

Untersuchung der Energieratenbilanz  
der dreidimensionalen, ebenen Couette-Strömung  
bei Simulation mit der endlichen Galerkin-Methode

Vom Institut für Physik  
der Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften  
der Carl von Ossietzky Universität Oldenburg  
zur Erlangung des Grades eines  
Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)  
angenommene Dissertation.

Steffen Page  
geb. am 5. August 1974  
in Magdeburg

Erstreferent: Prof. Dr. A. Rauh  
Korreferent: Prof. Dr. M. Holthaus  
Tag der Disputation: 6.02.2004

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>9</b>
2.1	Grundgleichungen . . . . .	9
2.2	Energiebilanzen . . . . .	10
2.3	Konsistenzbedingungen bei Periodizität des Druckes . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Simulation mit der Galerkin-Methode</b>	<b>19</b>
3.1	Ein kurzer Überblick über Näherungsverfahren . . . . .	19
3.2	Galerkin-Verfahren . . . . .	20
3.3	Basisfunktionen . . . . .	21
3.3.1	$\mathbf{k} = 0$ . . . . .	23
3.3.2	$k_x \neq 0$ und $k_z = 0$ . . . . .	23
3.3.3	$k_x = 0$ und $k_z \neq 0$ . . . . .	24
3.3.4	$k_x \neq 0$ und $k_z \neq 0$ . . . . .	24
3.4	Beispiele für Basisfunktionen . . . . .	26
3.4.1	Polynomiale Basis . . . . .	26
3.4.2	Trigonometrische Basis . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Spezielle Stabilitätsaussagen bei der ebenen Couette-Strömung</b>	<b>29</b>
4.1	Stabilitätskriterium . . . . .	29
4.2	Globale Stabilität spezieller Strömungen . . . . .	30
4.3	Lineare Stabilität endlicher Galerkin-Systeme . . . . .	31
<b>5</b>	<b>Energiekonsistenz</b>	<b>35</b>
5.1	Bedingung für Energiekonsistenz . . . . .	36
5.2	Demonstration der Verletzung der Energieratenbilanzgleichung . . . . .	41
5.3	Notwendige Bedingung . . . . .	43
5.4	Hinreichende Bedingungen . . . . .	43
5.5	Test der Bedingungen an ausgewählten Basissystemen . . . . .	44
5.5.1	Energiekonsistenz bei polynomialer Basis . . . . .	45
5.5.2	Energiekonsistenz bei trigonometrischer Basis . . . . .	47
5.6	Konstruktion energiekonsistenter Basisfunktionen . . . . .	49
5.6.1	Polynomiale Basis . . . . .	49
5.6.2	Trigonometrische Basis . . . . .	53
5.6.3	Zusammenfassung . . . . .	55

5.7	Kontrolle der Energiefehler . . . . .	57
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung und Diskussion</b>	<b>63</b>
<b>A</b>	<b>Berechnung des Druckes</b>	<b>67</b>
<b>B</b>	<b>Test der Integrationsroutine</b>	<b>71</b>
<b>C</b>	<b>Modellübersicht</b>	<b>79</b>
C.1	Modell P1 . . . . .	79
C.2	Modell P2 . . . . .	79
C.3	Modell T1 . . . . .	80
C.4	Modell P3 . . . . .	85
<b>D</b>	<b>Ergänzungen zum Kapitel 5</b>	<b>87</b>
D.1	Anwendung der $\tau$ -Methode . . . . .	87
D.2	Energiekonsistenz bei polynomialer Basis . . . . .	88
D.2.1	$\mathbf{k} = 0$ . . . . .	89
D.2.2	$k_x = 0$ und $k_z \neq 0$ . . . . .	89
D.2.3	$k_x \neq 0$ und $k_z \neq 0$ . . . . .	90
D.3	Konstr. polynomialer relevanter Nullmoden, die nicht von $N_0$ abhängen	90
D.4	Anmerkung zur Konstruktion der $\tilde{V}_n^{(N_0)}$ . . . . .	93
<b>E</b>	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>97</b>
	<b>Danksagung</b>	<b>101</b>
	<b>Lebenslauf</b>	<b>103</b>

# 1 Einleitung

Die ebene Couette-Strömung ist eine Grundströmung, die entsteht, wenn Flüssigkeit zwischen zwei unendlich ausgedehnten, parallelen Platten durch Bewegung dieser Platten geschert wird. Die kinetische Gesamtenergie der Strömung wird durch externe Leistung der Platten und interne Dissipation geändert. Die Gültigkeit der Bilanzgleichung, die diese Energieänderungen und Leistungen miteinander verknüpft, ist Gegenstand dieser Arbeit. Dazu wird zur Simulation der Navier-Stokes-Gleichungen ein Galerkin-Verfahren verwendet, bei dem das Geschwindigkeitsfeld in Basisfunktionen entwickelt wird, die in Haupt- und Querströmungsrichtung periodisch sind und die Hafttrandbedingung erfüllen. Je nach verwendeten Basisfunktionen und Größe des Galerkin-Systems kann die Bilanzgleichung verletzt sein. Es werden Bedingungen an die Basisfunktionen herausgearbeitet, die die Gültigkeit der Bilanzgleichung sicherstellen. Diese Bedingungen werden an zwei unterschiedlichen Basissystemen überprüft. Bei Verletzung der Gültigkeit der Energiebilanzgleichung wird eine Möglichkeit, die auftretenden Energiefehler zu kontrollieren, angegeben.

Aus den inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen resultieren für viskose Flüssigkeiten zwei wichtige Eigenschaften der Änderung der kinetischen Gesamtenergie in der Zeit:

1. Der nichtlineare Energietransfer zwischen den einzelnen Strömungsmustern ändert nicht die kinetische Gesamtenergie.
2. Die kinetische Gesamtenergie ändert sich nur durch externe Leistung und interne Dissipation.

Die externe Leistung wird bei der ebenen Couette-Strömung durch die Bewegung der Platten verursacht. Sie kann Energie in das System hinein- oder herausbringen. Die interne Dissipation dagegen kann nur Senke für kinetische Energie sein.

Aufgrund der Nichtlinearität der Navier-Stokes-Gleichungen lassen sich für beliebige Anfangsbedingungen und Reynoldszahlen keine allgemein exakten Lösungen der partiellen Differentialgleichungen angeben. Zur Simulation aller Differentialgleichungen, der Navier-Stokes-Gleichungen zur Impulserhaltung und der Kontinuitätsgleichung zur Massenerhaltung, werden numerische Verfahren verwendet. Das können Finite-Differenzen-Methoden [BTAA95], die die Differentialoperatoren lokal auf einem Gitter diskretisieren, Spektralmethoden [OK80, KLJ96, HKW95] oder Galerkin-Verfahren [CB97, Nag97, Rem00] sein. Andererseits werden Strömungen durch empirische Modelle beschrieben [Wal95, Hen96, BT97].

Durch die Simulationen erhält man je nach Dimension, die sich z. B. durch die Anzahl an Gitterpunkten bei Finite-Differenzen-Methoden oder durch die Anzahl der verwendeten Basisfunktionen bei Galerkin-Verfahren definiert, eine unterschiedlich genaue

Abbildung der Strömung. Je größer die numerische Genauigkeit z. B. des berechneten Strömungsfeldes sein soll, desto größer muß die Dimension des Systems sein. Dagegen reicht zum qualitativen Verständnis eine geringe Dimension aus (z. B. sechs in [SZ94] bei Verwendung einer KL-Basis [Pop00, MSHF02] und Anwendung eines Galerkin-Verfahrens).

Durch die Simulationen wird das zeitabhängige Verhalten der Strömung beschrieben. Die daraus gewonnenen Daten werden z. B. in [BTAA95, BDD97, BC98, BDMD98] statistisch untersucht. Weitere Ziele sind z. B. stationäre Lösungen und ihre Stabilität [Nag97, CB97, Wal98, Wal98], lineare Stabilitätsuntersuchungen der gemischten Couette-Poiseuille-Strömungen [Bal97], Energiestabilität [RH93] und Bestimmung kritischer Reynoldszahlen. Die empirischen Modelle [SZ94, Wal95, Hen96, BT97] helfen beim qualitativen Verständnis des Turbulenzüberganges bei der ebenen Couette-Strömung. Sie sollen u. a. den minimalen, selbsterhaltenden Turbulenzprozeß [Wal97] charakterisieren.

Das Ziel dieser Arbeit ist die Überprüfung der Gültigkeit der beiden erwähnten Eigenschaften (Erhaltung des nichtlinearen Energietransfers und der Mechanismen der Gesamtenergieänderung). Daß diese Eigenschaften nicht gelten müssen, wird durch Literatur bestätigt.

In [Wal95] wird von einer Verletzung des nichtlinearen Energietransfers bei empirischen Modellen berichtet. Diese Verletzung wurde in späteren Modellen behoben [BT97].

Im Euler-Grenzfall wird die Strömung antriebs- und dissipationslos. Damit muß die kinetische Gesamtenergie eine Konstante sein. In [SE97] wurde eine zeitlich veränderliche kinetische Gesamtenergie bei unendlich großen Reynoldszahlen festgestellt. Durch die Anwendung des Lagrange-Formalismus erster Art wurde dieser Fehler behoben.

Dagegen wurde in der Arbeit von A. Spille [Spi99] eine allgemeine Verletzung der zweiten Energieeigenschaft bei beliebigen Reynoldszahlen für ein 108dimensionales dynamisches System, das durch Anwendung eines Biorthogonalverfahrens gewonnen wurde, festgestellt. Es gab bei der Änderung der kinetischen Gesamtenergie in der Zeit zusätzliche Energiequellen und -senken, die nicht auf die externe Leistung und die Dissipation zurückgeführt werden konnten. Sie waren kein numerisches Artefakt, das beim Lösen der gewöhnlichen Differentialgleichungen auftrat. Diese unphysikalischen Energieraten werden in dieser Arbeit untersucht.

Dazu wird ein Galerkin-Verfahren zur Simulation der ebenen Couette-Strömung verwendet. Das Geschwindigkeitsfeld wird in die stationäre Grundströmung und die Störungsgeschwindigkeit zerlegt. Aufgrund der einfachen Geometrie, die der ebenen Couette-Strömung zugrunde liegt, wird die Störungsgeschwindigkeit in periodische vektorielle Basisfunktionen in Haupt- und Querströmungsrichtung bzw. in  $x$ - und  $z$ -Richtung entwickelt. Zur Erfüllung der Kontinuitätsgleichung als Bedingung an das Geschwindigkeitsfeld werden divergenzfreie Basisfunktionen genutzt. Für die Abhängigkeit der Basisfunktionen von  $y$  gibt es verschiedene Möglichkeiten. In der Literatur wurden erfolgreich Chebyshev- [OK80] und Legendre-Polynome [SE97] sowie Chandrasekhar-Funktionen [Cha81, CB97, Nag97] verwendet. In dieser Arbeit werden Legendre-Polynome und trigonometrische Funktionen genutzt. Die Bedingungen an die Basisfunktionen werden durch die Randbedingungen an den Wänden komplettiert. Man könnte span-

---

nungsfreie Randbedingungen verwenden, die aber vom originären Problem abweichen. In dieser Arbeit werden Haftrandbedingungen verwendet.

Die ebene Couette-Strömung ist eine rand- und keine druckgetriebene Strömung. Damit die kinetische Gesamtenergieeraterate durch Dissipationsleistung und externe Leistung der Wände beschreibbar ist, muß der Druck ebenso wie das Geschwindigkeitsfeld periodisch in Haupt- und Querströmungsrichtung sein. Daraus resultieren zusätzliche Randbedingungen an das Geschwindigkeitsfeld, die hergeleitet und bei den Basisfunktionen verwendet werden.

Die so aufgestellten Basissysteme sind analytisch exakt. Ihre Verwendung schließt numerische Fehler bei der Energiebilanz aus.

Es werden Bedingungen an die Basisfunktionen formuliert, die die Gültigkeit der Bilanzgleichung sicherstellen. Die beiden Basissysteme werden auf diese Bedingungen hin getestet, und es werden die Unterräume der Basissysteme bestimmt, die für die unphysikalischen Energiequellen und -senken verantwortlich sind.

Wenn man mit dem verwendeten Galerkin-Verfahren niedrigdimensionale Modelle konstruieren möchte, so kann es lohnend sein, Basisfunktionen zu haben, die keinen unphysikalischen Energiefehler liefern. Dazu werden Funktionsansätze mit freien Koeffizienten gemacht. Diese Koeffizienten werden dann so bestimmt, daß die zweite Energieeigenschaft erfüllt ist. An zwei Beispielen wird die Vorgehensweise demonstriert.

Es wird sich herausstellen, daß die so konstruierten Basisfunktionen Nachteile haben. Zum einen braucht die Konstruktion einen enormen Speicherbedarf, da das zugrundeliegende Problem nichtlinear ist und nur durch Einführung neuer Bedingungen in ein lineares Problem umgewandelt werden kann. Andererseits sind die neuen Basisfunktionen nicht universell, da sie von der Anzahl der Basisfunktionen abhängen, die direkt an die Grundströmung ankoppeln. Diese Basisfunktionen werden in dieser Arbeit als relevante Nullmoden bezeichnet. Für hochdimensionale Rechnungen ist dieser Weg nicht praktikabel. Es wird deshalb der Einfluß der Anzahl der relevanten Nullmoden auf den Energiefehler untersucht.

Die Arbeit ist wie folgt gegliedert: Nach dem Kapitel über Grundlagen der Energieerateratenbilanzen werden im Kapitel 2 auch die Druckrandbedingungen untersucht. Im 3. Kapitel wird die Simulationsmethode mit den später genutzten Basissystemen vorgestellt. Im anschließenden Kapitel wird kurz auf einige Stabilitätseigenschaften spezieller Strömungen der ebenen Couette-Strömung eingegangen. Danach, im Kapitel 5, schließt sich das Hauptkapitel zur Bilanz der Energieerateraten an. Verschiedene Bedingungen für die Erfüllung der Energieerateratenbilanzgleichung werden angegeben. Diese Bedingungen werden an ausgewählten Basissystemen überprüft, und bei Nichterfüllung werden Methoden zur Konstruktion vorgeschlagen. Eine weitere Möglichkeit zur Kontrolle der auftretenden Fehler wird untersucht.

Im Anhang finden sich einige Ergänzungen. Die Möglichkeiten der Druckberechnungen werden im Kapitel A diskutiert. In B wird das verwendete Verfahren zur Simulation des Differentialgleichungssystems dargelegt und seine Effektivität demonstriert. Danach folgt eine Aufzählung sämtlicher in dieser Arbeit verwendeter Modellsysteme. Im Kapitel D werden weitere Ausführungen zum Kapitel 5 gemacht.



# 2 Grundlagen

## 2.1 Grundgleichungen

Die Navier-Stokes-Gleichungen (siehe [LL91]) für inkompressible Strömung lauten

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{v}, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (2.1)$$

Mit dem in Abbildung 2.1 angegebenen Koordinatensystem werden folgende Randbedingungen verwendet:

$$\mathbf{v}(x, y = \pm 1, z, t) = \pm 1 \quad \text{und} \quad (2.2)$$

$$\mathbf{v}(x + m L_x, y, z + n L_z, t) = \mathbf{v}(x, y, z, t), \quad m, n \in \mathbb{Z}, \quad (2.3)$$

d. h. Hafttrandbedingungen auf den Wänden und Periodizitätsbedingungen in Haupt- und Querströmungsrichtung. Zusammen mit den Anfangsbedingungen

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t = 0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{r}) \quad (2.4)$$

wird das Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  und der Druck  $p(\mathbf{r}, t)$  im Ort  $\mathbf{r}$  und in der Zeit  $t$  vollständig beschrieben. In dimensionslosen Einheiten seien  $L_x$  und  $L_z$  die endlichen Ausdehnungen in  $x$ - und  $z$ -Richtung. Das Geschwindigkeitsfeld wird in diese beiden Richtungen periodisch fortgesetzt.

In den oben angegebenen Gleichungen sind bereits alle physikalischen Größen in Euler-Skalierung verwendet worden: Die Geschwindigkeit wird in  $U$ , der halben Differenz der Plattengeschwindigkeiten, der Druck in  $\rho U^2$ , dabei bezeichnet  $\rho$  die Dichte der Flüssigkeit, der Ortsvektor in  $h$ , dem halben Plattenabstand, und die Zeit in  $h/U$  gemessen.

Aus der Einführung dimensionsloser Größen resultiert die Reynoldszahl  $\text{Re}$  als Parameter zur Charakterisierung der Strömung:

$$\text{Re} = \frac{Uh}{\nu} \quad (2.5)$$

mit der kinematischen Viskosität  $\nu$  der Flüssigkeit.

Das Grundproblem (2.1) bis (2.4) hat die spezielle, stationäre Lösung

$$\mathbf{v} = y \mathbf{e}_x \quad \text{mit} \quad p = \text{konst.} \quad (2.6)$$

Die ebene Couette-Strömung ist ab einer Reynoldszahl von ca. 325 instabil [DD94, DD95].

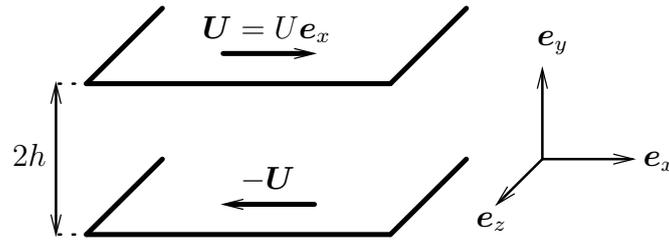


Abbildung 2.1: Geometrie der ebenen Couette-Strömung

Für beliebige Anfangsbedingungen und Reynoldszahlen wird das allgemeine Geschwindigkeitsfeld wie folgt zerlegt:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = y\mathbf{e}_x + \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \quad \text{und} \quad (2.7)$$

$$p(\mathbf{r}, t) \rightarrow \text{konst} + p(\mathbf{r}, t). \quad (2.8)$$

Nach Einsetzen in (2.1)–(2.4) ist folgendes System partieller Differentialgleichungen

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + y \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + u_y \mathbf{e}_x + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{u}, \quad (2.9)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.10)$$

mit den Randbedingungen

$$\mathbf{u}(x, y = \pm 1, z, t) = 0, \quad (2.11)$$

$$\mathbf{u}(x + m L_x, y, z + n L_z, t) = \mathbf{u}(x, y, z, t), \quad m, n \in \mathbb{Z} \quad (2.12)$$

und den Anfangsbedingungen

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t = 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{v}_0(\mathbf{r}) - y\mathbf{e}_x \quad (2.13)$$

zu lösen.

## 2.2 Energiebilanzen

Die kinetische Energie wird von der Arbeit durch die Bewegung der Platten und den Verlusten an kinetischer Energie, die durch Dissipation in Wärme umgewandelt wird, geändert. Bei der Herleitung der Bilanzgleichung soll der Einfluß des Störungsdruckes untersucht werden. Es wird im folgenden davon ausgegangen, daß sowohl das Geschwindigkeitsfeld als auch der dazugehörige Druck hinreichend oft stetig differenzierbar sind, d. h. klassische Lösung des Problems (2.9)–(2.13) sind.

Es wird folgendes reelles Skalarprodukt mit der dazugehörigen Norm verwendet:

$$(\mathbf{f}(\mathbf{r}), \mathbf{g}(\mathbf{r})) = \frac{1}{V_\Omega} \iiint_\Omega \sum_{\nu \in \{x, y, z\}} f_\nu(\mathbf{r}) g_\nu(\mathbf{r}) d^3r \quad \text{und} \quad (2.14)$$

$$\|\mathbf{f}\|^2 = (\mathbf{f}, \mathbf{f}). \quad (2.15)$$

Dabei bezeichnet  $\Omega$  das Grundgebiet

$$\Omega := \left\{ \mathbf{r} = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x \in [0, L_x], y \in [-1, 1], z \in [0, L_z] \right\} \quad (2.16)$$

mit seinem Volumen  $V_\Omega = 2L_x L_z$  in dimensionslosen Einheiten.

Die kinetische Gesamtenergie

$$E_{\text{ges}} = \frac{1}{2} \|\mathbf{v}\|^2 \quad (2.17)$$

der Strömung wird nach der Substitution (2.7) zu

$$E_{\text{ges}} = \frac{1}{6} + (y\mathbf{e}_x, \mathbf{u}) + \frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|^2. \quad (2.18)$$

Die einzelnen Terme lassen sich identifizieren als Energie der Grundströmung,

$$E_0 = \frac{1}{6}, \quad (2.19)$$

als Kopplungsenergie zwischen Grundströmung und Störungsströmung,

$$E_K = (y\mathbf{e}_x, \mathbf{u}), \quad (2.20)$$

sowie als kinetische Energie der Störungsströmung:

$$E_S = \frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|^2. \quad (2.21)$$

Sämtliche Energien sind dimensionslos und werden in  $\rho V U^2$  gemessen, wobei  $V$ ,  $V = V_\Omega h^3$ , das Volumen des Grundgebietes in dimensionsbehafteten Einheiten ist.

Neben den Energien sind die zeitlichen Energieänderungen wichtig. Die Änderung der Gesamtenergie in der Zeit ist

$$\varepsilon_{\text{ges}} := \dot{E}_{\text{ges}} = \varepsilon_K + \varepsilon_S \quad (2.22)$$

mit

$$\varepsilon_K := \dot{E}_K = (y\mathbf{e}_x, \dot{\mathbf{u}}) \quad \text{und} \quad (2.23)$$

$$\varepsilon_S := \dot{E}_S = (\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}). \quad (2.24)$$

Diese Gleichungen lassen sich weiter umformen, indem  $\dot{\mathbf{u}}$  mit Hilfe der Navier-Stokes-Gleichungen (2.9) eliminiert wird:

$$\begin{aligned} \varepsilon_K = & -(y\mathbf{e}_x, \nabla p) - \left( y\mathbf{e}_x, y \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right) - (y\mathbf{e}_x, u_y \mathbf{e}_x) \\ & - (y\mathbf{e}_x, (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) + \frac{1}{\text{Re}} (y\mathbf{e}_x, \Delta \mathbf{u}); \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\varepsilon_S = -(\mathbf{u}, \nabla p) - \left( \mathbf{u}, y \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right) - (\mathbf{u}, (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) - (\mathbf{u}, u_y \mathbf{e}_x) + \frac{1}{\text{Re}} (\mathbf{u}, \Delta \mathbf{u}). \quad (2.26)$$

Einige der obenstehenden Terme verschwinden identisch, andere lassen sich vereinfachen. Dabei wird ausgenutzt, daß das Geschwindigkeitsfeld in  $x$ - und  $z$ -Richtung periodisch ist. Die Periodizitätseigenschaft gilt auch für jede Ableitung, für Produkte der Geschwindigkeitskomponenten und für Kombinationen des Geschwindigkeitsfeldes mit seinen Ableitungen.

Der erste Term von  $\varepsilon_K$  läßt sich wie folgt vereinfachen:

$$\begin{aligned} - (y\mathbf{e}_x, \nabla p) &= -\frac{1}{V_\Omega} \iint_{\partial\Omega} y p \mathbf{e}_x \cdot d\mathbf{A} + \underbrace{(\nabla \cdot (y\mathbf{e}_x), p)}_{=0} \\ &= -\frac{1}{V_\Omega} \int_0^{L_z} \int_{-1}^1 y (p|_{x=L_x} - p|_{x=0}) dy dz. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Der obige Term verschwindet, falls

$$p(x=0, y, z, t) = p(x=L_x, y, z, t) \quad (2.28)$$

gefordert wird. Wie später gezeigt wird, ist dies eine sinnvolle Forderung.

Beim zweiten Ausdruck werden die Periodizitätseigenschaften ausgenutzt:

$$\begin{aligned} - \left( y\mathbf{e}_x, y \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right) &= -\frac{1}{V_\Omega} \int_0^{L_z} \int_{-1}^1 \int_0^{L_x} \frac{\partial}{\partial x} (y^2 u_x) dx dy dz \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Beim dritten Term werden zusätzlich die Haftrandbedingung und die Kontinuitätsgleichung ausgenutzt:

$$\begin{aligned} - (y\mathbf{e}_x, u_y \mathbf{e}_x) &= -\frac{1}{V_\Omega} \int_0^{L_z} \int_0^{L_x} \frac{y^2}{2} u_y \Big|_{y=-1}^{y=1} dx dz + \left( \frac{y^2}{2}, \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \\ &= - \left( \frac{y^2}{2}, \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) - \left( \frac{y^2}{2}, \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Der Term, der die Ankopplung der Grundströmung an den Advektionsterm beschreibt, ist ungleich null und läßt sich wie folgt vereinfachen:

$$\begin{aligned} - (y\mathbf{e}_x, (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) &= - \left( y, \sum_{\nu \in \{x,y,z\}} u_\nu \partial_\nu u_x \right) \\ &= - \left( y, \sum_{\nu \in \{x,y,z\}} \partial_\nu (u_\nu u_x) - u_x \underbrace{\sum_{\nu \in \{x,y,z\}} \partial_\nu u_\nu}_{=0} \right) \\ &= -\frac{1}{V_\Omega} \iiint_\Omega \sum_{\nu \in \{x,y,z\}} \partial_\nu (y u_\nu u_x) d^3r + \frac{1}{V_\Omega} \iiint_\Omega u_y u_x d^3r \\ &= -\frac{1}{V_\Omega} \iint_{\partial\Omega} y u_x \mathbf{u} \cdot d\mathbf{A} + (\mathbf{u}, u_y \mathbf{e}_x) \\ &= (\mathbf{u}, u_y \mathbf{e}_x). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Die Ankopplung der Grundströmung an den Dissipationsterm läßt sich wie folgt umformen:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\text{Re}}(\mathbf{y}\mathbf{e}_x, \Delta\mathbf{u}) &= \frac{1}{\text{Re}V_\Omega} \iiint_\Omega y \sum_{\nu \in \{x,y,z\}} \partial_\nu \partial_\nu u_x \, d^3r \\
 &= \frac{1}{\text{Re}V_\Omega} \iiint_\Omega \sum_{\nu \in \{x,y,z\}} \partial_\nu (y \partial_\nu u_x) \, d^3r - \frac{1}{\text{Re}V_\Omega} \iiint_\Omega \frac{\partial u_x}{\partial y} \, d^3r \\
 &= \frac{1}{\text{Re}V_\Omega} \oint\!\!\!\oint_{\partial\Omega} y \nabla u_x \cdot d\mathbf{A} - \frac{1}{\text{Re}V_\Omega} \int_0^{L_z} \int_0^{L_x} u_x \Big|_{y=-1}^{y=1} \, dx \, dz \\
 &= \frac{1}{2\text{Re}} \left( \frac{\partial \overline{u_x}}{\partial y} \Big|_{y=-1} + \frac{\partial \overline{u_x}}{\partial y} \Big|_{y=1} \right), \tag{2.32}
 \end{aligned}$$

wobei

$$\overline{f(\mathbf{r})} = \frac{1}{L_x L_z} \int_0^{L_z} \int_0^{L_x} f(\mathbf{r}) \, dx \, dz \tag{2.33}$$

den Mittelwert über  $x$  und  $z$  bezeichnet. Dann gilt abschließend für die zeitliche Änderung der Kopplungsenergie:

$$\varepsilon_K = (\mathbf{u}, u_y \mathbf{e}_x) + \frac{1}{2\text{Re}} \left( \frac{\partial \overline{u_x}}{\partial y} \Big|_{y=-1} + \frac{\partial \overline{u_x}}{\partial y} \Big|_{y=1} \right). \tag{2.34}$$

Jetzt werden die einzelnen Terme in  $\varepsilon_S$  untersucht. Für die Kopplung zwischen Störungsgeschwindigkeit und Störungsdruck gilt es,

$$-(\mathbf{u}, \nabla p) = -\frac{1}{V_\Omega} \oint\!\!\!\oint_{\partial\Omega} p \mathbf{u} \cdot d\mathbf{A} + \underbrace{(\nabla \cdot \mathbf{u}, p)}_{=0} \tag{2.35}$$

zu untersuchen. Damit der Druckterm keinen Beitrag zur Energieratenbilanz hat, wird analog zu (2.28)

$$p(x, y, z = 0, t) = p(x, y, z = L_z, t) \tag{2.36}$$

gefordert. Somit gilt:

$$-(\mathbf{u}, \nabla p) = 0. \tag{2.37}$$

Der folgende Term ist null:

$$-\left( \mathbf{u}, y \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right) = -\frac{1}{2V_\Omega} \int_0^{L_z} \int_{-1}^1 \int_0^{L_x} \frac{\partial}{\partial x} (y \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) \, dx \, dy \, dz = 0. \tag{2.38}$$

Nachfolgend wird die Auswirkung des Advektionsterms für die kinetische Energierate untersucht:

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{u}, (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) &= \frac{1}{V_\Omega} \iiint_\Omega \sum_{\mu, \nu \in \{x, y, z\}} u_\mu u_\nu \partial_\nu u_\mu \, d^3r \\
 &= \frac{1}{2V_\Omega} \iiint_\Omega \sum_{\nu \in \{x, y, z\}} u_\nu \partial_\nu (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) \, d^3r \\
 &= \frac{1}{2V_\Omega} \iiint_\Omega \sum_{\nu \in \{x, y, z\}} \partial_\nu (u_\nu \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) \, d^3r - \frac{1}{2V_\Omega} \iiint_\Omega \underbrace{(\nabla \cdot \mathbf{u})}_{=0} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) \, d^3r \\
 &= \frac{1}{2V_\Omega} \oint_{\partial\Omega} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{u} \cdot d\mathbf{A} \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

Er ist null und hat somit keinen Einfluß auf die Änderung der kinetischen Störungs- und Gesamtenergie. Für  $\varepsilon_S$  gilt abschließend:

$$\varepsilon_S = -(\mathbf{u}, u_y \mathbf{e}_x) + \frac{1}{\text{Re}} (\mathbf{u}, \Delta \mathbf{u}). \tag{2.40}$$

Die kinetische Gesamtleistung lautet somit:

$$\varepsilon_{\text{ges}} = \frac{1}{2\text{Re}} \left( \left. \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} \right|_{y=-1} + \left. \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} \right|_{y=1} \right) + \frac{1}{\text{Re}} (\mathbf{u}, \Delta \mathbf{u}). \tag{2.41}$$

Der erste Term repräsentiert die Leistung, die durch die Bewegung der parallelen Wände verursacht wird:

$$\varepsilon_{\text{Wand}} := \dot{E}_{\text{Wand}} = \frac{1}{2\text{Re}} \left( \left. \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} \right|_{y=-1} + \left. \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} \right|_{y=1} \right). \tag{2.42}$$

Ist  $\varepsilon_{\text{Wand}} < 0$ , wird kinetische Energie der Flüssigkeit entzogen, bei  $\varepsilon_{\text{Wand}} > 0$  wird kinetische Energie zugeführt.

Die Wandleistung läßt sich direkt aus dem Spannungstensor  $\sigma_{\mu\nu}$  ableiten. Exemplarisch wird das an der oberen Wand demonstriert. Die dimensionsbehaftete, ortsabhängige Kraft pro Fläche an der oberen Wand ( $\tilde{y} = h$  mit der Flächennormalen  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_y$ ) bei Verschiebung in Richtung  $\mathbf{t} = \mathbf{e}_x$  ist:

$$\sum_{\mu, \nu \in \{x, y, z\}} t_\mu \sigma_{\mu\nu} n_\nu \Big|_{y=1}. \tag{2.43}$$

Die dimensionsbehaftete mittlere Leistung erhält man nach Multiplikation mit der Wandgeschwindigkeit  $U$  und Mittelwertbildung über die dimensionsbehafteten Größen  $\tilde{x}$  und  $\tilde{z}$ :

$$\bar{P}_{\text{obere Wand}} = U \sum_{\mu, \nu \in \{x, y, z\}} t_\mu \int_0^{L_z h} \int_0^{L_x h} \sigma_{\mu\nu} n_\nu \Big|_{y=h} \, d\tilde{x} \, d\tilde{z}. \tag{2.44}$$

Der Übergang zu dimensionslosen Größen und Ausnutzung sämtlicher Randbedingungen liefert:

$$\bar{P}_{\text{obere Wand}} = \frac{\rho VU^3}{h} \cdot \frac{1}{2\text{Re}} \left. \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} \right|_{y=1}. \quad (2.45)$$

Die Leistungen werden in  $\rho VU^3/h$  gemessen. Die Herleitung von  $\bar{P}_{\text{untere Wand}}$  verläuft analog. Die Summe von  $\bar{P}_{\text{obere Wand}}/(\rho VU^3h^{-1})$  und  $\bar{P}_{\text{untere Wand}}/(\rho VU^3h^{-1})$  entspricht  $\varepsilon_{\text{Wand}}$ , Gleichung (2.42).

Eine positive Wandleistung bringt kinetische Energie in das System hinein, eine negative Wandleistung vernichtet sie. Im  $x$ - und  $z$ -Raum oszillierende Geschwindigkeitsanteile haben keinen Einfluß auf die eingebrachte kinetische Energie. Sie bringen zwar lokal eine Erhöhung der Energiedichte im Ortsraum, allerdings wird eine halbe Periode weiter die lokale Energiedichte verringert. Einen ähnlichen Aufhebungseffekt zeigen Geschwindigkeitsanteile  $u_x(y, t)$ , die in  $y$  symmetrisch sind. Die Energie, die über eine Platte eingebracht wird, wird von der gegenüberliegenden Platte entzogen.

Im Gegensatz dazu ist der zweite Term in der Störungsgeschwindigkeit stets negativ definit:

$$\varepsilon_{\text{Diss}} := \dot{E}_{\text{Diss}} = \frac{1}{\text{Re}}(\mathbf{u}, \Delta \mathbf{u}) = -\frac{1}{\text{Re}} \sum_{\nu \in \{x, y, z\}} \|\nabla u_\nu\|^2. \quad (2.46)$$

Er beschreibt den Verlust an kinetischer Energie aufgrund der inneren Reibung der Flüssigkeit.

Die Wand- und Dissipationsleistung wurden in der Störungsgeschwindigkeit angegeben. Ihre Darstellungen gelten ganz analog, wenn man  $\mathbf{u}$  durch  $\mathbf{v}$  ersetzt:

$$\tilde{\varepsilon}_{\text{Wand}} := \frac{1}{2\text{Re}} \left( \left. \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} \right|_{y=-1} + \left. \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} \right|_{y=1} \right), \quad (2.47)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{\text{Diss}} := -\frac{1}{\text{Re}} \sum_{\nu \in \{x, y, z\}} \|\nabla v_\nu\|^2. \quad (2.48)$$

Zwischen den einzelnen Größen existieren die Zusammenhänge

$$\tilde{\varepsilon}_{\text{Wand}} = \frac{1}{\text{Re}} + \varepsilon_{\text{Wand}} \quad \text{und} \quad \tilde{\varepsilon}_{\text{Diss}} = -\frac{1}{\text{Re}} + \varepsilon_{\text{Diss}}. \quad (2.49)$$

$-1/\text{Re}$  ist die dissipierte Energie pro Zeiteinheit der stationären Grundströmung, die durch die Energierate  $1/\text{Re}$  der beiden Wände aufrechterhalten wird.

## 2.3 Konsistenzbedingungen bei Periodizität des Druckes

Bei der Herleitung der Bilanzgleichung der Energieraten wurde festgestellt, daß der Druck zusätzliche Energiebeiträge liefern kann. Deshalb wurden die Bedingungen in den Gleichungen (2.28) und (2.36) explizit verlangt. In diesem Abschnitt werden die

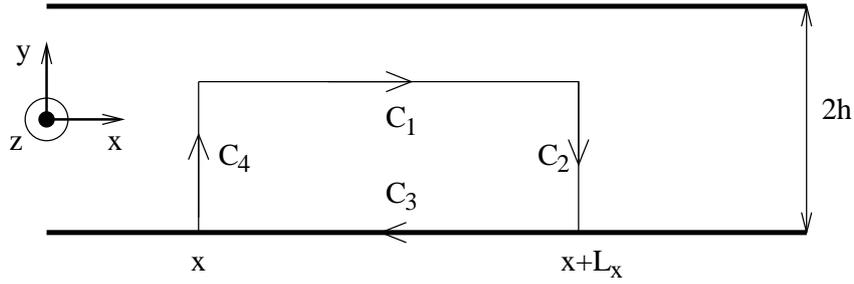


Abbildung 2.2: Pfad der Wegintegration zur Ableitung einer Eigenschaft des Geschwindigkeitsfeldes aus der Periodizität des Druckes

Gültigkeit dieser Bedingungen an den Druck für klassische Geschwindigkeitslösungen untersucht und Konsistenzbedingungen abgeleitet.

Die Differentialgleichung (2.9) läßt sich in der Form

$$\nabla p = -\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - y \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} - u_y \mathbf{e}_x - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{u} =: \mathbf{S}(\mathbf{u}) = \tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{r}, t) \quad (2.50)$$

schreiben. Aus der Periodizität des Geschwindigkeitsfeldes kann die Periodizität von  $\tilde{\mathbf{S}}$ ,

$$\tilde{\mathbf{S}}(x + m L_x, y, z + n L_z, t) = \tilde{\mathbf{S}}(x, y, z, t), \quad m, n \in \mathbb{Z}, \quad (2.51)$$

gefolgert werden. Diese Periodizitätseigenschaft überträgt sich auf den Gradienten des Druckes. Aufgrund der Translationssymmetrie des Grundgebietes bei Verschiebung um  $mL_x$  in  $x$ - bzw. um  $nL_z$  in  $z$ -Richtung,  $m, n \in \mathbb{Z}$ , werden die Bedingungen (2.28) und (2.36) auf

$$p(x + mL_x, y, z + nL_z, t) = p(x, y, z, t), \quad m, n \in \mathbb{Z}, \quad (2.52)$$

umgeschrieben. Die Bedingungen (2.28) und (2.36) verlangen auf zwei der drei Paare gegenüberliegender Quaderflächen des Grundgebietes  $\Omega$  den gleichen Druck. Durch die Periodizität des Geschwindigkeitsfeldes und durch die Druckrandbedingungen (2.28) und (2.36) muß auch der Störungsdruck periodisch sein, siehe (2.52).

Im folgenden wird die Bedingung (2.52) auf eine Eigenschaft des Geschwindigkeitsfeldes zurückgeführt. Dazu wird die Bedingung (2.52) mit  $m = 1$  und  $n = 0$  wie folgt geschrieben:

$$0 = \int_{C_1} \nabla p \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{r}, \quad (2.53)$$

wobei der Integrationsweg  $C_1$  in Bild 2.2 dargestellt ist. Aufgrund von (2.51) muß

$$0 = \int_{C_2+C_4} \tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{r} \quad (2.54)$$

gelten. Dann gilt auch

$$\int_{C_1+C_3} \tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{r} = 0, \quad (2.55)$$

da bei einer exakten Geschwindigkeitslösung die Rotation von  $\tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{r}, t)$  verschwindet und ein geschlossenes Pfadintegral über ein Gradientenfeld den Wert Null ergibt. Mit der letzten Bedingung läßt sich die Forderung (2.53), in der der Weg des Integrals über  $C_1$  läuft, durch ein Integral über  $C_3$  ausdrücken:

$$0 = \int_{C_3} \tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{r}. \quad (2.56)$$

Der Weg  $C_3$  läuft über den Plattenrand bei  $y = -1$ , auf dem die Geschwindigkeit und einige ihrer Ableitungen null sind. Es verbleibt

$$0 = \int_x^{x+L_x} \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \Big|_{y=-1} dx. \quad (2.57)$$

Eine ähnliche Aussage erhält man, wenn man den Weg nicht über die untere, sondern über die obere Platte schließt. Des weiteren kann man den Weg nicht nur entlang der  $x$ -Achse wählen, sondern statt dessen entlang der  $z$ -Achse, um die Druckperiodizität in  $z$ -Richtung zu untersuchen. Wenn man zum Ende noch einmal die Periodizitätseigenschaft der Geschwindigkeitskomponenten ausnutzt, erhält man die Bedingungen in endgültiger Form:

$$0 = \int_0^{L_x} \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \Big|_{y=\pm 1} dx = \int_0^{L_z} \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \Big|_{y=\pm 1} dz. \quad (2.58)$$

Die Geschwindigkeitsanteile von  $u_x$  bzw. von  $u_z$ , die nach Integration über  $x$  bzw.  $z$  nicht verschwinden, erfüllen weitere Randbedingungen.

Im Anhang A werden zwei Methoden erwähnt, wie der Druck berechnet werden kann. Die Berechnung durch ein Kurvenintegral wird ausführlich dargelegt. Die durch diese Methode gewonnenen Formeln (A.13) und (A.14) bestätigen einige Teilergebnisse von (2.58).



# 3 Simulation mit der Galerkin-Methode

## 3.1 Ein kurzer Überblick über Näherungsverfahren

Zur numerischen Lösung partieller, nichtlinearer, instationärer Differentialgleichungen existieren unterschiedliche Verfahren. Vor allem bei komplizierten Geometrien werden die Finite-Elemente- (FEM), Finite-Volumen- (FVM) oder Finite-Differenzen-Methoden (FDM) verwendet [Fle91a, Fle91b, Sch88]. Alle genannten Verfahren zeichnen sich dadurch aus, daß die Lösungsfunktionen lokal im ganzen Ortsraum approximiert werden. Die Rand-Elemente-Methoden benötigen dagegen nur eine Diskretisierung auf dem Rand, setzen aber die Kenntnis der Greenschen Funktion für den unendlich ausgedehnten Raum voraus.

Im Gegensatz dazu stehen Verfahren, die einen Ansatz der Lösungsfunktion für den gesamten Ortsraum machen. Sie sind bei einfachen Geometrien, wie der hier verwendeten, sehr effizient. Nachdem der Ansatz in die partiellen Differentialgleichungen eingesetzt wurde, wird das Residuum auf Testfunktionen projiziert. Diese Verfahren heißen deshalb Methoden der gewichteten Residuen. Die partiellen Differentialgleichungen werden so auf gewöhnliche reduziert. Es gibt eine Reihe dieser Verfahren. Sie unterscheiden sich sowohl im Ansatz der gesuchten Funktionen als auch in der Wahl der Basis- und Testfunktionen [Fle91a].

Die gesuchten Geschwindigkeitsfelder des dreidimensionalen Raumes können als Linearkombination von poloidalen und toroidalen Feldern dargestellt werden (siehe z. B. [Poz97, CB97, Sch99]). Dadurch können die vektoriellen Basisfunktionen aus skalaren Feldern berechnet werden, wobei die Kontinuitätsgleichung exakt erfüllt wird. Im Falle einer zweidimensionalen Geometrie lassen sich dieselben Vereinfachungen durch Einführung einer Stromfunktion [Cha81, CB97] erreichen. Weiterhin kann man das Problem auf die Normalengeschwindigkeit und -vortizität reduzieren [CE97].

Wird auf diese Ansätze verzichtet, müssen die Kontinuitätsgleichung und die Randbedingungen entweder nachträglich, wie bei  $\tau$ -Methoden, berücksichtigt werden, oder die Erfüllung dieser Gleichung und Bedingungen wird von den Basisfunktionen verlangt. Hier wird ein Galerkin-Verfahren verwendet, bei dem die Ansatz- und Testfunktionen aus dem gleichen Funktionenraum sind.

Am Anfang dieses Kapitels wird die Anwendung des Galerkin-Verfahrens gezeigt. Im Anschluß folgt die Aufstellung verschiedener Basissysteme.

## 3.2 Galerkin-Verfahren

Hier wird das Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  nach Basisfunktionen  $\mathbf{B}^{(i)}(\mathbf{r})$  des Ortsraumes mit zeitabhängigen Entwicklungskoeffizienten entwickelt:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^N c_i(t) \mathbf{B}^{(i)}(\mathbf{r}). \quad (3.1)$$

Die Basisfunktionen werden divergenzfrei gewählt:

$$\nabla \cdot \mathbf{B}^{(i)} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (3.2)$$

Die Haftrandbedingung (2.11), die Periodizitätsrandbedingungen (2.12) und die abgeleiteten Bedingungen (2.58) für einen periodischen Druck werden auf die Basisfunktionen übertragen:

$$\mathbf{B}^{(i)} \Big|_{y=\pm 1} = 0, \quad (3.3)$$

$$\mathbf{B}^{(i)}(x + m L_x, y, z + n L_z) = \mathbf{B}^{(i)}(x, y, z), \quad m, n \in \mathbb{Z}, \quad (3.4)$$

$$\int_0^{L_x} \frac{\partial^2 B_x^{(i)}}{\partial y^2} \Big|_{y=\pm 1} dx = 0 \quad \text{und} \quad (3.5)$$

$$\int_0^{L_z} \frac{\partial^2 B_z^{(i)}}{\partial y^2} \Big|_{y=\pm 1} dz = 0. \quad (3.6)$$

Der Ansatz (3.1) wird in die Navier-Stokes-Gleichungen (2.9) eingesetzt und auf  $\mathbf{B}^{(i)}$  projiziert. Man erhält nichtlineare gewöhnliche Differentialgleichungen der Form:

$$\sum_{k=1}^N M_{ik} \dot{c}_k(t) = \sum_{k=1}^N L_{ik} c_k(t) - \sum_{k,l=1}^N N_{ikl} c_k(t) c_l(t), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (3.7)$$

Die auftretenden Matrizen und Koeffizienten sind wie folgt definiert: die Metrik-Matrix

$$M_{ik} = \left( \mathbf{B}^{(i)}, \mathbf{B}^{(k)} \right), \quad (3.8)$$

die Matrix des linearisierten Problems

$$L_{ik} = -A_{ik} - C_{ik} - \frac{1}{\text{Re}} D_{ik} \quad (3.9)$$

mit

$$A_{ik} = \left( \mathbf{B}^{(i)}, y \frac{\partial \mathbf{B}^{(k)}}{\partial x} \right), \quad (3.10)$$

$$C_{ik} = \left( \mathbf{B}^{(i)}, B_y^{(k)} \mathbf{e}_x \right), \quad (3.11)$$

$$D_{ik} = - \left( \mathbf{B}^{(i)}, \Delta \mathbf{B}^{(k)} \right) \quad (3.12)$$

sowie die nichtlinearen Koeffizienten

$$N_{ikl} = \left( \mathbf{B}^{(i)}, \left( \mathbf{B}^{(k)} \cdot \nabla \right) \mathbf{B}^{(l)} \right). \quad (3.13)$$

Sie haben folgende Symmetrieeigenschaften:

$$M_{ik} = M_{ki}, \quad (3.14)$$

$$A_{ik} = -A_{ki}, \quad (3.15)$$

$$D_{ik} = D_{ki}, \quad (3.16)$$

$$N_{ikl} = -N_{lki}. \quad (3.17)$$

Die Eigenschaften lassen sich unter Verwendung partieller Integration, der Kontinuitätsgleichung und der Randbedingungen herleiten.

Der Druck spielt im dynamischen System (3.7) keine Rolle, denn

$$\left( \mathbf{B}^{(i)}, \nabla p \right) = \frac{1}{V_\Omega} \iint_{\partial\Omega} p \mathbf{B}^{(i)} \cdot d\mathbf{A} - \left( \nabla \cdot \mathbf{B}^{(i)}, p \right) = 0, \quad (3.18)$$

was aus den geforderten Periodizitätseigenschaften des Druckes (2.28), (2.36) sowie den Periodizitätseigenschaften der Basisfunktionen (3.4) und ihrer Eigenschaft (3.2) folgt.

### 3.3 Basisfunktionen

In diesem Unterkapitel werden die Basisfunktionen unter Beachtung der Bedingungen (3.3) bis (3.6) konstruiert.

Der Ansatz

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \mathbf{b}(y), \quad k_y = 0 \quad (3.19)$$

erfüllt die Haftrandbedingung (3.3) und die Periodizitätsforderung (3.4), falls

$$\mathbf{b}(\pm 1) = 0 \quad (3.20)$$

und

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} m\alpha \\ 0 \\ n\beta \end{pmatrix}, \quad m, n \in \mathbb{Z} \quad \text{mit} \quad \alpha L_x = 2\pi \quad \text{und} \quad \beta L_z = 2\pi \quad (3.21)$$

gelten. Durch  $\alpha$  und  $\beta$  bzw.  $L_x$  und  $L_z$  werden die Ausdehnungen des Gebietes  $\Omega$  in Haupt- und Querströmungsrichtung und sein Volumen  $V_\Omega$  definiert:

$$V_\Omega = 2L_x L_z = \frac{8\pi^2}{\alpha\beta}. \quad (3.22)$$

Zur Erfüllung der Kontinuitätsgleichung wird der Ansatz (3.19) in (3.2) eingesetzt:

$$ik_x b_x(y) + b'_y(y) + ik_z b_z(y) = 0. \quad (3.23)$$

Ist  $k_x \neq 0$  oder  $k_z \neq 0$ , kann aus der Haftrandbedingung (3.20) an  $\mathbf{b}$  zusätzlich

$$b'_y(\pm 1) = 0 \quad (3.24)$$

gefolgert werden. Für das weitere Vorgehen empfiehlt sich eine Fallunterscheidung.

Für die Basisfunktionen  $\mathbf{B}$  wird in den anschließenden Unterkapiteln folgende Notation verwendet:

$$\mathbf{B}^{(m,n,l,p)}(\mathbf{r}) = e^{i(m\alpha x + n\beta z)} \mathbf{b}^{(m,n,l,p)}(y). \quad (3.25)$$

$l$  charakterisiert die Ortsentwicklung in der  $y$ -Koordinate,  $p$  die in den folgenden Abschnitten angegebenen Polarisierungen. Es wird von den Basisfunktionen

$$\mathbf{B}^{(-m,-n,l,p)}(\mathbf{r}) = [\mathbf{B}^{(m,n,l,p)}(\mathbf{r})]^* \quad (3.26)$$

gefordert. Dabei bezeichnet  $*$  das konjugiert Komplexe. Diese Bedingung sorgt dafür, daß wegen  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \in \mathbb{R}^3$  auch

$$c_{(-m,-n,l,p)}(t) = c_{(m,n,l,p)}^*(t) \quad (3.27)$$

gilt. Das ermöglicht später eine Reduktion der Anzahl der zu lösenden Differentialgleichungen.

Die Anwendung der Bedingungen (3.5) und (3.6) auf die Basisfunktionen bei endlichen Galerkin-Verfahren erfordert eine weitergehende Diskussion. Bei klassischen Lösungen waren die Ergebnisse (2.58) eine Konsequenz des periodischen Druckes. Zur Herleitung war die Gültigkeit der Gleichung (A.4) nötig. Bei Verwendung endlicher Galerkin-Systeme ist die Gültigkeit von (A.4) für beliebige Basissysteme, Reynoldszahlen und Anfangsbedingungen verletzt. Wird der Druck trotzdem nach Gleichung (A.12) berechnet, so sichern die Bedingungen (3.5) und (3.6) einen periodischen Druck, siehe (A.13) und (A.14).

Der Ansatz (3.19) für die Basisfunktionen läßt eine weitere Vereinfachung der Druckrandbedingungen (3.5) und (3.6) zu:

$$\int_0^{L_x} e^{ik_x x} dx b''_x(\pm 1) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \int_0^{L_z} e^{ik_z z} dz b''_z(\pm 1) = 0. \quad (3.28)$$

Damit die Bedingung (3.5) erfüllt ist, muß mindestens einer der drei Fälle erfüllt sein:

$$1. \quad b_x(y) \equiv 0, \quad 2. \quad k_x \neq 0, \quad 3. \quad b''_x(\pm 1) = 0. \quad (3.29)$$

Aus der Bedingung (3.6) resultieren die drei Möglichkeiten

$$1. \quad b_z(y) \equiv 0, \quad 2. \quad k_z \neq 0, \quad 3. \quad b''_z(\pm 1) = 0, \quad (3.30)$$

sie zu erfüllen. Der dritte Fall stellt eine zusätzliche Randbedingung dar. Sie wird nur verlangt, wenn einer der ersten beiden Fälle nicht erfüllt ist.

### 3.3.1 $k = 0$

In diesem Fall reduziert sich die Gleichung (3.23) auf

$$b'_y(y) = 0. \quad (3.31)$$

Unter Beachtung der Randbedingungen (3.20) folgt

$$b_y(y) = 0. \quad (3.32)$$

Es können dann die Polarisierungen

$$\mathbf{B}^{(0,0,l,1)}(\mathbf{r}) = J_l(y)\mathbf{e}_x \quad \text{und} \quad \mathbf{B}^{(0,0,l,2)}(\mathbf{r}) = J_l(y)\mathbf{e}_z \quad (3.33)$$

definiert und verwendet werden, wobei

$$J_l : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad J_l(\pm 1) = J'_l(\pm 1) = 0, \quad l \in \mathbb{N}_0 \quad (3.34)$$

gelten muß. Die Hafttrandbedingung wird durch  $J_l(\pm 1) = 0$  erfüllt. Da  $\mathbf{k} = 0$  ist, muß zur Erfüllung der Bedingung (3.5) bei Basisfunktionen der Polarisation eins der 3. Fall in Gleichung (3.29) erfüllt werden. Die Bedingung (3.6) ist durch  $b_z^{(0,0,l,1)}(y) = 0$  erfüllt. Eine analoge Diskussion der Basisfunktionen mit der Polarisation zwei in Hinblick auf Erfüllung der Bedingungen (3.5) und (3.6) bestätigt ebenfalls die Verwendung der Funktionen  $J_l(y)$ .

Die hier abgeleiteten Basisfunktionen sind wegen (3.26) reell:

$$\mathbf{B}^{(0,0,l,p)}(\mathbf{r}) \in \mathbb{R}^3, \quad \forall l \in \mathbb{N}_0 \quad \text{und} \quad p = 1, 2. \quad (3.35)$$

Sie werden aufgrund  $\mathbf{k} = 0$  Nullmoden genannt. Gilt  $\mathbf{k} \neq 0$ , wird von Nichtnullmoden gesprochen.

### 3.3.2 $k_x \neq 0$ und $k_z = 0$

Gleichung (3.23) liefert

$$ik_x b_x(y) + b'_y(y) = 0. \quad (3.36)$$

$b_y(y)$  kann im Rahmen der Randbedingungen frei gewählt werden. Für  $b_x(y)$  gilt dann

$$b_x(y) = \frac{i}{k_x} b'_y(y). \quad (3.37)$$

Für die erste Polarisation wird  $b_y(y) \equiv 0$  gewählt. Die einzige nichtverschwindende Komponente ist  $b_z(y)$ :

$$\mathbf{B}^{(m,0,l,1)}(\mathbf{r}) = e^{im\alpha x} J_l(y)\mathbf{e}_z. \quad (3.38)$$

Die Bedingung (3.5) ist wegen  $k_x \neq 0$  erfüllt. Die Bedingung (3.6) wird durch das Verschwinden der zweiten Ableitung der Funktionen  $J_l(y)$  sichergestellt.

Für die zweite Polarisation wird  $b_z(y) \equiv 0$  gewählt, und man erhält

$$\mathbf{B}^{(m,0,l,2)}(\mathbf{r}) = e^{im\alpha x} \left( \frac{i}{m\alpha} V_l'(y), V_l(y), 0 \right)^T \quad (3.39)$$

mit

$$V_l : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad V_l(\pm 1) = V_l'(\pm 1) = 0 \quad \text{und} \quad l \in \mathbb{N}_0. \quad (3.40)$$

Die Bedingungen (3.5) und (3.6) sind für Basisfunktionen der Polarisation zwei wegen  $k_x \neq 0$  bzw.  $b_z \equiv 0$  erfüllt.

### 3.3.3 $k_x = 0$ und $k_z \neq 0$

Die Herleitung der beiden Polarisationen für diesen Fall gestaltet sich äquivalent zum letzten Unterkapitel. Im wesentlichen sind nur Vertauschungen vorzunehmen. Die erste Polarisation ist

$$\mathbf{B}^{(0,n,l,1)}(\mathbf{r}) = e^{in\beta z} J_l(y) \mathbf{e}_x, \quad (3.41)$$

und die zweite Polarisation ist

$$\mathbf{B}^{(0,n,l,2)}(\mathbf{r}) = e^{in\beta z} \left( 0, V_l(y), \frac{i}{n\beta} V_l'(y) \right)^T \quad (3.42)$$

mit den bereits bekannten Randbedingungen an  $J_l(y)$  und  $V_l(y)$ .

### 3.3.4 $k_x \neq 0$ und $k_z \neq 0$

Der Ansatz

$$b_y(y) = V(y), \quad (3.43)$$

$$b_x(y) = \frac{ik_x}{k_x^2 + k_z^2} V'(y) + \frac{i}{k_x} H(y), \quad (3.44)$$

$$b_z(y) = \frac{ik_z}{k_x^2 + k_z^2} V'(y) - \frac{i}{k_z} H(y) \quad (3.45)$$

liefert divergenzfreie Basisfunktionen. Die beiden Funktionen  $V(y)$  und  $H(y)$  sind unabhängig voneinander wählbar, wobei  $V(y)$  die bereits bekannten Randbedingungen erfüllen muß, siehe (3.40). Die Bedingungen (3.5) und (3.6) sind in diesem Fall mit  $k_x \neq 0$  und  $k_z \neq 0$  stets erfüllt.  $H(y)$  muß deshalb nur  $H(\pm 1) = 0$  genügen, um die Haftrandbedingung (3.3) bzw. (3.20) zu erfüllen.

Für die erste Polarisation wird  $V(y) \equiv 0$  gewählt:

$$\mathbf{B}^{(m,n,l,1)}(\mathbf{r}) = e^{i(m\alpha x + n\beta z)} \left( \frac{i}{m\alpha} H_l(y), 0, -\frac{i}{n\beta} H_l(y) \right)^T \quad (3.46)$$

mit

$$H_l : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad H_l(\pm 1) = 0 \quad \text{und} \quad l \in \mathbb{N}_0. \quad (3.47)$$

Damit (3.26) gilt, wurde die imaginäre Einheit explizit in  $\mathbf{b}^{(m,n,l,1)}(y)$  aufgeführt. Für die zweite Polarisation soll  $H(y) = -\frac{k_x^2}{k_x^2 + k_z^2} V'(y)$  gelten. Diese Wahl widerspricht nicht den Randbedingungen von  $H(y)$  und  $V(y)$ . Es folgt:

$$\mathbf{B}^{(m,n,l,2)}(\mathbf{r}) = e^{i(m\alpha x + n\beta z)} \left( 0, V_l(y), \frac{i}{n\beta} V_l'(y) \right)^T. \quad (3.48)$$

In diesem Fall läßt sich durch  $H(y) = \frac{k_z^2}{k_x^2 + k_z^2} V'(y)$  noch eine dritte Polarisation charakterisieren:

$$\mathbf{B}^{(m,n,l,3)}(\mathbf{r}) = e^{i(m\alpha x + n\beta z)} \left( \frac{i}{m\alpha} V_l'(y), V_l(y), 0 \right)^T. \quad (3.49)$$

Die Basisfunktionen haben für alle  $m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  folgende Eigenschaften:

1. Es existiert mindestens ein  $l \in \mathbb{N}_0$ , so daß

$$\int_{-1}^1 b_\nu^{(m,n,2l,1)}(y) dy \neq 0, \quad \nu = x, z \quad (3.50)$$

gilt.

2.  $\forall l \in \mathbb{N}_0$  und  $p = 2, 3$  gilt:

$$\int_{-1}^1 b_\nu^{(m,n,2l,p)}(y) dy = 0, \quad \nu = x, z. \quad (3.51)$$

Die Basisfunktionen der ersten Polarisation mit den Basisfunktionen der zweiten oder dritten Polarisation ergeben vollständige Basissysteme für gegebene  $m$  und  $n$ :

$$S_1^{(m,n)} = \left\{ \mathbf{B}^{(m,n,l,1)}(\mathbf{r}), \mathbf{B}^{(m,n,l,2)}(\mathbf{r}) \right\}_{l=0}^\infty \quad \text{und} \quad (3.52)$$

$$S_2^{(m,n)} = \left\{ \mathbf{B}^{(m,n,l,1)}(\mathbf{r}), \mathbf{B}^{(m,n,l,3)}(\mathbf{r}) \right\}_{l=0}^\infty. \quad (3.53)$$

Die Vollständigkeit bezieht sich auch auf die Möglichkeit, eine Strömung  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  mit

$$\int_{-1}^1 u_\nu(\mathbf{r}, t) dy \neq 0, \quad \nu = x, z, \quad (3.54)$$

zu beschreiben. Die Kombination der Basisfunktionen der Polarisationen zwei und drei beschreibt eine derartige Strömung nicht. Die Kombination ist nicht vollständig. Sei  $\mathbf{B}^{(m,n,0,1)}(y)$  eine Basisfunktion, für die (3.50) gilt. Dann kann folgende vollständige Basis angegeben werden:

$$S_3^{(m,n)} = \left\{ \mathbf{B}^{(m,n,0,1)}(\mathbf{r}) \right\} \cup \left\{ \mathbf{B}^{(m,n,l,2)}(\mathbf{r}), \mathbf{B}^{(m,n,l,3)}(\mathbf{r}) \right\}_{l=0}^\infty. \quad (3.55)$$

## 3.4 Beispiele für Basisfunktionen

Die im letzten Kapitel erarbeiteten Basisfunktionen sind durch die skalaren Funktionen  $H_l(y)$  mit (3.47),  $J_l(y)$  mit (3.34) und  $V_l(y)$  mit (3.40) bestimmt.

### 3.4.1 Polynomiale Basis

Bei der polynomialen Basis sind die Nullmoden Polynome. Die Nichtnullmoden sind Kombinationen von trigonometrischen Funktionen in  $x$  und  $z$  und Polynomen in  $y$ .

Die Randbedingungen von  $H_l(y)$ ,  $H_l(\pm 1) = 0$ , und  $V_l(y)$ ,  $V_l(\pm 1) = V_l'(\pm 1) = 0$ , werden durch die Wahl

$$H_l(y) = (1 - y^2) L_l(y) \quad \text{und} \quad V_l(y) = (1 - y^2)^2 L_l(y) \quad (3.56)$$

erfüllt. Dabei sind  $L_l(y)$  Legendre-Polynome.

In einem späteren Kapitel wird vorausgesetzt, daß die Basisfunktionen der Menge  $\{\mathbf{B}^{(0,0,l,1)}(\mathbf{r}), \mathbf{B}^{(0,0,l,2)}(\mathbf{r})\}_{l=0}^{\infty}$  orthonormiert sind. Die Basisfunktionen der Polarisation eins sind orthogonal zu den Basisfunktionen der Polarisation zwei, da sie keine gemeinsamen nichtverschwindenden Komponenten haben. Die Orthonormalität zwischen Basisfunktionen gleicher Polarisation wird erfüllt, falls die Funktionen der Menge  $\{J_l(y)\}_{l=0}^{\infty}$  orthonormal zueinander sind. Dazu werden als erstes Funktionen  $\tilde{J}_l(y)$  angegeben, die alle Eigenschaften (3.34) erfüllen. Diese werden dann orthonormiert.

Die Haftrandbedingungen für  $\tilde{J}_l(y)$ ,  $\tilde{J}_l(\pm 1) = 0$ , werden durch den Ansatz

$$\tilde{J}_l(y) = (1 - y^2) y^l (1 - d_l y^2) \quad (3.57)$$

erfüllt. Er ist symmetrieehaltend, d. h., es gilt

$$\tilde{J}_l(-y) = (-1)^l J_l(y). \quad (3.58)$$

Die Koeffizienten  $d_l$  werden durch die zweite Randbedingung  $\tilde{J}_l''(\pm 1) = 0$  bestimmt. Aufgrund der Symmetrie reicht  $\tilde{J}_l''(1) = 0$ . Man erhält:

$$d_l = \frac{1 + 2l}{5 + 2l}. \quad (3.59)$$

Die Funktionen  $\tilde{J}_l(y)$  werden mit dem Gram-Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren [BS91] orthonormiert. Daraus resultiert die Basis  $\{J_l(y)\}_{l=0}^{\infty}$ . Es folgen die ersten sechs Basisfunktionen:

$$J_0(y) = \frac{3}{8} \sqrt{\frac{35}{62}} (y^2 - 1) (y^2 - 5), \quad (3.60)$$

$$J_1(y) = \frac{1}{8} \sqrt{\frac{231}{10}} (y^2 - 1) y (3y^2 - 7), \quad (3.61)$$

$$J_2(y) = \frac{1}{16} \sqrt{\frac{1365}{15562}} (y^2 - 1) (341y^4 - 628y^2 + 71), \quad (3.62)$$

$$J_3(y) = \frac{1}{16} \sqrt{\frac{231}{2690}} (y^2 - 1) y (975y^4 - 1704y^2 + 401), \quad (3.63)$$

$$J_4(y) = \frac{1}{64} \sqrt{\frac{19635}{222386}} (y^2 - 1) (9789y^6 - 17563y^4 + 6215y^2 - 265) \quad \text{und} \quad (3.64)$$

$$J_5(y) = \frac{1}{64} \sqrt{\frac{285285}{123202}} (y^2 - 1) y (4573y^6 - 8723y^4 + 4087y^2 - 417). \quad (3.65)$$

Eine Darstellung der Funktionen ist im Bild 3.1 zu sehen.

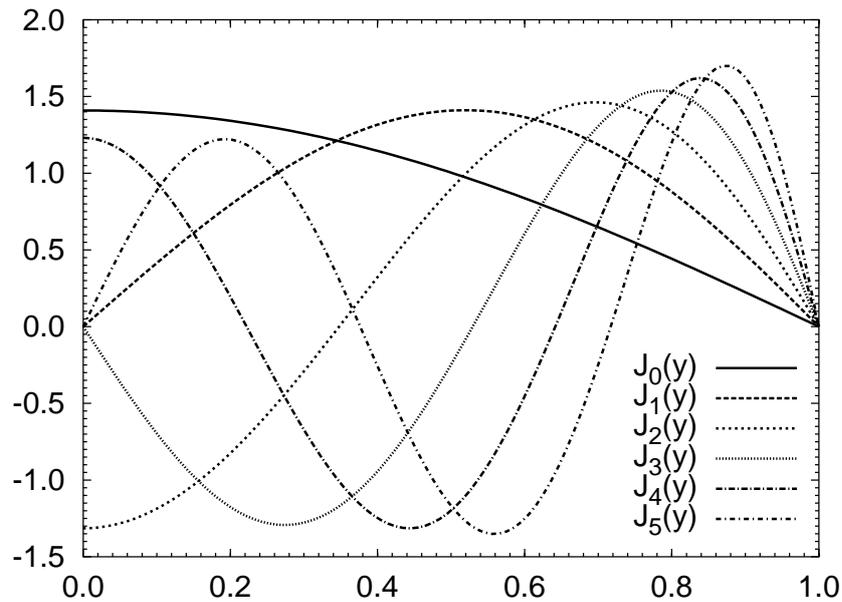


Abbildung 3.1: Darstellung der Funktionen  $J_0(y), \dots, J_5(y)$  im polynomialen Fall

Bei Verzicht auf die Bedingungen (3.5) und (3.6) wären die Funktionen  $J_l(y)$  spezielle Jacobi-Polynome [AS65]

$$J_l(y) = A_l (1 - y^2) P_l^{(2,2)}(y) \quad (3.66)$$

mit den Normierungskonstanten  $A_l$ , siehe auch [PR02].

### 3.4.2 Trigonometrische Basis

Die trigonometrische Basis zeichnet sich dadurch aus, daß die Nullmoden trigonometrische Funktionen sind. Dazu werden sowohl die Funktionen  $J_l(y)$ ,  $l = 0, 1, \dots$ , als auch die Funktionen  $V_l(y)$  und  $H_l(y)$ ,  $l = 0, 1, \dots$ , aus trigonometrischen Funktionen zusammengesetzt.

Die Funktionen

$$H_l(y) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}(l+1)(y+1)\right) \quad (3.67)$$

erfüllen (3.47). Ihre Darstellung läßt sich vereinfachen, wenn man die Funktionen nach symmetrischen und antisymmetrischen Funktionen trennt:

$$H_{2l}(y) = \sqrt{2} (-1)^l \cos\left(\frac{\pi}{2}(2l+1)y\right) \quad \text{und} \quad (3.68)$$

$$H_{2l+1}(y) = -\sqrt{2} (-1)^l \sin(\pi(l+1)y), \quad \forall l \in \mathbb{N}_0. \quad (3.69)$$

Die Funktionen sind orthonormiert,

$$(H_{l'}(y), H_l(y)) = \delta_{l'l}, \quad (3.70)$$

und alle geraden Ableitungen auf dem Rand verschwinden:

$$H_l^{(2l')}(\pm 1) = 0, \quad \forall l', l \in \mathbb{N}_0. \quad (3.71)$$

Aufgrund der letzten Eigenschaft können die Funktionen  $J_l(y)$  direkt durch  $H_l(y)$  definiert werden:

$$J_l(y) := H_l(y), \quad \forall l \in \mathbb{N}_0. \quad (3.72)$$

Die Funktionen  $V_l(y)$  werden durch den Ansatz

$$V_l(y) := H_l(y) - d_l H_{l+2}(y) \quad (3.73)$$

definiert. Dieser Ansatz ist symmetrieeerhaltend. Aus der Randbedingung  $V_l'(1) = 0$  läßt sich  $d_l$  bestimmen. Damit wird

$$V_l(y) = H_l(y) - \frac{l+1}{l+3} H_{l+2}(y), \quad \forall l \in \mathbb{N}_0, \quad \text{bzw.} \quad (3.74)$$

$$V_{2l}(y) = \sqrt{2} (-1)^l \left[ \cos\left(\frac{\pi}{2}(2l+1)y\right) + \frac{2l+1}{2l+3} \cos\left(\frac{\pi}{2}(2l+3)y\right) \right] \quad \text{und} \quad (3.75)$$

$$V_{2l+1}(y) = -\sqrt{2} (-1)^l \left[ \sin(\pi(l+1)y) + \frac{l+1}{l+2} \sin(\pi(l+2)y) \right], \quad \forall l \in \mathbb{N}_0. \quad (3.76)$$

Die Funktionen  $V_l(y)$  erfüllen weitere Randbedingungen:

$$V_l^{(2l')}(\pm 1) = 0, \quad \forall l', l \in \mathbb{N}_0. \quad (3.77)$$

# 4 Spezielle Stabilitätsaussagen bei der ebenen Couette-Strömung

## 4.1 Stabilitätskriterium

Die asymptotische Stabilität einer Grundströmung bei Störung durch eine spezielle Anfangsbedingung  $\mathbf{u}_0(\mathbf{r})$  ist durch

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E_S(t)}{E_S(0)} \rightarrow 0 \quad \text{mit} \quad \frac{1}{2} \|\mathbf{u}_0(\mathbf{r})\|^2 = E_S(0) \quad (4.1)$$

definiert. Wenn eine Grundströmung asymptotisch stabil gegen beliebige Anfangsbedingungen der Störungsströmung ist, nennt man sie global stabil. Von vielen hydrodynamischen Beispielen ist bekannt, daß sie bei hinreichend kleiner Reynoldszahl stets global stabil sind [Jos76]. Verringert man die Reynoldszahl weiter, so erschließt sich ein Gebiet global monotoner Stabilität, in dem die Störungsenergie monoton gegen null geht. Für die ebene Couette-Strömung ist dieser Wert bei  $\text{Re}_E \approx \sqrt{1708}/2 \approx 20,66$  mit  $\alpha = 0$  und  $\beta = 1,5585$  [RH93, Jos66].

Neben der asymptotischen Stabilität, die Aussagen über das Langzeitverhalten der Störungsströmung macht, charakterisiert die lineare Stabilität das Verhalten infinitesimal kleiner Störungen auf kleinen Zeitskalen. Seit [Rom73] ist bekannt, daß die ebene Couette-Strömung linear stabil ist. Dies wird auch in einer Arbeit zur gemischten ebenen Couette-Poiseuille-Strömung deutlich [Bal97]. Der Übergang zur Turbulenz muß aufgrund der linearen Stabilität subkritisch erfolgen. Die Grenzkurve  $A(\text{Re})$  beschreibt die notwendige Amplitude der Störung zum Zeitpunkt  $t = 0$  in Abhängigkeit von der Reynoldszahl. In [DD94, DD95] wird experimentell die Grenzkurve bestimmt. Die Anfangsströmungen sind turbulente Punkte, die durch einen Hitzdraht und Wasserinjektion lokal erzeugt werden. Sie erhalten

$$A_{\text{kritisch}}(\text{Re}) \sim (\text{Re} - \text{Re}_{\text{NL}})^{-\kappa}, \quad \text{Re} \geq \text{Re}_{\text{NL}}, \quad (4.2)$$

mit

$$\kappa \in [0,3,0,8] \quad \text{und} \quad \text{Re}_{\text{NL}} \approx 325 \pm 5. \quad (4.3)$$

Andere Arbeiten liefern andere kritische Reynoldszahlen  $\text{Re}_{\text{NL}}$ : z. B.  $\text{Re}_{\text{NL}} = 370 \pm 10$  [DHB92].

In [SE97] wird gezeigt, daß das Übergangsbereich zwischen globaler Stabilität und Instabilität bei periodischen Störungsströmungen in allen drei Raumrichtungen mit

spannungsfreien Randbedingungen an den Wänden und Einführung einer Volumenkraft fraktal ist.

Im folgenden soll gezeigt werden, daß ganz spezielle Störungsströmungen die globale Stabilität der Grundströmung zur Folge haben. Im anschließenden Abschnitt wird die lineare Stabilität endlicher Galerkin-Systeme untersucht.

## 4.2 Globale Stabilität spezieller Strömungen

Simulationen des Geschwindigkeitsfeldes mit  $\alpha = 0$  bei endlichen Reynoldszahlen liefern nur endliche Lebensdauern der Störungsströmungen. Die Lebensdauer eines Zustandes definiert sich über die Zeitspanne vom Beginn der Simulation bis zu dem Zeitpunkt, bei dem z. B. die Störungsenergie so klein ist, daß das Verhalten der Strömung nur von den linearen Gleichungen bestimmt wird. Die endlichen Lebensdauern resultieren aus der globalen Stabilität dieser speziellen Strömungen, die für Strömungen mit  $\alpha = 0$  bewiesen werden soll.

Zu  $\alpha = 0$  gehört eine Störungsgeschwindigkeit, die unabhängig von  $x$  ist. Die Navier-Stokes-Gleichungen (2.9) für  $\mathbf{u}(y, z, t)$  vereinfachen sich zu:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + u_y \mathbf{e}_x + (u_y \partial_y + u_z \partial_z) \mathbf{u} = - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial z} \end{pmatrix} + \frac{1}{\text{Re}} \Delta_{(y,z)} \mathbf{u} \quad \text{und} \quad \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \quad (4.4)$$

Führt man die Skalierung

$$\begin{aligned} u_x(\cdot, t) &\rightarrow \hat{u}_x(\cdot, \hat{t}), & u_y(\cdot, t) &\rightarrow \frac{1}{\text{Re}} \hat{u}_y(\cdot, \hat{t}), & u_z(\cdot, t) &\rightarrow \frac{1}{\text{Re}} \hat{u}_z(\cdot, \hat{t}), \\ t &\rightarrow \text{Re} \hat{t}, & \text{und} & & p(\cdot, t) &\rightarrow \frac{1}{\text{Re}^2} \hat{p}(\cdot, \hat{t}) \end{aligned} \quad (4.5)$$

durch, bildet man die Navier-Stokes-Gleichungen für den vereinfachten Fall auf dieselben Differentialgleichungen, aber mit  $\text{Re} = 1$  ab. Die Änderung der Störungsenergie des skalierten Systems in der Zeit

$$\hat{\epsilon}_S(\hat{t}) := \left( \hat{\mathbf{u}}, \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial \hat{t}} \right) \quad (4.6)$$

ist aufgrund einer Reynoldszahl von  $\text{Re} = 1 < \text{Re}_E$  kleiner null. Die Grundströmung ist gegen das skalierte Geschwindigkeitsfeld global monoton stabil:

$$\lim_{\hat{t} \rightarrow \infty} \hat{E}_S(\hat{t}) = 0, \quad \frac{d\hat{E}_S(\hat{t})}{d\hat{t}} < 0. \quad (4.7)$$

Aus der globalen Stabilität und der Normeigenschaft  $\|\cdot\| \geq 0$  folgt

$$\lim_{\hat{t} \rightarrow \infty} \|\hat{u}_\nu(\hat{t})\|^2 = 0, \quad \nu \in \{x, y, z\}, \quad (4.8)$$

und nach Rückskalierung die globale Stabilität der Grundströmung gegen Störungen der Form  $\mathbf{u}(y, z, t)$  bei endlicher Reynoldszahl.

Die bisher gemachte Aussage zur Stabilität der Grundströmung gegenüber Störungsströmungen  $\mathbf{u}(y, z, t)$  kann man versuchen auf endliche Galerkin-Systeme zu übertragen. Werden nur Basisfunktionen der Form  $\mathbf{B}^{(0,n,l,p)}(y, z)$  verwendet, sind die zugehörigen Entwicklungsfunktionen  $c_{(0,n,l,p)}(t)$  wie folgt zu skalieren:

$$t \rightarrow \text{Re } \hat{t}, \quad c_{(0,n,l,1)}(t) \rightarrow \hat{c}_{(0,n,l,1)}(\hat{t}) \quad \text{und} \quad c_{(0,n,l,2)}(t) \rightarrow \frac{1}{\text{Re}} \hat{c}_{(0,n,l,2)}(\hat{t}). \quad (4.9)$$

Dabei ist  $n \in \mathbb{N}_0$ , schließt also die Skalierung der Nullmoden mit ein.

Die Skalierung läßt sich aus (4.5) ableiten, da die Basisfunktionen der Polarisation eins nur in den  $x$ -Komponenten ungleich null sind, die Basisfunktionen der Polarisation zwei dagegen nur die  $y$ - und  $z$ -Komponenten mischen. Das daraus resultierende dynamische System beschreibt eine Strömung mit  $\text{Re} = 1$ .

Die globale Stabilität eines endlichdimensionalen dynamischen Systems beliebiger Dimension hängt entscheidend von der Energie-Reynoldszahl  $\text{Re}_E$  des unskalierten Systems ab. Wenn  $\text{Re}_E > 1$  gilt, ist das endlichdimensionale skalierte dynamische System global monoton stabil, und das unskalierte dynamische System ist global stabil. Die von uns untersuchten Systeme mit der Einschränkung  $\alpha = 0$  waren stets global stabil.

Zur Beschreibung beliebiger Störungsströmungen sollte  $\alpha \neq 0$  gewählt werden. In den späteren Rechnungen ist  $\alpha = \frac{1}{2}$  und  $\beta = \frac{3}{2}$ .

### 4.3 Lineare Stabilität endlicher Galerkin-Systeme

Wie in [Rom73] gezeigt wurde, ist die ebene Couette-Strömung linear stabil. Es gibt Berichte [OS99] darüber, daß endliche Galerkin-Systeme qualitativ „falsche Physik“ liefern können. Das zeigt sich ebenfalls bei der linearen Stabilität des trivialen Fixpunktes.

Diese Verletzung hat einen großen Einfluß auf die Simulationsergebnisse, z. B. auf die Lebensdauer von Zuständen. Bei einem dynamischen System, das einen instabilen trivialen Fixpunkt hat, sind die Lebensdauern bei  $\text{Re} > \text{Re}_{\text{linear}}$  unendlich, denn selbst beliebig kleine Zustände des dynamischen Systems wachsen durch die Abstoßung vom trivialen Fixpunkt wieder an. Dagegen werden beliebig kleine Zustände von einem attraktiven trivialen Fixpunkt angezogen.

Aber auch die Übergangsszenarien können sich unterscheiden. Entweder über die lineare Instabilität oder durch einen subkritischen Übergang. Um die Dynamik des Modells in Übereinstimmung mit bekannten physikalischen und mathematischen Vorhersagen zu erhalten, sollte die bei der Simulation verwendete Reynoldszahl stets kleiner als die kritische lineare Reynoldszahl  $\text{Re}_{\text{linear}}$  sein.

Bei der Untersuchung eines dynamischen Systems auf lineare Stabilität wird das dynamische System um den trivialen Fixpunkt linearisiert. Das entspricht der Vernachlässigung des Advektionsterms in den Navier-Stokes-Gleichungen. Die Geschwindigkeiten entkoppeln in den einzelnen  $\mathbf{k}$ . Die vier Fälle  $\mathbf{k} = 0$ ,  $k_x \neq 0$  und  $k_z = 0$ ,  $k_x = 0$  und  $k_z \neq 0$  sowie  $k_x \neq 0$  und  $k_z \neq 0$  lassen sich getrennt untersuchen.

Die Fälle  $k_x = k_z = 0$  bzw.  $k_x = 0$  und  $k_z \neq 0$  lassen sich zusammen behandeln. Im letzten Unterkapitel wurde erwähnt, daß auch in endlichen Galerkin-Systemen in diesem Spezialfall die triviale Lösung global stabil gegen diese Störungen ist, falls die Energie-

Reynoldszahl größer als eins ist. Der jetzt vernachlässigte Advektionsterm hat auf diese Eigenschaft keinen Einfluß. Die globale Stabilität galt für alle endlichen Reynoldszahlen, so daß das System bei endlichen Reynoldszahlen nie linear instabil werden kann.  $\text{Re}_{\text{linear}}$  ist unendlich.

Tabelle 4.1:  $\text{Re}_{\text{linear}}$  für den Unterraum  $\{\mathbf{B}^{(m,0,l,1)}, \mathbf{B}^{(m,0,l,2)}\}_{l=0}^{l_{\text{max}}}$ ,  $m \in \{1, 2, 3\}$ , im polynomialen Fall

$m \setminus l_{\text{max}}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	$\infty$	$\infty$	$\infty$	2 024	7 056	2 810	4 676	6 516	10 274
2	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	2 778	4 012	4 112	6 263
3	$\infty$	5 363	6 315						

Tabelle 4.2:  $\text{Re}_{\text{linear}}$  für den Unterraum  $\{\mathbf{B}^{(m,0,l,1)}, \mathbf{B}^{(m,0,l,2)}\}_{l=0}^{l_{\text{max}}}$ ,  $m \in \{1, 2, 3\}$ , im trigonometrischen Fall

$m \setminus l_{\text{max}}$	0	1	2	3	4	5	6
1	$\infty$	243	$\infty$	688	$\infty$	1 448	3 449
2	$\infty$	173	$\infty$	465	$\infty$	910	2 573
3	$\infty$	$\infty$	$\infty$	1 668	$\infty$	1 074	$\infty$

Im Fall  $k_x \neq 0$  und  $k_z = 0$  sind einige Ergebnisse für die polynomialen und trigonometrischen Basisfunktionen in den Tabellen 4.1 und 4.2 zusammengefaßt. Während im polynomialen Fall die kritischen Reynoldszahlen bei einigen Tausend liegen, beginnen die kleinsten kritischen Reynoldszahlen bei einigen Hundert im trigonometrischen Fall. Um Simulationen bei Reynoldszahlen im Bereich von 400 durchführen zu können, ist die Anzahl der Basisfunktionen dieses Unterraumes im polynomialen Fall für jedes  $m$  frei wählbar, dagegen sind im trigonometrischen Fall zum Teil mindestens vier ( $l_{\text{max}} = 3$ ) Basisfunktionen auszuwählen.

Für den Fall  $k_x \neq 0$  und  $k_z \neq 0$  sind die kritischen Reynoldszahlen  $\text{Re}_{\text{linear}}$  in Abhängigkeit von der maximalen Dimension  $l_{\text{max}} + 1$  des  $y$ -Unterraumes in den Bildern (4.1) und (4.2) dargestellt. Die Basisfunktionen wurden aus der Menge  $S_1^{(m,n)}$ , siehe (3.52), mit  $|m| + |n| \leq 4$  ausgewählt.

Die bisherigen Ergebnisse zeigen, daß ab einem gewissen  $l_{\text{max}}$ , das von  $m$  und  $n$  abhängt, die kritischen Reynoldszahlen bei Erhöhung von  $l_{\text{max}}$  monoton zunehmen. Im Grenzfall  $l_{\text{max}} \rightarrow \infty$  sollte sich  $\text{Re}_{\text{linear}} = \infty$  einstellen. Zum Beispiel sind bei  $m = 2$  und  $n = 1$  insgesamt 22 Basisfunktionen gleichverteilt auf die beiden Polarisierungen mitzunehmen, um eine kritische Reynoldszahl im Bereich 500 zu erhalten. Simulationen im Reynoldszahlenbereich  $10^4$ ,  $10^5$  oder sogar  $10^6$  und noch höher scheinen so nicht möglich zu sein.

Die in der Einleitung dieser Arbeit erwähnte Methode der Konstruktion von Modellen durch Mitnahme einer geringen Anzahl an Basisfunktionen bietet sich bei diesem

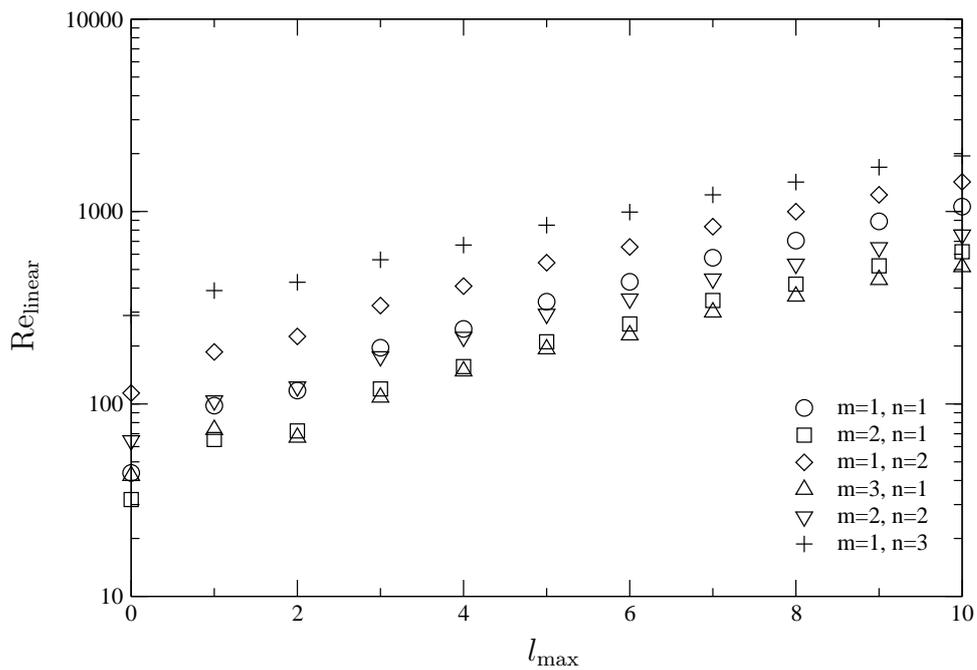


Abbildung 4.1:  $\text{Re}_{\text{linear}}$  für den Unterraum  $\left\{ \mathbf{B}^{(m,n,l,1)}, \mathbf{B}^{(m,n,l,2)} \right\}_{l=0}^{l_{\max}}$  im polynomialen Fall

Vorgehen nur bedingt an. Die physikalische Richtigkeit der Modelle ist zum Teil auf Reynoldszahlen unter 100 beschränkt, wenn man Basisfunktionen mit  $k_x \neq 0$  und  $k_z \neq 0$  verwendet. Möglich wäre es bei Nutzung polynomialer Basisfunktionen mit  $k_x \neq 0$  und  $k_z = 0$ . Denn zu ihnen gehört eine unendlich große Reynoldszahl  $\text{Re}_{\text{linear}}$  bis  $l_{\max} = 2$ . Im Abschnitt C.4 wird kurz erläutert, wie neue Basisfunktionen aus den bisherigen konstruiert werden können, die bei Verwendung des Galerkin-Verfahrens ein dynamisches System liefern, dessen trivialer Fixpunkt linear stabil ist.

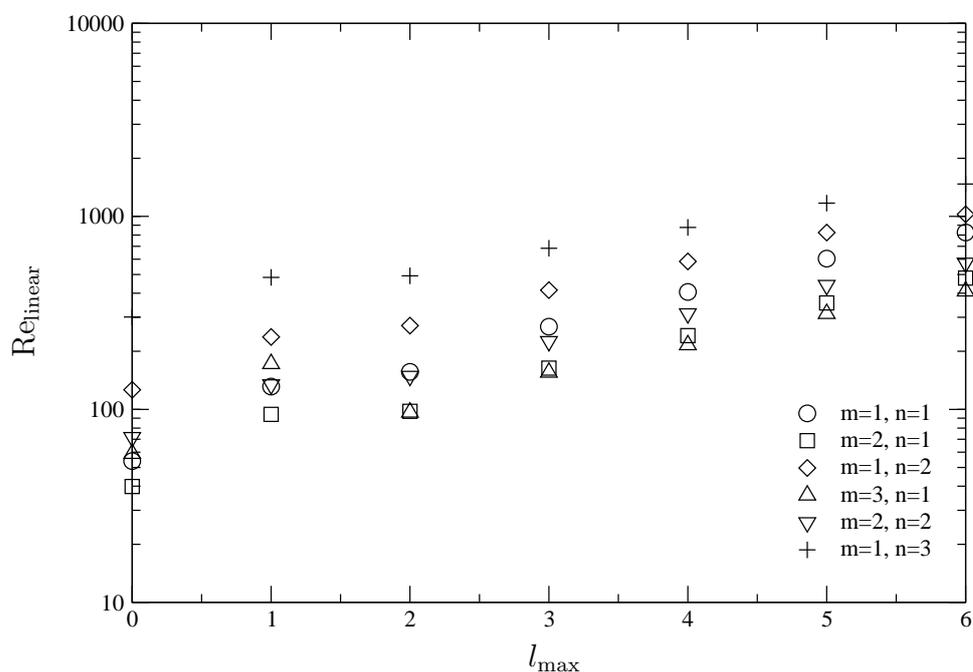


Abbildung 4.2:  $\text{Re}_{\text{linear}}$  für den Unterraum  $\left\{ \mathbf{B}^{(m,n,l,1)}, \mathbf{B}^{(m,n,l,2)} \right\}_{l=0}^{l_{\max}}$  im trigonometrischen Fall

# 5 Energiekonsistenz

Die Ursache für die Änderung der kinetischen Gesamtenergie in der Zeit ist die Viskosität der Flüssigkeit. Sie sorgt für die innere Reibung und ermöglicht den Kräfteinfluß der sich bewegenden Wände auf die Flüssigkeit. Die Bewegung der Wände kann Energie in das System hinein- und hinausbringen, wohingegen die interne Reibung für eine Abnahme der kinetischen Gesamtenergie sorgt. Die gemachten Aussagen lassen sich in der Gleichung (2.22),

$$\varepsilon_{\text{ges}} = \varepsilon_{\text{Wand}} + \varepsilon_{\text{Diss}}, \quad (5.1)$$

mit der Eigenschaft

$$\varepsilon_{\text{Diss}} \leq 0 \quad (5.2)$$

zusammenfassen. Die Gleichung (5.1) wird hier als Bilanzgleichung der Energieraten bezeichnet, da sie die zeitliche Änderung der kinetischen Gesamtenergie, Wand- und Dissipationsleistung miteinander verknüpft. Sie ist für klassische Geschwindigkeitslösungen gültig, siehe Kapitel 2.

Die kinetische Gesamtenergie wird durch lineare und quadratische Terme in  $\mathbf{u}$  beschrieben. Der Advektionsterm, der bei der Herleitung unter Ausnutzung der Navier-Stokes-Gleichungen in der Energieratenbilanz auftrat, verschwindet nach Projektion auf die Störungsgeschwindigkeit:

$$(\mathbf{u}, (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) = 0. \quad (5.3)$$

Seine Bedeutung liegt in der Umverteilung kinetischer Energie der einzelnen Strömungsmuster. Die Gültigkeit der Gleichung (5.3) wird bei der Bildung niedrigdimensionaler Modelle verlangt [GG94, EW95, Wal97, BC98, Wal95, Hen96, BT97].

Die Gleichung (5.1) ist für beliebige endliche Reynoldszahlen gültig. Beim Euler-Grenzfall,  $\nu = 0$  bzw.  $\text{Re} \rightarrow \infty$ , ist die kinetische Gesamtenergie zeitlich konstant bzw.  $\varepsilon_{\text{ges}} = 0$ . Ohne Viskosität gibt es die beiden Mechanismen innere Reibung und Haftung der Flüssigkeit auf den Wänden zur Energieänderung nicht mehr. Die Gleichung (5.1) bleibt auch in diesem Grenzfall gültig, da  $\varepsilon_{\text{Wand}} = 0$  nach (2.42) und  $\varepsilon_{\text{Diss}} = 0$  nach (2.46). Dieser Grenzfall wird in den Modellen [SE97] erfüllt und dient zum Test der Integrationsroutinen.

Die in den letzten beiden Absätzen erwähnten Aussagen sind für klassische Lösungen erfüllt. Aus [Rau99] ist bekannt, daß schwache Lösungen der Navier-Stokes-Gleichungen die Bilanzgleichung verletzen können. Gleichfalls ist das bei Verwendung eines Biorthogonalverfahrens zur Simulation möglich [Spi99].

In diesem Kapitel wird überprüft, ob die Energieratenbilanz bei Verwendung endlicher Galerkin-Systeme zur Simulation der Navier-Stokes-Gleichungen verletzt ist. Dazu wird eine virtuelle Energierate  $\varepsilon_{\text{virt}}$  eingeführt [RPS03]:

$$\varepsilon_{\text{virt}} := \varepsilon_{\text{ges}} - \varepsilon_{\text{Wand}} - \varepsilon_{\text{Diss}}. \quad (5.4)$$

Für klassische Lösungen gilt aufgrund (5.1):

$$\varepsilon_{\text{virt}} = 0. \quad (5.5)$$

Im nächsten Unterkapitel wird Gleichung (5.4) für endliche Galerkin-Systeme ausgewertet.

## 5.1 Bedingung für Energiekonsistenz

Bei den Betrachtungen der kinetischen Energieänderungen in Kapitel 2 wurde  $\mathbf{u}$  als exakte Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen vorausgesetzt. Bei der Simulation der ebenen Couette-Strömung muß natürlich ein endlicher Ansatz verwendet werden:

$$\mathbf{u}^{(N)}(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^N c_i(t) \mathbf{B}^{(i)}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{v}^{(N)}(\mathbf{r}, t) = y\mathbf{e}_x + \mathbf{u}^{(N)}(\mathbf{r}, t). \quad (5.6)$$

Die kinetische Gesamtenergierate berechnet sich nach:

$$\varepsilon_{\text{ges}}^{(N)} = \left( \mathbf{v}^{(N)}, \dot{\mathbf{v}}^{(N)} \right). \quad (5.7)$$

Es gilt weiterhin die Zerlegung von  $\varepsilon_{\text{ges}}^{(N)}$  in  $\varepsilon_{\text{K}}^{(N)}$  und  $\varepsilon_{\text{S}}^{(N)}$ , siehe auch (2.22),

$$\varepsilon_{\text{ges}}^{(N)} = \varepsilon_{\text{K}}^{(N)} + \varepsilon_{\text{S}}^{(N)} \quad (5.8)$$

mit

$$\varepsilon_{\text{K}}^{(N)} = \left( y\mathbf{e}_x, \dot{\mathbf{v}}^{(N)} \right), \quad (5.9)$$

$$\varepsilon_{\text{S}}^{(N)} = \left( \mathbf{u}^{(N)}, \dot{\mathbf{u}}^{(N)} \right). \quad (5.10)$$

Die Definition (5.4) der virtuellen Energierate wird auf endliche Geschwindigkeitsansätze übertragen:

$$\varepsilon_{\text{virt}}^{(N)} := \varepsilon_{\text{ges}}^{(N)} - \varepsilon_{\text{Wand}}^{(N)} - \varepsilon_{\text{Diss}}^{(N)}. \quad (5.11)$$

Aus (5.11) und (5.8) folgt:

$$\varepsilon_{\text{virt}}^{(N)} = \varepsilon_{\text{K}}^{(N)} + \varepsilon_{\text{S}}^{(N)} - \varepsilon_{\text{Wand}}^{(N)} - \varepsilon_{\text{Diss}}^{(N)}. \quad (5.12)$$

Als erstes soll  $\varepsilon_{\text{S}}^{(N)}$  ausgewertet werden. Dazu wird der endliche Ansatz in (5.10) eingesetzt:

$$\varepsilon_{\text{S}}^{(N)} = \sum_{i,k=1}^N c_i \left( \mathbf{B}^{(i)}, \mathbf{B}^{(k)} \right) \dot{c}_k. \quad (5.13)$$

Unter Ausnutzung der Definition (3.8),

$$\varepsilon_S^{(N)} = \sum_{i,k=1}^N c_i M_{ik} \dot{c}_k, \quad (5.14)$$

und des dynamischen Systems (3.7) läßt sich  $\varepsilon_S^{(N)}$  umformen:

$$\varepsilon_S^{(N)} = \sum_{i,k=1}^N c_i L_{ik} c_k - \sum_{i,k,l=1}^N c_i N_{ikl} c_k c_l. \quad (5.15)$$

Der kubische Ausdruck

$$\begin{aligned} \sum_{i,k,l=1}^N c_i N_{ikl} c_k c_l &= \sum_{i,k,l=1}^N c_i \left( \mathbf{B}^{(i)}, \left( \mathbf{B}^{(k)} \cdot \nabla \right) \mathbf{B}^{(l)} \right) c_k c_l \\ &= \left( \mathbf{u}^{(N)}, \left( \mathbf{u}^{(N)} \cdot \nabla \right) \mathbf{u}^{(N)} \right) \end{aligned} \quad (5.16)$$

entspricht der linken Seite der Gleichung (5.3) für den endlichen Geschwindigkeitsansatz (5.6). Durch die Antisymmetrieeigenschaft (3.17) der nichtlinearen Koeffizienten  $N_{ikl}$  verschwindet der kubische Ausdruck:

$$\begin{aligned} \sum_{i,k,l=1}^N c_i N_{ikl} c_k c_l &= - \sum_{i,k,l=1}^N c_i N_{lki} c_k c_l = - \sum_{i,k,l=1}^N c_l N_{ikl} c_k c_i \\ \leadsto \sum_{i,k,l=1}^N c_i N_{ikl} c_k c_l &= 0. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Die Eigenschaft des Advektionsterms, keinen Beitrag zur Energieratenbilanz zu haben, gilt neben klassischen Lösungen auch für endliche Geschwindigkeitsansätze bei Verwendung eines Galerkin-Verfahrens. Sollte er wie in [Spi99] bei Verwendung eines Biorthogonalverfahrens nicht verschwinden, treten kubische Terme in der Energieratenbilanz auf, die bei Strömungen mit hoher kinetischer Energie dominant sein können. Wird dann die kinetische Gesamtenergie der Strömung durch die kubischen Terme erhöht, kann das zur Divergenz der kinetischen Gesamtenergie und der Geschwindigkeit führen.

Die Gleichung (5.15) wird weiter umgeformt. Indem man die Definition von  $L_{ik}$ , siehe (3.9)–(3.12),

$$\varepsilon_S^{(N)} = \sum_{i,k=1}^N c_i \left( \mathbf{B}^{(i)}, -y \frac{\partial \mathbf{B}^{(k)}}{\partial x} - B_y^{(k)} \mathbf{e}_x + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{B}^{(k)} \right) c_k, \quad (5.18)$$

und den Geschwindigkeitsansatz (5.6) ausnutzt, erhält man

$$\varepsilon_S^{(N)} = \left( \mathbf{u}^{(N)}, -y \frac{\partial \mathbf{u}^{(N)}}{\partial x} - u_y^{(N)} \mathbf{e}_x + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{u}^{(N)} \right). \quad (5.19)$$

Wertet man die Terme völlig analog zum Vorgehen in Kapitel 2 aus, bekommt man für endliche Galerkin-Systeme eine völlig äquivalente Darstellung der Störungsenergie rate zu Gleichung (2.40):

$$\varepsilon_S^{(N)} = - \left( \mathbf{u}^{(N)}, u_y^{(N)} \mathbf{e}_x \right) + \frac{1}{\text{Re}} \left( \mathbf{u}^{(N)}, \Delta \mathbf{u}^{(N)} \right) = - \left( \mathbf{u}^{(N)}, u_y^{(N)} \mathbf{e}_x \right) + \varepsilon_{\text{Diss}}^{(N)}. \quad (5.20)$$

Damit wird (5.12) zu

$$\varepsilon_{\text{virt}}^{(N)} = \varepsilon_{\text{K}}^{(N)} - \left( \mathbf{u}^{(N)}, u_y^{(N)} \mathbf{e}_x \right) - \varepsilon_{\text{Wand}}^{(N)}. \quad (5.21)$$

Es bleibt noch  $\varepsilon_{\text{K}}^{(N)}$  zu untersuchen. Dazu wird der Geschwindigkeitsansatz (5.6) in (5.9) eingesetzt:

$$\varepsilon_{\text{K}}^{(N)} = \sum_{i=1}^N \left( y \mathbf{e}_x, \mathbf{B}^{(i)} \right) \dot{c}_i. \quad (5.22)$$

Das Skalarprodukt zwischen der Grundströmung und den Basisfunktionen  $\mathbf{B}^{(i)}$  kann nur ungleich null sein, wenn  $\mathbf{B}^{(i)}$  eine Nullmode, also Basisfunktion mit  $\mathbf{k} = 0$ , ist und die Komponente  $B_x^{(i)}$  nichttrivial und antisymmetrisch in  $y$  ist. Diese Funktionen werden als relevante Nullmoden bezeichnet. Die Summe wird auf die relevanten Nullmoden, von denen  $N_0$  im Ansatz enthalten sein sollen, eingeschränkt und mit dem Index  $i_0$  bezeichnet. Es wird das dynamische System ausgenutzt, um

$$\varepsilon_{\text{K}}^{(N)} = \sum_{i_0=1}^{N_0} \left( y \mathbf{e}_x, \mathbf{B}^{(i_0)} \right) \sum_{k=1}^N M_{i_0 k}^{-1} \left( \sum_{l=1}^N L_{kl} c_l - \sum_{l,m=1}^N N_{klm} c_l c_m \right) \quad (5.23)$$

zu erhalten. Die Basisfunktionen  $\mathbf{B}^{(0,0,l,p)}$  aus Kapitel 3 wurden so konstruiert, daß sie orthonormal sind. Die Metrik-Matrix und ihre Inverse bilden Blockstrukturen, deren Einträge nur ungleich null sein können, wenn die Summe der  $\mathbf{k}$  der beteiligten Basisfunktionen gleich null ist. Dadurch gilt

$$\varepsilon_{\text{K}}^{(N)} = \sum_{i_0=1}^{N_0} \left( y \mathbf{e}_x, \mathbf{B}^{(i_0)} \right) \left( \sum_{k=1}^N L_{i_0 k} c_k - \sum_{k,l=1}^N N_{i_0 k l} c_k c_l \right). \quad (5.24)$$

Auch die Matrix  $L$  des linearisierten Problems separiert in den unterschiedlichen Wellenzahlvektoren. Dadurch braucht der Summationsindex  $k$  nur über Basisfunktionen der Form  $\mathbf{B}^{(0,0,l,p)}$  zu laufen. Für die Basisfunktionen mit  $k_x = k_z = 0$  ergeben sich weitere Vereinfachungen, da die Matrizen  $A$  (keine  $x$ -Ortsabhängigkeit) und  $C$  ( $y$ -Komponente gleich null) verschwinden. Dieser Teil der Matrix reduziert sich dann auf

$$L_{i_0 k} = \left( \mathbf{B}^{(i_0)}, \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 \mathbf{B}^{(k)}}{\partial y^2} \right). \quad (5.25)$$

Dieser verbleibende Anteil des linearen Operators entkoppelt die beiden Polarisierungen und die Parität in der  $y$ -Diskretisierung. Darum muß  $\mathbf{B}^{(k)}$  im gleichen Unterraum wie  $\mathbf{B}^{(i_0)}$  liegen. Es gilt

$$\varepsilon_{\text{K}}^{(N)} = \sum_{i_0=1}^{N_0} \left( y \mathbf{e}_x, \mathbf{B}^{(i_0)} \right) \left( \sum_{k_0=1}^{N_0} L_{i_0 k_0} c_{k_0} - \sum_{k,l=1}^N N_{i_0 k l} c_k c_l \right). \quad (5.26)$$

Durch Ausnutzung der expliziten Darstellung von  $N_{ikl}$  und einige Umformungen erhält man

$$\begin{aligned} \varepsilon_K^{(N)} &= \frac{1}{\text{Re}} \sum_{i_0, k_0=1}^{N_0} \left( y, B_x^{(i_0)} \right) \left( B_x^{(i_0)}, \frac{\partial^2 B_x^{(k_0)}}{\partial y^2} \right) c_{k_0} \\ &\quad - \sum_{i_0=1}^{N_0} \sum_{k, l=1}^N \left( y, B_x^{(i_0)} \right) \left( B_x^{(i_0)}, \partial_y \left( B_x^{(k)} B_y^{(l)} \right) \right) c_k c_l. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Mit den Definitionen

$$\Pi^{(N_0)}(y, \tilde{y}) := \sum_{i_0=1}^{N_0} B_x^{(i_0)}(y) B_x^{(i_0)}(\tilde{y}) = \sum_{l=1}^{N_0} J_{2l-1}(y) J_{2l-1}(\tilde{y}), \quad (5.28)$$

$$K_1^{(k_0)}(y) := \frac{\partial^2 B_x^{(k_0)}(y)}{\partial y^2} = J_{2k_0-1}''(y), \quad k_0 = 1, \dots, N_0, \quad \text{und} \quad (5.29)$$

$$K_2^{(k, l)}(y) := \partial_y \left( \overline{B_x^{(k)}(\mathbf{r}) B_y^{(l)}(\mathbf{r})} \right), \quad k, l = N_0 + 1, \dots, N, \quad (5.30)$$

wird aus dem Zwischenergebnis (5.21) der virtuellen Energierate

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\text{virt}}^{(N)} &= \frac{1}{\text{Re}} \sum_{k_0=1}^{N_0} \left\{ \frac{1}{4} \int_{y=-1}^1 \int_{\tilde{y}=-1}^1 y \Pi^{(N_0)}(y, \tilde{y}) K_1^{(k_0)}(\tilde{y}) d\tilde{y} dy \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial B_x^{(k_0)}}{\partial y} \Big|_{y=-1} + \frac{\partial B_x^{(k_0)}}{\partial y} \Big|_{y=1} \right] \right\} c_{k_0} \\ &\quad - \sum_{k, l=1}^N \left\{ \frac{1}{4} \int_{y=-1}^1 \int_{\tilde{y}=-1}^1 y \Pi^{(N_0)}(y, \tilde{y}) K_2^{(k, l)}(\tilde{y}) d\tilde{y} dy \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \overline{B_x^{(k)}(\mathbf{r}) B_y^{(l)}(\mathbf{r})} dy \right\} c_k c_l. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Die virtuelle Energierate besteht aus einem linearen und quadratischen Anteil in den Zeitfunktionen  $c_i(t)$ . Im Linearteil sind nur die Basisfunktionen und die dazugehörigen Zeitfunktionen der relevanten Nullmoden  $\{\mathbf{B}^{(0,0,2l-1,1)}\}_{l=1}^{N_0}$  von Bedeutung. Im quadratischen Teil koppeln aufgrund der Mittelwertbildung nur Basisfunktionen  $\mathbf{B}^{(k)}$  und  $\mathbf{B}^{(l)}$ , wenn zu  $\mathbf{B}^{(k)}$  und  $\mathbf{B}^{(l)}$  die Wellenvektoren  $\mathbf{k}$  und  $-\mathbf{k}$  gehören. Ist  $\mathbf{B}^{(k)}$  eine Nullmode, so muß auch  $\mathbf{B}^{(l)}$  eine sein. Da die Komponenten  $B_y^{(l)}$  null sind, wegen (3.32), haben im quadratischen Anteil der virtuellen Energierate nur Nichtnullmoden und ihre Zeitfunktionen Einfluß. Die bisherigen Untersuchungen beweisen, daß die Basisfunktionen

$$\{\mathbf{B}^{(0,0,2l,1)}\}_{l=0}^{\infty} \quad \text{und} \quad \{\mathbf{B}^{(0,0,l,2)}\}_{l=0}^{\infty} \quad (5.32)$$

unabhängig von der Wahl des Geschwindigkeitsansatzes keine Rolle bei der Verletzung der Bilanzgleichung der Energieraten spielen.

Der Euler-Grenzfall wird bei endlichen Galerkin-Systemen nicht richtig wiedergegeben. Zwar können die relevanten Nullmoden die kinetische Gesamtenergie nicht ändern

aufgrund des Vorfaktors  $\frac{1}{\text{Re}}$  des linearen Anteils der virtuellen Energierate. Die Nichtnullmoden dagegen schon. In [SE97] werden Legendre-Polynome ohne Vorfunktionen für die Darstellung der  $y$ -Abhängigkeit verwendet. Die Haftrandbedingungen und die Kontinuitätsgleichung werden durch ein Lagrange-Verfahren erster Art eingebaut, um eine konstante kinetische Gesamtenergie für unendliche große Reynoldszahlen zu erreichen.

Die in (5.28) definierte Funktion wird als Projektor bezeichnet. Die Ursache liegt in der folgenden Tatsache begründet. Sei  $f(y)$  eine antisymmetrische Funktion, die nach den Basisfunktionen  $\{B_x^{(i_0)}\}_{i_0=1}^{\infty}$  entwickelt werden kann:

$$f(y) = \sum_{i_0=1}^{\infty} f_{i_0} B_x^{(i_0)}(y), \quad f_{i_0} = \left( B_x^{(i_0)}(y), f(y) \right). \quad (5.33)$$

Wird auf diese Darstellung der Funktion der Projektor angewendet, folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\tilde{y}=-1}^1 \Pi^{(N_0)}(y, \tilde{y}) f(\tilde{y}) d\tilde{y} &= \sum_{i_0=1}^{N_0} \sum_{l_0=1}^{\infty} f_{i_0} B_x^{(i_0)}(y) \underbrace{\frac{1}{2} \int_{-1}^1 B_x^{(i_0)}(\tilde{y}) B_x^{(l_0)}(\tilde{y}) d\tilde{y}}_{=\delta_{i_0 l_0}} \\ &= \sum_{i_0=1}^{N_0} f_{i_0} B_x^{(i_0)}(y). \end{aligned} \quad (5.34)$$

Es verbleibt nur der Anteil der Funktion  $f(y)$ , der im Unterraum der für den endlichen Geschwindigkeitsansatz verwendeten relevanten Nullmoden liegt.

Ein wichtiger Grenzfall tritt ein, falls  $N_0 \rightarrow \infty$  gilt. Dann folgt

$$\frac{1}{2} \int_{\tilde{y}=-1}^1 \Pi^{(\infty)}(y, \tilde{y}) f(\tilde{y}) d\tilde{y} = \sum_{i_0=1}^{\infty} f_{i_0} B_x^{(i_0)}(y) = f(y). \quad (5.35)$$

Der Projektor wirkt als Einheitsoperator, woraus  $\varepsilon_{\text{virt}} = 0$  folgt, was formal einer konsistenten Bilanzgleichung entspricht. Denn dann gilt in (5.31):

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 y K_1^{(k_0)}(y) dy &= \int_{-1}^1 y \frac{\partial^2 B_x^{(k_0)}(y)}{\partial y^2} dy \\ &= y \frac{\partial B_x^{(k_0)}(y)}{\partial y} \Big|_{y=-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{\partial B_x^{(k_0)}(y)}{\partial y} dy \\ &= \frac{\partial B_x^{(k_0)}}{\partial y} \Big|_{y=-1} + \frac{\partial B_x^{(k_0)}}{\partial y} \Big|_{y=1} - \underbrace{B_x^{(k_0)} \Big|_{y=-1}^1}_{=0} \end{aligned} \quad (5.36)$$

und

$$\int_{-1}^1 y K_2^{(k,l)}(y) dy = \int_{-1}^1 y \partial_y \left( \overline{B_x^{(k)}(\mathbf{r}) B_y^{(l)}(\mathbf{r})} \right) dy$$

$$\begin{aligned}
 &= y \overline{B_x^{(k)}(\mathbf{r}) B_y^{(l)}(\mathbf{r})} \Big|_{y=-1}^1 - \int_{-1}^1 \overline{B_x^{(k)}(\mathbf{r}) B_y^{(l)}(\mathbf{r})} dy \\
 &= - \int_{-1}^1 \overline{B_x^{(k)}(\mathbf{r}) B_y^{(l)}(\mathbf{r})} dy.
 \end{aligned} \tag{5.37}$$

Die Koeffizienten in (5.31) der linearen  $c_{k_0}$  und quadratischen Terme  $c_k c_l$  sind null, damit ist die virtuelle Energierate null. Dies ist unabhängig von der speziellen Darstellung der Basis, also unabhängig von der Wahl der  $J_l$ ,  $H_l$  und  $V_l$ . Ausschlaggebend war, daß eine vollständige Basis der relevanten Nullmoden im Ansatz verwendet wurde.

Es gibt eine weitere Möglichkeit, daß die virtuelle Energierate null ist. Das ist genau dann der Fall, wenn die Grundströmung in einem endlichen Unterraum der Basisfunktionen liegt. Das ist bei der ebenen Couette-Strömung nicht der Fall, da die Grundströmung auf dem Rand Werte ungleich null annimmt. Bei der ebenen Poiseuille-Strömung kann die Bilanzgleichung der Energieraten, die im Vergleich zur Bilanzgleichung der ebenen Couette-Strömung anders aussieht, erfüllt werden, wenn man auf die Bedingungen (3.5) und (3.6) verzichtet. Die Grundströmung und die erste relevante Nullmode  $\mathbf{B}^{(0,0,0,1)}(y)$  sind bis auf einen Faktor gleich  $1 - y^2$ . Da der Projektor nicht nur auf  $K_1^{(k_0)}$  und  $K_2^{(k,l)}$ , sondern auch auf die Grundströmung wirkt, reicht genau die eine Basisfunktion  $\mathbf{B}^{(0,0,0,1)}(y)$  im Geschwindigkeitsansatz aus, um eine verschwindende virtuelle Energierate zu erhalten.

Da bei der ebenen Couette-Strömung stets unendlich viele relevante Nullmoden verwendet werden müßten, um Konsistenz der Bilanzgleichung zu erhalten, werden deshalb ab dem übernächsten Unterkapitel notwendige und hinreichende Bedingungen an die Basisfunktionen gestellt, die bei endlichen Galerkin-Systemen die Gültigkeit der Energieratenbilanz sicherstellen. Im nächsten Unterkapitel wird die Verletzung der Bilanzgleichung demonstriert.

## 5.2 Demonstration der Verletzung der Energieratenbilanzgleichung

Zur Überprüfung der Gültigkeit der Bilanzgleichung wird die virtuelle Energierate (5.11) für das Modell P1 aus dem Anhang C.1 betrachtet. Es werden folgende Anfangsbedingungen gewählt:

$$c_i(0) = \sqrt{\frac{E_S(0)}{\sum_{i,k=1}^{85} \frac{1}{2} M_{ik}}} \quad \text{mit} \quad E_S(0) = 10. \tag{5.38}$$

Durch die hohe Störungsenergie soll genug Energie dem dynamischen System zur Verfügung stehen, um eine Relaxation in interessante Bereiche zu ermöglichen. Die Reynoldszahl wurde mit  $Re = 400$  gewählt.

Im Bild 5.1 ist  $\varepsilon_{\text{virt}}^{(N)}$  dargestellt. Offensichtlich ist die Bilanzgleichung der Energieraten bei endlichen Galerkin-Verfahren verletzt. Die virtuelle Energierate hat durchaus Größenordnungen der Dissipationsleistung (siehe Bild 5.2) und stellt, zumindest bei diesem Modell, eine erhebliche Fehlerquelle dar.

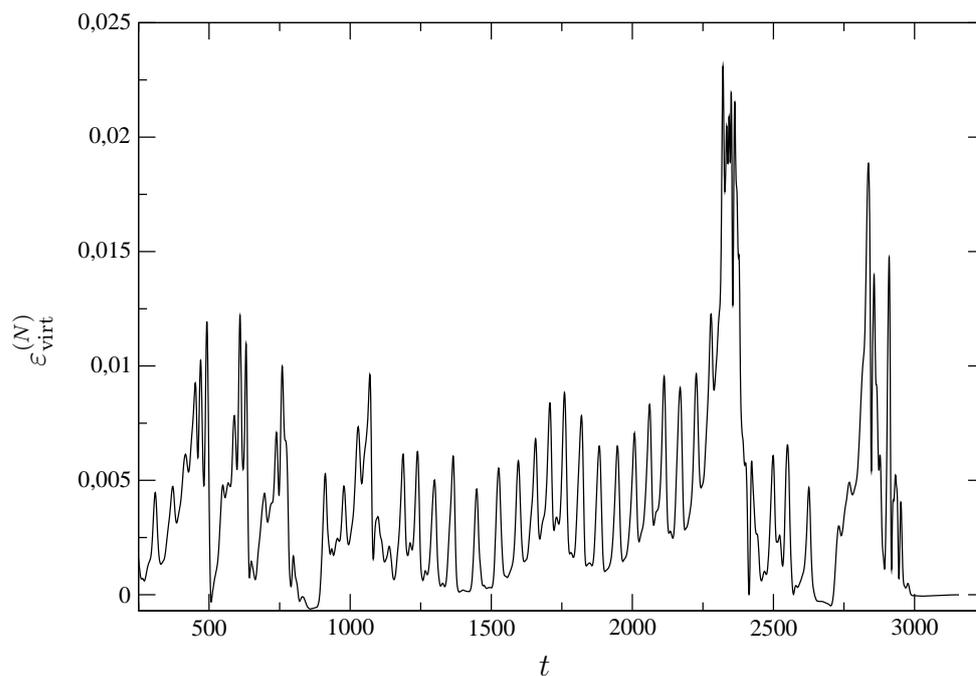


Abbildung 5.1: Darstellung der virtuellen Energierate  $\epsilon_{\text{virt}}^{(N)}$

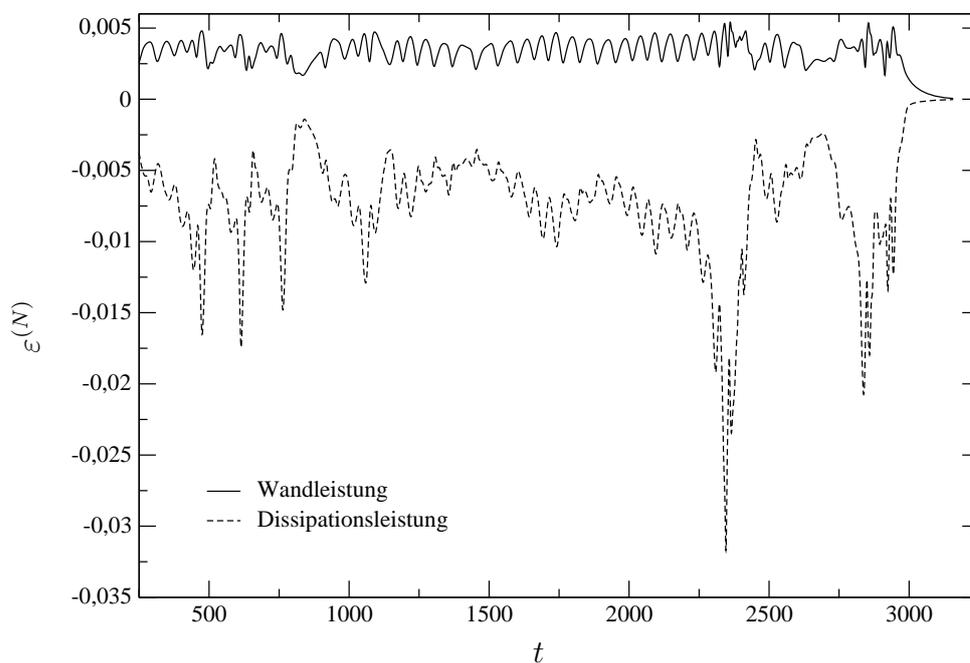


Abbildung 5.2: Darstellung der Wand-  $\epsilon_{\text{Wand}}^{(N)}$  und Dissipationsleistung  $\epsilon_{\text{Diss}}^{(N)}$

## 5.3 Notwendige Bedingung

Man kann die  $\tau$ -Methode anwenden, um die Energieratenbilanzgleichung zu erfüllen. Dazu wird eine Basisfunktion zusätzlich zum Geschwindigkeitsansatz (3.1) hinzugenommen. Die zur zusätzlichen Basisfunktion gehörende zeitabhängige Entwicklungsfunktion wird durch die Bedingung  $\varepsilon_{\text{virt}} = 0$  aus (5.31) berechnet. Dieses Vorgehen, in Kapitel D.1 dargelegt, kann unbeschränkte Lösungen liefern. Darum werden in diesem Unterkapitel Bedingungen direkt für die Basisfunktionen formuliert.

Die Zeitfunktionen  $c_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , werden allein durch das dynamische System bestimmt. Aufgrund ihrer linearen Unabhängigkeit müssen die Koeffizienten des linearen Terms  $c_{k_0}$  und quadratischen Terms  $c_k c_l$  in (5.31) bei Konsistenz der Bilanzgleichung verschwinden. Man erhält folgende notwendigen und hinreichenden Bedingungen  $T_1$  und  $T_2$ :

$$0 = \frac{1}{2} \int_{y=-1}^1 \int_{\tilde{y}=-1}^1 y \Pi^{(N_0)}(y, \tilde{y}) K_1^{(k_0)}(\tilde{y}) d\tilde{y} dy - \left[ \frac{\partial B_x^{(k_0)}}{\partial y} \Big|_{y=-1} + \frac{\partial B_x^{(k_0)}}{\partial y} \Big|_{y=1} \right] \quad \text{für } k_0 = 1, \dots, N_0 \quad (5.39)$$

und

$$0 = \frac{1}{2} \int_{y=-1}^1 \int_{\tilde{y}=-1}^1 y \Pi^{(N_0)}(y, \tilde{y}) \left( K_2^{(k,l)}(\tilde{y}) + K_2^{(l,k)}(\tilde{y}) \right) d\tilde{y} dy + \int_{-1}^1 \left( \overline{B_x^{(k)}(\mathbf{r}) B_y^{(l)}(\mathbf{r})} + \overline{B_x^{(l)}(\mathbf{r}) B_y^{(k)}(\mathbf{r})} \right) dy \quad \text{für } N_0 + 1 \leq k \leq l = N_0 + 1, \dots, N. \quad (5.40)$$

Die symmetrische Darstellung der zweiten Bedingung stammt von den Koeffizienten der Terme  $c_k c_l$  und  $c_l c_k$ . Wenn die Bedingungen  $T_1$  und  $T_2$  erfüllt werden, gilt  $\varepsilon_{\text{virt}}^{(N)} = 0$ .

Aufgrund der Nichtlinearität der Gleichung (5.39), die die Funktionen  $J_{2n-1}(y)$  des Projektors mit denselben Funktionen des  $K_1^{(k_0)}$ , siehe (5.28) und (5.29) verknüpft, kann die Amplitude der Funktionen nur bis auf den Faktor  $-1$  genau festgelegt werden. Jede Funktion  $J_{2n-1}(y)$  hat die Transformationsfreiheit:

$$J_{2n-1}(y) \rightarrow -J_{2n-1}(y). \quad (5.41)$$

Im nachfolgenden Unterkapitel werden aus diesen beiden Bedingungen hinreichende Bedingungen abgeleitet. Sie sichern ebenfalls die Energieratenkonsistenz, lassen sich im Fall spezieller Basisfunktionen besser analysieren.

## 5.4 Hinreichende Bedingungen

Die Bedingungen (5.39) und (5.40) werden erfüllt, falls die folgenden Bedingungen

$$\tilde{T}_1 : \frac{1}{2} \int_{\tilde{y}=-1}^1 \Pi^{(N_0)}(y, \tilde{y}) K_1^{(k_0)}(\tilde{y}) d\tilde{y} = K_1^{(k_0)}(y) \quad k_0 = 1, \dots, N_0 \quad \text{und} \quad (5.42)$$

$$\tilde{T}_2 : \frac{1}{2} \int_{\tilde{y}=-1}^1 \Pi^{(N_0)}(y, \tilde{y}) \tilde{K}_2^{(k,l)}(\tilde{y}) d\tilde{y} = \tilde{K}_2^{(k,l)}(y) \quad k, l = N_0 + 1, \dots, N \quad (5.43)$$

erfüllt sind, wobei  $\tilde{K}_2^{(k,l)}(y)$  die symmetrische Form von  $K_2^{(k,l)}(y)$  ist:

$$\tilde{K}_2^{(k,l)}(y) := \frac{1}{2} \left( K_2^{(k,l)}(y) + K_2^{(l,k)}(y) \right). \quad (5.44)$$

In diesem Fall wirkt der Projektor  $\Pi^{(N_0)}$  wie der Einheitsoperator.

Damit  $\Pi^{(N_0)}$  als Einheitsoperator wirken kann, müssen sowohl  $K_1^{(k_0)}$  als auch  $\tilde{K}_2^{(k,l)}$  in einem endlichen Unterraum der verwendeten relevanten Nullmoden liegen. Die Bedingungen  $\tilde{T}_1$  und  $\tilde{T}_2$  sind homogene Fredholmsche Integralgleichungen zweiter Art mit ausgeartetem Kern und Parameter  $\lambda = 1$  [BS81]. Da die Funktionen  $J_{2n-1}(y)$ ,  $n = 1, \dots, N_0$ , orthonormal sind, läßt sich leicht zeigen, daß  $K_1^{(k_0)}$  nur Lösung der Bedingung  $\tilde{T}_1$  ist, wenn

$$K_1^{(k_0)}(y) = \sum_{n=1}^{N_0} d_{k_0,n} J_{2n-1}(y) \quad (5.45)$$

gilt. Analoges gilt für  $\tilde{K}_2^{(k,l)}$ . Wenn diese Darstellungen gelten, sind die Bedingungen  $\tilde{T}_1$  und  $\tilde{T}_2$  erfüllt.

Diese Bedingungen sind hinreichend. Werden sie erfüllt, ist die virtuelle Energierate null. Die Frage stellt sich, ob sie auch notwendig sind.

Für die polynomialen Basisfunktionen läßt sich folgendes festhalten: Im Abschnitt 5.6.1 wird gezeigt, daß es keine polynomialen Funktionen  $J_{2n-1}(y)$  gibt, die  $\tilde{T}_1$  genügen. Im Gegensatz dazu werden etwas später im Abschnitt 5.6.1 und D.3 Basisfunktionen  $J_{2n-1}(y)$  konstruiert, die  $T_1$  erfüllen und  $\tilde{T}_1$  nicht erfüllen. Sie sind aber nicht universell. Das bedeutet, daß sie entweder von der Anzahl der relevanten Nullmoden abhängen oder durch zusätzliche Bedingungen eingeschränkt sind. Für nicht universelle Basisfunktionen ist  $\tilde{T}_1$  nur hinreichend und nicht notwendig. Dagegen ist für universelle Basisfunktionen die Bedingung  $\tilde{T}_1$  nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig [PR02].

Im nächsten Abschnitt werden die Bedingungen  $\tilde{T}_1$  und  $\tilde{T}_2$  überprüft.

## 5.5 Test der Bedingungen an ausgewählten Basissystemen

Damit  $K_1^{(k_0)}$  und  $\tilde{K}_2^{(k,l)}$  im endlichen Unterraum  $\left\{ B_x^{(0,0,2l-1,1)} \right\}_{l=1}^{N_0}$  liegen können, müssen sie die Randbedingungen dieser Basisfunktionen erfüllen. Das sind

$$0 = K_1^{(k_0)}(\pm 1), \quad (5.46)$$

$$0 = \left. \frac{\partial^2 K_1^{(k_0)}(y)}{\partial y^2} \right|_{\pm 1}, \quad (5.47)$$

$$0 = \tilde{K}_2^{(k,l)}(\pm 1) \quad \text{und} \quad (5.48)$$

$$0 = \left. \frac{\partial^2 \tilde{K}_2^{(k,l)}(y)}{\partial y^2} \right|_{\pm 1}. \quad (5.49)$$

Zwei der vier Bedingungen, (5.46) und (5.48), sind leicht erfüllbar. Mit Hilfe von (3.34) gilt:

$$K_1^{(k_0)}(\pm 1) = J_k''(\pm 1) = 0. \quad (5.50)$$

Durch (3.19) und (3.20) gilt:

$$K_2^{(k,l)}(\pm 1) = \frac{1}{2} \overline{\left( \partial_y B_x^{(k)}(\mathbf{r}) \right) B_y^{(l)}(\mathbf{r}) + B_x^{(k)}(\mathbf{r}) \left( \partial_y B_y^{(l)}(\mathbf{r}) \right)} \Big|_{y=\pm 1} = 0. \quad (5.51)$$

Wenn  $K_2^{(k,l)}$  verschwindet, ist auch die symmetrische Darstellung  $\tilde{K}_2^{(k,l)}$  auf dem Rand null.

### 5.5.1 Energiekonsistenz bei polynomialer Basis

Die Untersuchung der polynomialen Basis auf Energiekonsistenz muß für die Unterräume mit  $\mathbf{k} = 0$ ,  $k_x \neq 0$  und  $k_z = 0$ ,  $k_x = 0$  und  $k_z \neq 0$  sowie  $k_x \neq 0$  und  $k_z \neq 0$  getrennt erfolgen.

Eine Zusammenfassung der drei Fälle  $\mathbf{k} = 0$ ,  $k_x = 0$  und  $k_z \neq 0$  sowie  $k_x \neq 0$  und  $k_z \neq 0$  findet man im Kapitel D.2. Dort wird gezeigt, welche Basisfunktionen bzw. Kombinationen von Basisfunktionen keinen Beitrag zur virtuellen Energierate liefern. Man erhält eine Verletzung der Bilanzgleichung der Energierate durch Basisfunktionen aller drei  $\mathbf{k}$ -Unterräume.

Beim Test der Bedingungen  $\tilde{T}_1$  und  $\tilde{T}_2$  gibt es mehrere mögliche Ergebnisse:

1.  $K_1^{(k_0)}(y) \equiv 0$  bzw.  $\tilde{K}_2^{(k,l)}(y) \equiv 0$  bedeutet, daß bei diesen Basisfunktionen bzw. bei der Kopplung der Basisfunktionen die Bedingungen  $\tilde{T}_1$  bzw.  $\tilde{T}_2$  erfüllt sind. Das ist unabhängig von der Anzahl der relevanten Nullmoden.
2.  $K_1^{(k_0)}(y)$  ist ein Polynom, das die Bedingungen (5.46) und (5.47) erfüllt.  $K_1^{(k_0)}(y)$  läßt sich dann nach (5.45) darstellen. Die relevanten Nullmoden verletzen die Bilanzgleichung der Energieraten nicht.
3.  $\tilde{K}_2^{(k,l)}(y)$  ist ein Polynom, das die Bedingungen (5.48) und (5.49) erfüllt. Dann ist es möglich, bei hinreichend großem  $N_0$  die Bedingung  $\tilde{T}_2$  zu erfüllen.
4. (5.47) bzw. (5.49) ist nicht gültig. Dann ist die Bedingung  $\tilde{T}_1$  bzw.  $\tilde{T}_2$  für diese Basisfunktionen verletzt. Da die Bedingung  $\tilde{T}_1$  auch notwendig ist, kann bei den relevanten Nullmoden gefolgert werden, daß sie einen Beitrag zur virtuellen Energierate haben. Die Basisfunktionen, die  $\tilde{T}_2$  verletzen, müssen an  $T_2$  getestet werden.

Ein Beispiel für die genannte 3. Möglichkeit ist der folgende Fall:

$k_x \neq 0$  **und**  $k_z = 0$

Die Basisfunktionen der Polarisation eins haben nur eine nichtverschwindende  $z$ -Komponente, dagegen sind die  $z$ -Komponenten der Basisfunktionen  $\mathbf{B}^{(k_x, 0, l, 2)}$  gleich null. Für  $\tilde{K}_2^{(k, l)}$  sind nur die Basisfunktionen der Polarisation zwei von Bedeutung. Für  $\tilde{K}_2^{(k, l)}$  gilt

$$\frac{1}{2} \left( \overline{B_x^{(k_x, 0, \tilde{k}, 2)}(\mathbf{r}) B_y^{(-k_x, 0, \tilde{l}, 2)}(\mathbf{r})} + \overline{B_x^{(-k_x, 0, \tilde{l}, 2)}(\mathbf{r}) B_y^{(k_x, 0, \tilde{k}, 2)}(\mathbf{r})} \right)' \quad (5.52)$$

und weiter unter Verwendung der Definitionen (3.39):

$$\tilde{K}_2^{(k, l)}(y) = \frac{i}{2k_x} \left( V_{\tilde{k}}'(y) V_{\tilde{l}}(y) - V_{\tilde{k}}(y) V_{\tilde{l}}'(y) \right)' \quad (5.53)$$

Dadurch läßt sich die Randbedingung an  $\tilde{K}_2^{(k, l)}$  überprüfen:

$$\left. \frac{\partial^2 \tilde{K}_2^{(k, l)}(y)}{\partial y^2} \right|_{\pm 1} = 0. \quad (5.54)$$

Das Ergebnis ist unabhängig von der speziellen Wahl der  $V_{\tilde{k}}$ . Es gehen nur Randeigenschaften ein.

Da  $\tilde{K}_2^{(k, l)}(y)$  ein endliches Polynom in  $y$  ist und die Randbedingungen erfüllt sind, kann  $\tilde{K}_2^{(k, l)}$  in ein endliches Polynom entwickelt werden. Wenn die Bedingung  $\tilde{T}_2$  erfüllt sein soll, muß die Anzahl der verwendeten relevanten Nullmoden mindestens die Anzahl der relevanten Nullmoden, die zur Entwicklung von  $\tilde{K}_2^{(k, l)}(y)$  nötig sind, sein.

Sei  $V_{\tilde{k}}(y) = V_{l_{\max}}(y) \sim y^{4+l_{\max}}$  die Funktion  $V(y)$  mit der höchsten Potenz in  $y$ . Damit  $\tilde{K}_2^{(k, l)}$  antisymmetrisch in  $y$  ist, muß  $V_{\tilde{l}}(y) = V_{l_{\max}-1}(y) \sim y^{4+l_{\max}-1}$  sein. Damit ist  $\tilde{K}_2^{(k, l)}$  ein Polynom vom Grade  $2l_{\max} + 5$ . Die Funktion  $B_x^{(0, 0, l, 1)}(y)$  ist ein Polynom vom Grade  $l + 4$ . Die höchste relevante Nullmode hat eine Knotenzahl von  $2N_0 - 1$  in  $y$  und ist ein Polynom vom Grade  $2N_0 + 3$ . Um eine Erfüllung der Energieratenbilanz zu sichern, muß

$$2N_0 + 3 \geq 2l_{\max} + 5 \quad \rightsquigarrow \quad N_0 \geq l_{\max} + 1 \quad (5.55)$$

gelten.

### Anmerkung zur Energiekonsistenz der polynomialen Basis

In 3.4.1 wurden die Funktionen  $J_l$  angegeben, wenn man auf die Bedingungen (3.5) und (3.6) verzichtet. Der Test auf Energiekonsistenz der polynomialen Basis reduziert sich auf die Überprüfung der Bedingungen (5.46) und (5.48). Die Bedingung (5.46) ist nicht erfüllbar, da jetzt

$$\begin{aligned} J_n''(\pm 1) &= -2P_n^{(2, 2)}(\pm 1) \mp 4 \left. \frac{dP_n^{(2, 2)}(y)}{dy} \right|_{y=\pm 1} \\ &= -\frac{2}{3} (n^2 + 5n + 3) P_n^{(2, 2)}(\pm 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{(\pm 1)^n}{3} (n^2 + 5n + 3) (n + 1)(n + 2) \\
 &\neq 0, \quad n \in \mathbb{N}_0,
 \end{aligned} \tag{5.56}$$

gilt. Die Bedingung (5.48) bleibt gültig. Wie im Abschnitt  $k_x \neq 0$  und  $k_z = 0$  läßt sich eine Mindestanzahl an relevanten Nullmoden angeben, ab der die Bedingung  $\tilde{T}_2$  für alle relevanten  $\mathbf{k}$ -Unterräume erfüllt ist. Werden die Funktionen  $\mathbf{B}^{(m,n,l,p)}$ ,  $l = 0, 1, \dots, l_{\max}$ , im Geschwindigkeitsansatz verwendet, muß

$$N_0 \geq l_{\max} + 2 \tag{5.57}$$

für Energiekonsistenz gelten.

### 5.5.2 Energiekonsistenz bei trigonometrischer Basis

Beim Test der trigonometrischen Basis auf Erfüllung der Energieratenbilanz bei endlichen Galerkin-Systemen sind einige zusätzliche Randbedingungen zu beachten. Nach Gleichungen (3.72),  $J_{\tilde{k}} \equiv H_{\tilde{k}}$ , und der Eigenschaft (3.71) verschwinden alle geraden Ableitungen der Funktionen  $B_x^{(0,0,2l+1,1)}(y)$ ,  $l \in \mathbb{N}_0$ , auf dem Rand. Damit  $K_1^{(k_0)}$  und  $\tilde{K}_2^{(k,l)}$  im endlichen Unterraum  $\{B_x^{(0,0,2l+1,1)}\}_{l=0}^{\infty}$  liegen können, müssen sie die Randbedingungen

$$\left. \frac{\partial^{2n} K_1^{(k_0)}(y)}{\partial y^{2n}} \right|_{\pm 1} = \left. \frac{\partial^{2n} \tilde{K}_2^{(k,l)}(y)}{\partial y^{2n}} \right|_{\pm 1} = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{5.58}$$

erfüllen.

$k_x = 0$  **und**  $k_z = 0$

Da

$$K_1^{(k_0)}(y) = H_{\tilde{k}}''(y) \sim H_{\tilde{k}}(y) \tag{5.59}$$

gilt, ist die Bedingung  $\tilde{T}_1$  für beliebige Anzahl an relevanten Nullmoden erfüllt.

$k_x \neq 0$  **und**  $k_z = 0$

Beim Test dieser Basisfunktionen kann man direkt bei (5.53) einsteigen. Folgende Randbedingungen sind durch (3.40) und (3.77) erfüllt:

$$\left. \frac{\partial^{2n} \tilde{K}_2^{(k,l)}(y)}{\partial y^{2n}} \right|_{\pm 1} = 0 \quad \text{für } n = 0, 1 \text{ und } 2. \tag{5.60}$$

Die sechste Ableitung auf dem Rand ist

$$\left. \frac{\partial^6 \tilde{K}_2^{(k,l)}(y)}{\partial y^6} \right|_{\pm 1} = \frac{7i}{k_x} \left( V_{\tilde{k}}^{(5)}(\pm 1) V_{\tilde{l}}'''(\pm 1) - V_{\tilde{k}}'''(\pm 1) V_{\tilde{l}}^{(5)}(\pm 1) \right) \neq 0, \tag{5.61}$$

da

$$V_{\tilde{k}}'''(-1) = \frac{\pi^3}{\sqrt{2}} (1 + \tilde{k}) (2 + \tilde{k}) \neq 0, \quad (5.62)$$

$$V_{\tilde{k}}'''(+1) = -\frac{(-1)^{\tilde{k}} \pi^3}{\sqrt{2}} (1 + \tilde{k}) (2 + \tilde{k}) \neq 0, \quad (5.63)$$

$$V_{\tilde{k}}^{(5)}(-1) = -\frac{\pi^5}{2\sqrt{2}} (1 + \tilde{k}) (2 + \tilde{k}) [5 + \tilde{k} (4 + \tilde{k})] \neq 0 \quad \text{und} \quad (5.64)$$

$$V_{\tilde{k}}^{(5)}(+1) = \frac{(-1)^{\tilde{k}} \pi^5}{2\sqrt{2}} (1 + \tilde{k}) (2 + \tilde{k}) [5 + \tilde{k} (4 + \tilde{k})] \neq 0. \quad (5.65)$$

Die Bedingung  $\tilde{T}_2$  kann bei endlichen Galerkin-Systemen nicht erfüllt werden.

$k_x = 0$  **und**  $k_z \neq 0$

In dem Ausdruck für  $\tilde{K}_2^{(k,l)}$  nach Tabelle D.2 im Anhang D.2.2 muß  $J$  durch  $H$  ersetzt werden. Damit  $\tilde{K}_2^{(k,l)}$  antisymmetrisch in  $y$  ist, müssen beide,  $H_{\tilde{k}}(y)$  und  $V_{\tilde{l}}(y)$ , symmetrisch oder antisymmetrisch in  $y$  sein. Sind beide Funktionen symmetrisch, erhält man:

$$\begin{aligned} \tilde{K}_2^{(k,l)}(y) &= [H_{2\tilde{k}}(y) V_{2\tilde{l}}(y)]' & (5.66) \\ &= (-1)^{\tilde{k}+\tilde{l}+1} \pi \left\{ (\tilde{k} - \tilde{l}) \sin(\pi(\tilde{k} - \tilde{l})y) \right. \\ &\quad + (\tilde{k} + \tilde{l} + 1) \sin(\pi(\tilde{k} + \tilde{l} + 1)y) \\ &\quad + \frac{2\tilde{l} + 1}{2\tilde{l} + 3} [(\tilde{k} - \tilde{l} - 1) \sin(\pi(\tilde{k} - \tilde{l} - 1)y) \\ &\quad \left. + (\tilde{k} + \tilde{l} + 2) \sin(\pi(\tilde{k} + \tilde{l} + 2)y)] \right\}. & (5.67) \end{aligned}$$

Der Ausdruck  $\tilde{K}_2^{(k,l)}(y)$  ist eine Linearkombination der  $H_{2n+1}(y)$ , siehe (3.69), der sich auch bei Kopplung zweier antisymmetrischer Funktionen ergibt. Damit  $\tilde{T}_2$  erfüllt ist, müssen hinreichend viele relevante Nullmoden im Galerkin-Ansatz mitgenommen werden.

Seien  $k_{\max}$  und  $l_{\max}$  die höchsten Knotenzahlen der Polarisierungen eins und zwei. Dann ist  $2(k_{\max} + l_{\max} + 1) + 1 = 2(k_{\max} + l_{\max}) + 3$  die höchste auftretende Nullmode. Damit  $\tilde{T}_2$  erfüllt ist, muß

$$2N_0 - 1 \geq 2(k_{\max} + l_{\max}) + 3 \quad \rightsquigarrow \quad N_0 \geq k_{\max} + l_{\max} + 2 \quad (5.68)$$

gelten.

$k_x \neq 0$  **und**  $k_z \neq 0$

Die drei Basissysteme müssen getrennt untersucht werden. Dadurch, daß  $J_l(y) \equiv H_l(y)$  ist, lassen sich die Fälle mit Ausnahme der Kopplung der Basisfunktionen der Polarisation zwei mit Basisfunktionen der Polarisation drei bei  $S_3^{(k_x, k_z)}$  auf bereits betrachtete

Fälle zurückführen, siehe Tabellen D.3 bis D.5 im Anhang D.2. Der eine noch nicht untersuchte Fall verletzt die Bedingung  $\tilde{T}_2$ , da

$$\left. \frac{\partial^4 \tilde{K}_2^{(k,l)}(y)}{\partial y^4} \right|_{\pm 1} = -\frac{5i}{k_x} V_k'''(\pm 1) V_l'''(\pm 1) \neq 0 \quad (5.69)$$

durch (5.62) und (5.63) gilt. Auch ein Unterraum der Basisfunktionen aus  $S_2^{(k_x, k_z)}$  erfüllt die Bedingung  $\tilde{T}_2$  nicht. Im Gegensatz dazu kann die Bedingung  $\tilde{T}_2$  bei der Basis  $S_1^{(k_x, k_z)}$  erfüllt werden, wenn die Anzahl der relevanten Nullmoden hinreichend groß ist. Aus diesem Grund wird das Basissystem  $S_1^{(k_x, k_z)}$  im Fall trigonometrischer Funktionen bevorzugt.

## 5.6 Konstruktion energiekonsistenter Basisfunktionen

Wie beim Test der polynomialen und trigonometrischen Basis auf Erfüllung der Energieratenbilanzgleichung festgestellt wurde, gibt es selbst bei einfachen Basissystemen, die aus Polynomen bzw. trigonometrische Funktionen aufgebaut sind, Unterräume des Basissystems bezüglich  $\mathbf{k}$  und der Polarisation, die die Bilanzgleichung der Energieraten verletzen.

Bei dem polynomialen Basissystem waren nur die Basisfunktionen mit  $k_x \neq 0$  und  $k_z = 0$  energiekonsistent. Dagegen waren es bei dem trigonometrischen Basissystem nur diese Funktionen, die die Bilanzgleichung nicht erfüllten. Bei den in dieser Arbeit untersuchten polynomialen und trigonometrischen Basissystemen waren die hinreichenden Bedingungen  $\tilde{T}_1$  und  $\tilde{T}_2$  nicht gleichzeitig erfüllbar. Ein Ausweg besteht darin, die Bedingungen  $T_1$  und  $T_2$  zu erfüllen. Der entscheidende Nachteil liegt darin, daß in diesen Bedingungen die Anzahl an relevanten Nullmoden  $N_0$  direkt eingeht. Bei Veränderung des  $N_0$  müssen die Basisfunktionen neu angepaßt werden. Sie haben nicht den universalen Charakter wie die Basisfunktionen, die die Bedingungen  $\tilde{T}_1$  und  $\tilde{T}_2$  erfüllen.

### 5.6.1 Polynomiale Basis

Polynome zur Darstellung der  $J_n$ ,  $V_n$  und  $H_n$  zu verwenden hat den Vorteil, daß  $K_1$  und  $\tilde{K}_2$  ebenfalls Polynome endlichen Grades sind. Damit  $K_1$  und  $\tilde{K}_2$  durch einen endlichen Unterraum der relevanten Nullmoden dargestellt werden können, müssen sie die Randbedingungen der relevanten Nullmoden erfüllen. Der Test auf Erfüllung der Energiekonsistenzbedingungen reduziert sich auf eine Überprüfung der Randbedingungen.

#### Relevante Nullmoden

Die Bedingung  $\tilde{T}_1$  wird nur durch die relevanten Nullmoden beeinflusst. Sie kann mit endlichen Polynomen nie erfüllt werden. Die Funktionen  $\{J_{2n-1}(y)\}_{n=1}^{N_0}$ , die den Projektor bilden, und  $\{J_{2n-1}''(y)\}_{n=1}^{N_0}$ , die in  $K_1$  auftreten, sind antisymmetrisch in  $y$  und müssen den gleichen Randbedingungen genügen. Die nullte (Haftrandbedingung) und zweite

(Periodizitätsrandbedingung) Ableitung auf dem Rand müssen verschwinden. Die zweite Ableitung auf dem Rand für  $J''_{2n-1}(y)$  verlangt, daß die vierte Ableitung der Funktionen  $J_{2n-1}(y)$  auf dem Rand verschwindet. Konstruiert man Funktionen  $J_{2n-1}(y)$ , deren vierte Ableitung auf dem Rand null ist, muß auch die vierte Ableitung von  $J''_{2n-1}(y)$  auf dem Rand null sein. Setzt man diese Argumentation fort, muß man das Verschwinden aller geraden Ableitungen aller  $J_{2n-1}(y)$  auf dem Rand fordern.

Es gibt kein endliches Polynom, dessen geradzahlige Ableitungen inklusive der nullten auf dem Rand verschwinden: Sei  $P_n(y)$  ein Polynom vom Grad  $n$ ,

$$P_n(y) = \sum_{l=0}^n \Theta_{n,l} y^l, \quad (5.70)$$

mit  $n + 1$  freien Koeffizienten. Es sind  $2(\lfloor n/2 \rfloor + 1)$  homogene Randbedingungen zu erfüllen:

$$0 = P_n(\pm 1) = P_n''(\pm 1) = \dots = \begin{cases} P_n^{(n)}(\pm 1) & | n \text{ gerade} \\ P_n^{(n-1)}(\pm 1) & | n \text{ ungerade} \end{cases}. \quad (5.71)$$

Dabei bezeichnet  $\lfloor z \rfloor$  die größte ganze Zahl, die kleiner gleich  $z$  ist. Es gilt:

$$2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \begin{cases} n & | n \text{ gerade} \\ n - 1 & | n \text{ ungerade} \end{cases}. \quad (5.72)$$

Es existieren mindestens genausoviele homogene Gleichungen wie freie Koeffizienten. Aufgrund der linearen Unabhängigkeit der Polynome  $y^l$ ,  $l = 0, \dots, n$ , gibt es nur die triviale Lösung  $\Theta_{n,l} = 0$ ,  $l = 0, \dots, n$ .

Da es kein endliches Polynom gibt, dessen geradzahlige Ableitungen auf dem Rand verschwinden, ist die Bedingung  $T_1$  nicht erfüllbar.

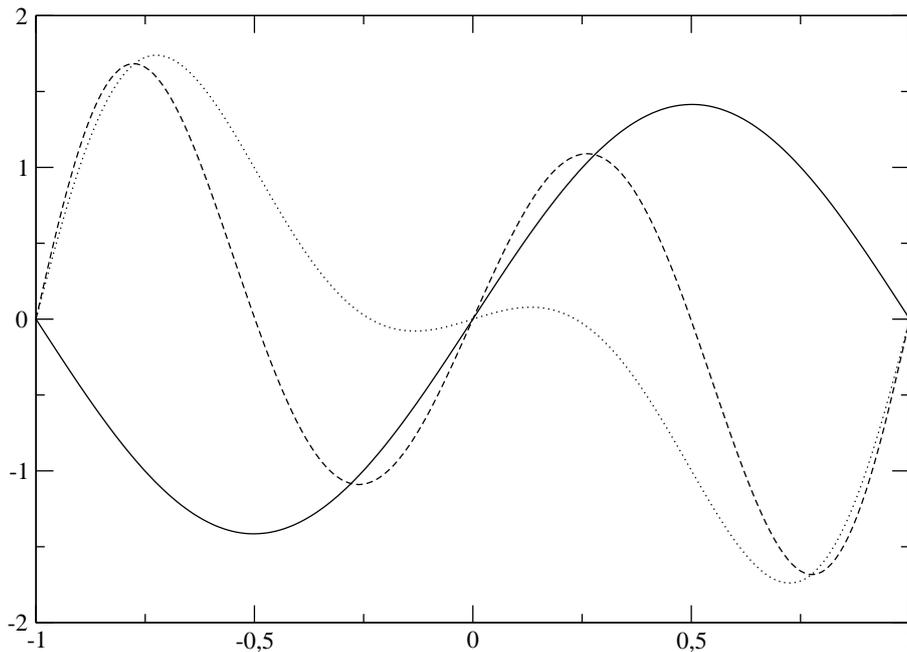
Man kann dann versuchen, die Bedingung  $T_1$  zu erfüllen. Ohne Funktionsansätze mit freien Koeffizienten, die dann z. B. durch die Konsistenzbedingungen bestimmt werden, ist die Bedingung  $T_1$  nicht erfüllbar [PR02].

Dazu müssen die Funktionen für  $\mathbf{k} = 0$  angepaßt werden. Will man die ersten  $N_0$  antisymmetrischen Funktionen  $J_{2n-1}(y)$ ,  $n = 1, \dots, N_0$ , konstruieren, müssen aufgrund der Nichtlinearität der Gleichung (5.39) alle Funktionen auf einmal bestimmt werden. Dazu wird der Ansatz

$$J_{2n-1}^{(N_0)}(y) = (1 - y^2) \sum_{\nu=1}^{n+2} e_{n,\nu}^{(o,N_0)} P_\nu^{(1,1)}(y), \quad n = 1, 2, \dots, N_0, \quad (5.73)$$

gemacht. Dabei bezeichnen  $P_\nu^{(1,1)}(y)$  spezielle Jacobi-Polynome, siehe [AS65].

In der Summe enthält der Ansatz  $N_0(N_0 + 5)/2$  Koeffizienten. Diese stammen aus der Forderung nach Orthonormalität, siehe Abschnitt 3.4.1, mit  $N_0(N_0 + 1)/2$  Bedingungen, der Forderung nach Energiekonsistenz (5.39) mit  $N_0$  Bedingungen und der Forderung des Verschwindens der zweiten Ableitung, siehe (3.34), mit  $N_0$  Bedingungen. Der Ansatz sichert ebenfalls die Haftrandbedingung. Die freien Koeffizienten wurden so auf die einzelnen Funktionen  $J_1^{(N_0)}(y), \dots, J_{2N_0-1}^{(N_0)}(y)$  verteilt, daß bei Hinzunahme einer weiteren Funktion die Anzahl der Koeffizienten der bisherigen Funktionen unverändert bleibt.


 Abbildung 5.3: Lösungen für  $J_1^{(1)}(y)$ 

Bei der Berechnung der Funktion  $J_1^{(1)}(y)$  ist ein nichtlineares Gleichungssystem zu lösen. Aus der Rechnung resultieren sechs Lösungen, die durch die Transformationsfreiheit (5.41) auf effektiv drei verschiedene Lösungen reduziert werden. Sie sind im Bild 5.3 dargestellt. Die Lösungen unterscheiden sich in der Anzahl der Nulldurchgänge im offenen Intervall  $(-1, 1)$ . Es gibt Lösungen mit einem oder drei Nulldurchgängen. Für die Berechnungen ab der Funktion  $J_3^{(N_0)}(y)$ ,  $N_0 \geq 2$ , wird die Lösung mit nur einem Nulldurchgang ausgewählt.

Bei den Berechnungen der Funktionen  $J_1^{(2)}(y)$  und  $J_3^{(2)}(y)$  gibt es wie bei der Funktion  $J_1^{(1)}(y)$  drei Lösungen. Es wird die Lösung ausgewählt, deren Koeffizienten  $e_{1,\nu}^{(o,2)}$  möglichst nahe bei  $e_{1,\nu}^{(o,1)}$  liegen. Bei  $N_0 = 3$  gibt es effektiv fünf Lösungen. Auch hier werden die Lösungen so ausgewählt, daß diesmal die beiden ersten Funktionen  $J_1^{(3)}(y)$  und  $J_3^{(3)}(y)$  sich möglichst wenig von  $J_1^{(2)}(y)$  und  $J_3^{(2)}(y)$  unterscheiden. Alle Koeffizienten bis  $N_0 = 3$  sind in Tabelle 5.1 zusammengefaßt. Einige Darstellungen finden sich in 5.4.

Diese Methode der Konstruktion der  $J_{2n-1}^{(N_0)}(y)$  hat den Nachteil, daß für jedes  $N_0$  alle Funktionen  $J_1^{(N_0)}(y), \dots, J_{2N_0-1}^{(N_0)}(y)$  bei Veränderung von  $N_0$  neu berechnet werden müssen. Aufgrund der doppelten Nichtlinearität in den Gleichungen (5.39) und der Orthonormalität der Funktionen konnten die Funktionen mit Mathematica [Wol99] nur bis  $N_0 = 3$  berechnet werden.

Die Abhängigkeit der relevanten Nullmoden von ihrer Anzahl kann nur auf Kosten weiterer Bedingungen an die relevanten Nullmoden verhindert werden. Dies wird im Anhang D.3 gezeigt.

Tabelle 5.1: Koeffizienten  $e_{n,\nu}^{(o,N_0)}$ ,  $n = 1, 2, 3$  und  $\nu = 1, \dots, n + 2$ , für maximal drei relevante Nullmoden

$N_0$	1	2	3
$e_{1,1}^{(o,N_0)}$	1,689 234	1,693 064	1,694 074
$e_{1,2}^{(o,N_0)}$	-0,321 138	-0,312 424	-0,310 116
$e_{1,3}^{(o,N_0)}$	0,021 509	0,018 560	0,017 779
$e_{2,1}^{(o,N_0)}$		-0,847 596	-0,863 443
$e_{2,2}^{(o,N_0)}$		-1,895 546	-1,943 939
$e_{2,3}^{(o,N_0)}$		1,009 500	0,955 456
$e_{2,4}^{(o,N_0)}$		-0,160 728	-0,130 032
$e_{3,1}^{(o,N_0)}$			0,557 137
$e_{3,2}^{(o,N_0)}$			1,500 232
$e_{3,3}^{(o,N_0)}$			1,534 809
$e_{3,4}^{(o,N_0)}$			-1,693 634
$e_{3,5}^{(o,N_0)}$			0,420 052

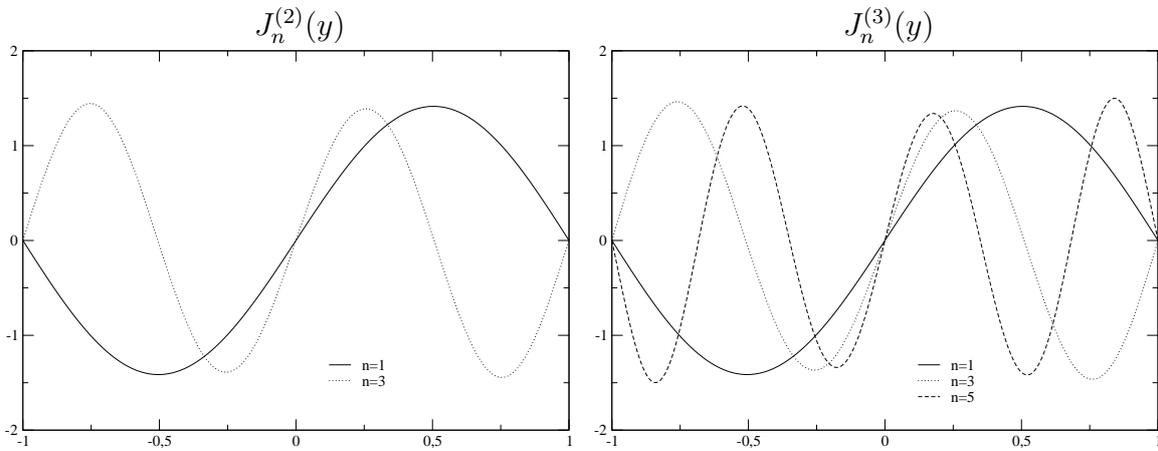


Abbildung 5.4: Funktionen  $J_n^{(2)}(y)$ ,  $n = 1, 3$ , und  $J_n^{(3)}(y)$ ,  $n = 1, 3, 5$

### Nichtnullmoden

Die Bedingung  $\tilde{T}_1$  konnte bei polynomialen Basisfunktionen nicht erfüllt werden. Anders sieht es bei der Bedingung  $\tilde{T}_2$  und den Nichtnullmoden aus. Von den beiden Randbedingungen war die Funktion  $\tilde{K}_2$  aufgrund der Haftrandbedingung auf dem Rand null. Für die zweite Ableitung auf dem Rand gab es in Abhängigkeit vom Unterraum im

wesentlichen zwei Möglichkeiten:

$$J'_k(\pm 1) V_l''(\pm 1) \quad \text{und} \quad H'_k(\pm 1) V_l''(\pm 1). \quad (5.74)$$

Da  $V_l''(\pm 1)$  in beiden Randwerten auftritt, ist die Idee, zusätzlich

$$V''(\pm 1) = 0 \quad (5.75)$$

zu verlangen. Natürlich ist das eine weitere Einschränkung an die Strömung für endliche Geschwindigkeitsansätze. Aber für unendlich viele Ansatzfunktionen wird das Geschwindigkeitsfeld trotz dieser Einschränkung im quadratischen Mittel richtig approximiert:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^{(N)}\| = 0. \quad (5.76)$$

Mit der zusätzlichen Randbedingung an  $V_n(y)$ , die durch den Ansatz

$$V_n(y) = (1 - y^2)^3 L_n(y) \quad (5.77)$$

erfüllt wird, könnte die Bedingung  $\tilde{T}_2$  für hinreichend große  $N_0$  erfüllt werden. Die Nichtnullmoden würden keinen Beitrag zur virtuellen Energierate haben.

## 5.6.2 Trigonometrische Basis

Bei der trigonometrischen Basis verletzen nur die Basisfunktionen  $\mathbf{B}^{(k_x, 0, l, 2)}$ ,  $l \in \mathbb{N}_0$ , die Bilanz der Energieraten. Um die Bilanzgleichung zu erfüllen, müssen die Funktionen  $V_l(y)$  mit offenen Koeffizienten angepaßt werden.

Dazu wird von der notwendigen und hinreichenden Bedingung  $T_2$  ausgegangen. Die Bedingung, speziell für diesen Fall, abgeleitet aus (5.40) und den in Abschnitt 5.5.1 diskutierten Eigenschaften der Basisfunktionen  $\mathbf{B}^{(k_x, 0, \tilde{k}, 2)}$ , lautet

$$\begin{aligned} I^{(N_0)}(V_{2k+1}(y), V_{2l}(y)) = & \frac{1}{2} \int_{y=-1}^1 y \left[ \sum_{l=1}^{N_0} J_{2l-1}(y) \int_{\tilde{y}=-1}^1 J_{2l-1}(\tilde{y}) (V_{2k+1}''(\tilde{y}) V_{2l}(\tilde{y}) \right. \\ & - V_{2k+1}(\tilde{y}) V_{2l}''(\tilde{y})) d\tilde{y} - (V_{2k+1}''(y) V_{2l}(y) \\ & \left. - V_{2k+1}(y) V_{2l}''(y)) \right] dy. \end{aligned} \quad (5.78)$$

Werden im Geschwindigkeitsansatz die Funktionen  $V_0(y), V_1(y), \dots, V_{k_{\max}}(y)$  indirekt über die Basisfunktionen  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  verwendet, so verlangt die Bedingung  $T_2$ , daß

$$I^{(N_0)}(V_{2k+1}(y), V_{2l}(y)) = 0, \quad \forall k, l \quad \text{mit} \quad 0 \leq 2k + 1, 2l \leq k_{\max}, \quad (5.79)$$

gilt. Aufgrund der Antisymmetrie der Grundströmung in  $y$  sind die folgenden Bedingungen

$$I^{(N_0)}(V_{2k}(y), V_{2l}(y)) = 0 \quad (5.80)$$

bereits erfüllt. Aus der Definition (5.78) läßt sich eine Antisymmetrieeigenschaft,

$$I^{(N_0)}(V_{2k}(y), V_{2l+1}(y)) = -I^{(N_0)}(V_{2l+1}(y), V_{2k}(y)), \quad (5.81)$$

ableiten.

Zur Konstruktion der neuen Basisfunktionen  $\tilde{V}_k^{(N_0)}(y)$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ , wird folgender Ansatz gemacht,

$$\tilde{V}_k^{(N_0)}(y) = V_k(y) + \sum_{\nu=1}^{\lfloor (k+1)/2 \rfloor} d_{k,\nu}^{(N_0)} V_{k+2\nu}(y), \quad (5.82)$$

der sämtliche Randbedingungen an  $\tilde{V}_k^{(N_0)}(y)$  sicherstellt.  $\lfloor z \rfloor$  bezeichnet die größte ganze Zahl, die kleiner gleich  $z$  ist. Die freien Koeffizienten  $d_{k,\nu}^{(N_0)}$  werden so bestimmt, daß die Bedingungen (5.79) erfüllt sind. Da in diesen Bedingungen die Anzahl  $N_0$  an relevanten Nullmoden eine Rolle spielt, hängen die Funktionen  $\tilde{V}_k^{(N_0)}(y)$  natürlich auch von  $N_0$  ab. Daß die Anzahl der freien Koeffizienten abhängig davon ist, welche Funktion  $\tilde{V}_k^{(N_0)}(y)$  bestimmt werden soll, liegt an der Vorgehensweise.

Angenommen, es wird nur  $\tilde{V}_0^{(N_0)}(y)$  im endlichen Geschwindigkeitsansatz verwendet. Dann gibt es nur eine Bedingung  $I^{(N_0)}(\tilde{V}_0^{(N_0)}(y), \tilde{V}_0^{(N_0)}(y)) = 0$ , die aber wegen (5.80) bereits erfüllt ist. Es gibt keine nichttriviale Bedingung.  $\tilde{V}_0^{(N_0)}(y)$  kann unter Beachtung der Randbedingungen frei gewählt werden und ist unabhängig von  $N_0$ ,  $\tilde{V}_0^{(N_0)}(y) \equiv V_0(y)$ . Wird  $\tilde{V}_1^{(N_0)}(y)$  in den Ansatz mit hineingenommen, so gibt es eine nichttriviale Bedingung  $I^{(N_0)}(\tilde{V}_0^{(N_0)}(y), \tilde{V}_1^{(N_0)}(y)) = 0$ . Für  $\tilde{V}_2^{(N_0)}(y)$  gibt es ebenfalls nur eine,  $I^{(N_0)}(\tilde{V}_1^{(N_0)}(y), \tilde{V}_2^{(N_0)}(y)) = 0$ . Abhängig davon, ob  $\tilde{V}_k^{(N_0)}(y)$  symmetrisch oder antisymmetrisch in  $y$  ist, erhält man die folgenden Fälle:

1. Für  $\tilde{V}_{k=2\tilde{k}}^{(N_0)}(y)$  gibt es die Bedingungen

$$I^{(N_0)}(\tilde{V}_{2\tilde{k}-1}^{(N_0)}(y), \tilde{V}_{2\tilde{k}}^{(N_0)}(y)) = \dots = I^{(N_0)}(\tilde{V}_1^{(N_0)}(y), \tilde{V}_{2\tilde{k}}^{(N_0)}(y)) = 0. \quad (5.83)$$

Das sind  $2\tilde{k}/2 = \lfloor (k+1)/2 \rfloor$  Bedingungen.

2. Für  $\tilde{V}_{k=2\tilde{k}+1}^{(N_0)}(y)$  gibt es die Bedingungen

$$I^{(N_0)}(\tilde{V}_{2\tilde{k}}^{(N_0)}(y), \tilde{V}_{2\tilde{k}+1}^{(N_0)}(y)) = \dots = I^{(N_0)}(\tilde{V}_0^{(N_0)}(y), \tilde{V}_{2\tilde{k}+1}^{(N_0)}(y)) = 0. \quad (5.84)$$

Das sind  $(2\tilde{k} + 1 + 1)/2 = \lfloor (k+1)/2 \rfloor$  Bedingungen.

Wenn die Koeffizienten  $d_{k,\nu}^{(N_0)}$ ,  $\nu = 1, \dots, \lfloor (k+1)/2 \rfloor$ , für  $\tilde{V}_k^{(N_0)}(y)$  bestimmt werden sollen, müssen  $\tilde{V}_{k-1}^{(N_0)}(y), \tilde{V}_{k-3}^{(N_0)}(y), \dots, \tilde{V}_{0/1}^{(N_0)}(y)$  bekannt sein. Aus den  $\lfloor (k+1)/2 \rfloor$  Bedingungen lassen sich ein Gleichungssystem für die  $\lfloor (k+1)/2 \rfloor$  unbekanntenen Koeffizienten aufstellen und lösen, siehe Abschnitt D.4. Das dort angegebene Verfahren hat den Vorteil, daß die Koeffizienten für  $N_0 \rightarrow \infty$  berechnet werden können. Als Beispiel sind die

ersten beiden Koeffizienten angegeben:

$$d_{1,1}^{(N_0)} = -\frac{(2N_0 - 7)(2N_0 + 9)}{14(2N_0 + 1)^2} \quad \text{und} \quad (5.85)$$

$$d_{2,1}^{(N_0)} = -3(2N_0 - 11)(2N_0 - 3)(2N_0 + 5)(2N_0 + 13) \\ \left(16N_0^4 + 32N_0^3 - 376N_0^2 - 392N_0 + 441\right) \left[20(2N_0 - 5)(2N_0 + 7) \right. \\ \left.(64N_0^6 + 192N_0^5 - 2064N_0^4 - 4448N_0^3 - 6036N_0^2 - 3780N_0 + 6237)\right]^{-1}. \quad (5.86)$$

Die schrittweise Konstruktion der  $\tilde{V}_n^{(N_0)}$  hat den Vorteil, daß nur lineare Gleichungssysteme zu lösen sind, was aufgrund des nichtlinearen Problems (5.79) mit (5.78) nicht zu erwarten war. Im Gegensatz zum Verfahren in Anhang D.3 werden hierbei keine zusätzlichen Bedingungen an die Basisfunktionen gestellt. Durch diese schrittweise Konstruktion wird ebenso verhindert, daß die konstruierten Funktionen von ihrer Anzahl abhängen.

Die Koeffizienten  $d_{k,\nu}^{(N_0)}$ , die in den Vektoren

$$\mathbf{d}_k^{(N_0)} := \left(d_{k,1}^{(N_0)}, d_{k,2}^{(N_0)}, \dots, d_{k,[(2k+1)/2]}^{(N_0)}\right)^T \quad (5.87)$$

zusammengefaßt werden, sind für die Anzahl  $N_0 = 2^0, 2^1, \dots, 2^7$  und  $N_0 = \infty$  an relevanten Nullmoden in der Tabelle 5.2 dargelegt. Die Koeffizienten  $d_{k,\nu}^{(N_0)}$  hängen erwartungsgemäß von  $N_0$  ab. Es scheint, daß die Koeffizienten der höheren Funktionen  $\tilde{V}_k^{(N_0)}(y)$  bei Änderung von  $N_0$  stark oszillieren. Dieser Effekt wird im Bild 5.5 verdeutlicht.

Die Ursache ist im Verfahren zu suchen.  $\tilde{V}_1^{(N_0)}(y)$  wird durch  $V_0(y)$  bestimmt. Der eine freie Parameter geht monoton gegen seinen Grenzwert  $d_{1,1}^{(\infty)}$ . Bei der Berechnung von  $\tilde{V}_2^{(N_0)}(y)$  wird  $\tilde{V}_1^{(N_0)}(y)$  benötigt. Die Variation von  $d_{1,1}^{(N_0)}$  bei Änderung von  $N_0$  macht sich bei  $d_{2,1}^{(N_0)}$  bemerkbar.  $d_{3,\nu}^{(N_0)}$ ,  $\nu = 1, 2$ , hängen indirekt von  $d_{2,1}^{(N_0)}$  ab. Und  $d_{4,\nu}^{(N_0)}$ ,  $\nu = 1, 2$ , von  $d_{3,\nu}^{(N_0)}$ ,  $\nu = 1, 2$ , und  $d_{1,1}^{(N_0)}$ . Je höher man geht, desto mehr Koeffizienten spielen bei der Rechnung eine Rolle, so daß kleine Änderungen von  $N_0$  große Änderungen der Koeffizienten verursachen können.

### 5.6.3 Zusammenfassung

In den letzten beiden Unterkapiteln wurden Verfahren vorgestellt, wie man Basissysteme konstruieren kann, die keine virtuelle Energieerate liefern. Die konstruierten Funktionen waren nicht universell. Das heißt, sie hingen von der Anzahl  $N_0$  der relevanten Nullmoden ab oder wurden durch weitere Forderungen eingeschränkt.

Bei der Konstruktion der relevanten Nullmoden für die polynomiale Basis konnten die nichtlinearen Gleichungen nur durch zusätzliche Forderungen in lineare umgewandelt werden. Dagegen konnte bei der Konstruktion der Nichtnullmoden der trigonometrischen Basis das nichtlineare Problem ohne zusätzliche Forderungen auf ein lineares reduziert werden, so daß eine größere Anzahl dieser Funktionen berechnet werden können.

Tabelle 5.2: Koeffizienten  $\mathbf{d}_k^{(N_0)}$ ,  $k = 1, \dots, 6$ , für die konstruierten Basisfunktionen  $\tilde{V}_1(y), \dots, \tilde{V}_6(y)$ 

$N_0$	$\mathbf{d}_1^{(N_0)}$	$\mathbf{d}_2^{(N_0)}$	$\mathbf{d}_3^{(N_0)}$	$\mathbf{d}_4^{(N_0)}$	$\mathbf{d}_5^{(N_0)}$	$\mathbf{d}_6^{(N_0)}$
1	0,436 508	0,148 932	1,502 093 16,715 134	-14,506 141 -21,714 028	-10,985 973 14,842 629	1,686 201 0,051 503
2	0,111 429	-0,232 565	0,865 117 0,322 138	0,461 991 0,072 782	-3,776 021 4,287 589 5,792 750	-0,088 246 109,586 460 -116,113 081
4	-0,014 991	0,029 660	0,312 349 0,085 088	5,694 837 -3,049 879	0,058 196 -0,297 352	-0,560 810 0,018 613
8	-0,055 610	-0,108 545	-0,153 604 0,001 129	-0,170 857 -0,001 180	0,011 976 -0,107 628 -0,005 968	0,000 388 0,047 234 0,015 923
16	-0,067 231	-0,138 971	-0,242 142 0,011 884	-0,327 523 0,024 021	-0,000 415 -0,422 287 0,047 509	0,003 915 -0,495 669 0,067 177
32	-0,070 347	-0,147 159	-0,265 197 0,015 876	-0,367 286 0,033 485	-0,001 188 -0,497 818 0,076 524	-0,002 208 -0,606 503 0,117 777
64	-0,071 154	-0,149 279	-0,271 132 0,016 979	-0,377 490 0,036 123	-0,003 443 -0,517 009 0,084 821	-0,007 209 -0,634 600 0,132 520
128	-0,071 359	-0,149 818	-0,272 640 0,017 265	-0,380 080 0,036 806	-0,004 237 -0,521 872 0,086 982	-0,009 035 -0,641 707 0,136 370
$\infty$	-0,071 429	-0,150 000	-0,273 148 0,017 361	-0,380 952 0,037 037	-0,004 454 -0,523 508 0,087 714	-0,009 536 -0,644 097 0,137 675
					-0,004 528	-0,009 708

Ein Anwendungsbereich liegt bei der Aufstellung niedrigdimensionaler Modelle. Damit bei diesen Modellen die Gesamtenergie rate nur durch die bei der ebenen Couette-Strömung wichtigen Mechanismen Bewegung der Wände und Dissipation geändert wird, lohnt sich hier der Aufwand, spezielle Funktionen zu konstruieren. Für hochdimensionale Modelle sind diese Verfahren, die nichtuniverselle Basisfunktionen liefern, kaum praktikabel. Hier müssen universelle Basisfunktionen verwendet werden.

Deshalb wird im nächsten Unterkapitel gezeigt, wie mit den universellen relevanten Nullmoden eine Kontrolle des Energiefehlers möglich ist.

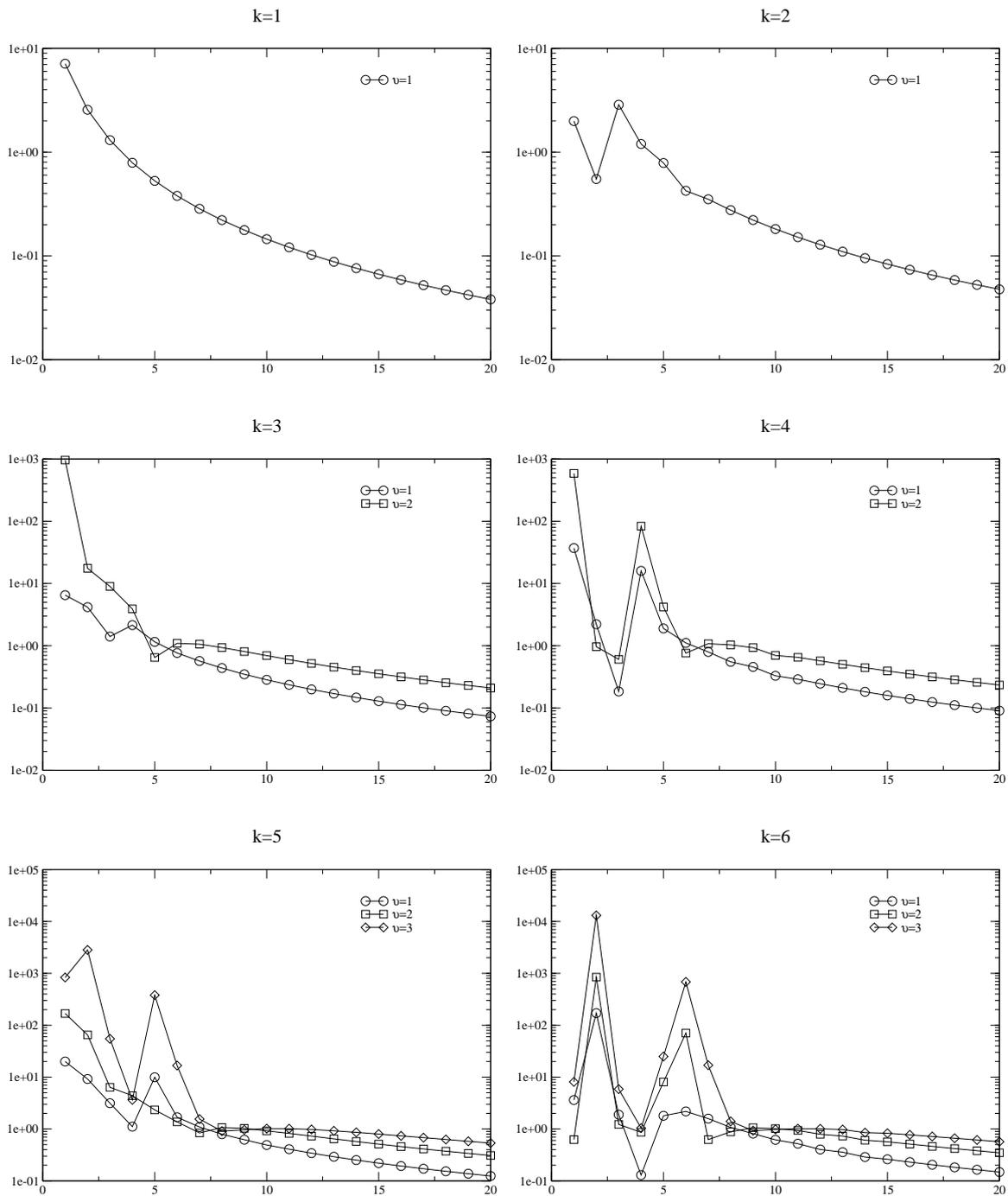


Abbildung 5.5: Darstellung von  $\left| \left( d_{k,\nu}^{(N_0)} - d_{k,\nu}^{(\infty)} \right) / d_{k,\nu}^{(\infty)} \right|$  über  $N_0$

## 5.7 Kontrolle der Energiefehler

Wie im letzten Unterkapitel deutlich geworden ist, sind die konstruierten Basisfunktionen, die dafür sorgen, daß  $\varepsilon_{\text{virt}}^{(N)} \equiv 0$  ist, nicht universell. Eine Änderung in  $N_0$  hat

zur Folge, daß ein Teil der Basisfunktionen neu bestimmt werden muß. Für unendlich große  $N_0$  wurde im Abschnitt 5.1 gezeigt, daß man formal eine verschwindende virtuelle Energierate erreichen kann. Deshalb wird im folgenden der Energiefehler als Funktion von  $N_0$  exemplarisch untersucht.

Dazu soll als Beispiel die trigonometrische Basis dienen. Hier waren nur die Basisfunktionen  $\mathbf{B}^{(m,0,l,2)}$  für die Verletzung der Bilanzgleichung der verschiedenen Energieraten von Bedeutung. Es wird deshalb das Modell T1 aus Anhang C.3 mit einer variablen Anzahl an relevanten Nullmoden verwendet und die virtuelle Energierate untersucht.

Zu Simulation werden folgende Anfangsbedingungen gewählt:

$$c_{(0,0,1,1)}(0) = A, \quad c_{(0,0,2n-1,1)}(0) = 0 \quad \text{für } n = 2, \dots, N_0, \quad \text{und} \quad (5.88)$$

$$c_{(1,0,l,2)}(0) = A, \quad l = 0, \dots, 4. \quad (5.89)$$

Die Konstante  $A$  wird so bestimmt, daß für die Störungsenergie zum Zeitpunkt  $t = 0$

$$E_S(0) = 0,2 \quad \rightsquigarrow \quad A = 42 \sqrt{\frac{5}{190\,031 + 2\,557\,800\pi^2}} \approx 0,018\,622 \quad (5.90)$$

gilt. Die Reynoldszahl wurde zu  $\text{Re} = 10^4$  gewählt.

Zur Untersuchung werden folgende Größen berechnet:

1. die Störungs- und Gesamtenergie,

$$E_S^{(N)} = \frac{1}{2} \|\mathbf{u}^{(N)}\|^2 \quad \text{und} \quad E_{\text{ges}}^{(N)} = \frac{1}{2} \|\mathbf{v}^{(N)}\|^2, \quad (5.91)$$

2. die Wandleistung

$$\varepsilon_{\text{Wand}}^{(N)}(t) = \frac{1}{2\text{Re}} \left( \left. \frac{\partial u_x^{(N)}}{\partial y} \right|_{y=-1} + \left. \frac{\partial u_x^{(N)}}{\partial y} \right|_{y=1} \right), \quad (5.92)$$

3. die Dissipationsleistung

$$\varepsilon_{\text{Diss}}^{(N)}(t) = \frac{1}{\text{Re}} \left( \mathbf{u}^{(N)}, \Delta \mathbf{u}^{(N)} \right), \quad (5.93)$$

4. die virtuelle Energierate  $\varepsilon_{\text{virt}}^{(N)}$  nach Gleichung (5.31),

5. die relative virtuelle Energierate

$$\varepsilon_{\text{virt,rel}}^{(N)}(t) := \frac{\varepsilon_{\text{virt}}^{(N)}(t)}{\left| \varepsilon_{\text{Wand}}^{(N)}(t) \right| + \left| \varepsilon_{\text{Diss}}^{(N)}(t) \right|}, \quad (5.94)$$

6. die virtuelle Energie

$$E_{\text{virt}}^{(N)}(t) := \int_0^t \varepsilon_{\text{virt}}^{(N)}(s) \, ds \quad \text{und} \quad (5.95)$$

## 7. die relative virtuelle Energie

$$E_{\text{virt,rel}}^{(N)}(t) = \frac{E_{\text{virt}}^{(N)}(t)}{\left| \int_0^t \varepsilon_{\text{Wand}}^{(N)}(s) \, ds \right| + \left| \int_0^t \varepsilon_{\text{Diss}}^{(N)}(s) \, ds \right|}. \quad (5.96)$$

Für  $N_0 = 1$  sind in Bild 5.6 die Störungsenergie, die Gesamtenergie, die Wand- und Dissipationsleistungen, die relative virtuelle Energierate und die relative virtuelle Energie dargestellt. Wenn man die Wand- und Dissipationsleistung als wahre physikalische Energieraten ansieht, so stellt  $\varepsilon_{\text{virt,rel}}^{(N)}$  die virtuelle Energierate im Verhältnis zur physikalischen Energierate dar. Werte im Zehnerbereich zeugen davon, daß der größte Beitrag der zeitlichen Energieänderung von der virtuellen Energierate stammt.

Um zu überprüfen, ob mit einer Erhöhung von  $N_0$  die Fehler der virtuellen Energieraten kleiner werden, werden Rechnungen bis  $N_0 = 10$  durchgeführt und folgende Parameter bestimmt. Das Maximum des Betrages der relativen virtuellen Energierate

$$\max_{t \geq 0} \left| \varepsilon_{\text{virt,rel}}^{(N)}(t) \right|, \quad (5.97)$$

das Maximum der relativen virtuellen Energie

$$\max_{t \geq 0} \left| E_{\text{virt,rel}}^{(N)}(t) \right| \quad (5.98)$$

und der Grenzwert der relativen virtuellen Energie für unendlich große Zeit:

$$\left| E_{\text{virt,rel}}^{(N)}(\infty) \right|. \quad (5.99)$$

Dabei bedeutet unendlich, daß die Rechnungen solange durchgeführt wurden, bis die Störungsenergie  $E_S(t) < 9 \cdot 10^{-8}$  war. Die Ergebnisse bis  $N_0 = 10$  sind in der Tabelle 5.3 zusammengefaßt.

Tabelle 5.3: Zusammenfassung der drei Parameter nach (5.97) bis (5.99) zur Beurteilung der Güte der Energieratenkonsistenz in Abhängigkeit von  $N_0$

$N_0$	$\max_{t \geq 0} \left  \varepsilon_{\text{virt,rel}}^{(N)}(t) \right $	$\max_{t \geq 0} \left  E_{\text{virt,rel}}^{(N)}(t) \right $	$\left  E_{\text{virt,rel}}^{(N)}(\infty) \right $
1	28,98	5,217	0,66
2	9,429	1,680	0,51
3	5,564	0,444 5	0,005 6
4	1,355	0,269 3	0,024
5	0,392 1	0,132 9	0,006 6
6	0,061 26	0,034 91	0,001 6
7	0,010 31	0,004 594	$1,5 \cdot 10^{-4}$
8	0,002 167	0,001 264	$4,7 \cdot 10^{-5}$
9	$8,211 \cdot 10^{-4}$	$4,589 \cdot 10^{-4}$	$1,6 \cdot 10^{-5}$
10	$3,582 \cdot 10^{-4}$	$1,957 \cdot 10^{-4}$	$6,8 \cdot 10^{-6}$

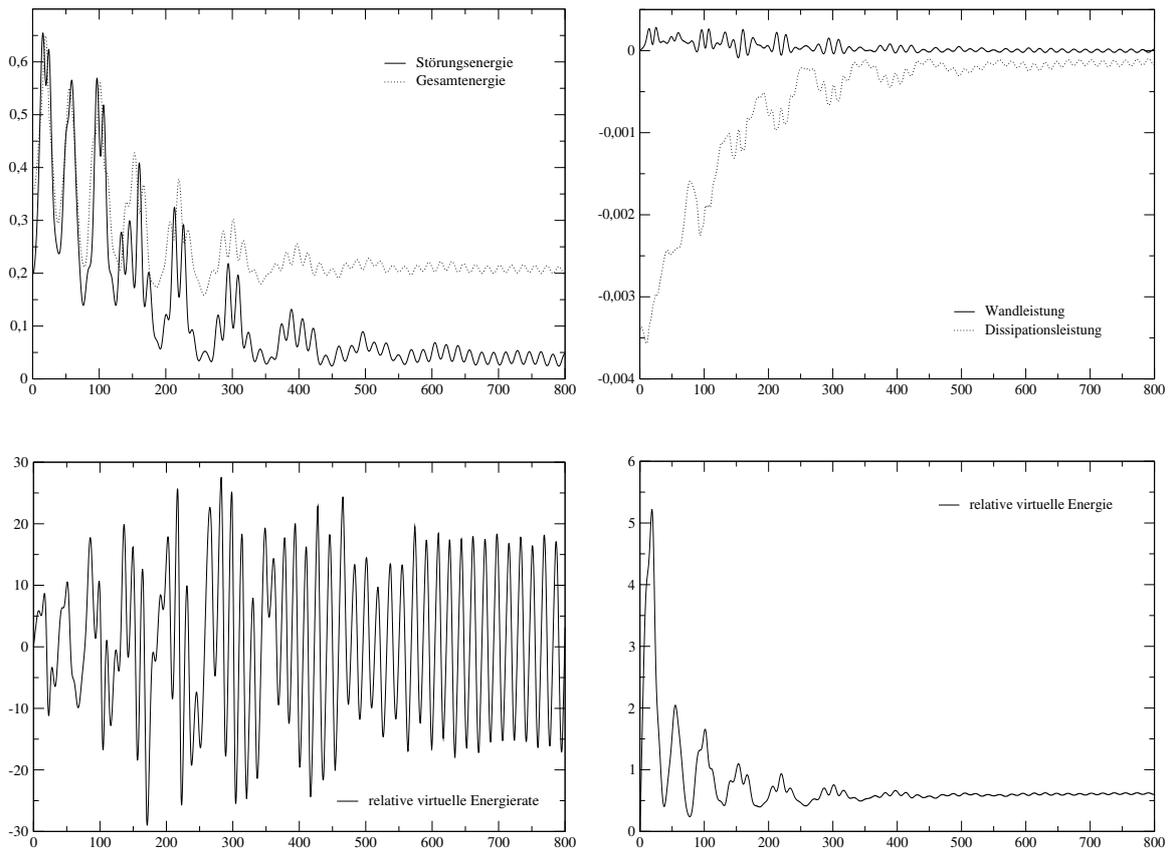


Abbildung 5.6: Darstellung von Energien und Energieraten für  $N_0 = 1$  über der Zeit

Wie man daraus erkennt, werden die Maximalwerte (5.97) und (5.98) bei Vergrößerung von  $N_0$  kleiner. Daß mit der Vergrößerung von  $N_0$  auch eine zwischenzeitliche Zunahme der Fehler auftreten kann, ist für  $|E_{\text{virt,rel}}^{(N)}(\infty)|$  bei  $N_0 = 3$  auf  $N_0 = 4$  zu beobachten. Bei hinreichend großem  $N_0$  kann die virtuelle Energierate im Vergleich zu den anderen Energieraten vernachlässigbar klein gemacht werden. Eine Kontrolle der virtuellen Energiequellen und -senken, verursacht durch ein endliches Galerkin-System, ist durch die Anzahl der relevanten Nullmoden möglich. Die Nutzung vieler relevanter Nullmoden stellt eine echte Alternative zur Verwendung der energieratenkonsistenten Basisfunktionen dar. Bei der Verwendung von Standardverfahren mit hochdimensionalen Funktionsansätzen sind in den Ansätzen auch hinreichend viele Nullmoden enthalten, so daß der Energiefehler klein sein sollte.

Mit der schrittweisen Erhöhung von  $N_0$  konvergiert auch die Geschwindigkeitslösung im Raum der festgelegten Nichtnullmoden und der relevanten Nullmoden. Zur Verdeutlichung sind im Bild 5.7 die kinetischen Gesamt- und Störungsenergien im Modell T1 für eine, neun und zehn relevante Nullmoden dargestellt.

Die kinetische Gesamtenergie wird schon für relativ wenige Nullmoden gut approximiert. Die Kurven für  $N_0 = 9$  und  $N_0 = 10$  sind fast deckungsgleich. Die Gesamtenergie zeigt für  $N_0 = 1$  einen stark oszillierenden Verlauf. Bei  $N_0 = 10$  sind die Amplitude der

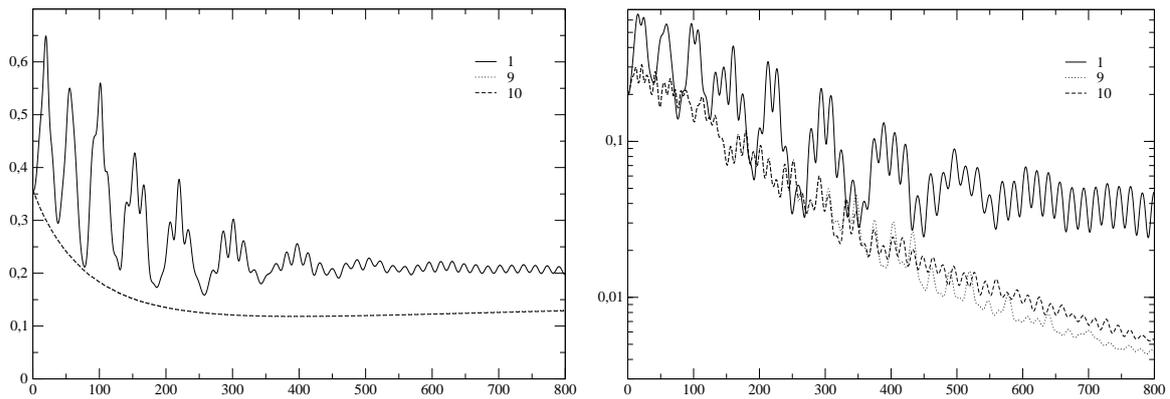


Abbildung 5.7: Darstellung des Verlaufs der kinetischen Gesamtenergie (links) und der kinetischen Störungsenergie (rechts, logarithmische Darstellung) für  $N_0 = 1, 9, 10$  beim Modell T1

Oszillationen so klein, daß sie auf der Energieskala 0,1 bis 0,4 vernachlässigbar sind. Diese qualitative Veränderung wird durch die Reduzierung des Energiefehlers, siehe Tabelle 5.3, in Zusammenhang mit der hohen Reynoldszahl  $Re = 10^4$  erreicht. Durch weitere Simulationen mit noch größeren Reynoldszahlen bestätigt sich der Übergang zur konstanten kinetischen Gesamtenergie, der bei  $\varepsilon_{\text{virt}}^{(N)} \equiv 0$  und  $Re \rightarrow \infty$  erreicht wird. Bei diesem Modell ist die kinetische Gesamtenergie bei einer unendlich großen Reynoldszahl von vernachlässigbar kleinen Oszillationen überlagert, da  $\varepsilon_{\text{virt}}^{(N)} \neq 0$  ist.

Um eine Konvergenz der Störungsenergie bei Vergrößerung von  $N_0$  zu erreichen, müssen viel mehr relevante Nullmoden im Ansatz mitgenommen werden. Die Kurven aus neun und zehn Nullmoden stimmen bis zur Zeit 310 gut überein. Danach differieren sie.



## 6 Zusammenfassung und Diskussion

In dieser Arbeit wurde die Gültigkeit der Energiebilanzgleichung bei der ebenen Couette-Strömung behandelt. Deshalb wurde sie am Anfang der Arbeit für klassische Geschwindigkeitslösungen hergeleitet. Sie spiegelt den Einfluß der Viskosität der Flüssigkeit auf die Dissipation kinetischer Energie und auf die Energieein- und -auskopplung durch die Wände wider. Damit keine zusätzlichen druckbedingten Energieterme in der Bilanzgleichung vorkamen, mußte ein in Haupt- und Querströmung periodischer Störungsdruck vorausgesetzt werden. Daraus folgten zusätzliche Randbedingungen an das Geschwindigkeitsfeld, wie im Grundlagenkapitel gezeigt wurde.

Aufgrund vorheriger Beobachtungen, die eine Verletzung der Bilanzgleichung zeigten, wurden zum Test der Gültigkeit die Navier-Stokes-Gleichungen mittels Galerkin-Verfahren in ein System gewöhnlicher, nichtlinearer Differentialgleichungen überführt. Dazu wurden zwei verschiedene Basissysteme, die polynomiale und die trigonometrische Basis, aufgestellt. Um numerische Fehler in den Matrizen und nichtlinearen Koeffizienten des dynamischen Systems zu vermeiden, wurden analytisch exakte Ausdrücke verwendet. Die Basisfunktionen ließen sich in zwei Gruppen einteilen. Die Basisfunktionen, deren Wellenvektor ungleich null war, wurden Nichtnullmoden genannt, die anderen Nullmoden. Die Nullmoden, die nicht orthogonal zur Grundströmung waren, wurden relevante Nullmoden genannt.

Es wurde eine virtuelle Energierate eingeführt, die null ist, wenn die Bilanzgleichung der Energieraten gültig ist. Die virtuelle Energierate wurde für beliebige endliche dynamische Systeme ausgewertet. Sie ist null, wenn im Geschwindigkeitsansatz keine relevanten Nullmoden verwendet werden oder die Grundströmung durch eine endliche Anzahl relevanter Nullmoden darstellbar ist. Im ersten Fall hätte man keine Energieänderung durch die Wandbewegung, der zweite Fall tritt bei der ebenen Couette-Strömung nicht auf.

Aus dem Verschwinden der virtuellen Energierate ließen sich zwei Bedingungen ableiten, die notwendig und hinreichend sind. Daraus wurden zur besseren Analyse zwei Bedingungen abgeleitet, die nur hinreichend sind. Es gibt Basisfunktionen, die bedingungslos keinen Beitrag zur Energieverletzung haben. Andere haben keinen Beitrag, wenn die Anzahl der relevanten Nullmoden im Geschwindigkeitsansatz hinreichend groß ist. Und es gibt Basisfunktionen, die die hinreichenden Bedingungen nicht erfüllen, und somit einen Beitrag zur virtuellen Energierate haben können. Bei der polynomialen Basis liefern nur Kombinationen von Basisfunktionen mit  $k_x \neq 0$  und  $k_z = 0$  bedingt keinen Beitrag zur virtuellen Energierate. Im Gegensatz dazu sind es bei der trigonometrischen Basis genau diese Funktionen, die als einzige einen Beitrag zur Verletzung der Energieratenbilanzgleichung haben.

An einem Beispiel wurde gezeigt, daß die virtuelle Energierate einen wesentlichen Beitrag zur Änderung der kinetischen Gesamtenergie haben kann. Um diesen Fehler, vor

allem bei Modellen geringer Dimension, zu verhindern, wurden Verfahren angegeben, wie energiekonsistente Basisfunktionen konstruiert werden können. Diese Basisfunktionen zeichnen sich dadurch aus, daß sie nicht universell sind. Sie hängen von der Anzahl der relevanten Nullmoden ab oder wurden durch zusätzliche Forderungen eingeschränkt.

Für Simulationen mit einer großen Anzahl an Freiheitsgraden sind sie ungeeignet. Deshalb wurde anschließend gezeigt, daß mit der Anzahl der relevanten Nullmoden, die im Geschwindigkeitsansatz verwendet werden, eine Kontrolle des Energiefehlers möglich ist. Ab einer Schwelle nahmen alle in der Arbeit definierten Fehlergrößen bei Vergrößerung der Anzahl ab.

Die Änderung der Zeitverläufe der kinetischen Gesamt- und Störungsenergie wurden bei Erhöhung der Anzahl der relevanten Nullmoden und gleichen Nichtnullmoden bei einer Reynoldszahl von zehntausend untersucht. Bei ca. zehn relevanten Nullmoden konnte die Größenordnung der virtuellen Energierate bereits so stark verringert werden, daß sie auf die kinetische Gesamtenergierate und die kinetische Gesamtenergie keinen Einfluß mehr hatte. Die bei geringer Anzahl relevanter Nullmoden vorhandenen starken zeitlichen Oszillationen in der kinetischen Gesamtenergie wurden durch eine große Anzahl relevanter Nullmoden verringert. Es stellte sich ein glatter Zeitverlauf ein.

In Abhängigkeit von der Dimension der numerischen Rechnungen führen zwei Wege zur Verringerung unphysikalischer Energieraten und -senken. Bei geringer Dimension kann durch Konstruktion geeigneter Basisfunktionen der Energiefehler zu null gemacht werden. Dagegen kann bei hoher Dimension der Fehler durch Erhöhung der Anzahl der Basisfunktionen, die an die Grundströmung ankoppeln, auf eine vernachlässigbare Größenordnung reduziert werden.

# Anhang



# A Berechnung des Druckes

Zur Berechnung des Druckes gibt es zwei Möglichkeiten. Man kann ihn aus einem Randwertproblem oder einem Kurvenintegral berechnen. Hier sollen beide Methoden kurz dargelegt werden.

Bei der Druckberechnung aus einem Randwertproblem werden die Navier-Stokes-Gleichungen (2.9) durch Divergenzbildung in die Poisson-Gleichung überführt:

$$\Delta p = -2 \frac{\partial u_y}{\partial x} - \nabla \cdot [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}]. \quad (\text{A.1})$$

Bei Randwertproblemen hat man die Wahl zwischen Dirichlet- und Neumann-Randbedingungen. Die Neumann-Randbedingung, also die Vorgabe der Normalenableitung des Druckes auf dem Rand, wird aus den Navier-Stokes-Gleichungen (2.9) bzw. Gleichung (2.50) durch Multiplikation mit dem Normalenvektor  $\mathbf{n}$  bestimmt:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\partial \Omega} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{S}|_{\partial \Omega}. \quad (\text{A.2})$$

Die Lösung des Randwertproblems wird durch die Periodizität des Druckes in zwei Raumrichtungen wesentlich vereinfacht, siehe [Rum00].

Im Gegensatz zum vorherigen Verfahren wird der Druck bei der zweiten Methode direkt aus (2.50) durch Berechnung eines Kurvenintegrals ermittelt:

$$p(\mathbf{r}, t) = p(\mathbf{r}_0, t) + \int_C \tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{r}', t) \cdot d\mathbf{r}'. \quad (\text{A.3})$$

Da bei exakten Geschwindigkeitslösungen

$$\nabla \times (\nabla p) = \nabla \times \tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (\text{A.4})$$

gilt, kann der Integrationsweg  $C$  frei gewählt werden. Hier wird ein stückweise geradliniger Weg gewählt:

$$C = \bigcup_{i=1}^3 C_i \quad \text{mit} \quad (\text{A.5})$$

$$C_1 := \left\{ \mathbf{r} = (x, y, z)^T \in \Omega : \mathbf{r} = (x \tau, -1, 0)^T, \tau \in [0, 1] \right\}, \quad (\text{A.6})$$

$$C_2 := \left\{ \mathbf{r} = (x, y, z)^T \in \Omega : \mathbf{r} = (x, -1, z \tau)^T, \tau \in [0, 1] \right\} \quad \text{und} \quad (\text{A.7})$$

$$C_3 := \left\{ \mathbf{r} = (x, y, z)^T \in \Omega : \mathbf{r} = (x, (y+1)\tau - 1, z)^T, \tau \in [0, 1] \right\}. \quad (\text{A.8})$$

Der Integrationsweg ist im Bild A.1 veranschaulicht.

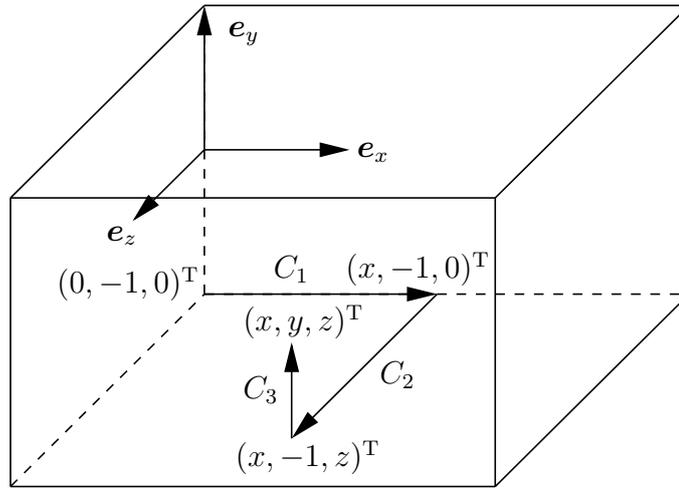


Abbildung A.1: Darstellung des Integrationsweges zur Druckberechnung

Für den Druck gilt

$$\begin{aligned}
 p(\mathbf{r}, t) &= p(0, -1, 0, t) + \int_0^x \tilde{S}_x(x', -1, 0, t) dx' + \int_0^z \tilde{S}_z(x, -1, z', t) dz' \\
 &+ \int_{-1}^y \tilde{S}_y(x, y', z, t) dy'. \tag{A.9}
 \end{aligned}$$

Aus dieser Darstellung läßt sich der Druckgradient berechnen. Unter Ausnutzung von Gleichung (A.4) und partieller Integration erhält man wieder

$$\nabla p(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{S}(\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)). \tag{A.10}$$

Als Randbedingung erhält man

$$\nabla p|_{\partial\Omega} = \mathbf{S}|_{\partial\Omega}. \tag{A.11}$$

Die Darstellung (A.9) für den Druck reproduziert nicht nur die korrekte Normalenableitung des Druckes auf dem Rand des Gebietes  $\Omega$ , sondern auch die richtigen Tangentialableitungen. Aufgrund der Ableitungen geringerer Ordnung im Vergleich zum Randwertproblem ist die Integralmethode i. a. vorzuziehen.

$\tilde{\mathbf{S}}$  in (A.9) wird durch das Geschwindigkeitsfeld ersetzt, und man erhält

$$\begin{aligned}
 p(\mathbf{r}, t) &= p(0, -1, 0, t) + \frac{1}{\text{Re}} \int_0^x \left. \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right|_{\substack{x=x' \\ y=-1 \\ z=0}} dx' + \frac{1}{\text{Re}} \int_0^z \left. \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right|_{\substack{y=-1 \\ z=z'}} dz' \\
 &+ \int_{-1}^y \left[ -\frac{\partial u_y}{\partial t} - y \frac{\partial u_y}{\partial x} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_y + \frac{1}{\text{Re}} \Delta u_y \right] \Big|_{y=y'} dy' \tag{A.12}
 \end{aligned}$$

---

als Ergebnis.

Eine Untersuchung auf Periodizität des Druckes bestätigt einige Teilergebnisse der Gleichungen (2.58):

$$p(x = L_x, y, z, t) - p(x = 0, y, z, t) = \frac{1}{\text{Re}} \int_0^{L_x} \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \Big|_{\substack{y=-1 \\ z=0}} dx; \quad (\text{A.13})$$

$$p(x, y, z = L_z, t) - p(x, y, z = 0, t) = \frac{1}{\text{Re}} \int_0^{L_z} \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \Big|_{y=-1} dz. \quad (\text{A.14})$$

Die rechten Seiten der beiden letzten Gleichungen entsprechen den Bedingungen (2.58) mit  $y = -1$ . Ursache für die Einschränkung der Gleichung (A.13) auf  $z = 0$  ist die Wahl des Weges  $C_1$ .



## B Test der Integrationsroutine

Die nichtlinearen Differentialgleichungen wurden mit einem expliziten elfstufigen Runge-Kutta-Verfahren der Ordnung 7 gelöst, das in ein explizites dreizehnstufiges Runge-Kutta-Verfahren der Ordnung 8 eingebettet war. Es wurde aus [Sci02] entnommen und mit Mathematica [Wol99] überprüft. Dieses Verfahren hatte sich in Testrechnungen als schnell im Vergleich mit anderen Verfahren herausgestellt. Die Einbettung erleichtert die schnelle Berechnung und Abschätzung des lokalen Diskretisierungsfehlers

$$\epsilon = h \frac{41}{480} (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_{11} - \mathbf{k}_{12} - \mathbf{k}_{13}), \quad (\text{B.1})$$

der zur Schrittweitensteuerung verwendet wurde. Die Vektoren  $\mathbf{k}_i$  entstammen der Berechnungsvorschrift

$$\mathbf{k}_i = \mathbf{f} \left( t + \zeta_i h, \mathbf{y}_n + h \sum_{l=1}^m \Omega_{il} \mathbf{k}_l \right), \quad i = 1, \dots, m, \quad (\text{B.2})$$

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h \sum_{l=1}^m \xi_l \mathbf{k}_l, \quad (\text{B.3})$$

mit der Differentialgleichungen der Form

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}) \quad (\text{B.4})$$

gelöst werden können, siehe auch [Sch93].

Die Koeffizienten  $\Omega_{il}$ ,  $\zeta_i$  und  $\xi_l$ ,  $i, l = 1, \dots, m$ , werden zweckmäßig zur Matrix  $\Omega$  und den Spaltenvektoren  $\boldsymbol{\zeta}$  und  $\boldsymbol{\xi}$  zusammengefaßt und in der Butcher-Matrix dargestellt:

$$\left( \begin{array}{c|c} \boldsymbol{\zeta} & \Omega \\ \hline & \boldsymbol{\xi}^T \end{array} \right) \quad (\text{B.5})$$

Zur Darstellung des hier verwendeten Verfahrens werden die Butcher-Matrizen des elf- und dreizehnstufigen Verfahrens kombiniert,

$$\left( \begin{array}{c|c} \boldsymbol{\zeta}^{(13)} & \Omega^{(13)} \\ \hline & \boldsymbol{\xi}^{(11)T} \ 0 \ 0 \\ & \boldsymbol{\xi}^{(13)T} \end{array} \right), \quad (\text{B.6})$$



Form:

$$\dot{c}_i = \sum_{k,l=1}^N M_{ik}^{-1} L_{kl} c_l - \sum_{k,l,m=1}^N M_{ik}^{-1} N_{klm} c_l c_m. \quad (\text{B.8})$$

Darum werden zum Test der Integrationsroutinen  $m$  Differentialgleichungen des Typs

$$\dot{d}_i = \alpha_i d_i + \beta_i d_i^2, \quad i = 1, \dots, m, \quad (\text{B.9})$$

verwendet. Damit wie beim System der ebenen Couette-Strömung der triviale Fixpunkt stabil ist, wird

$$\Re \alpha_i < 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (\text{B.10})$$

verlangt.

Die allgemeine Lösung lautet

$$d_i(t) = \frac{e^{\alpha_i t}}{1 + \frac{\beta_i d_i(0)}{\alpha_i} (1 - e^{\alpha_i t})}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (\text{B.11})$$

wobei  $d_i(0)$  den Wert zum Zeitpunkt  $t = 0$  bezeichnet. Diese Lösung kann Singularitäten aufweisen, wenn

$$t_{\text{sing}}^{(i)} = \frac{1}{\alpha_i} \ln \left( \frac{\alpha_i}{\beta_i d_i(0)} + 1 \right), \quad t_{\text{sing}}^{(i)} \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad t_{\text{sing}}^{(i)} \geq 0 \quad (\text{B.12})$$

gelten. Die Parameter  $\alpha_i$  und  $\beta_i$  sowie die Anfangsbedingungen  $d_i(0)$  sind so zu wählen, daß keine Singularitäten in endlicher Zeit auftreten.

Die  $m$  entkoppelten Differentialgleichungen werden über

$$d_i(t) = \sum_{k=1}^m M_{ik} c_k(t) \quad (\text{B.13})$$

gekoppelt. Daraus folgt das zu lösende Differentialgleichungssystem:

$$\dot{c}_i = \sum_{k,l=1}^m M_{ik}^{-1} \alpha_k M_{kl} c_l + \sum_{k,l,n=1}^m M_{ik}^{-1} \beta_k M_{kl} M_{kn} c_l c_n \quad \text{und} \quad (\text{B.14})$$

$$c_i(0) = \sum_{k=1}^m M_{ik}^{-1} d_k(0) \quad \forall i = 1, \dots, m. \quad (\text{B.15})$$

Die Werte der Parameter  $\alpha_i$  und  $\beta_i$  sowie der Anfangsbedingungen  $d_i(0)$  und der Elemente  $M_{ik}$  der Matrix  $M$  werden durch Ziehung gleichverteilter Zufallszahlen aus den Intervallen

$$\Re \alpha_i \in [-0,05, -0,001] \quad \text{und} \quad \Im \alpha_i \in [-1, 1], \quad (\text{B.16})$$

$$\Re \beta_i \in [-5, 5] \quad \text{und} \quad \Im \beta_i \in [-5, 5], \quad (\text{B.17})$$

$$\Re d_i(0) \in [-1, 1] \quad \text{und} \quad \Im d_i(0) \in [-1, 1], \quad (\text{B.18})$$

$$\Re M_{ik} \in [-1, 1] \quad \text{und} \quad \Im M_{ik} \in [-1, 1] \quad (\text{B.19})$$

erzeugt. Zusätzlich zum Test auf endliche Singularitäten wurde überprüft, ob die Matrix  $M$  regulär ist.

Zur Beurteilung der Genauigkeit der verwendeten Verfahren sind der absolute wie der relative globale Diskretisierungsfehler,

$$\epsilon_{\text{global}}(t_m) = \|\mathbf{c}_m - \mathbf{c}(t_m)\|_2 \quad \text{und} \quad \epsilon_{\text{rel, global}} = \frac{\epsilon_{\text{global}}(t_m)}{\|\mathbf{c}(t_m)\|_2}, \quad (\text{B.20})$$

geeignet. Dabei bezeichnet  $\mathbf{c}(t_m)$  den durch die analytische Formel berechneten Vektor an der Stelle  $t_m$ , wohingegen  $\mathbf{c}_m$  der Näherungsvektor an  $t_m$  ist.

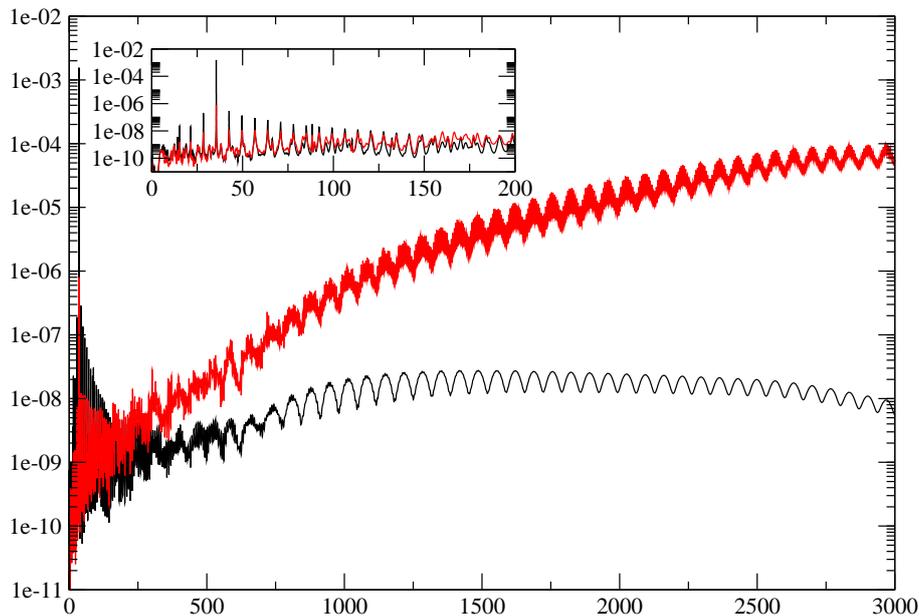


Abbildung B.1: Darstellung des absoluten (schwarz gezeichnet) und relativen (rot gezeichnet) globalen Diskretisierungsfehlers für ein ( $m = 30$ )-dimensionales Differentialgleichungssystem, das mit einem maximalen lokalen Diskretisierungsfehler von  $1 \cdot 10^{-10}$  gelöst wurde.

In den Bildern B.1 bis B.4 sind die absoluten und relativen globalen Diskretisierungsfehler der Rechnungen mit Schätzungen der lokalen Diskretisierungsfehler von  $10^{-10}$  bis  $10^{-16}$  dargestellt. Bis zu einem lokalen Diskretisierungsfehler von  $10^{-14}$  erreicht man bei diesem Differentialgleichungssystem eine Verbesserung der Ergebnisse. Für große Zeiten nimmt der relative globale Diskretisierungsfehler zu. Ursache ist, daß die Lösung selber gegen null geht, siehe Bild B.7. In den Bildern B.5 und B.6 sind die Schrittweiten von zwei Rechnungen angegeben. Bei einer Zeit von rund 40 tritt zwar keine Singularität, aber eine so starke Veränderung der Lösung auf, die eine drastische Verkleinerung der Schrittweiten zur Folge hat.

Einige angegebene Modelle haben ungefähr die gleiche Größenordnung wie die insgesamt 30 komplexwertigen Differentialgleichungen des Testproblems. Die nichtlinearen Terme im Vergleich zu denen der Galerkin-Systeme unterscheiden sich deutlich.

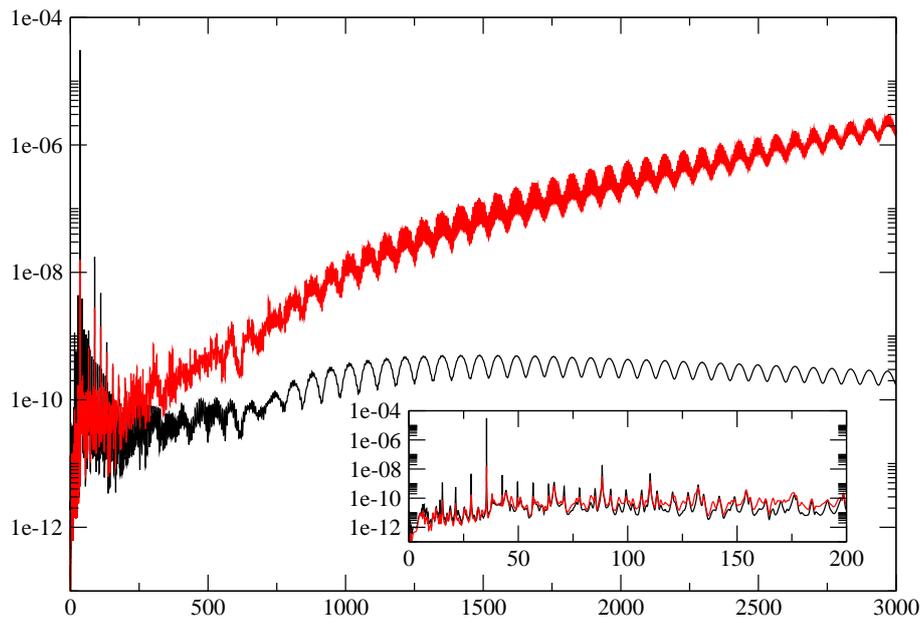


Abbildung B.2: Darstellung des absoluten (schwarz gezeichnet) und relativen (rot gezeichnet) globalen Diskretisierungsfehlers für ein ( $m = 30$ )-dimensionales Differentialgleichungssystem, das mit einem maximalen lokalen Diskretisierungsfehler von  $1 \cdot 10^{-12}$  gelöst wurde.

Während aufgrund der verschiedenen Wellenzahlvektoren ein großer Teil der nichtlinearen Koeffizienten im Galerkin-System null sind, sind sie bei den Testdifferentialgleichungen i. a. alle ungleich null. Ähnliches gilt für die lineare Matrix und für die Metrik-Matrix. Auch die beobachteten Zeitverläufe unterscheiden sich signifikant. Bei den Modellrechnungen hat man zwar oszillierende Lösungen, wie bei den Lösungen der Testdifferentialgleichungen auch, allerdings haben sie eine viel größere Periodendauer. Auch die „Beinahe“-Singularität bei rund 40 Zeiteinheiten tritt bei den Galerkin-Systemen nicht auf.

Zusammenfassend kann man sagen, daß die Differentialgleichungen der Testrechnungen aufgrund ihrer komplexeren Struktur schwieriger zu lösen sind. Die dabei gewonnenen Erfahrungen konnten bei Simulationen des dynamischen Systems (3.7) genutzt werden.

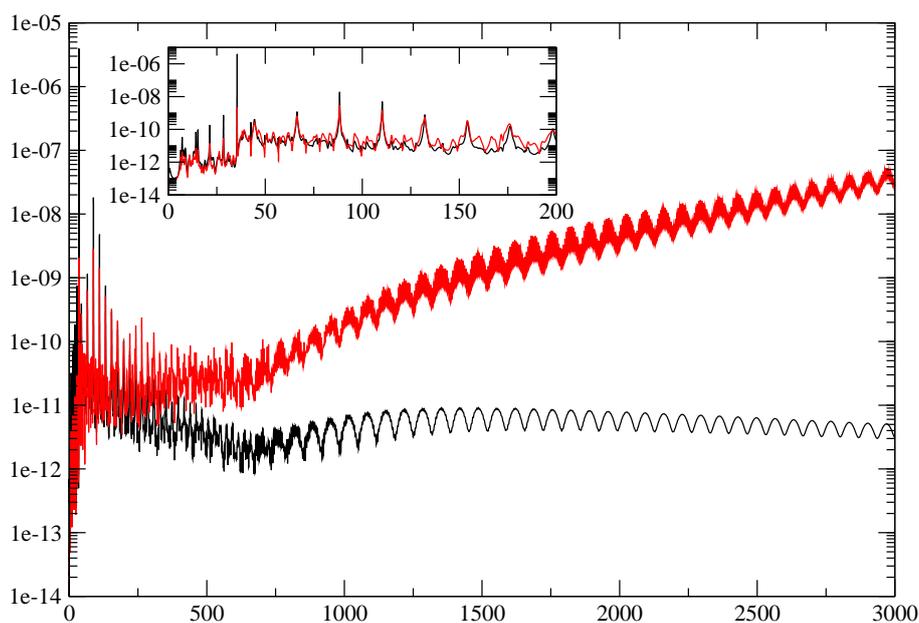


Abbildung B.3: Darstellung des absoluten (schwarz gezeichnet) und relativen (rot gezeichnet) globalen Diskretisierungsfehlers für ein ( $m = 30$ )-dimensionales Differentialgleichungssystem, das mit einem maximalen lokalen Diskretisierungsfehler von  $1 \cdot 10^{-14}$  gelöst wurde.

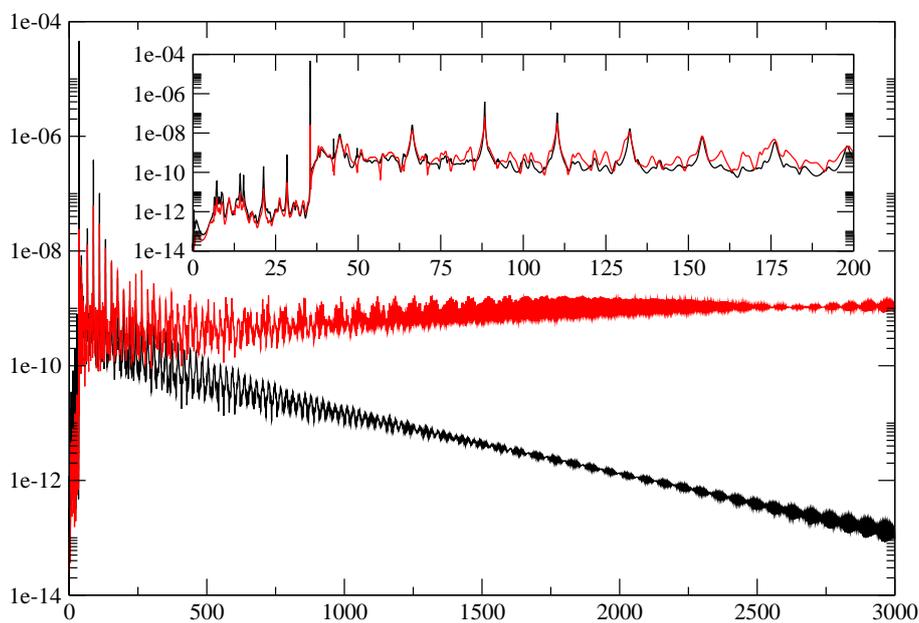


Abbildung B.4: Darstellung des absoluten (schwarz gezeichnet) und relativen (rot gezeichnet) globalen Diskretisierungsfehlers für ein ( $m = 30$ )-dimensionales Differentialgleichungssystem, das mit einem maximalen lokalen Diskretisierungsfehler von  $1 \cdot 10^{-16}$  gelöst wurde.

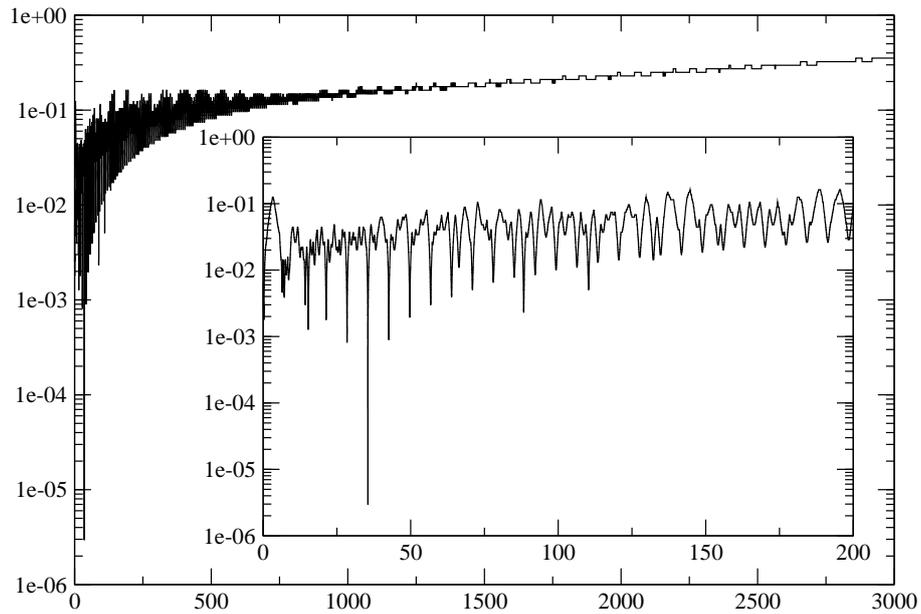


Abbildung B.5: Darstellung der verwendeten Schrittweiten bei der Lösung eines ( $m = 30$ )-dimensionalen Differentialgleichungssystems mit einem maximalen lokalen Diskretisierungsfehler von  $1 \cdot 10^{-14}$ .

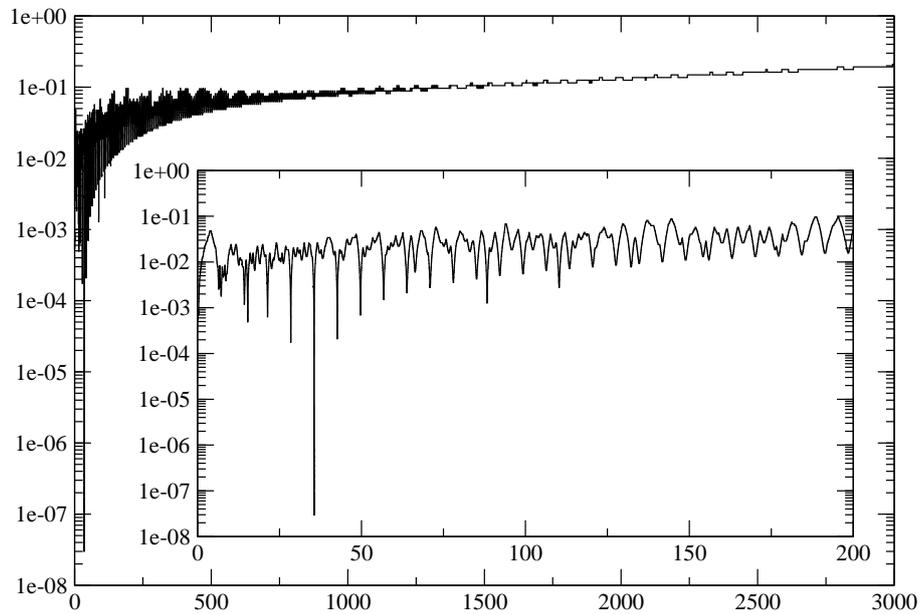


Abbildung B.6: Darstellung der verwendeten Schrittweiten bei der Lösung eines ( $m = 30$ )-dimensionalen Differentialgleichungssystems mit einem maximalen lokalen Diskretisierungsfehler von  $1 \cdot 10^{-16}$ .

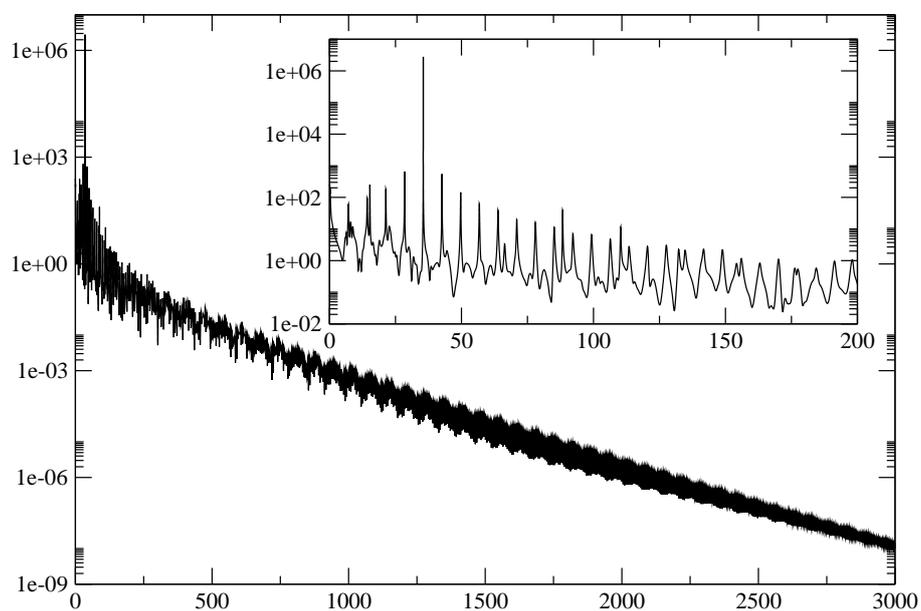


Abbildung B.7: Darstellung der Norm der analytisch exakten Lösung eines ( $m = 30$ )-dimensionalen Differentialgleichungssystems.

# C Modellübersicht

## C.1 Modell P1

Es wird eine einzige Nullmode

$$\mathbf{B}^{(0,0,1,1)}(y) \quad (\text{C.1})$$

verwendet, die für eine Ankopplung an die Grundströmung sorgen soll. Es werden folgende Nichtnullmoden,

$$\left\{ \mathbf{B}^{(1,0,l,p)}(x, y), \mathbf{B}^{(0,1,l,p)}(y, z), \mathbf{B}^{(-1,1,l,p)}(\mathbf{r}) \right\}_{\substack{l=0 \\ p=1,2}}^{l=6}, \quad (\text{C.2})$$

ausgewählt, die um die dazugehörigen konjugiert komplexen Basisfunktionen ergänzt werden. Die Funktionen  $H$ ,  $J$  und  $V$  sind Polynome nach Kapitel 3, Abschnitt 3.4.1.

Das Modell enthält  $1 + 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7 = 85$  Basisfunktionen. Die Knotenzahl der Nichtnullmoden wurde mit 6 so hoch gewählt, daß Simulationen bis  $\text{Re} = 431$  durchgeführt werden können.

## C.2 Modell P2

Es werden zwei Basisfunktionen,

$$\mathbf{B}^{(0,0,1,1)}(y) \quad \text{und} \quad \mathbf{B}^{(0,0,3,1)}(y), \quad (\text{C.3})$$

die an die Grundströmung ankopplern, verwendet. Es werden folgende Nichtnullmoden,

$$\left\{ \mathbf{B}^{(1,0,l,p)}(x, y), \mathbf{B}^{(0,1,l,p)}(y, z), \mathbf{B}^{(-1,1,l,p)}(\mathbf{r}) \right\}_{\substack{l=0 \\ p=1,2}}^{l=1}, \quad (\text{C.4})$$

ausgewählt, die um die dazugehörigen konjugiert komplexen Basisfunktionen ergänzt werden. Die Funktionen  $H$ ,  $J$  und  $V$  sind Polynome nach Kapitel 3, Abschnitt 3.4.1.

Das Modell enthält  $2 + 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 26$  Basisfunktionen. Die geringe Knotenzahl der Nichtnullmoden erlaubt physikalisch sinnvolle Rechnungen nur bis  $\text{Re} = 97$ . Es müssen nur 25 Differentialgleichungen gelöst werden, da  $c_{(0,0,3,1)}(t)$  durch

$$\begin{aligned} c_{(0,0,3,1)} = & -\frac{\sqrt{269}}{691} c_{(0,0,1,1)} + \text{Re} \left[ -\frac{8}{691} \sqrt{\frac{269}{1023}} c_{(0,-1,0,2)} c_{(0,1,0,1)} \right. \\ & - \frac{184\sqrt{269}}{114015} c_{(0,-1,1,2)} c_{(0,1,1,1)} + \frac{32}{2073} \sqrt{\frac{538}{1155}} i \left( c_{(-1,1,0,1)} c_{(1,-1,0,2)} \right. \\ & \left. \left. + c_{(-1,1,1,1)} c_{(1,-1,1,2)} \right) + \text{c. c.} \right] \quad (\text{C.5}) \end{aligned}$$

bestimmt ist, damit

$$\varepsilon_{\text{virt}}^{(N)} = 0 \quad (\text{C.6})$$

ist.

### C.3 Modell T1

Dieses Modell soll aus einer variablen Anzahl relevanter Nullmoden bestehen:

$$\left\{ \mathbf{B}^{(0,0,2n-1,1)} \right\}_{n=1}^{N_0}. \quad (\text{C.7})$$

Die Nichtnullmoden sind

$$\left\{ \mathbf{B}^{(1,0,l,2)}(x, y) \right\}_{l=0}^4 \quad (\text{C.8})$$

mit den konjugiert komplexen Funktionen. Die Funktionen  $H$ ,  $J$  und  $V$  sind trigonometrische Funktionen, wie sie in Abschnitt 3.4.2 definiert wurden.

Das sind insgesamt  $N_0 + 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 5 = N_0 + 10$  Basisfunktionen. Der triviale Fixpunkt des dynamischen Systems ist für alle Reynoldszahlen linear stabil.

Seien  $\tilde{L}$  und  $\tilde{N}_{ikl}$  die lineare Matrix bzw. nichtlinearen Koeffizienten nach Multiplikation mit  $M^{-1}$ :

$$\tilde{L}_{ik} = \sum_{\mu=1}^N M_{i\mu}^{-1} L_{\mu k} \quad \text{und} \quad \tilde{N}_{ikl} = \sum_{\mu=1}^N M_{i\mu}^{-1} N_{\mu kl}. \quad (\text{C.9})$$

Die Zeitfunktionen werden wie folgt durchnummeriert:

$$c_{(0,0,1,1)}(t) \rightarrow c_1(t), \dots, c_{(0,0,19,1)}(t) \rightarrow c_{10}(t), \quad (\text{C.10})$$

$$c_{(1,0,0,2)}(t) \rightarrow c_{11}(t), \dots, c_{(1,0,4,2)}(t) \rightarrow c_{15}(t), \quad (\text{C.11})$$

$$c_{(-1,0,0,2)}(t) \rightarrow c_{16}(t) \equiv c_{11}^*(t), \dots, c_{(-1,0,4,2)}(t) \rightarrow c_{20}(t) \equiv c_{15}^*(t). \quad (\text{C.12})$$

Im folgenden werden die Koeffizienten, die ungleich null sind, angegeben. Sie lassen sich exakt berechnen und werden für die Numerik in rationale Zahlen mit 40 Stellen Genauigkeit umgewandelt. Nachfolgend werden sie auf 6 Stellen genau angegeben.

Die Koeffizienten für die Differentialgleichung der ersten Nullmode  $c_1(t)$  sind:

$$\begin{aligned} \tilde{L}_{11} &= -\frac{9,8696}{\text{Re}}, & \tilde{N}_{11117} &= 26,4786 \text{ i}, & \tilde{N}_{11119} &= -21,4455 \text{ i}, \\ \tilde{N}_{11216} &= -7,22145 \text{ i} & \tilde{N}_{11218} &= 35,4507 \text{ i}, & \tilde{N}_{11220} &= -35,6022 \text{ i}, \\ \tilde{N}_{11317} &= -20,7453 \text{ i}, & \tilde{N}_{11319} &= 48,2777 \text{ i}, & \tilde{N}_{11416} &= 10,9416 \text{ i}, \\ \tilde{N}_{11418} &= -33,7338 \text{ i}, & \tilde{N}_{11420} &= 61,7779 \text{ i}, & \tilde{N}_{11517} &= 21,5778 \text{ i}, \\ \tilde{N}_{11519} &= -46,9647 \text{ i}. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten für die Differentialgleichung der zweiten Nullmode  $c_2(t)$  sind:

$$\begin{aligned}\tilde{L}_{22} &= -\frac{39,4784}{\text{Re}}, & \tilde{N}_{2117} &= -50,3313 \text{ i}, & \tilde{N}_{2119} &= 101,201 \text{ i}, \\ \tilde{N}_{2126} &= -19,6949 \text{ i}, & \tilde{N}_{2128} &= 0,605996 \text{ i}, & \tilde{N}_{2120} &= 108,574 \text{ i}, \\ \tilde{N}_{2137} &= 13,6147 \text{ i}, & \tilde{N}_{2139} &= -16,2407 \text{ i}, & \tilde{N}_{2146} &= -12,8606 \text{ i}, \\ \tilde{N}_{2148} &= 8,48394 \text{ i}, & \tilde{N}_{2140} &= -22,4377 \text{ i}, & \tilde{N}_{2157} &= -36,0856 \text{ i}, \\ \tilde{N}_{2159} &= 10,2883 \text{ i}.\end{aligned}$$

Die Koeffizienten für die Differentialgleichung der dritten Nullmode  $c_3(t)$  sind:

$$\begin{aligned}\tilde{L}_{33} &= -\frac{88,8264}{\text{Re}}, & \tilde{N}_{3117} &= 32,5723 \text{ i}, & \tilde{N}_{3119} &= -151,6 \text{ i}, \\ \tilde{N}_{3126} &= 21,9673 \text{ i}, & \tilde{N}_{3128} &= -97,2623 \text{ i}, & \tilde{N}_{3120} &= 0,133676 \text{ i}, \\ \tilde{N}_{3137} &= -64,1749 \text{ i}, & \tilde{N}_{3139} &= 26,4285 \text{ i}, & \tilde{N}_{3146} &= -28,5828 \text{ i}, \\ \tilde{N}_{3148} &= 23,1348 \text{ i}, & \tilde{N}_{3140} &= 0,670723 \text{ i}, & \tilde{N}_{3157} &= 24,0349 \text{ i}, \\ \tilde{N}_{3159} &= 5,30829 \text{ i}.\end{aligned}$$

Die Koeffizienten für die Differentialgleichung der vierten Nullmode  $c_4(t)$  sind:

$$\begin{aligned}\tilde{L}_{44} &= -\frac{157,914}{\text{Re}}, & \tilde{N}_{4117} &= -4,78063 \text{ i}, & \tilde{N}_{4119} &= 86,6851 \text{ i}, \\ \tilde{N}_{4126} &= -3,83797 \text{ i}, & \tilde{N}_{4128} &= 86,7643 \text{ i}, & \tilde{N}_{4120} &= -216,567 \text{ i}, \\ \tilde{N}_{4137} &= 65,9371 \text{ i}, & \tilde{N}_{4139} &= -173,103 \text{ i}, & \tilde{N}_{4146} &= 36,0033 \text{ i}, \\ \tilde{N}_{4148} &= -130,762 \text{ i}, & \tilde{N}_{4140} &= 48,4817 \text{ i}, & \tilde{N}_{4157} &= -86,8988 \text{ i}, \\ \tilde{N}_{4159} &= 40,2201 \text{ i}.\end{aligned}$$

Die Koeffizienten für die Differentialgleichung der fünften Nullmode  $c_5(t)$  sind:

$$\begin{aligned}\tilde{L}_{55} &= -\frac{246,74}{\text{Re}}, & \tilde{N}_{5117} &= -0,529751 \text{ i}, & \tilde{N}_{5119} &= -12,0193 \text{ i}, \\ \tilde{N}_{5126} &= -0,460438 \text{ i}, & \tilde{N}_{5128} &= -14,7137 \text{ i}, & \tilde{N}_{5120} &= 180,583 \text{ i}, \\ \tilde{N}_{5137} &= -12,2403 \text{ i}, & \tilde{N}_{5139} &= 164,241 \text{ i}, & \tilde{N}_{5146} &= -6,84637 \text{ i}, \\ \tilde{N}_{5148} &= 132,816 \text{ i}, & \tilde{N}_{5140} &= -273,347 \text{ i}, & \tilde{N}_{5157} &= 93,3121 \text{ i}, \\ \tilde{N}_{5159} &= -220,534 \text{ i}.\end{aligned}$$

Die Koeffizienten für die Differentialgleichung der sechsten Nullmode  $c_6(t)$  sind:

$$\begin{aligned}\tilde{L}_{66} &= -\frac{355,306}{\text{Re}}, & \tilde{N}_{6117} &= -0,141649 \text{ i}, & \tilde{N}_{6119} &= -1,30267 \text{ i}, \\ \tilde{N}_{6126} &= -0,128516 \text{ i}, & \tilde{N}_{6128} &= -1,78422 \text{ i}, & \tilde{N}_{6120} &= -29,512 \text{ i}, \\ \tilde{N}_{6137} &= -1,56583 \text{ i}, & \tilde{N}_{6139} &= -29,6231 \text{ i}, & \tilde{N}_{6146} &= -0,878662 \text{ i}, \\ \tilde{N}_{6148} &= -25,3131 \text{ i}, & \tilde{N}_{6140} &= 265,242 \text{ i}, & \tilde{N}_{6157} &= -18,286 \text{ i}, \\ \tilde{N}_{6159} &= 222,927 \text{ i}.\end{aligned}$$

Die Koeffizienten für die Differentialgleichung der siebten Nullmode  $c_7(t)$  sind:

$$\begin{aligned}\tilde{L}_{77} &= -\frac{483,611}{\text{Re}}, & \tilde{N}_{71117} &= -0,0528969 \text{ i}, & \tilde{N}_{71119} &= -0,346693 \text{ i}, \\ \tilde{N}_{71216} &= -0,0492489 \text{ i}, & \tilde{N}_{71218} &= -0,509048 \text{ i}, & \tilde{N}_{71220} &= -3,51456 \text{ i}, \\ \tilde{N}_{71317} &= -0,461959 \text{ i}, & \tilde{N}_{71319} &= -3,77242 \text{ i}, & \tilde{N}_{71416} &= -0,259076 \text{ i}, \\ \tilde{N}_{71418} &= -3,34801 \text{ i}, & \tilde{N}_{71420} &= -49,4123 \text{ i}, & \tilde{N}_{71517} &= -2,45164 \text{ i}, \\ \tilde{N}_{71519} &= -43,0944 \text{ i}.\end{aligned}$$

Die Koeffizienten für die Differentialgleichung der achten Nullmode  $c_8(t)$  sind:

$$\begin{aligned}\tilde{L}_{88} &= -\frac{631,655}{\text{Re}}, & \tilde{N}_{81117} &= -0,023837 \text{ i}, & \tilde{N}_{81119} &= -0,13 \text{ i}, \\ \tilde{N}_{81216} &= -0,0225682 \text{ i}, & \tilde{N}_{81218} &= -0,199883 \text{ i}, & \tilde{N}_{81220} &= -0,995736 \text{ i}, \\ \tilde{N}_{81317} &= -0,185466 \text{ i}, & \tilde{N}_{81319} &= -1,11972 \text{ i}, & \tilde{N}_{81416} &= -0,103882 \text{ i}, \\ \tilde{N}_{81418} &= -1,02012 \text{ i}, & \tilde{N}_{81420} &= -6,48248 \text{ i}, & \tilde{N}_{81517} &= -0,752547 \text{ i}, \\ \tilde{N}_{81519} &= -5,81402 \text{ i}.\end{aligned}$$

Die Koeffizienten für die Differentialgleichung der neunten Nullmode  $c_9(t)$  sind:

$$\begin{aligned}\tilde{L}_{99} &= -\frac{799,438}{\text{Re}}, & \tilde{N}_{91117} &= -0,0121501 \text{ i}, & \tilde{N}_{91119} &= -0,0590769 \text{ i}, \\ \tilde{N}_{91216} &= -0,0116362 \text{ i}, & \tilde{N}_{91218} &= -0,0937992 \text{ i}, & \tilde{N}_{91220} &= -0,39077 \text{ i}, \\ \tilde{N}_{91317} &= -0,0883861 \text{ i}, & \tilde{N}_{91319} &= -0,454325 \text{ i}, & \tilde{N}_{91416} &= -0,049446 \text{ i}, \\ \tilde{N}_{91418} &= -0,421693 \text{ i}, & \tilde{N}_{91420} &= -1,97486 \text{ i}, & \tilde{N}_{91517} &= -0,312466 \text{ i}, \\ \tilde{N}_{91519} &= -1,80838 \text{ i}.\end{aligned}$$

Die Koeffizienten für die Differentialgleichung der zehnten Nullmode  $c_{10}(t)$  sind:

$$\begin{aligned}\tilde{L}_{1010} &= -\frac{986,96}{\text{Re}}, & \tilde{N}_{101117} &= -0,00676289 \text{ i}, & \tilde{N}_{101119} &= -0,0304266 \text{ i}, \\ \tilde{N}_{101216} &= -0,00653026 \text{ i}, & \tilde{N}_{101218} &= -0,0494465 \text{ i}, & \tilde{N}_{101220} &= -0,183956 \text{ i}, \\ \tilde{N}_{101317} &= -0,0471143 \text{ i}, & \tilde{N}_{101319} &= -0,2192 \text{ i}, & \tilde{N}_{101416} &= -0,0263297 \text{ i}, \\ \tilde{N}_{101418} &= -0,20625 \text{ i}, & \tilde{N}_{101420} &= -0,819717 \text{ i}, & \tilde{N}_{101517} &= -0,153263 \text{ i}, \\ \tilde{N}_{101519} &= -0,762401 \text{ i}.\end{aligned}$$

Für  $i = 1, \dots, 10$  gelten folgende Eigenschaften, die weitere nichtverschwindende Koeffizienten liefern:

$$\begin{aligned}\tilde{N}_{i1612} &= \tilde{N}_{i1117}^*, & \tilde{N}_{i1614} &= \tilde{N}_{i1119}^*, & \tilde{N}_{i1711} &= \tilde{N}_{i1216}^*, & \tilde{N}_{i1713} &= \tilde{N}_{i1218}^*, \\ \tilde{N}_{i1715} &= \tilde{N}_{i1220}^*, & \tilde{N}_{i1812} &= \tilde{N}_{i1317}^*, & \tilde{N}_{i1814} &= \tilde{N}_{i1319}^*, & \tilde{N}_{i1911} &= \tilde{N}_{i1416}^*, \\ \tilde{N}_{i1913} &= \tilde{N}_{i1418}^*, & \tilde{N}_{i1915} &= \tilde{N}_{i1420}^*, & \tilde{N}_{i2012} &= \tilde{N}_{i1517}^*, & \tilde{N}_{i2014} &= \tilde{N}_{i1519}^*.\end{aligned}\quad (\text{C.13})$$

Die Koeffizienten für die Differentialgleichung der ersten Nichtnullmode  $c_{11}(t)$  sind:

$$\begin{aligned}
\tilde{L}_{1111} &= \frac{-7,324}{\text{Re}}, & \tilde{L}_{1112} &= 0,571266 \text{ i}, & \tilde{L}_{1113} &= \frac{-27,6396}{\text{Re}}, \\
\tilde{L}_{1114} &= 0,11136 \text{ i}, & \tilde{L}_{1115} &= \frac{-69,099}{\text{Re}}, & \tilde{N}_{11112} &= 0,691664 \text{ i}, \\
\tilde{N}_{11114} &= -0,439322 \text{ i}, & \tilde{N}_{11212} &= 0,651755 \text{ i}, & \tilde{N}_{11214} &= 0,944946 \text{ i}, \\
\tilde{N}_{11312} &= -0,436188 \text{ i}, & \tilde{N}_{11314} &= 0,996674 \text{ i}, & \tilde{N}_{11412} &= -0,137429 \text{ i}, \\
\tilde{N}_{11414} &= -0,731495 \text{ i}, & \tilde{N}_{11512} &= -0,15428 \text{ i}, & \tilde{N}_{11514} &= -0,250472 \text{ i}, \\
\tilde{N}_{11612} &= 0,073815 \text{ i}, & \tilde{N}_{11614} &= -0,300804 \text{ i}, & \tilde{N}_{11712} &= 0,0134839 \text{ i}, \\
\tilde{N}_{11714} &= 0,151497 \text{ i}, & \tilde{N}_{11812} &= 0,00484784 \text{ i}, & \tilde{N}_{11814} &= 0,0288922 \text{ i}, \\
\tilde{N}_{11912} &= 0,00221263 \text{ i}, & \tilde{N}_{11914} &= 0,0107698 \text{ i}, & \tilde{N}_{111012} &= 0,00115476 \text{ i}, \\
\tilde{N}_{111014} &= 0,00506872 \text{ i}, & \tilde{N}_{11121} &= 0,120212 \text{ i}, & \tilde{N}_{11122} &= 0,867142 \text{ i}, \\
\tilde{N}_{11123} &= -0,021432 \text{ i}, & \tilde{N}_{11124} &= -0,0708113 \text{ i}, & \tilde{N}_{11125} &= -0,588528 \text{ i}, \\
\tilde{N}_{11126} &= 0,176382 \text{ i}, & \tilde{N}_{11127} &= 0,02806 \text{ i}, & \tilde{N}_{11128} &= 0,00943226 \text{ i}, \\
\tilde{N}_{11129} &= 0,004139 \text{ i}, & \tilde{N}_{111210} &= 0,00210582 \text{ i}, & \tilde{N}_{11141} &= -0,533108 \text{ i}, \\
\tilde{N}_{11142} &= 0,87961 \text{ i}, & \tilde{N}_{11143} &= 1,64918 \text{ i}, & \tilde{N}_{11144} &= -0,713072 \text{ i}, \\
\tilde{N}_{11145} &= -0,314391 \text{ i}, & \tilde{N}_{11146} &= -0,791988 \text{ i}, & \tilde{N}_{11147} &= 0,304084 \text{ i}, \\
\tilde{N}_{11148} &= 0,0539518 \text{ i}, & \tilde{N}_{11149} &= 0,0194347 \text{ i}, & \tilde{N}_{111410} &= 0,00896693 \text{ i}.
\end{aligned}$$

Die Koeffizienten für die Differentialgleichung der zweiten Nichtnullmode  $c_{12}(t)$  sind:

$$\begin{aligned}
\tilde{L}_{1211} &= -0,0386327 \text{ i}, & \tilde{L}_{1212} &= \frac{-19,8551}{\text{Re}}, & \tilde{L}_{1213} &= 0,371497 \text{ i}, \\
\tilde{L}_{1214} &= \frac{-32,4516}{\text{Re}}, & \tilde{L}_{1215} &= -0,0767799 \text{ i}, & \tilde{N}_{12111} &= 0,023131 \text{ i}, \\
\tilde{N}_{12113} &= 0,698941 \text{ i}, & \tilde{N}_{12115} &= -0,629577 \text{ i}, & \tilde{N}_{12211} &= 0,225382 \text{ i}, \\
\tilde{N}_{12213} &= -0,325415 \text{ i}, & \tilde{N}_{12215} &= 0,836818 \text{ i}, & \tilde{N}_{12311} &= -0,124609 \text{ i}, \\
\tilde{N}_{12313} &= 0,490761 \text{ i}, & \tilde{N}_{12315} &= -0,427567 \text{ i}, & \tilde{N}_{12411} &= -0,0639261 \text{ i}, \\
\tilde{N}_{12413} &= -0,303691 \text{ i}, & \tilde{N}_{12415} &= 0,840142 \text{ i}, & \tilde{N}_{12511} &= 0,0230523 \text{ i}, \\
\tilde{N}_{12513} &= -0,181923 \text{ i}, & \tilde{N}_{12515} &= -0,50116 \text{ i}, & \tilde{N}_{12611} &= 0,00359031 \text{ i}, \\
\tilde{N}_{12613} &= 0,0727366 \text{ i}, & \tilde{N}_{12615} &= -0,301204 \text{ i}, & \tilde{N}_{12711} &= 0,00116162 \text{ i}, \\
\tilde{N}_{12713} &= 0,0122519 \text{ i}, & \tilde{N}_{12715} &= 0,122522 \text{ i}, & \tilde{N}_{12811} &= 0,000491312 \text{ i}, \\
\tilde{N}_{12813} &= 0,00421194 \text{ i}, & \tilde{N}_{12815} &= 0,0210873 \text{ i}, & \tilde{N}_{12911} &= 0,00024194 \text{ i}, \\
\tilde{N}_{12913} &= 0,00186981 \text{ i}, & \tilde{N}_{12915} &= 0,00740841 \text{ i}, & \tilde{N}_{121011} &= 0,000131849 \text{ i}, \\
\tilde{N}_{121013} &= 0,000957949 \text{ i}, & \tilde{N}_{121015} &= 0,00335689 \text{ i}, & \tilde{N}_{12111} &= -0,350002 \text{ i}, \\
\tilde{N}_{12112} &= 0,414319 \text{ i}, & \tilde{N}_{12113} &= 0,0894424 \text{ i}, & \tilde{N}_{12114} &= -0,280703 \text{ i}, \\
\tilde{N}_{12115} &= 0,0586963 \text{ i}, & \tilde{N}_{12116} &= 0,00775832 \text{ i}, & \tilde{N}_{12117} &= 0,00231681 \text{ i}, \\
\tilde{N}_{12118} &= 0,000935101 \text{ i}, & \tilde{N}_{12119} &= 0,000446794 \text{ i}, & \tilde{N}_{121110} &= 0,000238491 \text{ i}, \\
\tilde{N}_{12131} &= 0,143509 \text{ i}, & \tilde{N}_{12132} &= -0,158311 \text{ i}, & \tilde{N}_{12133} &= 0,954374 \text{ i}, \\
\tilde{N}_{12134} &= -0,374503 \text{ i}, & \tilde{N}_{12135} &= -0,479073 \text{ i}, & \tilde{N}_{12136} &= 0,148978 \text{ i},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{N}_{12137} &= 0,0233256 i, & \tilde{N}_{12138} &= 0,00772513 i, & \tilde{N}_{12139} &= 0,00335224 i, \\
 \tilde{N}_{121310} &= 0,00169149 i, & \tilde{N}_{12151} &= -0,162766 i, & \tilde{N}_{12152} &= 0,555633 i, \\
 \tilde{N}_{12153} &= -0,42058 i, & \tilde{N}_{12154} &= 1,2739 i, & \tilde{N}_{12155} &= -0,631463 i, \\
 \tilde{N}_{12156} &= -0,62253 i, & \tilde{N}_{12157} &= 0,219608 i, & \tilde{N}_{12158} &= 0,0366221 i, \\
 \tilde{N}_{12159} &= 0,0126908 i, & \tilde{N}_{121510} &= 0,00570733 i.
 \end{aligned}$$

Die Koeffizienten für die Differentialgleichung der dritten Nichtnullmode  $c_{13}(t)$  sind:

$$\begin{aligned}
 \tilde{L}_{1311} &= \frac{3,37191}{\text{Re}}, & \tilde{L}_{1312} &= 0,104605 i, & \tilde{L}_{1313} &= \frac{-41,7035}{\text{Re}}, \\
 \tilde{L}_{1314} &= 0,330819 i, & \tilde{L}_{1315} &= \frac{-48,1173}{\text{Re}}, & \tilde{N}_{13112} &= 0,224172 i, \\
 \tilde{N}_{13114} &= 0,53613 i, & \tilde{N}_{13212} &= 0,161706 i, & \tilde{N}_{13214} &= 0,0119279 i, \\
 \tilde{N}_{13312} &= 0,10097 i, & \tilde{N}_{13314} &= 0,0801955 i, & \tilde{N}_{13412} &= -0,169453 i, \\
 \tilde{N}_{13414} &= 0,299245 i, & \tilde{N}_{13512} &= -0,116428 i, & \tilde{N}_{13514} &= -0,3239 i, \\
 \tilde{N}_{13612} &= 0,04887 i, & \tilde{N}_{13614} &= -0,228233 i, & \tilde{N}_{13712} &= 0,0084149 i, \\
 \tilde{N}_{13714} &= 0,100045 i, & \tilde{N}_{13812} &= 0,00292782 i, & \tilde{N}_{13814} &= 0,0179566 i, \\
 \tilde{N}_{13912} &= 0,00130932 i, & \tilde{N}_{13914} &= 0,006478 i, & \tilde{N}_{131012} &= 0,000674044 i, \\
 \tilde{N}_{131014} &= 0,00298864 i, & \tilde{N}_{13121} &= -0,15747 i, & \tilde{N}_{13122} &= -0,0539265 i, \\
 \tilde{N}_{13123} &= 0,718735 i, & \tilde{N}_{13124} &= -0,177489 i, & \tilde{N}_{13125} &= -0,425201 i, \\
 \tilde{N}_{13126} &= 0,118532 i, & \tilde{N}_{13127} &= 0,0178949 i, & \tilde{N}_{13128} &= 0,00581446 i, \\
 \tilde{N}_{13129} &= 0,00249358 i, & \tilde{N}_{131210} &= 0,0012483 i, & \tilde{N}_{13141} &= -0,00580714 i, \\
 \tilde{N}_{13142} &= 0,183005 i, & \tilde{N}_{13143} &= 0,193814 i, & \tilde{N}_{13144} &= 0,705877 i, \\
 \tilde{N}_{13145} &= -0,44758 i, & \tilde{N}_{13146} &= -0,580849 i, & \tilde{N}_{13147} &= 0,203097 i, \\
 \tilde{N}_{13148} &= 0,0341001 i, & \tilde{N}_{13149} &= 0,011882 i, & \tilde{N}_{131410} &= 0,0053648 i.
 \end{aligned}$$

Die Koeffizienten für die Differentialgleichung der vierten Nichtnullmode  $c_{14}(t)$  sind:

$$\begin{aligned}
 \tilde{L}_{1411} &= -0,0267467 i, & \tilde{L}_{1412} &= \frac{4,97703}{\text{Re}}, & \tilde{L}_{1413} &= 0,114463 i, \\
 \tilde{L}_{1414} &= \frac{-72,4863}{\text{Re}}, & \tilde{L}_{1415} &= 0,156215 i, & \tilde{N}_{14111} &= -0,0736749 i, \\
 \tilde{N}_{14113} &= 0,353834 i, & \tilde{N}_{14115} &= 0,141158 i, & \tilde{N}_{14211} &= 0,117418 i, \\
 \tilde{N}_{14213} &= -0,138952 i, & \tilde{N}_{14215} &= 0,120756 i, & \tilde{N}_{14311} &= 0,0267237 i, \\
 \tilde{N}_{14313} &= 0,0702011 i, & \tilde{N}_{14315} &= -0,13169 i, & \tilde{N}_{14411} &= -0,0923225 i, \\
 \tilde{N}_{14413} &= 0,143517 i, & \tilde{N}_{14415} &= 0,131153 i, & \tilde{N}_{14511} &= 0,0198804 i, \\
 \tilde{N}_{14513} &= -0,270059 i, & \tilde{N}_{14515} &= 0,243972 i, & \tilde{N}_{14611} &= 0,00267029 i, \\
 \tilde{N}_{14613} &= 0,0621427 i, & \tilde{N}_{14615} &= -0,449074 i, & \tilde{N}_{14711} &= 0,000805289 i, \\
 \tilde{N}_{14713} &= 0,00899783 i, & \tilde{N}_{14715} &= 0,10443 i, & \tilde{N}_{14811} &= 0,000327131 i, \\
 \tilde{N}_{14813} &= 0,00288781 i, & \tilde{N}_{14815} &= 0,015423 i, & \tilde{N}_{14911} &= 0,000157003 i, \\
 \tilde{N}_{14913} &= 0,00123385 i, & \tilde{N}_{14915} &= 0,00505781 i, & \tilde{N}_{141011} &= 0,0000840752 i,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{N}_{141013} &= 0,000617191 \text{ i}, & \tilde{N}_{141015} &= 0,00220651 \text{ i}, & \tilde{N}_{14111} &= -0,0200603 \text{ i}, \\
\tilde{N}_{14112} &= -0,215212 \text{ i}, & \tilde{N}_{14113} &= 0,500223 \text{ i}, & \tilde{N}_{14114} &= -0,343519 \text{ i}, \\
\tilde{N}_{14115} &= 0,0525831 \text{ i}, & \tilde{N}_{14116} &= 0,00604883 \text{ i}, & \tilde{N}_{14117} &= 0,00167295 \text{ i}, \\
\tilde{N}_{14118} &= 0,000643927 \text{ i}, & \tilde{N}_{14119} &= 0,000298097 \text{ i}, & \tilde{N}_{141110} &= 0,000155628 \text{ i}, \\
\tilde{N}_{14131} &= -0,116225 \text{ i}, & \tilde{N}_{14132} &= 0,0115414 \text{ i}, & \tilde{N}_{14133} &= 0,155712 \text{ i}, \\
\tilde{N}_{14134} &= 0,45181 \text{ i}, & \tilde{N}_{14135} &= -0,637645 \text{ i}, & \tilde{N}_{14136} &= 0,130678 \text{ i}, \\
\tilde{N}_{14137} &= 0,0177318 \text{ i}, & \tilde{N}_{14138} &= 0,00546388 \text{ i}, & \tilde{N}_{14139} &= 0,0022715 \text{ i}, \\
\tilde{N}_{141310} &= 0,00111451 \text{ i}, & \tilde{N}_{14151} &= 0,107264 \text{ i}, & \tilde{N}_{14152} &= 0,106724 \text{ i}, \\
\tilde{N}_{14153} &= -0,12206 \text{ i}, & \tilde{N}_{14154} &= 0,192264 \text{ i}, & \tilde{N}_{14155} &= 0,536951 \text{ i}, \\
\tilde{N}_{14156} &= -0,858543 \text{ i}, & \tilde{N}_{14157} &= 0,190826 \text{ i}, & \tilde{N}_{14158} &= 0,0274966 \text{ i}, \\
\tilde{N}_{14159} &= 0,00887804 \text{ i}, & \tilde{N}_{141510} &= 0,00383232 \text{ i}.
\end{aligned}$$

Die Koeffizienten für die Differentialgleichung der fünften Nichtnullmode  $c_{15}(t)$  sind:

$$\begin{aligned}
\tilde{L}_{1511} &= \frac{1,01258}{\text{Re}}, & \tilde{L}_{1512} &= 0,00285093 \text{ i}, & \tilde{L}_{1513} &= \frac{6,07545}{\text{Re}}, \\
\tilde{L}_{1514} &= 0,131427 \text{ i}, & \tilde{L}_{1515} &= \frac{-105,964}{\text{Re}}, & \tilde{N}_{15112} &= -0,0573557 \text{ i}, \\
\tilde{N}_{15114} &= 0,352536 \text{ i}, & \tilde{N}_{15212} &= 0,164771 \text{ i}, & \tilde{N}_{15214} &= -0,0533454 \text{ i}, \\
\tilde{N}_{15312} &= -0,0178219 \text{ i}, & \tilde{N}_{15314} &= 0,00830787 \text{ i}, & \tilde{N}_{15412} &= 0,064195 \text{ i}, \\
\tilde{N}_{15414} &= 0,0390658 \text{ i}, & \tilde{N}_{15512} &= -0,155333 \text{ i}, & \tilde{N}_{15514} &= 0,139559 \text{ i}, \\
\tilde{N}_{15612} &= 0,0379555 \text{ i}, & \tilde{N}_{15614} &= -0,308029 \text{ i}, & \tilde{N}_{15712} &= 0,00561671 \text{ i}, \\
\tilde{N}_{15714} &= 0,0773119 \text{ i}, & \tilde{N}_{15812} &= 0,0018204 \text{ i}, & \tilde{N}_{15814} &= 0,011893 \text{ i}, \\
\tilde{N}_{15912} &= 0,000781732 \text{ i}, & \tilde{N}_{15914} &= 0,00399799 \text{ i}, & \tilde{N}_{151012} &= 0,000392161 \text{ i}, \\
\tilde{N}_{151014} &= 0,00177292 \text{ i}, & \tilde{N}_{15121} &= 0,0246374 \text{ i}, & \tilde{N}_{15122} &= -0,23554 \text{ i}, \\
\tilde{N}_{15123} &= 0,215564 \text{ i}, & \tilde{N}_{15124} &= 0,384218 \text{ i}, & \tilde{N}_{15125} &= -0,492508 \text{ i}, \\
\tilde{N}_{15126} &= 0,0952162 \text{ i}, & \tilde{N}_{15127} &= 0,012474 \text{ i}, & \tilde{N}_{15128} &= 0,00375769 \text{ i}, \\
\tilde{N}_{15129} &= 0,00153826 \text{ i}, & \tilde{N}_{151210} &= 0,000746496 \text{ i}, & \tilde{N}_{15141} &= -0,12655 \text{ i}, \\
\tilde{N}_{15142} &= 0,100285 \text{ i}, & \tilde{N}_{15143} &= 0,0568468 \text{ i}, & \tilde{N}_{15144} &= 0,114028 \text{ i}, \\
\tilde{N}_{15145} &= 0,41782 \text{ i}, & \tilde{N}_{15146} &= -0,710279 \text{ i}, & \tilde{N}_{15147} &= 0,160814 \text{ i}, \\
\tilde{N}_{15148} &= 0,0233363 \text{ i}, & \tilde{N}_{15149} &= 0,00755784 \text{ i}, & \tilde{N}_{151410} &= 0,00326706 \text{ i}.
\end{aligned}$$

Die Differentialgleichungen für  $c_{16}(t), \dots, c_{20}(t)$  ergeben sich durch Bildung des konjugiert Komplexen der Differentialgleichungen für  $c_{11}(t), \dots, c_{15}(t)$ .

## C.4 Modell P3

Es werden folgende relevante Nullmoden mitgenommen:

$$\left\{ \mathbf{B}^{(0,0,2l-1,1)}(y) \right\}_{l=1}^9. \quad (\text{C.14})$$

Dazu werden die folgenden Nichtnullmoden ausgewählt:

$$\left\{ \mathbf{B}^{(m,0,l,p)}(x, y), \mathbf{B}^{(0,m,l,p)}(y, z) \right\}_{\substack{m=1, l=0 \\ p=1,2}}^{m=4, l=1}. \quad (\text{C.15})$$

Anstatt wie bisher 7 Basisfunktionen pro Polarisation und  $\mathbf{k}$  mitzunehmen, werden von den Basisfunktionen mit  $k_x \neq 0$  und  $k_z \neq 0$  pro Polarisation und  $\mathbf{k}$  14 Basisfunktionen in den Geschwindigkeitsansatz hineingenommen:

$$\begin{aligned} & \left\{ \mathbf{B}^{(-1,1,l,p)}(\mathbf{r}), \mathbf{B}^{(1,1,l,p)}(\mathbf{r}), \mathbf{B}^{(-2,1,l,p)}(\mathbf{r}), \mathbf{B}^{(-1,2,l,p)}(\mathbf{r}), \right. \\ & \mathbf{B}^{(1,2,l,p)}(\mathbf{r}), \mathbf{B}^{(2,1,l,p)}(\mathbf{r}), \mathbf{B}^{(-3,1,l,p)}(\mathbf{r}), \mathbf{B}^{(-2,2,l,p)}(\mathbf{r}), \\ & \left. \mathbf{B}^{(-1,3,l,p)}(\mathbf{r}), \mathbf{B}^{(1,3,l,p)}(\mathbf{r}), \mathbf{B}^{(2,2,l,p)}(\mathbf{r}), \mathbf{B}^{(3,1,l,p)}(\mathbf{r}) \right\}_{\substack{l=0 \\ p=1,2}}^{l=3} \quad (\text{C.16}) \end{aligned}$$

Gerade diese Basisfunktionen sind dafür verantwortlich, daß der triviale Fixpunkt des dynamischen Systems bei Reynoldszahlen um einige hundert linear instabil wird. Deshalb werden mit diesen Basisfunktionen die Eigenfunktionen des linearen Operators der Navier-Stokes-Gleichungen approximiert. Im Grenzfall  $\text{Re} \rightarrow \infty$  haben von den jeweils  $2 \cdot 14$  Eigenfunktionen jeweils die Hälfte einen positiven und negativen Realteil des Eigenwertes. Die linear instabilen Eigenfunktionen werden aus dem Ansatz gestrichen. Die Funktionen  $H$ ,  $J$  und  $V$  sind Polynome nach Abschnitt 3.4.1.

Wenn man die konjugiert komplexen Basisfunktionen hinzunimmt, hat man  $9 + 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 12 \cdot 2 \cdot 4/2 = 169$  Basisfunktionen. Der triviale Fixpunkt ist für alle Reynoldszahlen linear stabil.

# D Ergänzungen zum Kapitel 5

## D.1 Anwendung der $\tau$ -Methode

In den Abschnitten 5.3 und 5.4 wurden notwendige und hinreichende Bedingungen an die Basisfunktionen gestellt. Wurden die Bedingungen erfüllt, so war die virtuelle Energierate null. Die Änderung der kinetischen Gesamtenergie in der Zeit setzte sich dann nur aus physikalischen Prozessen zusammen.

Die notwendige Bedingung leitet sich aus Gleichung (5.31) ab:

$$\varepsilon_{\text{virt}}^{(N)} = 0. \quad (\text{D.1})$$

Die Bedingung, die lineare und quadratische Terme enthält, zu erfüllen kann ähnlich wie bei  $\tau$ -Methoden erfolgen. Anstatt  $N_0$  Basisfunktionen des Typs  $\mathbf{B}^{(0,0,2l-1,1)}$  zu verwenden, werden  $N_0 + 1$  Funktionen  $\{\mathbf{B}^{(0,0,2l-1,1)}\}_{l=1}^{N_0+1}$  genommen. Die Gesamtanzahl der Basisfunktionen erhöht sich dadurch von  $N$  auf  $N + 1$ . Der Ansatz wird wie bisher in die Navier-Stokes-Gleichungen eingesetzt, und das Residuum wird auf alle Basisfunktionen mit Ausnahme der Funktion  $\mathbf{B}^{(0,0,2N_0+1,1)}$  projiziert. Die Anzahl der Differentialgleichungen bleibt mit  $N$  erhalten.  $c_{(0,0,2N_0+1,1)}(t)$  wird dann durch die Bedingung (D.1) bestimmt und kann aus dem Differentialgleichungssystem eliminiert werden. Dadurch ändert sich die Gestalt der Differentialgleichungen. Existierten vorher nur lineare und quadratische Terme, so kommen jetzt kubische Terme hinzu.

Diese Vorgehensweise funktioniert nur dann problemlos, wenn  $c_{(0,0,2N_0+1,1)}(t)$  linear in (D.1) vorkommt. Dazu muß

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \int_{y=-1}^1 \int_{\tilde{y}=-1}^1 y \Pi^{(N_0)}(y, \tilde{y}) \frac{\partial^2}{\partial \tilde{y}^2} B_x^{(0,0,2N_0+1,1)}(\tilde{y}) d\tilde{y} dy \\ & - \frac{1}{2} \left[ \left. \frac{\partial B_x^{(0,0,2N_0+1,1)}}{\partial y} \right|_{y=-1} + \left. \frac{\partial B_x^{(0,0,2N_0+1,1)}}{\partial y} \right|_{y=1} \right] \neq 0 \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

sein.  $c_{(0,0,2N_0+1,1)}$  kommt nie quadratisch vor. Ist die Bedingung (D.2) erfüllt, kann das skizzierte Verfahren durchgeführt werden, anderenfalls ist das Verfahren mit einer anderen relevanten Nullmode durchzuführen.

Diese Methode wird am Beispiel des Modells P2 demonstriert. Die Rechnung wird bei einer Reynoldszahl  $Re = 90$  mit den Anfangsbedingungen

$$c_{(0,0,3,1)}(0) \approx -2,461\,578\,996\,330\,423\,283\,38, \quad (\text{D.3})$$

$$\text{sonst } c_i(0) \approx 0,647\,592\,099\,126\,248\,975\,89, \quad (\text{D.4})$$

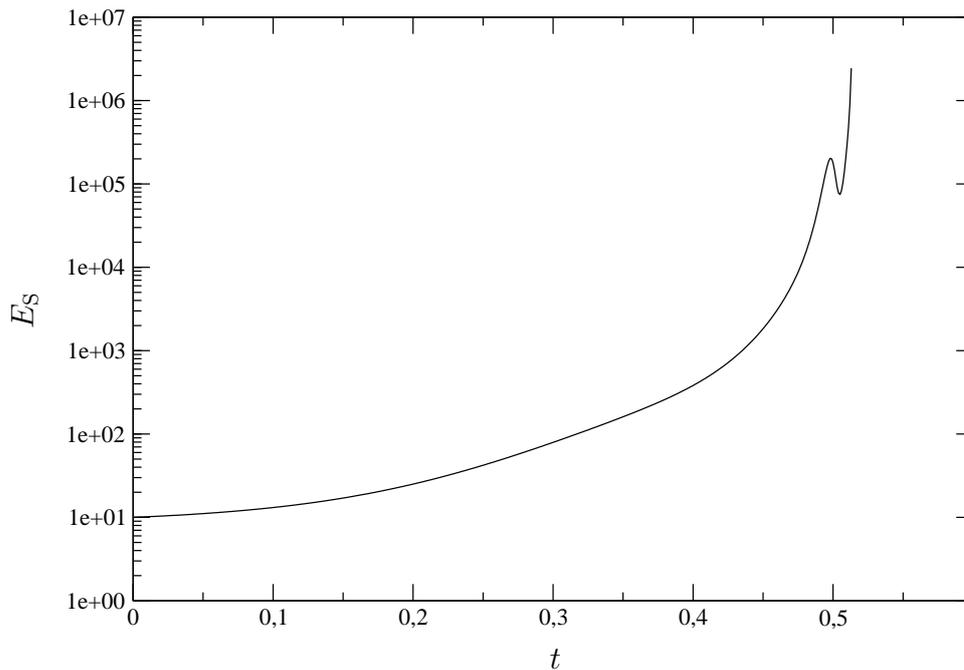


Abbildung D.1: Darstellung der Störungsenergie  $E_S$

so daß  $E_S(0) = 10$  ist, durchgeführt (alle Angaben auf 20 Stellen Genauigkeit). Die Störungsenergie ist im Bild D.1 zu sehen.

Trotz der geringen Reynoldszahl, die so klein gewählt wurde, daß die Grundströmung linear stabil ist, scheint die Energie und somit auch das Geschwindigkeitsfeld in geringer endlicher Zeit ( $t_{\text{sing}} \approx 0,51$ ) nach unendlich zu divergieren. Das steht im Widerspruch zu allen bekannten Beobachtungen. Zwar mag es andere Modelle, Anfangsbedingungen bzw. Reynoldszahlen geben, bei denen keine Divergenzen auftreten, ein zuverlässiges Verfahren, um die Inkonsistenzen der Energieraten zu beseitigen, scheint es nicht zu sein.

## D.2 Energiekonsistenz bei polynomialer Basis

In den nachfolgenden Unterkapiteln finden sich die Ergebnisse der Überprüfung der Bedingungen  $\tilde{T}_1$  und  $\tilde{T}_2$  für die polynomialen Basis. In den Tabellen D.2 bis D.5 sind  $\tilde{K}_2^{(k,l)}(y)$  angegeben. Nach Berechnung der zweiten Ableitungen auf den Rändern kann entschieden werden, ob eine Kombination dieser Basisfunktionen keinen Beitrag zur virtuellen Energierate, eventuell nach Erhöhung der Anzahl der relevanten Nullmoden, hat.

Tabelle D.1: Erste und vierte Ableitungen der Funktionen  $J_0(y), \dots, J_5(y)$  auf den Rändern  $y = \pm 1$

$k$	$J'_k(\pm 1)$	$J_k^{(4)}(\pm 1)$
0	$\mp 3\sqrt{\frac{35}{62}}$	$9\sqrt{\frac{35}{62}}$
1	$-\sqrt{\frac{231}{10}}$	$\pm 9\sqrt{\frac{1155}{2}}$
2	$\mp 27\sqrt{\frac{1365}{15562}}$	$6219\sqrt{\frac{1365}{15562}}$
3	$-41\sqrt{\frac{231}{2690}}$	$\pm 6219\sqrt{\frac{1155}{538}}$
4	$\mp 57\sqrt{\frac{19635}{222386}}$	$112023\sqrt{\frac{19635}{222386}}$
5	$-15\sqrt{\frac{285285}{123202}}$	$\pm 65583\sqrt{\frac{285285}{123202}}$

Tabelle D.2:  $\tilde{K}_2^{(k,l)}$  für die Kopplung der Basisfunktionen des Unterraums  $k_x = 0$  und  $k_z \neq 0$

	$(\tilde{l}, 1)$	$(\tilde{l}, 2)$
$(\tilde{k}, 1)$	0	$\frac{1}{2} [J_{\tilde{k}}(y) V_{\tilde{l}}(y)]'$
$(\tilde{k}, 2)$	$\frac{1}{2} [J_{\tilde{l}}(y) V_{\tilde{k}}(y)]'$	0

### D.2.1 $k = 0$

Mit den Eigenschaften von  $J_l(y)$  nach Tabelle D.1 gilt

$$\left. \frac{\partial^2 K_1^{(k_0)}(y)}{\partial y^2} \right|_{\pm 1} = J_k^{(4)}(\pm 1) \neq 0. \quad (\text{D.5})$$

$K_1^{(k_0)}$  ist somit nicht durch einen endlichen Unterraum der  $J_l(y)$  darstellbar. Die Bedingung  $\tilde{T}_1$  ist nicht erfüllbar.

### D.2.2 $k_x = 0$ und $k_z \neq 0$

Die Funktionen  $\tilde{K}_2^{(k,l)}$  für diesen Unterraum sind in Tabelle D.2 zusammengefaßt. Die zweiten Ableitungen der Funktionen verschwinden wegen

$$V_{\tilde{k}}''(\pm 1) = \left[ (1 - y^2)^2 L_{\tilde{k}}(y) \right]'' \Big|_{\pm 1} = 8L_{\tilde{k}}(\pm 1) = 8(\pm 1)^k \neq 0 \quad (\text{D.6})$$

und der Randwerte der  $J_{\tilde{k}}'(\pm 1)$  nach Tabelle D.1 nicht. Die Bedingung  $\tilde{T}_2$  ist verletzt.

### D.2.3 $k_x \neq 0$ und $k_z \neq 0$

Die Funktionen  $\tilde{K}_2$  für diesen Unterraum mit den Fallunterscheidungen  $S_1^{(k_x, k_z)}$ ,  $S_2^{(k_x, k_z)}$  und  $S_3^{(k_x, k_z)}$  sind in den Tabellen D.3 bis D.5 zusammengefaßt. Aufgrund von (D.6) und

$$H'_k(\pm 1) = \left[ (1 - y^2) L_{\tilde{k}}(y) \right]' \Big|_{\pm 1} = \mp 2 L_{\tilde{k}}(\pm 1) = \mp 2 (\pm 1)^k \neq 0 \quad (\text{D.7})$$

wird die Bedingung  $\tilde{T}_2$  nicht erfüllt.

Tabelle D.3:  $\tilde{K}_2^{(k, l)}$  für die Kopplung der Basisfunktionen des Unterraums  $k_x \neq 0$  und  $k_z \neq 0$ ,  $S_1^{(k_x, k_z)}$

	$(\tilde{l}, 1)$	$(\tilde{l}, 2)$
$(\tilde{k}, 1)$	0	$\frac{i}{2k_x} [H_{\tilde{k}}(y) V_{\tilde{l}}(y)]'$
$(\tilde{k}, 2)$	$\frac{i}{2k_x} [H_{\tilde{l}}(y) V_{\tilde{k}}(y)]'$	0

Tabelle D.4:  $\tilde{K}_2^{(k, l)}$  für die Kopplung der Basisfunktionen des Unterraums  $k_x \neq 0$  und  $k_z \neq 0$ ,  $S_2^{(k_x, k_z)}$

	$(\tilde{l}, 1)$	$(\tilde{l}, 3)$
$(\tilde{k}, 1)$	0	$\frac{i}{2k_x} [H_{\tilde{k}}(y) V_{\tilde{l}}(y)]'$
$(\tilde{k}, 3)$	$\frac{i}{2k_x} [H_{\tilde{l}}(y) V_{\tilde{k}}(y)]'$	s. $(k_x, 0, \tilde{k}, 2)$ mit $(-k_x, 0, \tilde{k}, 2)$

Tabelle D.5:  $\tilde{K}_2^{(k, l)}$  für die Kopplung der Basisfunktionen des Unterraums  $k_x \neq 0$  und  $k_z \neq 0$ ,  $S_3^{(k_x, k_z)}$

	$(\tilde{l}, 1)$	$(\tilde{l}, 2)$	$(\tilde{l}, 3)$
$(\tilde{k}, 1)$	0	s. Tab. D.3 mit $\tilde{k} = 0$	s. Tab. D.4 mit $\tilde{k} = 0$
$(\tilde{k}, 2)$	s. Tab. D.3 m. $\tilde{l} = 0$	0	$-\frac{i}{2k_x} [V'_{\tilde{k}}(y) V_{\tilde{l}}(y)]'$
$(\tilde{k}, 3)$	s. Tab. D.4 m. $\tilde{l} = 0$	$-\frac{i}{2k_x} [V'_{\tilde{l}}(y) V_{\tilde{k}}(y)]'$	s. $(k_x, 0, \tilde{k}, 2)$ m. $(-k_x, 0, \tilde{k}, 2)$

## D.3 Konstruktion polynomialer relevanter Nullmoden, die nicht von $N_0$ abhängen

Im Abschnitt 5.6.1 wurden relevante Nullmoden konstruiert, die die Bedingung  $T_1$  erfüllten und damit keinen Beitrag zur virtuellen Energierate lieferten. Bei diesem Verfahren

war das volle nichtlineare Problem, das von der Bedingung  $T_1$  stammt, zu lösen. Es konnten die Funktionen nur bis  $N_0 = 3$  bestimmt werden. Die resultierenden Funktionen hängen von der Anzahl der relevanten Nullmoden, die für den Geschwindigkeitsansatz verwendet werden, ab.

Die Abhängigkeit von der Anzahl der relevanten Nullmoden kann verhindert werden, wenn eine zusätzliche Forderung an die Funktionen, die jetzt mit  $\tilde{J}_{2n-1}(y)$  bezeichnet werden sollen, gestellt wird:

$$\int_{-1}^1 y \tilde{J}_{2n-1}(y) dy \sim \delta_{n1}. \quad (\text{D.8})$$

Sie verlangt, daß bis auf  $\tilde{J}_1(y)$  alle Funktionen orthogonal zu  $y$  sind. Durch diese Forderung vereinfacht sich die Gleichung (5.39) unter Verwendung der Definitionen (5.28) und (5.29) zu:

$$0 = -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 y \tilde{J}_1(y) dy \int_{-1}^1 \tilde{J}'_1(y) \tilde{J}'_{2k-1}(y) dy - 2\tilde{J}'_{2k-1}(1), \quad k = 1, 2, \dots \quad (\text{D.9})$$

Mit Ausnahme der Gleichung für  $\tilde{J}_1(y)$  handelt es sich um lineare Gleichungen. Dadurch ist eine schrittweise Konstruktion der Funktionen möglich.

Seien  $\tilde{J}_1(y), \dots, \tilde{J}_{2n-3}(y)$  bekannt. Dann muß  $\tilde{J}_{2n-1}(y)$  folgende Bedingungen erfüllen:  $n - 1$  Bedingungen aus der Orthogonalität, Normierung auf eins, Forderung (D.8), Verschwinden der zweiten Ableitung auf dem Rand und Erfüllung der Gleichung (D.9). Das ergibt für  $n \geq 2$  insgesamt  $n + 3$  Bedingungen. Der Ansatz (5.73) wird durch die zusätzliche Forderung (D.8) wie folgt modifiziert:

$$\tilde{J}_{2n-1}(y) = (1 - y^2) \sum_{\nu=1}^{n+3} e_{n,\nu} P_{\nu}^{(1,1)}(y), \quad n \geq 2. \quad (\text{D.10})$$

Für  $n = 1$  bleibt der Ansatz (5.73) gültig. Da die Forderung (D.8) den Fall  $n = 1$  nicht einschließt, gilt  $e_{1,\nu} = e_{1,\nu}^{(o,1)}$ ,  $\nu = 1, 2, 3$ , oder  $\tilde{J}_1(y) \equiv J_1^{(1)}(y)$ .

Die Forderung (D.8) ist durch den Ansatz (D.10) leicht zu erfüllen:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 y J_{2n-1}(y) dy &= \sum_{\nu=1}^{n+3} e_{n,\nu}^{(1)} \int_{-1}^1 (1 - y^2) \frac{1}{2} P_1^{(1,1)}(y) P_{\nu}^{(1,1)}(y) dy \\ &= e_{n,1}^{(1)} \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1 - y^2) [P_1^{(1,1)}(y)] dy \\ &\sim e_{n,1}^{(1)} \delta_{n1} \quad \rightsquigarrow \quad e_{n,1}^{(1)} = 0, \quad n = 2, \dots, N_0. \end{aligned} \quad (\text{D.11})$$

Die weiteren Rechnungen basieren, wenn man die Normierungsbedingung außer acht läßt, auf der Lösung eines um eine Variable unterbestimmten, linearen und homogenen Gleichungssystems. Der letzte freie Koeffizient wird abschließend durch die Normierungsbedingung bestimmt. In Tabelle D.6 sind die Koeffizienten für die ersten vier

Tabelle D.6: Koeffizienten  $e_{n,1}, \dots, e_{n,7}$  für die ersten vier Funktionen  $\tilde{J}_1(y)$ ,  $\tilde{J}_3(y)$ ,  $\tilde{J}_5(y)$  und  $\tilde{J}_7(y)$

$n$	1	2	3	4
$e_{n,1}$	1,689 234	0,0	0,0	0,0
$e_{n,2}$	-0,321 138	0,155 653	-0,163 478	0,152 663
$e_{n,3}$	0,021 509	1,261 060	-1,415 610	1,365 037
$e_{n,4}$		-1,881 285	0,011 604	0,917 280
$e_{n,5}$		0,684 892	2,284 083	-0,946 713
$e_{n,6}$			-1,148 164	-2,405 945
$e_{n,7}$				1,585 292

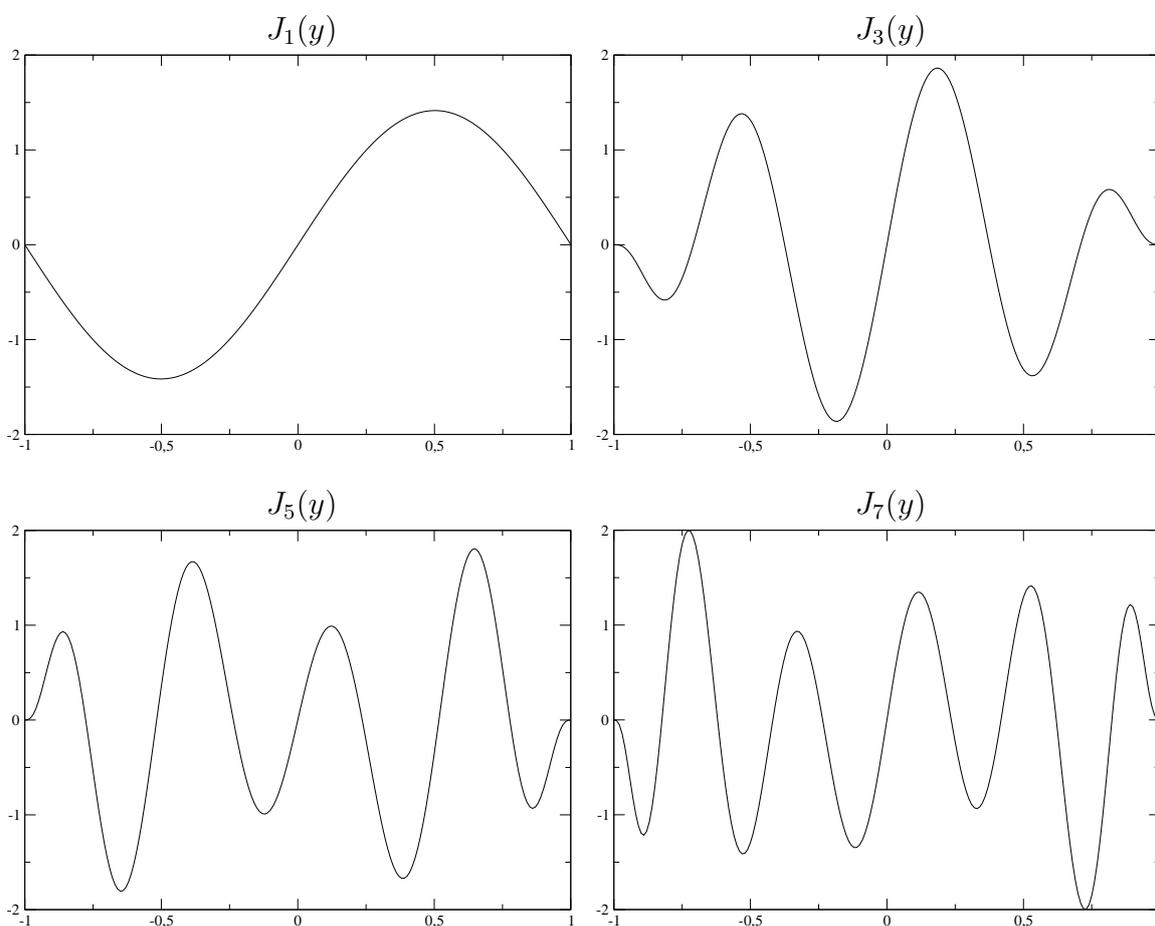


Abbildung D.2: Darstellung der  $\tilde{J}_1(y)$ ,  $\tilde{J}_3(y)$ ,  $\tilde{J}_5(y)$  und  $\tilde{J}_7(y)$

antisymmetrischen Funktionen angegeben. Im Bild D.2 findet sich ihre zeichnerische Darstellung.

Wenn man die antisymmetrischen Funktionen  $\tilde{J}_1(y), \dots, \tilde{J}_7(y)$  betrachtet, so stellt

man fest, daß die Knotenzahl, also die Anzahl an Nulldurchgängen der Funktionen im offenen Intervall  $(-1, 1)$ , nicht stetig um zwei größer wird. Bei den Funktionen treten die Knotenzahlen 1, 5, 7 und 9 auf. Es fehlt die Knotenzahl 3. Dies scheint eine direkte Folge der zusätzlichen Forderung (D.8) zu sein.

## D.4 Anmerkung zur Konstruktion der $\tilde{V}_n^{(N_0)}$

In diesem Abschnitt wird die Lösung des linearen Gleichungssystems vorgestellt.

$I^{(N_0)}(V_{2k+1}(y), V_{2l}(y))$  läßt sich exakt berechnen. Dazu wird

$$V_{2k+1}''(y) V_{2l}(y) - V_{2k+1}(y) V_{2l}''(y) \quad (\text{D.12})$$

in die Basisfunktionen  $J_{2n-1}(y)$  entwickelt:

$$V_{2k+1}''(y) V_{2l}(y) - V_{2k+1}(y) V_{2l}''(y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n J_{2n-1}(y). \quad (\text{D.13})$$

Es gilt

$$f_n = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 J_{2n-1}(y) [V_{2k+1}''(y) V_{2l}(y) - V_{2k+1}(y) V_{2l}''(y)] dy \quad (\text{D.14})$$

$$\begin{aligned} &= 512\sqrt{2} \pi n(1+k)(3+2k)(1+2k-2l)(1+l)(1+2l)(5+2k+2l) \\ &\quad \left\{ 112n^4 - (-1+2k-2l)(3+2k-2l)(3+2k+2l)(7+2k+2l) \right. \\ &\quad \left. - 8n^2[35+12k(3+k)+12l(2+l)] \right\} [(-7+2n-2k-2l) \\ &\quad (-5+2n-2k-2l)(-3+2n-2k-2l)(-1+2n+2k-2l) \\ &\quad (1+2n+2k-2l)(3+2n+2k-2l)(-3+2n-2k+2l) \\ &\quad (-1+2n-2k+2l)(1+2n-2k+2l)(3+2n+2k+2l) \\ &\quad (5+2n+2k+2l)(7+2n+2k+2l)]^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{D.15})$$

Setzt man den Ansatz (D.13) in (5.78) ein, erhält man

$$I^{(N_0)}(V_{2k+1}(y), V_{2l}(y)) = - \sum_{n=N_0+1}^{\infty} f_n \underbrace{\int_{-1}^1 y J_{2n-1}(y) dy}_{=-\frac{2\sqrt{2}}{\pi n}}. \quad (\text{D.16})$$

Durch Verschiebung des Summationsindex und Bildung der Summe bekommt man abschließend

$$I_{2k+1,2l}^{(N_0)} := I^{(N_0)}(V_{2k+1}(y), V_{2l}(y)) \quad (\text{D.17})$$

$$\begin{aligned} &= 1024(1+k)(3+2k)(1+2k-2l)(1+l)(1+2l) \\ &\quad (5+2k+2l)(1+2N_0) [(-1+2k-2l-2N_0) \\ &\quad (1+2k-2l-2N_0)(3+2k+2l-2N_0) \\ &\quad (5+2k+2l-2N_0)(1+2k-2l+2N_0) \\ &\quad (3+2k-2l+2N_0)(5+2k+2l+2N_0) \\ &\quad (7+2k+2l+2N_0)]^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{D.18})$$

Im folgenden soll die Konstruktion einer ungeraden Funktion,  $\tilde{V}_{2k+1}^{(N_0)}(y)$ , betrachtet werden. Dazu müssen die Funktionen  $\tilde{V}_0(y), \dots, \tilde{V}_{2k}^{(N_0)}(y)$  bekannt sein. Die  $k + 1$  Bedingungen lauten

$$I^{(N_0)}(\tilde{V}_{2l}(y), \tilde{V}_{2k+1}(y)) = 0, \quad l = 0, \dots, k. \quad (\text{D.19})$$

Das Gleichungssystem hat folgenden Aufbau,

$$L^{(N_0)} \mathbf{d}_{2k+1}^{(N_0)} = -\mathbf{f}^{(N_0)}, \quad (\text{D.20})$$

mit

$$L^{(N_0)} = \begin{pmatrix} I^{(N_0)}(\tilde{V}_0, V_{2k+3}) & I^{(N_0)}(\tilde{V}_0, V_{2k+5}) & \cdots & I^{(N_0)}(\tilde{V}_0, V_{4k+3}) \\ I^{(N_0)}(\tilde{V}_2^{(N_0)}, V_{2k+3}) & I^{(N_0)}(\tilde{V}_2^{(N_0)}, V_{2k+5}) & \cdots & I^{(N_0)}(\tilde{V}_2^{(N_0)}, V_{4k+3}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I^{(N_0)}(\tilde{V}_{2k}^{(N_0)}, V_{2k+3}) & I^{(N_0)}(\tilde{V}_{2k}^{(N_0)}, V_{2k+5}) & \cdots & I^{(N_0)}(\tilde{V}_{2k}^{(N_0)}, V_{4k+3}) \end{pmatrix} \quad (\text{D.21})$$

und

$$\mathbf{f}^{(N_0)} = \begin{pmatrix} I^{(N_0)}(\tilde{V}_0, V_{2k+1}) \\ I^{(N_0)}(\tilde{V}_2^{(N_0)}, V_{2k+1}) \\ \vdots \\ I^{(N_0)}(\tilde{V}_{2k}^{(N_0)}, V_{2k+1}) \end{pmatrix}. \quad (\text{D.22})$$

$I^{(N_0)}(f(y), g(y))$  hat die wichtige Eigenschaft

$$I^{(N_0)}(\alpha f_1(y) + \beta f_2(y), g(y)) = \alpha I^{(N_0)}(f_1(y), g(y)) + \beta I^{(N_0)}(f_2(y), g(y)), \quad (\text{D.23})$$

die erlaubt,  $L^{(N_0)}$  und  $\mathbf{f}^{(N_0)}$  wie folgt zu zerlegen:

$$L^{(N_0)} = A^{(N_0)} B^{(N_0)}, \quad L^{(N_0)} \in \mathbb{R}^{(k+1) \times (k+1)}, \quad (\text{D.24})$$

und

$$\mathbf{f}^{(N_0)} = A^{(N_0)} \mathbf{g}^{(N_0)}, \quad \mathbf{f}^{(N_0)} \in \mathbb{R}^{(k+1) \times 1}, \quad (\text{D.25})$$

mit

$$A^{(N_0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & d_{2,1}^{(N_0)} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_{4,1}^{(N_0)} & d_{4,2}^{(N_0)} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & d_{2k,k}^{(N_0)} \end{pmatrix}, \quad A^{(N_0)} \in \mathbb{R}^{(k+1) \times (2k+1)}, \quad (\text{D.26})$$

$$B^{(N_0)} = \begin{pmatrix} I_{0,2k+3}^{(N_0)} & I_{0,2k+5}^{(N_0)} & \cdots & I_{0,4k+3}^{(N_0)} \\ I_{2,2k+3}^{(N_0)} & I_{2,2k+5}^{(N_0)} & \cdots & I_{2,4k+3}^{(N_0)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I_{4k,2k+3}^{(N_0)} & I_{4k,2k+5}^{(N_0)} & \cdots & I_{4k,4k+3}^{(N_0)} \end{pmatrix}, \quad B^{(N_0)} \in \mathbb{R}^{(2k+1) \times (k+1)}, \quad (\text{D.27})$$

und

$$\mathbf{g}^{(N_0)} = \begin{pmatrix} I_{0,2k+1}^{(N_0)} \\ I_{2,2k+1}^{(N_0)} \\ \vdots \\ I_{4k,2k+1}^{(N_0)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}^{(N_0)} \in \mathbb{R}^{(2k+1) \times 1}. \quad (\text{D.28})$$

Durch die geschickte Zurückführung auf die bereits bekannten Koeffizienten und die exakte Darstellung von  $I_{2k+1,2l}^{(N_0)}$  kann das Gleichungssystem für beliebig große  $N_0$  leicht aufgebaut und dann gelöst werden. Man kann sogar  $N_0$  als Parameter im Gleichungssystem belassen und erhält die berechneten Koeffizienten in Abhängigkeit von  $N_0$ . Dies ermöglicht auch die Berechnung der Grenzwerte für  $N_0 \rightarrow \infty$ .



## E Literaturverzeichnis

- [AS65] ABRAMOWITZ, M. und A. SEGUN: *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications, New York, 1965.
- [Bal97] BALAKUMAR, P.: *Finite-Amplitude Equilibrium Solutions for Plane Poiseuille-Couette Flow*. Theoret. Comput. Fluid Dynamics, 9(2):103–119, 1997.
- [BC98] BOTTIN, S. und H. CHATÉ: *Statistical analysis of the transition to turbulence in plane Couette flow*. Eur. Phys. J. B, 6:143–155, 1998.
- [BDD97] BOTTIN, S., O. DAUCHOT und F. DAVIAUD: *Intermittency in a Locally Forced Plane Couette Flow*. Phys. Rev. Lett., 79(22):4377–4380, Dezember 1997.
- [BDMD98] BOTTIN, S., F. DAVIAUD, P. MANNEVILLE und O. DAUCHOT: *Discontinuous transition to spatiotemporal intermittency in plane Couette flow*. Europhys. Lett., 43(2):171–176, 1998.
- [BS81] BRONSTEIN, I. N. und K. A. SEMENDJAJEW: *Taschenbuch der Mathematik — Ergänzende Kapitel*. Verlag Harri Deutsch, Thun, Frankfurt (Main), 2. Auflage, 1981.
- [BS91] BRONSTEIN, I. N. und K. A. SEMENDJAJEW: *Taschenbuch der Mathematik*. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Verlag Nauka Moskau, 25. Auflage, 1991.
- [BT97] BAGGETT, J. S. und L. N. TREFETHEN: *Low-dimensional models of subcritical transition to turbulence*. Phys. Fluids, 9(4):1043–1053, April 1997.
- [BTAA95] BECH, K. H., N. TILLMARK, P. H. ALFREDSSON und H. I. ANDERSSON: *An investigation of turbulent plane Couette flow at low Reynolds numbers*. J. Fluid Mech., 286:291–325, 1995.
- [CB97] CLEVER, R. M. und F. H. BUSSE: *Tertiary and quaternary solutions for plane Couette flow*. J. Fluid Mech., 344:137–153, August 1997.
- [CE97] CHERHABILI, A. und U. EHRENSTEIN: *Finite-amplitude equilibrium states in plane Couette flow*. J. Fluid Mech., 342:159–177, 1997.
- [Cha81] CHANDRASEKHAR, S.: *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. Dover Publications, Inc., New York, 1981.

- [DD94] DAUCHOT, O. und F. DAVIAUD: *Finite-Amplitude Perturbation in Plane Couette Flow*. Europhys. Lett., 28(4):225–230, November 1994.
- [DD95] DAUCHOT, O. und F. DAVIAUD: *Finite amplitude perturbation and spots growth mechanism in plane Couette flow*. Phys. Fluids, 7(2):335–343, 1995.
- [DHB92] DAVIAUD, F., J. HEGSETH und P. BERGÉ: *Subcritical Transition to Turbulence in Plane Couette Flow*. Phys. Rev. Lett., 69(17):2511–2514, Oktober 1992.
- [EW95] EGOLF, P. W. und D. A. WEISS: *Model for Plane Turbulent Couette Flow*. Phys. Rev. Lett., 75(16):2956–2959, 1995.
- [Fle91a] FLETCHER, C. A. J.: *Computational Techniques for Fluid Dynamics, Volume 1: Fundamental and General Techniques*. Springer Series in Computational Physics. Springer-Verlag, Berlin, 2. Auflage, 1991.
- [Fle91b] FLETCHER, C. A. J.: *Computational Techniques for Fluid Dynamics, Volume 2: Specific Techniques for Different Flow Categories*. Springer Series in Computational Physics. Springer-Verlag, Berlin, 2. Auflage, 1991.
- [GG94] GEBHARDT, T. und S. GROSSMANN: *Chaos transition despite linear stability*. Phys. Rev. E, 50(5):3705–3711, November 1994.
- [Hen96] HENNINGSON, D.: *Comment on “Transition in shear flows. Nonlinear normality versus non-normal linearity” [Phys. Fluids 7, 3060 (1995)]*. Phys. Fluids, 8(8):2257–2258, August 1996.
- [HKW95] HAMILTON, J. M., J. KIM und F. WALEFFE: *Regeneration mechanism of near-wall turbulence structures*. J. Fluid Mech., 287:317–348, März 1995.
- [Jos66] JOSEPH, D. D.: *Nonlinear stability of the Boussinesq equations by the method of energy*. Arch. Rat. Mech. Anal., 22, 1966.
- [Jos76] JOSEPH, D. D.: *Stability of Fluid Motions I*, Band 27 der Reihe *Springer Tracts in Natural Philosophy*. Springer-Verlag, Berlin, 1976.
- [KLJ96] KOMMINAHO, J., A. LUNDBLADH und A. V. JOHANSSON: *Very large structures in plane turbulent Couette flow*. J. Fluid Mech., 320:259–285, 1996.
- [LL91] LANDAU, L. D. und E. M. LIFSCHITZ: *Hydrodynamik*, Band 6 der Reihe *Lehrbuch der theoretischen Physik*. Akademie Verlag, 5. Auflage, 1991.
- [MSHF02] MOEHLIS, J., T. R. SMITH, P. HOLMES und H. FAISST: *Models for turbulent plane Couette flow using the proper orthogonal decomposition*. Phys. Fluids, 14(7):2493–2507, Juli 2002.
- [Nag97] NAGATA, M.: *Three-dimensional travelling-wave solutions in plane Couette flow*. Phys. Rev. E, 55(2):2023–2025, Februar 1997.

- [OK80] ORSZAG, S. A. und L. KELLS: *Transition to turbulence in plane Poiseuille flow and plane Couette flow*. J. Fluid Mech., 96(1):159–205, 1980.
- [OS99] OMURTAG, A. und L. SIROVICH: *On Low-Dimensional Modeling of Channel Turbulence*. Theoret. Comput. Fluid Dynamics, 13:115–127, 1999.
- [Pop00] POPE, S. B.: *Turbulent Flows*. Cambridge University Press, Cambridge, 1. Auflage, 2000.
- [Poz97] POZRIKIDIS, C.: *Introduction to Theoretical and Computational Fluid Dynamics*. Oxford University Press, New York, 1997.
- [PR02] PAGE, S. und A. RAUH: *On energy balances of Galerkin approximations for the incompressible Navier-Stokes equations*. Int. J. Diff. Eq. Appl., 5(4):379–394, 2002.
- [Rau99] RAUH, A.: *Remarks on unsolved basic problems of the Navier-Stokes equations*. Nonlinear Phenomena in Complex Systems, 2(3):32–37, 1999.
- [Rem00] REMPFER, D.: *On Low-Dimensional Galerkin Models for Fluid Flow*. Theoret. Comput. Fluid Dynamics, 14:75–88, 2000.
- [RH93] REDDY, S. C. und D. S. HENNINGSON: *Energy growth in viscous channel flow*. J. Fluid Mech., 252:209–238, 1993.
- [Rom73] ROMANOV, V. A.: *Stability of plane-parallel Couette flow*. Funkt. Anal. Appl., 7:137–146, 1973.
- [RPS03] RAUH, A., S. PAGE und A. SPILLE: *Energy inconsistency of Galerkin approximations for plane Couette flow*. Preprint, 2003.
- [Rum00] RUMMLER, B.: *Zur Lösung der instationären inkompressiblen Navier-Stokeschen Gleichungen in speziellen Gebieten*. Habilitationsschrift, Otto-von-Guericke Universität, Magdeburg, Mai 2000.
- [Sch88] SCHWARZ, H. R.: *Finite Element Methods*. Computational Mathematics and Applications. Academic Press, 1988.
- [Sch93] SCHWARZ, H. R.: *Numerische Mathematik*. B. G. Teubner, Stuttgart, 3. Auflage, 1993.
- [Sch99] SCHMIEGEL, A.: *Transition to turbulence in linearly stable shear flows*. Doktorarbeit, Philipps-Universität, Marburg, 1999.
- [Sci02] SCIFACE GMBH: *MuPAD*. Software, 2002.
- [SE97] SCHMIEGEL, A. und B. ECKHARDT: *Fractal Stability Border in Plane Couette Flow*. Phys. Rev. Lett., 79(26):5250–5253, Dezember 1997.

- [Spi99] SPILLE, A.: *Nichtlineare Stabilitätsanalyse der 3D-Couette-Strömung unter Berücksichtigung der Energietransfererhaltung*. Doktorarbeit, Carl von Ossietzky Universität, Oldenburg, 1999.
- [SZ94] SIROVICH, L. und X. ZHOU: *Dynamical Model of Wall-Bounded Turbulence*. Phys. Rev. Lett., 72(3):340–343, Januar 1994.
- [Wal95] WALEFFE, F.: *Transition in shear flows. Nonlinear normality versus non-normal linearity*. Phys. Fluids, 7(12):3060–3066, Dezember 1995.
- [Wal97] WALEFFE, F.: *On a self-sustaining process in shear flows*. Phys. Fluids, 9(4):883–900, April 1997.
- [Wal98] WALEFFE, F.: *Three-dimensional coherent states in plane shear flow*. Phys. Rev. Lett., 81(19):4140–4143, November 1998.
- [Wol99] WOLFRAM, S.: *The Mathematica Book*. Wolfram Media/Cambridge University Press, 4. Auflage, 1999.

# Danksagung

Ich möchte mich bei all denen bedanken, die mich in meinem Lebensabschnitt „Promotion“ in vielfältiger Form unterstützt haben. Einige möchte ich besonders hervorheben.

Ich danke ...

... Herrn Professor Dr. Alexander Rauh für die Überlassung des interessanten Themas und für seine intensive Betreuung mit vielen hilfreichen Diskussionen.

... der Graduiertenförderung des Landes Niedersachsen für die Teilfinanzierung meiner Promotionszeit, die es mir ermöglichte, meine Arbeit abzuschließen.

... meinen beiden Korrekturlesern Christoph und Gerrit für die vielen Hinweise und Ratschläge.

... den beiden wichtigsten Frauen in meinem Leben, meiner Frau Susanne und meiner Mutter, für die langjährige und großartige Unterstützung.



# Lebenslauf

Name:	Steffen Page
Geburtsdatum:	5. August 1974
Geburtsort:	Magdeburg
Staatsangehörigkeit:	deutsch
Schulbildung:	
1981–1989	Victor-Jara-Oberschule, Magdeburg
1989–1993	Spezialschule mathematisch-naturwissenschaftlich-technischer Richtung, Magdeburg (seit 1993 Werner-von-Siemens-Gymnasium)
Zivildienst:	
1993–1994	Zivildienst beim Bahnhofsdiens des DRK in Magdeburg
Studium:	
1994–1999	Studium der Physik mit Abschluß Diplom an der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Beruflicher Werdegang:	
1.12.1999–30.9.2001	Wissenschaftlicher Angestellter am Fachbereich Physik der Carl von Ossietzky Universität Oldenburg
1.10.2001–30.9.2003	Stipendiat nach GradFöG des Landes Niedersachsen



## **Erklärung gemäß § 8, Absatz 2, Satz 2 der Promotionsordnung**

Hiermit erkläre ich, daß ich die vorliegende Arbeit selbständig verfaßt und nur die angegebenen Hilfsmittel benutzt habe.

Steffen Page