bereichs fällt. Das hier gezeigte Beispiel zeigt die Verteilung dieser stochastisch modifizierten Vektorpfeile beim Spurwechsel. Es stellt also ein relativ extremes Beispiel für die  $y$ -Komponente dar, da in dieser Situation die stärksten  $y$ -Anteile auftreten. Trotz eines solch extremen Beispiels liegt  $v_y$  bei nicht einmal 10% des  $v_x$  Wertes. Allerdings ist das Verhältnis der Diffusionskomponenten zueinander nahezu gleich Eins. Dies bedeutet, dass das Lenken des Fahrzeugs kaum einen Einfluss auf die Gesamtgeschwindigkeit hat, und somit beide Komponenten weitestgehend getrennt voneinander simuliert werden können.

Im Falle einer Übersicht aller Klassen ist es nicht hilfreich, sämtliche Pfeile einer jeden Versuchsfahrt zu zeigen. Stattdessen werden nur die mittleren Werte in den folgenden Vektorfeldern gezeigt. Dabei ist allerdings Vorsicht geboten. Wenn die Verteilung der Vektorpfeile innerhalb einer Klasse stark nicht-normal verteilt ist, darf man keine Mittlung vornehmen, sondern sollte besser den Datensatz aufteilen. Zum Beispiel führt die Entscheidung für das Vorher- oder Nachhereinfädern der Fahrer zu stark unterschiedlichem Verhalten innerhalb der selben Klasse. In einem solchen Fall müssen die Vorher- von den Nachhereinfädern ge-

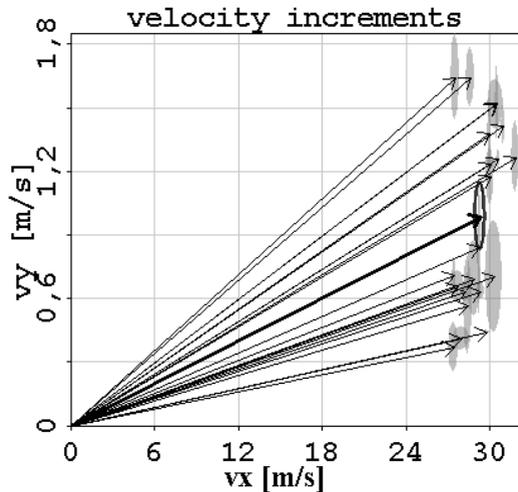


Abbildung 5.5: Beispiel einer Klasse. Die Pfeile stellen die Drift ( $D_{x,k}^{(1)}$ ,  $D_{y,k}^{(1)}$ ) dar, während die grauen Bereiche das doppelte der Diffusion ( $D_{x,k}^{(2)}$ ,  $D_{y,k}^{(2)}$ ) darstellen. Der dickere Pfeil steht für den über  $k$  gemittelten Drift ( $D_x^{(1)} = \langle D_{x,k}^{(1)} \rangle, D_y^{(1)} = \langle D_{y,k}^{(1)} \rangle$ ) und das zugehörige Oval für die verdoppelte mittlere Diffusion.

trennt betrachtet werden, da sonst die Mittlung zu Ergebnissen führt, die so gar nicht in den Daten enthalten sind. Aus diesem Grund wird zuerst ein Szenario dargestellt, das nur Nachhereinfädler enthält. Die Ortsdifferenz beträgt hierbei 30m und die Geschwindigkeitsdifferenz 30km/h.

### 5.5.1 Vektorfelder beim Nachhereinfädeln

Verwendet wird nun der Datensatz mit Ortsdifferenz 30m und 30km/h Geschwindigkeitsdifferenz. Es werden nur Nachhereinfädler berücksichtigt. Abbildung 5.6 zeigt das über  $k$  gemittelte Driftfeld ( $D_x^{(1)} = \langle D_{x,k}^{(1)} \rangle, D_y^{(1)} = \langle D_{y,k}^{(1)} \rangle$ ) gewonnen aus den Ortskoordinaten  $(x,y)$ . Da die Drift von den Ortskoordinaten durch Differenzkoeffizienten abgeleitet werden, haben die Driftvektoren die Einheit von Geschwindigkeiten. Zu beachten ist, dass die Vektorlängen der Übersichtlichkeit wegen modi-

fiziert wurden.

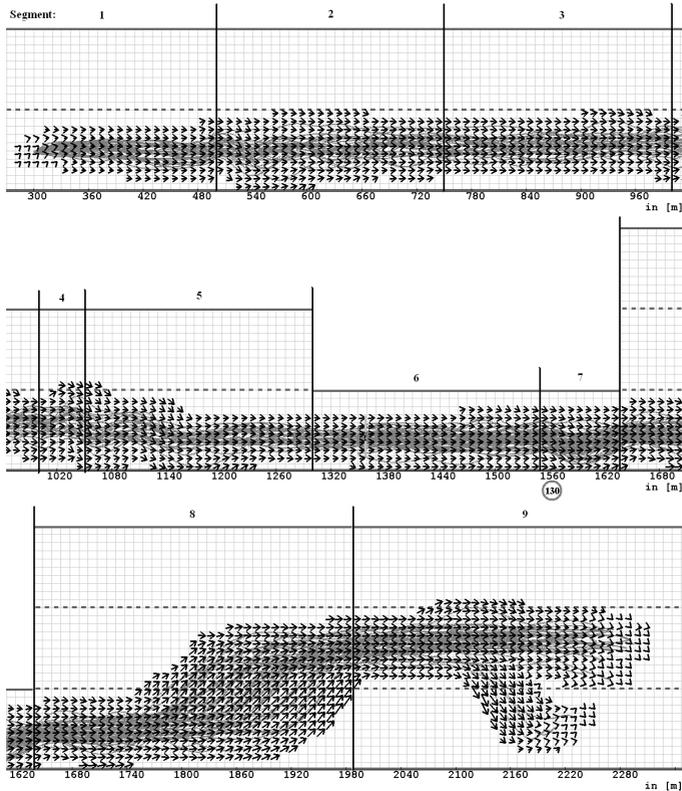


Abbildung 5.6: Driftfeld der Ortskoordinaten. Die Segmentnummern entsprechen Abbildung 5.1. Im Hintergrund sind die Trajektorien (Grau) zu sehen.

Das erste Segment beinhaltet das Beschleunigungsmanöver von 0 auf 80km/h. Die Fahrzeuge starten bei der 300m-Marke und die Fahrer haben somit noch 200m um zu beschleunigen. Dabei wird beim Bestimmen der Drift und Diffusionskoeffizienten ein Problem deutlich. Auf den ersten Metern ist die Geschwindigkeit sehr gering und damit sehr ungenau, da die Ortskoordinaten nur eine recht grobe Auflösung haben. Je

geringer die Geschwindigkeit, je größer die Unsicherheit. Dies gilt insbesondere für die Klassen, in denen das Fahrzeug anfangs noch steht. Dies gibt auf den ersten Metern recht unrealistische Werte für Drift und Diffusion. Auffällig ist auch das Ausfächern der hiesigen Trajektorien. Obwohl alle am selben Punkt starten, nehmen die Trajektorien bereits nach 120 Metern etwa 50% der Spur ein. Es ist genau dieses Ausfächern, das mit dem stochastischen Modell später modelliert werden soll.

Die nächsten beiden Segmente spiegeln das Verhalten in der Linkskurve wieder. Dabei fällt besonders das Über- oder Untersteuern zu Beginn und am Ende der Kurve auf. Dieser Effekt wird auch sehr schön von den Vektorfeldern wiedergegeben. Segment 4 ist ein kurzes Stück Gerade, das als Überleitung zwischen Links- und Rechtskurve dient. Es ist nicht verwunderlich, dass das Untersteuern am Ende der letzten Kurve in dieses Segment fällt. Die nächste Rechtskurve beginnt mit einem Übersteuern, und endet mit einem Untersteuern in Segment 7. Der Grund dafür liegt darin, dass zwar auch Segment 7 eine Rechtskurve ist, aber mit wesentlich größerem Kurvenradius. Abbildung 5.7 zeigt die y-Komponente des Driftfeldes über eben diesen Bereich. Es ist sehr schön zu erkennen, wie der Fahrer versucht die Spur zu halten und in welchen Bereichen wie stark vom üblichen Spurhalteverhalten abgewichen wird. Besonders am Anfang und Ende einer Kurve führen die Korrekturmaßnahmen zu deutlichen Schwankungen.

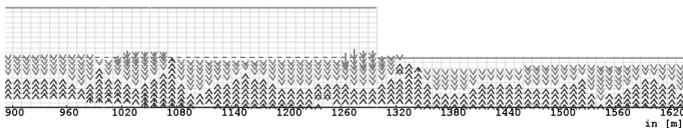


Abbildung 5.7: Ein Beispiel für das Spurhalten. Es wird hier nur die y-Komponente der Ortsinkremente ohne Betrag dargestellt.

Segment 8 enthält nun das Einfädelszenario und den damit verbundenen Spurwechsel. Dieses Segment ist besonders interessant, da hier die volle Variabilität menschlichen Verhaltens in ähnlichen Situationen deutlich wird. In diesem Segment treten auch die höchsten y-Komponenten auf, da hier die Richtung des Fahrzeugs im Vergleich zum Spurverlauf am deutlichsten abweicht. Für die Modellierung ist dieser Bereich deshalb besonders interessant. Segment 9 enthält dagegen nur noch das Ende der Simulation. Dazu müssen die Fahrer entwe-

der auf der Autobahnspur oder dem Seitenstreifen zum Stehen kommen.

Die Geschwindigkeitsvektoren lassen sich sehr leicht interpretieren, da sie mit den Ortsänderungen pro Zeitschritt  $\tau$  identisch sind. Obwohl dieses Vektorfeld bereits als Modell taugt, kann man an ihm nur schwer Details ausmachen. Nur dort wo das Fahrzeug seine Geschwindigkeit drastisch ändert oder die Richtung im Vergleich zum Spurverlauf geändert wird können Details ausgemacht werden. Viel besser zur Analyse geeignet ist das Vektorfeld das von den Geschwindigkeiten abgeleitet wird. Da die Ableitung der Geschwindigkeit die Beschleunigung ist, und diese wiederum proportional zur Kraft, ist das Kraftfeld deutlich detailreicher.

Abbildung 5.8 zeigt das über  $k$  gemittelte Driffeld ( $D_{vx}^{(1)} = \langle D_{vx,k}^{(1)} \rangle, D_{vy}^{(1)} = \langle D_{vy,k}^{(1)} \rangle$ ) gewonnen aus den auf den Ort bedingten Geschwindigkeiten ( $v_x, v_y$ ). Dieses Feld ist proportional zu einem Kraftfeld, wobei der Proportionalitätsfaktor mit der Fahrzeugmasse identisch ist, allerdings wurden die Vektorpfeillängen der Übersichtlichkeit wegen weiter verkürzt. Das erste Segment zeigt wieder den Bereich der Beschleunigung und entsprechend weisen die Vektorpfeile in Richtung der  $x$ -Achse. Dies unterscheidet sich nicht wesentlich vom vorherigen Vektorfeld. Allerdings müssen, sobald das Fahrzeug seine Endgeschwindigkeit erreicht hat, nur noch geringfügige Beschleunigungen auf das Fahrzeug wirken, um es auf der Strecke zu halten.

Da sich an der Gesamtgeschwindigkeit nichts mehr wesentlich ändert, sind es nur noch diese Korrekturmanöver des Fahrers, die in den Vektoren auftauchen. Die Segmente 2 und 3 zeigen damit vor allem die Spuraltemanöver des Fahrers. Kommt das Fahrzeug dem Fahrbahnrand zu nahe, so wird durch die Lenkung vom Fahrer eine Kraft auf das Fahrzeug ausgeübt, die es vom Fahrbahnrand weg führt. Ganz besonders deutlich wird dies zu Beginn von Segment 2, da hier meistens deutlich untersteuert wird. Als Folge dessen findet man in diesem Bereich erstaunlich große Kräfte, die zunächst nach unten, und anschließend nach oben zeigen, um dem Untersteuern ein entsprechendes Korrekturmanöver folgen zu lassen.

Für den Rest der Kurve wird das Feld dann wieder stationärer. Im allgemeinen befinden sich die stärkeren Kräfte am Spurrand, um das Fahrzeug wieder ins Spurzentrums zu bringen. Das Zentrum ist dagegen nahezu kräftefrei. Das Zentrum zeigt einen periodischen Wechsel von in

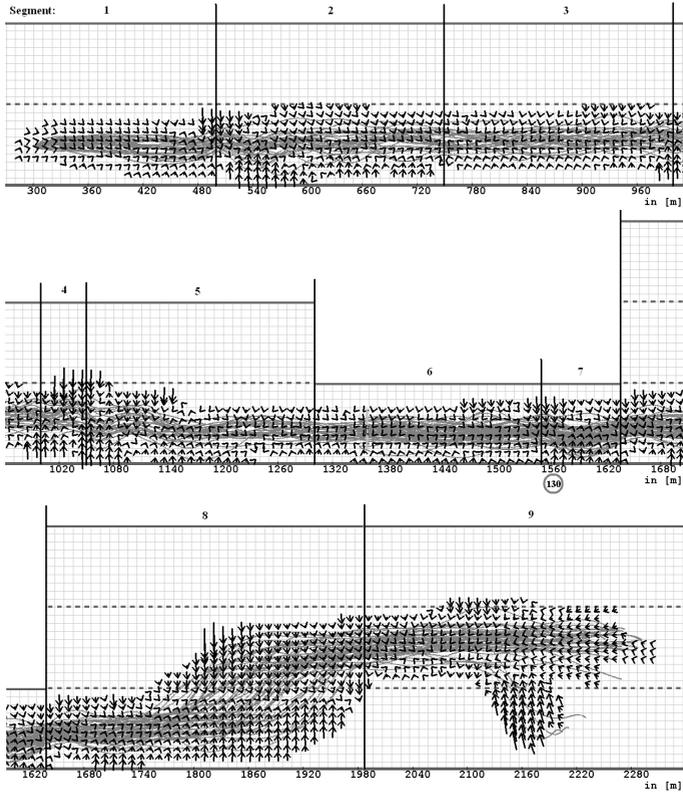


Abbildung 5.8: Driftfeld der Geschwindigkeiten. Die Segmentnummern entsprechen Abbildung 5.1. Im Hintergrund sind die Trajektorien (Grau) zu sehen.

x-Richtung positiven und negativen Kräften. Diese Periodizität ist eine Folge der immer wieder nötigen Beschleunigungsmanöver des Fahrer, um das Fahrzeug bei konstanter Geschwindigkeit zu halten, da dieses durch Reibung sonst kontinuierlich an Geschwindigkeit verlieren würde. Diese Manöver sind generell auf der ganzen Strecke zu finden, doch sind sie im Vergleich zu den Spurhalte manövern viel zu klein und werden deshalb meist von ihnen überlagert. Das Vorhandensein dieser Beschleunigungsmanöver ist eigentlich überraschend, denn dies bedeutet,

dass die Orte an denen Beschleunigt wird, nicht zufällig gewählt werden, sondern alle Fahrer den selben Bereich hierfür auswählen. Wären sie zufällig über die Strecke verteilt, würden sie sich im Mittel gegenseitig aufheben.

Das kurze Stück Gerade in Segment 4 beinhaltet die entsprechenden Korrekturmanöver für das Verlassen der Linkskurve und zum Teil die Korrekturmanöver für die folgende Rechtskurve. Abbildung 5.9 zeigt das Driftfeld für die  $y$ -Geschwindigkeitsinkremente in diesem Bereich und macht besonders deutlich, in welchen Bereichen eher gegengelenkt wird um der Strecke zu folgen. Die Rechtskurve an sich verhält sich ähnlich zur Linkskurve. Da Segment 7 einen anderen Kurvenradius besitzt als die Segmente 5 und 6, findet man hier ebenfalls ein Korrekturmanöver, das aber deutlich kleiner ausfällt. Das selbe findet man zu Beginn der Einfädelspur. Der Bereich des Einfädelmanövers teilt sich

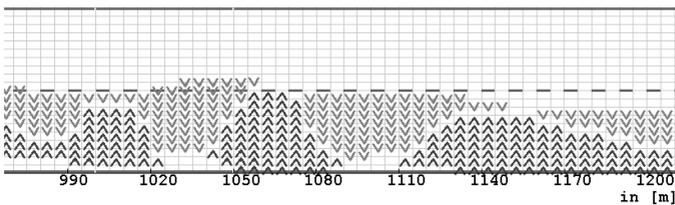


Abbildung 5.9:  $y$ -Komponente der Geschwindigkeitsinkremente ohne Beträge. Man beachte die sich abwechselnden Bereiche von positiven und negativen Werten, die auf Korrekturmanöver zurückzuführen sind.

im wesentlichen auf die zwei Spuren auf. Das Verhalten auf der Einfädelspur ist am Anfang eine einfache Geradeausfahrt mit den üblichen Spurhaltemaßnahmen. Wenn allerdings die ersten Trajektorien die Spur verlassen, kehren sich die Vektorpfeile am oberen Spurrand um und erlauben somit ein Überqueren der Mittellinie. Gegen Ende der Einfädelspur nehmen diese Pfeile die komplette Spur ein und sind am unteren Fahrbahnrand stärker ausgeprägt, da das nahende Ende der Spur eine drastischere Reaktion erforderlich macht. Die Autobahnspur besteht fast nur aus Vektorpfeilen, die die Fahrzeuge wieder parallel zur  $x$ -Achse ausrichten.

Zu Beginn des letzten Elements findet man dann wieder das typische Spurhalteverhalten, das aber kurz darauf durch das notwendige Abbremsen der Fahrzeuge zum Beenden des Versuchslaufs abgelöst

wird. Hierbei weisen die Pfeile vor allem entgegen die Fahrtrichtung, da sie Bremsmanöver darstellen und somit in die negative  $x$ -Richtung weisen. Dies gilt sowohl für die Fahrer, die auf der Autobahnspur bremsen, als auch für die Fahrer, die auf dem Seitenstreifen zum Stehen kommen. Allerdings ist der Bremsweg auf der Autobahnspur deutlich länger.

### 5.5.2 Ausgewählte Klassen beim Nachhereinfädeln

Werfen wir nun noch einen Blick auf ausgewählte Bereiche und Klassen und schauen uns die darin enthaltenen Verteilungen von Vektorpfeilen an. Die vorher behandelten Vektorfelder enthalten immer nur die Mittlung der Vektoren, die sich aus den einzelnen Durchläufen ergeben. Dies führt stellenweise zu Problemen, sollte man nur diese Mittelwerte für das spätere Modell heranziehen. Der Vorteil der Mittlung ist ihre Übersichtlichkeit und die spätere Einfachheit und Kompaktheit des Modells, doch gehen durch sie einige Details verloren, was insbesondere für das Einfädelszenario gilt.

Im folgenden werden Klassen betrachtet, die sich alle in der Region des Einfädelszenarios befinden. Die Klassen A,B,C und D befinden sich auf der Einfädelspur, die Klassen E,F und G auf der Mittellinie und die Klassen H,I und J auf der Autobahnspur (vgl. Abb. 5.10).

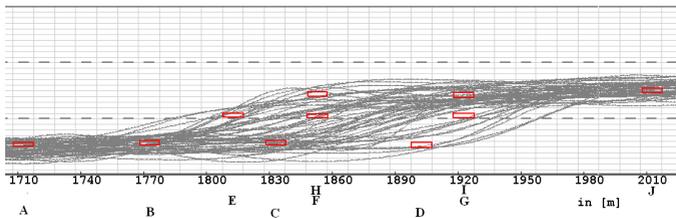


Abbildung 5.10: Die gewählten Klassen und ihre Positionen während des Spurwechsels. Die roten Rechtecke stehen für die betrachteten Klassen und ihre Bezeichner(A-J) sind unter der Abbildung zu finden.

In den folgenden Abbildungen 5.11-5.14 werden immer jeweils paarweise die Orts- und Geschwindigkeitsinkremente einer Klasse gezeigt. Dabei stehen die Pfeile für die Drift  $D^{(1)}$  und die grauen Flä-

chen für die durch die Diffusion  $D^{(2)}$  verursachte Streuung. Aus Darstellungsgründen wird die Diffusion verdoppelt. Die etwas dicker und dunkler gezeichneten Vektorpfeile stehen für die Mittlungen über alle Vektoren, wie sie in den vorherigen Vektorfeldern verwendet wurden.

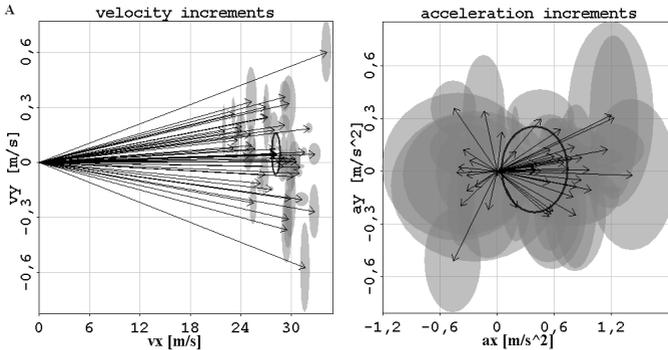


Abbildung 5.11: Die Verteilung der Orts- und Geschwindigkeitsinkremente in der Klasse A auf der Einfädelspur

Der Fall A gibt die Verteilung mitten auf der Einfädelspur wieder. Der Ort liegt am Beginn des Einfädelsegments und gibt im wesentlichen das Verhalten wieder, das auch auf einer Geraden gefunden werden kann. Obwohl die Geschwindigkeitsbegrenzung gerade erst aufgehoben wurde liegen die Geschwindigkeiten zwischen 20 und 34 m/s. Dies bedeutet, dass einige Fahrer bereits deutlich von 22m/s (80km/h) beschleunigt haben. Dies ist besonders deshalb interessant, da zu diesem frühen Zeitpunkt noch nicht viel Zeit vergangen ist, um die Situation auf der Autobahn zu analysieren. Einige Fahrer scheinen also generell zu beschleunigen, ohne überhaupt zu wissen, ob es sich später lohnen wird. Die y-Komponente von  $v_y$  liegt im Bereich zwischen  $\pm 0,6m/s$  was gerade mal 2% des  $v_x$ -Wertes ausmacht. Auffällig ist auch das die Verteilung der  $v_y$ -Werte recht symmetrisch ausfällt, was aber für die Mitte der Spur auch zu erwarten ist. Der Mittelwert liegt hierbei nahezu im Zentrum der Verteilung und repräsentiert damit recht gut das durchschnittliche Verhalten.

Die Beschleunigungsinkremente  $a_x$  bzw.  $a_y$  nehmen Werte im Bereich von  $-0,5m/s^2$  bis  $1,5m/s^2$  für  $a_x$  sowie  $\pm 0,3m/s^2$  für  $a_y$  ein. Die y-Komponente ist wieder sehr symmetrisch um Null, aber die x-

Komponente nicht. Der Grund dafür ist das für den Fall, dass nicht das Gaspedal oder die Bremse betätigt werden, eine Bremsbeschleunigung von bis zu  $-0,4\text{m/s}^2$  aufgrund von Reibung auf das Fahrzeug wirkt. Alle höheren Werte sind dabei auf Beschleunigungsmanöver zurückzuführen, da die Fahrer bereits zu diesem Zeitpunkt versuchen eine höhere Geschwindigkeit für die Autobahn zu erreichen. Die Mittlung gibt in diesem Fall nur eine moderate Beschleunigung, da hier über Fahrer gemittelt wird, die entweder gar nicht aktiv beschleunigen oder aktiv die Geschwindigkeit erhöhen. Trotzdem gibt die Mittlung aber durchaus einen sinnvollen Wert wieder. Auffällig für die Beschleunigungen ist ihre hohe Standardabweichung. Die Fahrer betätigen das Gaspedal recht rasch und dies führt zu einer sehr plötzlichen Änderung der Beschleunigung, was wiederum zu großen Standardabweichungen führen kann. Für das spätere Modell sind diese Werte aber dennoch von Nutzen, da für die numerische Simulation nur das Integral über die Einzelschritte zählt und dieses ist unabhängig vom genauen Weg solange die Mittelwerte identisch ist. Dies bedeutet, dass ein kurzes Wegstück zwischen zwei Punkten zwar in Wirklichkeit aus einer Folge von kurzen Beschleunigungs- und Bremsmanövern besteht, man aber den Weg genauso durch eine stochastisch verrauschte Funktion beschreiben kann. Man wird das Ende des Weges trotzdem nach der selben Zeit mit der richtigen Endgeschwindigkeit erreichen.

Die Klassen B, C und D zeigen, wie sich die Situation auf der Einfädelspur verändert. Die Ortsinkremente, die zuvor noch recht symmetrisch um die x-Achse verteilt waren, bekommen einen immer stärkeren positiven Anteil, was darauf hindeutet, dass mit dem nahenden Ende der Einfädelspur die Zahl der auf ihr verweilenden Fahrer immer weiter abnimmt. Dies wird auch dadurch verdeutlicht, dass die Zahl der Fahrer und damit der Vektorpfeile immer weiter abnimmt. Interessant ist, dass die Geschwindigkeiten sich nicht wesentlich verändern. Es gibt weiterhin Fahrer, die mit relativ geringer Geschwindigkeit von etwa  $22\text{m/s}$  fortfahren, aber es gibt auch Fahrer, die mit deutlich erhöhter Geschwindigkeit von bis zu  $36\text{m/s}$  agieren. Die Mittlungen liegen für die Geschwindigkeiten in x-Richtung in einem guten Bereich. Die y-Komponenten dagegen vergrößern sich fortlaufend. Dies liegt vor allem daran, dass die negativen y-Komponenten wegfallen. Die positive Komponente, die vor allem Fahrer zeigt, die gerade die Spur wechseln, erreichen Werte von  $0,4\text{m/s}$  bis zu  $1,6\text{m/s}$ , was entlang der Spur erstaunlich konstant bleibt. Während die Klassen B und C sowohl Fahrer zeigen, die

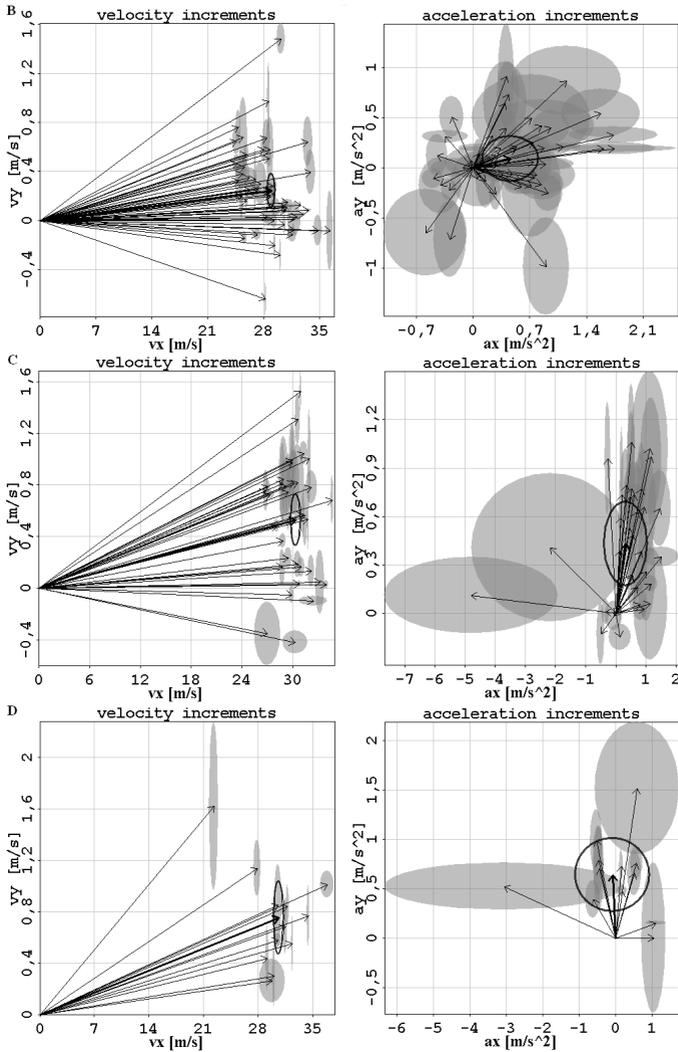


Abbildung 5.12: Die Verteilung der Geschwindigkeits- und Beschleunigungszinkremente in den Klassen B, C und D auf der Einfädelspur

die Spur wechseln als auch Fahrer, die auf der Einfädelspur verweilen,

zeigt die Klasse D nur noch Fahrer, die die Spur wechseln. Die Klasse C zeigt diese beiden Gruppen besonders gut. Während Vektorpfeile mit einer  $y$ -Komponente zwischen  $+/- 0,4m/s$  auf der Einfädelspur verbleiben, so wechseln gerade alle Fahrer mit größeren Werten die Spur. Die Mittlung liegt natürlich genau zwischen diesen beiden Gruppen. Dieses Phänomen kann zu Problemen bei der späteren Simulation führen, da hierdurch die Spur etwa immer am selben Ort gewechselt wird, auch wenn natürlich stochastische Variationen auftreten werden.

Die Beschleunigungswerte liegen in Klasse B immer noch ähnlich wie in Klasse A, doch es sind bereits erste Ausreißer zu höheren Werten in  $x$ - als auch  $y$ -Richtung zu beobachten. Die höheren  $y$ -Komponenten repräsentieren dabei das notwendige Einlenken für einen Spurwechsel, während die größeren  $x$ -Werte auf eine Beschleunigung durch das Betätigen des Gaspedals zurückzuführen sind. Dabei ist zu beobachten, dass diese Beschleunigung während des Spurwechsels stattfindet, und nicht davor. Dies ist daran zu erkennen, dass vor allem die Vektorpfeile länger sind, die eine ausgeprägte  $y$ -Komponente aufweisen. Klasse C zeigt vor allem zwei Fahrer, die stark abbremsen. Dies ist daran zu erkennen, dass die negativen Beschleunigungen in  $x$ -Richtung unterhalb von  $-0,4m/s^2$  liegen. Es ist auch zu erkennen, dass ein größerer Teil der Vektorpfeile große positive  $y$ -Komponenten besitzt, was ein Resultat der häufigeren Spurwechsel und dem damit verbundenen Einlenken ist. Die letzte Klasse D zeigt dagegen nur noch Fahrer, die die Spur wechseln und deshalb einlenken, was zu ausschließlich positiven  $y$ -Komponenten führt. Die Beschleunigung in  $x$ -Richtung ändert sich dagegen nur wenig, so dass keine großen Geschwindigkeitsänderungen stattfinden. Dies liegt wahrscheinlich daran, dass das Fahrzeug auf der Autobahn schon längst vorbei ist und der Fahrer nicht mehr gedrängt wird die Spur möglichst schnell zu wechseln.

Die Klassen E-G zeigen das Verhalten entlang des Mittelstreifens zwischen Einfädelspur und Autobahnspur. Die Geschwindigkeitsinkremente zeigen eine durchschnittliche  $y$ -Komponente von etwa  $0,9m/s$ , die sich auch nicht zu ändern scheint wenn sich das Ende der Einfädelspur nähert. Allerdings zeigen die Verteilungen auch, dass es für den Winkel mit dem die Mittellinie geschnitten wird große Varianzen gibt. Die  $v_y$  reichen von  $0,3m/s$  bis hin zu  $1,8m/s$ . Ebenfalls auffällig ist, dass sich die Geschwindigkeiten nicht wesentlich von den Geschwindigkeiten auf der Einfädelspur unterscheiden. Es gibt Fahrer, die ihre niedrige Geschwindigkeit beibehalten, während andere bei relativ ho-

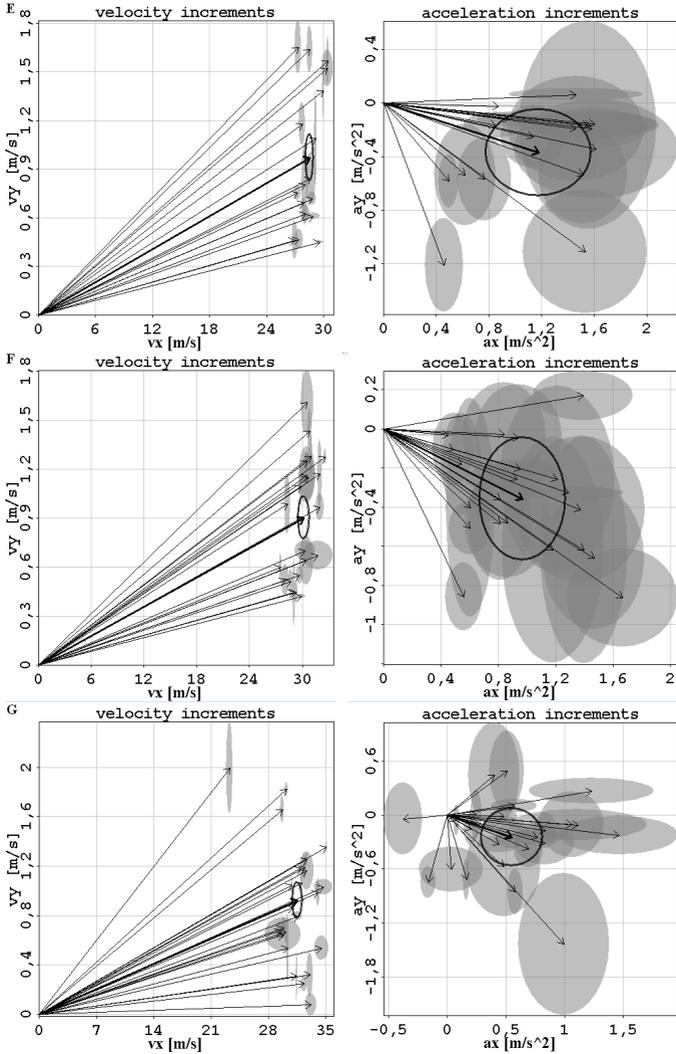


Abbildung 5.13: Die Verteilung der Orts- und Geschwindigkeitsinkremente in den Klassen E, F und G auf der Mittellinie

her Geschwindigkeit verweilen. Allerdings zeigen die Beschleunigung-

gen doch einen entscheidenden Unterschied zum Verhalten auf der Einfädelspur. Fast alle Fahrer benutzen jetzt das Gaspedal, was dazu führt, dass es keine negativen Beschleunigungskomponenten in x-Richtung mehr gibt. Auffällig ist auch die Richtung der Beschleunigungsinkremente. Sie besitzen überwiegend eine negative y-Komponente, was bedeutet, dass bereits das Gegenlenken eingesetzt hat, um das Fahrzeug wieder parallel zur Autobahnspur auszurichten. Die Mittlungen sowohl bei den Ortsinkrementen als auch bei den Geschwindigkeitsinkrementen geben hier durchweg gute mittlere Verhaltensweisen wieder.

Die Klassen H-J befinden sich auf der Autobahnspur und dokumentieren somit das Verhalten am Ende oder nach dem Spurwechsel. Die Klasse H besitzt immer noch ein leicht positives mittleres y-Ortsinkrement, aber diese Komponente ist bereits deutlich schwächer als noch an der Mittellinie. Trotzdem fällt auf, dass in allen drei Klassen H-J die positive y-Komponente leicht überwiegt, was vielleicht auf eine leichte Überreaktion beim Spurwechsel hindeutet, welche die Fahrzeuge etwas über die Spurmitte hinauschießen lässt. Dieser Effekt schwächt sich allerdings immer mehr ab. Die Geschwindigkeiten der Fahrer sind leicht im Vergleich zur Einfädelspur erhöht. Während in H die Geschwindigkeiten etwa  $30\text{m/s}$  betragen, erreichen sie in J bereits bis zu  $37\text{m/s}$ . Auffällig ist auch, dass die Streuung der x-Komponenten zunimmt. Der Mittelwert liegt aber dennoch etwa bei  $30\text{m/s}$ , was der durchschnittlichen Geschwindigkeit des vorausfahrenden Fahrzeugs entspricht. Vermutlich schränkt dies die Wahl der Geschwindigkeit nach oben hin ein.

Die Geschwindigkeitsinkremente zeigen in H noch ein ähnliches Verhalten wie am Mittelstreifen. Es gibt überwiegend negative y-Komponenten um das Fahrzeug parallel zur Spur auszurichten. Allerdings fällt hier auch auf, dass es ausschließlich positive x-Komponenten gibt, die auf ein weiteres Beschleunigen hindeuten. Die Klassen I und J zeigen dagegen, wie sich die Situation immer mehr dem Verhalten in Klasse A annähert, nur dass dies hier bei geringfügig höherer Geschwindigkeit stattfindet. Es gibt vermehrt positive und negative y-Komponenten, wie es für das Spurhalten typisch ist. Auch die negativen Beschleunigungsinkremente bei  $-0,4\text{m/s}^2$  sind zurück, was bedeutet, dass nicht mehr alle Fahrer auf das Gaspedal treten, sondern bereits ihre Reisegeschwindigkeit für die Autobahn erreicht haben und somit versuchen ihre Geschwindigkeit zu halten. Dies wird auch durch die Mittlungen deutlich, die von H-J immer kleiner ausfallen.

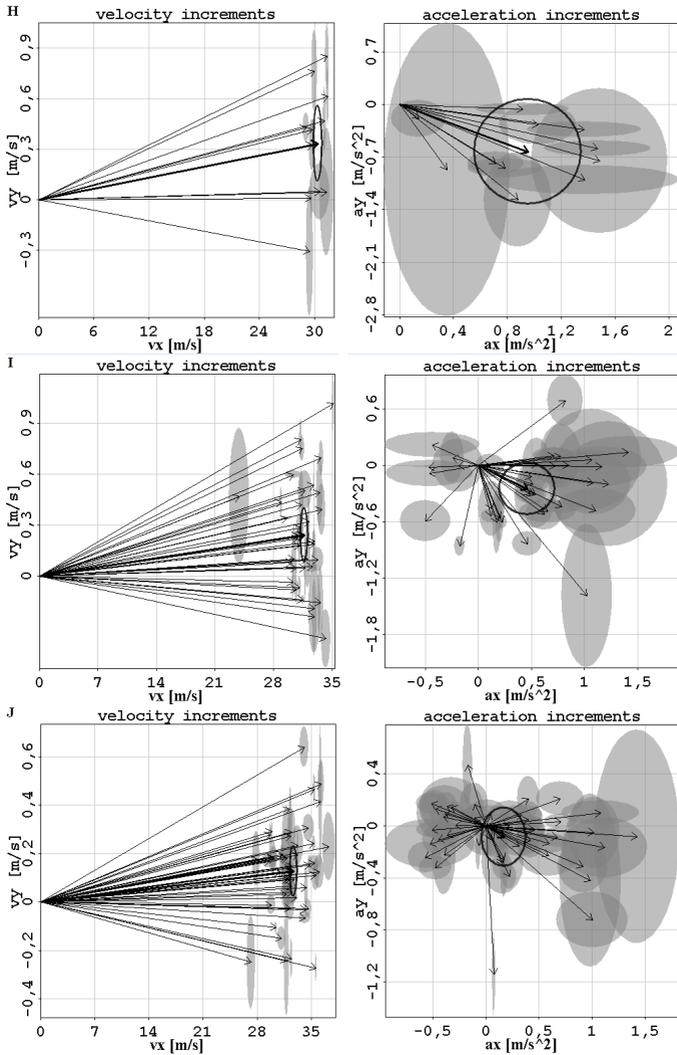


Abbildung 5.14: Die Verteilung der Orts- und Geschwindigkeitsinkremente in den Klassen H, I und J auf der Autobahnspur

### 5.5.3 Vektorfelder beim Vorhereinfädeln

Als nächstes soll ein Datensatz vorgestellt werden, der aus Vorhereinfädern besteht (Abb. 5.15). Dafür wird der Datensatz mit Ortsdifferenz 40m und Geschwindigkeitsdifferenz 20km/h gewählt. Da der Rest der Strecke identisch mit dem vorhergehenden Szenario ist, soll hier nur auf das Einfädelszenario eingegangen werden.

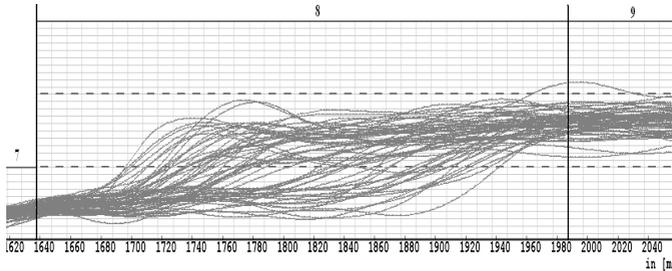


Abbildung 5.15: Das Einfädelszenario bestehend aus Vorhereinfädern

Auffällig ist, dass die Trajektorien über einen größeren Bereich verteilt sind als beim Nachhereinfädeln. Der Fahrspurwechsel findet ganze 100m früher statt. Dies entspricht einer Zeit von etwa 3-5 Sekunden, je nach Geschwindigkeit der Fahrer. Das bedeutet auch, dass die Situation zu diesem frühen Zeitpunkt bereits vollständig erfasst wurde und somit bereits sehr früh die Entscheidung für den frühen Spurwechsel erfolgt. Da der Einblick auf die Autobahn erst zu Beginn der Einfädelspur möglich ist, bleiben hier etwa 50m um die Situation richtig einzuschätzen. Dies entspricht einem Zeitraum zwischen 1.5 bis 2.5 Sekunden, gerade genug Zeit für einen Schulterblick oder einen Blick in den Rückspiegel. Es ist wohl anzunehmen, dass diese kurze Zeit nur ausreicht, weil das Fremdfahrzeug auf der Autobahn noch recht weit weg ist und sich auch nur um maximal 5.6m pro Sekunde nähert.

Abbildung 5.16 zeigt die mittleren Ortsinkremente. Verglichen mit dem nachher Einfädeln fällt hier auf, dass neben dem früheren Spurwechsel auch stärker übersteuert wird. Es gibt sogar Trajektorien, die über die erste Autobahnspur hinausreichen.

Abbildung 5.17 zeigt die mittleren Beschleunigungsinkremente. Wie beim Nachhereinfädeln teilt sich das Vektorfeld in einen Bereich mit positiver y-Komponente, der Einfädelspur, sowie einen mit nega-

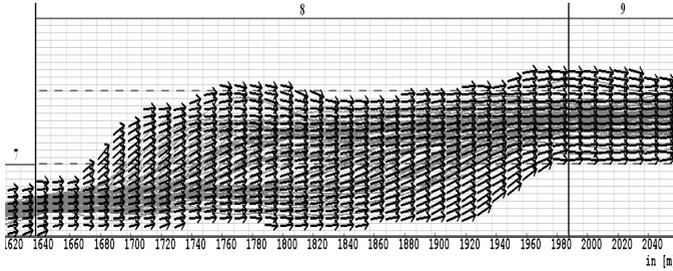


Abbildung 5.16: Das Vektorfeld abgeleitet von den Ortskoordinaten bestehend aus Vorhereinfädern

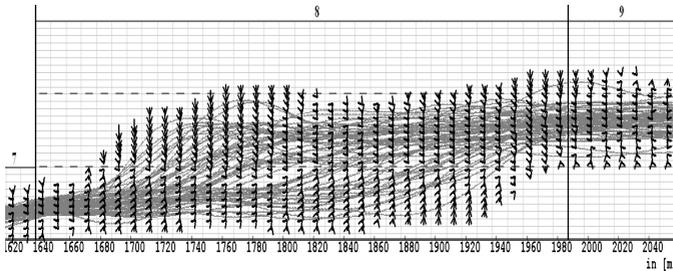


Abbildung 5.17: Das Vektorfeld abgeleitet von den Geschwindigkeitsdaten beim Vorhereinfädern

tiver y-Komponente auf der Autobahnspur, auf. Durch das Übersteuern beim Spurwechsel tauchen im oberen Bereich der Autobahnspur entsprechend starke negative y-Komponenten auf. Die x-Komponenten sind für das komplette Segment immer positiv, was bedeutet, dass so gut wie kein Fahrer abbremst oder auch nur versucht, seine Geschwindigkeit zu halten. Im folgenden werden ausgewählte Klassen gezeigt, die das Verhalten der Fahrer genauer beleuchten sollen.

### 5.5.4 Ausgewählte Klassen beim Vorhereinfädern

Im Folgenden werden einige ausgewählte Klassen hinsichtlich der Verteilung der Ortsinkremente und Geschwindigkeitsinkremente gezeigt. Es wird weiterhin der Datensatz mit einer Ortsdifferenz von 40m und einer Geschwindigkeitsdifferenz von 20km/h verwendet. Abbildung 5.18

zeigt wieder die Position der gewählten Klassen an.

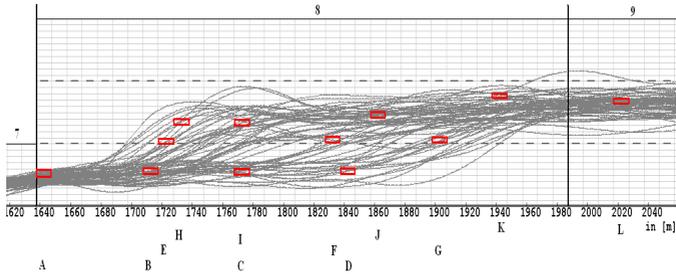


Abbildung 5.18: Die gewählten Klassen und ihre Positionen während des Spurwechsels. Die roten Rechtecke stehen für die betrachteten Klassen und ihre Bezeichner(A-L) sind unter der Abbildung zu finden.

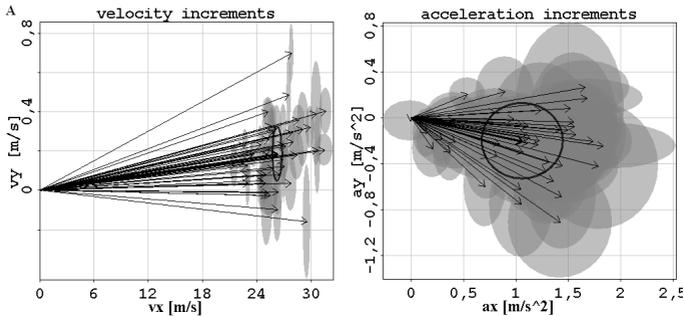


Abbildung 5.19: Die Verteilung der Orts- und Geschwindigkeitsinkremente in der Klasse A auf der Einfädelspur

Klasse A (Abb. 5.19) ist hinsichtlich der Position vergleichbar mit der Klasse A beim Nachhereinfädeln. Doch der Inhalt ist dennoch sehr unterschiedlich. Dies hat mehrere Gründe. Da, wie bereits erwähnt, der Spurwechsel beim Vorhereinfädeln erheblich früher stattfinden kann, vergeht kaum Zeit zwischen dem Verlassen der Kurve, die die Fahrer zur Einfädelspur bringt und dem folgenden Spurwechsel. Deshalb entfällt die Phase des Geschwindigkeits- und Spurhaltens auf der Einfädelspur völlig. Die Ortsinkremente liegen zwischen 20m/s und 32m/s. Damit liegen die meisten Werte oberhalb der vorhergehenden Geschwin-

digkeitsbegrenzung von 22m/s. Es wird bereits zu diesem sehr frühen Zeitpunkt beschleunigt, was auch den Geschwindigkeitsinkrementen zu entnehmen ist. Die Geschwindigkeitsinkremente sind durchweg positiv und erreichen Werte von bis zu 2m/s. Auch hier wird also vor allem versucht, eine für die Autobahn benötigte höhere Geschwindigkeit zu erreichen, ohne dass die Situation auf der Autobahn bekannt ist. Die Ortsinkremente besitzen eine etwas mehr positive als negative y-Komponente und die Geschwindigkeitsinkremente eher eine negative y-Komponente. Dies ist noch ein Resultat des Übersteuerns beim Verlassen der letzten Kurve. Es zeigt, dass die Fahrzeuge etwas Übersteuern, aber die Fahrer lenken bereits gegen, was die negativen y-Geschwindigkeitsinkremente hervorruft. Ein ähnliches Verhalten lässt sich nach jeder Kurve finden.

Die Klassen B-D in Abbildung 5.20 zeigen wieder das Verhalten entlang der Einfädelspur. Die Ortsinkremente sehen denen vom Vorhereinfädeln sehr ähnlich. Allerdings finden die Spurwechsel früher und über einen längeren Bereich statt. Werte der y-Komponente zwischen  $+/- 0,4m/s$  entsprechen dem normalen Spurhalten. Die Klassen B-D enthalten mit wachsender x-Position immer weniger Trajektorien, die auf der Spur verbleiben. In Klasse B sind die meisten Fahrer zu sehen, die einen Spurwechsel durchführen, doch ihre Zahl nimmt in C und D immer weiter ab. Dies bedeutet, dass die meisten Fahrer die Spur eher früher als später wechseln. Die Geschwindigkeiten sind in Klasse A sehr stark in x-Richtung gestreut, doch in C und D nimmt diese Streuung immer weiter ab. Anfangs reicht der Bereich von 24m/s bis hinauf zu 36m/s, doch in späteren Klassen fahren fast alle Fahrer mit über 30m/s. Es wird auf der Einfädelspur also fast nur beschleunigt. Dieses Verhalten wird durch die Geschwindigkeitsinkremente bestätigt. Es sind keine Bremsmanöver auf der Einfädelspur zu finden, was ein deutlicher Unterschied zum Nachhereinfädeln darstellt. Nicht einmal die  $-0,4m/s^2$ , für den Fall dass weder gebremst noch beschleunigt wird, sind zu finden. In allen drei Klassen ist ein leichter positiver y-Anteil zu finden. Dieser Anteil wird durch die Spurwechsel und das damit verbundene Einlenken hervorgerufen. Die Mittelungen für Ortsinkremente und Geschwindigkeitsinkremente liegen immer in sinnvollen Bereichen und verursachen damit keine größeren Probleme bei der späteren Modellierung.

Die Klassen entlang der Mittellinie (Abb. 5.21) zeigen ebenfalls Unterschiede zum Nachhereinfädeln. Abgesehen vom früheren Zeitpunkt des Spurwechsel, so lassen sich die Fahrer auch mehr Zeit um

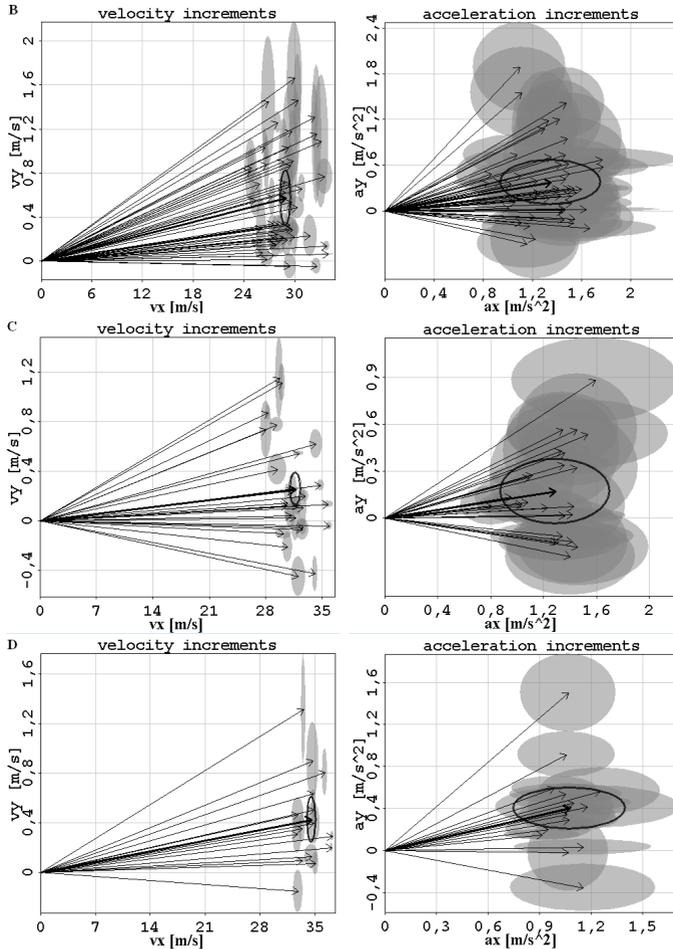


Abbildung 5.20: Die Verteilung der Orts- und Geschwindigkeitsinkremente in den Klassen B, C und D auf der Einfädelspur

den Spurwechsel durchzuführen. Klasse E ist recht ähnlich zum Nchhe-reinfädeln, doch die Klassen F und G zeigen auch Ortsinkremente mit sehr geringer oder sogar negativer y-Komponente. Dies ist nur schwer zu erklären. Ein genauer Blick auf die Trajektorien in Abbildung 5.18 enthüllt einige Trajektorien, die als Resultat eines früheren übersteu-

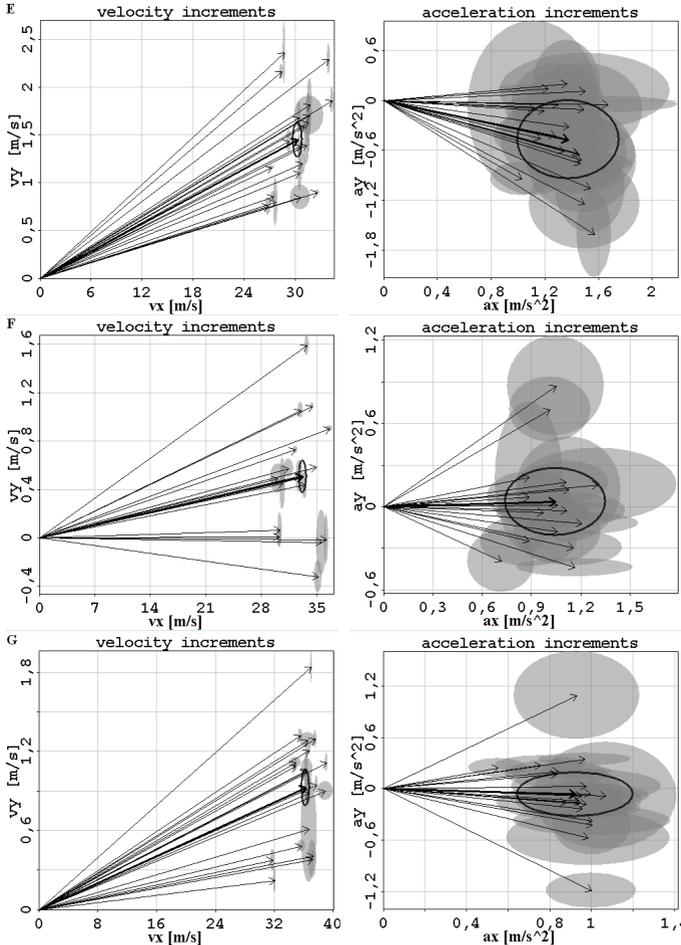


Abbildung 5.21: Die Verteilung der Orts- und Geschwindigkeitsinkremente in den Klassen E, F und G auf der Mittellinie

erten Spurwechsels sich von der Autobahnspur wieder der Mittellinie nähern. Diese Trajektorien gehören also nicht zu einem aktuellen Spurwechsel, sondern zu einem starken Korrekturmanöver nach einem früher stattgefundenen Spurwechsel. Die Geschwindigkeiten an sich entwickeln sich hier parallel zur Einfädelspur und steigen somit weiter an.

Die Mittlungen für die Ortsinkremente zeigen davon allerdings nicht sehr viel. Trotzdem stellen sie durchaus gültige Vektoren dar, nur die Variationen können nur unvollkommen durch die Mittlung allein wiedergegeben werden. Die Geschwindigkeitsinkremente in Klasse E sind denen beim nachher Einfädeln sehr ähnlich. Sie enthält vor allem negative  $y$ -Komponenten, um das Fahrzeug wieder parallel zur Fahrbahn auszurichten. Die Klassen F und G dagegen enthalten ebenfalls diese negativen  $y$ -Komponenten, allerdings auch positive. Dies führt dazu, dass die Verteilung der Beschleunigungsinkremente eher an das Spurhalten als an einen Spurwechsel erinnern. Dies ist eine Folge der schon erwähnten fehlerhaften Spurwechsel und den folgenden Korrekturmaßnahmen. Die meisten Geschwindigkeitsinkremente haben allerdings, wie beim nachher Einfädeln, negative  $y$ -Komponenten, und dienen somit dazu das Fahrzeug wieder parallel zur Fahrspur auszurichten. Auch hier sind nur positive  $x$ -Komponenten zu finden, was bedeutet, dass auch während des Spurwechsels weiter beschleunigt wird. Die mittleren Geschwindigkeitsinkremente geben hier wieder recht gut ein etwa durchschnittliches Verhalten wieder.

Die folgenden Klassen liegen alle auf der Autobahnspur (Abb. 5.22). Die Klasse H besitzt überwiegend positive  $y$ -Komponenten für die Ortsinkremente. Dies ist auf ein zu starkes Einlenken für den Spurwechsel zurückzuführen. Die zugehörigen Geschwindigkeitsinkremente in  $y$ -Richtung sind dagegen überwiegend negativ und sehr hoch. Dies bedeutet, dass recht stark eingelenkt wird, um doch noch das Fahrzeug parallel zur Spur auszurichten. Das Übersteuern scheint besonders dann aufzutreten, wenn die Spur sehr früh und schnell gewechselt wird. Die Klasse I ist recht ähnlich aufgebaut wie die vorhergehende, jedoch wird nicht ganz so stark übersteuert. Einige wenige Fahrer haben hier bereits das Fahrzeug parallel ausgerichtet und ihre Inkremente besitzen nur noch kleine  $y$ -Komponenten. Alle anderen müssen weiter gegenlenken, um auf der Spur zu bleiben. In der Klasse K dagegen tauchen vermehrt Werte mit geringen  $y$ -Komponenten auf, was darauf hindeutet, dass die meisten bereits erfolgreich eingefädelt haben. Die Geschwindigkeiten der Fahrzeuge nehmen parallel zu den vorhergehenden Spuren weiter zu. Auch hier sind keine Bremsmanöver zu finden, da alle Fahrer versuchen weiter ihre Geschwindigkeiten zu erhöhen. Die Mittlungen geben für diesen Bereich recht sinnvolle Ergebnisse.

Die letzten beiden Klassen K und L (Abb. 5.23) sollen das Verhalten nach abgeschlossenem Spurwechsel zeigen. Während in K noch einige

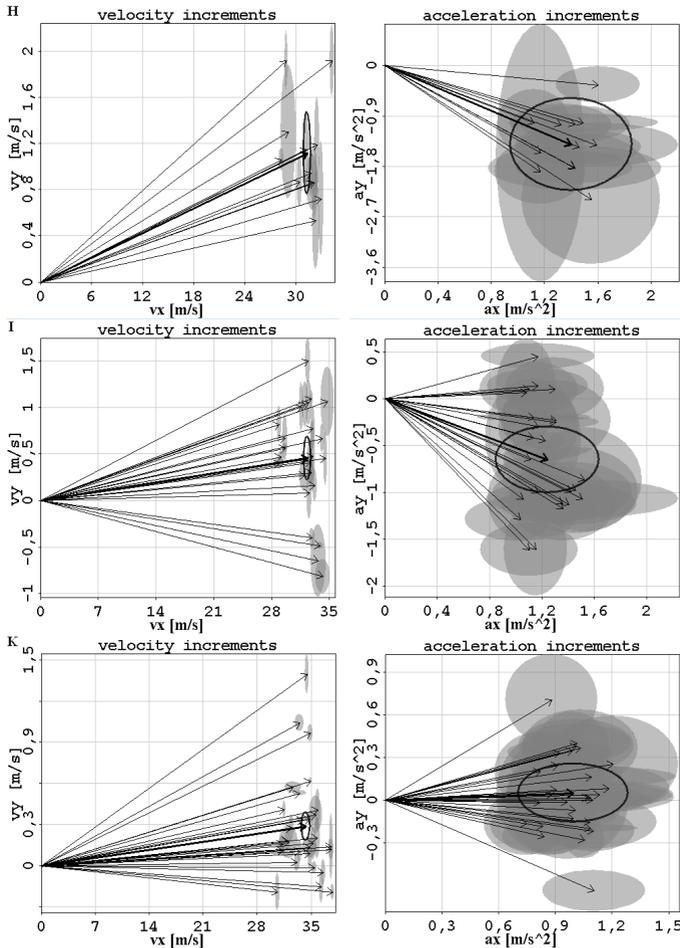


Abbildung 5.22: Die Verteilung der Orts- und Geschwindigkeitsinkremente in den Klassen H, I und J auf der Autobahnspur

wenige Fahrer versuchen das Fahrzeug parallel zur Spur auszurichten, zeigen die Beschleunigungen doch erste negative Werte. Diese liegen um  $-0,4\text{m/s}^2$ , und sind somit nur darauf zurückzuführen, dass das Gaspedal nicht mehr betätigt wird. Die Klasse L dagegen zeigt das normale Spurhalteverhalten. Die y-Komponenten der Geschwindigkeiten liegen

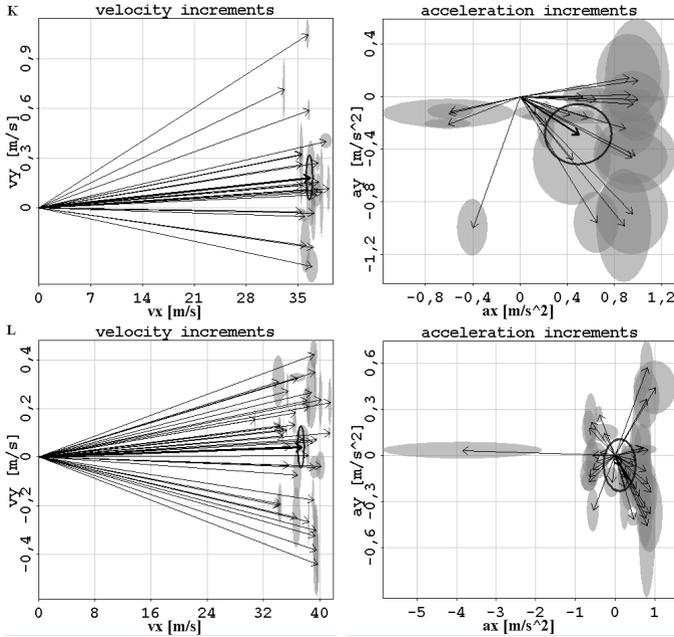


Abbildung 5.23: Die Verteilung der Orts- und Geschwindigkeitsinkremente in den Klassen K und L auf der Autobahnspur

alle in einem Bereich von etwa  $\pm 0,4 \text{ m/s}$  und liegen somit im Rahmen normaler Spurhaltemaßnahmen. Die Geschwindigkeiten erreichen hier allerdings bereits Werte von bis zu  $34 \text{ m/s}$  bis  $43 \text{ m/s}$ , was auf die durchgängige Beschleunigung während des Einfädels zurückzuführen ist. Diese Endgeschwindigkeiten liegen auch deutlich höher als beim Nachhereinfädeln, da es nun kein vorausfahrendes Fahrzeug mehr gibt. Die Geschwindigkeitsinkremente untermauern, dass der Spurwechsel und das Einfädeln auf die Autobahn abgeschlossen sind, da die Fahrer nicht mehr weiter beschleunigen um an Geschwindigkeit zu gewinnen, sondern nur noch um ihre Endgeschwindigkeit zu erhalten. Dies wird durch das häufigere Auftreten des Wertes von  $-0,4 \text{ m/s}^2$  sowie den durchweg geringer ausfallenden Beschleunigungswerten von weniger als  $1 \text{ m/s}^2$  untermauert.

## 5.6 Monte Carlo Simulationen

Die stochastischen Vektorfelder, welche im vorhergehenden Kapitel behandelt wurden, bilden die Basis für das Langevin Modell. Die einzelnen Werte für Drift und Diffusion müssen nun nur noch in die Langevin-Gleichung eingesetzt werden, um eine Monte-Carlo Simulation durchführen zu können. Hierbei bieten sich unterschiedliche Methoden an:

### 5.6.1 Methode A - Verwenden der Mittelwerte der Ortsinkremente in jeder Klasse

Im einfachsten Fall wählt man zuerst die Start-Werte  $x(0)$  sowie  $y(0)$  für die räumlichen Koordinaten  $x(t)$  und  $y(t)$ . Anschließend bestimmt man die nächsten Werte  $x(0 + \tau)$  und  $y(0 + \tau)$  indem man die Langevin-Gleichungen 5.4 und 5.5 verwendet. Dazu müssen nur die mittleren Werte für Drift  $D^{(1)}(X, Y)$  und Diffusion  $D^{(2)}(X, Y)$  verwendet werden, die im vorigen Kapitel durch die dicken Vektorpfeile und schwarzen Kreise dargestellt wurden.  $X$  und  $Y$  definieren dabei die Klasse zu der der Punkt  $x(0), y(0)$  gehört. Für  $\Gamma(t)$  müssen dann noch normal verteilte Zufallszahlen eingesetzt werden. Das auf diese Weise erhaltene Ergebnis der Langevin-Gleichungen stellt nun den neuen Zustand des Systems dar. Dieser Zustand kann nun wieder in die Langevin-Gleichung eingesetzt werden, um den nächsten Punkt zu erhalten. Auf diesem Wege ist es nun möglich, Punkt für Punkt eine neue Trajektorie zu generieren (siehe 5.24). Der Vorteil dieser Methode ist, dass nur jeweils vier

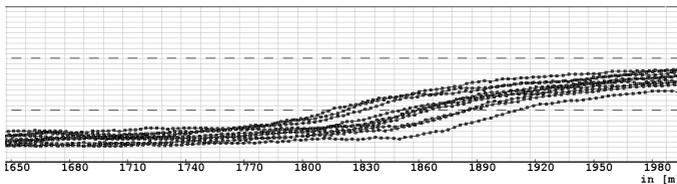


Abbildung 5.24: Rekonstruierte Trajektorien generiert nach Methode A

Zahlenwerte pro Klasse benötigt werden, nämlich  $D_x^{(1)}$ ,  $D_x^{(2)}$ ,  $D_y^{(1)}$  und  $D_y^{(2)}$ . Dies wirkt sich auch positiv auf die Geschwindigkeit aus, mit der neue Trajektorien gebildet werden können.

Allerdings bringt diese Methode auch Nachteile mit sich. Durch

die Verwendung von mittleren Drift und Diffusionskoeffizienten leidet die Variabilität deutlich (siehe 5.25) und es ist nicht möglich Vorher- und Nachhereinfädler miteinander zu mischen. Gravierender ist allerdings noch, dass die durch diese Methode generierten Geschwindigkeiten nicht sehr realistisch sind (siehe 5.26). Zwar liegen alle Werte an sich in einem gültigen Bereich, doch die Geschwindigkeitsverläufe sind stark verrauscht, was auf die verwendeten Zufallszahlen zurückzuführen ist.

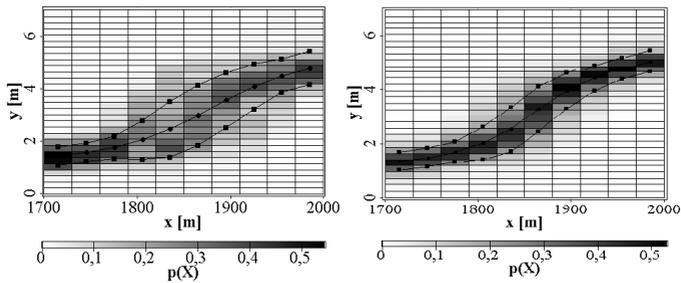


Abbildung 5.25: Die Original PDF(links) des Spurwechsels verglichen mit der nach Methode A generierten PDF(rechts)

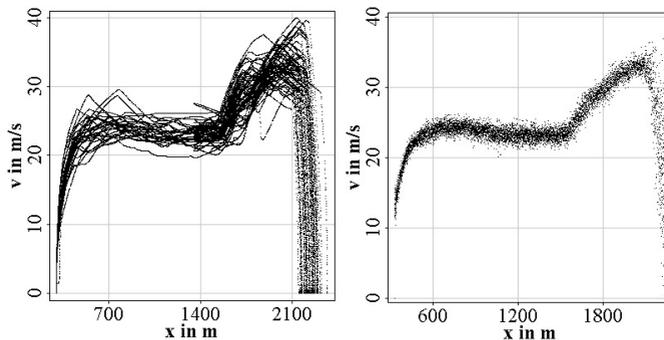


Abbildung 5.26: Geschwindigkeitsverhalten entlang der Gesamtstrecke im Original(links) und in der Rekonstruktion(rechts)

### 5.6.2 Methode B - Verwenden der Mittelwerte für Ort und Geschwindigkeiten

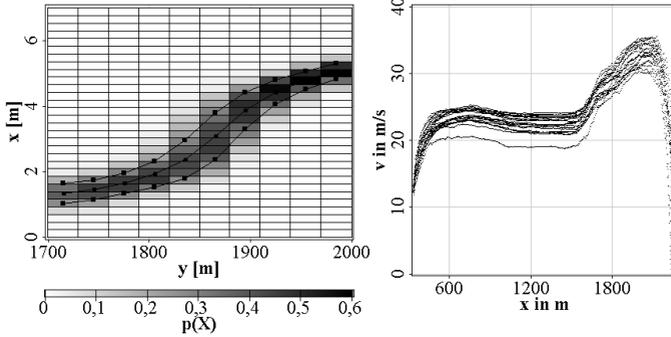


Abbildung 5.27: PDF der Trajektorienverteilung beim Spurwechsel(links) sowie das rekonstruierte Geschwindigkeitsverhalten entlang der Strecke(rechts) bei Verwendung von Methode B

Um zumindest das Problem mit den verrauschten Geschwindigkeiten zu lösen, wird zusätzlich zu den Gleichungen 5.4 und 5.5 ein Langevin-Modell für die Geschwindigkeit genutzt, das aus den Gleichungen 5.6 und 5.7 besteht. Da diese Gleichungen auf die selben Klassen bedingen wie die Gleichungen 5.4 und 5.5 wird sichergestellt, dass die Geschwindigkeit immer am richtigen Ort erhöht oder verringert wird. Die von beiden Langevin-Modellen erzeugten Orte und Geschwindigkeiten werden anschließend miteinander verbunden, indem das im Ortsraum angelegte Modell genutzt wird um die Richtung  $\alpha$  des Fahrzeugs festzulegen, das Geschwindigkeitsmodell allerdings nur für die Länge, also die Geschwindigkeit  $v$ , des aktuellen Simulationsschrittes. Dies wird durch folgende Gleichungen gewährleistet:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \tag{5.8}$$

$$\alpha = atan2(y,x) \tag{5.9}$$

$$x(t + \tau) = x(t) + v\tau cos(\alpha) \tag{5.10}$$

$$y(t + \tau) = y(t) + v\tau sin(\alpha) \tag{5.11}$$

Dabei ist atan2 Arcus-Tangens Funktion, die auch die Vorzeichen der Komponenten korrekt berücksichtigt, so dass für  $\alpha$  Werte von  $-\pi$  bis  $\pi$  möglich sind. Wichtig hierbei ist, dass diese Gleichungen nach der Erstellung der Trajektorien auf diese Weise bearbeitet werden. Geschieht dies während der Generierung, so wird die sowieso schon geringe Variabilität noch deutlich mehr verringert. Insgesamt hat diese Methode die Eigenschaft eines Filters und glättet somit das Verhalten. Dieses Vorgehen ändert an der räumlichen Verteilung der Trajektorien nichts (vgl. 5.27(links)), doch die Geschwindigkeiten dieser Trajektorien sind nun stetiger (vgl. 5.27(rechts)). Allerdings bemerkt man auch einen Stapeleffekt (die Verläufe können einander nicht kreuzen) der Geschwindigkeitsverläufe, der immer noch unrealistisch ist. Trotzdem kann diese Vorgehensweise empfohlen werden, da für sie nur acht Werte ( $D_x^{(1)}$ ,  $D_x^{(2)}$ ,  $D_y^{(1)}$ ,  $D_y^{(2)}$ ,  $D_{v_x}^{(1)}$ ,  $D_{v_x}^{(2)}$ ,  $D_{v_y}^{(1)}$  und  $D_{v_y}^{(2)}$ ) pro Klasse verwendet werden müssen.

### 5.6.3 Methode C - Verwenden aller möglichen Verhaltensweisen für Ort und Geschwindigkeiten

Will man die Qualität der rekonstruierten Trajektorien weiter verbessern, so müssen mehr Informationen aus den einzelnen Klassen geholt werden. Dazu soll hier auf die Mittlung in der Verteilung der Drift und Diffusionskoeffizienten verzichtet werden, und stattdessen verwendet man eine Liste mit allen für eine Klasse möglichen Koeffizienten ( $D_{x,k}^{(1)}$ ,  $D_{y,k}^{(1)}$  sowie  $D_{x,k}^{(2)}$ ,  $D_{y,k}^{(2)}$  vgl. Abbildung 5.5). Dabei soll jede Trajektorie genau eine Verhaltensmöglichkeit erlauben. Wird eine Klasse somit von beispielsweise fünf Trajektorien durchlaufen ( $k=1\dots 5$ ), so gibt dies eine Liste mit fünf Paaren von Drift- und Diffusionskoeffizienten für jeweils x und y. Berücksichtigt man noch das Geschwindigkeitsmodell, so verdoppelt sich diese Anzahl noch einmal, da man zwei Modelle benötigt.

Die Frage ist nun, welche der Möglichkeiten in der Liste soll ausgewählt werden und wie? Im Idealfall würde man nun die in der Liste enthaltenen Werte wiederum in Klassen einteilen und sich dabei mit jedem Simulationsschritt durch diese Subklassen bewegen. Leider benötigt man dafür aber hinreichend lange Listen von Werten, was wiederum eine Menge Trajektorien erfordern würde, die diese Klasse

kreuzen. Bei sehr großen Datenmengen ist diese Vorgehensweise sogar zu empfehlen, da dadurch die Länge der Liste auf die Anzahl der Subklassen begrenzt würde, doch im vorliegenden Fall muss, aufgrund der geringen Anzahl an Trajektorien, eine andere Methode gewählt werden.

Anstelle von Klassen wird eine Abstandsmetrik verwendet. Dazu wird der vorhergehende Schritt der Simulation verwendet um den ähnlichsten für den nächsten Schritt auszuwählen. Dabei umfasst der vorhergehende Schritt nicht nur die Drift, sondern auch den Diffusionsanteil (abhängig von der gewählten Zufallszahl). Dies sollte gewährleisten, dass das generierte Verhalten nicht plötzlich in ein völlig anderes umschlagen kann und somit die Trajektorien relativ stetig verlaufen. Gleichzeitig wird durch den Diffusionsanteil ein Wechsel zwischen Verhaltensweisen möglich, sofern diese, abhängig von der Diffusion, nur ähnlich genug zum vorhergehenden Schritt sind.

Das Abstandsmaß lautet:

$$dr = \sqrt{(dx(t - \tau) - \tau D_{x,k}^{(1)})^2 + (dy(t - \tau) - \tau D_{y,k}^{(1)})^2} \quad (5.12)$$

$$dv = \sqrt{(dv_x(t - \tau) - \tau D_{vx,k}^{(1)})^2 + (dv_y(t - \tau) - \tau D_{vy,k}^{(1)})^2} \quad (5.13)$$

Dabei stehen  $dr$  und  $dv$  für die zu minimierenden Abstandsmaße.  $dx$ ,  $dy$  sowie  $dv_x$  und  $dv_y$  stehen für die Schrittweite im vorhergehenden Schritt. Es wird nur der Driftkoeffizient auf diese Weise ausgewählt, ungeachtet der Diffusion. Der Wert  $i$  steht dabei für die Listenposition, und reicht von 1 bis zur maximalen Anzahl der Trajektorien in der Klasse.

Ansonsten werden die Trajektorien generiert wie in Methode B.

Das Ergebnis einer solchen Rekonstruktion liegt wesentlich näher am Original als bei einer der anderen Methoden. Bedenkt man die drastisch vergrößerte Menge an Werten, die in dieser Methode verwendet wird, könnte man annehmen, dass es nur möglich ist Kopien des Originaldatensatzes zu erzeugen, doch dies ist falsch. Abbildung 5.28 zeigt ein Beispiel für den Spurwechsel, wobei alle generierten Trajektorien dem selben Startvektor (Ort und Geschwindigkeit) entspringen. Es ist

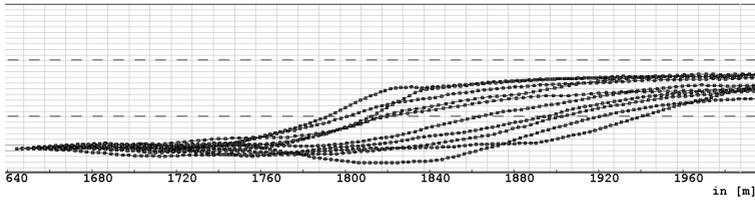


Abbildung 5.28: 10 Trajektorien generiert mit Methode C. Alle Trajektorien teilen den selben Anfangszustand.

deutlich zu erkennen, dass die generierten Trajektorien sehr schnell diffundieren und somit immer wieder neue Kombinationen aus den Modelldaten generieren ohne bloße Kopien zu erzeugen. Auch die PDF (Abb. 5.29 links) zeigt eine viel bessere Übereinstimmung mit der Original PDF inklusive des Spektrums an Variationen. Die Geschwindigkeiten (Abb. 5.29 rechts) sind wieder stetig, da Methode C B beinhaltet. Auch der bei Methode B beobachtete Stapel-effekt hat sich deutlich verringert.

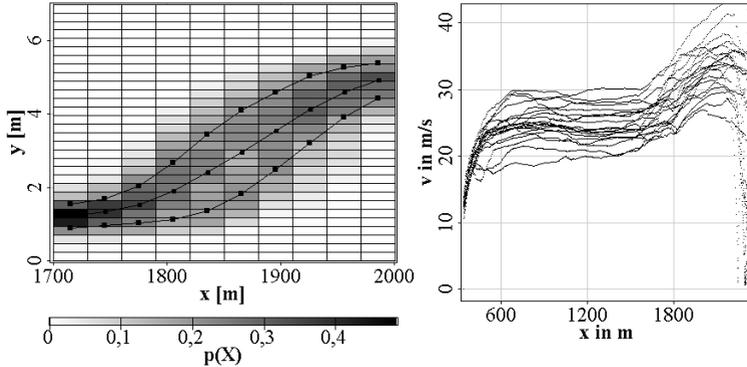


Abbildung 5.29: PDF der Trajektorienverteilung beim Spurwechsel (links) sowie das rekonstruierte Geschwindigkeitsverhalten entlang der Strecke (rechts) bei Verwendung von Methode C.

Obwohl für Methode C viele Daten nötig sind, und das Modell um einiges größer ist, so ist das Ergebnis entsprechend gut. Es handelt sich vielleicht nicht um eine effiziente Methode, aber trotzdem ist es die bes-

te Wahl um möglichst qualitativ gute Trajektorien zu erhalten und die Daten somit in ein lauffähiges Model umzuwandeln.

### 5.6.4 Modellierung von unterschiedlichen Verhaltensweisen - Vorher- und Nachhereinfädler

Bisher wurden die Daten, bevor die Modelle erstellt wurden, immer in Vorher- und Nachhereinfädler aufgeteilt. Für jeden Fall an sich liefern alle Methode auch sinnvolle Modelle, doch dies ändert sich völlig, wenn man Vorher- und Nachhereinfädler nicht voneinander trennt. Obwohl es im vorliegenden Fall sehr einfach ist beide Gruppen voneinander zu trennen, so könnte man sich auch leicht vorstellen, dass es noch versteckte Fallunterschiede gibt, die vielleicht übersehen wurden. Die Frage lautet, was passiert in einem solchen Fall?

Um diese Frage zu beantworten sehen wir uns das Ergebnis eines Modellierungsversuchs an, bei dem bewusst die Daten nicht vorher voneinander getrennt wurden. Ein geeignetes Szenario tritt bei einer Geschwindigkeitsdifferenz von 30km/h sowie einem Abstand von 40m ein, da wir in diesem Fall 53% Nachhereinfädler haben und 47% Vorhereinfädler. Der zugehörige Datensatz ist in Abbildung 5.30 zu sehen. Bestimmt man nun die Drift und Diffusionskoeffizienten und generiert

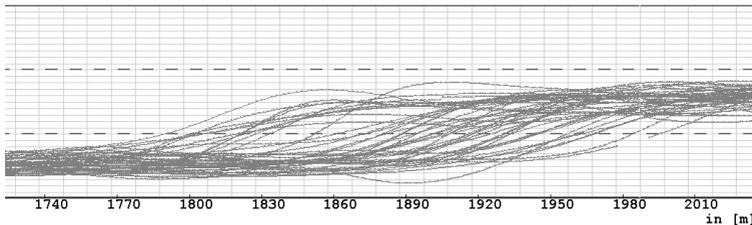


Abbildung 5.30: Datensatz mit Geschwindigkeitsdifferenz 30km/h und 40m Fahrzeugabstand. Dieser Datensatz besitzt 53% Nachhereinfädler und 47% Vorhereinfädler.

Trajektorien mittels Methode B, so fällt das Ergebnis bescheiden aus (siehe 5.31). Es fällt zum einen auf, dass die Variabilität sich weiter verringert hat, wobei die Originaldaten doch eigentlich eine größere Vielfalt vermuten lassen. Dies liegt daran, dass bei den Methoden A und B nur Mittelwerte verwendet werden. Nehmen wir an, dass in dem Daten-

satz die eine Hälfte der Fahrer die Spur früh wechselt, die andere Hälfte dagegen spät, so liegen die Mittelwerte genau dazwischen. Dies ist in diesem Fall fatal, da genau diese Mittelwerte Trajektorien entsprechen, die es zum einen nicht im Originaldatensatz gibt, zum anderen sogar die Tendenz haben genau auf das Fremdfahrzeug zuzusteuern. Der Grund hierfür ist in Abbildung 5.32 zu sehen. Hier wird eine Beispielklasse gezeigt, die sich auf der Einfädelspur befindet. Es ist zu sehen, dass es neben Fahrern, die weiter der Spur folgen, auch Spurwechsler gibt. Die Spurwechsler erzeugen Vektoren, die dem Spurfolgen entgegenstehen. Wenn wie hier ein alternatives Verhalten nur durch wenige Einzelfälle repräsentiert wird, hat dies zuerst wenig Einfluss auf den Mittelwert, was bedeutet, dass die Spurwechsler ignoriert werden, doch es kommt auch vor, dass die alternative Verhaltensweise durch etwa gleich viele Fahrer repräsentiert wird. In diesem Fall liegt der Mittelwert genau zwischen beiden Gruppen und erzeugt beim Rekonstruieren somit unvernünftige Trajektorien.

Wendet man dagegen Methode C an (Abb. 5.33), so gibt es kein derartiges Problem, da ja explizit auf das Mitteln verzichtet wird. Entsprechend vielfältig sind die rekonstruierten Trajektorien. Sie besitzen die selbe Variabilität wie im Originaldatensatz.

Dieses gute Ergebnis für Methode C ist allerdings nicht überraschend. Prinzipiell wird bei dieser Methode der Datensatz in einzelne Trajektorien aufgeteilt, was sogar noch über die Trennung von vorher- und nachher Einfädlern hinaus geht. Der Nachteil dabei ist die große Menge an Drift und Diffusionskoeffizienten, die hier erforderlich werden. Alternativ können die Daten aber auch in Gruppen zusammengefasst werden, wobei jede Gruppe durch eine Mittlung repräsentiert würde. Besonders nützlich könnten hier Methoden der Clusterfindung [4] sein, die automatisch nach ähnlichen Driftvektoren suchen und Gruppierungen identifizieren können. Hiermit ließe sich der Modellumfang deutlich reduzieren, ohne dass man auf alternative Verhaltensweisen verzichten müsste.

## 5.7 Vereinfachungen

Das große Problem der verwendeten Vektorfelder ist ihr großer Umfang. Zwar können die Datenstrukturen so angepasst werden, dass sie weniger Speicher benötigen, doch bleibt immer noch ein signifikanter

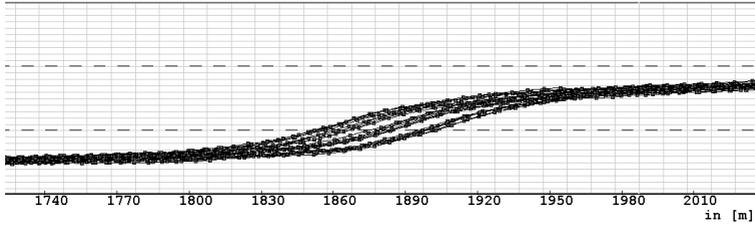


Abbildung 5.31: Rekonstruierte Trajektorien gewonnen mit Hilfe von Methode B.

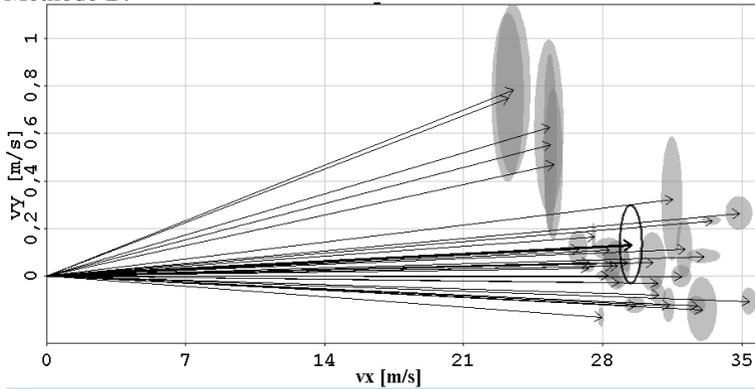


Abbildung 5.32: Eine Beispielklasse, gewählt auf der Einfädelspur. Der dunkle Pfeil/Ring deutet das mittlere Verhalten an.

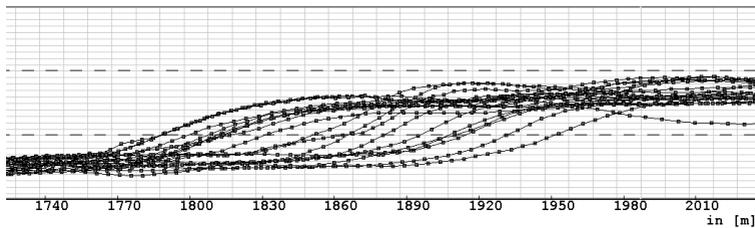


Abbildung 5.33: Rekonstruierte Trajektorien gewonnen mit Hilfe von Methode C.

Rest übrig, der nicht weiter zu reduzieren ist. Für ein komplexes Sze-

nario wie das Einfädelszenario gibt es nur geringe Möglichkeiten das Problem weiter zu vereinfachen ohne entscheidende Details zu verlieren, doch oft bestehen Strecken aus einfachen Geraden oder Kurven, die sich durch recht stationäre Bedingungen auszeichnen. Dabei ist zu berücksichtigen, dass der Beginn und das Ende eines derartigen Streckenabschnitts oft mit speziellen Manövern verbunden sind, die kurzfristige Korrekturen des Fahrers enthalten. Der Großteil eines solchen Streckenabschnitts weist allerdings stationäre Verhaltensweisen auf. Als Beispiel dafür wurde bereits das Lenkverhalten während einer Kurvenfahrt im vorigen Kapitel behandelt (siehe Abschnitt 4.8). Doch auch in dem in diesem Kapitel vorgestellten zwei-dimensionalen Gitter können Geraden und Kurven vereinfacht werden, indem für die entsprechenden Segmente die Gitterelemente in  $x$ -Richtung deutlich größer gewählt werden. Als Beispiel (siehe Abbildung 5.34) wird hier ein Kurvensegment von etwa 500m gezeigt. Die ursprüngliche Größe eines Gitterelementes von 25m in  $x$ -Richtung wird hier auf 83.3m erhöht, und somit werden nur noch 6 anstatt 50 Klassen entlang der  $x$ -Achse benötigt. Dies reduziert den Umfang des Modells um 88%, wobei allerdings in Kauf genommen werden muss, dass der Detailgrad ebenfalls reduziert wird. Trotzdem ist ein solches reduziertes Modell noch detailliert genug um ein Fahrzeug sicher durch die Kurve zu steuern.

Reduziert man das Verhalten sogar weiter, so dass man für eine Gerade oder Kurve absolute Stationarität annimmt, so entfällt die  $x$ -Komponente völlig, und nur die  $y$ -Komponente verbleibt. In Abbildung 5.35 wird das Ergebnis einer 1D Langevin-Analyse gezeigt(es werden nur Mittelungen über alle Fahrversuche gezeigt), in der das Spurverhalten beim Durchfahren einer Links- bzw. Rechtskurve gezeigt wird. Die Drift wird hier auch als Potential dargestellt. Zu sehen ist, dass es zwar einen Fixpunkt auf der Spurbreite gibt, aber das Potential bei einer Rechtskurve zur Fahrbahnmitte schneller ansteigt als bei einer Linkskurve, während es beim Fahrbahnrand genau anders herum ist. Auch die statistische Komponente scheint sich zu unterscheiden. Das Rauschen wird bei einer Linkskurve zum Außenrand der Kurve größer, während sich dieser Effekt bei einer Rechtskurve umkehrt. Zwar stellt dieses 1D Langevin-System eine recht drastische Abstraktion dar, doch auch hier reicht sie noch immer aus, um einige spezifische Eigenschaften korrekt zu erfassen(siehe Abbildung 5.36).

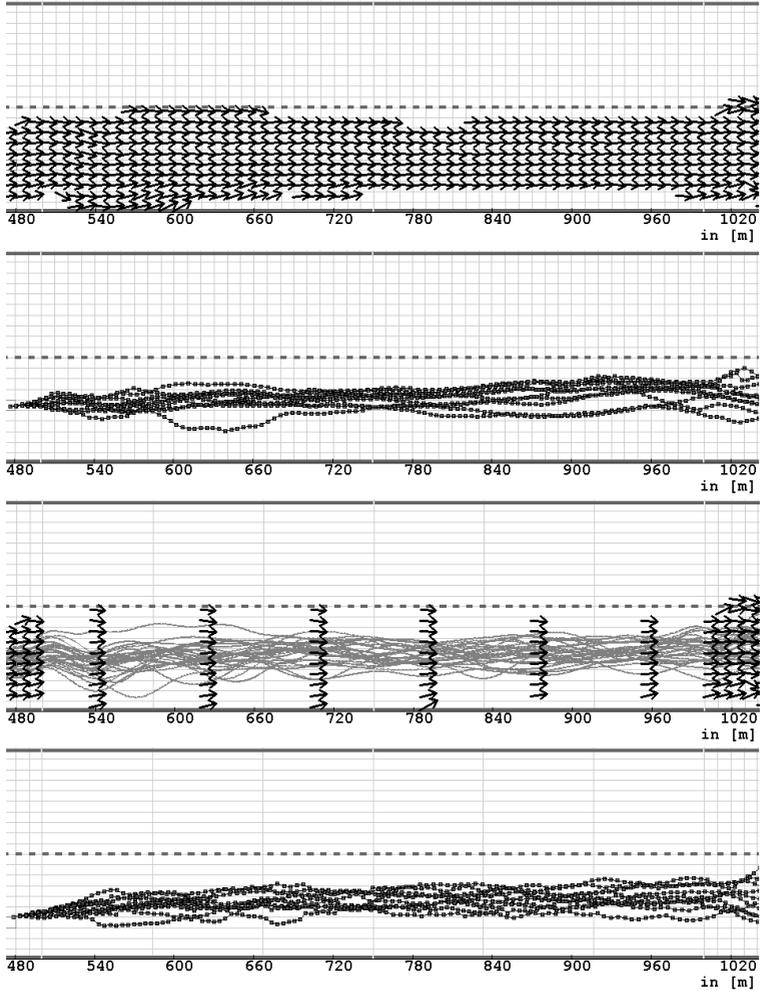


Abbildung 5.34: Beispiel für ein Kurvensegment mit reduzierter Gitterauflösung: 1) Vektorfeld mit hoher Auflösung 2) Rekonstruktion mit hoher Auflösung 3) Vektorfeld mit geringer Auflösung 4) Rekonstruktion bei geringer Auflösung

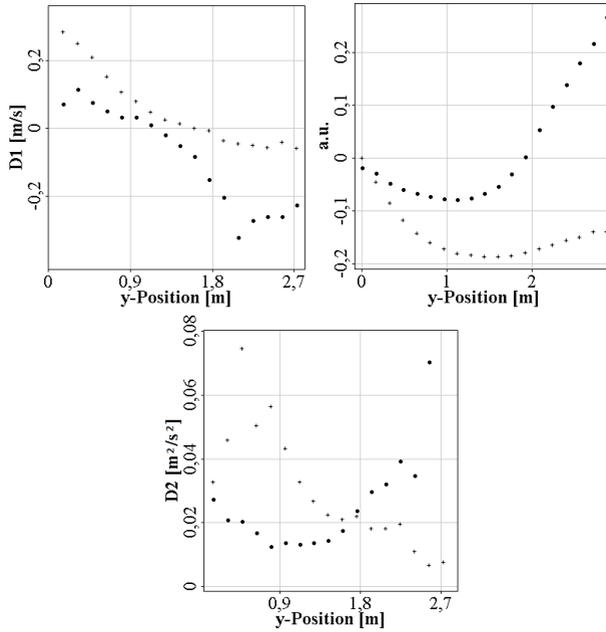


Abbildung 5.35: Langevin-Analyse (D1, Potential und D2) des Spurverhaltens während einer Links (Keuz) bzw. Rechtskurve (Punkte)

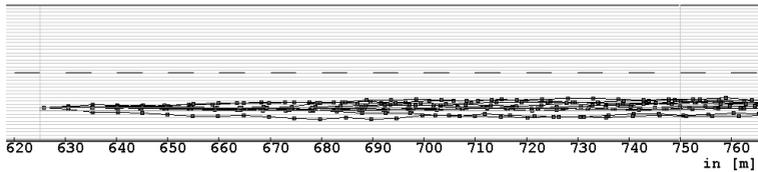


Abbildung 5.36: Rekonstruktion anhand der 1D Langevin-Analyse für ein Kurvensegment

## Literaturverzeichnis

- [1] M. Langner; J. Peinke; F. Flemisch; M. Baumann; D. Beckmann. Drift and diffusion based models of driver behavior. *Eur. Phys. J. B*, 76:99–107, 2010.
- [2] W. H. Press; S. A. Teukolsky; W. T. Vetterling; B. P. Flannery. *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, 2007.
- [3] J. Gottschall. *Modelling the variability of complex systems by means of Langevin processes: On the application of a dynamical approach to experimental data*. Universität Oldenburg, 2008.
- [4] David J.C. MacKay. *Information Theory, Inference, and Learning Algorithms*. Cambridge University Press, 2003.

# Kapitel 6

## Fahrer, Fahrzeug und Sicherheit

In diesem Kapitel sollen weitere Ergebnisse vorgestellt werden, die nicht direkt etwas mit der Langevin-Methode zu tun haben, aber bei der Betrachtung von Fahrerverhalten und ihrer Modellierung notwendig oder nützlich sind. Zum einen wird ein Fahrzeugmodell aus den Daten abgeleitet, welches in der Lage ist das Langevin-Modell auf ein physikalisch korrektes Verhalten zu überprüfen. Zum anderen werden einfache deterministische Modelle erstellt, die genutzt werden sollen um ein Risikomaß zu definieren.

### 6.1 Fahrzeugmodell

Um überhaupt Aspekte der Sicherheit untersuchen zu können muss ein Fahrzeugmodell geschaffen werden, welches es erlaubt, die rein physikalischen Möglichkeiten des Fahrers zu ermitteln. Eine weitere Anwendung im Zusammenhang mit den im vorigen Kapitel erstellten Langevin-Modellen ist die Einschätzung, ob die generierten Trajektorien überhaupt eine sinnvolle Fahrzeugdynamik widerspiegeln.

Da für die vorgestellten Experimente Simulatoren eingesetzt wurden, ist zu erwarten, dass die verwendete Fahrzeugdynamik etwas einfacher ausfällt als dies in der Realität der Fall ist. Dazu kommt, dass es nicht möglich war, direkt die Gleichungen einzusehen, die die Fahr-

zeugdynamik definieren. Der Grund dafür waren Lizenz und Copyright Probleme. Der einzige Weg, um dieses Problem zu lösen, liegt in einer Datenanalyse und der anschließenden Modellierung des Fahrzeugverhaltens aus den Daten heraus.

Als einfaches Fahrzeugmodell wird das Beschleunigungsverhalten  $a$  in Abhängigkeit von Gas- und Bremspedalstellung  $p_{Gas}, p_{Brems}$  und Geschwindigkeit  $v$  untersucht, sowie für die Lenkung die Abhängigkeit zwischen Lenkradstellung  $\alpha$ , Geschwindigkeit  $v$  und Gierwinkelgeschwindigkeit  $\dot{\omega}$ . Dieses Modell ist zugegeben einfach, doch zum einen scheint das im Simulator verwendete Modell nicht sonderlich davon abzuweichen (vgl. Abb. 6.4-6.6) und zum anderen liegen die Grenzen dieses Ansatzes vor allem bei relativ extremen Fahrmanövern, die allerdings nie Teil der IMoST Experimente waren und somit auch nicht aus den Daten abgeleitet werden können.

Das Modell für die Beschleunigung ist der Abbildung 6.1 entnommen. Hier wird die Beschleunigung  $a$  in Abhängigkeit von der Eigengeschwindigkeit  $v$  gezeigt. Es ist auffällig, dass sich das Verhalten entlang der Geschwindigkeit  $v$  in unterschiedliche Bereiche aufteilt. Jeder dieser Bereiche repräsentiert einen Gang des Getriebes. Da der Übergang zwischen den Bereichen automatisch erfolgt, gibt es hier keine Überschneidungen. In jedem Bereich wird eine lineare Abhängigkeit der Beschleunigung von der Eigengeschwindigkeit angenommen. Die Gaspedal-Stellung bestimmt dann wie viele Prozent des Maximalwertes tatsächlich umgesetzt werden. Zu beachten ist hierbei, dass 0% Gaspedal nicht  $0m/s^2$  entsprechen. Ohne das Betätigen der Bremsen oder des Gaspedals wirkt eine Bremsbeschleunigung von etwa  $0,2 - 0,4m/s^2$  (vgl. 6.2). Für die Bremse wird dagegen eine linear steigende Bremswirkung angenommen, die ab einem Bremspedal-Wert von 77% in einem Wert von  $-9m/s^2$  gipfelt. Für die Bremse gilt somit:

$$a(p_{Brems}) = \begin{cases} p < 77\% = -0.11p_{Brems} - 0.4, \\ p \geq 77\% = -9, \end{cases} \quad (6.1)$$

wobei alle Werte die Einheit  $m/s^2$  besitzen.  $p_{Brems}$  entspricht der Bremspedal-Stellung und entspricht einem Wert zwischen 0 und 100.

Für das Lenkmodell wird eine an Abbildung 6.3 angenäherte Gleichung verwendet. Sie lautet:

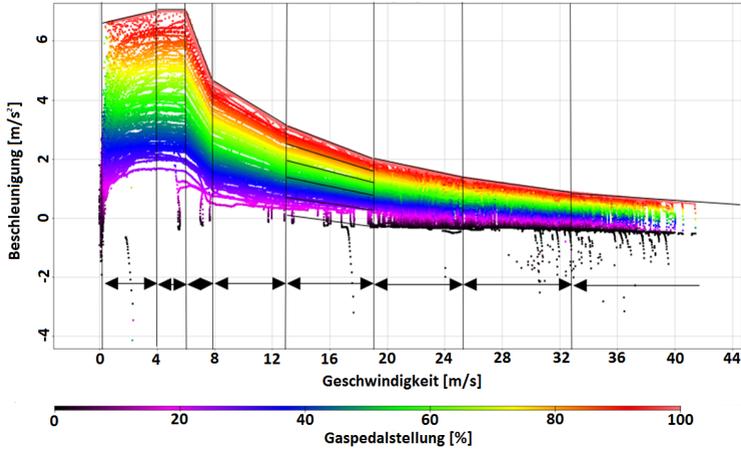


Abbildung 6.1: Das Beschleunigungsmodell wird von den Daten abgeleitet. Es sind Beschleunigung  $a$  über Geschwindigkeit  $v$  aufgetragen und die Gaspedal-Stellung  $p$  wird durch die Farben repräsentiert. Für jeden markierten Geschwindigkeitsbereich wird ein eigenes Modell erstellt. Jeder Bereich ist identisch mit einem Gang des Automatikgetriebes. Die Grenzen zwischen den Gängen sind dabei vor allem von den Geschwindigkeiten abhängig.

$$\dot{\omega}(v, \alpha) = \frac{1}{v_{ch}/1.15} * \frac{v}{1 + (v/v_{ch})^2} * \alpha \quad (6.2)$$

und basiert auf dem linearen Einspurmodell für untersteuerte Kurvenfahrten (siehe [1]). Hierbei steht  $v_{ch}$  für die sogenannte charakteristische Geschwindigkeit, die vom Fahrzeugtyp abhängt. Hier wird ein Wert von  $v_{ch} = 16.3m/s$  verwendet.

Mit dem hier abgeleiteten Modell für Lenkung und Beschleunigung können nun Trajektorien die durch Langevin-Modelle erzeugt werden in die zugehörigen Lenkwinkel und Pedalstellungen umgewandelt werden. In erster Linie dient dies dazu, zu prüfen, ob die generierten Trajektorien überhaupt den Fahrzeugmodellen genügen. Zusätzlich sollte noch eine Grenze für den maximalen Einlenkwinkel, sowie die maximale Winkelgeschwindigkeit des Lenkrads definiert werden. Aktionen am Lenkrad brauchen für gewöhnlich etwas Zeit, während die Beschleuni-

Velocity	0% Accelerator $p_{Gas}$	100% Accelerator $p_{Gas}$
0 - 4 m/s	-0.2 m/s <sup>2</sup>	6.5 m/s <sup>2</sup>
4 - 6.1 m/s	-0.2 m/s <sup>2</sup>	7 m/s <sup>2</sup>
6.1 - 7.8 m/s	-0.2 m/s <sup>2</sup>	7 m/s <sup>2</sup>
7.8 - 12.5 m/s	-0.2 m/s <sup>2</sup>	4.6 m/s <sup>2</sup>
12.5 - 18.9 m/s	-0.2 m/s <sup>2</sup>	3.2 m/s <sup>2</sup>
18.9 - 25 m/s	-0.2 m/s <sup>2</sup>	2 m/s <sup>2</sup>
25 - 32 m/s	-0.25 m/s <sup>2</sup>	1.4 m/s <sup>2</sup>
32 - 40.3 m/s	-0.3 m/s <sup>2</sup>	0.9 m/s <sup>2</sup>
40.3 - 45 m/s	-0.35 m/s <sup>2</sup>	0.5 m/s <sup>2</sup>

Abbildung 6.2: Die aus den Daten abgeleiteten Beschleunigungswerte in Abhängigkeit von Geschwindigkeit und Pedalstellung.

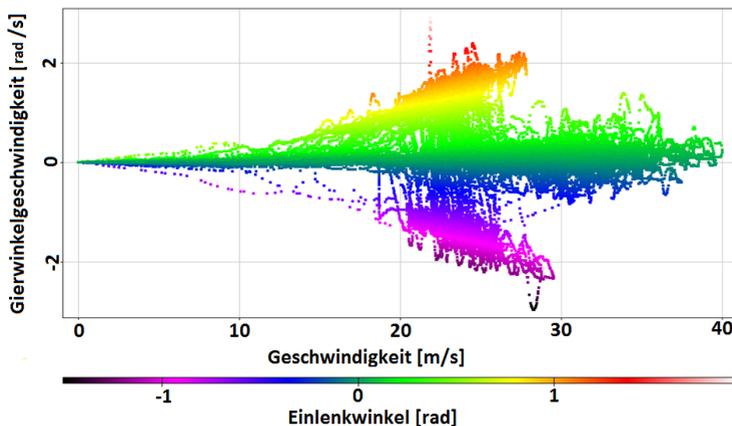


Abbildung 6.3: Das Lenkmodell wird von den Daten abgeleitet. Hier ist die Gierwinkelgeschwindigkeit  $\dot{\omega}$  über die Geschwindigkeit  $v$  aufgetragen und entsprechend der Einlenkwinkel  $\alpha$  eingefärbt worden.

gung über die Pedale nahezu instantan umgesetzt wird. Für die Maximalauslenkung des Lenkrads werden dabei Werte von  $+\frac{\pi}{2}$  verwendet, während die Winkelgeschwindigkeit auf  $0.2\text{rad/s}$  beschränkt wird.

## 6.2 Deterministisches Model

Mit Hilfe des im vorigen Kapitel erstellten Fahrzeugmodels ist es nun möglich, Fahrzeuge und ihr physikalisch korrektes Verhalten zu generieren. Um ein solches Model zu erstellen, werden Lenkung und Beschleunigung in tangentiale und transversale Kraftkomponenten umgerechnet. Diese Kräfte setzen am Fahrzeugzentrum an und weisen jeweils in die Fahrtrichtung bzw. tangential dazu. Dabei können diese Kräfte ganz unterschiedlichen Quellen entspringen. Im Falle der linearisierten Strecke, wie sie bei den im vorigen Kapitel erstellten Langevin-Modellen verwendet werden, muss z.B. die Zentrifugalkraft während einer Kurvenfahrt mit berücksichtigt werden. Diese Kräfte unterschiedlichen Ursprungs müssen dann nur aufaddiert werden, um die auf das Fahrzeug wirkende Kraft zu erhalten. Folgende Komponenten werden für eine simulierte Autobahnfahrt verwendet:

### Zentrifugalkräfte - transversal:

Um ein Fahrzeug in einer Kurve auf der Spur zu halten, ist es nötig, entsprechende Lenkmanöver durchzuführen. Diese Lenkmanöver entsprechen der Zentrifugalkraft, die auftritt, wenn das Fahrzeug der Spur folgt. Die Größe dieser Kraft lässt sich vom Kurvenradius ableiten:

$$F_{Zfugal} \sim \frac{v^2}{r - y} \quad (6.3)$$

Dabei hängt diese Kraft primär von der Geschwindigkeit  $v$ , sowie dem Kurvenradius  $r$  und der Spurposition  $y$  ab. Das Vorzeichen definiert ob es sich um eine Rechts- oder Linkskurve handelt. Im Falle der linearen Strecke, die im vorigen Kapitel eingeführt wurde, wird diese Kraft invertiert um ein Kurve zu simulieren und ist solange man sich in der Kurve befindet immer aktiv. Im wesentlichen besteht der Unterschied zwischen einer Geraden und einer Kurvenfahrt in genau dieser Kraft, da kontinuierlich versucht werden muss dieser Kraft entgegenzuwirken.

### Beschleunigungskräfte -longitudinal:

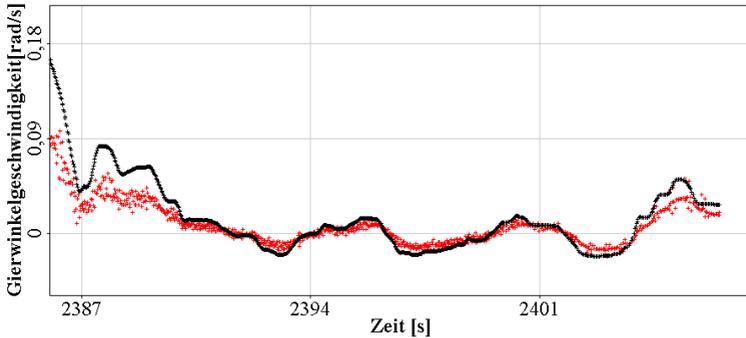


Abbildung 6.4: Vergleich von experimenteller (rot) und der mit Hilfe des hier vorgestellten Modells vom Lenkwinkel abgeleiteten Gierwinkelgeschwindigkeiten (schwarz). Abweichungen gibt es vor allem bei starkem Einlenken.

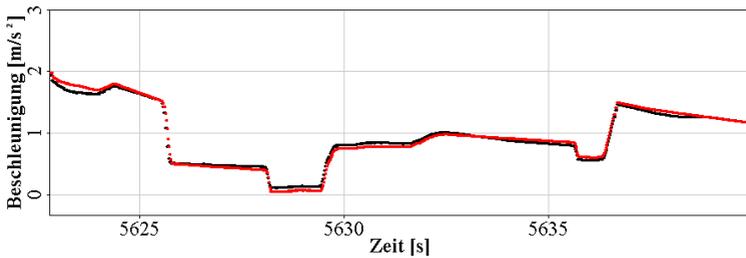


Abbildung 6.5: Vergleich von experimentellen (schwarz) und den mit dem Fahrzeugmodell von der Gaspedalstellung abgeleiteten Beschleunigungen (rot). Es gibt insgesamt eine gute Übereinstimmung.

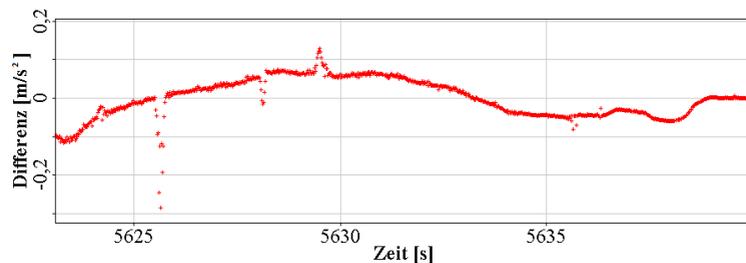


Abbildung 6.6: Differenz von experimenteller und modellierter Beschleunigung. Das Fahrzeugmodell ist bis auf etwa  $0,1 \text{ m/s}^2$  genau.

Auf freier Strecke soll ein Fahrzeug bis auf die Geschwindigkeitsbegrenzung heran beschleunigen. Anschließend muss die Beschleunigung ausgesetzt werden. Dies führt zu einem langsamen Geschwindigkeitsverlust von  $-0.2$  bis  $-0.4\text{m/s}$ . Unterschreitet man eine Geschwindigkeit, die etwa bei  $90\%$  der Geschwindigkeitsbegrenzung liegt, wird wieder beschleunigt. Das Ergebnis ist eine mit der Zeit oszillierende Beschleunigung. Für das Beschleunigen wird dabei immer Vollgas gegeben.

Taucht ein Hindernis auf, dem nicht ausgewichen werden kann, so wird die Geschwindigkeit angepasst. Dies geschieht in Abhängigkeit von Geschwindigkeitsdifferenz  $\Delta v$  und Abstand  $\Delta r$  zum Hindernis:

$$F_{Bremse} \sim -\frac{\Delta v^2}{\Delta r} \quad (6.4)$$

Diese Gleichung greift allerdings nur, wenn der Abstand einen Mindestwert unterschreitet. Als Mindestwert wird hierbei ganz unphysikalisch der "Halbe Tachoabstand" verwendet. Dabei ist zu beachten, dass die Eigengeschwindigkeit  $v_{ego}$  in  $\text{km/h}$  direkt als Abstand in  $\text{m}$  verwendet wird, also gilt:

$$d_{min} = v_{ego} / (2 * 3.6) \quad (6.5)$$

### Streckenpotential - transversal:

Auf gerader Strecke wird das Fahrzeug auf der Spur gehalten, indem die Abweichung von der Mittellinie sowie die Ausrichtung des Fahrzeugs, verwendet wird. Befindet sich das Fahrzeug beispielsweise oberhalb der Spurmitte und besitzt gleichzeitig eine positive y-Geschwindigkeitskomponente  $v_{ego} = (v_x, v_y)$  (Fahrzeug nähert sich der oberen Spurbegrenzung), so wird überprüft, wie weit es noch vom Spurrand entfernt ist. Hieraus wird dann errechnet, welcher Einlenkwinkel nötig ist, das Fahrzeug auf der Spur zu halten. Besitzt das Fahrzeug dagegen eine negative y-Geschwindigkeitskomponente, so wird die selbe Methode benutzt, nur bezogen auf das Spurzentrums. Für die untere Hälfte der Spur gilt das selbe, nur mit anderem Vorzeichen. Es gelten

also folgende Beziehungen:

$$F_{\text{track,gerade}} \sim \begin{cases} y \leq \frac{s}{2} \wedge v_y > 0 : -\frac{v_{ego}^2}{r} \\ y \leq \frac{s}{2} \wedge v_y \leq 0 : \frac{v_{ego}^2}{r} \\ y > \frac{s}{2} \wedge v_y > 0 : -\frac{v_{ego}^2}{r} \\ y > \frac{s}{2} \wedge v_y \leq 0 : \frac{v_{ego}^2}{r} \end{cases} \quad (6.6)$$

wobei  $s$  für die Spurbreite steht.  $r$  repräsentiert den minimal notwendigen Kurvenradius, der sich aus dem Abstand  $d$  bestimmen lässt, der entweder dem Abstand zur Spurbreite entspricht oder dem Abstand zur Spurbreite. Für  $r$  und  $d$  gelten:

$$r = \left| \frac{d}{\cos((\alpha - \pi)/2)} \sin((\alpha - \pi)/2) \right| \quad (6.7)$$

wobei  $\alpha$  der Fahrzeugausrichtung entspricht. Hierbei steht 0 rad für eine Ausrichtung parallel zur Strecke bei  $v_x > 0$ .

$$d = \begin{cases} y \leq \frac{s}{2} \wedge v_y > 0 : \frac{\frac{s_1}{2} - y_{ego}}{\sin(\alpha)} \\ y \leq \frac{s}{2} \wedge v_y \leq 0 : \frac{y_{ego} - (s_0 + \frac{b}{2})}{\sin(\alpha)} \\ y > \frac{s}{2} \wedge v_y > 0 : \frac{(s_1 - \frac{b}{2}) - y_{ego}}{\sin(\alpha)} \\ y > \frac{s}{2} \wedge v_y \leq 0 : \frac{y_{ego} - (s_0 + \frac{s}{2})}{\sin(\alpha)} \end{cases} \quad (6.8)$$

hierbei steht  $b$  für die Breite des Fahrzeugs,  $s_0$  für die rechte Spurbreite und  $s_1$  für die linke. Im Falle einer Kurve gelten diese Gleichungen ebenfalls, aber es muss zusätzlich eine der Zentrifugalkraft entgegen gerichtete Kraft wirken um das Fahrzeug auf der Strecke zu halten. Dies bedeutet:

$$F_{\text{track,kurve}} = F_{\text{track,gerade}} + F_{\text{Zfugal}} \quad (6.9)$$

**Spurwechsel - transversal:**

Ein Spurwechsel wird ausgelöst, wenn sich der Abstand zu einem vorausfahrenden Fahrzeug verringert und die nächst höhere Spur frei/existent ist. Da auch hierbei der halbe Tachoabstand als Minimalabstand gilt, sollte man etwa weitere 200m-300m hinzufügen. Wichtig ist, dass diese Distanz größer ist als beim Anpassen der Geschwindigkeit zum Vordermann. Wird nun dieser Abstand unterschritten, so muss zuerst geprüft werden, ob die nächst höhere Spur überhaupt frei ist. Dazu sollte man ebenfalls die minimalen Distanzen gemäß Tachoabstand einhalten. Zusätzlich sollten die Geschwindigkeiten der Fahrzeuge auf der höheren Spur überprüft werden, da sie unter Umständen sowieso ihren Abstand zum Egofahrzeug gerade erhöhen. Für ein von hinten kommendes Auto sollte der Minimalabstand etwas vergrößert werden, da er sich noch auf die neue Situation einstellen muss. Sind all diese Bedingungen erfüllt, kann ein Fahrspurwechsel erfolgen. Im Prinzip muss hierzu nur die aktuelle Spur verlassen werden, da sobald die höhere Spur erreicht wird das Streckenpotential ausreicht, um das Fahrzeug wieder auszurichten. Für den Spurwechsel wird vereinfachend ein Kreisabschnitt angenommen, der von der aktuellen Position aus in die höhere Spur mündet. Um einen sinnvollen Kurvenradius zu errechnen wird zuerst der Abstand  $d$  zwischen den Fahrzeugen bestimmt, und anschließend der Kurvenradius  $r$ , der nötig ist um die Spur zu wechseln. Die Gleichungen sehen ähnlich aus wie beim Spurhalten, doch gibt es einen entscheidenden Unterschied. Beim Spurhalten sorgen die Kreissegmente dafür, das das Fahrzeug parallel zum Fahrbahnrand ausgerichtet wird, beim Fahrspurwechsel dagegen verläuft die Grenze der wir uns nähern allerdings transversal und nicht longitudinal. Natürlich ist es nicht sinnvoll das Fahrzeug quer zur Fahrbahn auszurichten, doch um die aktuelle Spur zu verlassen reicht diese Methode aus. Natürlich führt dies dazu, das die Spur lange vor Erreichen des anderen Fahrzeugs verlassen wird. Die Gleichungen für  $d$ ,  $r$  und  $F_{wechsel}$  lauten:

$$d = \frac{\Delta r - l_{car}}{\cos(\alpha)} \quad (6.10)$$

$$r = \left| \frac{d}{\cos((\pi/2 - \alpha)/2)} \sin((\pi/2 - \alpha)/2) \right| \quad (6.11)$$

$$F_{wechsel} \sim \frac{v_{ego}^2}{r} \quad (6.12)$$

Hierbei steht  $l_{car}$  für die Fahrzeuglänge,  $\alpha$  für die anfängliche Fahrzeugausrichtung und  $\Delta r$  für den Abstand zwischen ausweichendem und

vorausfahrendem Fahrzeug. Wenn sich der Fahrer auf einer höheren Fahrspur aufhält, muss er nach dem Überholmanöver wieder auf die niedrigere Spur wechseln. Ein solcher Spurwechsel wird wieder durchgeführt sobald die rechte Spur frei ist. Die Durchführung des Spurwechsels ist identisch zum Spurwechsel auf eine höhere Spur, mit dem Unterschied, dass es hier kein Hindernis gibt. Es wird somit eine imaginäre Grenze benutzt um ein  $d$  zu definieren, wobei  $\Delta r$  durch diesen Wert ersetzt werden muss (z.B. 1000m, im Gegensatz zu  $\Delta r$  ist dies allerdings eine Konstante. Ein Wert von 1000m führt im allgemeinen bereits nach etwa 200-300m zu einem Spurwechsel).

### Ergebnis:

Zuletzt werden dann alle transversalen und longitudinalen Kräfte zusammengezählt und somit die Gesamtkräfte bestimmt. Da das hier vorgestellte **sehr einfache** Model nicht berücksichtigt, dass z.B. es etwas Zeit braucht, bis man das Lenkrad in die notwendige Position für die Aktion bewegt hat, ist es besonders in extremen Situationen recht ungenau, doch für die in IMoST simulierten Fälle ausreichend. Um dennoch diese Fehler etwas abzuschwächen wird überprüft, ob die Kräfte keine Aktionen beschreiben, die dem Fahrzeugmodel widersprechen (siehe auch Abschnitt 6.4). Gegebenenfalls müssen die errechneten Kräfte somit reduziert werden, damit z.B. die Winkelgeschwindigkeit des Lenkrads nicht gegen unendlich geht, oder das Fahrzeug in Kurvenradien gezwungen wird, die physikalisch unmöglich sind.

## 6.3 Sicherheitsbewertung

### 6.3.1 “Time to collision”(ttc) und “time to act”(tta)

Um eine Fahrsituation einschätzen zu können, ist es nötig eine Situation zu bewerten. Es wird eine quantitative Größe benötigt, die es erlaubt das Risiko einer Situation einzuschätzen und damit zu minimieren. Ein überaus gängiges Maß für das Risiko einer Situation ist die sogenannte “Time to Collision” oder TTC. Hierbei wird der Abstand  $\Delta r$  zwischen dem eigenen Fahrzeug und einem anderen durch die Differenz-

geschwindigkeit  $\Delta v$  dividiert:

$$t_{TTC} = \frac{\Delta r}{\Delta v} \quad (6.13)$$

Um die TTC als ein Risikomaß zu verwenden, wird zusätzlich noch die absolute Geschwindigkeit des Egofahrzeugs verwendet. Fände ein Unfall bei hoher Eigengeschwindigkeit statt, so wären die Folgen um so verheerender. Diese Kombination aus TTC und Eigengeschwindigkeit wird benutzt, um sogenannte “Severity Level” zu definieren[2, 3]. Üblicherweise wird die TTC immer zwischen Fahrzeugen definiert und gibt an wie viel Zeit bis zu einem Unfall vergeht, wenn nichts unternommen wird. Natürlich wird ein Autofahrer versuchen einen Unfall zu vermeiden. Im Falle eines Folgefahrens kann er z.B. bremsen und Geschwindigkeit anpassen, bzw. die Spur wechseln. Jede dieser Aktionen benötigt eine unterschiedlich lange Zeit oder Distanz je nach aktueller Situation.

Angenommen zwei Fahrzeuge fahren hintereinander her, wobei das Hintere schneller ist als das Vorausfahrende. Angenommen das vorausfahrende hält dabei eine konstante Geschwindigkeit, so bleiben dem hinteren Fahrer zwei Möglichkeiten: Bremsen oder Ausweichen. Betrachtet man nun die Distanz die zum Abbremsen nötig ist, so ergibt sich:

$$d = -\frac{1}{2a_b} \Delta v^2 \quad (6.14)$$

Hierbei sei  $\Delta v$  die Geschwindigkeitsdifferenz zwischen den Fahrzeugen, und  $a_b$  die negative Bremsbeschleunigung. Das zusätzliche Minus in der Gleichung sorgt somit für eine positive Distanz. Für ein Ausweichmanöver wird dagegen eine Distanz von

$$d = \sqrt{\frac{2b}{a_a}} \Delta v \quad (6.15)$$

benötigt. Hierbei steht  $b$  für die Streckenbreite und  $a_a$  für eine angenommene konstante Quereschleunigung. Natürlich ist dies nur eine sehr einfache Gleichung für den Spurwechsel, doch der entscheidende Punkt ist die quadratische Abhängigkeit beim Bremsen und die lineare Abhängigkeit beim Ausweichen. Beide Funktionen schneiden sich in einem bestimmten Punkt, welcher durch eine kritische relative Geschwindigkeit  $\Delta v$  gegeben ist. Vor diesem Punkt ist das Bremsen günstiger nach diesem Punkt ist ein Ausweichen sinnvoller.

Dieses Beispiel macht deutlich, dass die TTC immer situationsabhängig betrachtet werden muss. Dies führt dazu, dass immer ganz unterschiedliche TTCs zu jedem Zustand existieren. Eine TTC zum Spurhalten, eine zum Vordermann, eine zum Bremsen oder Ausweichen, sowie weitere, sollte es die Situation erfordern. Zusätzlich muss die TTC um bestimmte Beträge weiter reduziert werden. Da wäre zum einen die Reaktionszeit, aber auch die einen Unfall vermeidende Aktion des Fahrers benötigt eine gewisse Zeit um tatsächlich einen Unfall zu vermeiden. Gesucht wird somit die Zeit, die dem Fahrer noch bleibt, um die mit der Situationsbedingten TTC verbundene Gefahr zu vermeiden. Dies schließt explizit die Zeit mit ein, die das Manöver selbst braucht um erfolgreich zu sein. Sie soll TTA(time to act) genannt werden.

Grundsätzlich wird bei der Bestimmung der Zeit, die für ein bestimmtes Manöver benötigt wird, genauso vorgegangen, wie im deterministischen Model beschrieben, nur muss jetzt über die Zeit integriert werden. Auch diesmal werden Kurvenfahrten als Kreissegmente angenommen. Hier sollen vor allem vier verschiedene TTC's behandelt werden: Bremsen wegen vorausfahrendem Fahrzeug/Hindernis, Ausweichen von Fahrzeug/Hindernis, Spurhalten, sowie sich von hinten nähernde Fahrzeuge während eines Spurwechsels. Benötigt werden folgende Zustandsvariablen für das Ego-Car: Die eigenen Koordinaten  $x$  und  $y$ , die zugehörigen Geschwindigkeiten  $v_x$  und  $v_y$  sowie der aktuelle Gierwinkel  $\alpha$ . Zusätzlich werden noch die Positionen und Geschwindigkeiten anderer Fahrzeuge benötigt, um die Distanz  $\Delta d$  in  $x$ -Richtung und die Geschwindigkeitsdifferenz  $\Delta v$  in  $x$ -Richtung zu ermitteln. Dazu kommen noch Konstanten wie Spurbreite ( $b = b_{left} - b_{right}$ , wobei  $b_{left}$  und  $b_{right}$  für die  $y$ -Positionen der Spurränder stehen), Fahrzeuggröße ( $car_l$  bzw.  $car_b$  für Fahrzeuglänge und Breite), die maximalen Gierwinkelgeschwindigkeit  $d\alpha_{max}$ , sowie die maximale Bremsbeschleunigung  $a_{break}$ . Die Gleichungen für die TTA lauten damit folgendermaßen:

**Spurhalten:**

$$tta_{lanekeeping} = -\frac{(d - r_t)}{v_{ego}} \quad (6.16)$$

$$d = \begin{cases} v_y \geq 0: \frac{y - (b_{right} + (car_b/2))}{\sin(\alpha \cos(v_x/v_{ego}))} \\ v_y < 0: \frac{(b_{left} - (car_b/2)) - y}{\sin(\alpha \cos(v_x/v_{ego}))} \end{cases} \quad (6.17)$$

$$r_t = \frac{\alpha}{d\alpha_{max}} v_{ego} \quad (6.18)$$

**Abbremsen vor Hinderniss/Fahrzeug:**

$$tta_{break} = -\frac{(\Delta d - d_{break})}{\Delta v} \quad (6.19)$$

$$d_{break} = -\frac{1}{2a_{break}} \Delta v^2 \quad (6.20)$$

**Ausweichen bei Fahrzeug/Hinderniss:**

$$tta_{evade} = y - \frac{\Delta x}{\Delta v} - t_{evade} \quad (6.21)$$

$$t_{evade} = -\frac{\sin^{-1}((b_{left} - y_m)/(v_{ego} - \Delta\alpha_{max})) - \pi/2 + \alpha}{\Delta\alpha_{max}} \quad (6.22)$$

$$y_m = y - \frac{v_{ego}}{-\Delta\alpha_{max}} \sin(\pi/2 - |\alpha|) \quad (6.23)$$

**Ein sich von hinten näherndes Fahrzeug:**

$$tta_{backcar} = \frac{\Delta x - d_{break}}{\Delta v} \quad (6.24)$$

$$d_{break} = -\frac{1}{2a_{break}} \Delta v^2 \quad (6.25)$$

Hierbei handelt es sich natürlich nicht um eine vollständige Liste von TTAs, mit ihr lassen sich allerdings viele Szenen auf der Autobahn analysieren. Mit den hier aufgeführten Gleichungen ist es nun möglich eine Reihe von TTAs zu ermitteln. TTAs sind in diesem Fall so definiert, dass sie die Zeit bis zur spätest möglichen Reaktion wiedergeben. Ein Wert von Null bedeutet dabei dass keine Zeit mehr bleibt, während ein Wert kleiner Null die Zeit wiedergibt, bis die Situation kritisch wird. Positive Werte geben dagegen an, dass man die Situation nicht mehr bereinigen kann. Wenn man also nach der gerade relevanten TTA sucht, sollte man die größte TTA wählen, die kleiner Null ist.

### 6.3.2 Prädiktion

Mit den bisher vorgestellten Gleichungen ist es nun möglich die gegenwärtige Situation zu bewerten. Allerdings spielt bei Risiko und Sicherheitsbetrachtungen die sogenannte Prädiktion eine große Rolle. Unter Prädiktion versteht man die Voraussage einer um  $\tau$  Sekunden in der Zukunft liegenden Situation. Man möchte also nicht nur wissen wie groß die TTAs in diesem Moment sind, sondern vielleicht in einer oder fünf Sekunden. Vergleicht man diese zukünftigen Werte mit dem gegenwärtigen, so kann man die TTAs sogar zur Planung von Verhaltensweisen einsetzen, da man versuchen wird die TTAs immer so klein wie nur möglich zu halten, und somit dem Fahrer immer den größten Spielraum an möglichen Verhaltensweisen zugesteht (geringstes Risiko).

Um eine Prädiktion durchzuführen, werden hier nun folgende Annahmen gemacht, um zu verhindern, dass sie zu aufwendig wird. Zum einen bewegen sich alle nicht-Ego-Fahrzeuge mit konstanten Geschwindigkeiten und Richtungen weiter, zum anderen werden für das eigene Verhalten nur konstante Einlenkwinkel und Geschwindigkeiten angenommen. Diese Vereinfachungen schließen plötzliche Bremsmanöver explizit aus, und erlauben damit nur eine Prädiktion für eher gewöhnliche/nicht-extreme Verhaltensweisen.

Um nun die TTAs für einen zukünftigen Zeitpunkt zu bestimmen, müssen sowohl die eigene Trajektorie als auch die der anderen Fahrzeuge extrapoliert werden, um dadurch die in der Zukunft bestehende Situation zu bestimmen. Zum Glück hält sich der Aufwand dafür dank der getroffenen Vereinfachungen in Grenzen. Die Extrapolation der Fremdfahrzeuge ist sehr simpel. Da Richtung und Geschwindigkeit als konstant angenommen werden ändert sich nur die  $x$ -Position der Fremdfahrzeuge:

$$x_{Fremd}(t + \tau) = x_{fremd}(t) + \tau v_{x,fremd} \quad (6.26)$$

Für das Egofahrzeug soll hier nur die Richtungsänderung betrachtet werden. Die Geschwindigkeit soll für die Zukunft als konstant angenommen werden. Es wird also im Prinzip nur ein Einlenkwinkel definiert und entlang der zugehörigen Trajektorie in die Zukunft extrapoliert. Für den neuen Fahrzeugzustand gilt somit:

$$x(t + \tau) = x_m + r \cos(\Delta\alpha\tau + (\alpha(t) - \pi/2)) \quad (6.27)$$

$$y(t + \tau) = y_m - r \cos(\Delta\alpha\tau + (\alpha(t) - \pi/2)) \quad (6.28)$$

$$x_m = x(t) - \frac{v_{ego}}{\Delta\alpha} \cos(\alpha(t) - \pi/2) \quad (6.29)$$

$$y_m = y(t) + \frac{v_{ego}}{\Delta\alpha} \sin(\alpha(t) - \pi/2) \quad (6.30)$$

$$\alpha(t + \tau) = \alpha(t) + \Delta\alpha\tau \quad (6.31)$$

$$v_x(t + \tau) = v_{ego} \cos(\alpha(t + \tau)) \quad (6.32)$$

$$v_y(t + \tau) = -v_{ego} \sin(\alpha(t + \tau)) \quad (6.33)$$

### 6.3.3 Prädiktionsfelder

Um nun abschätzen zu können, welches Verhalten welche Konsequenzen und Risiken nach sich zieht, wird die ungünstigste TTA für verschiedene mögliche Einlenkwinkel über einen Zeitraum von einigen Sekunden vorausgesagt. Als mögliche Einlenkwinkel gelten dabei alle Einlenkwinkel, die mittels einer maximalen Lenkwinkelgeschwindigkeit vom aktuellen Einlenkwinkel aus erreicht werden könnten. Dadurch wird praktisch die Strecke mit einem farbkodierten Sicherheitsmaß abgedeckt, welches eine Einschätzung der zukünftigen Entwicklung (Prädiktion) dieses Sicherheitsmaßes erlaubt. Dies liegt daran, das z.B. für einen Punkt der vom Fahrer in einer Sekunde erreicht wird die TTA bestimmt wird, wobei aber berücksichtigt ist, das auch alle anderen Fahrzeuge sich in dieser Zeit weiterbewegt haben. Im folgenden werden mehrere solcher Prädiktionsfelder für unterschiedliche Situationen vorgestellt.

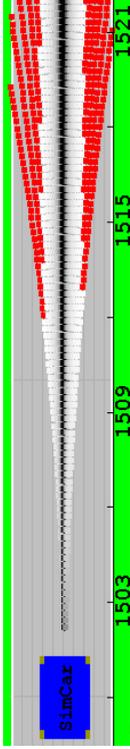


Abbildung 6.7: Prädiktionsfeld für das Spurhalten bei einem Fahrzeug, das parallel zum Fahrbahnrand ausgerichtet ist

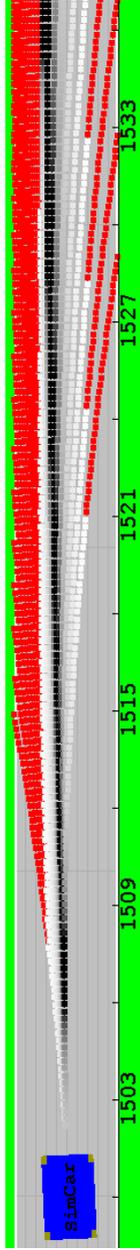


Abbildung 6.8: Prädiktionsfeld eines nicht parallel zum Fahrbahnrand ausgerichteten Fahrzeugs

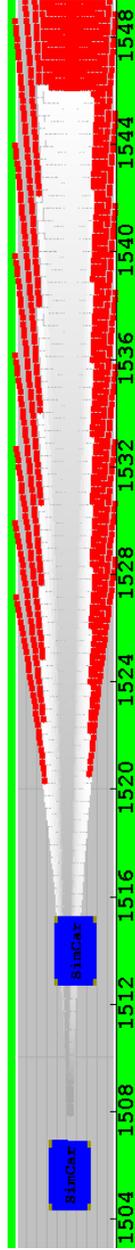


Abbildung 6.9: Prädiktionsfeld für das Folgfahren. Da keine Möglichkeit zum Überholen besteht, muss die Geschwindigkeit rechtzeitig angepasst werden

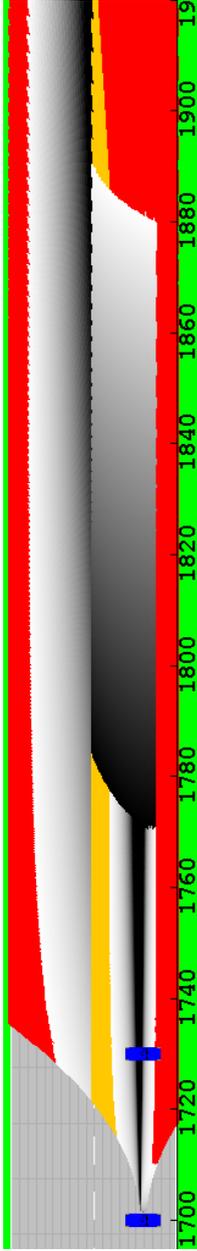


Abbildung 6.10: Prädiktionsfeld für ein Überholmanöver.

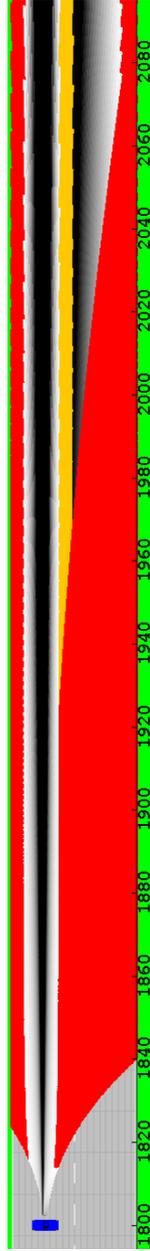


Abbildung 6.11: Prädiktionsfeld für das Zurückwechseln auf die 1. Spur nachdem das andere Fahrzeug überholt wurde.



Abbildung 6.12: Farblegende für die Prädiktionsfelder.

In Abbildung 6.7 wird das Prädiktionsfeld für das normale Spurhalten dargestellt. Dabei sind nur Punkte, die auf der Strecke liegen, sowie vom Fahrer erreicht werden könnten, angezeigt. Schwarze Bereiche stehen dabei für relativ sichere Bereiche ( $TTA < -10s$ ), da selbst die ungünstigste TTA dem Fahrer noch sehr viel Zeit lässt zu agieren. Je heller ein Bereich wird, je geringer wird die Zeit, die dem Fahrer noch bleibt (vgl. Abb. 6.12). Die roten Bereiche repräsentieren Bereiche mit positiven TTAs, was bedeutet, dass es keine Möglichkeit mehr gibt auf der Strecke zu bleiben. Das Feld fällt sehr symmetrisch aus, da das Fahrzeug sich gegenwärtig nahezu parallel zum Fahrbahnrand bewegt. Anders sieht die Situation in Abbildung 6.8 aus. Hier bewegt sich das Fahrzeug auf den Fahrbahnrand zu. Dies macht es erforderlich, dass der Fahrer möglichst bald das Fahrzeug neu ausrichtet. Allerdings ist zu erkennen, dass eine zu starke Reaktion dazu führen kann, dass schon bald ein weiteres Korrekturmanöver nötig wird.

In Abbildung 6.9 wird nun eine völlig andere Situation dargestellt. Hier geht es um das Folgefahren. Es wurde bewusst eine einspurige Strecke gewählt, um die Option eines Ausweichmanövers auszuschalten. Die einzige Aktion, die dem Fahrer somit bleibt, ist zu bremsen. Da sich beide Fahrzeuge bereits jetzt sehr nahe sind, bleibt dem Fahrer nicht viel Zeit seine Geschwindigkeit anzupassen. Hier wurde eine Geschwindigkeit von 22m/s für das Egofahrzeug gewählt, während das vorausfahrende Fahrzeug 2m/s langsamer ist. Im Gegensatz zum reinen Spurhalten, werden in dieser Situation verschiedene TTAs betrachtet. So stammen die roten Bereiche am oberen und unteren Fahrbahnrand weiterhin vom Spurhalten, aber die grau/weiße Fläche dazwischen aus der TTA, die ein Bremsmanöver darstellt. Der komplett rote Bereich am Ende wird durch ein zu nahes Auffahren verursacht. Wenn der Fahrer mit gleichbleibender Geschwindigkeit in diesen Bereich fahren würde, hätte der Unfall zwar noch nicht stattgefunden, doch die Distanz zum Vordermann genügt nicht mehr um die Geschwindigkeit durch eine Vollbremsung um 2m/s zu verringern, was unweigerlich eine Kollision zur Folge hätte. Zu beachten ist, dass dieser rote Bereich nicht mit der aktuellen Position des Fremdfahrzeugs übereinstimmt, sondern mit dessen extrapolierten Position bei gleichbleibender Geschwindigkeit.

Die Abbildungen 6.10 und 6.11 beschreiben zwei Situationen, wie sie bei einem typischen Überholmanöver auftreten. Das erste Bild zeigt die Situation kurz vor dem notwendigen Spurwechsel. Im ersten Abschnitt sind die normalen Spurhalte-TTAs zu erkennen. Der gelbe Be-

reich steht hierbei für einen Bereich, der betreten werden kann, aber dann unweigerlich zu einem Spurwechsel führt. Der folgende Bereich gibt die TTAs für den Spurwechsel an. Zuerst ist dieser Bereich dunkel, was für eine recht risikolose Situation spricht, doch je mehr man sich dem vorausfahrenden Fahrzeug nähert, je heller und risikoreicher wird die Situation. In diesem Bereich ist es besser die Spur zu wechseln, um seine TTAs zu verbessern. Die TTAs auf der Überholspur scheinen auf den ersten Blick widersprüchlich. Der dunklere Bereich liegt dabei ganz dicht am Mittelstreifen, was wenig sicher erscheint. Tatsächlich muss hierbei bedacht werden, dass hier nur die TTAs einer einzigen Aktion dargestellt werden. Unter diesem Umstand fällt tatsächlich die Trajektorie die dem vorausfahrenden Fahrzeug ausweicht, dabei allerdings so wenig einlenkt wie möglich, am besten aus. Dies liegt daran, dass für den Fahrspurwechsel immer ein Einlenkwinkel gewählt werden muss, der zu einem Spurwechsel führt, gleichzeitig darf dieser Einlenkwinkel aber nicht zu stark ausfallen, da man sonst über die Überholspur hinausschießen würde. Betrachtet man ein TTA-Feld über einen derart langen Bereich wie in diesem Fall, so muss man sich bewusst sein, dass zum Bewältigen dieses Bereichs wahrscheinlich mehrere Aktionen nötig sind, die in den hier gezeigten Feldern nicht berücksichtigt werden.

Die zweite Abbildung 6.11 zeigt einen Spurwechsel zurück auf die erste Spur, nachdem das Fremdfahrzeug überholt wurde. Das Fremdfahrzeug ist hier nicht mehr sichtbar, doch um den notwendigen Sicherheitsabstand zum anderen Fahrzeug einzuhalten, ist die erste Spur noch "gesperrt". Hierbei wird die  $tta_{backcar}$  angewendet. Da es keinen physikalischen Grund gibt wieder auf die erste Spur zu wechseln, wird für die Überholspur nur die übliche Spurhalten TTA verwendet. Alternativ kann bereits ein Spurwechsel auf die erste Spur erfolgen, solange der Einlenkwinkel so gering ist, dass der Mindestabstand zum Fremdfahrzeug nicht unterschritten wird. Dies ist vom hier gezeigten Punkt aus nur für sehr kleine Lenkwinkel der Fall, doch später sind auch stärkere Einlenkwinkel möglich.

Die hier gezeigten Beispiele geben schon recht gut wieder welches Verhalten dem Fahrer zur Verfügung steht, und wie schnell er auf eine bestimmte Situation zu reagieren hat.

Die hier eingeführten Prädiktionsfelder können nicht nur zur Beurteilung der gegenwärtigen Situation verwendet werden, sondern auch als deterministisches Model dienen. Dazu kann man beispielsweise im-

mer die Trajektorie wählen, die die geringste Aktion vom Fahrer erfordert, aber gleichzeitig allen roten Bereichen ausweicht.

## 6.4 Vergleich zwischen deterministischen und stochastischen Modellen

Zum Schluss soll nun das deterministische Modell mit dem stochastischen verglichen werden. Hierzu werden beide Modelle zunächst durch eine Routine ergänzt, die bestimmt, ob das vom Modell geforderte Verhalten überhaupt physikalisch, im Rahmen des generierten Fahrzeugmodells aus 6.1, möglich ist. Ausgangspunkt hierfür sind die von den Modellen generierten zum Fahrzeug longitudinalen und tangentialen Kräfte. Da beide Modelle diese Kräfte, oder genauer die zu ihnen proportionalen Beschleunigungen, liefern sind sie direkt miteinander vergleichbar und ihr Output kann deshalb auch auf die selbe Weise verarbeitet werden. Für die Beschleunigung des Fahrzeugs ist dabei die longitudinale Kraft/Beschleunigung verantwortlich. Um ihre Validität zu prüfen, vergleicht man sie einfach mit den maximalen bzw. minimalen Beschleunigungen, die gemäß Beschleunigungsmodell möglich sind. Anschließend wird die vom Modell geforderte Beschleunigung (in Abhängigkeit von der Eigengeschwindigkeit) auf den gültigen Bereich begrenzt. Ähnlich verfährt man mit der Bremse im Falle größerer ( $< -0.4m/s^2$ ) Bremsbeschleunigungen. Für die transversale Kraft ist dies schon komplizierter, da man hierfür zuerst die Gierwinkelgeschwindigkeit aus den Kräften errechnen muss, um sie mit dem maximal zulässigen Wert zu vergleichen. Anschließend wird dann auch diese Komponente auf den Maximal möglichen Wert begrenzt und die zugehörige begrenzte Kraft bestimmt. Wenn nun eine Simulation durchgeführt wird, registriert man parallel zu den Simulationswerten ob eine der Korrekturen/Begrenzungen greift.

Für das deterministische Modell können Korrekturen notwendig werden, wenn die vom Modell geforderte Aktion zu extrem ist. Ein Beispiel ist ein auf eine Linkskurve folgende Rechtskurve. Das Modell würde in einem solchen Fall vorschlagen, das Lenkrad instantan von einer Position in eine neue zu bewegen. Dies ist nicht möglich, da das Lenkrad nur mit einer begrenzten Lenkradwinkelgeschwindigkeit bewegt werden kann. Im allgemeinen sind Korrekturen aber selten, da das Modell grundsätzlich versuchen wird die Minimal-Aktion auszu-

führen. Nur in extremen absichtlich hervorgerufenen Situationen kann dies zu Problemen führen (vgl. Abb. 6.13). Verwendet man ein determi-

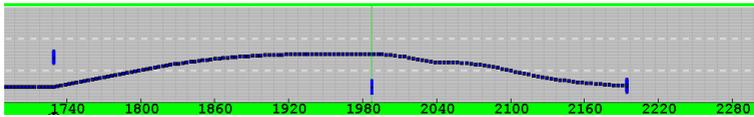


Abbildung 6.13: Beispiel für eine Trajektorie des deterministischen Modells basierend auf Regeln anhand eines Überhohlmanövers.

nistisches Modell basierend auf den Prädiktionsfeldern aus Abb. 6.3.3, so wird durch das Modell selbst dafür gesorgt, dass Korrekturen überflüssig werden. Dies liegt daran, dass man immer nur Prädiktionsfelder für gültige Aktionen erstellt, die sich aus dem Fahrzeugmodell ergeben und dann die günstigste Aktion auswählt. Welche Aktion dies ist, kann auf unterschiedliche Weise definiert werden. Zum Beispiel kann einfach die Aktion gewählt werden, die innerhalb des für das Prädiktionsfeld gewählten Zeithorizonts am längsten allen roten Bereichen ausweicht. Dadurch wird automatisch allen Fahrzeugen ausgewichen, sowie sämtliche Sicherheitsabstände eingehalten (vgl. Abb. 6.14). Völlig

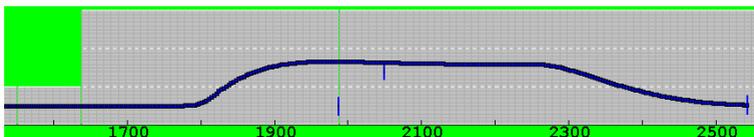


Abbildung 6.14: Beispiel für eine Trajektorie des deterministischen Modells basierend auf TTA anhand eines Überhohlmanövers.

anders sieht die Situation beim stochastischen Modell aus. Jeder Schritt des stochastischen Modells besteht aus einem mittleren Verhalten, sowie einer Streuung. Das mittlere Verhalten mag hierbei innerhalb einer Zelle unkritisch sein, doch spätestens die unkorrelierte Streuung durch die Diffusion entspricht ganz sicher keinem gängigen Fahrzeugmodell. Fluktuationen wie sie durch diese Streuung verursacht werden verursachen hochfrequentes Rauschen oder Extremwerte, die entsprechende Korrekturen erforderlich machen können. Eventuell ist es deshalb sinnvoll einen Filter zu benutzen, der die simulierten Trajektorien abschließend glättet. Diese Aufgabe wird hier durch die bereits erwähnten

Korrekturen basierend auf dem Fahrzeugmodell erfüllt (vgl. Abb. 6.15).

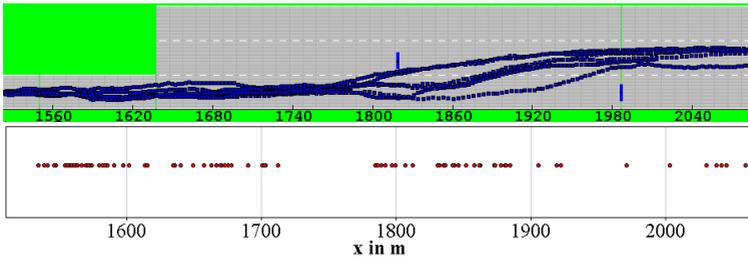


Abbildung 6.15: Beispiel für eine Trajektorie des stochastischen Modells anhand eines Überhohlmanövers. Die untere Grafik zeigt die Häufigkeit von Korrekturmanövern.

Wo liegen nun die Vorteile der einzelnen Modelle? Die regelbasierten deterministischen Modelle haben den Vorteil, dass sie es erlauben einfache Regeln direkt ins Modell einzubauen. Somit ist es sehr einfach sie zum Beispiel durch Verkehrsregel zu erweitern. Ihr Nachteil liegt dabei allerdings darin, dass man zuerst entsprechende Regeln aufstellen muss. Es ist nötig sie aus Beobachtungen abzuleiten, oder sie durch Gesetze oder Empfehlungen konkret zu definieren. Dies ist im allgemeinen aufwendig. Das stochastische Modell dagegen funktioniert genau anders herum. Es wird direkt automatisch aus den Beobachtungen abgeleitet und ist damit schnell erstellt, während spezifische Modifikationen schwierig sind. Der größte Unterschied liegt aber in der Variation der generierten Trajektorien. Während das deterministische Modell immer wieder die selben Reaktionen auf eine Situation generiert, erlaubt es das stochastische Modell eine Vielfalt an möglichen Verhaltensweisen zu simulieren. Beide Vorgehensweisen haben also ihre Vor- und Nachteile, jedoch sind die Vorteile des einen die Nachteile des anderen Ansatzes. Somit ergänzen sich beide Methoden hervorragend und können je nach Anforderung gewählt werden.

## Literaturverzeichnis

- [1] M. Mitschke. *Dynamik der Kraftfahrzeuge, Band C, Fahrverhalten*. Springer Verlag, 1990.
- [2] A. Svenssonm; Ch. Hydén. Estimating the severity of safety related behaviour. *Accident Analysis and Prevention*, 38:379–385, 2006.
- [3] A. Laureshyn; A. Svensson; Ch. Hydén. Evaluation of traffic safety, based on micro-level bebehaviour data: Theoretical framework and first implementation. *Accident Analysis and Prevention*, 2010.



# Kapitel 7

## Schlusswort

Aufgabe dieser Arbeit war es zu evaluieren, ob es möglich ist, ein hinreichend praktikables stochastisches Modell vom Fahrerverhalten basierend auf der Langevin-Analyse zu erstellen. Die Ergebnisse zeigen, dass dies sogar sehr gut funktioniert. Dabei fällt im Vergleich mit herkömmlichen (regelbasierten) Modellen auf, dass sich der stochastische Ansatz vor allem bewährt, wenn man auf genügend Datensätze zurückgreifen kann.

Da der große Vorteil der Langevin-Modelle ist, dass sie sich direkt aus den Daten ableiten lassen, müssen nur entsprechende Beobachtungen einer Situation vorliegen und man kann ein sehr präzises Modell generieren, welches auch kleine Details abdeckt. Regelbasierte Modelle haben hiermit oft Schwierigkeiten, was meist dazu führt, dass man diese Details ignoriert. Die stochastische Natur erlaubt darüber hinaus auch das Erfassen von Verhaltensvariationen, die zwar im realen Fahrerverhalten immer vorhanden sind, aber in regelbasierten Modellen meist nicht im selben Umfang adressiert werden. Ein weiterer Vorteil ist die hohe Geschwindigkeit mit der das Modell ausgeführt wird. Regelbasierte Modelle benötigen oft lange um alle wichtigen Bedingungen zu überprüfen, während das Langevin-Modell nur das passende Element aus einem im Speicher liegenden Array holen muss. Der Nachteil der Langevin-Modelle ist der große Datenbedarf: Es kann nur modelliert werden, was auch tatsächlich beobachtet wurde. Das Langevin-Modell ist dabei auch noch deutlich speicherintensiver als die meisten regelbasierten Modelle.

Diese speziellen Unterschiede zu regelbasierten Modellen eröffnen spezielle interessante Anwendungsgebiete. Zum einen kann die Methode eingesetzt werden wie in dieser Arbeit beschrieben: Man nimmt Daten von Fahrern und generiert für unterschiedliche Situationen verschiedene Modelle. Diese Situationen ließen sich nun zu komplexeren Szenarien zusammenstellen, um so ein Modell zu bekommen, welches autonomes Fahren ermöglicht.

Eine alternative Anwendung erlaubt das kontinuierliche Lernen oder Observieren von Fahrerverhalten. Dabei wird nicht der Datensatz als Ganzes analysiert, sondern ein Daten-Strom(Stream) wird permanent analysiert und die gerade gewonnenen Erkenntnisse dem Model hinzugefügt. Ändert sich das Verhalten im Daten-Strom, so ändert sich auch das Model. Dieses wird dadurch ständig erweitert ,verifiziert oder gar ersetzt. Diese Art des Lernens eröffnet zahlreiche Anwendungen nicht nur im Bereich der Fahrermodellierung.

# Kapitel 8

## Anhang

### 8.1 Computerprogramme

Sämtliche in dieser Arbeit dargestellten Ergebnisse und Abbildungen wurden mit einer im Verlauf der Arbeit selbst entwickelten Software erstellt. Diese Software erlaubt einerseits die Analyse von Datensätzen insbesondere hinsichtlich der Langevin-Analyse, aber auch auch die Bearbeitung der Daten welche im IMoST Projekt gesammelt wurden. Die einzigen Programmteile die nicht selbst entwickelt wurden, sondern zumindest teilweise aus [1] entnommen wurden, sind folgende:

FFT - Funktionen zum Erstellen einer (inversen) Fast-Fourier Transformation

Spline Interpolation - verwendet zum Korrigieren nicht-äquidistanter Daten

Polynomial Fit - verwendet zum Fitten von Polynomen

Gamma Funktion - Verwendet in der Pearson Typ 4 Verteilung zur Demonstration von Kurtosis

Darüber hinaus wurden nur die von Oracle angebotenen Standard JAVA Bibliotheken verwendet(z.B. swing,awt,util,io,...).

Die Software umfasst eine große Menge an Funktionen, die zu

beschreiben den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde. Aus diesem Grund soll hier vor allem der Teil der Software beschrieben werden, der die wichtigsten Ergebnisse aus dieser Arbeit vereint. Dabei handelt es sich um den TrackEditor. Nach dem Doppelklick auf die Data.bat-Datei wird die Software gestartet. In dem dadurch erscheinenden Fenster wählt man im Menü “Modellierung>TrackEditor” um ihn zu starten.

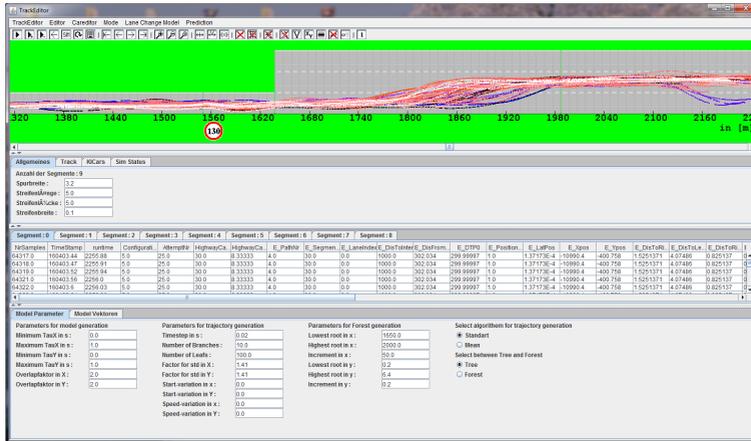


Abbildung 8.1: Ein Blick auf den TrackEditor, mit dessen Hilfe man viele Ergebnisse reproduzieren kann.

Damit sollte der TrackEditor gestartet werden. Abbildung 8.1 zeigt das allgemeine Layout der Software. Neben dem üblichen Menü und der Toolbar am oberen Rand ist das Interface in vier Bereiche unterteilt. Der erste Bereich erlaubt eine graphische Darstellung der Strecke, inklusive Datensätzen, simulierten Fahrzeugen und generierten Trajektorien. Hierfür wird die linearisierte Darstellung verwendet. Der zweite Bereich definiert allgemeine Parameter, die Strecke und zu simulierende Fahrzeuge sowie deren Eigenschaften. Der dritte Bereich stellt einen eventuell geladenen Datensatz dar. Dieser wird auf die einzelnen Streckensegmente aufgeteilt. Der letzte Bereich bezieht sich auf die Langevin-Analyse. Zum einen kann man dort die Parameter für das Langevin-Modell einstellen, zum anderen die Parameter die für die Monte-Carlo Simulation verwendet werden sollen. Daneben kann man sich Details des generierten Modells ansehen.

### 8.1.1 Erstellen und Ausführen eines Langevin-Modells

Zum Erstellen eines Langevin-Modells muss zuerst der Versuchsaufbau ausgewählt werden, damit dem Programm die Streckensegmente bekannt sind. Bei Programmstart ist standardmäßig der IMoST1 Streckenverlauf ausgewählt. Anschließend kann ein Datensatz geladen werden. Hierzu wählt man “TrackEditor>Data File Laden” und im darauf folgenden Dialog kann dann das zu ladende File spezifiziert werden. Mit “Browse” kann ein File ausgewählt werden. Mit “Test” kann man nachsehen, ob die Angaben für die Anzahl der Spalten und Delimiter (Trennzeichen) korrekt sind. Wenn man die Länge des Files wissen möchte sollte man vor dem Laden einmal auf “Size” klicken. Dabei wird dann automatisch die Länge des Files bestimmt und das Ergebnis unter “Anzahl der Zeilen” eingetragen. Der Datentyp muss für IMoST Dateien “ASCII+Header” sein.

Nach dem Laden wird der Datensatz auf die Segmente der Strecke aufgeteilt und anschließend auch korrigiert (siehe Kapitel 5.2). In der graphischen Darstellung müssten die Daten nun angezeigt werden. Darüber hinaus können die Daten nun im dritten Bereich des Interfaces eingesehen werden. Möchte man die Daten abspielen kann man in der Toolbar auf das “Play”-Symbol klicken.

Als nächstes kann nun ein Langevin-Modell erstellt werden. Vorher können im vierten Bereich des Interfaces im ersten Tab noch die Tauerbereiche (in  $s$ ), sowie der Grad der Überlappung der Bins angepasst werden. Die Bins selber bilden immer ein aus Rechtecken gebildetes Gitter, das allerdings für jedes Segment der Strecke unterschiedlich eingestellt werden kann. Diese Einstellungen können im zweiten Bereich des Interfaces im Tab “Track” modifiziert werden. Für die Generierung des Modells stehen drei Methoden unter dem Menüpunkt “TrackEditor” zur Verfügung: Calculate Model, Calculate Model 2 und Calculate Model 3. Die erste Variante stellt einen frühen Prototyp da und sollte nicht mehr benutzt werden. Die Zweite ist nicht optimal, doch schneller als die dritte und genaueste Variante. Der einzige wirkliche Unterschied zwischen Variante 3 und 2 ist die Verwendung von linearer Regression anstelle von Mittlungen. Obwohl dies theoretisch besser ist, da unempfindlich gegen Messrauschen, sind die Vorteile, im Zusammenhang mit den IMoST-Daten, verschwindend gering, weshalb meist Methode 2 ausreicht.

Das Modell wird nun in Form von Vektorfeldern im obersten Be-

reich des Interfaces angezeigt. Selektiert man eines der Bins in der graphischen Darstellung durch einen Mausklick, so kann man sich den Inhalt der Klasse im vierten Bereich des Interfaces anzeigen lassen, indem man sich die Tabs "Model Vektoren" und "Model Daten" ansieht. Um die Darstellung des Vektorfeldes etwas zu verbessern kann man die Länge der Pfeile mit "Editor>Vector+/-" verändern.

Möchte man nun Trajektorien erstellen, so klickt man während man Shift drückt einfach in der graphischen Darstellung an eine Stelle mit Daten und es werden Trajektorien generiert gemäß der im dritten Bereich im Tab "Model Parameter" angegebenen Spezifikationen. Hier kann der Zeitschritt für die Generierung, die Anzahl der zu generierenden Trajektorien sowie deren Länge und eine Rauschamplitude angegeben werden. Zusätzlich kann man noch die Startposition, sowie die Anfangsgeschwindigkeit leicht normal-verteilt für jede Trajektorie variieren. Darüber hinaus muss man sich für eine Methode entscheiden die beim Generieren angewendet werden soll. Sollen nur Mittelwerte einer jeden Klasse verwendet werden, so sollte man als Algorithmus "mean" wählen (Methode B, vgl. 5.6.2), wenn dagegen alle Vektoren einer Klasse verwendet werden sollen, wählt man "standard" für Methode C (vgl. 5.6.3). Das Resultat kann man sich auch als Tabelle ausgeben lassen unter "TrackEditor>EditForest", z.B. um es als ASCII-File zu speichern.

## 8.1.2 Simulationen

In der Toolbar kann man mit dem fünften Icon zwischen "Langevin Mode" und "Simulation Mode" wechseln. Im "Simulation Mode" werden die Fahrzeuge (Rot) aus den Daten durch SimCars/KICars (Blau) ersetzt, die man im zweiten Bereich des Interface definieren kann. Ein SimCar benutzt nicht die Daten um sich fortzubewegen wenn man "Play" anklickt, sondern eines der vorhandenen Modelle. Die Details zu einem SimCar können im zweiten Bereich des Interfaces im Tab KICars gefunden werden. Dort findet man neben den Anfangsbedingungen eines jeden Fahrzeugs auch die für das Fahrzeug zuständigen Modelle. Um ein Modell auszuwählen müssten in die Spalten "Steering Model", "Acc Model" und "Pot Model" Werte eingetragen werden. Dabei stehen folgende Kombinationen für brauchbare Modelle:

Deterministisches Modell: (0,4,2)

Auf TTA basierendes Modell: (4,0,0)

Statistisches Modell: (5,0,0)

Das statistische Model steht natürlich nur zur Verfügung, wenn vorher ein Langevin-Modell aus Daten generiert wurde.

## Literaturverzeichnis

- [1] W. H. Press; S. A. Teukolsky; W. T. Vetterling; B. P. Flannery.  
*Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*. Cambridge  
University Press, 2007.

## Lebenslauf

### Persönliche Daten:

Name	Michael Langner
Geburtsdatum	24.03.1979
Geburtsort	Oldenburg
Nationalität	deutsch

### Bildung:

07/1986 – 07/1999	Schulbesuch und Abitur in Papenburg
10/2000 – 03/2007	Studium der Physik an der Universität Oldenburg;
02/2006 – 03/2007	Diplomarbeit bei Prof. Dr. J. Peinke am Institut für Physik der Universität Oldenburg zum Thema “Experimentelle Untersuchungen zur Dynamik der thermischen Walze im Rayleigh-Benard System”
10/2008 – 10/2014	Doktorarbeit bei Prof. Dr. J. Peinke im Fachbereich Physik der Carl von Ossietzky Universität Oldenburg



**In dieser Arbeit enthaltene Publikationen:**

M. LANGNER, J. PEINKE, F. FLEMISCH, M. BAUMANN AND D. BECKMANN Drift and diffusion based models of driver behavior, *European Physical Journal B* , DOI: 10.1140/epjb/e2010-00148-8, 2010.



# Erklärung

Ich erkläre hiermit, dass ich diese Arbeit selbstständig verfasst  
und nur die angegebenen Hilfsmittel benutzt habe.

Oldenburg, 29. Januar 2014

.....

(Michael Langner)