Martingalmaße und Bewertung europäischer Optionen in diskreten unvollständigen Finanzmärkten

Von der

Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften der Carl von Ossietzky Universität Oldenburg zur Erlangung des Grades und Titels eines Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.) angenommene

Dissertation

von

Herrn Christian Mohn geboren am 13.09.1977 in Hamburg

Gutachter: Prof. Dr. Dietmar Pfeifer

Zweitgutachter: Prof. Dr. Udo Kamps

Tag der Disputation: 27.08.2004

Inhaltsverzeichnis

	Dank Zusammenfassung Abstract				
1	Grundlagen diskreter Marktmodelle				
	1.1	1 Einleitung		6	
	1.2	Grund	Grundlegende Begriffe aus der Stochastik		
		1.2.1	Grundlegende Bezeichnungen	10	
		1.2.2	Atome	11	
		1.2.3	Diskreter bedingter Erwartungswert	14	
		1.2.4	Martingale	18	
1.3 Hil		Hilfssä	Hilfssätze der linearen Algebra		
	1.4	.4 Modellierung eines diskreten Finanzmarktes		24	
		1.4.1	Der Markt	24	
		1.4.2	Der Händler	30	
	1.5 Arbitrage und Vollständigkeit				
2	Unvollständige Märkte				
	2.1	Einleitung			
2.2 Äquivalente Martingalmaße		ralente Martingalmaße	47		
	2.3	Zerleg	gung von Märkten	57	

	2.3.1	Ein-Perioden-Märkte mit einem Risikogut	58		
	2.3.2	Mehr-Perioden-Märkte mit einem Risikogut	65		
2.4	Bewer	tung in unvollständigen Märkten	68		
	2.4.1	Ein-Perioden-Märkte mit einem Risikogut	68		
	2.4.2	Mehr-Perioden-Märkte mit einem Risikogut	78		
2.5	Repliz	zierbarkeit von Claims	82		
	2.5.1	Generelle Replizierbarkeit	82		
	2.5.2	Superreplikation	83		
2.6	Vervo	llständigung unvollständiger Märkte	89		
2.7	Zusan	nmenfassende Bemerkungen	92		
Symbolverzeichnis					
Literaturverzeichnis					

Dank

Mein herzlicher Dank gilt Herrn Prof. Dr. Pfeifer, der mir diese Dissertation ermöglicht hat und dessen Betreuung während der Anfertigung mir eine sehr große Hilfe war. Ebenso gilt mein Dank allen Kollegen, die mir mit Rat und Tat zur Seite standen. Elke Grisstede, Mirjam Wagner und meinen Eltern Reinhild und Jürgen Mohn danke ich, dass sie mich ermutigt und durch ihre Liebe getragen haben. Nicht zuletzt gilt mein besonderer Dank Gott, der mich mit allem versorgt hat, was nötig und gut war.

Oldenburg im Mai 2004, Christian Mohn

Zusammenfassung

Die arbitragefreie Bewertung von nicht replizierbaren Claims in unvollständigen diskreten stochastischen Finanzmärkten ist im Allgemeinen nicht eindeutig durchführbar. Die vorliegende Arbeit befasst sich mit dem Umfeld dieser Problematik und liefert eine Formel, die alle zur Auswahl stehenden arbitragefreien Preise für nicht replizierbare europäische Optionen liefert. Dies geschieht durch eine geeignete Darstellung der Menge der äquivalenten Martingalmaße und durch die Auszeichnung spezieller Martingalmaße, die bei arbitragefreien Preisen für europäische Optionen zu Maxima und Minima führen. Die Ergebnisse werden weitestgehend für Mehrperioden-Modelle hergeleitet, welche mittels Zerlegung in Einperioden-Modelle untersucht werden. Die Vorgehensweise bei dieser Zerlegung wird ausführlich erläutert, außerdem werden Beispiele für die Zusammensetzung von Einperioden-Modellen zu Mehrperioden-Modellen angeführt. Weiterhin wird der Zusammenhang zwischen den arbitragefreien Optionspreisen und der Bewertung von Optionen mittels Superreplikation dargestellt mit dem Ergebnis, dass die Extrema der arbitragefreien Optionspreise und die durch Superreplikation ermittelten Preise stets übereinstimmen. Hierfür wird ein kurzer Beweis unter Verwendung von äquivalenten Martingalmaßen geführt. Schließlich wird exemplarisch aufgezeigt, dass in Märkten mit mehreren risikobehafteten Wertpapieren Einschränkungen beim risikolosen Zins zur Erhaltung der Arbitragefreiheit in Kauf genommen werden müssen.

Diese Arbeit bietet einen lückenlosen Aufbau der Finanzmarkttheorie, die zur Untersuchung der angesprochenen Themen benötigt wird. Dieser umfasst die diskrete Theorie der Atome, der diskreten bedingten Erwartungswerte, der Martingale und schließlich der fundamentalen diskreten Finanzmarkttheorie, bei der die zentralen Begriffe Derivat, Option, Claim, Arbitrage, äquivalente Martingalmaße und Vollständigkeit von Finanzmärkten mit den benötigten Details eingeführt werden. Hinzu kommt eine exakte ausführliche Beschreibung des verwendeten diskreten Modells, womit durch geeignete Einführung der Notation eine effiziente Untersuchung der weiteren Fragestellungen erreicht werden soll. Die zentralen Ergebnisse der Arbeit werden immer wieder mit Beispielen und Abbildungen ergänzt, um ein möglichst großes Verständnis der Ergebnisse zu erzielen.

Abstract

In general a unique arbitrage-free pricing of non-attainable claims in incomplete discrete financial markets is not feasible. The present thesis attends to this problem and its consequences and provides a formula which allows to calculate the range of all possible arbitrage-free prices of non-attainable European options. This is done by an adequate representation of the set of equivalent martingale measures and by exposing some special martingale measures that lead to maxima and minima of the arbitrage-free prices of a European option. In most parts the results are regarded for multi-period markets which are investigated by a decomposition into single-period markets. The realisation of such a kind of decompositions is described properly and afterwards examples for the composition are presented. Moreover, the connection between the arbitrage-free option-prices and the pricing of options by super-replication is shown. A short proof using martingale measures is given for the fact that the results of the two different approaches are equal. Finally it is demonstrated by an appropriate example that in markets with more than one risky asset some restrictions on the riskless interest rate are necessary to keep the market arbitrage-free.

The thesis gives a closed framework of the theory of financial markets which is needed for the research of the above-mentioned questions. It contains the discrete theory of atoms, discrete conditional expectations, martingales, and the fundamental theory of financial markets. Terms like derivative, option, claim, arbitrage, equivalent martingale measures and completeness of financial markets are introduced with all necessary details. Furthermore an explicit description of the discrete model is given, whereby an efficient research of the further questions is to be achieved using an appropriate introduction of the notation. All of the main results of this thesis are accompanied by examples and figures to get a better understanding.

Kapitel 1

Grundlagen diskreter Marktmodelle

1.1 Einleitung

Finanzmärkte stehen in der heutigen Zeit zunehmend im Mittelpunkt des wirtschaftlichen Geschehens. Ihr Verhalten hängt von einer Vielzahl verschiedener Faktoren ab, die es als Marktteilnehmer zu berücksichtigen gilt, um die gewünschten Ziele zu erreichen. Die stochastische Modellierung von Finanzmärkten und die mathematische Auseinandersetzung mit ihren Eigenschaften liefert Ergebnisse, mit deren Hilfe diese Faktoren besser eingeschätzt werden können. Die Fülle der dabei auftretenden Fragestellungen und ihre Komplexität ist nicht zuletzt an den Hunderten von Veröffentlichungen in diesem Bereich zu erkennen. Eine Auswahl umfangreicher Literaturlisten findet sich in [7], [10] und [26].

Entscheidend für die Herleitung der Finanzmarkttheorie ist die Wahl eines geeigneten Modells zur Beschreibung der zu untersuchenden Finanzmärkte. Im wesentlichen wird dabei zwischen zwei Arten der Modellierung unterschieden, die wiederum jeweils verschiedene Ausprägungen besitzen. Die sog. stetige Modellierung legt dem Finanzmarktmodell einen stetigen zeitlichen Ablauf zugrunde und gewöhnlich einen unendlich großen Zustandsraum, in dem sich die Kurse von Handelsgütern bewegen können. In sog. diskreten Modellen sind hingegen diskrete, meist endlich viele Handelszeitpunkte festgelegt, an denen Handelsgüter eine gewöhnlich endliche Anzahl von Kursen annehmen können. Beide Ansätze führen prinzipiell zu ähnlichen Resultaten, wobei einzelne Fragestellungen je nach Modell zu unterschiedlich guten und aussagekräftigen Ergebnissen führen. Jedoch unterscheiden sich die Modelle stark in den zu ihrem Verständnis benötigten mathematischen Voraussetzungen.

Die stetige Modellierung benötigt neben den mathematischen Grundfertigkeiten der Analysis und linearen Algebra eine ganze Reihe tiefer gehender Kalküle, wie z.B. stochastische Integration oder stochastische Differentialgleichungen, deren Verständnis einen nicht geringen Lern- bzw. Lehraufwand erfordert. Dieser ist beim diskreten Ansatz nicht erforderlich. Daher eignet sich der Einsatz diskreter Modelle sehr gut in der Lehre, um ein schnelles Verständnis der Prinzipien von Finanzmärkten zu erlangen.

1.1. EINLEITUNG

Nicht nur aus diesem Grund ist die diskrete Modellierung Grundlage dieser Arbeit. Die gewöhnliche stetige Modellierung fordert einige Voraussetzungen, die in dieser Form in der Praxis nicht unbedingt wiederzufinden sind. So geht z.B. das stetige Modell, das zur heute üblichen Formel für die Bewertung von Derivaten führte, für die 1997 Myron Scholes und Robert Merton den Nobelpreis für Ökonomie bekamen, von der Möglichkeit aus, dass in Finanzmärkten beliebig oft in stetiger Zeit gehandelt wird. Dies ist in der Praxis gar nicht möglich, da sich die Kurse in der Realität immer aus Angebot und Nachfrage zusammensetzen, und diese erst einmal vorliegen müssen, bevor ein Handel stattfinden kann. Viele der in der Realität gehandelten Wertpapiere verhalten sich daher eher diskret, ihre Kurse gleichen eher einer Treppenfunktion, als der üblicherweise bei der stetigen Modellierung verwendeten Brown'schen Bewegung. Exemplarische Kursgrafen¹ in Abbildung 1.1 und 1.2 von an deutschen Börsen notierten Aktien belegen dies.

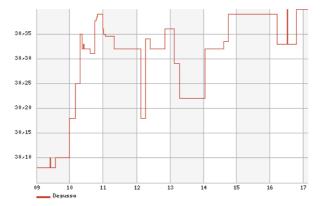


Abbildung 1.1: Intraday-Chart¹ der Aktie der Degussa AG im deutschen Xetra-Handel vom 23.04.2004.

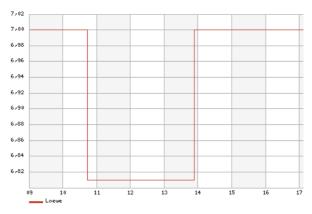


Abbildung 1.2: Intraday-Chart¹ der Aktie der Loewe AG im deutschen Xetra-Handel vom 23.04.2004.

 $^{^1\}mathrm{Abdruck}$ mit freundlicher Genehmigung durch Gruner + Jahr Wirtschafts Presse Online GmbH, www.boerse-online.de

Lediglich sehr häufig gehandelte Wertpapiere z.B. aus dem DAX-30 ähneln der überall stetigen, aber nirgends differenzierbaren Brow'nschen Bewegung, wie Abbildung 1.3 veranschaulicht¹. Daher ist es im Allgemeinen durchaus sinnvoll, sowohl Sprünge bei der Kursentwicklung zuzulassen, als auch diskrete Handelszeitpunkte zu veranschlagen.

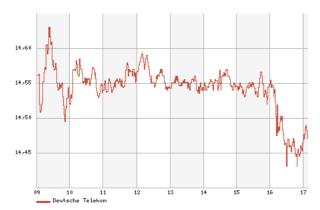


Abbildung 1.3: Intraday-Chart¹ der Aktie der Telekom AG im deutschen Xetra-Handel vom 23.04.2004.

Aus historischer Sicht waren in der mathematischen Theorie der Finanzmärkte zunächst die stetigen Modelle vorherrschend. Erst 1979 lieferten J. C. Cox, A. Ross und M. Rubinstein mit dem nach ihnen benannten Cox-Ross-Rubinstein-Modell (CRR-Modell) Grundlagen für eine diskrete Modellierung (siehe [6]), die danach durch Arbeiten von J. M. Harrison, D. M. Kreps und S. R. Pliska wesentlich vorangetrieben wurden (siehe [13] und [14]). Auf diesen Ideen baut auch der in dieser Arbeit gewählte diskrete Modellierungsansatz auf. Nicht zuletzt die in den vergangenen 10 Jahren zunehmende Anzahl von Veröffentlichungen, die auf die diskrete Modellierung eingehen, zeigt, dass dieser Ansatz von steigender Relevanz ist. Als Beispiele seien hier [1], [10], [12], [24] und [27] genannt.

Ziel dieser Arbeit ist es einerseits, unter Verwendung eines diskreten Modells Aussagen über Derivate in unvollständigen Märkten zu treffen, die nicht eindeutig arbitragefrei bewertet werden können. Dazu wird in diesen Märkten die Menge der äquivalenten Martingalmaße betrachtet, mit deren Kenntnis explizite Formeln zur Bestimmung der Grenzen einer arbitragefreien Bewertung von europäischen Optionen, einer häufig in der Praxis vorkommenden Sorte von Derivaten, ermittelt werden können. Daran gliedern sich Ergebnisse zur Superreplikation und zur Zinsbeschränkung zur Erhaltung der Arbitragefreiheit in vollständigen Märkten mit mehreren Handelsgütern an. Andererseits sollen die Ergebnisse dieser Arbeit in einer Form präsentiert werden, die alle wesentlichen zum Verständnis benötigten stochastischen Grundlagen beinhaltet und die zu allen Aussagen detaillierte Begründungen liefert. Damit soll die Verwendbarkeit der Ergebnisse für die Zwecke der Lehre so weit wie möglich gefördert werden. Diese Zielsetzungen führen zu einer Gliederung der Inhalte in zwei Kapitel.

¹Abdruck mit freundlicher Genehmigung durch Gruner + Jahr WirtschaftsPresse Online GmbH, www.boerse-online.de

1.1. EINLEITUNG

Im ersten Kapitel werden zu Beginn die benötigten Grundlagen der diskreten Stochastik beschrieben, insbesondere die Themen Atome, bedingte Erwartungswerte und Martingale. Anschließend werden einige wichtige Hilfssätze aus der Analysis und linearen Algebra angeführt, und schließlich wird die Modellierung eines diskreten Finanzmarktes beschrieben, und die grundlegenden Eigenschaften dieses Modells werden erarbeitet. Die zentralen Begriffe Derivat, Option, Claim, Arbitrage, äquivalente Martingalmaße und VollständigkeiT eines Marktes werden hier kurz, aber fundiert eingeführt.

Im zweiten Kapitel schließen sich daran die Ergebnisse über unvollständige Märkte an. Dort wird zunächst die Menge der äquivalenten Martingalmaße betrachtet, für die geeignete Methoden zu ihrer expliziten Darstellung besprochen werden. Als effizienteste Methode stellt sich dabei die Darstellung äquivalenter Martingalmaße als Lösung linearer Gleichungssysteme heraus, die dann ausführlich erläutert wird. Anschließend wird eine Zerlegung eines allgemeinen Marktes vorgenommen, mit deren Hilfe unter Verwendung der Ergebnisse zur Darstellung äquivalenter Martingalmaße eine exakte Spanne für arbitragefreie Preise europäischer Optionen hergeleitet wird. Daran schließen sich die Untersuchungen über den Zusammenhang zwischen den erzielten Ergebnissen und der Bewertung von Derivaten mittels Superreplikation an. Dabei stellt sich heraus, dass die Ergebnisse beider Ansätze stets übereinstimmen. Im Anschluss daran findet sich noch eine kurze exemplarische Abhandlung über Einschränkungen, denen der risikolose Zins unterworfen werden muss, wenn unvollständige Märkte durch Aufnahme weiterer Handelsgüter zu vollständigen Märkten werden sollen. Die Arbitragefreiheit ist in einer solchen Situation unter den gewohnten Voraussetzungen nicht mehr garantiert.

Uber allem steht das Bemühen, möglichst verständliche, aber exakte Beweise zu den angeführten Aussagen zu liefern. Zusätzlich werden in vielen Beispielen immer wieder die Konsequenzen und die konkrete Umsetzung der hergeleiteten Aussagen verdeutlicht und durch Abbildungen ergänzt.

1.2 Grundlegende Begriffe aus der Stochastik

In diesem Abschnitt wird die Verwendung einiger mathematischer Bezeichnungen erläutert. Zusätzlich werden für diesen Text grundlegende Begriffe aus der Stochastik kurz besprochen, um für die folgende Theorie einen eindeutigen Sprachgebrauch zu haben. Weiterhin soll dieser Abschnitt, wie einleitend bereits besprochen, verdeutlichen, dass das behandelte Thema ausschließlich mit Methoden der diskreten Stochastik erarbeitet werden kann, ohne dabei Lücken in der Beweisführung zu lassen.

1.2.1 Grundlegende Bezeichnungen

Zunächst einige Bezeichnungen und ihre Verwendung im Text. Für eine Menge $A\subseteq\Omega$ meint das Symbol $\mathbf{1}_A$ die sog. Indikatorfunktion

$$\mathbf{1}_A: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{1}_A(\omega) \longmapsto \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \in A^c \end{array} \right.$$

Ist $f: X \longrightarrow Y$ eine Funktion und $M \subseteq X$, dann bezeichnet $f|_M: M \longrightarrow Y$ die Einschränkung von f auf M, d.h. es ist $f|_M(m) = f(m)$, für alle $m \in M$. Weiterhin ist $\mathbb{R}^n_+ := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0, \ i = 1, \dots, n\}, \ n \in \mathbb{N}$. Für zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit $x = (x_1, \dots, x_n)$ und $y = (y_1, \dots, y_n)$ sei x > y, wenn gilt $x_i > y_i$, für alle $i = 1, \dots, n$. Analoge Aussagen gelten für \geq , < und \leq . Das euklidische Skalarprodukt wird mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezeichnet.

Im Folgenden wird gewöhnlich auf endlichen Wahrscheinlichkeitsräumen (Ω, \mathcal{F}, P) gearbeitet. Dabei wird die Abkürzung $(\Omega, P) := (\Omega, \mathfrak{P}(\Omega), P)$ verwendet, wobei $\mathfrak{P}(\Omega)$ die Potenzmenge von Ω bezeichnet. Eine Teil- σ -Algebra $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ ist eine σ -Algebra über Ω , für die gilt $A \in \mathcal{G} \Longrightarrow A \in \mathcal{F}$, für alle $A \in \mathcal{G}$. Häufig werden Maße vorkommen, die keine nichttrivialen Nullmengen besitzen, d.h. es gilt $P(A) > 0, \ \forall A \in \mathcal{F} \setminus \{\phi\}$. In diesem Zusammenhang taucht auch der folgende Begriff auf.

1.1 Definition: Sei (Ω, P) ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum und Q ein Wahrscheinlichkeitsmaß über Ω . Das Maß Q heißt zu P äquivalent, wenn gilt

$$\{A \subseteq \Omega \mid P(A) = 0\} = \{A \subseteq \Omega \mid Q(A) = 0\}.$$

1.2 Bemerkung: Sowohl Zähldichten $f: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen als auch Zufallsvariablen $X: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ sind Elemente des Funktionenraums \mathbb{R}^{Ω} . Da für den Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P) in diesem Text, soweit nicht anders vermerkt, Endlichkeit vorausgesetzt wird — gewöhnlich wird $|\Omega| =: m$ gesetzt —, können beide auch als Vektoren des zu \mathbb{R}^{Ω} isomorphen Raums \mathbb{R}^m aufgefasst werden (Näheres zur Isomorphie siehe z.B. [25], S. 13). Weiterhin sind unter diesen Voraussetzungen endliche Wahrscheinlichkeitsmaße bereits durch die Bilder aller Einzelereignisse $\{\omega\}$, $\omega \in \Omega$ festgelegt und können

daher ebenfalls eindeutig mit Vektoren des \mathbb{R}^m identifiziert werden. In den nachfolgenden Überlegungen werden daher Zufallsvariablen, Zähldichten und Wahrscheinlichkeitsmaße gelegentlich als m-Tupel $(X(\omega_1), \ldots, X(\omega_m)) \in \mathbb{R}^m$ bzw. $(f(\omega_1), \ldots, f(\omega_m)) \in \mathbb{R}^m$ bzw. $(P(\{\omega_1\}), \ldots, P(\{\omega_m\})) \in \mathbb{R}^m$ notiert, je nach Eignung als Zeilen- oder Spaltenvektor. Zur besseren Übersicht wird ein als Vektor geschriebenes Wahrscheinlichkeitsmaß notiert als $\mathbf{P} = (\mathbf{P}(\{\omega_1\}), \ldots, \mathbf{P}(\{\omega_m\}))$. Es gelte dann immer $\mathbf{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbf{P}(\{\omega\})$, für alle $A \subseteq \Omega$. Diese Notation vereinfacht die Darstellung und die Anwendung von Methoden der Analysis und linearen Algebra.

Sofern eindeutig interpretierbar, werden Zufallsvariablen, die messbar bezüglich der trivialen σ -Algebra $\{\phi, \Omega\}$ sind, als Konstanten aufgefasst und umgekehrt. Dabei wird dann die Multiplikation mit einer solchen Zufallsvariable auch als Skalarmultiplikation aufgefasst.

Weitere verwendete Begriffe sind:

- **1.3 Definition:** Ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{F}P)$ heißt **minimal**, wenn P(A) > 0 für alle $A \in \mathfrak{F}$.
- **1.4 Lemma:** Jeder endliche Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ kann verkleinert werden zu einem minimalen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Xi, \mathfrak{B}_{\Xi}, P_{\Xi})$ mit $\Xi \subseteq \Omega$, $\mathfrak{B}_{\Xi} \subseteq \mathfrak{B}$ und $P_{\Xi}(A) = P(A)$, für alle $A \in \mathfrak{B}_{\Xi}$.

Beweis: Sei $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ ein beliebiger Wahrscheinlichkeitsraum, dann erfüllt $(\Xi, \mathfrak{B}_{\Xi}, P_{\Xi})$ mit

$$\begin{split} M &:= \bigcup_{N \in \mathcal{N}} N, \ \mathcal{N} := \{ N \in \mathfrak{B} \mid \mathrm{P}(N) = 0 \} \\ \Xi &:= \Omega \setminus M \\ \mathfrak{B}_\Xi &:= \{ A \setminus M \in \mathfrak{B} \mid \mathrm{P}(A) > 0 \} \cup \phi \\ \mathrm{P}_\Xi &:= \mathrm{P}|_{\mathfrak{B}_\Xi} \end{split}$$

die gewünschten Bedingungen. Aufgrund der Endlichkeit von Ω gilt $M \in \mathfrak{B}$ und daher auch $A \setminus M \in \mathfrak{B}$. Damit ist \mathfrak{B}_{Ξ} offensichtlich eine σ -Algebra über Ξ .

1.2.2 Atome

In diesem Abschnitt wird die Struktur der σ -Algebra \mathcal{F} eines endlichen Messraumes (Ω, \mathcal{F}) näher untersucht. Dabei wird eine Zerlegung von \mathcal{F} in kleinste Einheiten, sog. Atome, vorgenommen. Die Eigenschaften von Atomen werden anschließend kurz beschrieben. Im Weiteren werden diese Atome als mathematische Formulierung für die Information, die ein Händler am Markt besitzt, wieder auftauchen. Auf die exakte Modellierung wird im Abschnitt 1.4 eingegangen, an dieser Stelle werden nur allgemeine Eigenschaften von Atomen besprochen.

1.5 Definition: Sei (Ω, \mathcal{F}) ein endlicher Messraum. Eine Menge $A \in \mathcal{F}$, $A \neq \phi$ heißt **Atom** der σ -Algebra \mathcal{F} , wenn sie bezüglich Inklusion minimal unter den Elementen von \mathcal{F} ist, d.h. wenn gilt:

$$\forall B \in \mathfrak{F} \setminus \{\phi\}: B \subseteq A \implies B = A.$$

- **1.6 Lemma:** Sei (Ω, \mathcal{F}) ein endlicher Messraum.
 - a) Für zwei verschiedene Atome A und B von \mathfrak{F} gilt $A \cap B = \emptyset$.
 - b) Die Vereinigung aller Atome von \mathfrak{F} ist endlich, disjunkt und ergibt Ω .
 - c) Zu jedem $\omega \in \Omega$ existiert genau ein Atom $A \in \mathcal{F}$ mit $\omega \in A$.

Beweis:

- a) Sei $A \cap B = C \neq \phi$. Ist dann C = A, so ist $B \supset A$, wegen der Verschiedenheit von A und B und damit B kein Atom, im Widerspruch zur Voraussetzung. Ist hingegen $C \subset A$, so ist A kein Atom, im Widerspruch zur Voraussetzung. Damit ergibt sich insgesamt ein Widerspruch.
- b) Die Endlichkeit folgt trivialerweise aus der Endlichkeit von \mathcal{F} , die Disjunktheit unmittelbar aus Teil a). Angenommen die Vereinigung B aller Atome aus \mathcal{F} sei ungleich Ω . Dann darf B^c weder ein Atom sein, noch Atome enthalten. Da jedoch die σ -Algebra \mathcal{F} endlich ist, muss in ihr entweder eine bezüglich Inklusion kleinste, nichtleere, echte Teilmenge von B^c existieren, die dann per Definition ein Atom ist, oder B^c selbst ist ein Atom. Beide Fälle liefern einen Widerspruch.
- c) Da nach Teil b) die Vereinigung aller Atome von $\mathcal F$ disjunkt ist, kann jedes $\omega \in \Omega$ in höchstens einem Atom enthalten sein. Da dieselbe Vereinigung aber Ω zum Ergebnis hat, muss auch jedes $\omega \in \Omega$ in mindestens einem Atom liegen.

- **1.7 Definition:** Nach Lemma 1.6 Teil b) existiert eine eindeutig bestimmte Zerlegung von Ω in die Atome der σ -Algebra \mathfrak{F} . Die Menge $\mathcal{A} := \{A \in \mathfrak{F} \mid A \text{ ist Atom von } \mathfrak{F}\}$ aller Atome von \mathfrak{F} heißt **Atomsystem** von \mathfrak{F} .
- **1.8 Definition:** Das zu jedem $\omega \in \Omega$ nach Lemma 1.6 Teil c) existierende eindeutig bestimmte Atom A mit $\omega \in A$ wird das von ω induzierte Atom genannt und mit A_{ω} bezeichnet.
- **1.9 Lemma:** Sei (Ω, \mathcal{F}) ein endlicher Messraum.

a)
$$\eta \in A_{\omega} \implies A_{\eta} = A_{\omega}, \quad \forall \, \eta, \omega \in \Omega.$$

- b) Sei $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{F}$ Teil- σ -Algebra von \mathfrak{F} und seien A_1, \ldots, A_m die Atome von \mathfrak{F} , sowie B_1, \ldots, B_n die Atome von \mathfrak{G} . Dann ist $m \geq n$ und es existiert zu jedem $j \in \{1, \ldots, m\}$ ein $k \in \{1, \ldots, n\}$, so dass $A_j \subseteq B_k$.
- c) Sei $\{A_1, \ldots, A_m\}$ die Menge aller Atome von \mathcal{F} . Dann gilt:

$$\mathcal{F} = \left\{ \bigcup_{j \in J} A_j \mid J \subseteq \{1, \dots, m\} \right\},\,$$

weshalb die Menge $\{A_1, \ldots, A_m\}$ ein Erzeuger von \mathfrak{F} ist.

- d) $|\mathfrak{F}| = 2^m$.
- e) Sei $Z: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung, dann gilt:

$$Z \text{ ist } \mathfrak{F}\text{-messbar} \iff \exists \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R} \text{ mit } Z = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{1}_{A_i},$$

d.h. Z ist genau dann \mathcal{F} -messbar, wenn Z auf den Atomen von \mathcal{F} konstant ist.

Beweis:

- a) Folgt sofort aus Lemma 1.6 Teil a), da mit $\eta \in A_{\omega}$ nicht $A_{\eta} \cap A_{\omega} = \phi$ gelten kann.
- b) Wegen $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ sind die Mengen B_1, \ldots, B_n in \mathcal{F} enthalten. Angenommen, es gibt einen Index $j \in \{1, \ldots, m\}$ für den kein Index $k \in \{1, \ldots, n\}$ existiert, so dass $A_j \subseteq B_k$. Da nach Lemma 1.6 Teil b) die Mengen B_k , $k = 1, \ldots, n$ die Menge Ω überdecken, existiert dann in \mathcal{F} eine nichtleere Menge $A_j \cap B_k \subset A_j$, für ein $k \in \{1, \ldots, n\}$. Dies ist aber ein Widerspruch zur Atomeigenschaft von A_j . Da die Mengen A_j , $j = 1, \ldots, m$ disjunkt sind muss somit auch $m \geq n$ folgen.
- c) Für alle $B \in \mathcal{F}$ gilt: $B = \bigcup_{\omega \in B} \{\omega\} \subseteq \bigcup_{\omega \in B} A_{\omega}$. Weiterhin ist $A_{\omega} \subseteq B$, $\forall \omega \in \Omega$, denn $A_{\omega} \cap B \subset A_{\omega}$ würde bedeuten, es gäbe eine echte Teilmenge von A_{ω} in \mathcal{F} , im Widerspruch zur Atomeigenschaft von A_{ω} . Somit ist $B = \bigcup_{\omega \in B} A_{\omega}$. Umgekehrt liegen trivialerweise alle Atome von \mathcal{F} auch in \mathcal{F} , also auch ihre endlichen Vereinigungen.
- d) Nach Teil c) genügt es, die Anzahl aller möglichen verschiedenen Vereinigungen von m paarweise disjunkten Mengen zu berechnen. Diese erhält man leicht mittels Induktion: Für m=1 ist Ω das einzige Atom und $|\mathcal{F}|=\left|\{\phi,\Omega\}\right|=2$. Ist m+1 die Anzahl aller Atome von \mathcal{F} , so gilt nach Induktionsvoraussetzung, dass sich aus m Stück dieser Atome insgesamt 2^m verschiedene Möglichkeiten der Vereinigungen bieten. Da das (m+1)-te Atom zu allen anderen Atomen und damit ihren Vereinigungen disjunkt ist, ergeben sich mit ihm 2^m weitere Vereinigungen, so dass die Gesamtzahl aller verschiedener Vereinigungen $2 \cdot 2^m = 2^{m+1}$ beträgt.

e) Eine \mathcal{F} -messbare Funktion Z kann wegen der Endlichkeit von Ω höchstens endlich viele verschiedene Werte $W = \{Z(\omega) \mid \omega \in \Omega\}$ annehmen. Die in \mathcal{F} liegenden Urbilder $Z^{-1}(\{w\})$ lassen sich für jedes $w \in W$ nach Teil b) als disjunkte Vereinigung von Atomen darstellen. Daraus resultiert die angegebene Darstellbarkeit von Z als Elementarfunktion. Umgekehrt ist jede Elementarfunktion Z aus \mathcal{F} -Mengen trivialerweise \mathcal{F} -messbar.

Ist $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ Teil- σ -Algebra von \mathcal{F} , so spricht man aufgrund von Lemma 1.9, Teil b) bei \mathcal{F} auch von einer Verfeinerung von \mathcal{G} . Die Atome von \mathcal{F} sind gegenüber denen von \mathcal{G} entweder gleich geblieben oder haben sich geteilt. Also ist die Menge der Atome von \mathcal{F} "feiner", als die von \mathcal{G} .

1.10 Lemma: Sei (Ω, \mathcal{F}, P) ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum. Sei $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ eine Teil- σ -Algebra von \mathcal{F} und seien A_1, \ldots, A_m die Atome von \mathcal{F} , sowie B_1, \ldots, B_n die Atome von \mathcal{G} . Dann gilt

$$\sum_{B_j \subseteq A_k} P(B_j | A_k) = 1, \quad k = 1, \dots, m.$$

Beweis: Nach Lemma 1.9, Teil b) existiert zu jedem B_j , j = 1, ..., n ein A_k , k = 1, ..., m mit $B_j \subseteq A_k$ und jede Menge A_k enthält wenigstens eine Menge B_j , da $\bigcup_{k=1}^m A_k = \bigcup_{j=1}^n B_j = \Omega$. Daher gilt für k = 1, ..., m

$$\sum_{B_j \subseteq A_k} P(B_j | A_k) = \sum_{B_j \subseteq A_k} \frac{P(B_j \cap A_k)}{P(A_k)} = \frac{\sum_{B_j \subseteq A_k} P(B_j)}{P(A_k)} = 1.$$

1.2.3 Diskreter bedingter Erwartungswert

An dieser Stelle wird der bedingte Erwartungswert im Gegensatz zu der sonst in der Literatur üblichen Vorgehensweise (vgl. z.B. [3] oder [16]) in einer diskreten Version vorgestellt, als Spezialfall des allgemeinen bedingten Erwartungswertes. Bei der Herleitung wird völlig auf den Umgang mit allgemeinen bedingten Erwartungswerten und insbesondere die Verwendung von Integralen verzichtet. In ähnlicher Form sind die folgenden Aussagen auch in [24] zu finden.

1.11 Definition: Seien (Ω, \mathcal{F}, P) ein minimaler endlicher Wahrscheinlichkeitsraum, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ eine Teil- σ -Algebra von $\mathcal{F}, A_1, \ldots, A_m$ die Atome von \mathcal{G} und $Z: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable. Dann heißt die Funktion

$$E(Z \mid \mathcal{G}) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad E(Z \mid \mathcal{G}) : \omega \longmapsto \sum_{j=1}^{m} \frac{E(Z \cdot \mathbf{1}_{A_{j}})}{P(A_{j})} \mathbf{1}_{A_{j}}(\omega)$$

diskreter bedingter Erwartungswert von Z unter der σ -Algebra \mathfrak{G} .

1.12 Lemma: Der bedingte Erwartungswert $E(Z \mid \mathcal{G})$ ist eine \mathcal{G} -messbare Zufallsvariable.

Beweis: Die Messbarkeit folgt sofort aus Lemma 1.9, Teil e), da $E(Z \mid \mathcal{G}) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \mathbf{1}_{A_j}$, mit $\alpha_j = \frac{E(Z \cdot \mathbf{1}_{A_j})}{P(A_i)}$.

1.13 Lemma: Seien $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ Teil- σ -Algebren von \mathcal{G} bzw. \mathcal{F} und Y, Z reellwertige Zufallsvariablen und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann besitzt der bedingte Erwartungswert folgende Eigenschaften:

a)
$$E(Y + Z \mid \mathcal{G}) = E(Y \mid \mathcal{G}) + E(Z \mid \mathcal{G})$$

b)
$$E(\alpha Z \mid \mathcal{G}) = \alpha E(Z \mid \mathcal{G})$$

c)
$$Y < Z \implies E(Y \mid \mathcal{G}) < E(Z \mid \mathcal{G})$$

$$|E(Z|\mathfrak{G})| \leq E(|Z|\mathfrak{G})$$

e)
$$E(Z \mid \mathcal{G}) = E(Z)$$
, falls Z und \mathcal{G} stochastisch unabhängig sind

$$f) E(Z | \{\phi, \Omega\}) = E(Z)$$

$$g) E(E(Z | \mathcal{G}) | \mathcal{H}) = E(Z | \mathcal{H})$$

$$h) E(E(Z \mid \mathcal{G})) = E(Z)$$

i)
$$\mathrm{E}(Z\,|\, \mathfrak{G}) = Z$$
, falls Z messbar bezüglich \mathfrak{G} ist

$$j) \ \mathrm{E}(Z \mid \mathfrak{P}(\Omega)) = Z.$$

Beweis: Seien A_1, \ldots, A_m die Atome von \mathfrak{G} .

a)
$$E(Y + Z \mid \mathcal{G}) = \sum_{k=1}^{m} \frac{E((Y+Z) \cdot \mathbf{1}_{A_k})}{P(A_k)} \mathbf{1}_{A_k} = \sum_{k=1}^{m} \frac{E(Y \cdot \mathbf{1}_{A_k})}{P(A_k)} \mathbf{1}_{A_k} + \sum_{k=1}^{m} \frac{E(Z \cdot \mathbf{1}_{A_k})}{P(A_k)} \mathbf{1}_{A_k} = E(Y \mid \mathcal{G}) + E(Z \mid \mathcal{G}).$$

b)
$$E(\alpha Z \mid \mathcal{G}) = \sum_{k=1}^{m} \frac{E(\alpha Z \cdot \mathbf{1}_{A_k})}{P(A_k)} \mathbf{1}_{A_k} = \alpha \sum_{k=1}^{m} \frac{E(Z \cdot \mathbf{1}_{A_k})}{P(A_k)} \mathbf{1}_{A_k} = \alpha E(Z \mid \mathcal{G}).$$

c)
$$Y < Z \Rightarrow E(Y) < E(Z) \Rightarrow \sum_{k=1}^{m} \frac{E(Y \cdot \mathbf{1}_{A_k})}{P(A_k)} \mathbf{1}_{A_k} < \sum_{k=1}^{m} \frac{E(Z \cdot \mathbf{1}_{A_k})}{P(A_k)} \mathbf{1}_{A_k} \Rightarrow E(Y \mid \mathcal{G}) < E(Z \mid \mathcal{G}).$$

d)
$$|E(Z|\mathcal{G})| = \left| \sum_{k=1}^{m} \frac{E(Z \cdot \mathbf{1}_{A_k})}{P(A_k)} \mathbf{1}_{A_k} \right| \le \sum_{k=1}^{m} \frac{E(|Z|\mathbf{1}_{A_k})}{P(A_k)} \mathbf{1}_{A_k} = E(|Z||\mathcal{G}).$$

e) Sind Z und \mathcal{G} stochastisch unabhängig, dann sind auch Z und $\mathbf{1}_{A_j}$ für $j=1,\ldots,m$ stochastisch unabhängig, da die von $\mathbf{1}_{A_j}$ erzeugte σ -Algebra eine Teil- σ -Algebra von \mathcal{G} ist. Damit folgt

$$E(Z | \mathcal{G}) = \sum_{j=1}^{m} \frac{E(Z \cdot \mathbf{1}_{A_{j}})}{P(A_{j})} \mathbf{1}_{A_{j}} = E(Z) \sum_{j=1}^{m} \frac{E(\mathbf{1}_{A_{j}})}{P(A_{j})} \mathbf{1}_{A_{j}} = E(Z).$$

- f) Folgt unmittelbar aus Teil e), da Z und $\{\phi, \Omega\}$ stochastisch unabhängig sind.
- g) Seien B_1, \ldots, B_n die Atome von \mathcal{H} . Nach Lemma 1.9, Teil b) zerfällt jedes Atom B_k vollständig in bestimmte Atome A_j , so dass $\mathbf{1}_{A_j} \cdot \mathbf{1}_{B_k} = \mathbf{1}_{A_j}$, falls $j \in J_k := \{j \in \{1, \ldots, m\} \mid A_j \subseteq B_k \}$ und $\mathbf{1}_{A_j} \cdot \mathbf{1}_{B_k} = 0$, sonst. Damit folgt

$$\begin{split} & \operatorname{E}\left(\operatorname{E}(Z \mid \mathcal{G}) \mid \mathcal{H}\right) & = \operatorname{E}\left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\operatorname{E}(Z \cdot \mathbf{1}_{A_{j}})}{\operatorname{P}(A_{j})} \mathbf{1}_{A_{j}} \mid \mathcal{H}\right) \\ & = \sum_{j=1}^{m} \frac{\operatorname{E}(Z \cdot \mathbf{1}_{A_{j}})}{\operatorname{P}(A_{j})} \operatorname{E}(\mathbf{1}_{A_{j}} \mid \mathcal{H}) \\ & = \sum_{j=1}^{m} \frac{\operatorname{E}(Z \cdot \mathbf{1}_{A_{j}})}{\operatorname{P}(A_{j})} \sum_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{E}(\mathbf{1}_{A_{j}} \cdot \mathbf{1}_{B_{k}})}{\operatorname{P}(B_{k})} \mathbf{1}_{B_{k}} \\ & = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \frac{\operatorname{E}(\mathbf{1}_{A_{j}} \cdot \mathbf{1}_{B_{k}})}{\operatorname{P}(B_{k})} \frac{\operatorname{E}(Z \cdot \mathbf{1}_{A_{j}})}{\operatorname{P}(A_{j})} \mathbf{1}_{B_{k}} \\ & = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j \in J_{k}} \frac{\operatorname{E}(\mathbf{1}_{A_{j}})}{\operatorname{P}(B_{k})} \mathbf{1}_{B_{k}} \\ & = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j \in J_{k}} \frac{\operatorname{E}(Z \cdot \mathbf{1}_{A_{j}})}{\operatorname{P}(B_{k})} \mathbf{1}_{B_{k}} \\ & = \sum_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{E}(Z \cdot \mathbf{1}_{B_{k}})}{\operatorname{P}(B_{k})} \mathbf{1}_{B_{k}} = \operatorname{E}(Z \mid \mathcal{H}). \end{split}$$

h) Folgt unmittelbar aus Teil f) und g), mit

$$E(E(Z \mid \mathcal{G})) = E(E(Z \mid \mathcal{G}) \mid \{\phi, \Omega\}) = E(Z \mid \{\phi, \Omega\}) = E(Z).$$

i) Ist die Zufallsvariable Z messbar bezüglich \mathcal{G} , so besitzt sie nach Lemma 1.9, Teil e) eine Darstellung der Form $Z = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \mathbf{1}_{A_j}, \ \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$. Damit folgt

$$E(Z \mid \mathcal{G}) = E\left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_{j} \mathbf{1}_{A_{j}} \mid \mathcal{G}\right) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{j} E(\mathbf{1}_{A_{j}} \mid \mathcal{G}) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{j} \sum_{k=1}^{m} \frac{E(\mathbf{1}_{A_{j}} \cdot \mathbf{1}_{A_{k}})}{P(A_{k})} \mathbf{1}_{A_{k}}$$
$$= \sum_{j=1}^{m} \alpha_{j} \frac{E(\mathbf{1}_{A_{j}})}{P(A_{j})} \mathbf{1}_{A_{j}} = Z.$$

- j) Folgt unmittelbar aus Teil i), da jedes Z messbar bezüglich der Potenzmenge $\mathfrak{P}(\Omega)$ ist.
- k) Ist die Zufallsvariable Y messbar bezüglich \mathcal{G} , so besitzt sie wieder nach Lemma 1.9, Teil e) eine Darstellung der Form $Y = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \mathbf{1}_{A_j}, \ \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$. Damit folgt

$$\begin{split} \mathrm{E}(YZ \mid \mathfrak{G}) &= \mathrm{E}(\sum_{j=1}^{m} \alpha_{j} \mathbf{1}_{A_{j}} Z \mid \mathfrak{G}) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{j} \, \mathrm{E}(\mathbf{1}_{A_{j}} Z \mid \mathfrak{G}) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{j} \sum_{k=1}^{m} \frac{\mathrm{E}(\mathbf{1}_{A_{j}} Z \mid \mathbf{1}_{A_{k}})}{\mathrm{P}(A_{k})} \mathbf{1}_{A_{k}} \\ &= \sum_{j=1}^{m} \frac{\mathrm{E}(\mathbf{1}_{A_{j}} Z)}{\mathrm{P}(A_{j})} (\alpha_{j} \mathbf{1}_{A_{j}}) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\mathrm{E}(\mathbf{1}_{A_{j}} Z)}{\mathrm{P}(A_{j})} \mathbf{1}_{A_{j}} \left(\sum_{k=1}^{m} \alpha_{k} \, \mathbf{1}_{A_{k}}\right) = Y \, \mathrm{E}(Z \mid \mathfrak{G}). \end{split}$$

1.14 Bemerkung: Eine Definition des allgemeinen bedingten Erwartungswertes lautet folgendermaßen: sei (Ω, \mathcal{F}, P) ein beliebiger Wahrscheinlichkeitsraum, \mathcal{F} Teil- σ -Algebra von \mathcal{F} , dann heißt jede \mathcal{F} -messbare Zufallsvariable Y bedingter Erwartungswert von X unter der σ -Algebra \mathcal{F} , für die gilt: \mathcal{F} \mathcal{F} d \mathcal{F} d \mathcal{F} d \mathcal{F} , für alle \mathcal{F} \mathcal{F} (vgl. [3], section 34). Dass der diskrete bedingte Erwartungswert aus Definition 1.11 nur ein Spezialfall des allgemeinen bedingten Erwartungswertes ist, sei hier kurz nachgerechnet. Sei der zugrunde liegende Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) endlich. Dann ist \mathcal{F} \mathcal

$$\int_{B} E(Z|\mathfrak{G}) dP = \sum_{\omega \in \Omega} \sum_{j=1}^{m} \frac{E(Z \cdot \mathbf{1}_{A_{j}})}{P(A_{j})} \mathbf{1}_{A_{j}}(\omega) \mathbf{1}_{B}(\omega) P(\{\omega\})$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \sum_{\omega \in A_{j}} \frac{E(Z \cdot \mathbf{1}_{A_{j}})}{P(A_{j})} \mathbf{1}_{A_{j}}(\omega) \mathbf{1}_{B}(\omega) P(\{\omega\})$$

$$= \sum_{A_{j} \subseteq B} \sum_{\omega \in A_{j}} \frac{E(Z \cdot \mathbf{1}_{A_{j}})}{P(A_{j})} \mathbf{1}_{A_{j}}(\omega) P(\{\omega\})$$

$$= \sum_{A_{j} \subseteq B} \frac{E(Z \cdot \mathbf{1}_{A_{j}})}{P(A_{j})} P(A_{j})$$

$$= \sum_{A_{j} \subseteq B} \int Z \cdot \mathbf{1}_{A_{j}} dP$$

$$= \int Z \sum_{A_{j} \subseteq B} \mathbf{1}_{A_{j}} dP$$

$$= \int Z dP.$$

Da der allgemeine bedingte Erwartungswert P-f.s. eindeutig bestimmt ist, ist der diskrete bedingte Erwartungswert als Spezialfall sogar eindeutig bestimmt.

1.2.4 Martingale

Für das Gebiet der Vollständigkeit von Märkten und das eng damit zusammenhängende Thema der Arbitrage, die im Verlauf dieses Kapitels erklärt werden, ist der Begriff des Martingals von wesentlicher Bedeutung. Ursprünglich stammt er aus der Reiterei, wo er ein Teil des Zaumzeuges eines Pferdes darstellt, einen Hilfszügel, der das unkontrollierte Hochwerfen des Pferdekopfes verhindern soll. Der Zusammenhang zum gleichlautenden Begriff in der Mathematik könnte dahingehend verstanden werden, dass eine Folge von Zufallsvariablen, die ein Martingal bildet, sich auf eine bestimmte Weise kontrolliert verhält. Die folgenden Aussagen über Martingale stammen zum Teil aus [4] und [10].

1.15 Definition: Sei (Ω, P) ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum.

Eine Folge $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_n\}_{n=0,\dots,T}$ von σ -Algebren heißt **Filtration**, wenn sie bezüglich Inklusion aufsteigend geordnet ist, d.h. wenn gilt $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{F}_T$.

1.16 Definition: Sei $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_n\}_{n=0,\dots,T}$ eine Filtration und $\{X_n\}_{n=0,\dots,T}$ eine Folge reellwertiger Zufallsvariablen auf (Ω, P) .

- a) Die Folge $\{X_n\}_{n=0,...,T}$ heißt der Filtration \mathcal{F} adaptiert, wenn X_n messbar bezüglich \mathcal{F}_n ist für $n=0,\ldots,T$.
- b) Die Folge $\{X_n\}_{n=0,...,T}$ heißt vorhersagbar (bezüglich der Filtration \mathfrak{F}), wenn sie der Filtration \mathfrak{F} adaptiert ist und X_n messbar bezüglich \mathfrak{F}_{n-1} ist für $n=1,\ldots,T$.
- c) Die Folge $\{X_n\}_{n=0,...,T}$ heißt ein Martingal (bezüglich einer Filtration $\{\mathfrak{F}_n\}_{n=0,...,T}$), wenn sie der Filtration $\{\mathfrak{F}_n\}_{n=0,...,T}$ adaptiert ist mit

$$E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = X_n$$
, für $n = 0, ..., T - 1$.

d) Eine Folge $\{X_n\}_{n=0,...,T}$ von Zufallsvektoren $X_n = (X_n^0, ..., X_n^d)$ heißt ein **Vektor-Martingal**, wenn die Folge jeder Komponente $\{X_n^j\}_{n=0,...,T}$, für j=0,...,d ein Martingal ist.

Um die Martingaleigenschaft einer Folge $\{X_n\}_{n=0,\dots,T}$ von Zufallsvariablen nachzuweisen, wird statt der Bedingung $\mathrm{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = X_n$ auch häufig die äquivalente Bedingung $\mathrm{E}(X_{n+1} - X_n \mid \mathcal{F}_n) = 0$ nachgerechnet.

1.17 Lemma: Sei $\{X_n\}_{n=0,\dots,T}$ ein Martingal, dann gilt für m < n:

$$E(X_n \mid \mathfrak{F}_m) = X_m,$$

und insbesondere $E(X_n) = X_0$.

Beweis: Für m < n gilt nach Lemma 1.13 Teil g):

$$E(X_n \mid \mathfrak{F}_m) = E(E(X_n \mid \mathfrak{F}_{m+1}) \mid \mathfrak{F}_m) = E(X_{m+1} \mid \mathfrak{F}_m) = X_m,$$

insbesondere $E(X_n) = E(X_n \mid \mathcal{F}_0) = X_0$.

1.18 Lemma: Die Familie $\{M_n\}_{n=0,\dots,T}$ sei ein Martingal und die Familie $\{H_n\}_{n=0,\dots,T}$ eine bezüglich der Filtration $\{\mathcal{F}_n\}_{n=0,\dots,T}$ vorhersagbare Familie. Ferner sei $\Delta M_n := M_n - M_{n-1}$, für $n=1,\dots,T$. Dann ist auch die durch

$$X_n := \begin{cases} H_0 M_0 &, & n = 0 \\ X_0 + \sum_{i=1}^n H_i \Delta M_i, & 1 \le n \le T \end{cases}$$

definierte Familie ein Martingal bezüglich der Filtration $\{\mathcal{F}_n\}_{n=0,...,T}$, genannt die durch $\{H_n\}_{n=0,...,T}$ induzierte Martingal-Transformation von $\{M_n\}_{n=0,...,T}$.

Beweis: X_n ist als Produkt und Summe \mathcal{F}_n -messbarer Funktionen auch \mathcal{F}_n -messbar, also ist $\{X_n\}_{n=0,\dots,T}$ der Filtration \mathcal{F}_n adaptiert. Außerdem gilt für $n=0,\dots,T-1$:

$$E(X_{n+1} - X_n \mid \mathcal{F}_n) = E(H_{n+1}(M_{n+1} - M_n) \mid \mathcal{F}_n) = H_{n+1} \cdot E(M_{n+1} - M_n \mid \mathcal{F}_n) = 0.$$

1.19 Korollar: Die Familie $\{M_n\}_{n=0,\dots,T}$, $M_n=(M_n^0,\dots,M_n^d)$ sei ein Vektor-Martingal und die Familie $\{H_n\}_{n=0,\dots,T}$ mit $H_n=(H_n^0,\dots,H_n^d)$ sei eine bezüglich der Filtration $\{\mathfrak{F}_n\}_{n=0,\dots,T}$ vorhersagbare Familie von Vektoren. Ferner sei $\Delta M_n:=M_n-M_{n-1}$, für $n=1,\dots,T$. Dann ist auch die durch

$$X_n := \begin{cases} \langle H_0, M_0 \rangle &, \quad n = 0 \\ X_0 + \sum_{i=1}^n \langle H_i, \Delta M_i \rangle, & n = 1, \dots, T \end{cases}$$

definierte Familie ein Martingal bezüglich der Filtration $\{\mathcal{F}_n\}_{n=0,\dots,T}$, genannt die durch $\{H_n\}_{n=0,\dots,T}$ induzierte **Vektor-Martingal-Transformation** von $\{M_n\}_{n=0,\dots,T}$.

Beweis: X_n ist wieder als Produkt und Summe \mathcal{F}_n -messbarer Funktionen auch \mathcal{F}_n -messbar, also ist $\{X_n\}_{n=0,\dots,T}$ der Filtration \mathcal{F}_n adaptiert. Außerdem gilt für $n=0,\dots,T-1$:

$$E(X_{n+1} - X_n | \mathcal{F}_n) = E(\langle H_{n+1}, (M_{n+1} - M_n) \rangle | \mathcal{F}_n)$$

$$= \sum_{j=1}^d E(H_{n+1}^j (M_{n+1}^j - M_n^j) | \mathcal{F}_n)$$

$$= 0.$$

1.20 Satz: Eine der Filtration $\{\mathcal{F}_n\}_{n=0,\dots,T}$ adaptierte Familie $\{M_n\}_{n=0,\dots,T}$ ist genau dann ein Martingal, wenn für jede vorhersagbare Familie $\{H_n\}_{n=0,\dots,T}$ gilt:

$$E\left(\sum_{n=1}^{T} H_n \Delta M_n\right) = 0.$$

Beweis: Sei $\{X_n\}_{\{0 \le n \le T\}}$ die durch $\{H_n\}_{\{0 \le n \le T\}}$ induzierte Martingal-Transformation nach Lemma 1.185. Dann gilt

$$E\left(\sum_{n=1}^{T} H_n \Delta M_n\right) = E(X_T - X_0) = E(X_T) - E(X_0) = 0,$$

nach Lemma 1.17, und die eine Richtung ist bewiesen.

Sei nun für $0 \le m \le T-1$ und beliebiges \mathcal{F}_m -messbares $B \subseteq \Omega$ folgende Handelsstrategie definiert:

$$H_n := \left\{ \begin{array}{ll} 0 & , & n \neq m+1 \\ \mathbf{1}_B, & n = m+1 \end{array} \right. .$$

 H_n ist \mathfrak{F}_{n-1} -messbar für $n=1,\ldots,T$, also vorhersagbar. Weiterhin ist:

$$E(\mathbf{1}_B \cdot (M_{m+1} - M_m)) = E(H_{m+1} \Delta M_{m+1}) = E\left(\sum_{n=1}^T H_n \Delta M_n\right) = 0,$$

nach Voraussetzung, es gilt also $\mathrm{E}(\mathbf{1}_B \cdot M_{m+1}) = \mathrm{E}(\mathbf{1}_B \cdot M_m)$ für $m = 0, \ldots, T-1$. Da $B \in \mathcal{F}_m$ beliebig gewählt war, gilt insbesondere für alle Atome $A \in \mathcal{F}_m$ für $m = 0, \ldots, T-1$:

$$E(M_{m+1} \mid \mathcal{F}_m) = \sum_{A} \frac{E(\mathbf{1}_A \cdot M_{m+1})}{P(A)} = \sum_{A} \frac{E(\mathbf{1}_A \cdot M_m)}{P(A)} \mathbf{1}_A = E(M_m \mid \mathcal{F}_m) = M_m.$$

1.21 Korollar: Eine der Filtration $\{\mathcal{F}_n\}_{n=0,\dots,T}$ adaptierte Familie $\{M_n\}_{n=0,\dots,T}$, $M_n = (M_n^0,\dots,M_n^d)$ ist genau dann ein Vektor-Martingal, wenn für jede vorhersagbare Familie $\{H_n\}_{n=0,\dots,T}$ mit $H_n = (H_n^0,\dots,H_n^d)$ gilt:

$$E\left(\sum_{n=1}^{T} \langle H_n, \Delta M_n \rangle\right) = 0.$$

Beweis: Nach Satz 1.20 gilt:

$$E\left(\sum_{n=1}^{T} \langle H_n, \Delta M_n \rangle\right) = E\left(\sum_{n=1}^{T} \sum_{j=0}^{d} H_n^j \Delta M_n^j\right) = \sum_{j=0}^{d} E\left(\sum_{n=1}^{T} H_n^j \Delta M_n^j\right) = 0.$$

Für die andere Richtung ist zu zeigen, dass jede Komponente M^j , $j=0,\ldots,d$ ein Martingal ist. Dies tut der zweite Teil des Beweises von Satz 1.20 für $M=M^j$ wörtlich.

1.3 Hilfssätze der linearen Algebra

In diesem Abschnitt werden die wichtigsten im Folgenden benötigten Hilfsmittel der linearen Algebra und Analysis vorgestellt und bewiesen. Hierzu gehören der Satz von der trennenden Hyperebene und eine Version von Farkas' Lemma. Die folgenden beiden Sätze mit Beweisen stammen aus [24].

1.22 Satz: Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene, konvexe Menge mit $0 \notin X$. Dann existiert ein $x_0 \in X$ mit

$$\langle x_0, x \rangle \ge \|x_0\|^2 > 0, \quad \forall x \in X.$$

Beweis: Sei r > 0 und $X_r := \{x \in X \mid ||x|| \le r\}$. X_r ist offenbar eine nichtleere, kompakte, konvexe Menge. Da die euklidische Norm $||\cdot||$ als stetige Funktion auf X_r dort auch ihr Minimum annimmt, existiert ein $x_0 \in X$, so dass $||x_0|| \le ||x||$, für alle $x \in X_r$, und daher auch für alle $x \in X$. Aufgrund der Konvexität von X gilt für beliebiges $x \in X$ und $\lambda \in [0,1]$ auch $x_0 + \lambda(x - x_0) \in X$, so dass insgesamt folgt:

$$||x_0||^2 \le ||x_0 + \lambda(x - x_0)|| = ||x_0||^2 + 2\lambda\langle x_0, x - x_0\rangle + \lambda^2 ||x - x_0||^2.$$

Für $\lambda \in (0,1]$ und $x \in X$ folgt damit

$$0 \le 2\langle x_0, x - x_0 \rangle + \lambda \|x - x_0\|^2$$

und für $\lambda \to 0$ schließlich

$$0 \le \langle x_0, x - x_0 \rangle = \langle x_0, x \rangle - ||x_0||^2$$
.

Damit gilt $\langle x_0, x \rangle \ge ||x_0||^2$, für alle $x \in X$.

1.23 Satz: (Satz von der trennenden Hyperebene) Es seien Y eine kompakte, konvexe Teilmenge des \mathbb{R}^n und V ein Untervektorraum des \mathbb{R}^n , außerdem sei $Y \cap V = \phi$. Dann existiert ein $x_0 \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\langle x_0, v \rangle = 0, \quad \forall v \in V$$

und $\langle x_0, y \rangle \geq \|x_0\|^2, \quad \forall y \in Y.$

Beweis: Es sei

$$X := Y + V = \{y + v \mid y \in Y, v \in V\}.$$

Xist konvex, da für $x_1,x_2\in X$ mit $x_1=y_1+v_1$ und $x_2=y_2+v_2,\,y_1,y_2\in Y,\,v_1,v_2\in V$ und $\lambda\in[0,1]$ gilt

$$x_1 + \lambda(x_2 - x_1) = y_1 + \lambda(y_2 - y_1) + v_1 + \lambda(v_2 - v_1) \in X$$

da Y konvex und V Vektorraum ist. Weiterhin ist X abgeschlossen: sei $(y_j + v_j)_{j \in \mathbb{N}} \in Y + V$ eine Folge mit Grenzwert $x \in \mathbb{R}^n$. Aufgrund der Abgeschlossenheit von Y existiert eine

konvergente Teilfolge $(y_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}\in Y$ mit Grenzwert $y\in Y$. Dann gilt $\lim_{k\to\infty}v_{j_k}=x-y$. Da V abgeschlossen ist, muss der Grenzwert x-y der Folge $(v_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}\in V$ auch in V liegen, so dass gilt $x=y+(x-y)\in Y+V$, was die Abgeschlossenheit von X begründet. Schließlich ist auch $0\notin X$, sonst wäre wegen $0=y+v\Leftrightarrow y=-v$ auch $Y\cap V\neq \emptyset$.

Aufgrund von Satz 1.22 existiert dann ein Vektor $x_0 \in X$, so dass

$$\langle x_0, x \rangle \ge \|x_0\|^2,$$

für alle $x \in X$ und insbesondere für alle $x \in Y$. Das beweist den ersten Teil des Satzes.

Mit diesem ersten Teil ergibt sich nun wegen der Vektorraumeigenschaft von V

$$||x_0||^2 \le \langle x_0, y + \lambda v \rangle,$$

was äquivalent ist zu

$$||x_0||^2 - \lambda \langle x_0, v \rangle \le \langle x_0, y \rangle,$$

für alle $y \in Y$, $v \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dies erzeugt für $\langle x_0, v \rangle \neq 0$ mit $\lambda < -\frac{\langle x_0, y \rangle}{\langle x_0, v \rangle}$ einen Widerspruch, also muss gelten $\langle x_0, v \rangle = 0$, für alle $v \in V$.

1.24 Definition: Eine Menge M heißt Kegel, wenn $\lambda x \in M$, für alle $x \in M$ und $\lambda \geq 0$.

Das folgende Lemma stammt mit Beweis aus [24].

1.25 Lemma: (Farkas' Lemma) Sei A eine $m \times n$ -Matrix und $b \in \mathbb{R}^m$. Das lineare Gleichungssystem Ax = b hat genau dann eine nichtnegative Lösung (d.h. eine Lösung $x \geq 0$), wenn für alle $y \in \mathbb{R}^m$ gilt:

$$\langle Ax, y \rangle \ge 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^n_+ \implies \langle b, y \rangle \ge 0.$$

Beweis: Besitzt Ax = b eine nichtnegative Lösung $x_0 \in \mathbb{R}^n_+$, so gilt für alle $y \in \mathbb{R}^m$ mit $\langle Ax, y \rangle \geq 0$, für alle $x \in \mathbb{R}^n_+$

$$\langle b, y \rangle = \langle Ax_0, y \rangle \ge 0.$$

Für den umgekehrten Schluss besitze Ax = b keine nichtnegative Lösung $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Dann ist b nicht in der Menge $\{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n_+\}$ enthalten und somit $0 \notin K := \{Ax - b \mid x \in \mathbb{R}^n_+\}$. Weiterhin ist K wegen

$$Ax_1 - b + t((Ax_2 - b) - (Ax_1 - b)) = A(x_1 + t(x_2 - x_1)) - b \in K$$

für $Ax_1 - b$, $Ax_2 - b \in K$ und $t \in [0, 1]$ konvex und als Bild der abgeschlossenen Menge \mathbb{R}^n_+ unter der stetigen Abbildung Ax - b auch abgeschlossen.

Daher existiert nach Satz 1.22 ein $y_0 \in K$, so dass

$$\langle y, y_0 \rangle \ge \|y_0\|^2 > 0,$$

für alle $y \in K$ oder anders ausgedrückt

$$\langle Ax - b, y_0 \rangle > 0,$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n_+$, was äquivalent ist zu

$$\langle Ax, y_0 \rangle > \langle b, y_0 \rangle,$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n_+$, so dass mit x = 0 insbesondere $\langle b, y_0 \rangle < 0$ folgt. Andererseits folgt aber für $x \in \mathbb{R}^n_+$ mit $\lambda > 0$ auch $\lambda x \in \mathbb{R}^n_+$, und damit

$$\lambda \langle Ax, y_0 \rangle = \langle A(\lambda x), y_0 \rangle > \langle b, y_0 \rangle,$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n_+$ und $\lambda > 0$. Daraus ergibt sich

$$\langle Ax, y_0 \rangle > \frac{\langle b, y_0 \rangle}{\lambda},$$

und für $\lambda \to \infty$ folgt dann $\langle Ax, y_0 \rangle > 0$, für alle $x \in \mathbb{R}^n_+$. Das beweist die Existenz eines $y_0 \in \mathbb{R}^m$ mit $\langle Ax, y_0 \rangle \geq 0$, für alle $x \in \mathbb{R}^n_+$, aber $\langle b, y_0 \rangle < 0$, falls keine positive Lösung von Ax = b existiert.

1.4 Modellierung eines diskreten Finanzmarktes

In diesem Abschnitt wird ein mathematisches Modell eines diskreten Finanzmarktes vorgestellt. Dieses Modell bildet die Grundlage, auf der alle weiteren Fragestellungen dieser Arbeit behandelt werden. Derartige Modelle besprechen auch [10] und [30].

1.4.1 Der Markt

Unter einem Finanzmarkt soll ein Ort verstanden werden, an dem beliebige, handelbare Finanzgüter an festgelegten Zeitpunkten (sog. Handelszeitpunkten) zu festgelegten Preisen gehandelt werden dürfen. Wenn im nachfolgenden Text von Finanzgütern die Rede ist, sind damit meist Wertpapiere und Finanzkontrakte, wie z.B. aus Wertpapieren abgeleitete Rechte gemeint. Das Modell und die Theorie sind jedoch bewusst so allgemein gehalten, dass sie auch auf andere Güter angewendet werden können. Die grundlegenden Voraussetzungen an das Modell sind folgende:

- Der Markt besitze endlich viele **Handelszeitpunkte** (im Weiteren mit "Zeitpunkte" abgekürzt) $n = 0, ..., T \in \mathbb{N}$, an denen Finanzgüter gehandelt werden dürfen.
- Es werden endlich viele **Finanzgüter** (im Weiteren mit "Güter" abgekürzt) $j = 0, \ldots, d \in \mathbb{N}$ gehandelt.
- Jedes Gut im Markt soll zu jedem Zeitpunkt einen Preis besitzen, der eindeutig bestimmt ist, sofern der Zeitpunkt eingetreten ist, jedoch nicht notwendig schon vorher. Der **Preis** eines Gutes $j \in \{0, ..., d\}$ zum Zeitpunkt $n \in \{0, ..., T\}$ lässt sich modellieren durch eine nichtnegative, reellwertige Zufallsvariable S_n^j (die Bezeichnung S ist eine Abkürzung für "Stock", engl. für Aktie) auf einem geeigneten zugrunde liegenden Wahrscheinlichkeitsraum Ω . Wohlgemerkt stellt j hier keine Potenz dar, sondern lediglich einen hochgestellten Index zur kürzeren Schreibweise.
- Dem Markt liegt ein **minimaler endlicher Wahrscheinlichkeitsraum** $(\Omega, P), \Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_m\}$ zugrunde. Der Grundraum stellt die m möglichen Zustände dar, in denen sich der Markt, d.h. die Preise jedes Gutes, zu jedem Zeitpunkt $n \in \{0, \ldots, T\}$ befinden kann. Das Wahrscheinlichkeitsmaß gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit diese Zustände eintreten können. Die Minimalität des dem Markt zugrunde liegenden Wahrscheinlichkeitsraums stellt sicher, dass der Markt keine Zustände enthält, die niemals angenommen werden können.
- Ist bekannt, welcher Zustand $\omega \in \Omega$ in einem Markt eintritt, so sind die Preise jedes Gutes zu jedem Zeitpunkt bekannt. Da für die Preise von Gütern gefordert wurde, dass ihre gegenwärtigen, nicht notwendig jedoch ihre zukünftigen Preise bekannt sind, sei zu jedem Zeitpunkt n < T noch nicht der eingetretene Zustand $\omega \in \Omega$

bekannt, sondern nur ein Ereignis $A^n \subseteq \Omega$ mit $\omega \in A^n$ (wobei n ebenfalls einen hochgestellten Index und keine Potenz darstellt). Zusätzlich wird gefordert, dass die **Information** über den zum Zeitpunkt n = T eintretenden Zustand $\omega \in \Omega$ mit fortschreitender Zeit zunimmt. Dies geschieht dadurch, dass die Ereignisse $A^n \subseteq \Omega$ mit fortschreitender Zeit immer weniger Elemente enthalten, d.h. dass gilt $A^n \subseteq A^{n-1}$, für $n = 1, \ldots, T$. Modelliert wird die Information und ihr Verhalten durch eine Filtration $\mathcal{F}=\{\mathcal{F}_0,\ldots,\mathcal{F}_T\}$ mit $\mathcal{F}_n:=\sigma(\mathcal{A}_n)$, wobei \mathcal{A}_n die Menge aller Ereignisse A^n ist, die einen Marktzustand zum Zeitpunkt $n \in \{0, \dots, T\}$ repräsentieren. \mathcal{A}_n sei sinnvollerweise eine disjunkte Zerlegung von Ω und daher ein Atomsystem von \mathcal{F}_n , d.h. die Zustände eines Marktes zum Zeitpunkt $n \in \{0, \dots, T\}$ werden durch die Atome der σ -Algebra \mathcal{F}_n dargestellt. Nach Lemma 1.9, Teil b) existiert die geforderte Zerlegbarkeit der Atome immer. Die Preise S_n^j jedes Gutes $j=0,\ldots,d$ im Markt seien \mathcal{F}_n -messbar, $n=0,\ldots,T$. Damit ist die Forderung erfüllt, dass für jedes Gut $j=0,\ldots,d$ die Preise in jedem Zeitpunkt eindeutig bestimmt sind, sofern der Zeitpunkt eingetreten ist, jedoch nicht notwendig schon vorher, denn S_n^j ist auf dem zum Zeitpunkt $n \in \{0, ..., T\}$ bekannten Ereignis $A^n \in \mathcal{F}_n$ konstant. Offenbar gilt dann $\mathfrak{F}_T = \mathfrak{P}(\Omega)$, außerdem sei festgelegt, dass $\mathfrak{F}_0 = \{\phi, \Omega\}$, d.h. zum Anfangszeitpunkt n=0 ist der Markt deterministisch.

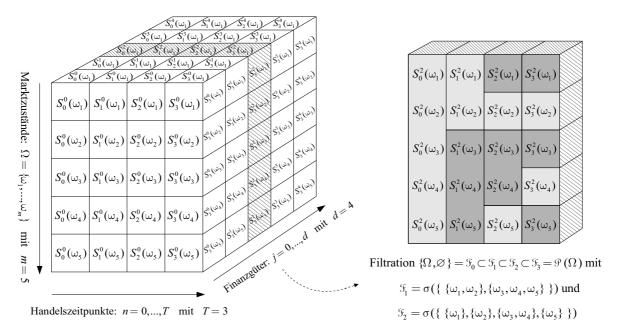


Abbildung 1.4: Links: Dreidimensionale Darstellung der Preise eines Marktes als Würfel. Rechts: Visualisierung der Filtration anhand eines einzelnen Finanzgutes

Die Preise aller im Markt handelbaren Güter können durch einen Würfel veranschaulicht werden, wie in Abbildung 1.4. Die Spalten des Würfels entlang der horizontalen Achse stellen die zeitliche Entwicklung des Preises dar, die Spalten entlang der in den Raum hinein

verlaufenden Achse bilden die verschiedenen Finanzgüter, die im Markt gehandelt werden. Die Zeilen des Würfels entlang der vertikalen Achse stellen die verschiedenen Zustände dar, die der Markt annehmen kann. Die rechte Seite der Abbildung stellt die Preismatrix eines der Güter des Marktes dar und zeigt, wie die Information über das Marktgeschehen mit jedem Zeitpunkt wächst. Dabei beschreiben die farblich zusammenhängenden Bereiche in jeder Spalte die Zustände, in denen sich der Markt zum jeweiligen Zeitpunkt befinden kann. Daraus lassen sich unmittelbar die Atome der zugehörigen σ -Algebra ablesen, die unterhalb der Matrix angegeben sind. Schränkt man die Preisabbildung S_n^j auf die Atome aus \mathcal{A}_n ein, so kann jedes Gut auch in Form eines Baumes dargestellt werden, wie Abbildung 1.5 zeigt.

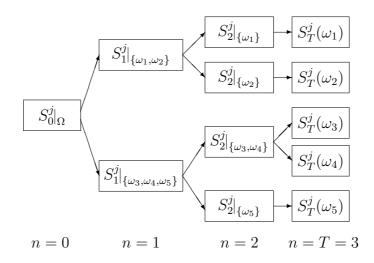


Abbildung 1.5: Darstellung der Preise eines Gutes in Form eines Baumes

Der Begriff "Information" ist somit zu verstehen als eine Kenntnis über die bisherige Entwicklung, die das Marktgeschehen bereits genommen hat. Je mehr Handelszeitpunkte verstrichen sind, desto feiner ist die Untergliederung des Marktes in eintretbare Ereignisse, und desto eher kann bei Kenntnis des eingetretenen Ereignisses der mögliche Endzustand des Marktes zum Zeitpunkt n=T eingeschränkt werden. In diesem Zusammenhang wird auch davon gesprochen, dass zum Zeitpunkt 0 "keine" Information und zum Handelszeitpunkt T "volle" Information vorliegt.

Der Markt aus Abbildung 1.4 und 1.5 entspricht zwar den Anforderungen der Modellierung, ist jedoch unter Umständen kein sinnvoller Markt. In einigen Zuständen zum Zeitpunkt n=2 lässt sich schon vorhersagen, welcher Zustand im zukünftigen Zeitpunkt n=3 angenommen wird, weil die Atome der σ -Algebra \mathcal{F}_3 sich dort gegenüber den Atomen der σ -Algebra \mathcal{F}_2 nicht mehr verändern. Wenn sich in diesen Zuständen die Kurse im Zeitpunkt n=2 gegenüber dem Zeitpunkt n=3 ändern, so ist durch geeigneten Kauf oder Verkauf des Gutes zu den jeweiligen Zeitpunkten ein sicherer Gewinn möglich (siehe dafür auch Beispiel 1.40). Diese Möglichkeit wird durch die Modellierung nicht ausgeschlossen, ab dem

Abschnitt 1.5 tut dies jedoch die Forderung der dort näher beschriebenen Arbitragefreiheit.

Es werden noch einige weitere Forderungen an einen Markt gestellt. Das Gut j=0 soll in jedem Markt ein **monetäres Finanzgut**, z.B. Spareinlagen oder einen Bond (festverzinsliches Wertpapier) darstellen. Es hat einen anfänglichen Preis von $S_0^0=1$, es ist risikolos, d.h. S_n^0 ist \mathcal{F}_0 -messbar für alle $n\in\{0,\ldots,T\}$, und es besitzt eine konstante Wachstumsrate $r\in\mathbb{R}$, d.h. $S_n^0=rS_{n-1}^0$ für alle $n\in\{1,\ldots,T\}$. Somit ist $S_n^0=r^n$. Im Weiteren bezeichnet i:=r-1 den Zinssatz, $v:=\frac{1}{r}$ den Diskontfaktor. Dann ist $\tilde{S}_n^j:=v^nS_n^j$ der auf den Zeitpunkt 0 diskontierte Preis des Gutes j zum Zeitpunkt n. Dabei gilt $\tilde{S}_n^0=v^nr^n=1$ für alle $n\in\{0,\ldots,T\}$. Güter, die keine monetären Güter darstellen, d.h. deren Preise vom Zufall abhängen, werden auch als **Risikogüter** bezeichnet.

In Märkten mit nur einem Risikogut und dem monetären Gut wird der hochgestellte Index "1" beim Preis häufig weggelassen. Anstelle von S_n^0 und S_n^1 ist dann nur vom Zinssatz i und dem Gut S_n die Rede, wobei dann $S_n = S_n^1$ gemeint ist.

Außerdem wird gefordert, dass $S_n^j \neq 0, \ j=0,\ldots,d, \ n=0,\ldots,T-1$, d.h. kein Gut soll vor Ende des letzten Handelszeitpunktes wertlos werden, da sonst kein vernünftiger Handel mehr möglich ist.

Das dem Markt zugrunde liegende Wahrscheinlichkeitsmaß P kann je nach Quelle völlig unterschiedlich zustande kommen. Es ist beispielsweise möglich, dass es aus historischen Beobachtungen des Marktes entstanden ist. Genau so könnte es aber auch aus Marktanalysen berechnet worden sein oder die persönliche Einschätzung eines einzelnen Händlers darstellen. Im Weiteren wird sich zeigen, dass die Kenntnis des zugrunde liegenden Wahrscheinlichkeitsmaßes aufgrund des Fundamentalsatzes der Optionspreistheorie 1.48 für die Bewertung von Claims nur von geringer Bedeutung ist. Daher wird oft auf die Angabe der konkreten Verteilung P verzichtet.

Damit sind nun die wesentlichen Aspekte der diskreten Modellierung von Finanzmärkten beschrieben. Zum besseren Umgang mit Finanzmärkten werden einige weitere Bezeichnungen eingeführt.

1.26 Definition: Die Änderung des Preises eines Finanzgutes vom Zeitpunkt n-1 auf den Zeitpunkt n für $n \in \{1, ..., T\}$ sei gegeben durch die Zufallsvariable $\sigma_n^j : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ $j \in \{0, ..., d\}$, so dass $S_n^j(\omega_k) = (1 + \sigma_n^j(\omega_k))S_{n-1}^j(\omega_k)$ für alle $k \in \{1, ..., m\}$ und sei bezeichnet mit dem Begriff **Volatilität**.

Die Zufallsvariable σ_n^j ist offensichtlich \mathcal{F}_n -messbar. Der Wert $1 + \sigma_n^j$ wird auch als Änderungsrate des Preises bezeichnet. Es gilt außerdem $\sigma_n^0 = r^n$, für $n \in \{0, \dots, T\}$.

1.27 Definition: Die Zeitspanne von einem Zeitpunkt n bis zum nächsten Zeitpunkt n+1, für $n=0,\ldots,T-1$ wird **Periode** genannt. Der Teil eines Marktes, der den Übergang von einem Zustand $A^n \in \mathcal{A}_n$ zum Zeitpunkt $n \in \{0,\ldots,T-1\}$ in die von A^n aus erreichbaren

Zustände $A^{n+1} \in \mathcal{A}_{n+1}$, $A^{n+1} \subseteq A^n$ darstellt, heißt **Ast** (ausgehend von A^n). Die Zustände A^{n+1} , in die A^n zerfällt, heißen **Verzweigungen** oder **Stufen**. Diese Begriffsbildung resultiert aus der Baumdarstellung eines Marktes, wie in Abbildung 1.5.

Jeder Ast eines Marktes stellt prinzipiell einen eigenen einperiodigen Markt, wie z.B. in Abbildung 1.6 abgebildet dar. Konsequenzen dieser Tatsache werden in Kapitel 2 näher betrachtet. Eine spezielle Art von Märkten soll noch gesondert ausgezeichnet werden.

1.28 Definition: Ein Markt mit T Perioden, bei dem von jedem Zustand eines Zeitpunktes $n \in \{0, ..., T-1\}$ aus jeweils genau m Zustände im nächsten Zeitpunkt n+1 erreicht werden können, heißt m-Stufen-T-Perioden-Markt. Sind alle Zustände in jedem Zeitpunkt voneinander verschieden, so besitzt der Markt in jedem Zeitpunkt $n \in \{0, ..., T\}$ genau m^n verschiedene Zustände.

1.29 Beispiel: Abbildung 1.6 stellt einen Zwei-Stufen-Ein-Perioden-Markt dar. Es ist T = 1, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ und $\mathfrak{F} = \{\{\phi, \Omega\}, \mathfrak{P}(\Omega)\}$. Er stellt den einfachsten sinnvollen Markt dar, den es gibt. Trotzdem können in diesem Markt bereits viele finanzmathematische Prinzipien wiedergefunden werden, und er wird im Folgenden noch häufiger verwendet werden.

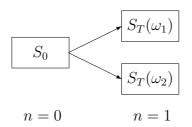


Abbildung 1.6: Finanzgut im Zwei-Stufen-Ein-Perioden-Markt

1.30 Beispiel: Abbildung 1.7 stellt einen Drei-Stufen-Zwei-Perioden-Markt dar. Es ist $T=2,\ \Omega=\{\omega_1,\ldots,\omega_9\},\ A_1=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\},\ A_2=\{\omega_4,\omega_5,\omega_6\},\ A_3=\{\omega_7,\omega_8,\omega_9\}$ und $\mathfrak{F}=\{\mathfrak{F}_0,\mathfrak{F}_1,\mathfrak{F}_2\}$ mit $\mathfrak{F}_0=\{\phi,\Omega\},\ \mathfrak{F}_1=\sigma(A_1,A_2,A_3)$ und $\mathfrak{F}_2=\mathfrak{P}(\Omega)$. Die Mengen $A_1,\ A_2$ und A_3 sind die Atome der σ -Algebra \mathfrak{F}_1 , daher ist S_1 auf diesen Mengen konstant.

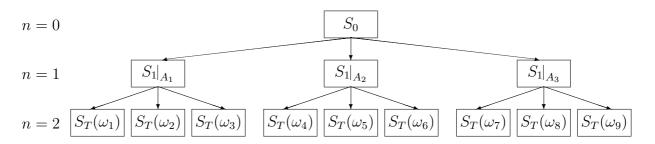


Abbildung 1.7: Finanzgut im Drei-Stufen-Zwei-Perioden-Markt

1.31 Beispiel: (Das Cox-Ross-Rubinstein-Modell) Abbildung 1.8 stellt eine Spezialform eines Zwei-Stufen-T-Perioden-Marktes mit dem monetären und einem Risikogut dar. Im Gegensatz zum allgemeinen Zwei-Stufen-T-Perioden-Markt gleichen sich in diesem Modell die Auf- und Abwärts-Volatilitäten in jedem Zustand jedes Astes, ebenso wie die dem Modell zugrunde liegenden Wahrscheinlichkeiten für die Aufwärts- und die Abwärtsbewegung des Preises. Daraus ergibt sich ein Binomialbaum als Marktmodell, das erstmals von J. C. Cox, A. Ross und M. Rubinstein (1979) eingeführt wurde (siehe [6]) und nach ihnen benannt ist. In diesem Modell sind dann mit dem Anfangspreis S₀ des Gutes und den beiden Volatilitäten alle Preise eindeutig bestimmt.

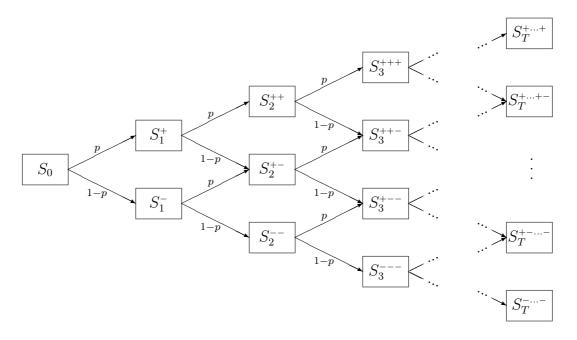


Abbildung 1.8: Zwei-Stufen-T-Perioden-Markt: Das Cox-Ross-Rubinstein-Modell

Der dem Cox-Ross-Rubinstein zugrunde liegende Wahrscheinlichkeitsraum kann zum Beispiel modelliert werden, indem $\Omega = \{0,1\}^T$ und die Filtration $\mathfrak{F} = \{\mathfrak{F}_n\}_{n=0,\dots,T}$ mit $\mathfrak{F}_n = \sigma(\mathcal{A}_n)$ und $\mathcal{A}_n = \{\chi_{\nu=0}^n \{j_{\nu}\} \times \{0,1\}^{T-n} \mid j_{\nu} \in \{0,1\}, \ \nu = 0,\dots,n\}$ gewählt wird. Dabei gilt $\chi_{\nu=0}^0 B_{\nu} := \phi =: \{0,1\}^0$ und $\phi \times B := B$, für beliebige Mengen B, B_0,\dots,B_n . Das System \mathcal{A}_n ist dann gerade das Atomsystem von \mathfrak{F}_n . Das zugrunde liegende Wahrscheinlichkeitsmaß ist eine B(T,p)-Verteilung, wobei $P(\{\omega\}) = {T \choose k} p^k (1-p)^{T-k}$, falls ω genau k Einsen und T-k Nullen enthält. Die Gleichheit der Aufwärtsvolatilitäten in jedem Ast in jedem Zustand bedeutet, dass $\sigma_n(\omega)$ für alle $\omega \in \{0,1\}^{n-1} \times \{1\} \times \{0,1\}^{T-n}$ und für alle $n \in \{1,\dots,T\}$ identisch sind, und daher einheitlich mit σ^+ bezeichnet werden können. Analog dazu bedeutet die Gleichheit der Abwärtsvolatilitäten jedes Astes, dass $\sigma_n(\omega)$ für alle $\omega \in \{0,1\}^{n-1} \times \{0\} \times \{0,1\}^{T-n}$ und für alle $n \in \{1,\dots,T\}$ identisch sind, und daher mit σ^- bezeichnet werden können. Der Markt kann als eine Kopplung von Bernoulli-Experimenten aufgefasst werden, bei denen ein Preisanstieg in einem Ast

(gekennzeichnet durch das Teilereignis 1) mit Wahrscheinlichkeit p und ein Preisverfall in einem Ast (gekennzeichnet durch das Teilereignis 0) mit Wahrscheinlichkeit 1-p eintritt. Dementsprechend können die Kurse so bezeichnet werden, dass gilt

$$S_n^{\underbrace{+\dots+}^{k-\text{mal}}} := S_n^{(k)+(n-k)-} := (1+\sigma^+)^k (1+\sigma^-)^{n-k} S_0.$$

Näher besprochen wird dieses Modell zum Beispiel in [30], Kapitel 5 oder [7], Kapitel 2.3.

1.4.2 Der Händler

Der Händler greift in das Marktgeschehen ein, indem er mittels einer Handelsstrategie Güter zu den je nach Zeitpunkt gültigen Preisen kauft und verkauft. Dabei wird grundsätzlich davon ausgegangen, dass der Markt durch das Eingreifen des Händlers nicht verändert wird.

Bei einer **Handelsstrategie** handelt es sich um eine reellwertige Zufallsvariable ϕ_n^j auf Ω , die für jedes Gut $j \in \{0, \ldots, d\}$ abhängig vom Zeitpunkt $n \in \{0, \ldots, T\}$ angibt, wie viele Anteile des Gutes sich im Besitz des Händlers befinden. Ein positiver Besitz bedeutet dabei, dass der Händler zuvor Güter erworben hat, ein negativer, dass er sie jemandem verkauft hat. Dabei wird davon ausgegangen, dass beides ohne Einschränkung möglich ist. Ebenso ist jede beliebige Stückelung der Güter erlaubt, d.h. jedes Gut ist beliebig teilbar.

Die Handelsstrategie ist also wie der Preis eines Gutes ein Würfel, allerdings sind die Handelsstrategien der einzelnen Güter im Gegensatz zum Preis nicht nur der dem Markt zugrunde liegenden Filtration \mathcal{F} adaptiert, sondern auch vorhersagbar. Da eine Handelsstrategie zum Zeitpunkt $n \in \{1, \ldots, T\}$ bereits den Besitz des Händlers angibt, wurde sie also spätestens zum Zeitpunkt n-1 festgelegt und soll somit \mathcal{F}_{n-1} -messbar sein. Die Teilstrategie ϕ_0 ist \mathcal{F}_0 -messbar und legt fest, welchen Besitz der Händler in den Markt mitbringt.

Die Menge aller möglichen Handelsstrategien wird mit Φ bezeichnet und ist, wenn keine weiteren Einschränkungen getroffen werden, gleich der Menge aller vorhersagbaren Familien $\phi = (\phi_0, \dots, \phi_T)$ mit $\phi_n = (\phi_n^0, \dots, \phi_n^d)$, $n = 0, \dots, T$, wobei $\phi_n^j : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ für $n = 0, \dots, T$, $j = 0, \dots, d$ Zufallsvariablen sind, die aufgrund der Vorhersagbarkeit \mathcal{F}_{n-1} -messbar sind, für $n = 1, \dots, T$.

Der gesamte Besitz aller Handelsgüter eines Händlers zu jedem Zeitpunkt $n \in \{1, ..., T\}$ wird Portfolio genannt. Der Wert dieses Portfolios wird mit V_n bezeichnet und kann mit Hilfe des euklidischen Skalarprodukts berechnet werden durch

$$V_n(\phi) := \langle \phi_n, S_n \rangle = \sum_{k=0}^d \phi_n^k S_n^k,$$

der diskontierte Wert durch

$$\tilde{V}_n(\phi) = v^n V_n(\phi) = \langle \phi_n, \tilde{S}_n \rangle.$$

Es wird – sofern nicht anders vermerkt – stets davon ausgegangen, dass ein Händler bestrebt ist, einen möglichst hohen Gewinn zu erzielen. Für n = 0, ..., T seien die kumulativen Gewinne oder Verluste eines Händlers mit $G_n(\phi)$, die diskontierten kumulativen Gewinne oder Verluste mit $\tilde{G}_n(\phi)$ bezeichnet und berechnen sich durch

$$G_n(\phi) := \sum_{j=1}^n \langle \phi_j, \Delta S_j \rangle, \quad \tilde{G}_n(\phi) := \sum_{j=1}^n \langle \phi_j, \Delta \tilde{S}_j \rangle, \quad n = 0, \dots, T,$$

wobei $\Delta S_j := S_j - S_{j-1}$ und $\Delta \tilde{S}_j := \tilde{S}_j - \tilde{S}_{j-1}$, für $j = 1, \ldots, d$. Im Folgenden wird bei G und \tilde{G} zur Vereinfachung nur noch von Gewinnen gesprochen, womit sowohl Gewinne als auch Verluste gemeint sein können.

Für einige der folgenden Betrachtungen ist es sinnvoll, die Menge der Handelsstrategien einzuschränken. Es soll nicht möglich sein, Geld in den Markt hinein oder aus dem Markt heraus fließen zu lassen. Der Wert des Portfolios darf sich also nur ändern durch die Änderungen der Preise der Güter von Zeitpunkt zu Zeitpunkt. Eine Handelsstrategie, die das gewährleistet, wird selbstfinanzierende Handelsstrategie genannt.

1.32 Definition: Eine Handelsstrategie $\phi \in \Phi$ heißt selbstfinanzierend, wenn gilt:

$$\langle \phi_n, S_n \rangle = \langle \phi_{n+1}, S_n \rangle$$
 für $n = 0, \dots, T - 1$.

Die Menge der selbstfinanzierenden Handelsstrategien wird mit Φ_s bezeichnet.

Das folgenden Aussagen dieses Abschnitts stammen größtenteils aus [4], Kapitel 4.

- **1.33 Lemma:** Seien $\Delta S_n := S_n S_{n-1}$ und $\Delta \tilde{S}_n := \tilde{S}_n \tilde{S}_{n-1}$, für $j \in 1, \ldots, T$. Dann sind äquivalent:
 - a) ϕ ist selbstfinanzierend.

b)
$$V_n(\phi) - V_{n-1}(\phi) = \langle \phi_n, \Delta S_n \rangle, \quad n = 1, \dots, T.$$

c)
$$\tilde{V}_n(\phi) - \tilde{V}_{n-1}(\phi) = \langle \phi_n, \Delta \tilde{S}_n \rangle$$
, $n = 0, \dots, T-1$.

d)
$$V_n(\phi) = V_0(\phi) + G_n(\phi), \quad n = 0, ..., T.$$

e)
$$\tilde{V}_n(\phi) = V_0(\phi) + \tilde{G}_n(\phi), \quad n = 0, ..., T.$$

Beweis: Zunächst wird der Ringschluss $a \Rightarrow b \Rightarrow d \Rightarrow a$ geführt. Ganz analog lässt sich $a \Rightarrow c \Rightarrow e \Rightarrow a$ zeigen, wenn überall $V_n(\phi)$ und S_n durch $V_n(\phi)$ und S_n ersetzt werden.

 $a \Rightarrow b$: Es gilt für $n = 0, \dots, T - 1$:

$$V_n(\phi) - V_{n-1}(\phi) = \langle \phi_n, S_n \rangle - \langle \phi_{n-1}, S_{n-1} \rangle = \langle \phi_n, S_n \rangle - \langle \phi_n, S_{n-1} \rangle = \langle \phi_n, \Delta S_n \rangle.$$

 $b \Rightarrow d$: Es gilt für $n = 0 \dots, T$:

$$V_n(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{\nu=1}^n (V_{\nu}(\phi) - V_{\nu-1}(\phi)) = V_0(\phi) + \sum_{\nu=1}^n \langle \phi_{\nu}, \Delta S_{\nu} \rangle = V_0(\phi) + G_n(\phi).$$

 $d \Rightarrow a$: Es gilt für $n = 0, \dots, T - 1$:

$$V_{n+1}(\phi) - V_n(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{\nu=1}^{n+1} \langle \phi_{\nu}, \Delta S_{\nu} \rangle - V_0(\phi) - \sum_{\nu=1}^{n} \langle \phi_{\nu}, \Delta S_{\nu} \rangle$$
$$= \langle \phi_{n+1}, \Delta S_{n+1} \rangle$$
$$= \langle \phi_{n+1}, S_{n+1} \rangle - \langle \phi_{n+1}, S_n \rangle$$

$$\iff \langle \phi_{n+1}, S_n \rangle = V_n(\phi) + \langle \phi_{n+1}, S_{n+1} \rangle - V_{n+1}(\phi) = V_n(\phi) = \langle \phi_n, S_n \rangle.$$

1.34 Satz: In jeder beliebigen Handelsstrategie ϕ kann die Teilstrategie $\phi^0 = (\phi_0^0, \dots, \phi_T^0)$ in eindeutiger Weise so gewählt werden, dass die daraus entstehende Handelsstrategie ψ selbstfinanzierend ist mit $V_0(\psi) = V_0(\phi)$.

Beweis: Die Handelsstrategie ψ mit $\psi_n^j = \phi_n^j$, für $j = 1, \dots, T$ und

$$\psi_n^0 := V_0(\phi) + \tilde{G}_n(\phi) - \tilde{V}_n(\phi) + \phi_n^0,$$

für $n=0,\ldots,T$ leistet das Gewünschte. Offensichtlich ist $\psi_0=\phi_0$ und damit $V_0(\psi)=V_0(\phi)$, außerdem gilt:

- (a) ψ ist selbstfinanzierend.
- (b) ψ_n^0 ist vorhersagbar für $n = 0, \dots, T$.
- (c) ψ_n^0 ist eindeutig bestimmt für $n = 0, \dots, T$.

Zu (a). Für $n = 1, \ldots, T$ gilt:

$$\tilde{V}_{n}(\psi) = \psi_{n}^{0} + \sum_{j=1}^{d} \psi_{n}^{j} \tilde{S}_{n}^{j}
= V_{0}(\phi) + \tilde{G}_{n}(\phi) - \tilde{V}_{n}(\phi) + \phi_{n}^{0} + \sum_{j=1}^{d} \phi_{n}^{j} \tilde{S}_{n}^{j}
= V_{0}(\phi) + \tilde{G}_{n}(\phi)
= V_{0}(\psi) + \tilde{G}_{n}(\psi),$$

womit ψ nach Lemma 1.33 Teil e) selbstfinanzierend ist.

Zu (b). Für $n = 1, \ldots, T$ gilt

$$\psi_n^0 = V_0 + \sum_{\nu=1}^n \langle \phi_{\nu}, \Delta \tilde{S}_{\nu} \rangle - \langle \phi_n, \Delta \tilde{S}_n \rangle + \phi_n^0 = V_0 + \sum_{\nu=1}^{n-1} \langle \phi_{\nu}, \Delta \tilde{S}_{\nu} \rangle - \langle \phi_n, \tilde{S}_{n-1} \rangle + \phi_n^0.$$

 ψ_n^0 ist also als Funktion \mathcal{F}_{n-1} -messbarer Funktionen wieder \mathcal{F}_{n-1} -messbar und damit vorhersagbar.

Zu (c). Sei ψ eine selbstfinanzierende Handelsstrategie, die den Bedingungen des Satzes genügt, dann muss gelten:

$$\psi_n^0 = \tilde{V}_n(\psi) - \sum_{j=1}^d \psi_n^j \tilde{S}_n^j = V_0(\psi) + \tilde{G}_n(\psi) - \sum_{j=1}^d \phi_n^j \tilde{S}_n^j = V_0(\phi) + \tilde{G}_n(\phi) - \tilde{V}_n(\phi) + \phi_n^0.$$

Satz 1.34 besagt, dass bei gleichem Ausgangsportfolio zum Zeitpunkt n=0 statt mit beliebigen Handelsstrategien auch ohne wesentliche Einschränkung immer mit selbstfinanzierenden Handelsstrategien gehandelt werden kann. Die Selbstfinanzierbarkeit kann schon dadurch gewährleistet werden, dass nur die monetäre Komponente der Handelsstrategie abgeändert wird. Die Menge aller selbstfinanzierenden Handelsstrategien sei bezeichnet mit Φ_s .

1.35 Lemma: Die Menge aller selbstfinanzierenden Handelsstrategien Φ_s ist ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^{T \times d \times m}$.

Beweis: Nach Bemerkung 1.2 kann $\phi \in \Phi_s$ aufgefasst werden als Element aus $\mathbb{R}^{T \times d \times m}$. Offenbar ist $\phi \equiv 0$ eine selbstfinanzierende Handelsstrategie. Seien $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\phi, \phi' \in \Phi_s$ zwei beliebige voneinander verschiedene selbstfinanzierende Handelsstrategien. Dann folgt sofort $\phi + \phi' \in \mathbb{R}^{T \times d \times m}$ und $\lambda \phi \in \mathbb{R}^{T \times d \times m}$, denn es gilt für alle $n = 0, \ldots, T - 1$:

$$\langle \phi_{n+1} + \phi'_{n+1}, S_n \rangle = \langle \phi_{n+1}, S_n \rangle + \langle \phi'_{n+1}, S_n \rangle = \langle \phi_n, S_n \rangle + \langle \phi'_n, S_n \rangle = \langle \phi_n + \phi'_n, S_n \rangle$$

und

$$\langle \lambda \phi_{n+1}, S_n \rangle = \lambda \langle \phi_{n+1}, S_n \rangle = \lambda \langle \phi_n, S_n \rangle = \langle \lambda \phi_n, S_n \rangle.$$

1.5 Arbitrage und Vollständigkeit

Ein zentrales Ziel der Finanzmarkttheorie ist die Bewertung von Gütern, deren Wert nicht unmittelbar aus dem Gut selber hervorgeht. Insbesondere Finanzkontrakte, wie z.B. Derivate, besitzen diese Eigenschaft. In diesem Abschnitt werden grundsätzliche Schwierigkeiten besprochen, die sich bei einer Bewertung von Derivaten ergeben. Dabei wird in Beispielen gelegentlich auf eine spezielle Art von Derivaten, sog. europäischen Optionen, näher eingegangen. Da dieser Abschnitt allerdings nur die Grundlage für das zentrale Thema dieser Arbeit darstellt, wird auch nur die im Weiteren benötigte Theorie angeführt. Für eine ausführlichere Besprechung sei verwiesen auf [4], [12], [22], [24] oder [28], aus denen ein großer Teil der Aussagen dieses Abschnitts stammt. Eine ganz elementare Einführung gibt [1].

1.36 Definition: Ein Derivat bezeichnet ein Gut, dessen zukünftiger Wert von anderen Gütern, sog. Underlyings, abgeleitet wird. Gewöhnlich liegt dieses Gut in Form eines Finanzkontrakts vor, in dem die aus dem zukünftigen Wert der Underlyings abgeleiteten Pflichten oder Rechte festgelegt sind. In den meisten Fällen besitzt ein Derivat genau ein Underlying.

Populäre Beispiele für Derivate sind Optionen, sowie Futures und Forwards. Neben diesen existieren inzwischen eine Menge weiterer zum Teil recht exotischer Derivate. Im Folgenden werden ausschließlich Derivate betrachtet, die genau ein Underlying besitzen.

1.37 Definition: Eine Option bezeichnet das Recht, eine bestimmte Menge eines zugrunde liegenden Gutes zu einem im voraus festgesetzten Preis, genannt Ausübungspreis, zu kaufen (in diesem Fall wird die Option als Call-Option oder auch einfach Call bezeichnet) oder zu verkaufen (in diesem Fall wird die Option als Put-Option oder auch einfach Put bezeichnet). Darf das Recht innerhalb einer bestimmten Frist ausgeübt werden, spricht man von einer amerikanischen Option; ist die Ausübung des Rechts auf einen bestimmten Zeitpunkt beschränkt, liegt eine europäische Option vor. Der Zeitpunkt der Ausübung wird dann als Verfallstag bezeichnet. Der Besitzer einer Option wird auch Inhaber genannt; die Person, die verpflichtet ist, die Option einzulösen, wird auch Stillhalter genannt.

Die Ausübung der Option hängt aus mathematischer Sicht lediglich davon ab, wie sich der Preis des zugrunde liegenden Gutes entwickelt; im Fall einer Call-Option ist die Ausübung nur dann sinnvoll, wenn der Preis des zugrunde liegenden Gutes über dem vereinbarten Ausübungspreis liegt, so dass sich durch die entstehende Preisdifferenz ein Vorteil für den Inhaber der Option ergibt. Liegt der Preis des zugrunde liegenden Gutes dagegen unter dem vereinbarten Kaufpreis, wird die Option sinnvollerweise nicht ausgeübt werden, da das betreffende Gut in diesem Fall billiger direkt erworben werden kann. Entsprechendes gilt für die Put-Option. Aus unternehmenspolitischer Sicht sind natürlich auch andere Vorgehensweisen denkbar, die allerdings im Folgenden keine Rolle spielen sollen. Über die

europäischen und amerikanischen Optionen hinaus gibt es eine Reihe weiterer Optionsarten, deren Eigenschaften von unterschiedlichsten Gegebenheiten abhängt.

Derivate stellen Güter im gewöhnlichen Sinn dar und besitzen daher einen Preisvektor, wie in Abschnitt 1.4.1 eingeführt. Im Folgenden wird dieser im Fall einer Call-Option üblicherweise mit $C = (C_0, \ldots, C_T)$ bezeichnet, im Fall einer Put-Option üblicherweise mit $P = (P_0, \ldots, P_T)$.

1.38 Beispiel: In einem beliebigen diskreten Markt mit T Perioden sei C eine Call-Option mit Ausübungspreis X_C auf ein zugrunde liegendes Gut S und P eine Put-Option mit Ausübungspreis X_P auf dasselbe zugrunde liegende Gut. Der Ausübungszeitpunkt beider Optionen sei n = T. Dann ist der Call-Preis zur Zeit T gegeben durch

$$C_T = \max\{S_T - X_C, 0\},\$$

sowie der Put-Preis durch

$$P_T = \max\{X_P - S_T, 0\}.$$

Da Derivate vom zukünftigen Wert eines zugrunde liegenden Gutes abgeleitet sind, ist der Wert zu diesem zukünftigen Zeitpunkt zunächst der einzige bekannte Wert des Derivats. Generell sei der zukünftige Zeitpunkt, an dem der Wert eines Derivats feststeht, in den folgenden diskreten Marktmodellen der Zeitpunkt n=T. Die weiteren Überlegungen beruhen auf der Fragestellung, ob und wie von der Kenntnis des Preises zum Zeitpunkt n=T auf sinnvolle Preise zu den Zeitpunkten $n=0,\ldots,T-1$ geschlossen werden kann.

1.39 Definition: Eine Handelsstrategie ϕ heißt **zulässig**, wenn sie selbstfinanzierend ist und $V_n(\phi) \geq 0$ gilt, für $n = 0, \dots, T$.

Eine Handelsstrategie $\phi \in \Phi$ heißt **Arbitrage-Strategie**, wenn sie zulässig ist, $V_0(\phi) = 0$ und $P(V_T(\phi) > 0) > 0$.

Ein Markt heißt **arbitragefrei**, wenn keine Arbitrage-Strategie in Φ existiert.

Umgangssprachlich bedeutet der Begriff Arbitrage die Möglichkeit, in einem Markt mit positiver Wahrscheinlichkeit Geld zu verdienen, ohne anfänglich Geld investiert zu haben und ohne das Risiko, einen Verlust zu erzielen. Da ein Markt mit Arbitragemöglichkeiten in der Praxis nicht auf Dauer existieren kann, besteht ein wesentliches Interesse der Finanzmarkttheorie darin, die Arbitragefreiheit eines Marktes zu erhalten.

1.40 Beispiel: Gegeben sei der Markt aus den Abbildungen 1.4 und 1.5 mit $S_2^2(\omega_1) = 100$, $S_3^2(\omega_1) = 110$ und i = 2%. Unter Berücksichtigung von Bemerkung 1.2 ist folgende Strategie für diesen Markt eine Arbitragestrategie

$$\phi_0^j = \phi_1^j = \phi_2^j = \phi_3^1 = \phi_3^3 = (0, 0, 0, 0, 0), \quad j = 0, 1, 2, 3$$

$$\phi_3^2 = (1, 0, 0, 0, 0)$$

$$\phi_3^0 = (-100, 0, 0, 0, 0),$$

wobei die k-te Komponente des Vektors den Wert der Zufallsvariable für ω_k , k = 1, ..., 5 darstellt. ϕ ist selbstfinanzierend, denn es gilt $\langle \phi_n, S_n \rangle = 0 = \langle \phi_{n+1}, S_n \rangle$, für n = 0, 1 und

$$\langle \phi_2, S_2 \rangle = (0, 0, 0, 0, 0) = (100 - 100, 0, 0, 0, 0) = \phi_3^2 S_2^2 + \phi_3^0 S_2^0 = \langle \phi_3, S_2 \rangle.$$

Es gilt $V_0(\phi) = 0$ und wegen

$$\langle \phi_3, S_3 \rangle = \phi_3^2 S_3^2 + \phi_3^0 S_3^0 = (110 - 100, 0, 0, 0, 0)$$

ist ϕ zulässig mit $P(V_T(\phi) > 0) > 0$.

- **1.41 Definition:** Ein Claim zum Zeitpunkt T ist eine \mathcal{F}_T -messbare Zufallsvariable $H \geq 0$. Ein Claim H heißt **absicherbar** oder **replizierbar**, wenn es eine zulässige Handelsstrategie ϕ gibt mit $V_T(\phi) = H$. Ein Markt heißt **vollständig**, wenn jeder Claim absicherbar ist. Ein Markt heißt **unvollständig**, wenn er nicht vollständig ist, d.h. wenn mindestens ein Claim existiert, der nicht absicherbar ist.
- **1.42 Beispiel:** Die Werte C_T und P_T aus Beispiel 1.38 stellen Claims dar.

Ein Claim stellt gerade den Teil des Preisvektors eines Derivats dar, der aufgrund der Tatsache, dass das Derivat sich zu diesem Zeitpunkt von seinem Underlying ableitet, eindeutig bestimmbar ist. Die Forderung der Arbitragefreiheit hat wesentliche Auswirkungen auf die Bewertung von Claims, denn sie schränkt die Auswahl der zur Bewertung verfügbaren Preise unter Umständen erheblich ein. Satz 1.48 liefert eine grundlegende Aussage über die Arbitragefreiheit eines Marktes, mit deren Hilfe Claims so bewertet werden können, dass der Markt immer arbitragefrei bleibt. Um diese Aussage herzuleiten, werden zunächst die Strukturen diskreter Märkte mit Hilfe einiger Aussagen über Portfolios und Gewinne näher beleuchtet.

Als Funktionen \mathcal{F}_n -messbarer Zufallsvariablen sind Gewinn $G_n(\phi)$ und diskontierter Gewinn $\tilde{G}_n(\phi)$, sowie Portfoliowert $V_n(\phi)$ und diskontierter Portfoliowert $\tilde{V}_n(\phi)$ eines Marktes ebenfalls \mathcal{F}_n -messbar, für alle $n = 1, \ldots, T$ und $\phi \in \Phi$.

1.43 Lemma: P ist genau dann ein Maß, unter dem die diskontierten Preise $(\tilde{S}_0, \dots, \tilde{S}_T)$ ein Vektor-Martingal bilden, wenn für den erwarteten diskontierten Gewinn gilt:

$$E(\tilde{G}_T(\phi)) = 0, \ \forall \phi \in \Phi.$$

Beweis: Aufgrund der Vorhersagbarkeit der Handelsstrategien $\phi \in \Phi$ ist P nach Korollar 1.21 genau dann ein Maß, unter dem die diskontierten Preise $(\tilde{S}_0, \ldots, \tilde{S}_T)$ ein Vektor-Martingal bilden, wenn gilt:

$$E(\tilde{G}_T(\phi)) = E\left(\sum_{n=1}^T \langle \phi_n, \Delta \tilde{S}_n \rangle\right) = 0, \ \forall \phi \in \Phi.$$

1.44 Definition: Es seien die folgenden Bezeichnungen eingeführt:

$$\mathbb{G} := \{ \tilde{G}_T(\phi) : \phi \in \Phi_s \}$$
und
$$\mathbb{V} := \{ \tilde{V}_T(\phi) : \phi \in \Phi_s \}.$$

- **1.45 Lemma:** Es gilt:
 - a) \mathbb{G} und \mathbb{V} sind Untervektorräume des \mathbb{R}^m .
 - b) Es existiere ein Wahrscheinlichkeitsmaß P, unter dem die diskontierten Preise ein Martingal bilden. Wird der Raum der konstanten Zufallsvariablen nach Bemerkung 1.2 als dazu isomorpher Raum $\{(a, \ldots, a) \in \mathbb{R}^m\}$ aufgefasst, und dieser wiederum als dazu isomorpher Raum \mathbb{R} , so gilt

$$\mathbb{R} \oplus \mathbb{G} = \mathbb{V}$$
.

Beweis:

- a) Der Beweis verläuft für V und G völlig analog. Für V gilt:
 - i) $0 = \tilde{V}_T(0) \in \mathbb{V}$, da $0 \in \Phi_s$.
 - ii) Seien $\phi', \phi'' \in \Phi_s$ zwei beliebige voneinander verschiedene selbstfinanzierende Handelsstrategien. Dann ist wegen Lemma 1.35 auch $\phi' + \phi'' \in \Phi_s$, und es gilt für alle $n = 0, \ldots, T$:

$$\tilde{V}_T(\phi' + \phi'') = \langle \phi_T' + \phi_T'', \tilde{S}_T \rangle = \langle \phi_T', \tilde{S}_T \rangle + \langle \phi_T'', \tilde{S}_T \rangle = \tilde{V}_T(\phi') + \tilde{V}_T(\phi'').$$

iii) Seien $\phi \in \Phi_s$ eine beliebige selbstfinanzierende Handelsstrategie und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann ist wegen Lemma 1.35 auch $\lambda \phi \in \Phi_s$, und es gilt für alle $n = 0, \dots, T$:

$$\tilde{V}_T(\lambda \phi) = \langle \lambda \phi_T, \tilde{S}_T \rangle = \lambda \langle \phi_T, \tilde{S}_T \rangle = \lambda \tilde{V}_T(\phi).$$

b) Offenbar gilt wegen der \mathcal{F}_0 -Messbarkeit von $c \in \mathbb{R}$ als Zufallsvariable und Lemma 1.33, Teil e)

$$\mathbb{R} + \mathbb{G} = \{(c, \dots, c) + \tilde{G}_T(\phi) : c \in \mathbb{R}, \ \phi \in \Phi_s\} = \mathbb{V}.$$

Angenommen, es existiert $v \in \mathbb{R} \cap \mathbb{G}$, $v \neq 0$. Dann gibt es $\tilde{G}_T(\phi) \in \mathbb{G}$ mit $\tilde{G}_T(\phi) = v \in \mathbb{R}$, also ist $\tilde{G}_T(\phi)$ konstant. Damit ist $E(\tilde{G}_T) = v \neq 0$, im Widerspruch zu Lemma 1.43. Also ist $\mathbb{R} \cap \mathbb{G} = \phi$.

1.46 Definition: $\Gamma := \{X : \Omega \to \mathbb{R} \mid X \text{ ist Zufalls variable, } X \geq 0, \ \mathrm{E}(X) > 0\}$ bezeichne den konvexen Kegel der nichtnegativen reellwertigen Zufalls variablen ohne Null.

1.47 Lemma: Notwendig für die Arbitragefreiheit eines Marktes ist die Bedingung

$$\tilde{G}_T(\phi) \notin \Gamma$$
, für alle $\phi \in \Phi$.

Beweis: Der Markt sei arbitragefrei. Angenommen es ist $\tilde{G}_T(\phi) \in \Gamma$ für ein $\phi \in \Phi$. Der Anfangswert $V_0(\phi)$ ist für den Gewinn nicht von Bedeutung, ebenso wie der monetäre Teil der Handelsstrategie ϕ . Daher kann nach Satz 1.34 ϕ als selbstfinanzierend mit $V_0(\phi) = 0$ angenommen werden. Wegen $\tilde{G}_n(\phi) = \tilde{V}_n(\phi) - V_0(\phi) = \tilde{V}_n(\phi)$ kann nicht $\tilde{G}_n(\phi) \geq 0$ für alle $n = 0, \ldots, T-1$ gelten, da sonst ϕ zulässig wäre mit $\tilde{V}_T(\phi) = \tilde{G}_T(\phi) \neq 0$, nach Annahme, womit der Markt nicht mehr arbitragefrei wäre. Daher existiert

$$\nu := \max\{n \in \{0, \dots, T-1\} : P(\tilde{G}_n(\phi) < 0) > 0\}.$$

Sei die Handelsstrategie $\psi = (\psi_0, \dots, \psi_T)$ definiert durch

$$\psi_n := \begin{cases} \mathbf{1}_{A_{\nu}} \cdot \phi_n, & n > \nu \\ 0, & n \le \nu \end{cases} \text{ mit } A_{\nu} := \{ \tilde{G}_{\nu}(\phi) < 0 \}$$

 A_{ν} ist messbar bezüglich \mathcal{F}_{ν} , weil $\tilde{G}_{\nu}(\phi)$ nach Lemma 1.43 \mathcal{F}_{ν} -messbar ist, und ψ_n ist als Produkt \mathcal{F}_{n-1} -messbarer Funktionen \mathcal{F}_{n-1} -messbar, womit ψ vorhersagbar ist, also eine Handelsstrategie darstellt. Für $n=0,\ldots,T$ folgt damit:

$$\tilde{G}_{n}(\psi) = \sum_{j=1}^{n} \langle \psi_{j}, \Delta \tilde{S}_{j} \rangle
= \begin{cases}
\sum_{j=\nu+1}^{n} \langle \psi_{j}, \Delta \tilde{S}_{j} \rangle, & n > \nu \\
0, & n \leq \nu
\end{cases}
= \begin{cases}
\mathbf{1}_{A_{\nu}} \cdot \left(\tilde{G}_{n}(\phi) - \tilde{G}_{\nu}(\phi) \right) & n > \nu \\
0 & n \leq \nu
\end{cases} .$$

Für $n > \nu$ gilt $\tilde{G}_n(\phi) \geq 0$, aufgrund der Maximalität von ν . Weiter ist nach Definition $\tilde{G}_{\nu}(\phi) < 0$ auf A_{ν} , daher ist $\tilde{G}_n(\psi) \geq 0$, für alle $n = 0, \ldots, T$ und insbesondere $\tilde{G}_T(\psi) > 0$. Nach Satz 1.34 kann ψ selbstfinanzierend gemacht werden, ohne $\tilde{G}(\psi)$ oder $V_0(\psi)$ zu ändern. Daher gilt $\tilde{V}_n(\psi) = \tilde{V}_0(\psi) + \tilde{G}_n(\psi) \geq 0$ für $n = 0, \ldots, T$, d.h. ψ ist zulässig und $\tilde{V}_T(\psi) = \tilde{G}_T(\psi) > 0$. Damit ist ψ eine Arbitrage-Strategie, im Widerspruch zur Arbitragefreiheit des Marktes.

1.48 Satz: (Fundamentalsatz der Optionspreistheorie) Ein Markt ist genau dann arbitragefrei, wenn es ein zu P äquivalentes Maß Q gibt, unter dem die diskontierten Preise $(\tilde{S}_0, \ldots, \tilde{S}_T)$ ein Vektor-Martingal bilden. Q heißt dann zu P äquivalentes Martingalmaß, die zu Q gehörige Zähldichte heißt äquivalente Martingaldichte.

Beweis zu Satz 1.48: Sei Q ein zu P äquivalentes Martingalmaß. Sei weiter ϕ eine zulässige Handelsstrategie mit $V_0(\phi) = 0$. Dann gilt nach Lemma 1.43

$$E_{\mathcal{Q}}(\tilde{V}_T(\phi)) = E_{\mathcal{Q}}(V_0 + \tilde{G}_T(\phi)) = E_{\mathcal{Q}}(\tilde{G}_T(\phi)) = 0.$$

Da Q keine Nullmengen besitzt, folgt $\tilde{V}_T(\phi) \geq 0$, es kann also keine Arbitrage-Strategie im Markt existieren, d.h. der Markt ist arbitragefrei.

Sei nun der gegebene Markt arbitragefrei. Sei $K:=\{X\in\Gamma:\sum_{\omega\in\Omega}X(\omega)=1\}$. Offensichtlich ist K eine beschränkte, konvexe Hyperfläche in \mathbb{R}^{Ω} , deren Rand nach Definition von Γ auch in K enthalten ist. Als solche ist K eine kompakte Teilmenge von Γ und mit Lemma 1.47 gilt dann $K\cap\mathbb{G}=\phi$.

Nach Satz 1.23 existiert dann ein $\lambda \in \mathbb{R}^{\Omega}$ mit den Eigenschaften

$$\langle \lambda, X \rangle = \sum_{\omega \in \Omega} \lambda(\omega) X(\omega) > 0, \quad \forall X \in K$$
und
$$\langle \lambda, \tilde{G}_T(\phi) \rangle = \sum_{\omega \in \Omega} \lambda(\omega) \tilde{G}_T(\phi, \omega) = 0, \quad \forall \phi \in \Phi_s.$$

Bei Wahl von $X=\mathbf{1}_{\{\omega\}}\in K$ für ein beliebiges $\omega\in\Omega$, liefert die erste Eigenschaft:

$$\lambda(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} \lambda(\omega) X(\omega) > 0, \quad \forall \omega \in \Omega.$$

Q kann nun definiert werden durch

$$Q(\{\omega\}) := \frac{\lambda(\omega)}{\sum_{\eta \in \Omega} \lambda(\eta)}, \quad \omega \in \Omega.$$

Q ist offensichtlich ein Wahrscheinlichkeitsmaß und wegen $\lambda(\omega) > 0, \forall \omega \in \Omega$ auch zu Päquivalent. Außerdem gilt für Q mit der zweiten Eigenschaft für alle $\phi \in \Phi$

$$E_{Q}(\tilde{G}_{T}(\phi)) = \sum_{\omega \in \Omega} \tilde{G}_{T}(\phi, \omega) Q(\{\omega\}) = \frac{1}{\sum_{\eta \in \Omega} \lambda(\eta)} \sum_{\omega \in \omega} \lambda(\omega) \tilde{G}(\phi, \omega) = 0.$$

Mit Lemma 1.43 folgt, dass Q ein zu P äquivalentes Martingalmaß ist.

Der diskontierte Preis des monetären Gutes $(\tilde{S}_0^0,\dots,\tilde{S}_T^0)$ ist aufgrund seiner Konstanz immer ein Martingal. Daher braucht dieses Gut bei zukünftigen Untersuchungen der Martingaleigenschaft eines Marktes nicht berücksichtigt zu werden. Im Weiteren wird oft nur noch von äquivalenten Martingalmaßen die Rede sein, womit dann immer die Äquivalenz zu dem Wahrscheinlichkeitsmaß, dass dem Markt zugrunde liegt, gemeint ist. Da dieses nach Voraussetzung außer der leeren Menge keine Nullmengen besitzt, ist unter einem äquivalenten Martingalmaß im Allgemeinen ein Maß zu verstehen, unter dem die diskontierten Preise des zugrunde liegenden Marktes ein Martingal bilden, und das außer der leeren Menge keine Nullmengen besitzt.

1.49 Lemma: In einem arbitragefreien Markt ist ein Claim H bereits dann replizierbar, wenn es eine selbstfinanzierende Handelsstrategie ϕ gibt mit $V_T(\phi) = H$.

Beweis: Sei ϕ selbstfinanzierend mit $V_T(\phi) = H$. Unter dem nach Satz 1.48 existierenden zu P äquivalenten Martingalmaß Q ist $\tilde{V}(\phi)$ als Martingal-Transformation nach Korollar 1.19 ebenfalls ein Martingal, d.h. es ist $\tilde{V}_n(\phi) = \mathrm{E}_{\mathrm{Q}}(\tilde{V}_T(\phi) \mid \mathcal{F}_n)$, für $n = 0, \ldots, T$. Dann gilt auch für $n = 0, \ldots, T$:

$$V_n(\phi) = r^n \tilde{V}_n(\phi) = v^{-n} \operatorname{E}_{\mathbf{Q}}(\tilde{V}_T(\phi) \mid \mathcal{F}_n) = v^{T-n} \operatorname{E}_{\mathbf{Q}}(H \mid \mathcal{F}_n) \ge 0,$$

womit ϕ zulässig ist.

1.50 Definition: Für Zufallsvariablen X, Y auf (Ω, P) sei das folgende gewichtete Skalarprodukt definiert:

$$\langle X, Y \rangle_{\mathrm{P}} := \mathrm{E}_{\mathrm{P}}(X \cdot Y) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) Y(\omega) \, \mathrm{P}(\{\omega\}).$$

Es sei $X \perp_{P} Y$ definiert als X steht senkrecht auf Y bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_{P}$, d.h. $E_{P}(X \cdot Y) = 0$, und dann sei $\mathbb{V}^{\perp_{P}}$ definiert als der Raum aller auf \mathbb{V} bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_{P}$ senkrecht stehenden Vektoren.

- **1.51 Satz:** In einem arbitragefreien Markt sei P ein äquivalentes Martingalmaß. Dann sind folgende Aussagen äquivalent
 - a) Q ist ein äquivalentes Martingalmaß
 - b) Es existiert $X^{\perp_{\mathrm{P}}} \in \mathbb{V}^{\perp_{\mathrm{P}}}$, so dass für alle $\omega \in \Omega$ gilt

$$X^{\perp_{\mathrm{P}}}(\omega) > -1 \qquad \text{und} \qquad \mathrm{Q}(\{\omega\}) = (1 + X^{\perp_{\mathrm{P}}}(\omega)) \, \mathrm{P}(\{\omega\}).$$

Beweis: $a \Rightarrow b$: Sei Q ein äquivalentes Martingalmaß. Dann ist

$$X^{\perp_{\mathbf{P}}}(\omega) := \left(\frac{\mathbf{Q}(\{\omega\})}{\mathbf{P}(\{\omega\})} - 1\right)$$

die gesuchte Zufallsvariable. Offenbar ist $X^{\perp_{P}}(\omega) > -1$, für alle $\omega \in \Omega$ und erfüllt die geforderte Gleichung. Dann gilt nach Korollar 1.19 und Lemma 1.17 für alle $\tilde{V}_{T}(\phi) \in \mathbb{V}$

$$\langle \tilde{V}_{T}(\phi), X^{\perp_{P}} \rangle_{P} = \sum_{\omega \in \Omega} \tilde{V}(\phi, \omega) \left(\frac{Q(\{\omega\})}{P(\{\omega\})} - 1 \right) P(\{\omega\})$$

$$= \sum_{\omega \in \Omega} \tilde{V}_{T}(\phi, \omega) Q(\{\omega\}) - \tilde{V}_{T}(\phi, \omega) P(\{\omega\})$$

$$= E_{Q}(\tilde{V}_{T}(\phi)) - E_{P}(\tilde{V}_{T}(\phi))$$

$$= V_{0}(\phi) - V_{0}(\phi)$$

$$= 0,$$

und damit $X^{\perp_{\mathbf{P}}} \in \mathbb{V}^{\perp_{\mathbf{P}}}$.

 $b\Rightarrow a:$ Aus $X^{\perp_{\mathbf{P}}}(\omega)>-1$ folgt $\mathbf{Q}(\{\omega\})>0$, für alle $\omega\in\Omega$, und wegen $1\in\mathbb{V}$ und damit $\langle X^{\perp_{\mathbf{P}}},1\rangle_{\mathbf{P}}=0$ gilt

$$Q(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in \Omega} \left(P(\{\omega\}) + X^{\perp_P}(\omega) \cdot 1 \cdot P(\{\omega\}) \right) = 1 + \langle X^{\perp_P}, 1 \rangle_P = 1.$$

Q ist also ein Wahrscheinlichkeitsmaß und auch offensichtlich äquivalent zu P. Außerdem gilt wegen $\mathbb{G}\subseteq\mathbb{V}$ für beliebiges $\phi\in\Phi_s$

$$E_{\mathbf{Q}}(\tilde{G}_{T}(\phi,\omega)) = \sum_{\omega \in \Omega} \tilde{G}_{T}(\phi,\omega) \, \mathbf{Q}(\{\omega\})$$

$$= \sum_{\omega \in \Omega} \left(\tilde{G}_{T}(\phi,\omega) \, \mathbf{P}(\{\omega\}) + X^{\perp_{\mathbf{P}}}(\omega) \cdot \tilde{G}_{T}(\phi,\omega) \cdot \mathbf{P}(\{\omega\}) \right)$$

$$= E_{\mathbf{P}}(\tilde{G}_{T}(\phi)) + \langle X^{\perp_{\mathbf{P}}}, G_{T}(\phi,\omega) \rangle_{\mathbf{P}}$$

$$= 0$$

nach Lemma 1.43, wonach nun Q auch ein äquivalentes Martingalmaß ist.

1.52 Korollar: In einem arbitragefreien Markt ist ein Claim H genau dann replizierbar, wenn $E_P(H)$ für alle äquivalenten Martingalmaße P identisch ist.

Beweis: Für replizierbare Claims H gilt für zwei beliebige äquivalente Martingalmaße P und Q nach Korollar 1.19 und Lemma 1.17

$$E_{\mathcal{P}}(H) = r^T E_{\mathcal{P}}(\tilde{V}_T(\phi)) = r^T V_0(\phi) = r^T E_{\mathcal{Q}}(\tilde{V}_T(\phi)) = E_{\mathcal{Q}}(H).$$

Sei P ein äquivalentes Martingalmaß und H ein nicht replizierbarer Claim, dann gilt $v^T H \notin \mathbb{V}$ und daher $\mathbb{V} \neq \mathbb{R}^{\Omega}$. Aufgrund der Vektorraumeigenschaft von \mathbb{V} ist dim $\mathbb{V}^{\perp_P} \geq 1$. Daher existiert ein $X^{\perp_P} \in \mathbb{V}^{\perp_P} \setminus \{0\}$ mit $X^{\perp_P}(\omega) > -1$, für alle $\omega \in \Omega$, und damit nach Satz 1.51 ein weiteres nach Konstruktion von P verschiedenes äquivalentes Martingalmaß Q mit $\mathbb{Q}(\{\omega\}) = (1 + X^{\perp_P}(\omega)) \, \mathbb{P}(\{\omega\})$ und

$$E_{\mathbf{Q}}(H) = \sum_{\omega \in \Omega} H(\omega)(1 + X^{\perp_{\mathbf{P}}}(\omega)) P(\{\omega\}) = E_{\mathbf{P}}(H) + r^T \langle v^T H, X^{\perp_{\mathbf{P}}} \rangle_{\mathbf{P}} \neq E_{\mathbf{P}}(H).$$

1.53 Satz: Ein arbitragefreier Markt ist genau dann vollständig, wenn es ein eindeutig bestimmtes äquivalentes Martingalmaß gibt.

Beweis: Gegeben sei ein vollständiger arbitragefreier Markt, darin sei H ein replizierbarer Claim und ϕ eine Handelsstrategie, die H repliziert. Seien P_1 und P_2 zwei äquivalente

Martingalmaße. Korollar 1.52 besagt, dass $E_1(H) = E_2(H)$. Aufgrund der Vollständigkeit des Marktes ist jeder Claim H replizierbar, also insbesondere $H = \mathbf{1}_A$, $A \in \mathcal{F}_T$. Damit ergibt sich $P_1(A) = E_1(\mathbf{1}_A) = E_2(\mathbf{1}_A) = P_2(A)$, $\forall A \in \mathcal{F}_T$, also $P_1 = P_2$, womit gezeigt ist, dass genau ein einziges äquivalentes Martingalmaß existiert.

In einem unvollständigen arbitragefreien Markt existieren nicht replizierbare Claims. Daher ist dim $(\mathbb{V}^{\perp_P}) \geq 1$, es existiert also ein $X^{\perp_P} \in \mathbb{V}^{\perp_P} \setminus \{0\}$, so dass nach Satz 1.51 zu einem äquivalenten Martingalmaß P ein weiteres nach Konstruktion von P verschiedenes äquivalentes Martingalmaß existiert. Aufgrund der Vektorraumeigenschaft von \mathbb{V}^{\perp_P} existieren dann sogar unendlich viele von P verschiedene äquivalente Martingalmaße.

Mit diesem Satz ist nun ersichtlich, dass eine sinnvolle, d.h. arbitragefreie Bewertung von Derivaten zu jedem Zeitpunkt $n=0,\ldots,T$ in eindeutiger Weise vorgenommen werden kann, sofern ein Markt vollständig ist. Gleichzeitig folgt, dass im unvollständigen Markt für gewisse Derivate (unendlich) viele arbitragefreie Preise möglich sind. Letzteres wird im kommenden Abschnitt näher untersucht. Das folgende Korollar beschreibt konkret, wie die Bewertung von Derivaten vorgenommen werden muss.

1.54 Korollar: In einem arbitragefreien Markt sei P ein äquivalentes Martingalmaß und D_T der Preis eines Derivats D zum Zeitpunkt n = T. Dann ist D_T ein Claim. Sei $\phi = (\phi_0, \ldots, \phi_T)$ eine Handelsstrategie, die D_T repliziert, d.h. mit $V_T(\phi) = D_T$. Dann ist der arbitragefreie Preis des Derivats D eindeutig bestimmt durch

$$D_n = v^{T-n} \operatorname{E}_{\mathbf{P}}(D_T | \mathfrak{F}_n) = V_n(\phi), \quad n = 0, \dots, T.$$

Ist der Markt zusätzlich vollständig, so existiert für jeden Claim zu jedem Zeitpunkt ein eindeutiger Preis.

Beweis: Um die Arbitragefreiheit des Marktes zu erhalten, muss die Martingaleigenschaft auch für den Preis D des Derivats gelten, also

$$v^{T-n} E_{P}(D_{T} | \mathcal{F}_{n}) = v^{-n} E_{P}(\tilde{D}_{T} | \mathcal{F}_{n}) = r^{n} \tilde{D}_{n} = D_{n}, \quad n = 0, \dots, T.$$

Nach Korollar 1.19 ist $\tilde{V}(\phi)$ wegen der Selbstfinanzierbarkeit von ϕ Vektor-Martingal-Transformation und weil ϕ den Claim D_T repliziert, gilt:

$$v^{T-n} \operatorname{E}_{P}(D_{T} \mid \mathcal{F}_{n}) = v^{-n} \operatorname{E}_{P}(\tilde{V}_{T}(\phi) \mid \mathcal{F}_{n}) = r^{n} \tilde{V}_{n}(\phi) = V_{n}(\phi), \quad n = 0, \dots, T.$$

Existiert eine weitere Strategie ψ , die D_T repliziert, so gilt $V_T(\phi) = V_T(\psi)$, und damit für $n = 0, \ldots, T$

$$V_n(\phi) = v^{T-n} \, \mathcal{E}_{\mathcal{P}}(V_T(\phi) \, | \, \mathcal{F}_n) = v^{T-n} \, \mathcal{E}_{\mathcal{P}}(V_T(\psi) \, | \, \mathcal{F}_n) = V_n(\psi),$$

sowie im Fall der Existenz eines weiteren äquivalenten Martingalmaßes Q

$$v^{T-n} \operatorname{E}_{\mathbf{Q}}(D_T \mid \mathfrak{F}_n) = v^{T-n} \operatorname{E}_{\mathbf{Q}}(V_T(\phi) \mid \mathfrak{F}_n) = V_n(\phi) = v^{T-n} \operatorname{E}_{\mathbf{P}}(D_T \mid \mathfrak{F}_n),$$

daher ist der arbitragefreie Preis eines replizierbaren Claims eindeutig bestimmt. Da im vollständigen Markt nach Satz 1.53 jeder Claim replizierbar ist, besitzt dort jeder Claim einen eindeutigen Preis. \Box

Das folgende Beispiel zeigt die Preisberechnung im einfachsten sinnvollen Markt, dem Zwei-Stufen-Ein-Perioden-Markt. Die Grundidee dieses Beispiels verwendet [9], um daran die elementaren Prinzipien diskreter Finanzmärkte zu erläutern. Dies zeigt, dass schon dieser einfachste Markt die wesentlichen Eigenschaften diskreter Finanzmärkte besitzt. Sogar die Bewertung unvollständiger Märkte lässt sich zurückführen auf diesen einfachen Fall, wie später in Abschnitt 2.4 gezeigt wird.

1.55 Beispiel: Gegeben sei ein Zwei-Stufen-Ein-Perioden-Markt wie in Beispiel 1.29 mit einem Risikogut S, d.h. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, T = 1 und d = 1. Sei außerdem $\sigma_1 := \sigma_1^1(\omega_1)$ und $\sigma_2 := \sigma_1^1(\omega_2)$. Sei P ein äquivalentes Martingalmaß auf Ω mit $p_k := P(\{\omega_k\})$, k = 1, 2, so

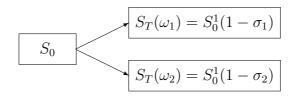


Abbildung 1.9: Zwei-Stufen-Ein-Perioden-Markt mit einem Risikogut

muss gelten

$$E_P(S_T) = p_1 S_T(\omega_1) + p_2 S_T(\omega_2) = r S_0$$

 $p_1 + p_2 = 1.$

Das einzige Maß, das diese Bedingungen erfüllt, ist gegeben durch

$$p_1 = \frac{rS_0 - S_T(\omega_2)}{S_T(\omega_1) - S_T(\omega_2)} = \frac{i - \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2} \quad und \quad p_2 = \frac{S_T(\omega_1) - rS_0}{S_T(\omega_1) - S_T(\omega_2)} = \frac{\sigma_1 - i}{\sigma_1 - \sigma_2},$$

falls $\sigma_1 > i > \sigma_2$, also ist der Markt nach Satz 1.53 in diesem Fall vollständig und andernfalls nicht arbitragefrei. Sei C eine europäische Call-Option und P eine europäische Put-Option jeweils mit Ausübungspreis $X \in (S_T(\omega_1), S_T(\omega_2))$, dann besitzen diese Optionen nach Korollar 1.54 einen eindeutig bestimmten arbitragefreien Preis

$$C_0 = \mathcal{E}_{\mathcal{P}}(vC_T) = p_1 v(S_T(\omega_1) - X) + p_2 v \cdot 0 = v(S_T(\omega_1) - X) \frac{i - \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2},$$

sowie

$$P_0 = E_P(vP_T) = p_1 v \cdot 0 + p_2 v(X - S_T(\omega_2)) = v(X - S_T(\omega_2)) \frac{\sigma_1 - i}{\sigma_1 - \sigma_2}.$$

Zwei Zahlenbeispiele, deren Ergebnisse in Beispiel 2.21 weiter verwendet werden, seien hier noch angeführt. Der Fall $S_0=10,~X=10,~\sigma_1=\frac{6}{10},~\sigma_2=-\frac{4}{10},~i=\frac{1}{10}$ liefert den Call-Preis

$$C_0 = \frac{10}{11}(16 - 10)\frac{\frac{1}{10} - (-\frac{4}{10})}{\frac{6}{10} - (-\frac{4}{10})} = \frac{30}{11} = 2,\overline{72}.$$

Der Fall $S_0=10,~X=10,~\sigma_1=\frac{11}{10},~\sigma_2=-\frac{4}{10},~i=\frac{1}{10}$ liefert den Call-Preis

$$C_0 = \frac{10}{11}(21 - 10)\frac{\frac{1}{10} - (-\frac{4}{10})}{\frac{11}{10} - (-\frac{4}{10})} = \frac{10}{3} = 3, \overline{3}.$$

Ausführlicher behandelt wird dieses Beispiel in [38], Abschnitt 4.3.1.

Die folgende Gleichung findet sich auch in [38], Abschnitt 4.3.

1.56 Lemma: In einem beliebigen arbitragefreien Markt mit T Perioden seien eine Put-Option P und eine Call-Option C mit gleichem Ausübungspreis X gegeben. Für jedes äquivalente Martingalmaß Q existiert dann jeweils eine arbitragefreie Bewertung $P_n(Q) = v^{T-n} E_Q(P_T | \mathcal{F}_n)$ und $C_n(Q) = v^{T-n} E_Q(P_T | \mathcal{F}_n)$, $n = 0, \ldots, T$, und für diese gilt die folgende **Put-Call-Parity-Relation**

$$C_n(\mathbf{Q}) - P_n(\mathbf{Q}) = S_n - v^{T-n}X.$$

Beweis: Nach Beispiel 1.38 gilt

$$C_T - P_T = \max\{S_T - X, 0\} - \max\{X - S_T, 0\} = S_T - X.$$

Nach Satz 1.48 existiert im arbitragefreien Markt immer ein äquivalentes Martingalmaß Q, für das dann nach Korollar 1.54 folgt

$$C_n(\mathbf{Q}) = v^{T-n} \, \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}(C_T \, | \, \mathfrak{F}_n) = v^{T-n} \, \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}(P_T + S_T - X \, | \, \mathfrak{F}_n) = P_n(\mathbf{Q}) + S_n - v^{T-n} X.$$

Die folgende Übersicht stellt noch einmal in komprimierter Form die Zusammenhänge von Replizierbarkeit, Existenz und Eindeutigkeit äquivalenter Martingalmaße und Arbitragefreiheit und Vollständigkeit diskreter Märkte dar.

- Der Markt ermöglicht Arbitrage: in diesem Fall existieren keine äquivalenten Martingalmaße. Es existieren replizierbare Claims, deren replizierende Handelsstrategien unterschiedliche Portfolios erzeugen.
- Der Markt ist arbitragefrei und vollständig: in diesem Fall existiert genau ein äquivalentes Martingalmaß. Jeder Claim ist replizierbar und jede replizierende Handelsstrategie desselben Claims erzeugt dasselbe Portfolio.

• Der Markt ist arbitragefrei und unvollständig: in diesem Fall existieren mehrere, wie sich im Folgenden noch herausstellt sogar unendlich viele, äquivalente Martingalmaße. Nicht jeder Claim ist replizierbar, aber die replizierenden Handelsstrategien desselben replizierbaren Claims erzeugen dasselbe Portfolio.

Natürlich existiert prinzipiell auch in Märkten mit Arbitragemöglichkeiten die Unterscheidung zwischen Vollständigkeit und Unvollständigkeit. Da jedoch Märkte mit Arbitragemöglichkeiten hier nicht von Interesse sind, wird diese Unterscheidung nicht vorgenommen.

Kapitel 2

Unvollständige Märkte

2.1 Einleitung

Ein wesentliches Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Untersuchung der Bewertungsmöglichkeiten von Derivaten in unvollständigen arbitragefreien Märkten. Im letzten Abschnitt des vorigen Kapitels wurde die Feststellung getroffen, dass in solchen Märkten eine arbitragefreie Bewertung prinzipiell möglich ist, jedoch nicht für alle denkbaren Derivate eindeutig vorgenommen werden kann. Nach Korollar 1.54 lassen sich replizierbare Claims auch in unvollständigen Märkten eindeutig bewerten. Problematisch ist daher in unvollständigen Märkten lediglich die Bewertung nicht replizierbarer Claims.

Untersucht wird zunächst welche Möglichkeiten sich bieten, die Menge der arbitragefreien Preise von nicht eindeutig zu bewertenden Derivaten zu ermitteln. Dazu wird in Abschnitt 2.2 die Struktur von äquivalenten Martingalmaßen untersucht, was zu einer Darstellung der Menge der äquivalenten Martingalmaße führt. Dabei ergibt sich ein Kriterium, das in den meisten Märkten eine schnelle Überprüfung der Unvollständigkeit anhand der Modellparameter ohne weitere Rechnung zulässt. In Abschnitt 2.3 wird die Struktur von Mehr-Perioden-Märkten näher betrachtet und eine Zerlegung in Ein-Perioden-Märkte vorgenommen. Damit kann dann in Abschnitt 2.4 direkt die Menge der zur Verfügung stehenden arbitragefreien Preise für Optionen im Ein-Perioden-Markt und unter gewissen Voraussetzungen auch ein obere Grenze der Preise im Mehr-Perioden-Markt berechnet werden. Da die Unvollständigkeit arbitragefreier Märkte erst durch die Existenz nicht replizierbarer Claims oder äquivalent nach Satz 1.53 durch die Existenz mehrerer äquivalenter Martingalmaße gegeben ist, wird in Abschnitt 2.5 untersucht, welche Aussagen zur Replizierbarkeit von Claims getroffen werden können. Dies führt zum Zusammenhang zwischen der Bewertung von Claims durch Replizierbarkeitsbedingungen und durch Martingalbedingungen. Schließlich zeigt noch Abschnitt 2.6 die Schwierigkeiten bei der Vervollständigung unvollständiger Märkte durch Hinzunahme weiterer Güter in den Markt auf.

2.2 Äquivalente Martingalmaße

Die in Abschnitt 1.5 getroffenen Aussagen über äquivalente Martingalmaße stellen bis auf Satz 1.51 lediglich Existenzaussagen dar, die zur konkreten Bestimmung und Untersuchung äquivalenter Martingalmaße ungeeignet sind. Daher ist zunächst die Frage zu beantworten, wie äquivalente Martingalmaße überhaupt bestimmt werden können. Drei Ansätze ergeben sich aus den bisher gefundenen Ergebnissen.

- 1. Nach Definition des Martingals müssen zur Bestimmung aller äquivalenten Martingalmaße alle Wahrscheinlichkeitsmaße P gefunden werden, die der Bedingungen $E_P(\tilde{S}_n^j | \mathcal{F}_{n-1}) = \tilde{S}_{n-1}^j$, für alle $j = 1, \ldots, d$, $n = 1, \ldots, T$ genügen, und die keine nichttrivialen Nullmengen besitzen. Dies führt zu einer Reihe von linearen Gleichungssystemen, die im Verlauf dieses Abschnitts ausführlicher betrachtet werden.
- 2. Eine weitere Möglichkeit eröffnet Satz 1.20. Danach sind die äquivalenten Martingalmaße alle diejenigen Maße P, für die gilt $E_P(\tilde{G}_T(\phi)) = 0$, für alle $\phi \in \Phi$. Unter Berücksichtigung von Bemerkung 1.2 sind das alle Vektoren $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{\Omega}_+$ der Länge 1, die bezüglich des euklidischen Skalarprodukts auf $\tilde{G}_T(\phi)$ senkrecht stehen. Da jedoch die Forderung $E_P(\tilde{G}_T(\phi)) = 0$, für alle $\phi \in \Phi$ insbesondere die Gleichungen aus 1. enthält, ist dieser Ansatz zur Bestimmung der äquivalenten Martingalmaße ineffizienter als die vorige. Beispiel 2.12 geht hierauf ein.
- 3. Mit Satz 1.53 ist bereits eine Methode bekannt, die bei Kenntnis eines äquivalenten Martingalmaßes und der Menge V alle weiteren äquivalenten Martingalmaße konstruiert, wie im Beweis von Satz 1.53 angegeben. Aufgrund der Voraussetzungen erweist sich jedoch auch dieser Ansatz als ineffizient gegenüber dem ersten Ansatz. Abgesehen davon, dass eine weitere Methode zur Bestimmung eines Martingalmaßes herangezogen werden muss, durch die unter Umständen bereits auch alle weiteren Maße bekannt sind, ist auch die Bestimmung der Menge V, die nichts anderes als die Menge aller replizierbaren Claims darstellt, mit einem Aufwand verbunden, der nicht geringer ist, als die Lösung der linearen Gleichungssysteme unter 1. Hinzu kommt dann noch der Aufwand zur Bestimmung von V[⊥]P.

Die Prüfung der Martingaleigenschaft, wie im ersten Ansatz angegeben, ist also hier die günstigste Möglichkeit zur Bestimmung der äquivalenten Martingalmaße. Im Folgenden wird ein Weg dargestellt, über den die äquivalenten Martingalmaße unter Kenntnis der Modellparameter mit Hilfe der Martingalbedingung berechnet werden können.

Gegeben sei ein ganz allgemeiner diskreter Markt mit T Perioden und d+1 Gütern, die zu Preisen (S^0,\ldots,S^d) gehandelt werden können. Dem zugrunde liege ein minimaler Wahrscheinlichkeitsraum (Ω,P) mit $|\Omega|=:m$ und eine Filtration \mathcal{F} . Der risikolose Zinssatz sei wie üblich bezeichnet mit i.

- **2.1 Definition:** Es sei \mathbb{P} die Menge aller äquivalenten Martingalmaße eines diskreten arbitragefreien Marktes. Es sei $\overline{\mathbb{P}}$ die Menge aller (nicht notwendig äquivalenten) Martingalmaße eines diskreten arbitragefreien Marktes.
- **2.2 Lemma:** Die Menge $\overline{\mathbb{P}}$ ist unter Berücksichtigung von Bemerkung 1.2 bezüglich der Topologie des Raums \mathbb{R}^A abgeschlossen.

Beweis: Aufgrund von Lemma 1.43 gilt

$$\overline{\mathbb{P}} = \{ P \text{ Wahrscheinlichkeitsmaß } \mid E_P(\tilde{G}_T(\phi)) = 0, \ \forall \phi \in \Phi_s \}.$$

Sei $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $\overline{\mathbb{P}}$ mit Grenzwert P_0 . Dann gilt aufgrund der Endlichkeit von Ω und der Beschränktheit von $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$0 = \lim_{n \to \infty} E_{P_n}(\tilde{G}_T(\phi)) = E_{P_0}(\tilde{G}_T(\phi)), \quad \forall \, \phi \in \Phi_s,$$

weshalb $P_0 \in \overline{\mathbb{P}}$, also $\overline{\mathbb{P}}$ abgeschlossen ist.

Nach Satz 1.48 sind die äquivalenten Martingalmaße alle diejenigen echt positiven Wahrscheinlichkeitsmaße, für die gilt

$$E(\tilde{S}_n^j | \mathcal{F}_{n-1}) = \tilde{S}_{n-1}^j, \ j = 1, \dots, d, \ n = 1, \dots, T.$$

Um die nachfolgenden Überlegungen übersichtlicher zu gestalten, werden zunächst hierzu äquivalente Bedingungen aufgestellt.

2.3 Lemma: Sei $\tau_n^j := \sigma_n^j - i$, j = 1, ..., d, n = 1, ..., T. Für jedes $n \in \{1, ..., T\}$ sind die Bedingungen

$$E(\tilde{S}_{n}^{j} | \mathcal{F}_{n-1}) = \tilde{S}_{n-1}^{j}, \quad j = 1, \dots, d$$

äquivalent zu den Bedingungen

$$E(\tau_n^j \mid \mathcal{F}_{n-1}) = 0, \quad j = 1, \dots, d.$$

Beweis: Da nach Modellvoraussetzung $S_{n-1}^j \neq 0$ ist, gilt für beliebiges $n \in \{1, \dots, T\}$ und $j \in \{1, \dots, d\}$:

$$E(\tilde{S}_{n}^{j} | \mathfrak{F}_{n-1}) = \tilde{S}_{n-1}^{j}$$

$$\iff E(v^{n}(1 + \sigma_{n}^{j})S_{n-1}^{j} | \mathfrak{F}_{n-1}) = \tilde{S}_{n-1}^{j}$$

$$\iff v\tilde{S}_{n-1}^{j} E(1 + \sigma_{n}^{j} | \mathfrak{F}_{n-1}) = \tilde{S}_{n-1}^{j}$$

$$\iff 1 + E(\sigma_{n}^{j} | \mathfrak{F}_{n-1}) = r$$

$$\iff E(\sigma_{n}^{j} | \mathfrak{F}_{n-1}) = i$$

$$\iff E(\tau_{n}^{j} | \mathfrak{F}_{n-1}) = 0.$$

Der Parameter τ_n^j kann verstanden werden als zufälliger "realer" Gewinnfaktor pro Periode beim Kauf eines Gutes. Es gilt nämlich $\tau_n^j S_n^j = (\sigma_n^j - i) S_n^j = ((1 + \sigma_n^j) - (1 + i)) S_n^j = S_{n+1}^j - r S_n^j$, das Produkt $\tau_n^j S_n^j$ gibt also die Differenz zwischen einer Anlage am Aktienmarkt und der Anlage am Geldmarkt für eine Aktie in der folgenden Periode an.

Es sei noch einmal erwähnt, dass für alle betrachteten Maße aufgrund der Voraussetung der Äquivalenz gilt P(A) > 0, für alle $A \subseteq \Omega$, so dass eine Division durch P(A) grundsätzlich definiert ist. Im folgenden Lemma 2.4 werden die exakten Bedingungen aufgelistet, die ein Vektor $(\mathbf{P}(\{\omega_1\}), \ldots, \mathbf{P}(\{\omega_m\}))$ erfüllen muss, um unter Berücksichtigung von Bemerkung 1.2 ein äquivalentes Martingalmaß darzustellen. Um den Zusammenhang zwischen den Komponenten des Vektors und der 1. Forderung des Lemmas 2.4 deutlicher hervorzuheben, wird die Notation noch ein wenig verfeinert. Für ein Atom A von \mathcal{F}_n sei definiert $\sigma_n^j(A) := \sigma_n^j(\omega)$, für beliebiges $\omega \in A$. Da $\sigma_n^j(\omega)$ wegen seiner \mathcal{F}_n -Messbarkeit für alle $\omega \in A$ denselben Wert annimmt, ist $\sigma_n^j(A)$ wohldefiniert. Sei $\tau_n^j(A) := \sigma_n^j(A) - i$. Weiterhin seien

- \mathcal{A}_n das Atomsystem von \mathcal{F}_n , $n = 0, \dots, T$
- $m_n := |\mathcal{A}_n|, n = 0, \dots, T$
- $A_1^n, \ldots, A_{m_n}^n$ die Atome von \mathcal{F}_n , d.h. die Elemente von \mathcal{A}_n , $n = 0, \ldots, T$
- $B_1^{n,k}, \ldots, B_l^{n,k}$ die Atome von \mathcal{F}_n , in die sich nach Lemma 1.9, Teil b) jedes Atom A_k^{n-1} , $n=1,\ldots,T$, $k=1,\ldots,m_{n-1}$ zerlegen lässt. Dabei ist l=l(n,k) die Anzahl der Atome der Zerlegung.

Abbildung 2.1 veranschaulicht, wie sich die Indizes der Atome verhalten.

n = 0	$\Omega = A_1^0$		
n = 1	$A_1^1 = B_1^{1,1}$	$A_2^1 = B_2^{1,1}$	$A_3^1 = A_{m_1}^1 = B_3^{1,1}$
n = 2	$A_1^2 = B_1^{2,1} A_2^2 = B_2^{2,1}$	$A_3^2 = B_1^{2,2} A_4^2 = B_2^{2,2} A_5^2 = B_3^{2,2}$	$A_6^2 = B_1^{2,3} A_{m_2}^2 = B_2^{2,3}$
	•	:	

Abbildung 2.1: Indizierung der Atome in den σ -Algebren \mathfrak{F}_n , $n=0,1,2,\ldots$ eines Marktes

2.4 Lemma: Unter Berücksichtigung von Bemerkung 1.2 ist die Menge aller äquivalenten Martingalmaße gegeben durch die Menge aller Vektoren $(\mathbf{P}(\{\omega_1\}), \ldots, \mathbf{P}(\{\omega_m\})) \in \mathbb{R}^m$, für die gilt:

1.
$$\sum_{k=1}^{m_n-1} \frac{\sum\limits_{\omega \in A_k^{n-1}} \tau_n^j(\omega) \mathbf{P}(\{\omega\})}{\mathbf{P}(A_k^{n-1})} \mathbf{1}_{A_k^{n-1}} = 0, \ j = 1, \dots, d, \ n = 1, \dots, T$$

2.
$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(\{\omega_k\}) = 1$$

3.
$$\mathbf{P}(\{\omega_k\}) > 0, \ k = 1, \dots, m.$$

Beweis: Die zweite und dritte Forderung legen fest, dass P nach Bemerkung 1.2 ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist, das keine nichttrivialen Nullmengen besitzt. Die 1. Forderung sichert nach Lemma 2.3 die formale Martingaleigenschaft von P wegen

$$\mathbb{E}_{\mathbf{P}}(\tau_n^j \mid \mathfrak{F}_{n-1}) = \sum_{k=1}^m \frac{\sum_{\omega \in A_k} \tau_n^j(\omega) \, \mathbf{P}(\{\omega\})}{\mathbf{P}(A_k)} \mathbf{1}_{A_k}.$$

Damit lässt sich die Bestimmung der äquivalenten Martingalmaße unter Verwendung des folgenden Satzes durchführen.

2.5 Satz: In einem beliebigen diskreten Markt sei \mathbb{L}_k^{n-1} für $k=1,\ldots,m_{n-1}$ und $n=1,\ldots,T$ die Menge der Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \tau_n^1(B_1^{n,k}) & \cdots & \tau_n^1(B_l^{n,k}) \\ \vdots & & \vdots \\ \tau_n^d(B_1^{n,k}) & \cdots & \tau_n^d(B_l^{n,k}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}(B_1^{n,k} \mid A_k^{n-1}) \\ & \cdot \\ & \cdot \\ & \cdot \\ & \mathbf{P}(B_l^{n,k} \mid A_k^{n-1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei hier die Ausdrücke $\mathbf{P}(B_{\nu}^{n,k} \mid A_k^{n-1})$ zunächst ganz formal als Unbekannte betrachtet werden (d.h. nicht notwendig schon als bedingte Wahrscheinlichkeiten). Mit jeweils einer positiven Lösung aus \mathbb{L}_k^{n-1} , für alle $k=1,\ldots,m_{n-1}$ und $n=1,\ldots,T$ ist dann durch ihre Komponenten genau ein Wert für alle $\mathbf{P}(A_{\omega}^n \mid A_{\omega}^{n-1})$, $\omega \in \Omega$ vorgegeben und damit sind unter Berücksichtigung von Bemerkung 1.2 das Maß \mathbf{P} mit

$$\mathbf{P}(\omega) = \prod_{n=1}^{T} \mathbf{P}(A_{\omega}^{n} | A_{\omega}^{n-1}), \ \forall \, \omega \in \Omega$$

ein äquivalentes Martingalmaß und $\mathbf{P}(B_{\nu}^{n,k} | A_k^{n-1})$, für $\nu = 1, \ldots, l, k = 1, \ldots, m_{n-1}$ und $n = 1, \ldots, T$ tatsächlich die entsprechenden bedingte Wahrscheinlichkeiten. Die Menge der äquivalenten Martingalmaße \mathbb{P} enthält genau alle derartig berechenbaren Maße.

Die Anzahl der Spalten jeder Matrix des Gleichungssystems aus Satz 2.5 ergibt sich aus der Anzahl der Atome l(n,k), in die $A_k^{n-1} \in \mathcal{F}_{n-1}$ beim Übergang nach \mathcal{F}_n zerfällt, die Anzahl der Zeilen der Matrix ist d+1. Insgesamt sind $\sum_{n=0}^{T-1} m_n$ lineare Gleichungssysteme zu lösen. Jede dieser Lösungen besitzt dann zwar die formale Martingaleigenschaft $\sum_{\omega \in \mathcal{A}^n} \mathbf{P}(\{\omega\}) S_n^j(\omega)|_{A^n} = r S_{n-1}^j|_{A^n}$, für $j=0,\ldots,d,\,n=1,\ldots,T$, ist jedoch nicht notwendig eine Wahrscheinlichkeit, da auch negative Lösungen möglich sind. Jedes Produkt mit Komponenten entsprechender positiver Lösungen aus jeweils einer Lösungsmenge dieser linearen Gleichungssysteme liefert aber ein äquivalentes Martingalmaß.

Beweis: Es wird gezeigt, dass die Forderungen 1.-3. aus Lemma 2.4 äquivalent zu den Forderungen des Satzes sind. Sei für $m := |\Omega|$ zunächst $(\mathbf{P}(\{\omega_1\}), \dots, \mathbf{P}(\{\omega_m\})) \in \mathbb{R}^m$ beliebig (d.h. nicht notwendig ein Wahrscheinlichkeitsmaß nach Bemerkung 1.2) und sei $\mathbf{P}(A) := \sum_{\omega \in A} \mathbf{P}(\{\omega\})$, für alle $A \subseteq \Omega$. Zunächst wird die erste Forderung aus Lemma 2.4 betrachtet:

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\sum_{\omega \in A_{k}^{n-1}} \tau_{n}^{j}(\omega) \mathbf{P}(\{\omega\})}{\mathbf{P}(A_{k}^{n-1})} \mathbf{1}_{A_{k}^{n-1}} = 0, \ j = 1, \dots, d, \ n = 1, \dots, T.$$

Da die Atome ${\cal A}_k^{n-1}$ disjunkt sind, sind die Aussagen äquivalent zu

$$\sum_{\omega \in A_k^{n-1}} \tau_n^j(\omega) \frac{\mathbf{P}(\{\omega\})}{\mathbf{P}(A_k^{n-1})} = 0, \ k = 1, \dots, m_{n-1}, \ j = 1, \dots, d, \ n = 1, \dots, T.$$

Nach Definition ist τ_j^n messbar bezüglich der σ -Algebra \mathcal{F}_n , also kann äquivalent auch formuliert werden

$$\sum_{A^n \subset A_n^{n-1}} \tau_n^j(A^n) \frac{\mathbf{P}(A^n)}{\mathbf{P}(A_k^{n-1})} = 0, \ k = 1, \dots, m_{n-1}, \ j = 1, \dots, d, \ n = 1, \dots, T$$

Sei nun $\mathbf{P}(A^n \mid A_k^{n-1}) := \frac{\mathbf{P}(A^n)}{\mathbf{P}(A_k^{n-1})}$, für alle $A^n \subseteq A_k^{n-1}$, was aufgrund der 3. Forderung aus Lemma 2.4 wohldefiniert ist. Da die Atome $A^n \subseteq A_k^{n-1}$ gerade $B_1^{n,k}, \ldots, B_l^{n,k}$ sind, ist die vorige Forderung äquivalent zu

$$\sum_{\nu=1}^{l} \tau_n^j(B_{\nu}^{n,k}) \mathbf{P}(B_{\nu}^{n,k} \mid A_k^{n-1}) = 0, \ k = 1, \dots, m_{n-1}, \ j = 1, \dots, d, \ n = 1, \dots, T.$$

Diese kann nun für $k=1,\ldots,m_{n-1}$ und $n=1,\ldots,T$ geschrieben werden in der Form

$$\begin{pmatrix} \tau_n^1(B_1^{n,k}) & \cdots & \tau_n^1(B_l^{n,k}) \\ \vdots & & \vdots \\ \tau_n^d(B_1^{n,k}) & \cdots & \tau_n^d(B_l^{n,k}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}(B_1^{n,k} \mid A_k^{n-1}) \\ \vdots \\ \mathbf{P}(B_l^{n,k} \mid A_k^{n-1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Genau umgekehrt folgt aus den Forderungen des Satzes aber auch die 1. Forderung aus Lemma 2.4, denn es gilt mit nachfolgender Begründung $\mathbf{P}(A_{\omega}^n) = \prod_{t=1}^n \mathbf{P}(A_{\omega}^t \mid A_{\omega}^{t-1})$, für alle $n = 1, \ldots, T$ und damit $\mathbf{P}(A_{\omega}^n \mid A_{\omega}^{n-1}) = \frac{\mathbf{P}(A_{\omega}^n)}{\mathbf{P}(A_{\omega}^{n-1})}$, für alle $n = 1, \ldots, T$.

Nach Voraussetzung gilt nämlich $\mathbf{P}(\{\omega\}) = \prod_{n=1}^{T} \mathbf{P}(A_{\omega}^{n} \mid A_{\omega}^{n-1})$, für alle $\omega \in \Omega$ und damit

$$\mathbf{P}(A_{\omega}^n) = \sum_{\eta \in A_{\omega}^n} \prod_{t=1}^T \mathbf{P}(A_{\eta}^t \mid A_{\eta}^{t-1}).$$

Nach Lemma 1.9, Teil a) gilt $A^t_{\eta} = A^t_{\omega}$ für $t = 1, \dots, n$ wegen $\eta \in A^n_{\omega} \subseteq A^t_{\omega}$. Daher folgt

$$\mathbf{P}(A_{\omega}^{n}) = \prod_{t=1}^{n} \mathbf{P}(A_{\omega}^{t} \mid A_{\omega}^{t-1}) \sum_{\eta \in A_{c}^{n}} \prod_{t=n+1}^{T} \mathbf{P}(A_{\eta}^{t} \mid A_{\eta}^{t-1}).$$

Mit Rückwärtsinduktion nach n lässt sich nun zeigen, dass für alle $n=1,\ldots,T$ unter den Voraussetzungen des Satzes gilt

$$\sum_{\eta \in A_{\omega}^{n}} \prod_{t=n+1}^{T} \mathbf{P}(A_{\eta}^{t} | A_{\eta}^{t-1}) = 1.$$

Für n=T ist das leere Produkt gleich 1 und $\left|A_{\omega}^{T}\right|=1$, so dass die Aussage gültig ist. Sei nun die Aussage für n+1 korrekt. Dann gilt

$$\sum_{\eta \in A_{\omega}^{n}} \prod_{t=n+1}^{T} \mathbf{P}(A_{\eta}^{t} | A_{\eta}^{t-1}) = \sum_{A^{n+1} \subseteq A_{\omega}^{n}} \sum_{\eta \in A^{n+1}} \prod_{t=n+1}^{T} \mathbf{P}(A_{\eta}^{t} | A_{\eta}^{t-1})$$

$$= \sum_{A^{n+1} \subseteq A_{\omega}^{n}} \mathbf{P}(A^{n+1} | A_{\omega}^{n}) \sum_{\eta \in A^{n+1}} \prod_{t=n+2}^{T} \mathbf{P}(A_{\eta}^{t} | A_{\eta}^{t-1})$$

$$= \sum_{A^{n+1} \subseteq A_{\omega}^{n}} \mathbf{P}(A^{n+1} | A_{\omega}^{n})$$

$$= 1$$

Die letzte Gleichheit folgt dabei aus der ersten Zeile des Gleichungssystems des Satzes, da die Mengen $A^{n+1} \subseteq A^n_{\omega}$ für $A^n_{\omega} = A^n_k$ gerade die Mengen $B^{n,k}_1, \ldots, B^{n,k}_l$ sind, für $n = 1, \ldots, T$. Insgesamt gilt also

$$\mathbf{P}(A_{\omega}^n) = \prod_{t=1}^n \mathbf{P}(A_{\omega}^t \mid A_{\omega}^{t-1}).$$

Weiterhin folgt die erste Zeile des Gleichungssystems mit der dritten Forderung aus Lemma 2.4, denn dann ist wieder $\mathbf{P}(A^n \mid A_k^{n-1}) := \frac{\mathbf{P}(A^n)}{\mathbf{P}(A_k^{n-1})}$, für alle $A^n \subseteq A_k^{n-1}$ wohldefiniert und es gilt nach Voraussetzung

$$\sum_{A^n \subset A^{n-1}} \mathbf{P}(A^n) = \mathbf{P}(A^{n-1}), \quad \forall A^{n-1} \in \mathcal{A}^{n-1}, \ n = 1, \dots, T,$$

was äquivalent ist zu

$$\sum_{A^n \subset A^{n-1}} \mathbf{P}(A^n \mid A^{n-1}) = 1, \quad \forall A^{n-1} \in \mathcal{A}^{n-1}, \ n = 1, \dots, T$$

oder auch

$$\sum_{\nu=1}^{l} \mathbf{P}(B_{\nu}^{n,k} \mid A_{k}^{n-1}) = 1, \quad k = 1, \dots, m_{n-1}, \ n = 1, \dots, T.$$

Andersherum folgt die zweiten Forderung aus Lemma 2.4 aus der ersten Zeile des Gleichungssystems. Wie oben nachgewiesen gilt

$$\sum_{\omega \in \Omega} \mathbf{P}(\{\omega\}) = \sum_{\eta \in \Omega} \prod_{t=1}^{T} \mathbf{P}(A_{\eta}^{t} \mid A_{\eta}^{t-1}) = 1.$$

Die dritte Forderung aus Lemma 2.4 folgt unmittelbar aus der Tatsache, dass zur Berechnung von $\mathbf{P}(\{\omega\})$ nur Komponenten $\mathbf{P}(A_k^n \mid A_k^{n-1}), \omega \in \Omega$ von positiven Lösungen aus $\mathbb{L}_k^{n-1}, k = 1, \ldots, m_{n-1}, n = 1, \ldots, T$ verwendet werden.

Es bleibt noch zu zeigen, dass jeder Vektor $(\mathbf{P}(\{\omega_1\}), \dots, \mathbf{P}(\{\omega_m\})) \in \mathbb{R}^m$, der die Bedingungen aus Lemma 2.4 erfüllt, darstellbar ist als Produkt

$$\mathbf{P}(\{\omega\}) = \prod_{n=1}^{T} \mathbf{P}(A_{\omega}^{n} \mid A_{\omega}^{n-1}),$$

für entsprechende Komponenten $\mathbf{P}(A_{\omega}^{n} | A_{\omega}^{n-1})$ jeweils einer positiven Lösungen von \mathbb{L}_{k}^{n-1} , $k = 1, \ldots, m_{n-1}, n = 1, \ldots, T$.

 A^n_{ω} ist immer genau eines der Atome $B^{n,k}_1,\ldots,B^{n,k}_l$ von \mathcal{F}_n , in die A^{n-1}_{ω} zerfällt, daher existiert mit jeder Lösung aus \mathbb{L}^{n-1}_k für alle $k=1,\ldots,m_{n-1}$ und $n=1,\ldots,T$ immer ein eindeutig bestimmter Wert für $\mathbf{P}(A^n_{\omega}\,|\,A^{n-1}_{\omega}), \omega\in\Omega$, und mit der Definition $\mathbf{P}(A^n_{\omega}\,|\,A^{n-1}_{\omega}):=\frac{\mathbf{P}(A^n_{\omega})}{\mathbf{P}(A^{n-1}_{\omega})}, \,\omega\in\Omega$ gilt für alle $\omega\in\Omega$

$$\prod_{n=1}^{T} \mathbf{P}(A_{\omega}^{n} \mid A_{\omega}^{n-1}) = \frac{\mathbf{P}(A_{\omega}^{1})}{\mathbf{P}(A_{\omega}^{0})} \cdot \frac{\mathbf{P}(A_{\omega}^{2})}{\mathbf{P}(A_{\omega}^{1})} \cdot \dots \cdot \frac{\mathbf{P}(A_{\omega}^{T})}{\mathbf{P}(A_{\omega}^{T-1})} = \frac{\mathbf{P}(A_{\omega}^{T})}{\mathbf{P}(A_{\omega}^{0})} = \frac{\mathbf{P}(\{\omega\})}{\mathbf{P}(\{\Omega\})} = \mathbf{P}(\{\omega\})$$

 $(\mathbf{P}(\Omega) = 1 \text{ folgt aus der zweiten Forderung in Lemma 2.4})$. Gilt nun jedoch die dritte Forderung aus 2.4, dann ist nur $\mathbf{P}(A_{\omega}^{n} \mid A_{\omega}^{n-1}) = \frac{\mathbf{P}(A_{\omega}^{n})}{\mathbf{P}(A_{\omega}^{n-1})} > 0$, für alle $\omega \in \Omega$ möglich. Dies muss für alle Komponenten der jeweiligen Lösungen aus \mathbb{L}_{k}^{n-1} , für alle $k = 1, \ldots, m_{n-1}$ und $n = 1, \ldots, T$ gleichzeitig gelten, so dass jeder der Lösungsvektoren positiv sein muss.

Insgesamt gilt damit auch, dass $\mathbf{P}(B_{\nu}^{n,k} | A_k^{n-1})$, für $\nu = 1, \ldots, l, k = 1, \ldots, m_{n-1}$ und $n = 1, \ldots, T$ tatsächlich die entsprechende bedingte Wahrscheinlichkeit ist.

2.6 Beispiel: Zugrunde liege ein Zwei-Stufen-Ein-Perioden-Markt mit einem Risikogut, wie in Beispiel 1.55, d.h. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, T = 1 und d = 1. Sei außerdem $\sigma_1 - i := \sigma_1^1(\omega_1) - i = \tau_1^1(\omega_1)$ und analog $\sigma_2 - i := \sigma_1^1(\omega_2) - i = \tau_1^1(\omega_2)$. Satz 2.5 liefert dann das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \tau_1^1(\omega_1) & \tau_1^1(\omega_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}(\{\omega_1\}) \\ \mathbf{P}(\{\omega_2\}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dessen Lösung eindeutig ist, und das folgende äquivalente Martingalmaß liefert:

$$\mathbf{P}(\{\omega_1\}) = \frac{i - \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2} \quad und \quad \mathbf{P}(\{\omega_2\}) = \frac{\sigma_1 - i}{\sigma_1 - \sigma_2}.$$

Als Lösung ergibt sich also das bereits aus Beispiel 1.55 bekannte äquivalente Martingalmaß. Die Nebenbedingung $\mathbf{P} > 0$ liefert dann $\sigma_1 > i > \sigma_2$.

Dass mit Hilfe von Satz 2.5 auch etwas umfangreichere Märkte analysiert werden können, zeigt das folgende Beispiel.

2.7 Beispiel: Gegeben sei ein diskreter Markt mit den Parametern $T=2, d=2, \Omega=\{\omega_1,\ldots,\omega_5\}, A_1^1=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}, A_2^1=\{\omega_4,\omega_5\}, \mathcal{F}_0=(\Omega,\phi), \mathcal{F}_1=\sigma(A_1^1,A_2^1), \mathcal{F}_2=\mathfrak{P}(\Omega), i=\frac{1}{10}$ und unter Berücksichtigung von Bemerkung 1.2

$$\begin{array}{lll} S_0^1 = (10,10,10,10,10) & S_0^2 = (20,20,20,20,20) \\ S_1^1 = (16,16,16,8,8) & S_1^2 = (32,32,32,16,16) \\ S_2^1 = (20,16,8,12,4) & S_2^2 = (40,28,16,24,8). \end{array}$$

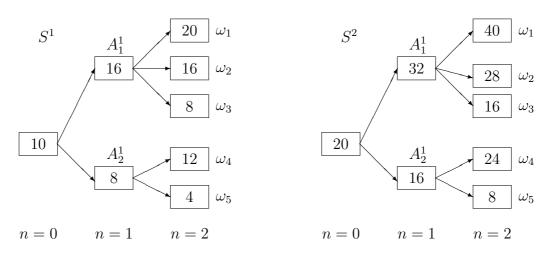


Abbildung 2.2: Zwei-Perioden-Markt mit unterschiedlichen Verzweigungen

Dann sind

$$\sigma_1^1 = \left(\frac{3}{5}, \frac{3}{5}, \frac{3}{5}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}\right) \qquad \qquad \sigma_1^2 = \left(\frac{3}{5}, \frac{3}{5}, \frac{3}{5}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}\right) \\
\sigma_2^1 = \left(\frac{1}{4}, 0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \qquad \qquad \sigma_2^2 = \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

und entsprechend

$$\tau_1^1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{10}, -\frac{3}{10}\right) \qquad \qquad \tau_1^2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{10}, -\frac{3}{10}\right) \\
\tau_2^1 = \left(\frac{3}{20}, -\frac{1}{10}, -\frac{3}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{3}{5}\right) \qquad \qquad \tau_2^2 = \left(\frac{3}{20}, -\frac{9}{40}, -\frac{7}{20}, \frac{2}{5}, -\frac{3}{5}\right).$$

Mit Satz 2.5 erhält man zunächst für n = 1 das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{10} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}(A_1^1) \\ \mathbf{P}(A_2^1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

woraus $\mathbf{P}(A_1^1) = \frac{3}{8}$ und $\mathbf{P}(A_2^1) = \frac{5}{8}$ folgt. Für n=2 erhält man die Gleichungssysteme

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{3}{20} & -\frac{1}{10} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{20} & -\frac{9}{40} & -\frac{7}{20} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}(\{\omega_1\} \mid A_1^1) \\ \mathbf{P}(\{\omega_2\} \mid A_1^1) \\ \mathbf{P}(\{\omega_3\} \mid A_1^1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

woraus $\mathbf{P}(\{\omega_1\} \mid A_1^1) = \frac{16}{25}$ und $\mathbf{P}(\{\omega_2\} \mid A_1^1) = \frac{6}{25}$ und $\mathbf{P}(\{\omega_3\} \mid A_1^1) = \frac{3}{25}$ folgt, und

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}(\{\omega_4\} \mid A_1^1) \\ \mathbf{P}(\{\omega_5\} \mid A_1^1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

woraus $\mathbf{P}(\{\omega_4\} \mid A_2^1) = \frac{3}{5}$ und $\mathbf{P}(\{\omega_5\} \mid A_2^1) = \frac{2}{5}$ folgt. Mit $\mathbf{P}(\{\omega_k\}) = \mathbf{P}(A_1^1) \cdot \mathbf{P}(\{\omega_k\} \mid A_1^1)$, k = 1, 2, 3 und $\mathbf{P}(\{\omega_k\}) = \mathbf{P}(A_2^1) \cdot \mathbf{P}(\{\omega_k\} \mid A_2^1)$, k = 4, 5 resultiert dann $\mathbf{P}(\{\omega_1\}) = \frac{6}{25}$, $\mathbf{P}(\{\omega_2\}) = \frac{9}{100}$, $\mathbf{P}(\{\omega_3\}) = \frac{9}{200}$, $\mathbf{P}(\{\omega_4\}) = \frac{3}{8}$ und $\mathbf{P}(\{\omega_5\}) = \frac{1}{4}$.

Die Nebenbedingung P>0 ist erfüllt, somit enthält $\mathbb P$ genau ein Element. Der Markt ist vollständig.

Anhand der letzten beiden Beispiele zeigt sich, dass Satz 2.5 für vollständige Märkte einen brauchbaren Weg zur Berechnung des äquivalenten Martingalmaßes darstellt, da dies im vollständigen Markt eindeutig bestimmt ist, und daher auch alle Gleichungssysteme, die in Satz 2.5 aufgestellt werden, eindeutig lösbar sind. Tritt jedoch der Fall ein, dass einige der Gleichungssysteme mehrere Lösungen besitzen, d.h. dass der Markt nach Satz 1.53 unvollständig ist, so bietet Satz 2.5 keine geschlossene Darstellung der Menge \mathbb{P} , so dass damit zunächst für die Untersuchung unvollständiger Märkte nicht viel gewonnen scheint. Durch einige zusätzliche Überlegungen im Abschnitt 2.3.1 ändert sich dieser Anschein jedoch im Hinblick auf die Bewertung von Derivaten.

Weiterhin liefert Satz 2.5 auch eine schnelle Übersicht über die Arbitragesituation eines Marktes. Ist nämlich nur eines der Gleichungssysteme nicht lösbar, so existiert kein äquivalentes Martingalmaß, und der Markt ist damit nach Satz 1.48 nicht arbitragefrei. Weiterhin

ist der Markt auch dann nicht arbitragefrei, wenn zwar jedes Gleichungssystem eine Lösung besitzt, aber sich mittels Produktbildung der bedingten Wahrscheinlichkeiten kein Wahrscheinlichkeitsmaß konstruieren lässt. Für den Ein-Perioden-Markt finden sich noch konkretere Aussagen zur Arbitragesituation in Abschnitt 2.3.1.

Satz 2.5 liefert zusätzlich ein Kriterium, das in gewissen Fällen die Überprüfung der Vollständigkeit eines arbitragefreien Marktes anhand der Modellparameter ohne weitere Rechnung ermöglicht.

2.8 Korollar: Ein Markt ist genau dann unvollständig, wenn es einen Zeitpunkt $n \in \{0, ..., T\}$ mit einem Ast ausgehend von $A^n \in \mathcal{A}_n$ gibt, der weniger linear unabhängige Volatilitäten $\sigma_{n|A^n}^j$, j = 0, ..., d (aufgefasst als Vektoren für $\omega \in A^n$ nach Bemerkung 1.2) besitzt, als es Verzweigungen in diesem Ast gibt. Ein Markt ist immer dann unvollständig, wenn es einen Ast gibt, in dem mehr Verzweigungen existieren, als Güter (einschließlich des monetären Gutes) im Markt vorhanden sind.

Beweis: Nach Satz 1.53 genügt es, dass nur eines der linearen Gleichungssysteme aus Satz 2.5 nicht eindeutig lösbar ist, damit der Markt unvollständig ist. Die Zeilen der Matrix des linearen Gleichungssystems für den Ast ausgehend von \mathcal{A}^n bestehen aus den Vektoren $\sigma_{n|A^n}^j - i$, $j = 1, \ldots, d$ und dem Vektor $(1, \ldots, 1)$. Diese sind offenbar genau dann linear unabhängig voneinander, wenn die Vektoren $\sigma_{n|A^n}^j$, $j = 0, \ldots, d$ linear unabhängig voneinander sind. Die Anzahl der Verzweigungen desselben Astes ist gerade die Zahl der Spalten der Matrix. Ist die Zeilenzahl geringer als die Spaltenzahl, so ist das lineare Gleichungssystem unterbestimmt, d.h. nicht eindeutig lösbar. Dies ist mit Sicherheit dann der Fall, wenn es ausgehend von A^n mehr Verzweigungen gibt, als Güter im Markt vorhanden sind. Keine Lösung kann das Gleichungssystem nur dann besitzen, wenn ein weiteres, vom Ersten verschiedenes monetäres Gut im Markt existiert, was aufgrund der Arbitragefreiheit des Marktes ausgeschlossen ist.

Die letzte Aussage von Korollar 2.8 ermöglicht es, in einigen Fällen sehr schnell Aussagen über die Vollständigkeit eines Marktes zu treffen, denn es genügt meist ein Blick auf die Modellparameter, um ohne weitere Rechnung festzustellen, ob ein Ast existiert, der mehr Verzweigungen besitzt, als Güter im Markt vorhanden sind.

2.3 Zerlegung von Märkten

Aus Satz 2.5 geht hervor, dass es zur Untersuchung der Vollständigkeit und der äquivalenten Martingalmaße eines arbitragefreien T-Perioden-Marktes genügt, zunächst für jeden Zeitpunkt jeden von dort ausgehenden Ast einzeln zu untersuchen. Anschließend können die Ergebnisse jedes Astes mittels Produkt bedingter Wahrscheinlichkeiten zu Ergebnissen für den gesamten Markt zusammengesetzt werden. Wie bereits bemerkt, stellt jeder Ast prinzipiell einen Ein-Perioden-Markt dar. Wie sich diese Tatsache mathematisch formulieren lässt, zeigt das folgende Beispiel.

2.9 Beispiel: Gegeben sei ein Markt auf (Ω, P) mit T Perioden, d Wertpapieren, risikolosem Zins i und Filtration \mathfrak{F} . Es sei A^n ein Atom von \mathfrak{F}_n . Dann stellt der Ast, ausgehend von A^n , einen Ein-Perioden-Markt mit zugrunde liegendem Wahrscheinlichkeitsraum $(A^n, P|_{\mathfrak{P}(A^n)})$, der Filtration $\mathfrak{F}_{A^n} = (\mathfrak{F}_n \cap A^n, \mathfrak{F}_{n+1} \cap A^n)$ und den Preisen $S^j_{A^n} = (S^j_n|_{A^n}, S^j_{n+1}|_{A^n})$, $j = 0, \ldots, d$ dar. Der risikolose Zins und die Anzahl der Handelsgüter bleiben wie im T-Perioden-Markt.

Im Gegensatz zur bisher üblichen Modellierung von Märkten unterscheidet sich dieser "extrahierte" Ein-Perioden-Markt zu seinem Endzeitpunkt 1 nicht auf allen Elementen aus A^n , sondern nur auf den Atomen $B_1^{n+1}, \ldots, B_l^n \in \mathcal{F}_{n+1}$, in die A^n zerfällt, d.h. $\mathcal{F}_{n+1} \cap A^n \neq \mathfrak{P}(A^n)$. Dies stellt jedoch kein Problem dar, da die Preise S_{n+1}^j aufgrund ihrer \mathcal{F}_{n+1} -Messbarkeit auf den Atomen B_1^{n+1}, \ldots, B_l^n konstant sind. Im Prinzip können die Mengen B_1^{n+1}, \ldots, B_l^n als neue Elementarereignisse zum Zeitpunkt 1 des Ein-Perioden-Marktes betrachtet werden.

Aufgrund dieser Feststellung ist die Untersuchung allgemeiner Ein-Perioden-Märkte von zentralem Interesse. In Abschnitt 2.3 werden zunächst die Arbitragefreiheit und die konkretere Darstellung äquivalenter Martingalmaße behandelt. In Abschnitt 2.4 wird sich dann herausstellen, dass im Ein-Perioden-Markt die Angabe konkreter Grenzen für eine arbitragefreie Bewertung spezieller nicht replizierbarer Derivate, nämlich der bereits eingeführten Optionen, möglich ist.

Wie bei der Erläuterung von Derivaten bereits angesprochen, besitzen diese gewöhnlich genau ein Underlying, d.h. genau ein Gut, von dessen Wert ihr zukünftiger Preis abhängt. Um Ergebnisse zur arbitragefreien Bewertung derartiger Derivate zu erhalten, genügt es, Märkte zu betrachten, die ausschließlich aus dem Underlying und dem monetären Gut bestehen. Wichtig ist jedoch festzustellen, dass mit jedem weiteren Risikogut, das zusätzlich auf dem Markt vorhanden ist, sich die Ergebnisse der Bewertung prinzipiell verändern. Bei gemeinsamer Betrachtung aller im Markt zur Verfügung stehenden Güter ergibt sich eine kleinere Auswahl arbitragefreier Preise. Die Darstellung der Ergebnisse in Märkten mit mehr als einem Risikogut lässt sich jedoch kaum vernünftig realisieren, da das nach Satz 2.5 zu lösende Gleichungssystem zu groß ist, um weiterführende allgemein gültige Aussagen zu treffen. Im Folgenden werden daher nur Märkte bestehend aus einem Underlying und einem

monetärem Gut betrachtet. Die Preise für Märkte mit mehreren Wertpapieren können als Schnittmenge der Preise in Märkten mit jeweils nur einem der Risikogüter ermittelt werden. In Abschnitt 2.6 wird auf dieses Prinzip eingegangen.

2.3.1 Ein-Perioden-Märkte mit einem Risikogut

Betrachtet wird ein m-Stufen-Ein-Perioden-Markt für beliebiges $m \in \mathbb{N}, m \geq 3$ mit genau einem Risikogut (Der Fall m=2 ist bereits in den Beispielen 1.55 und 2.6 behandelt worden). Dazu sei $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_m\}, T=1, d=1$. Zur besseren Übersicht werden die folgenden Abkürzungen eingeführt: $S_0 := S_0^1$ konstant, $S_k := S_T^1(\omega_k), \sigma_k := \sigma_T^1(\omega_k), \tau_k := \tau_T^1(\omega_k)$ und $p_k := P(\{\omega_k\})$, jeweils für $k=1,\ldots,m$, wobei mit P hier nicht das dem Markt zugrunde liegende Wahrscheinlichkeitsmaß gemeint ist, sondern ein äquivalentes Martingalmaß. Sind in zwei verschiedenen Zuständen $\omega \in \Omega$ die Preise zum Zeitpunkt n=T identisch, so können diese zwei Zustände offensichtlich zu einem einzigen zusammengefasst werden, so dass folgende Grundannahme getroffen wird: die Kurse zur Zeit n=T seien ohne Einschränkung voneinander verschieden und der Größe nach sortiert, d.h. $S_1 > \ldots > S_m$. Daraus folgt sofort $\sigma_1 > \ldots > \sigma_m$.

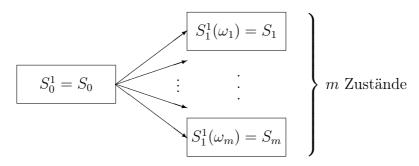


Abbildung 2.3: m-Stufen-Ein-Perioden-Markt

Dieser Markt wird nun untersucht auf Arbitragefreiheit, seine äquivalenten Martingalmaße und im anschließenden Abschnitt 2.4 auf die Bewertung von Optionen.

Arbitragefreiheit

2.10 Satz: Ein m-Stufen-Ein-Perioden-Markt mit einem Risikogut ist genau dann arbitragefrei, wenn gilt $\sigma_1 > i > \sigma_m$.

Beweis: Zunächst wird der Markt mit $\sigma_1 = \ldots = \sigma_m = i$ ausgeschlossen, da dieser Markt kein Risiko beinhaltet. Ein Gut mit derartigen Volatilitäten entspräche nämlich genau dem monetären Gut. Der Markt bestünde in diesem Fall nur aus zwei monetären Gütern und wäre daher trivialerweise arbitragefrei. Für weitere Betrachtungen ist dieser Fall nicht von Interesse.

Sei $\sigma_1 \leq i$. Nach Voraussetzung gilt dann auch $\sigma_k \leq i$ und damit $S_k = S_0(1 + \sigma_k) \leq rS_0$, für $k = 1, \ldots, m$. Dann ist die Handelsstrategie ϕ mit $\phi_0 = \phi_T$ und $\phi_T^0 = S_0$ und $\phi_T^1 = -1$ eine Arbitrage-Strategie. ϕ ist trivialerweise selbstfinanzierend und zulässig wegen

$$V_0(\phi) = \phi_0^0 S_0^0 + \phi_0^1 S_0^1 = S_0 - S_0 = 0$$

$$V_T(\phi) = \phi_T^0 S_T^0 + \phi_T^1 S_T^1 = rS_0 - S_T \ge rS_0 - S_0(1 + \sigma_1) \ge 0.$$

Da $\sigma_m < \sigma_1 \leq i$, gilt

$$rS_0 - S_m = S_0(i - \sigma_m) > 0$$

und damit $P(V_T(\phi) > 0) > 0$.

Ganz analog lässt sich nachweisen, dass im Falle von $i \leq \sigma_m$ die Handelsstrategie ϕ mit $\phi_0 = \phi_T$ und $\phi_T^0 = -S_0$ und $\phi_T^1 = 1$ eine Arbitrage-Strategie darstellt.

Sei nun $\sigma_1 > i > \sigma_m$. Nach dem Fundamentalsatz der Optionspreistheorie 1.48 muss dann für die Arbitragefreiheit mindestens eine äquivalente Martingaldichte existieren. Eine solche ist zum Beispiel

$$f(\omega_k) = \begin{cases} \frac{rS_0 - S_m}{S_1 - S_m} - \frac{M\sum\limits_{j=2}^{m-1} (S_j - S_m)}{(m-2)(S_1 - S_m)^2}, & k = 1\\ \frac{M}{(m-2)(S_1 - S_m)}, & k = 2, \dots, m-1\\ \frac{S_1 - rS_0}{S_1 - S_m} - \frac{M\sum\limits_{j=2}^{m-1} (S_1 - S_j)}{(m-2)(S_1 - S_m)^2}, & k = m, \end{cases}$$

wobei $M := \min(S_1 - rS_0, rS_0 - S_m) = S_0 \cdot \min(\sigma_1 - i, i - \sigma_m)$. Die Zähldichte f ist in der Tat eine der gesuchten äquivalenten Martingaldichten, denn es gilt für $k = 2, \ldots, m-1$ nach Voraussetzung

$$f(\omega_k) > \frac{\min(\sigma_1 - i, i - \sigma_m)}{(m - 2)(\sigma_1 - \sigma_m)} > 0,$$

außerdem

$$f(\omega_{1}) = \frac{(rS_{0} - S_{m})(m-2)(S_{1} - S_{m}) - M \sum_{j=2}^{m-1} (S_{j} - S_{m})}{(m-2)(S_{1} - S_{m})^{2}}$$

$$\geq \frac{(rS_{0} - S_{m}) \sum_{j=2}^{m-1} (S_{1} - S_{m}) - (rS_{0} - S_{m}) \sum_{j=2}^{m-1} (S_{j} - S_{m})}{(m-2)(S_{1} - S_{m})^{2}}$$

$$= \frac{(rS_{0} - S_{m}) \sum_{j=2}^{m-1} (S_{1} - S_{j})}{(m-2)(S_{1} - S_{m})^{2}}$$

$$\geq 0.$$

sowie analog

$$f(\omega_m) \ge \frac{(S_1 - rS_0) \sum_{j=2}^{m-1} (S_j - S_m)}{(m-2)(S_1 - S_m)^2} > 0.$$

Weiterhin gilt

$$f(\omega_1) + f(\omega_m) = 1 - \frac{M \sum_{j=2}^{m-1} (S_1 - S_m)}{(m-2)(S_1 - S_m)^2} = 1 - \frac{M}{(S_1 - S_m)} = 1 - \sum_{j=2}^{m-1} f(\omega_j)$$

und damit $\sum_{j=1}^{m} f(\omega_j) = 1$. Schließlich ist

$$f(\omega_1)S_1 + f(\omega_m)S_m = \frac{rS_0S_1 - rS_0S_m}{S_1 - S_m} - \frac{M\sum_{j=2}^{m-1}(S_jS_1 - S_jS_m)}{(m-2)(S_1 - S_m)^2} = rS_0 - \sum_{j=2}^{m-1}S_jf(\omega_j),$$

also
$$E_f(S_T^1) = \sum_{i=1}^m S_j f(\omega_j) = rS_0.$$

Wie sich im Folgenden noch zeigen wird, ist die gewählte Martingaldichte nur eine spezielle von vielen, die in diesem Markt existieren. Sie ist wohl eine der wenigen, die für allgemeines $m \in \mathbb{N}$ eine übersichtliche Darstellung besitzt. Auch lässt ihre Kenntnis noch keine weiteren allgemeinen Rückschlüsse auf die übrigen äquivalenten Martingaldichten des Marktes zu. Zwar wurde zu Beginn des Abschnitts 2.2 unter 3. ein Weg beschrieben, auf dem mittels Kenntnis eines äquivalenten Martingalmaßes alle weiteren berechnet werden können, jedoch ist dieser Weg trotz Kenntnis des benötigten Maßes immer noch aufwändiger, als der ebenfalls in Abschnitt 2.2 aufgeführte Weg über die linearen Gleichungssysteme. Deswegen wird im Folgenden wieder Satz 2.5 verwendet, um die Menge der äquivalenten Martingalmaße für den allgemeinen Ein-Perioden-Markt mit einem Risikogut näher zu untersuchen.

Äquivalente Martingalmaße

Der m-Stufen-Ein-Perioden-Markt sei nun also arbitragefrei, d.h. nach Satz 2.10 gelte $\sigma_1 > i > \sigma_m$. Als Ein-Perioden-Markt enthält der Markt für beliebiges $m \in \mathbb{N}$ nur einen Ast, so dass bei Verwendung von Satz 2.5 zur Berechnung der äquivalenten Martingalmaße genau ein Gleichungssystem zu lösen ist. Dieses lautet

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \tau_1 & \dots & \tau_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wählt man $p_k \in (0,1)$ beliebig für k=3,...,m, erhält man als Lösung

$$p_{2} = \frac{-\tau_{1} + \sum_{k=3}^{m} p_{k}(\tau_{1} - \tau_{k})}{\tau_{1} - \tau_{2}} = \frac{\sigma_{1} - i - \sum_{k=3}^{m} p_{k}(\sigma_{1} - \sigma_{k})}{\sigma_{1} - \sigma_{2}}$$
$$p_{1} = \frac{-\tau_{2} + \sum_{k=3}^{m} p_{k}(\tau_{2} - \tau_{k})}{\tau_{1} - \tau_{2}} = \frac{i - \sigma_{2} + \sum_{k=3}^{m} p_{k}(\sigma_{2} - \sigma_{k})}{\sigma_{1} - \sigma_{2}}.$$

Zur vollständigen Bestimmung der äquivalenten Martingalmaße muss noch die Nebenbedingung P > 0 überprüft werden. Es ist $\sigma_1 - \sigma_k \ge 0$ für $k = 2, \ldots, m$, sowie $\sigma_2 - \sigma_k \ge 0$ für $k = 3, \ldots, m$ und daher (Die leere Summe sei wie üblich definiert als 0)

$$p_1 > 0 \iff \sum_{k=3}^{m} p_k(\sigma_1 - \sigma_k) < \sigma_1 - i,$$

womit folgt $p_k < \frac{\sigma_1 - i}{\sigma_1 - \sigma_k}$, für $k = 3, \dots, m$, sowie

$$p_2 > 0 \iff \sum_{k=3}^m p_k(\sigma_2 - \sigma_k) > \sigma_2 - i,$$

was nur dann eine weitere Einschränkung darstellt, wenn $\sigma_2 > i$ gilt.

Eine explizite Darstellung der Menge der äquivalenten Martingalmaße kann nun für Spezialfälle vorgenommen werden. Für den Fall m=3 tut dies das folgende Beispiel 2.11. Es ist natürlich möglich, andere als die oben gewählten Elementarwahrscheinlichkeiten p_1 und p_2 explizit darzustellen, etwa p_u und p_w , für $u,w\in\{1,\ldots,m\}$. Diese ließen sich analog zur obigen Darstellung angeben, in der dann jeweils die Summe mit den übrigen Elementarwahrscheinlichkeiten $p_k, \ k\in\{1,\ldots,m\}\setminus\{u,w\}$ auftauchen würde, ebenso wie in den zwei darauf folgenden Ungleichungen. Unabhängig davon können jedoch für allgemeines $m\geq 3$ können an dieser Stelle keine expliziteren Aussagen über die Menge der äquivalenten Martingalmaße getroffen werden. Trotzdem ist es damit in Abschnitt 2.4 bereits möglich, für beliebiges m>3 die Grenzen für die Bewertung von Optionen in unvollständigen Märkten anzugeben.

2.11 Beispiel: In diesem Beispiel wird ein allgemeiner arbitragefreier Drei-Stufen-Ein-Perioden-Markt betrachtet. Es sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, T = 1, d = 1. Es gelten weiterhin die Abkürzungen wie für den m-Stufen-Ein-Perioden-Markt, nun mit m = 3.

Die äquivalenten Martingalmaße sind dann von der Form

$$p_1 = \frac{i - \sigma_2 + p_3(\sigma_2 - \sigma_3)}{\sigma_1 - \sigma_2}$$

 $p_2 = \frac{\sigma_1 - i - p_3(\sigma_1 - \sigma_3)}{\sigma_1 - \sigma_2}$

sowie

$$p_3(\sigma_1 - \sigma_3) < \sigma_1 - i$$
 und $p_3(\sigma_2 - \sigma_3) > \sigma_2 - i$,

so dass insgesamt gilt

$$p_3 \in \left(\max\left\{\frac{\sigma_2 - i}{\sigma_2 - \sigma_3}, 0\right\}, \frac{\sigma_1 - i}{\sigma_1 - \sigma_3}\right).$$

Letztere Bedingung enthält wegen

$$\frac{\sigma_1 - i}{\sigma_1 - \sigma_3} > \frac{\sigma_2 - i}{\sigma_2 - \sigma_3} \iff -\sigma_1 \sigma_3 - i\sigma_2 > -i\sigma_1 - \sigma_2 \sigma_3 \iff i > \sigma_3$$

auch tatsächlich ein echtes Intervall, da der Markt arbitragefrei ist.

Seien etwa $\sigma_1 = \frac{11}{10}$, $\sigma_2 = \frac{6}{10}$, $\sigma_3 = -\frac{4}{10}$ und $i = \frac{1}{10}$. Dann ergeben sich Preise, wie in Abbildung 2.4 dargestellt.

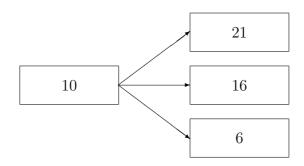


Abbildung 2.4: Drei-Stufen-Ein-Perioden-Markt

Die Menge der äquivalenten Martingalmaße lautet dann unter Berücksichtigung von Bemerkung 1.2

$$\mathbb{P} = \left\{ (-1 + 2p_3, 2 - 3p_3, p_3) \mid p_3 \in \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right) \right\}.$$

Für den arbitragefreien m-Stufen-Ein-Perioden-Markt mit einem Risikogut lassen sich jedoch für allgemeines $m \geq 3$ konkrete Aussagen über die Vollständigkeit treffen. Aus dem letzten Teil von Korollar 2.8 folgt unmittelbar, dass alle derartigen Märkte immer unvollständig sind.

Für die Bewertung von Derivativen spielen nicht äquivalente Martingalmaße eine wichtige Rolle, denn durch sie ist es möglich, exakte Grenzen für eine arbitragefreie Bewertung im unvollständigen Markt anzugeben. Lemma 2.14 bestimmt eine Sorte von Martingalmaßen, die im folgenden Abschnitt 2.4 zur Berechnung dieser Bewertungsgrenzen benötigt werden.

2.12 Beispiel: Zum Vergleich sei noch für das Drei-Stufen-Ein-Perioden-Modell aus Beispiel 2.11 die Berechnung der Martingalmaße unter Verwendung des zweiten, der zu Beginn des Abschnittes 2.2 vorgestellten Ansätze durchgeführt. Es werden also alle äquivalenten Martingalmaße gesucht, die der Gleichung $E(G_T(\phi)) = 0$, für alle $\phi \in \Phi_s$ genügen.

Analog zu Lemma 2.4 sind unter Berücksichtigung von Bemerkung 1.2 alle die Vektoren $f = (f_1, f_2, f_3) \in \mathbb{R}^3$ zu bestimmen, die den drei Bedingungen

1.
$$\sum_{k=1}^{3} f_k G_T((\phi)(\omega_k)) = 0, \quad \forall \phi \in \Phi_s$$

- 2. $f_1 + f_2 + f_3 = 1$
- 3. $f_k > 0, k = 1, 2, 3$

genügen. Zunächst muss also der Raum \mathbb{G}^{\perp} bestimmt werden, dann sind die äquivalenten Martingalmaße alle die Elemente aus \mathbb{G}^{\perp} , die der zweiten und dritten Bedingung genügen. Grundlagen zur Berechnung des orthogonalen Komplements von \mathbb{G} finden sich z.B. in [23], Satz 6.20 ff, wonach

$$\mathbb{G}^{\perp} = \{ f \in \mathbb{R}^3 : f = (E - A(A^T A)^{-1} A^T) x, \ x \in \mathbb{R}^3 \}$$

ist, mit einer Matrix A, deren Spalten die Vektoren einer Basis von \mathbb{G} sind. In diesem einfachen Beispiel ist $\mathbb{G} = \{\phi_T(vS_T - S_0) \mid \phi_T \text{ messbar bzgl. } \mathfrak{F}_0\}$, so dass sich sofort z.B. $\{(vS_T - S_0)\}$ als Basis von \mathbb{G} ergibt. Um die weiteren Rechnungen einfacher zu gestalten, wird allerdings $\{\frac{11}{50}(vS_T - S_0)\} = \{(2, 1, -1)\}$ als Basis von \mathbb{G} gewählt. Damit ist $A^T = (2, 1, -3)$, und dann gilt

$$(E - A(A^T A)^{-1} A^T) x = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Wird nun zusätzlich die zweite Bedingung gefordert, d.h. dass die Summe der Komponenten der Vektoren die Zahl 1 ergibt, so erfüllen die Vektoren

$$\left(1 - (x_2 + x_3), -1 + \frac{3}{2}(x_2 + x_3), 1 - \frac{1}{2}(x_2 + x_3)\right), \quad x_2, x_3 \in \mathbb{R}$$

diese Forderung. Wählt man $x_2 + x_3 = 2 - 2p_3$ und fordert noch die dritte Bedingung, d.h. dass alle Komponenten der Vektoren nicht negativ sind, dann liegen die Vektoren, die alle drei Bedingungen erfüllen, in der Menge

$$\left\{ (-1 + 2p_3, 2 - 3p_3, p_3) \mid p_3 \in \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right) \right\}.$$

Es ergeben sich also tatsächlich dieselben äquivalenten Martingalmaße, wie in Beispiel 2.11. Es ist wohl offensichtlich, dass dieser Weg zur Berechnung aller äquivalenten Martingalmaße aufwändiger ist, als der Weg aus Beispiel 2.11. Die beiden Ansätze sind genau genommen sogar identisch, da die zweite und dritte Bedingung direkt mit denen aus Lemma 2.4 übereinstimmen und erste Bedingung wegen

$$0 = \mathrm{E}(\tilde{G}_T(\phi)) \iff 0 = \mathrm{E}(r\phi_T(vS_T - S_0)) \iff 0 = \phi_T S_0 \, \mathrm{E}(\tau_T) \iff 0 = \mathrm{E}(\tau_T)$$

aufgrund der \mathcal{F}_0 -Messbarkeit von ϕ_1 auch mit der ersten Forderung aus Lemma 2.4 übereinstimmt. Diese Tatsache verdeutlicht noch einmal den Vorzug des ersten Ansatzes in Abschnitt 2.2.

In [28], Abschnitt 1.3 wird näher auf die Tatsache eingegangen, dass $\mathbb{G}^{\perp} \cap \{P : \mathfrak{P}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \mid P(\{\omega_1\}) + \ldots + P(\{\omega_m\}) = 1, P(\omega_k) > 0, k = 1, \ldots, m\}$ die Menge aller äquivalenten Martingalmaße darstellt.

2.13 Definition: Gegeben sei ein arbitragefreier Ein-Perioden-Markt mit einem Risikogut. Es sei $S_T(\omega_1) > \ldots > S_T(\omega_m)$. Weiterhin sei $u \in \{1, \ldots, m-1\}$ und $w \in \{2, \ldots, m\}$ mit $\sigma_u \geq i > \sigma_w$. Dann seien folgende als **Randmartingalmaße** bezeichnete Wahrscheinlichkeitsmaße definiert

$$P_{u,w}(\{\omega_k\}) := \begin{cases} p_u := \frac{i - \sigma_w}{\sigma_u - \sigma_w}, & k = u \\ p_w := \frac{\sigma_u - i}{\sigma_u - \sigma_w}, & k = w \\ 0, & k \in \{1, \dots, m\} \setminus \{u, w\} \end{cases}.$$

2.14 Lemma: Sei $u \in \{1, ..., m-1\}$, $w \in \{2, ..., m\}$ mit $\sigma_u \ge i > \sigma_w$. Dann ist jedes Maß $P_{u,w}$ ein Martingalmaß.

Beweis: Es gilt nach Voraussetzung $0 < i - \sigma_w \le \sigma_u - \sigma_w$ und $0 \le \sigma_u - i < \sigma_u - \sigma_w$, also $p_u, p_w \in [0, 1]$. Daher ist nur nachzuweisen, dass P die oben berechnete Form besitzt. Dies ist der Fall wegen

$$p_{1} = \frac{i - \sigma_{2} + \sum_{k=3}^{m} p_{k}(\sigma_{2} - \sigma_{k})}{\sigma_{1} - \sigma_{2}}$$

$$= \begin{cases} \frac{i - \sigma_{2}}{\sigma_{1} - \sigma_{2}} &, & u = 1, w = 2\\ \frac{i - \sigma_{2} + p_{w}(\sigma_{2} - \sigma_{w})}{\sigma_{1} - \sigma_{2}} = \frac{i - \sigma_{2} + \frac{\sigma_{1} - i}{\sigma_{1} - \sigma_{w}}(\sigma_{2} - \sigma_{w})}{\sigma_{1} - \sigma_{2}} = \frac{i - \sigma_{w}}{\sigma_{1} - \sigma_{w}}, & u = 1, w > 2\\ \frac{i - \sigma_{2} + p_{w}(\sigma_{2} - \sigma_{w})}{\sigma_{1} - \sigma_{2}} = \frac{i - \sigma_{2} + \frac{\sigma_{2} - i}{\sigma_{2} - \sigma_{w}}(\sigma_{2} - \sigma_{w})}{\sigma_{1} - \sigma_{2}} = 0 &, & u = 2, w > 2\\ \frac{i - \sigma_{2} + p_{w}(\sigma_{2} - \sigma_{w}) + p_{w}(\sigma_{2} - \sigma_{w})}{\sigma_{1} - \sigma_{2}} = 0 &, & u > 2, w > 2 \end{cases}$$

sowie

$$p_{2} = \frac{\sigma_{1} - i - \sum_{k=3}^{m} p_{k}(\sigma_{1} - \sigma_{k})}{\sigma_{1} - \sigma_{2}}$$

$$= \begin{cases} \frac{\sigma_{1} - i}{\sigma_{1} - \sigma_{2}} &, & u = 1, w = 2\\ \frac{\sigma_{1} - i - p_{w}(\sigma_{1} - \sigma_{w})}{\sigma_{1} - \sigma_{2}} = \frac{\sigma_{1} - i - \frac{\sigma_{1} - i}{\sigma_{1} - \sigma_{w}}(\sigma_{1} - \sigma_{w})}{\sigma_{1} - \sigma_{2}} = 0 &, & u = 1, w > 2\\ \frac{\sigma_{1} - i - p_{w}(\sigma_{1} - \sigma_{w})}{\sigma_{1} - \sigma_{2}} = \frac{\sigma_{1} - i - \frac{\sigma_{2} - i}{\sigma_{2} - \sigma_{w}}(\sigma_{1} - \sigma_{w})}{\sigma_{1} - \sigma_{2}} = \frac{i - \sigma_{w}}{\sigma_{2} - \sigma_{w}}, & u = 2, w > 2\\ \frac{\sigma_{1} - i - p_{u}(\sigma_{1} - \sigma_{u}) - p_{w}(\sigma_{1} - \sigma_{w})}{\sigma_{1} - \sigma_{2}} = 0 &, & u > 2, w > 2 \end{cases}$$

2.15 Korollar: Sei $\nu \in \{0, \dots, T-1\}$ derjenige Index, für den gilt $\sigma_{\nu} \geq i > \sigma_{\nu+1}$. Dann sind Maße P der Form

$$P = \frac{1}{\sum_{u=1}^{\nu} \sum_{w=\nu+1}^{m} \lambda_{u,w}} \sum_{u=1}^{\nu} \sum_{w=\nu+1}^{m} \lambda_{u,w} P_{u,w}, \qquad \lambda_{u,w} > 0$$

äquivalente Martingalmaße.

Beweis: Offensichtlich gilt $P(\{\omega\}) \in (0,1)$. Außerdem gilt

$$\sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) = \frac{1}{\sum_{u=1}^{\nu} \sum_{w=\nu+1}^{m} \lambda_{u,w}} \sum_{u=1}^{\nu} \sum_{w=\nu+1}^{m} \lambda_{u,w} \sum_{\omega \in \Omega} P_{u,w}(\{\omega\}) = 1$$

und

$$E_{P}(\tilde{G}_{T}(\phi)) = \frac{1}{\sum_{u=1}^{\nu} \sum_{w=\nu+1}^{m} \lambda_{u,w}} \sum_{u=1}^{\nu} \sum_{w=\nu+1}^{m} \lambda_{u,w} E_{P_{u,w}}(\tilde{G}_{T}(\phi)) = 0, \quad \forall \phi \in \Phi_{s}.$$

Möglicherweise stellen die Maße P aus Korollar 2.15 sogar alle äquivalenten Martingalmaße des zugrunde liegenden Marktes dar, darauf wird hier jedoch nicht näher eingegangen.

2.3.2 Mehr-Perioden-Märkte mit einem Risikogut

Zusammen mit mit Satz 2.5 und den Ergebnisse aus Ein-Perioden-Märkten ist es nun möglich, Aussagen über Mehr-Perioden-Märkte zu treffen. Aus den bereits oben genannten Gründen werden nur Märkte mit einem einzigen Risikogut untersucht, und diese nur exemplarisch. Ziel dieses Abschnitts ist es nicht so sehr allgemeine Aussagen über Mehr-Perioden-Märkte zu treffen, sondern anhand von zwei Beispielen das Prinzip der Zerlegung und Zusammensetzung von Märkten zu verdeutlichen.

2.16 Beispiel: Gegeben sei ein Drei-Stufen-Zwei-Perioden-Markt mit einem Risikogut S und den Parametern $T=2, d=1, \Omega=\{\omega_1,\ldots,\omega_9\}, A_1=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}, A_2=\{\omega_4,\omega_5,\omega_6\}, A_3=\{\omega_7,\omega_8,\omega_9\}, \mathfrak{F}_0=(\Omega,\phi), \mathfrak{F}_1=\sigma(A_1,A_2,A_3), \mathfrak{F}_2=\mathfrak{P}(\Omega).$ Es sei $i=\frac{1}{10}$, und die Volatilitäten seien in jedem Ast in jeder Periode identisch, wie in Beispiel 2.11, hier der besseren Übersicht halber als Spaltenvektoren nach Bemerkung 1.2 dargestellt mit

$$\begin{pmatrix} \sigma^1(A_1) \\ \sigma^1(A_2) \\ \sigma^1(A_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^2(\omega_1) \\ \sigma^2(\omega_2) \\ \sigma^2(\omega_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^2(\omega_4) \\ \sigma^2(\omega_5) \\ \sigma^2(\omega_6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^2(\omega_7) \\ \sigma^2(\omega_8) \\ \sigma^2(\omega_9) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{10} \\ \frac{6}{10} \\ \frac{-4}{10} \end{pmatrix}.$$

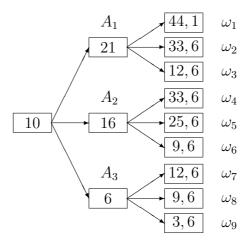


Abbildung 2.5: Drei-Stufen-Zwei-Perioden-Markt

Alle vier nach Satz 2.5 zur Bestimmung der äquivalenten Martingalmaße zu lösenden Gleichungssysteme sind dann identisch und besitzen die aus Beispiel 2.11 bekannte Lösungsmenge

$$\left\{ (-1+2p_3, 2-3p_3, p_3) \mid p_3 \in \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right) \right\}.$$

Damit ergibt sich in der Zusammensetzung beider Perioden nach Satz 2.5 die folgende Menge äquivalenter Martingalmaße

$$\mathbb{P} = \left\{ \mathbf{P}(p_0, p_1, p_2, p_3) \mid p_{3,0}, p_{3,1}, p_{3,2}, p_{3,3} \in \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right) \right\}$$

mit

$$\mathbf{P}(p_{3,0}, p_{3,1}, p_{3,2}, p_{3,3}) = \begin{pmatrix} (-1+2p_{3,0})(-1+2p_{3,1})\\ (-1+2p_{3,0})(2-3p_{3,1})\\ (-1+2p_{3,0})p_{3,1}\\ (2-3p_{3,0})(-1+2p_{3,2})\\ (2-3p_{3,0})(2-3p_{3,2})\\ (2-3p_{3,0})p_{3,2}\\ p_{3,0}(-1+2p_{3,3})\\ p_{3,0}(2-3p_{3,3})\\ p_{3,0}p_{3,3} \end{pmatrix}.$$

Dieses Modell stellt einen speziellen Trinomialbaum dar. Weiteres zum Thema Trinomialbäume mit unterschiedlichen Schwerpunkten findet sich in [2], Kapitel 6, [15], Abschnitt 16.5, [19], Abschnitt 7.4, [20], Abschnitt IV.4 oder [21], Abschnitt 5.2.

2.17 Beispiel: Auch Märkte mit unterschiedlich dimensionierten Ästen können zusammengesetzt werden. Gegeben sei ein Markt mit zwei Perioden und einem Risikogut wie in Beispiel 2.7 das Gut S^1 .

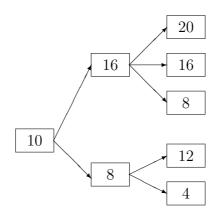


Abbildung 2.6: Zwei-Perioden-Markt mit unterschiedlichen Verzweigungen

Der Ast in der ersten Periode und der untere Ast in der zweiten Periode stellen jeder für sich vollständige Ein-Perioden-Märkte nach Beispiel 1.55 dar. Ihre äquivalenten Martingalmaße sind in der ersten Periode gegeben durch $\mathbf{P}=\left(\frac{3}{8},\frac{5}{8}\right)$ und in der zweiten Periode durch $\mathbf{P}=\left(\frac{3}{5},\frac{2}{5}\right)$. Die äquivalenten Martingalmaße des Astes in der zweiten Periode mit drei Verzweigungen werden analog zu Beispiel 2.7 berechnet, sind also gegeben durch $\mathbb{P}=\left\{\left(\frac{1}{40}+\frac{1}{8}p_3,\frac{3}{80}-\frac{3}{16}p_3,p_3\right)|p_3\in\left(0,\frac{1}{5}\right)\right\}$. Zusammengesetzt ergibt sich als Menge der äquivalenten Martingalmaße des gesamten Maßes die Menge

$$\mathbb{P} = \left\{ \left(\frac{3}{320} + \frac{3}{64} p_3, \frac{9}{640} - \frac{9}{128} p_3, \frac{3}{8} p_3, \frac{3}{8}, \frac{1}{4} \right) \mid p_3 \in \left(0, \frac{1}{5}\right) \right\}.$$

2.4 Bewertung in unvollständigen Märkten

Es sollen nun Preise für Derivate in unvollständigen Märkten konkret ermittelt werden. Wieder wird mit der Betrachtung von Ein-Perioden-Märkten mit einem Risikogut begonnen. Bei den in diesem Abschnitt betrachteten Derivaten handelt es sich ausschließlich um die europäischen Optionen, da mit diesen sehr konkrete Ergebnisse zu erzielen sind.

2.4.1 Ein-Perioden-Märkte mit einem Risikogut

Gegeben sei wie im vorigen Abschnitt ein arbitragefreier m-Stufen-Ein-Perioden-Markt mit $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_m\}, \ m \geq 3, \ T = 1, \ d = 1$ und den bereits eingeführten Abkürzungen. Zusätzlich seien $C_k := C_T(\omega_k)$ und $P_k := P_T(\omega_k)$, jeweils für $k = 1, \ldots, m$, die Preise einer europäischen Call-Option bzw. Put-Option. Es gelte wiederum $\sigma_1 > \ldots > \sigma_m$.

2.18 Lemma: Eine europäische Option mit Ausübungspreis X besitzt eine eindeutige arbitragefreie Bewertung, wenn $X \geq S_1$ oder $X \leq S_m$ ist.

Beweis: Für eine europäische Call-Option mit $X \geq S_1$ und eine europäische Put-Option mit $X \leq S_m$ ist der Preis zur Zeit n = T in allen Zuständen gleich 0. Daher ist auch der einzig faire Preis zu jedem vorigen Zeitpunkt gleich 0.

Eine europäische Call-Option mit $X \leq S_m$ bzw. eine Put-Option mit $X \geq S_1$ besitzt zur Zeit n = T den Preis $S_T - X$ bzw. $X - S_T$. Dieser Wert stellt immer einen replizierbaren Claim dar, denn es gilt für jedes äquivalente Martingalmaß P die Gleichung $E_P(v^T(S_T - X)) = E_P(\tilde{S}_T) - E_P(v^TX) = S_0 - v^TX$ bzw. $E_P(v^T(X - S_T)) = v^TX - S_0$.

Grenzen für eine arbitragefreie Bewertung europäischer Optionen

Der Anfangspreis zur Zeit n=0 einer europäischen Call-Option ergibt sich unter Verwendung der Ergebnisse aus Abschnitt 2.3 aus der Gleichung

$$C_{0} = v E(C_{T})$$

$$= v \left(C_{1} \frac{i - \sigma_{2} + \sum_{k=3}^{m} p_{k}(\sigma_{2} - \sigma_{k})}{\sigma_{1} - \sigma_{2}} + C_{2} \frac{\sigma_{1} - i - \sum_{k=3}^{m} p_{k}(\sigma_{1} - \sigma_{k})}{\sigma_{1} - \sigma_{2}} + \sum_{k=3}^{m} p_{k}C_{k} \right).$$

Der Call-Preis ist eine stetige Funktion in Abhängigkeit von p_k , $k=3,\ldots,m$. Auf der beschränkten und nach Lemma 2.2 abgeschlossenen Menge $\overline{\mathbb{P}}$ nimmt er daher Maximum und Minimum an. Diese werden im Weiteren mit Hilfe der in Definition 2.13 eingeführten Randmartingalmaße $P_{u,w}$ berechnet. Das folgende Lemma zeigt, dass an jedem Call-Preis

eines nicht äquivalenten Martingalmaßes auch beliebig dicht ein Call-Preis eines äquivalenten Martingalmaßes liegt. Damit folgt insgesamt, dass die arbitragefreien Call-Preise zur Zeit n=0 ein offenes Intervall mit den oben erwähnten Extrema als Grenzen bilden.

2.19 Lemma: In einem arbitragefreien Ein-Perioden-Markt existiert zu jedem nicht äquivalenten Martingalmaß P und jedem beliebigen Derivat D für alle $\varepsilon > 0$ ein äquivalentes Martingalmaß $P_{\varepsilon,D}$, so dass gilt $|D_0(P) - D_0(P_{\varepsilon,D})| < \varepsilon$, wobei $D_0(\cdot)$ hier den arbitragefreien Preis des Derivats zur Zeit n = 0 als Funktion des Maßes bezeichnet, d.h. $D_0(P) = E_P(vD_T)$.

Beweis: Sei $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_m\}$ und P ein nicht äquivalentes Martingalmaß. Nach Satz 1.48 existiert in einem arbitragefreien Markt wenigstens ein äquivalentes Martingalmaß Q. Sei $D_{\max} := \max_{\omega \in \Omega} D_T(\omega), \ p_k := \mathrm{P}(\{\omega_k\}), \ q_k := \mathrm{Q}(\{\omega_k\}) \ \text{und außerdem} \ \hat{q}_k := q_k \cdot \frac{\varepsilon}{mD_{\max}}.$ Dann ist durch

$$P_{\varepsilon,D}(\omega_k) := \hat{p}_k := \frac{p_k + \hat{q}_k}{1 + \sum_{k=1}^m \hat{q}_k}$$

das gesuchte Wahrscheinlichkeitsmaß $P_{\varepsilon,D}$ definiert. Wegen $\hat{q}_k > 0$ gilt auch $\hat{p}_k > 0$ und wegen

$$\sum_{k=1}^{m} P_{\varepsilon,D}(\{\omega_k\}) = \frac{\sum_{k=1}^{m} (p_k + \hat{q}_k)}{1 + \sum_{k=1}^{m} \hat{q}_k} = 1$$

ist $P_{\varepsilon,D}$ in der Tat ein äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß, das aufgrund von

$$E_{P_{\varepsilon,D}}(\tilde{G}_T(\phi)) = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{m} \hat{q}_k} \left(E_P(\tilde{G}_T(\phi)) + \frac{\varepsilon}{mD_{\max}} E_Q(\tilde{G}_T(\phi)) \right) = 0, \quad \forall \phi \in \Phi_s$$

auch die Martingaleigenschaft besitzt. Schließlich ist

$$|D_{0}(P) - D_{0}(P_{\varepsilon,D})| = \left| E_{P}(vD_{T}) - E_{P_{\varepsilon,D}}(vD_{T}) \right|$$

$$= \left| \sum_{k=1}^{m} p_{k}vD_{T}(\omega_{k}) - \sum_{k=1}^{m} \frac{p_{k} + \hat{q}_{k}}{1 + \sum_{\nu=1}^{m} \hat{q}_{\nu}} vD_{T}(\omega_{k}) \right|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{m} vD_{T}(\omega_{k}) \left| p_{k} - \frac{p_{k} + \hat{q}_{k}}{1 + \sum_{\nu=1}^{m} \hat{q}_{\nu}} \right|$$

$$= \sum_{k=1}^{m} vD_{T}(\omega_{k}) \frac{\left| p_{k} \sum_{\nu=1}^{m} \hat{q}_{\nu} - \hat{q}_{k} \right|}{1 + \sum_{l=1}^{m} \hat{q}_{\nu}}$$

$$\leq \sum_{k=1}^{m} v D_{T}(\omega_{k}) \left| p_{k} \frac{\varepsilon}{m D_{\max}} - q_{k} \frac{\varepsilon}{m D_{\max}} \right|$$

$$< \sum_{k=1}^{m} v D_{T}(\omega_{k}) \frac{\varepsilon}{m D_{\max}}$$

$$< \varepsilon.$$

2.20 Korollar: Auf der Menge $\overline{\mathbb{P}}$ nimmt $C_0(P)$ sein Maximum und Minimum an und es gilt

$$\sup_{P \in \mathbb{P}} C_0(P) = \max_{P \in \overline{\mathbb{P}}} C_0(P) \quad und \quad \inf_{P \in \mathbb{P}} C_0(P) = \min_{P \in \overline{\mathbb{P}}} C_0(P).$$

Beweis: Da der Erwartungswert als Funktion des Wahrscheinlichkeitsmaßes stetig ist und $\overline{\mathbb{P}}$ nach Lemma 2.2 abgeschlossen ist, nimmt er dort Maximum und Minimum an. Zusätzlich ist jedes Element aus dem Bild von $\overline{\mathbb{P}}$ nach Lemma 2.19 Häufungspunkt im Bild von \mathbb{P} . \square

Um nun die Grenzen für die arbitragefreie Bewertung einer europäischen Call-Option anzugeben, müssen einige Fallunterscheidungen vorgenommen werden. Es ist bereits aus Lemma 2.18 bekannt, dass für die Fälle $X \geq S_1$ und $S_m \geq X$ eindeutige Call-Preise existieren, da die Option unter diesen Bedingungen replizierbar ist. Daher wird nun ausschließlich die Situation $S_1 > X > S_m$ betrachtet. Aus Abschnitt 2.5.1 folgt dann unter den gegebenen Voraussetzungen des Marktes, dass die Option genau dann replizierbar ist, wenn es Parameter $\lambda^0, \lambda^1 \in \mathbb{R}$ gibt, so dass gilt $C_k = \lambda^0 r + \lambda^1 S_k$, für alle $k = 1, \ldots, m$. Aus $0 = C_m = \lambda^0 r + \lambda^1 S_k$ und $S_1 - X = C_1 = \lambda^0 r + \lambda^1 S_1$ folgt dann $\lambda_1 = \frac{S_1 - X}{S_1 - S_m}$ und $\lambda_0 = -\frac{S_1 - X}{S_1 - S_m} v S_m$. Damit ist jedoch die Gleichung $\max\{S_2 - X, 0\} = C_2 = \lambda^0 r + \lambda^1 S_2$ nicht erfüllt. Daher kann eine europäische Option unter den gegebenen Voraussetzungen des Marktes in der Situation $S_1 > X > S_m$ nicht replizierbar sein. Es ist also sinnvoll, unter diesen Voraussetzungen Grenzen für eine arbitragefreie Bewertung zu ermitteln.

1. Fall: Sei $S_1 > X > S_2$. Dann gilt

$$C_0 = v(S_1 - X) \frac{i - \sigma_2 + \sum_{k=3}^{m} p_k(\sigma_2 - \sigma_k)}{\sigma_1 - \sigma_2}.$$

 C_0 wird minimal bzw. maximal, wenn $\sum_{k=3}^m p_k(\sigma_2 - \sigma_k)$ minimal bzw. maximal wird.

I. Minima

a) Sei zunächst $i \geq \sigma_2$. Dann ist $P_{1,2}$ nach Lemma 2.14 ein Martingalmaß, und für dieses nimmt C_0 sein Minimum an, weil hierfür $\sum_{k=3}^m p_k(\sigma_2 - \sigma_k) = 0$ offensichtlich minimal ist. Dann gilt

$$\min_{P \in \overline{\mathbb{P}}} C_0 = v(S_1 - X) \frac{i - \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2}.$$

b) Sei nun $\sigma_2 > i$. Dann nimmt C_0 z.B. für das Martingalmaß $P_{2,3}$ das Minimum

$$\min_{P \in \overline{\mathbb{P}}} C_0 = v(S_1 - X) \frac{i - \sigma_2 + \frac{\sigma_2 - i}{\sigma_2 - \sigma_3} (\sigma_2 - \sigma_3)}{\sigma_1 - \sigma_2} = 0$$

an, denn C_0 kann bekanntlich nicht negativ werden.

II. Maxima

Nach Lemma 2.14 ist $P_{1,m}$ ein Martingalmaß. Für dieses Maß ist C_0 maximal, denn angenommen, es gibt ein anderes Martingalmaß Q, mit $Q(\{\omega_k\}) =: q_k, \ k = 1, \ldots, m$, für das gilt $\sum_{k=l+1}^m q_k(\sigma_2 - \sigma_k) > \sum_{k=l+1}^m p_k(\sigma_2 - \sigma_k) = \frac{\sigma_1 - i}{\sigma_1 - \sigma_m}(\sigma_2 - \sigma_m)$, dann folgt

$$\sum_{k=l+1}^{m-1} q_k(\sigma_2 - \sigma_k) > \left(\frac{\sigma_1 - i}{\sigma_1 - \sigma_m} - q_m\right) (\sigma_2 - \sigma_m)$$

$$\iff q_m > \frac{\sigma_1 - i}{\sigma_1 - \sigma_m} - \sum_{k=l+1}^{m-1} q_k \frac{\sigma_2 - \sigma_k}{\sigma_2 - \sigma_m},$$

und damit

$$q_{2}(\sigma_{1} - \sigma_{2}) = \sigma_{1} - i - \sum_{k=3}^{m} q_{k}(\sigma_{1} - \sigma_{k})$$

$$< \sigma_{1} - i - \sum_{k=3}^{m-1} q_{k}(\sigma_{1} - \sigma_{k}) - \frac{\sigma_{1} - i}{\sigma_{1} - \sigma_{m}}(\sigma_{1} - \sigma_{m}) + \sum_{k=3}^{m-1} q_{k} \frac{\sigma_{2} - \sigma_{k}}{\sigma_{2} - \sigma_{m}}(\sigma_{1} - \sigma_{m})$$

$$= \sum_{k=3}^{m-1} q_{k} \frac{(\sigma_{2} - \sigma_{k})(\sigma_{1} - \sigma_{m}) - (\sigma_{1} - \sigma_{k})(\sigma_{2} - \sigma_{m})}{\sigma_{2} - \sigma_{m}}$$

$$= -\sum_{k=3}^{m-1} q_{k} \frac{(\sigma_{1} - \sigma_{2})(\sigma_{k} - \sigma_{m})}{\sigma_{2} - \sigma_{m}} < 0$$

ein Widerspruch. Daher ist

$$\max_{P \in \overline{\mathbb{P}}} C_0 = v(S_1 - X) \frac{i - \sigma_2 + \frac{\sigma_1 - i}{\sigma_1 - \sigma_m} (\sigma_2 - \sigma_m)}{\sigma_1 - \sigma_2}$$

$$= v(S_1 - X) \frac{(i - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_m) + (\sigma_1 - i)(\sigma_2 - \sigma_m)}{(\sigma_1 - \sigma_m)(\sigma_1 - \sigma_2)}$$

$$= v(S_1 - X) \frac{i - \sigma_m}{\sigma_1 - \sigma_m}.$$

2. Fall: Sei $S_l \ge X > S_{l+1}$, für l = 2, ..., m-1. Dann gilt

$$C_{0} = v(C_{1}p_{1} + C_{2}p_{2}) + v \sum_{k=3}^{l} C_{k}p_{k}$$

$$= vS_{0}((1 + \sigma_{1})p_{1} + (1 + \sigma_{2})p_{2}) - vX(p_{1} + p_{2}) + v \sum_{k=3}^{l} C_{k}p_{k}$$

$$= vS_{0} \left(\sigma_{1}p_{1} + \sigma_{2}p_{2} + 1 - \sum_{k=3}^{m} p_{k}\right) - vX\left(1 - \sum_{k=3}^{m} p_{k}\right) + v \sum_{k=3}^{l} C_{k}p_{k}$$

$$= vS_{0} \left(\frac{\sigma_{1}i - \sigma_{2}i + \sum_{k=3}^{m} p_{k}(\sigma_{2}\sigma_{k} - \sigma_{1}\sigma_{k})}{\sigma_{1} - \sigma_{2}} + 1 - \sum_{k=3}^{m} p_{k}\right)$$

$$- vX\left(1 - \sum_{k=3}^{m} p_{k}\right) + v \sum_{k=3}^{l} C_{k}p_{k}$$

$$= vS_{0} \left(r - \sum_{k=3}^{m} p_{k}(1 + \sigma_{k})\right) - vX\left(1 - \sum_{k=3}^{m} p_{k}\right) + v \sum_{k=3}^{l} C_{k}p_{k}$$

$$= S_{0} - vX + v \sum_{k=3}^{m} p_{k}(X - S_{k}) + v \sum_{k=3}^{l} p_{k}(S_{k} - X)$$

$$= S_{0} - vX + v \sum_{k=l+1}^{m} p_{k}(X - S_{k}).$$

Nach Voraussetzung ist $X - S_k > 0$, für $k \ge l + 1$, daher wird C_0 minimal bzw. maximal, wenn $\sum_{k=l+1}^{m} p_k(X - S_k)$ minimal bzw. maximal wird.

I. Minima

Sei $\sigma_u \geq i > \sigma_{u+1}$, für $u \in \{1, \dots, m-1\}$. Dann ist C_0 minimal für das Martingalmaß $P_{u,u+1}$, wie im Folgenden nachgerechnet wird.

a) Sei u < l. Dann ist $\sum_{k=l+1}^{m} p_k(X - S_k) = 0$ offensichtlich minimal, und es gilt $\min_{P \in \overline{\mathbb{P}}} C_0 = S_0 - vX$.

Wegen $vX < vS_l < vS_u < S_0 \frac{1+\sigma_u}{1+i} < S_0$ gilt hier tatsächlich $S_0 - vX > 0$.

b) Sei u > l. Dann ist

$$\min_{\mathbf{P} \in \overline{\mathbb{P}}} C_0 = S_0 - vX + v(p_u(X - S_u) + p_{u+1}(X - S_{u+1}))$$

$$= S_0 - vX + v \frac{(rS_0 - S_{u+1})(X - S_u) + (S_u - rS_0)(X - S_{u+1})}{S_u - S_{u+1}}$$

$$= S_0 - vX + v(X - rS_0) = 0.$$

denn C_0 kann nicht negativ werden.

c) Sei u=l. Dann ist $\sum_{k=l+1}^m p_k(X-S_k)=\frac{\sigma_l-i}{\sigma_l-\sigma_{l+1}}(X-S_{l+1})$. Angenommen, es gibt ein anderes Martingalmaß Q, mit $Q(\{\omega_k\})=:q_k,\ k=1,\ldots,m$, für das gilt $\sum_{k=l+1}^m q_k(X-S_k)<\frac{\sigma_l-i}{\sigma_l-\sigma_{l+1}}(X-S_{l+1})$, dann folgt

$$\sum_{k=l+2}^{m} q_k(X - S_k) < \left(\frac{\sigma_l - i}{\sigma_l - \sigma_{l+1}} - q_{l+1}\right) (X - S_{l+1})$$

$$\iff q_{l+1} < \frac{\sigma_l - i}{\sigma_l - \sigma_{l+1}} - \sum_{k=l+2}^{m} q_k \frac{X - S_k}{X - S_{l+1}},$$

und damit wegen $S_l > X$ nach Voraussetzung

$$\begin{split} q_1(\sigma_1 - \sigma_2) &= i - \sigma_2 + \sum_{k=3}^m q_k(\sigma_2 - \sigma_k) \\ &< i - \sigma_2 + \sum_{k=3}^l q_k(\sigma_2 - \sigma_k) + \sum_{k=l+2}^m q_k(\sigma_2 - \sigma_k) \\ &+ \frac{\sigma_l - i}{\sigma_l - \sigma_{l+1}} (\sigma_2 - \sigma_{l+1}) - \sum_{k=l+2}^m q_k \frac{X - S_k}{X - S_{l+1}} (\sigma_2 - \sigma_{l+1}) \\ &= \frac{i - \sigma_{l+1}}{\sigma_l - \sigma_{l+1}} (\sigma_l - \sigma_2) + \sum_{k=3}^l q_k (\sigma_2 - \sigma_k) \\ &+ \sum_{k=l+2}^m q_k \left(\sigma_2 - \sigma_k - \frac{X - S_k}{X - S_{l+1}} (\sigma_2 - \sigma_{l+1}) \right) \\ &\leq \left(\frac{i - \sigma_{l+1}}{\sigma_l - \sigma_{l+1}} - \sum_{k=3}^l q_k \right) (\sigma_l - \sigma_2) \\ &+ \sum_{k=l+2}^m q_k \frac{(\sigma_2 - \sigma_k)(X - S_{l+1}) - (X - S_k)(\sigma_2 - \sigma_{l+1})}{X - S_{l+1}} \\ &= \frac{S_l - S_2}{S_0} \left(\frac{i - \sigma_{l+1}}{\sigma_l - \sigma_{l+1}} - \sum_{k=3}^l q_k \right) + (X - S_2) \sum_{k=l+2}^m q_k \frac{\sigma_{l+1} - \sigma_k}{X - S_{l+1}} \\ &\leq \frac{S_l - S_2}{S_0} \left(\frac{i - \sigma_{l+1}}{\sigma_l - \sigma_{l+1}} - \sum_{k=3}^l q_k + S_0 \sum_{k=l+2}^m q_k \frac{\sigma_{l+1} - \sigma_k}{X - S_{l+1}} \right) \\ &= (\sigma_l - \sigma_2) \left(\frac{i - \sigma_{l+1}}{\sigma_l - \sigma_{l+1}} - 1 + q_1 + q_2 + \sum_{k=l+2}^m q_k + q_{l+1} + \sum_{k=l+2}^m q_k \frac{S_{l+1} - S_k}{X - S_{l+1}} \right) \end{split}$$

$$< (\sigma_{l} - \sigma_{2}) \left(\frac{i - \sigma_{l+1}}{\sigma_{l} - \sigma_{l+1}} - 1 + q_{1} + q_{2} + \sum_{k=l+2}^{m} q_{k} \left(1 - \frac{S_{l+1} - S_{k}}{X - S_{l+1}} \right) + \frac{\sigma_{l} - i}{\sigma_{l} - \sigma_{l+1}} - \sum_{k=l+2}^{m} q_{k} \frac{X - S_{k}}{X - S_{l+1}} \right)$$

$$= (\sigma_{l} - \sigma_{2})(q_{1} + q_{2}).$$

Daraus folgt aber wegen $q_1(\sigma_1 - \sigma_l) < q_2(\sigma_l - \sigma_2) \le 0$ ein Widerspruch. Daher ist

$$\min_{P \in \overline{\mathbb{P}}} C_0 = S_0 - vX + v \frac{\sigma_l - i}{\sigma_l - \sigma_{l+1}} (X - S_{l+1})
= S_0 \left(1 - \frac{(1 + \sigma_{l+1})(\sigma_l - i)}{(1 + i)(\sigma_l - \sigma_{l+1})} \right) - vX \left(\frac{\sigma_l - i}{\sigma_l - \sigma_{l+1}} - 1 \right)
= v(S_l - X) \frac{i - \sigma_{l+1}}{\sigma_l - \sigma_{l+1}}.$$

II. Maxima

Für das Maß $P_{1,m}$ ist C_0 maximal, denn angenommen, es gibt ein anderes Martingalmaß Q, mit $Q(\{\omega_k\}) =: q_k, \ k = 1, \ldots, m$, für das gilt $\sum_{k=l+1}^m q_k(X - S_k) > \sum_{k=l+1}^m p_k(X - S_k) = \frac{\sigma_1 - i}{\sigma_1 - \sigma_m}(X - S_m)$, dann folgt

$$\sum_{k=l+1}^{m-1} q_k(X - S_k) > \left(\frac{\sigma_1 - i}{\sigma_1 - \sigma_m} - q_m\right) (X - S_m)$$

$$\iff q_m > \frac{\sigma_1 - i}{\sigma_1 - \sigma_m} - \sum_{k=l+1}^{m-1} q_k \frac{X - S_k}{X - S_m},$$

und damit wegen $S_1 > X > S_m$ nach Voraussetzung

$$q_{2}(\sigma_{1} - \sigma_{2}) = \sigma_{1} - i - \sum_{k=3}^{m} q_{k}(\sigma_{1} - \sigma_{k})$$

$$< \sigma_{1} - i - \sum_{k=3}^{m-1} q_{k}(\sigma_{1} - \sigma_{k}) - \frac{\sigma_{1} - i}{\sigma_{1} - \sigma_{m}}(\sigma_{1} - \sigma_{m}) + \sum_{k=l+1}^{m-1} q_{k} \frac{X - S_{k}}{X - S_{m}}(\sigma_{1} - \sigma_{m})$$

$$= \sum_{k=l+1}^{m-1} q_{k} \left(\frac{X - S_{k}}{X - S_{m}}(\sigma_{1} - \sigma_{m}) - (\sigma_{1} - \sigma_{k}) \right)$$

$$= \sum_{k=l+1}^{m-1} \frac{q_{k}}{S_{0}} \frac{(X - S_{k})(S_{1} - S_{m}) - (X - S_{m})(S_{1} - S_{k})}{X - S_{m}}$$

$$= -\sum_{k=l+1}^{m-1} \frac{q_{k}}{S_{0}} \frac{(S_{1} - X)(S_{k} - S_{m})}{X - S_{m}} < 0,$$

also ein Widerspruch. Daher gilt

$$\max_{\mathbf{P} \in \overline{\mathbb{P}}} C_0 = S_0 - vX + v \frac{\sigma_1 - i}{\sigma_1 - \sigma_m} (X - S_m)
= S_0 \left(1 - \frac{(1 + \sigma_m)(\sigma_1 - i)}{(1 + i)(\sigma_1 - \sigma_m)} \right) - vX \left(\frac{\sigma_1 - i}{\sigma_1 - \sigma_m} - 1 \right)
= v(S_1 - X) \frac{i - \sigma_m}{\sigma_1 - \sigma_m}.$$

Die Zusammenfassung dieser Ergebnisse liefert folgende Aussage. Für einen Ausübungspreis $S_k \geq X > S_{k+1}, \ k=1,\ldots,m-1$ liegen die arbitragefreien Optionspreise einer europäischen Call-Option im Intervall

$$C_{0} \in \begin{cases} \left(S_{0} - vX , v(S_{1} - X) \frac{i - \sigma_{m}}{\sigma_{1} - \sigma_{m}}\right) &, i > \sigma_{k} \\ \left(v(S_{k} - X) \frac{i - \sigma_{k+1}}{\sigma_{k} - \sigma_{k+1}} , v(S_{1} - X) \frac{i - \sigma_{m}}{\sigma_{1} - \sigma_{m}}\right) , \sigma_{k} \geq i > \sigma_{k+1} \\ \left(0 , v(S_{1} - X) \frac{i - \sigma_{m}}{\sigma_{1} - \sigma_{m}}\right) &, \sigma_{k+1} \geq i \end{cases}$$

Damit ist gezeigt, dass sich die Grenzen für die arbitragefreien Optionspreise in einem unvollständigen Ein-Perioden-Markt direkt aus den Parametern des Marktmodells berechnen lassen. Vergleicht man die Intervallgrenzen nämlich mit dem Optionspreis aus Beispiel 1.55, so ist der maximale Optionspreis gerade der Preis, der sich für einen vollständigen arbitragefreien Zwei-Stufen-Ein-Perioden-Markt mit den Endkursen S_1 und S_m ergibt, d.h. für die zwei Zustände, in denen die Kurse am weitesten vom Ausübungspreis X entfernt sind. Ebenso ist der minimale Optionspreis gerade der Preis, der sich für einen vollständigen Zwei-Stufen-Ein-Perioden-Markt mit den Endkursen S_k und S_{k+1} ergibt, d.h. für die zwei Zustände, in denen die Kurse am nächsten am Ausübungspreis X liegen, sofern dieser Markt arbitragefrei ist, also unter der Voraussetzung $\sigma_k > i > \sigma_{k+1}$. Für den maximalen Optionspreis ist die Voraussetzung für die Arbitragefreiheit $\sigma_1 > i > \sigma_m$ im Zwei-Stufen-Ein-Perioden-Markt sowieso als allgemeine Bedingung für die Arbitragefreiheit des m-Stufen-Ein-Perioden-Marktes vorausgesetzt, deswegen mussten bei der Berechnung der Maxima auch keine Fallunterscheidungen vorgenommen werden. Das Beispiel 2.21 verdeutlicht diesen Sachverhalt noch einmal. Abbildung 2.7 zeigt den minimalen und maximalen Call-Preis in Abhängigkeit vom Zinssatz i. Im grauen Bereich zwischen den zwei Grafen befinden sich die arbitragefreien Call-Preise.

2.21 Beispiel: Gegeben sei ein Drei-Stufen-Ein-Perioden-Markt mit den Parametern und Werten aus Beispiel 2.11.

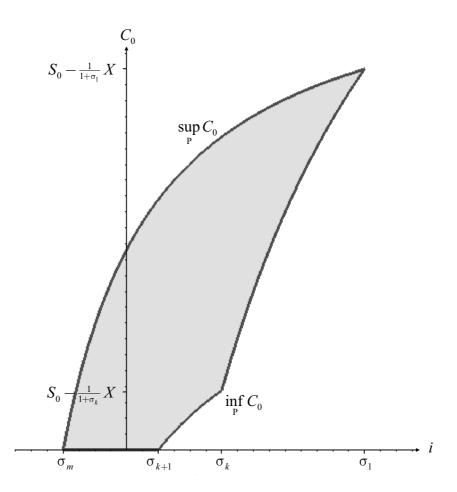


Abbildung 2.7: Spanne für den arbitragefreien Anfangspreis einer europäischen Call-Option mit Ausübungspreis $X \in (S_k, S_{k+1})$ im m-Stufen-Ein-Perioden-Markt in Abhängigkeit vom risikolosen Zins i

Für die Bewertung von europäischen Call-Optionen gilt für $S_1 > X > S_2$

$$C_{0} \in \begin{cases} \left(v(S_{1} - X) \frac{i - \sigma_{2}}{\sigma_{1} - \sigma_{2}}, v(S_{1} - X) \frac{i - \sigma_{3}}{\sigma_{1} - \sigma_{3}} \right), & i > \sigma_{2} \\ \left(0, v(S_{1} - X) \frac{i - \sigma_{3}}{\sigma_{1} - \sigma_{3}} \right), & \sigma_{2} \ge i \end{cases}$$

und für $S_2 > X > S_3$

$$C_{0} \in \left\{ \begin{array}{l} \left(S_{0} - vX , v(S_{1} - X) \frac{i - \sigma_{3}}{\sigma_{1} - \sigma_{3}}\right) , i > \sigma_{2} \\ \left(v(S_{2} - X) \frac{i - \sigma_{3}}{\sigma_{2} - \sigma_{3}} , v(S_{1} - X) \frac{i - \sigma_{3}}{\sigma_{1} - \sigma_{3}}\right) , \sigma_{2} \geq i \end{array} \right.$$

Für den arbitragefreien Preis einer europäischen Call-Option mit Ausübungspreis X=11

ergibt sich dann wegen $S_2 > X > S_3$ und $\sigma_2 > i > \sigma_3$ die Bedingung

$$2,\overline{72} = \frac{30}{11} < C_0 < \frac{10}{3} = 3,\overline{3}.$$

Abbildung 2.8 verdeutlicht den Zusammenhang zwischen den Grenzen des Optionspreises des unvollständigen Modells und den Optionspreisen zugehöriger vollständiger Modelle. Zur Berechnung von C_0^1 und C_0^3 siehe Beispiel 1.55.

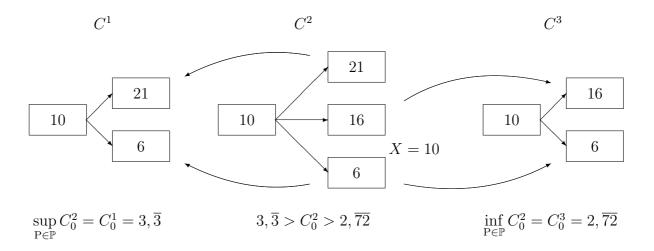


Abbildung 2.8: Zusammenhang von Optionspreisen unvollständiger und vollständiger Märkte

Auf ein derartiges Ergebnis für den Drei-Stufen-Ein-Perioden-Markt kommt auch [2], Abschnitt 1.6. Eine Berechnung des Intervalls, in dem der arbitragefreie Preis eines Derivats im allgemeinen unvollständigen Ein-Perioden-Markt liegen kann, mittels eines Computeralgebrasystems nimmt [29], Abschnitt 1.7 vor.

2.22 Beispiel: Der folgende Ein-Perioden-Markt soll verdeutlichen, dass unvollständige Märkte, die sich bezüglich ihrer Volatilitäten nur gering von vollständigen Märkten unterscheiden, d.h. die im wesentlichen eine Auf- oder eine Abwärtsbewegung machen, auch einen nahezu eindeutigen Optionspreis liefern. Gegeben sein ein Drei-Stufen-Ein-Perioden-Markt mit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}, T = 1, d = 1,$ einem Gut mit den Parametern $S_0 = 10, \sigma_1 = 1,$ $\sigma_2 = \frac{-7}{10}, \sigma_3 = \frac{-8}{10}, i = \frac{1}{10}$ und einer Call-Option C darauf mit Ausübungspreis X = 4.

In diesen Markt beträgt die obere Grenze für arbitragefreie Call-Preise $\sup_{P\in\mathbb{P}} C_0 = 8,00$ und die untere Grenze $\inf_{P\in\mathbb{P}} C_0 \approx 7,94$, d.h. die Differenz beträgt nur etwa 0,06. Der Preis ist also nahezu eindeutig.

Aus Kenntnis des Intervalls, in dem eine arbitragefreie Bewertung für Call-Optionen vorgenommen werden kann, folgt sofort ein Intervall für die arbitragefreie Bewertung von

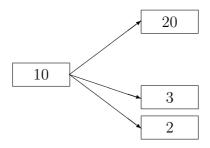


Abbildung 2.9: Drei-Stufen-Ein-Perioden-Markt

Put-Optionen, indem die Put-Call-Parity-Relation aus Lemma 1.56 zu Rate gezogen wird. Damit folgt, dass jeder arbitragefreie Preis einer Put-Option mit Ausübungspreis X mit Hilfe eines arbitragefreien Preises einer Call-Option mit gleichem Ausübungspreis X bezüglich desselben zugrunde liegenden äquivalenten Martingalmaßes mittels $P_0 = C_0 - S_0 + vX$ dargestellt werden kann. Daher folgt

$$\sup_{\mathbf{P} \in \mathbb{P}} P_0 = \sup_{\mathbf{P} \in \mathbb{P}} C_0 - S_0 + vX$$

$$= S_0(v(1+\sigma_1)-1) + vX \left(1 - \frac{i-\sigma_m}{\sigma_1 - \sigma_m}\right)$$

$$= S_0 \left(v(1+\sigma_m)\frac{i-\sigma_1}{\sigma_1 - \sigma_m}\right) + vX\frac{\sigma_1 - i}{\sigma_1 - \sigma_m}$$

$$= v(X - S_m)\frac{\sigma_1 - i}{\sigma_1 - \sigma_m}.$$

Analoge Schlussfolgerungen können für $\inf_{P\in\mathbb{P}} P_0$ gezogen werden, so dass die arbitragefreien Optionspreise einer europäischen Put-Option mit einem Ausübungspreis $S_k \geq X > S_{k+1}, \ k=1,\ldots,m-1$ im Intervall

$$P_{0} \in \begin{cases} \left(0, v(X - S_{m}) \frac{\sigma_{1} - i}{\sigma_{1} - \sigma_{m}}\right), & i > \sigma_{k} \\ \left(v(X - S_{k+1}) \frac{\sigma_{k} - i}{\sigma_{k} - \sigma_{k+1}}, v(X - S_{m}) \frac{\sigma_{1} - i}{\sigma_{1} - \sigma_{m}}\right), & \sigma_{k} \geq i > \sigma_{k+1} \\ \left(vX - S_{0}, v(X - S_{m}) \frac{\sigma_{1} - i}{\sigma_{1} - \sigma_{m}}\right), & \sigma_{k+1} \geq i \end{cases}$$

liegen.

2.4.2 Mehr-Perioden-Märkte mit einem Risikogut

Gegeben sein nun ein m-Stufen-T-Perioden-Markt mit einem Risikogut S und zugrunde liegendem Wahrscheinlichkeitsraum Ω mit $|\Omega| = m^T$. Der Markt sei ein Multinomial-

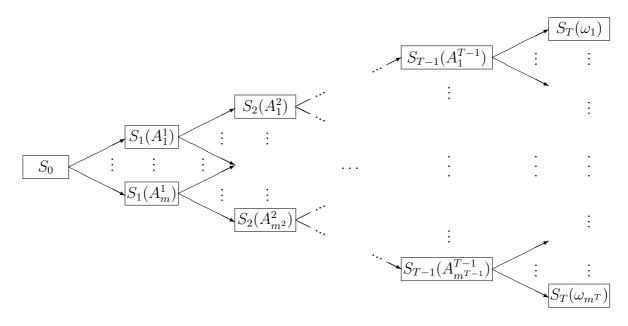


Abbildung 2.10: m-Stufen-T-Perioden-Markt: Multinomialbaummodell

baum, d.h. die Volatilitäten $(\sigma_1, \ldots, \sigma_T)$ gleichen sich in jedem Ast des Marktes. Es seien $A_1^n, \ldots, A_{m^n}^n \in \mathcal{A}^n$ die Atome, die die Zustände des Marktes zum Zeitpunkt $n \in \{0, \ldots, T\}$ beschreiben. S_n ist auf A_k^n konstant, daher sei $S_n(A_k^n) := S_n(\omega)$, für ein $\omega \in \mathcal{A}_k^n$. Seien weiterhin analog zum vorigen Abschnitt folgende Bezeichnungen definiert

$$\sigma_{1} := \max_{\omega \in A_{k}^{n-1}} \sigma_{n}(\omega)
\sigma_{m} := \min_{\omega \in A_{k}^{n-1}} \sigma_{n}(\omega)
S_{1}^{k} := \max_{\omega \in A_{k}^{T-1}} S_{T}(\omega) = S_{T-1}|_{A_{k}^{T-1}} (1 + \sigma_{1}), \quad k = 0, \dots, m^{T-1}.$$

Aufgrund der Multinomialeigenschaften gleichen sich σ_1 und σ_m für alle $k = 0, \dots, m^n$ und $n = 1, \dots, T$. Mit den Ergebnissen des vorigen Abschnitts ist es unter der Voraussetzung

$$X \in (S_T(\omega_1), S_T(\omega_m)) = ((1 + \sigma_1)^{T-1} (1 - \sigma_m) S_0, (1 + \sigma_1)^T S_0)$$

möglich, eine obere Grenze für alle Call-Preise C_n , $n=0,\ldots,T-1$ anzugeben. Für den Call-Preis jedes Astes ausgehend von einem Zustand im Zeitpunkt n=T-1 gilt dann nämlich

$$\sup_{P \in \mathbb{P}} C_{T-1}|_{A_k^{T-1}} = \begin{cases} v(S_1^k - X) \frac{i - \sigma_m}{\sigma_1 - \sigma_m}, & S_1^k > X \\ 0, & S_1^k \le X \end{cases}.$$

Diese obere Grenze ermittelt sich wie folgt. Liegt der höchste Preis eines Astes über dem Ausübungspreis der Call-Option, so gilt für den maximalen Call-Preis die im vorigen Abschnitt berechnete Formel. Liegt der höchste Preis eines Astes unter dem Ausübungspreis

der Call-Option, so besitzt der Call in diesem Ast den Wert 0. Zusammengefasst lässt sich der Call-Preis in der folgenden Form schreiben

$$\sup_{P \in \mathbb{P}} C_{T-1}|_{A_k^{T-1}} = \max \left\{ v \left(S_{T-1}|_{A_k^{T-1}} (1 + \sigma_1) - X \right) \frac{i - \sigma_m}{\sigma_1 - \sigma_m}, 0 \right\}.$$

Es seien definiert

$$\alpha := \frac{1+i}{1+\sigma_1} \cdot \frac{\sigma_1 - \sigma_m}{i - \sigma_m} > 0$$

und

$$X_n := X \frac{1}{(1+\sigma_1)^{T-n}}, \quad n = 0, \dots, T-1.$$

Damit gilt

$$\sup_{P \in \mathbb{P}} (\alpha C_{T-1}|_{A_k^{T-1}}) = \max \left\{ \left(S_{T-1}|_{A_k^{T-1}} - X_{T-1} \right), 0 \right\}.$$

Da α unabhängig von k gewählt ist, kann die Aussage sogar verallgemeinert werden zu

$$\sup_{P \in \mathbb{P}} (\alpha C_{T-1}) = \max \{ (S_{T-1} - X_{T-1}), 0 \}.$$

Dadurch ist sofort ersichtlich, dass αC_{T-1} aufgefasst werden kann als eine neue europäische Call-Option mit Ausübungszeitpunkt T-1 und Ausübungspreis X_{T-1} . Außerdem gilt für X_{T-1} wieder

$$X_{T-1} \in (S_{T-1}(A_1^{T-1}), S_{T-1}(A_m^{T-1})) = ((1+\sigma_1)^{T-2}(1-\sigma_m)S_0, (1+\sigma_1)^{T-1}S_0)$$

so dass die obere Grenze für den arbitragefreien Call-Preis von αC zum Zeitpunkt n=T-2 analog der zum Zeitpunkt n=T-1 von C berechnet werden kann. Dieses Verfahren kann rekursiv bis zum Zeitpunkt n=0 fortgesetzt werden. Es ergibt sich dann als obere Grenze für den Call-Preis zum Zeitpunkt $n\in\{0,\ldots,T\}$

$$\sup_{P \in \mathbb{P}} (\alpha^{T-n} C_n) = \max \left\{ (S_{T-n} - X_{T-n}), 0 \right\}$$

$$\iff \sup_{P \in \mathbb{P}} (C_n) = \max \left\{ v^{T-n} \left(S_{T-n} (1 + \sigma_1)^{T-n} - X \right) \left(\frac{i - \sigma_m}{\sigma_1 - \sigma_m} \right)^{T-n}, 0 \right\}.$$

Gegeben sei konkret der Drei-Stufen-Zwei-Perioden-Markt aus Beispiel 2.16. Auf das Risikogut S werde eine europäische Option mit Ausübungspreis X=29,4 ausgegeben. Es gilt

$$\alpha = \frac{1 + \frac{1}{10}}{1 + \frac{11}{10}} \cdot \frac{\frac{11}{10} - \frac{-4}{10}}{\frac{1}{10} - \frac{-4}{10}} = \frac{11}{7}$$

und

$$X_1 = 29.4 \cdot \frac{1}{1 + \frac{11}{10}} = 14$$

 $X_0 = 29.4 \cdot \left(\frac{1}{1 + \frac{11}{10}}\right)^2 = \frac{20}{3}.$

Damit ist die obere Grenze für den Call-Preis zum Zeitpunkt n=1 gegeben durch

$$\sup_{P \in \mathbb{P}} (C_1) = \max \left\{ \frac{7}{11} (S_1 - 14), 0 \right\},\,$$

was sich unter Berücksichtigung von Bemerkung 1.2 folgendermaßen in Zahlen ausdrückt

$$\sup_{P\in\mathbb{P}} \left((C_1(A_1), C_1(A_2), C_1(A_3)) \right) = \left(\frac{49}{11}, \frac{14}{11}, 0 \right).$$

Die obere Grenze zum Zeitpunkt n=0 lautet

$$\sup_{P \in \mathbb{P}} (C_0) = \max \left\{ \frac{49}{121} \left(S_0 - \frac{20}{3} \right), 0 \right\} = \frac{490}{363} \approx 1,31.$$

Setzt man den Markt fort zu einem 3-Stufen-T-Perioden-Markt mit gleichen Volatilitäten in jedem Ast und gibt eine Call-Option C mit Ausübungspreis $X \in (10 \cdot \frac{21^T}{10^T}, 10 \cdot \frac{21^{T-1}}{10^{T-1}} \cdot \frac{6}{10})$ zum Zeitpunkt T heraus, so darf diese anfangs maximal

$$\sup_{P \in \mathbb{P}} (C_0) = \max \left\{ \left(\frac{7}{11} \right)^T \left(S_0 - X \left(\frac{10}{21} \right)^T \right), 0 \right\} = \frac{10 \cdot 7^T}{11^T} - \frac{10^T}{33^T} X$$

kosten, um den Markt arbitragefrei zu behalten.

2.5 Replizierbarkeit von Claims

2.5.1 Generelle Replizierbarkeit

Zusammen mit der Frage nach einer Bewertung für nicht replizierbare Claims muss auch geklärt werden, ob ein gegebener Claim replizierbar ist, denn nur für solche Claims ist eine Bewertung mittels äquivalenter Martingalmaße nach Korollar 1.54 nicht eindeutig. Das Kriterium aus Korollar 1.52 ist für eine konkrete Überprüfung der Replizierbarkeit eines gegebenen Claims nicht immer geeignet, weil dazu im ungünstigen Fall alle äquivalenten Martingalmaße des Marktes bekannt sein müssten und anschließend sämtliche Erwartungswerte verglichen werden müssten. Finden sich nämlich zwei Martingalmaße, die eine unterschiedliche Bewertung des Claims erzeugen, so ist damit zwar festgestellt, dass der Claim nicht replizierbar ist, jedoch können für nicht replizierbare Claims auch viele gleiche Bewertungen für unterschiedliche Martingalmaße existieren, so dass das Kriterium an dieser Stelle nicht notwendig weiterführende Aussagen liefert.

Nach Lemma 1.49 ist ein Claim H genau dann replizierbar, wenn es eine selbstfinanzierende Handelsstrategie ϕ gibt, für die $V_T(\phi) = H$ gilt. Wird der Markt zum Zeitpunkt n = T in seine Äste ausgehend von den Zuständen $A \in \mathcal{A}_{T-1}$ zerlegt, so gilt $V_T(\phi) = H$ genau dann, wenn für alle $A \in \mathcal{A}_{T-1}$ Konstanten $\lambda_A^j \in \mathbb{R}, j = 0, \ldots, d$ existieren, so dass

$$H|_{A} = \sum_{i=0}^{d} \lambda_{A}^{j} S_{T}^{j}|_{A}$$

gilt. Die Selbstfinanzierbarkeitsbedingung $\langle \phi_n, S_n \rangle = \langle \phi_{n+1}, S_n \rangle$ liefert zusätzlich für jeden Zeitpunkt $n=0,\ldots,T-1$ ähnliche lautende Bedingungen, so dass insgesamt zur Prüfung der Replizierbarkeit im allgemeinen Fall eine sehr große Zahl von aufwändig zu bestimmenden Bedingungen vorliegt, um die Replizierbarkeit derart prüfen zu können. In der Tat existiert kein effizientes Kriterium, mit der im Allgemeinen die Replizierbarkeit eines konkreten gegebenen Claims im unvollständigen Markt festgestellt werden kann. Die zuletzt angeführte Methode ist jedoch durchaus praktikabel, um in dem in den zurückliegenden Abschnitten bereits öfter behandelten Spezialfall des Ein-Perioden-Marktes mit einem Risikogut Informationen zu gewinnen.

Im Ein-Perioden-Markt müssen die beiden Teile ϕ_0 und ϕ_T einer Handelsstrategie messbar bezüglich \mathcal{F}_0 sein. Selbstfinanzierend ist eine Handelsstrategie dann, wenn gilt $\phi_0^0 + \phi_0^1 S_0 = \phi_1^0 + \phi_1^1 S_0$. Aufgrund der Messbarkeitseigenschaft von ϕ kann zu jeder Teilstrategie ϕ_T immer eine Strategie ϕ_0 gefunden werden, so dass ϕ selbstfinanzierend ist, nämlich $\phi_T = \phi_0$. Daher ist ein Claim schon dann replizierbar, wenn Konstanten $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R}$ existieren, so dass gilt

$$H = V_T(\phi) = \langle \phi_T, S_T \rangle = \lambda_0 r + \lambda_1 S_T.$$

Sind nun zwei Konstanten $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R}$ gegeben, so definieren diese genau dann einen Claim H > 0, wenn unter Verwendung derselben Bezeichnungen für den Ein-Perioden-Markt, wie

in Abschnitt 2.3.1, gilt $\min_{k \in \{1,\dots,m\}} (\lambda_0 r + \lambda_1 S_k) \geq 0$, also $\lambda_0 \geq -\min_{k \in \{1,\dots,m\}} \lambda_1 v S_k$. Ist $\lambda_1 < 0$, so muss $\lambda_0 \geq -\lambda_1 v S_1$, ist $\lambda_1 \geq 0$, so muss $\lambda_0 \geq -\lambda_1 v S_m$ sein. Es ist also H > 0 genau dann, wenn $\lambda_0 \geq -\lambda_1 v S_k$ mit $k = \mathbf{1}_{\{\lambda_1 < 0\}} + m \mathbf{1}_{\{\lambda_1 \geq 0\}}$.

Für den folgenden Abschnitt ist eine Bezeichnung für die Menge aller replizierbaren Claims eines allgemeinen diskreten Marktes wichtig. Da nach Lemma 1.35 mit $\phi \in \Phi_s$ auch $r^T \phi \in \Phi_s$ gilt, folgt

$$\{V_T(\phi), \phi \in \Phi_s\} = \{\tilde{V}_T(\phi), \phi \in \Phi_s\},\$$

daher stellt \mathbb{V}_+ die Menge aller replizierbaren Claims dar. Damit steht gleichzeitig fest, dass für beliebige replizierbare Claims $H_1, \ldots, H_l, \ l \in \mathbb{N}$ auch jede Linearkombination $H = \sum_{\nu=1}^l \alpha_{\nu} H_{\nu}$ mit $\alpha_{\nu} \geq 0$ ein replizierbarer Claim ist, da \mathbb{V} nach 1.45 ein Vektorraum ist.

2.5.2 Superreplikation

Gegeben sei nun ein unvollständiger Markt und ein nicht replizierbarer Claim \hat{H} . Da keine selbstfinanzierende Handelsstrategie existiert, die diesen Claim repliziert, stellt sich die Frage, ob statt dessen selbstfinanzierende Handelsstrategien existieren, die den Claim näherungsweise replizieren. Konkret ist eine selbstfinanzierende Handelsstrategie ϕ gesucht, bei der entweder $V_T(\phi) \geq \hat{H}$ und $V_0(\phi)$ minimal ist oder bei der $V_T(\phi) \leq \hat{H}$ und $V_0(\phi)$ maximal ist. Zunächst wird ersteres Problem behandelt. Zur Lösung des Problems ist eine andere Formulierung günstiger.

Es sei \hat{H} ein nicht replizierbarer Claim und

$$\mathfrak{D}_{\hat{H}} := \{ H \in \mathbb{V}_+ \, | \, H \ge \hat{H} \}.$$

Alle Claims in $\mathcal{D}_{\hat{H}}$ sind aufgrund ihrer Replizierbarkeit nach Lemma 1.54 eindeutig bewertbar, d.h. es gilt $E_P(H) = E_Q(H)$, für alle $H \in \mathcal{D}_{\hat{H}}$ und beliebige äquivalente Martingalmaße P und Q. Außerdem gilt $E_P(\hat{H}) \leq E_P(H)$, für alle $H \in \mathcal{D}_{\hat{H}}$ und alle äquivalenten Martingalmaße P. Ziel ist daher, den Claim $H \in \mathcal{D}_{\hat{H}}$ zu finden, der für ein beliebiges äquivalentes Martingalmaß Q den kleinsten Preis

$$\inf_{H \in \mathcal{D}_{\hat{H}}} \mathrm{E}_{\mathrm{Q}}(H)$$

besitzt, und diesen Preis dann als Bewertung für den Claim \hat{H} zu nehmen. Eine derartige näherungsweise Replikation ist in der Literatur als Superreplikation bekannt (siehe z.B. [24], Abschnitt 6.7).

Zur Bewertung nicht replizierbarer Claims ist bereits aus Abschnitt 2.4 ein anderer Ansatz bekannt, der darin besteht, den höchsten aller möglichen arbitragefreien Preise $E_P(\hat{H})$, die

durch die Existenz mehrerer äquivalenter Martingalmaße P in der Menge aller Martingalmaße \mathbb{P} im unvollständigen Markt zustande kommen zu wählen, nämlich

$$\sup_{P\in\mathbb{P}} E_P(\hat{H}).$$

In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass beide Ansätze immer Ergebnisse liefern, und dass diese Ergebnisse immer übereinstimmen. Das folgende Lemma stammt mit Beweis aus [24], Kapitel 3.5.

2.23 Lemma: Für einen beliebigen Claim \hat{H} und ein beliebiges äquivalentes Martingalmaß Q gilt

$$\sup_{P\in\mathbb{P}} E_P(\hat{H}) \le \inf_{H\in\mathcal{D}_{\hat{H}}} E_Q(H).$$

Beweis: Für beliebige äquivalente Martingalmaße P, Q gilt für jedes $H\in\mathcal{D}_{\hat{H}}$ aufgrund der Monotonie des Erwartungswertes

$$E_P(\hat{H}) \le E_P(H) = E_Q(H).$$

Aufgrund der Beliebigkeit von P gilt damit auch

$$\sup_{P \in \mathbb{P}} E_P(\hat{H}) \le E_Q(H)$$

und da zusätzlich $H\in \mathcal{D}_{\hat{H}}$ beliebig gewählt ist, gilt auch

$$\sup_{P\in\mathbb{P}} E_P(\hat{H}) \leq \inf_{H\in\mathcal{D}_{\hat{H}}} E_Q(H).$$

Der folgende Satz zeigt die Äquivalenz beider anfangs genannter Bewertungsansätze. Satz und Beweis entspringen ebenfalls der Monographie [24], Kapitel 3.5, sind jedoch beide der speziellen Situation der hier vorliegenden Märkte angepasst. Der Beweis ist aufgrund der Verwendung der bislang hergeleiteten Theorie stark verändert und konnte wesentlich kürzer gestaltet werden.

- **2.24 Satz:** Gegeben sei ein diskreter arbitragefreier Markt. Für jeden beliebigen Claim \hat{H} existiert ein (nicht notwendig äquivalentes) Martingalmaß $P^* \in \overline{\mathbb{P}}$ und ein replizierbarer Claim $H^* \in \mathbb{V}_+$, so dass gilt
 - a) $E_Q(H^*) = \inf_{H \in \mathcal{D}_{\hat{H}}} E_Q(H)$, für ein beliebiges äquivalentes Martingalmaß Q.
 - b) $E_{P^*}(\hat{H}) = \sup_{P \in \mathbb{P}} E_P(\hat{H}).$
 - c) $\sup_{P \in \mathbb{P}} E_P(\hat{H}) = \inf_{H \in \mathcal{D}_{\hat{H}}} E_Q(\hat{H})$, für ein beliebiges äquivalentes Martingalmaß Q.

Beweis: a) Die Menge $\mathcal{D}_{\hat{H}}$ ist eine abgeschlossene und durch \hat{H} nach unten beschränkte Teilmenge des \mathbb{R}^m . Aufgrund der Stetigkeit und Isotonie des Erwartungswertes nimmt $E_{\mathbb{Q}}(H)$ dann auf $\mathcal{D}_{\hat{H}}$ ein Minimum H^* an.

- b) Die Menge \mathbb{P} ist mit Bemerkung 1.2 in \mathbb{R}^m offensichtlich beschränkt und nach Lemma 2.2 auch abgeschlossen. Aufgrund der Stetigkeit und Isotonie des endlichen Erwartungswertes als Funktion von P, nimmt $E_P(H)$ dann auf \mathbb{P} ein Maximum P^* an.
- c) Es genügt, zu zeigen, dass ein $H^*\in \mathcal{D}_{\hat{H}}$ und ein Martingalmaß $\mathbf{Q}'\in \overline{\mathbb{P}}$ existieren mit

$$E_{Q'}(H^*) = \sup_{P \in \mathbb{P}} E_P(\hat{H}),$$

denn dann ist mit Lemma 2.23 wegen

$$\sup_{P\in\mathbb{P}} E_P(\hat{H}) \le \inf_{H\in\mathcal{D}_{\hat{H}}} E_Q(H) \le E_Q(H^*) = E_{Q'}(H^*) = \sup_{P\in\mathbb{P}} E_P(\hat{H})$$

alles gezeigt.

Dazu sei für ein beliebiges äquivalentes Martingalmaß Q die lineare Abbildung $A: \mathbb{V} \times \mathbb{V} \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ mit

$$A:(u,v,z)\longrightarrow (u-v-z,E_{O}(u-v))$$

definiert. Existiert nun ein Vektor $(u^*, v^*, z^*) \in \mathbb{V}_+ \times \mathbb{V}_+ \times \mathbb{R}_+^m$, so dass gilt

$$A(u^*, v^*, z^*) = (\hat{H}, \sup_{P \in \mathbb{P}} E_P(\hat{H})),$$

dann ist $u^* - v^* - z^* = \hat{H}$ und wegen $z^* \geq 0$ damit $u^* - v^* \in \mathcal{D}_{\hat{H}}$, außerdem gilt gleichzeitig $\mathcal{E}_{\mathbf{Q}}(u^* - v^*) = \sup_{\mathbf{P} \in \mathbb{P}} \mathcal{E}_{\mathbf{P}}(\hat{H})$. Wird in der Gleichung $A(u,v,z) = (\hat{H},\sup_{\mathbf{P} \in \mathbb{P}} \mathcal{E}_{\mathbf{P}}(\hat{H}))$ die lineare Abbildung A als lineares Gleichungssystem betrachtet, so existiert nach Farkas' Lemma 1.25 genau dann die gesuchte Lösung, wenn für alle $y \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ gilt

$$\langle A(u,v,z),y\rangle \geq 0, \ \forall \, (u,v,z) \in \mathbb{V}_+ \times \mathbb{V}_+ \times \mathbb{R}^m_+ \quad \Longrightarrow \quad \langle (\hat{H},\sup_{\mathbf{P} \in \mathbb{P}} \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(\hat{H})),y\rangle \geq 0.$$

Dies wird mittels einer Fallunterscheidung nachgewiesen. Dafür sei $y=(x,\lambda)$ mit $x\in\mathbb{R}^m$ und $\lambda\in\mathbb{R}$ beliebig.

Fall 1: Sei $\lambda \leq 0$ beliebig. Weiter sei $0 \leq \langle A(u, v, z), (x, \lambda) \rangle$, für alle $(u, v, z) \in \mathbb{V}_+ \times \mathbb{V}_+ \times \mathbb{R}_+^m$. Dann ist dies insbesondere für $u - v > \hat{H}$ und $z = u - v - \hat{H} > 0$ der Fall, so dass mit Lemma 2.23 für beliebiges $x \in \mathbb{R}^m$ folgt

$$\begin{aligned} 0 & \leq & \langle A(u,v,z), (x,\lambda) \rangle = \langle u-v-z,x \rangle + \lambda \operatorname{E}_{\mathbf{Q}}(u-v) \\ & \leq & \langle \hat{H},x \rangle + \lambda \inf_{H \in \mathcal{D}_{\hat{H}}} \operatorname{E}_{\mathbf{Q}}(H) \leq \langle \hat{H},x \rangle + \lambda \sup_{\mathbf{P} \in \mathbb{P}} \operatorname{E}_{\mathbf{P}}(\hat{H}) = \langle (\hat{H},\sup_{\mathbf{P} \in \mathbb{P}} \operatorname{E}_{\mathbf{P}}(\hat{H})), (x,\lambda) \rangle. \end{aligned}$$

Fall 2: Sei $\lambda > 0$ und wiederum $0 \le \langle A(u, v, z), (x, \lambda) \rangle$, für alle $(u, v, z) \in \mathbb{V}_+ \times \mathbb{V}_+ \times \mathbb{R}_+^m$. Existiert dann ein Martingalmaß Q', für das gilt

$$E_{Q'}(Z) = -\frac{\langle Z, x \rangle}{\lambda},$$

für beliebige reellwertige Zufallsvariablen Z, dann liefert diese Gleichung für $Z = \hat{H}$

$$0 = \langle \hat{H}, x \rangle + \lambda \operatorname{E}_{Q'}(\hat{H}) \le \langle \hat{H}, x \rangle + \lambda \sup_{P \in \mathbb{P}} \operatorname{E}_{P}(\hat{H}) = \langle (\hat{H}, \sup_{P \in \mathbb{P}} \operatorname{E}_{P}(\hat{H})), (x, \lambda) \rangle.$$

Unter der Voraussetzung $0 \leq \langle A(u, v, z), (x, \lambda) \rangle$, für alle $(u, v, z) \in \mathbb{V}_+ \times \mathbb{V}_+ \times \mathbb{R}_+^m$ existiert tatsächlich das gesuchte Maß Q'. Wird nämlich der Vektor $x \in \mathbb{R}^m$ nach Bemerkung 1.2 als Zufallsvariable interpretiert, dann ist Q' gegeben durch

$$Q'(\omega) := -\frac{x(\omega)}{\lambda}, \quad \omega \in \Omega.$$

Es gilt nämlich insbesondere für u-v=0 und $z=\mathbf{1}_{\eta},\ \eta\in\Omega$

$$0 \le \langle A(u, v, z), (x, \lambda) \rangle = \langle -\mathbf{1}_{\eta}, x \rangle = -x(\eta),$$

für jedes $\eta \in \Omega$, daher folgt

$$Q'(\omega) = -\frac{x(\omega)}{\lambda} \ge 0, \quad \omega \in \Omega.$$

Damit folgt aus $0 \leq \langle A(u,v,z), (x,\lambda) \rangle$, für alle $(u,v,z) \in \mathbb{V}_+ \times \mathbb{V}_+ \times \mathbb{R}^m_+$ für z=0

$$0 \le \langle A(u, v, z), (x, \lambda) \rangle = \langle u - v, x \rangle + \lambda \operatorname{E}_{\mathcal{O}'}(u - v))$$

und für Vertauschung von u und v

$$0 \le \langle A(v,u,z), (x,\lambda) \rangle = \langle v-u,x \rangle + \lambda \operatorname{E}_{\mathbf{Q}'}(v-u)) = -\langle u-v,x \rangle - \lambda \operatorname{E}_{\mathbf{Q}'}(u-v)),$$

also insgesamt

$$0 = \langle u - v, x \rangle + \lambda \, \mathcal{E}_{Q'}(u - v)), \qquad \forall (u, v) \in \mathbb{V}_+ \times \mathbb{V}_+$$

Damit folgt aufgrund von $1 \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R} \oplus \mathbb{G} = \mathbb{V}$ nach Lemma 1.45 für u = 1 und v = 0 die Gültigkeit von $0 = \langle 1, x \rangle + \lambda$, und damit die Tatsache, dass Q' ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist, wegen

$$\sum_{\omega \in \Omega} Q'(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} -\frac{x(\omega)}{\lambda} = 1.$$

Für alle $\tilde{V}_T(\phi) \in \mathbb{V} \setminus \mathbb{V}_+$ existiert wegen $1 \in \mathbb{V}$ mit $u = \tilde{V}_T(\phi) - \min_{\omega \in \Omega} \tilde{V}_T(\phi, \omega) \cdot 1$ und $v = -\min_{\omega \in \Omega} \tilde{V}_T(\phi, \omega) \cdot 1$ ein Element $(u, v) \in \mathbb{V}_+ \times \mathbb{V}_+$ mit $u - v = \tilde{V}_T(\phi)$, so dass dann für alle $\tilde{V}_T(\phi) \in \mathbb{V}$ gilt $0 = \langle \tilde{V}_T(\phi), x \rangle + \lambda \operatorname{E}_Q(\tilde{V}_T(\phi))$, womit folgt

$$0 = -\frac{\langle \tilde{V}_T(\phi), x \rangle}{\lambda} - \mathcal{E}_{\mathcal{Q}}(\tilde{V}_T(\phi))$$
$$= \mathcal{E}_{\mathcal{Q}'}(\tilde{V}_T(\phi)) - V_0(\phi)$$
$$= \mathcal{E}_{\mathcal{Q}'}(\tilde{G}_T(\phi)).$$

Damit ist Q' nach Lemma 1.43 ein Martingalmaß und der Satz bewiesen.

2.25 Korollar: In einem diskreten arbitragefreien Markt sei $\mathcal{D}'_{\hat{H}} := \{ H \in \mathbb{V}_+ \mid H \leq \hat{H} \}$. Für jeden beliebigen Claim \hat{H} existiert dann ein (nicht notwendig äquivalentes) Martingalmaß $P_* \in \overline{\mathbb{P}}$ und ein replizierbarer Claim $H_* \in \mathbb{V}_+$, so dass gilt

- a) $E_Q(H_*) = \sup_{H \in \mathcal{D}'_{\hat{H}}} E_Q(H)$, für ein beliebiges äquivalentes Martingalmaß Q.
- b) $E_{P_*}(\hat{H}) = \inf_{P \in \mathbb{P}} E_P(\hat{H}).$
- c) $\inf_{P \in \mathbb{P}} E_P(\hat{H}) = \sup_{H \in \mathcal{D}'_{\hat{H}}} E_Q(\hat{H})$, für ein beliebiges äquivalentes Martingalmaß Q.

Beweis: Die Teile a) und b) verlaufen völlig analog zum Beweis von Satz 2.24, bei Teil a) ist lediglich zu beachten, dass stets gilt $\mathcal{D}'_{\hat{H}} \neq \emptyset$, da $0 \in \mathcal{D}'_{\hat{H}}$.

c) Sei $\mathcal{D}''_{\hat{H}} := \{H \in \mathbb{V}_+ \mid H^* - H \leq \hat{H}\} = \{H \in \mathbb{V}_+ \mid H \geq H^* - \hat{H}\}$, wobei $H^* \in \mathbb{V}_+$ der nach Satz 2.24, Teil a) existierende Claim mit $\mathcal{E}_{\mathcal{Q}}(H^*) = \inf_{H \in \mathcal{D}_{\hat{H}}} \mathcal{E}_{\mathcal{Q}}(H)$ ist. Es gilt $H^* - \hat{H} \geq 0$ und $H^* - \hat{H}$ ist offensichtlich nicht replizierbar. Dann folgt mit Teil c) von Satz 2.24

$$\begin{split} \inf_{P \in \mathbb{P}} E_P(\hat{H}) &= -\sup_{P \in \mathbb{P}} E_P(-\hat{H}) = E_Q(H^*) - \sup_{P \in \mathbb{P}} E_P(H^* - \hat{H}) = E_Q(H^*) - \inf_{H \in \mathcal{D}'_{\hat{H}}} E_Q(H) \\ &= E_Q(H^*) - \inf_{H \in \mathcal{D}'_{\hat{H}}} E_Q(H^* - H) = -\inf_{H \in \mathcal{D}'_{\hat{H}}} E_Q(-H) = \sup_{H \in \mathcal{D}'_{\hat{H}}} E_Q(H). \end{split}$$

Aus Satz 2.24 und Korollar 2.25 geht hervor, dass die Bewertung, die mittels Superreplikation erzielt werden kann, genau den Grenzen der arbitragefreien Bewertung unter Verwendung aller äquivalenten Martingalmaße entspricht, wie sie in Abschnitt 2.4 bereits berechnet wurden. Da die Menge aller replizierbaren Claims keine einfache explizite Darstellung besitzt, und daher die Mengen $\mathcal{D}_{\hat{H}}$ und $\mathcal{D}'_{\hat{H}}$ schwer zu bestimmen sind, ist nicht zu erwarten, dass die Superreplikation ein effizienteres Verfahren zur Bestimmung der Grenzen der arbitragefreien Bewertung liefert. Das folgende Beispiel veranschaulicht die Aussagen der Teile c) aus Satz 2.24 und Korollar 2.25 noch einmal und zeigt, dass selbst bei einfachsten Märkten für die Berechnung der arbitragefreien Preise mittels Superreplikation schon Optimierungsmethoden benötigt werden.

2.26 Beispiel: Gegeben sei ein Drei-Stufen-Ein-Perioden-Markt mit den Parametern und Werten aus Beispiel 2.11 und der Call-Option aus Beispiel 2.21. Aus Abschnitt 2.5.1 ist bekannt, dass unter Berücksichtigung von Bemerkung 1.2 alle replizierbaren Claims die Form $H = \lambda_0(r, r, r) + \lambda_1(21, 16, 6) > 0, \ \lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R}$ haben müssen. Sei $\mathcal{D}_{C_T} := \{H \in \mathbb{V}_+ | H \geq 1\}$

 C_T und $\mathcal{D}'_{C_T} := \{ H \in \mathbb{V}_+ | H \leq C_T \}$. Für ein beliebiges äquivalentes Martingalmaß Q und einen beliebigen replizierbaren Claim H gilt

$$E_{Q}(H) = (-1 + 2p_{3})(1, 1\lambda_{0} + 21\lambda_{1}) + (2 - 3p_{3})(1, 1\lambda_{0} + 16\lambda_{1}) + p_{3}(1, 1\lambda_{0} + 16\lambda_{1})$$

= 1, 1\lambda_{0} + 11\lambda_{1}.

Um nun den Claim $H^* \in \mathbb{V}_+$ mit $E_Q(H^*) = \inf_{H \in \mathcal{D}_{\hat{H}}} E_Q(H)$ zu finden, ist folgendes Minimierungsproblem zu lösen:

$$\begin{array}{ll} \textit{Minimiere} & 1, 1\lambda_0 + 11\lambda_1 \\ \textit{unter den Bedingungen} & 1, 1\lambda_0 + 21\lambda_1 \geq 11 \\ & 1, 1\lambda_0 + 16\lambda_1 \geq 6 \\ & 1, 1\lambda_0 + 6\lambda_1 \geq 0. \end{array}$$

Als Lösung ergibt sich $\lambda_0 = -4$ und $\lambda_1 = \frac{22}{30}$, damit ist $H^* = (11, \frac{22}{3}, 0)$ und $E_Q(H^*) = \frac{11}{3}$. Daraus folgt $\inf_{H \in \mathcal{D}_{\hat{H}}} E_Q(vH) = \frac{10}{3}$, also in der Tat derselbe Wert, wie in Beispiel 2.21 der Wert $\sup_{P \in \mathbb{P}} E_P(vC_T)$.

Um den Claim $\mathbb{H}_* \in \mathbb{V}_+$ mit $E_Q(H_*) = \sup_{H \in \mathcal{D}'_{\hat{H}}} E_Q(H)$ zu finden, ist folgendes Maximierungsproblem zu lösen:

$$\begin{array}{ll} \textit{Maximiere} & 1, 1\lambda_0 + 11\lambda_1 \\ \textit{unter den Bedingungen} & 1, 1\lambda_0 + 21\lambda_1 & \leq & 11 \\ & 1, 1\lambda_0 + 16\lambda_1 & \leq & 6 \\ & 1, 1\lambda_0 + 6\lambda_1 & \leq & 0. \end{array}$$

Da mit $\lambda_0 = \lambda_1 = 0$ eine nichtnegative untere Schranke für die Lösung existiert, ist die Nichtnegativität der Lösung garantiert. Als Lösung ergibt sich $\lambda_0 = -\frac{36}{11}$ und $\lambda_1 = \frac{5}{3}$, damit ist $H^* = (9,6,0)$ und $E_Q(H^*) = 3$. Daraus folgt $\sup_{H \in \mathcal{D}'_{\hat{H}}} E_Q(vH) = \frac{30}{11}$, also ebenfalls derselbe Wert, wie in Beispiel 2.21 der Wert $\inf_{P \in \mathbb{P}} E_P(vC_T)$.

2.6 Vervollständigung unvollständiger Märkte

Gegeben sei ein unvollständiger Markt. Nach Korollar 2.8 existiert in diesem Markt mindestens ein Ast, der weniger linear unabhängige Volatilitäten als Verzweigungen besitzt. Eine naheliegende Frage ist nun, ob ohne zusätzliche Voraussetzungen eine bestimmte Anzahl weiterer Güter mit geeigneten Volatilitäten in diesen Markt aufgenommen werden kann, so dass es derartige Äste nicht mehr gibt, und der Markt vollständig wird.

Das folgende Beispiel zeigt, dass dies im Allgemeinen nicht der Fall ist. Bereits bei einem einfachen Drei-Stufen-Ein-Perioden-Markt sind Einschränkungen an den risikolosen Zins zur Erhaltung der Arbitragefreiheit in dem entstehenden vollständigen Markt notwendig.

2.27 Beispiel: Gegeben sei der Drei-Stufen-Ein-Perioden-Markt aus Beispiel 2.11. Unter Berücksichtigung von Bemerkung 1.2 lauten die linear unabhängigen Volatilitäten des einzigen in diesem Markt enthaltenen Astes $\sigma_1^0 = (i, i, i)$ und $\sigma_1^1 = (\frac{11}{10}, \frac{6}{10}, \frac{-4}{10})$, d.h. es existiert eine linear unabhängige Volatilität weniger als Verzweigungen in diesem Markt.

Um diesen Markt zu einem vollständigen Markt zu machen, wird das Gut S^2 mit $\sigma_1^2 = (\frac{11}{10}, \frac{1}{10}, \frac{-3}{10})$ in den Markt mit aufgenommen. Offensichtlich ist σ_1^2 linear unabhängig von σ_1^0 und σ_1^1 , so dass nun genau so viele linear unabhängige Volatilitäten wie Verzweigungen existieren.

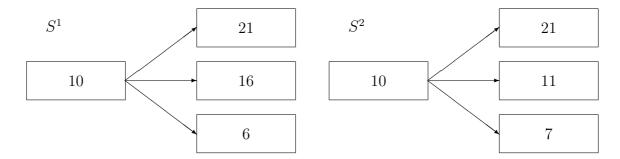


Abbildung 2.11: Drei-Stufen-Ein-Perioden-Markt mit i=10% nach Aufnahme des zweiten risikobehafteten Gutes S^2

Im Weiteren seien nun unter Berücksichtigung von Bemerkung 1.2 die Maße (p_1^j, p_2^j, p_3^j) die äquivalenten Martingalmaße des Marktes, der S^j als einziges risikobehaftetes Gut enthält, für j = 1, 2, sowie (p_1, p_2, p_3) die äquivalenten Martingalmaße des Marktes, der beide risikobehafteten Güter S^1 und S^2 enthält. Nach Beispiel 2.11 sind die äquivalenten Martingalmaße für die Märkte, die nur jeweils eines der beiden risikobehafteten Güter S^1 oder S^2 enthalten, gegeben durch

$$p_1^j = \frac{i - \sigma_2^j + p_3(\sigma_2^j - \sigma_3^j)}{\sigma_1^j - \sigma_2^j}$$

$$p_2^j = \frac{\sigma_1^j - i - p_3(\sigma_1^j - \sigma_3^j)}{\sigma_1^j - \sigma_2^j},$$

und

$$p_3^j \in \left(\max\left\{\frac{\sigma_2^j - i}{\sigma_2^j - \sigma_3^j}, 0\right\}, \frac{\sigma_1^j - i}{\sigma_1^j - \sigma_3^j}\right),$$

für j=1,2. Aufgrund der Linearität der formalen Martingalbedingung sind die äquivalenten Martingalmaße des Marktes, der beide risikobehafteten Güter enthält, gegeben durch die Schnittmenge der äquivalenten Martingalmaße aus den beiden Märkten, die nur jeweils eines der Güter enthalten. Zur besseren Übersicht gelte $\sigma_k^j := \sigma_1^j(\omega_k)$, für k=1,2,3 und j=1,2. Gesucht ist dann eine Wahrscheinlichkeit $p_3=p_3^1=p_3^2$, für die gilt $p_1^1=p_1^2$, $p_2^1=p_2^2$ und

$$p_3 \in \left(\max \left\{ \frac{\sigma_2^1 - i}{\sigma_2^1 - \sigma_3^1}, 0 \right\}, \frac{\sigma_1^1 - i}{\sigma_1^1 - \sigma_3^1} \right) \cap \left(\max \left\{ \frac{\sigma_2^2 - i}{\sigma_2^2 - \sigma_3^2}, 0 \right\}, \frac{\sigma_1^2 - i}{\sigma_1^2 - \sigma_3^2} \right).$$

Zunächst folgt

$$\begin{split} p_1^1 &= p_1^2 \iff \frac{i - \sigma_2^1}{\sigma_1^1 - \sigma_2^1} + \frac{p_3(\sigma_2^1 - \sigma_3^1)}{\sigma_1^1 - \sigma_2^1} = \frac{i - \sigma_2^2}{\sigma_1^2 - \sigma_2^2} + \frac{p_3(\sigma_2^2 - \sigma_3^2)}{\sigma_1^2 - \sigma_2^2} \\ \iff p_3\left(\frac{\sigma_2^1 - \sigma_3^1}{\sigma_1^1 - \sigma_2^1} - \frac{\sigma_2^2 - \sigma_3^2}{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}\right) = \frac{i - \sigma_2^2}{\sigma_1^2 - \sigma_2^2} - \frac{i - \sigma_2^1}{\sigma_1^1 - \sigma_2^1} \\ \iff p_3 = \frac{(i - \sigma_2^2)(\sigma_1^1 - \sigma_2^1) - (i - \sigma_2^1)(\sigma_1^2 - \sigma_2^2)}{(\sigma_2^1 - \sigma_3^1)(\sigma_1^2 - \sigma_2^2) - (\sigma_2^2 - \sigma_3^2)(\sigma_1^1 - \sigma_2^1)} \\ \iff p_3 = \frac{i(\sigma_1^1 - \sigma_2^1) - i(\sigma_1^2 - \sigma_2^2) - \sigma_1^1\sigma_2^2 + \sigma_2^1\sigma_1^2}{\sigma_3^2(\sigma_1^1 - \sigma_2^1) - \sigma_3^1(\sigma_1^2 - \sigma_2^2) - \sigma_1^1\sigma_2^2 + \sigma_1^2\sigma_1^2} \end{split}$$

und

$$p_{2}^{1} = p_{2}^{2} \iff \frac{\sigma_{1}^{1} - i}{\sigma_{1}^{1} - \sigma_{2}^{1}} - \frac{p_{3}(\sigma_{1}^{1} - \sigma_{3}^{1})}{\sigma_{1}^{1} - \sigma_{2}^{1}} = \frac{\sigma_{1}^{2} - i}{\sigma_{1}^{2} - \sigma_{2}^{2}} - \frac{p_{3}(\sigma_{1}^{2} - \sigma_{3}^{2})}{\sigma_{1}^{2} - \sigma_{2}^{2}}$$

$$\iff p_{3} \left(\frac{\sigma_{1}^{1} - \sigma_{3}^{1}}{\sigma_{1}^{1} - \sigma_{2}^{1}} - \frac{\sigma_{1}^{2} - \sigma_{3}^{2}}{\sigma_{1}^{2} - \sigma_{2}^{2}}\right) = \frac{\sigma_{1}^{1} - i}{\sigma_{1}^{1} - \sigma_{2}^{1}} - \frac{\sigma_{1}^{2} - i}{\sigma_{1}^{2} - \sigma_{2}^{2}}$$

$$\iff p_{3} = \frac{(\sigma_{1}^{1} - i)(\sigma_{1}^{2} - \sigma_{2}^{2}) - (\sigma_{1}^{2} - i)(\sigma_{1}^{1} - \sigma_{2}^{1})}{(\sigma_{1}^{1} - \sigma_{3}^{1})(\sigma_{1}^{2} - \sigma_{2}^{2}) - (\sigma_{1}^{2} - \sigma_{3}^{2})(\sigma_{1}^{1} - \sigma_{2}^{1})}$$

$$\iff p_{3} = \frac{i(\sigma_{1}^{1} - \sigma_{2}^{1}) - i(\sigma_{1}^{2} - \sigma_{2}^{2}) - \sigma_{1}^{1}\sigma_{2}^{2} + \sigma_{2}^{1}\sigma_{1}^{2}}{\sigma_{3}^{2}(\sigma_{1}^{1} - \sigma_{2}^{1}) - \sigma_{3}^{1}(\sigma_{1}^{2} - \sigma_{2}^{2}) - \sigma_{1}^{1}\sigma_{2}^{2} + \sigma_{1}^{2}\sigma_{2}^{1}}.$$

Es existiert also tatsächlich ein Wert für p_3 der in beiden Fällen die Gleichheit liefert. Zu prüfen ist also noch, wann dieser Wert in dem oben angegebenen Intervall liegt. Es folgt

$$p_{3} < \frac{\sigma_{1}^{1} - i}{\sigma_{1}^{1} - \sigma_{3}^{1}} \iff \frac{i(\sigma_{1}^{1} - \sigma_{2}^{1}) - i(\sigma_{1}^{2} - \sigma_{2}^{2}) - \sigma_{1}^{1}\sigma_{2}^{2} + \sigma_{2}^{1}\sigma_{1}^{2}}{\sigma_{3}^{2}(\sigma_{1}^{1} - \sigma_{2}^{1}) - \sigma_{3}^{1}(\sigma_{1}^{2} - \sigma_{2}^{2}) - \sigma_{1}^{1}\sigma_{2}^{2} + \sigma_{1}^{2}\sigma_{2}^{1}} - \frac{\sigma_{1}^{1} - i}{\sigma_{1}^{1} - \sigma_{3}^{1}} < 0$$

$$\iff \frac{(\sigma_{1}^{1} - \sigma_{1}^{2})(i\sigma_{1}^{1} - i\sigma_{3}^{1} + i\sigma_{3}^{2} - i\sigma_{1}^{2} + \sigma_{3}^{1}\sigma_{1}^{2} - \sigma_{3}^{2}\sigma_{1}^{1})}{(\sigma_{3}^{2}(\sigma_{1}^{1} - \sigma_{2}^{1}) - \sigma_{3}^{1}(\sigma_{1}^{2} - \sigma_{2}^{2}) - \sigma_{1}^{1}\sigma_{2}^{2} + \sigma_{1}^{2}\sigma_{2}^{1})(\sigma_{1}^{1} - \sigma_{3}^{1})} < 0$$

$$\iff \frac{\sigma_{3}^{2}(\sigma_{1}^{1} - i) - \sigma_{3}^{1}(\sigma_{1}^{2} - i) - \sigma_{1}^{1}i + \sigma_{1}^{2}i}{\sigma_{3}^{2}(\sigma_{1}^{1} - \sigma_{2}^{1}) - \sigma_{3}^{1}(\sigma_{1}^{2} - \sigma_{2}^{2}) - \sigma_{1}^{1}\sigma_{2}^{2} + \sigma_{1}^{2}\sigma_{2}^{1}} > 0,$$

sowie aufgrund der Symmetrie von p_3 analog

$$p_3 < \frac{\sigma_1^2 - i}{\sigma_1^2 - \sigma_3^2} \iff \frac{\sigma_3^2(\sigma_1^1 - i) - \sigma_3^1(\sigma_1^2 - i) - \sigma_1^1 i + \sigma_1^2 i}{\sigma_3^2(\sigma_1^1 - \sigma_2^1) - \sigma_3^1(\sigma_1^2 - \sigma_2^2) - \sigma_1^1 \sigma_2^2 + \sigma_1^2 \sigma_2^1} > 0.$$

Weiterhin folgt

$$\begin{split} p_3 > \frac{\sigma_2^1 - i}{\sigma_2^1 - \sigma_3^1} &\iff \frac{i(\sigma_1^1 - \sigma_2^1) - i(\sigma_1^2 - \sigma_2^2) - \sigma_1^1 \sigma_2^2 + \sigma_2^1 \sigma_1^2}{\sigma_3^2 (\sigma_1^1 - \sigma_2^1) - \sigma_3^1 (\sigma_1^2 - \sigma_2^2) - \sigma_1^1 \sigma_2^2 + \sigma_1^2 \sigma_2^1} - \frac{\sigma_2^1 - i}{\sigma_2^1 - \sigma_3^1} > 0 \\ &\iff \frac{(\sigma_1^1 - \sigma_1^2)(i\sigma_2^1 - i\sigma_3^1 + i\sigma_2^2 - i\sigma_3^2 + \sigma_3^2 \sigma_2^1 - \sigma_2^2 \sigma_3^1)}{(\sigma_3^2 (\sigma_1^1 - \sigma_2^1) - \sigma_3^1 (\sigma_1^2 - \sigma_2^2) - \sigma_1^1 \sigma_2^2 + \sigma_1^2 \sigma_2^1)(\sigma_2^1 - \sigma_3^1)} > 0 \\ &\iff \frac{\sigma_3^2 (\sigma_2^1 - i) - \sigma_3^1 (\sigma_2^2 - i) - \sigma_2^1 i + \sigma_2^2 i}{\sigma_3^2 (\sigma_1^1 - \sigma_2^1) - \sigma_3^1 (\sigma_1^2 - \sigma_2^2) - \sigma_1^1 \sigma_2^2 + \sigma_1^2 \sigma_2^1} < 0, \end{split}$$

sowie wiederum aufgrund der Symmetrie von p_3 analog

$$p_3 > \frac{\sigma_2^2 - i}{\sigma_2^2 - \sigma_3^2} \iff \frac{\sigma_3^2(\sigma_2^1 - i) - \sigma_3^1(\sigma_2^2 - i) - \sigma_2^1 i + \sigma_2^2 i}{\sigma_3^2(\sigma_1^1 - \sigma_2^1) - \sigma_3^1(\sigma_1^2 - \sigma_2^2) - \sigma_1^1\sigma_2^2 + \sigma_1^2\sigma_2^1} < 0.$$

Für die Arbitragefreiheit eines Drei-Stufen-Ein-Perioden-Marktes mit zwei Risikogütern sind also folgende Bedingungen zu prüfen:

•
$$b_1 := \frac{\sigma_3^2(\sigma_1^1 - i) - \sigma_3^1(\sigma_1^2 - i) - \sigma_1^1 i + \sigma_1^2 i}{\sigma_3^2(\sigma_1^1 - \sigma_2^1) - \sigma_3^1(\sigma_1^2 - \sigma_2^2) - \sigma_1^1 \sigma_2^2 + \sigma_1^2 \sigma_2^1} > 0$$

•
$$b_2 := \frac{\sigma_3^2(\sigma_2^1 - i) - \sigma_3^1(\sigma_2^2 - i) - \sigma_2^1 i + \sigma_2^2 i}{\sigma_3^2(\sigma_1^1 - \sigma_2^1) - \sigma_3^1(\sigma_1^2 - \sigma_2^2) - \sigma_1^1\sigma_2^2 + \sigma_1^2\sigma_2^1} < 0,$$
 falls $\max \left\{ \frac{\sigma_2^1 - i}{\sigma_2^1 - \sigma_3^1}, \frac{\sigma_2^2 - i}{\sigma_2^2 - \sigma_3^2} \right\} > 0$

•
$$p_3 = \frac{i(\sigma_1^1 - \sigma_2^1) - i(\sigma_1^2 - \sigma_2^2) - \sigma_1^1 \sigma_2^2 + \sigma_2^1 \sigma_1^2}{\sigma_2^2(\sigma_1^1 - \sigma_2^1) - \sigma_2^1(\sigma_1^2 - \sigma_2^2) - \sigma_1^1 \sigma_2^2 + \sigma_1^2 \sigma_2^1} > 0$$
, falls $\max \left\{ \frac{\sigma_2^1 - i}{\sigma_2^1 - \sigma_2^1}, \frac{\sigma_2^2 - i}{\sigma_2^2 - \sigma_2^2} \right\} \le 0$.

Mit den zu Beginn angegebenen Werten für die Volatilitäten gilt $b_1 = \frac{1}{8}$ und $b_2 = -\frac{1}{4}$, woraus direkt folgt, dass der vervollständigte Markt auch arbitragefrei ist (die dritte Bedingung ist wegen max $\left\{\frac{\sigma_2^1 - i}{\sigma_2^1 - \sigma_3^1}, \frac{\sigma_2^2 - i}{\sigma_2^2 - \sigma_3^2}\right\} = \frac{1}{2} > 0$ nicht zu prüfen).

Konkret ergibt sich für p_3 das Intervall

$$p_3 \in \left(\max\left\{\frac{\frac{6}{10} - \frac{1}{10}}{\frac{6}{10} - \frac{-4}{10}}, 0\right\}, \frac{\frac{11}{10} - \frac{1}{10}}{\frac{11}{10} - \frac{-4}{10}}\right) \cap \left(\max\left\{\frac{\frac{1}{10} - \frac{1}{10}}{\frac{1}{10} - \frac{-3}{10}}, 0\right\}, \frac{\frac{11}{10} - \frac{1}{10}}{\frac{11}{10} - \frac{-3}{10}}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right),$$

in dem

$$p_3 = \frac{\frac{1}{10}(\frac{11}{10} - \frac{6}{10}) - \frac{1}{10}(\frac{11}{10} - \frac{1}{10}) - \frac{11}{10}\frac{1}{10} + \frac{6}{10}\frac{11}{10}}{\frac{-3}{10}(\frac{11}{10} - \frac{6}{10}) - \frac{-4}{10}(\frac{11}{10} - \frac{1}{10}) - \frac{11}{10}\frac{1}{10} + \frac{6}{10}\frac{11}{10}} = \frac{5}{8}.$$

auch wie erwartet enthalten ist. Es folgt dann $p_1 = p_1^1 = p_1^2 = \frac{1}{4}$ und $p_2 = p_2^1 = p_2^2 = \frac{1}{8}$. Die Existenz des eindeutig bestimmten äquivalenten Martingalmaßes belegt noch einmal die Arbitragefreiheit des vervollständigten Marktes.

Schon bei geringfügigen Änderungen der Volatilitäten kann jedoch der Markt seine Arbitragefreiheit einbüßen. Sei etwa $\sigma^2 = (\frac{11}{10}, \frac{1}{10}, \frac{-5}{10})$. Dann gilt $b_1 = -\frac{1}{7}$, woraus sofort folgt, dass der vervollständigte Markt nicht arbitragefrei ist. Die gemeinsame Wahrscheinlichkeit p_3 würde dann den Wert $\frac{5}{7}$ annehmen, der für $p_2 = -\frac{1}{7}$ einen Widerspruch liefert.

2.7 Zusammenfassende Bemerkungen

Die explizite Bestimmung von Grenzen arbitragefreier Optionspreise gelingt wesentlich durch die Einführung von Randmartingalmaßen. Mit Hilfe dieser in Abschnitt 2.4 gefundenen Grenzen ist es möglich einen Überblick über die Unvollständigkeit von Finanzmärkten zu bekommen. Die Größe des Intervalls der arbitragefreien Optionspreisspanne, das entscheidend von den Volatilitäten des Underlyings, dem risikolosen Zins und dem Ausübungspreis der Option abhängt, ist dann ein Maß für die Größe der Unvollständigkeit des Marktes. Ist das gefundene Intervall klein genug, unterscheiden sich die arbitragefreien Preise nur so geringfügig, dass im wesentlichen ein eindeutiger Preis existiert. Bei größeren Intervallen hingegen müssen zur Auswahl eines eindeutigen Preises weitere Kriterien herangezogen werden. Es gibt bereits eine Reihe von Ansätzen, die eine solche Auswahl ermöglichen. Exemplarisch seien hier einige Ansätze angeführt.

Eine Möglichkeit besteht in der Auswahl des Preises, der bezüglich aller äquivalenten Martingalmaße die geringste Varianz des auftretenden Risikos aufweist. Mehr dazu findet sich unter anderem in [34], [35] und [39]. Ähnliche Ansätze, die z.B. nur den quadratischen Verlust minimieren, oder in anderer Form das Optimierungsproblem abwandeln, finden sich auch in [11], [33], [36] und [32]. Einen Überblick gibt [37]. Eine weitere sehr gängige Vorgehensweise zur Auswahl eines Preises besteht in der Optimierung einer geeigneten Nutzenfunktion in Abhängigkeit vom Preis. Es wäre beispielsweise möglich, bezüglich der Grenzen arbitragefreier Preise aus Gründen der Fairness den mittleren Preis $\frac{\inf_{P\in \mathbb{P}} C_T + \sup_{P\in \mathbb{P}} C_T}{2}$ auszuwählen. Viele weitere Nutzenfunktionen sind denkbar. In den meisten Fällen werden die Preise von Derivaten vom Verkäufer festgesetzt werden, so dass die klassische Preisfindungstheorie aus der Ökonomie hier auch ein Auswahlkriterium liefern kann. Als Literaturbeispiele, in denen der nutzentheoretische Ansatz besprochen wird, seien hier [5], [8], [17], [18] und [31] angeführt.

Zur Bestimmung der äquivalenten Martingalmaße eines diskreten stochastischen Finanzmarktes stellt sich der Ansatz, der mittels geschickter Aufstellung von linearen Gleichungssystemen resultierend aus der formalen Martingaleigenschaft Berechnungen ermöglicht, als günstigster Weg dar, auch in allgemeinen Märkten Ergebnisse zu erzielen. Zwar kann für allgemeine Märkte eine Lösung gewöhnlich nicht explizit dargestellt werden, jedoch können im Spezialfall des Ein-Perioden-Marktes aus diesem Ansatz wichtige Erkenntnisse gewonnen werden.

Zur Untersuchung mehr-periodiger Finanzmärkte spielt dann die Zerlegung des Marktes in Ein-Perioden-Märkte eine wesentliche Rolle. Dadurch können unter bestimmten Gegebenheiten auch arbitragefreie Optionspreise in mehr-periodigen Modellen eingeschränkt werden, wie in Abschnitt 2.4.2 gezeigt. Zwar stellen die dort geforderten Gegebenheiten eine recht große Einschränkung dar, jedoch dienen die Ausführungen mehr der Verdeutlichung des Prinzips der Zerlegung und Zusammensetzung von Mehr-Perioden-Märkten und weniger der Berechnung einer allgemeinen Optionspreisformel. Sicherlich ist mit etwas größerem Aufwand oder unter Abwandlung verwendeter Methoden eine Abschwächung der

zur Berechnung benötigten Voraussetzungen möglich.

Als relativ komplex stellt sich die Problematik der Vervollständigung von Märkten dar. Bei gleichzeitiger Betrachtung mehrerer Wertpapiere in einem Markt liefert selbst der einfachste Fall, wie er in Abschnitt 2.6 angeführt ist schon relativ aufwändige Fallunterscheidungen zur Bestimmung der Voraussetzungen für die Existenz arbitragefreier Preise. Es bleibt zu klären, ob es geeignetere Darstellungen der arbitragefreien Preise in Märkten mit mehreren Gütern gibt.

Insgesamt zeigt sich, dass bei der Untersuchung allgemeiner, unvollständiger, diskreter Finanzmärkte trotz elementarer Grundlagen komplexe Fragestellungen auftreten und sowohl bei der Auswahl von Ansätzen zur Untersuchung, als auch bei der Darstellung von Ergebnissen sehr sorgfältige Arbeit erforderlich ist.

Symbolverzeichnis

```
\subset, \subseteq
              echte Teilmenge, Teilmenge oder gleich
\supset, \supseteq
              echte Obermenge, Obermenge oder gleich
\cap, \bigcap
              Schnittmenge
\cup, []
              Vereinigungungsmenge
{ }
              Mengenklammern
              leere Menge
\in, \notin
              ist enthalten in, ist nicht enthalten in
=, \neq
              ist gleich, ist ungleich
:=
              ist definiert als
              größer, größer oder gleich
              kleiner, kleiner oder gleich
              Summe
              Produkt
ſ
              Integral
              direkte Summe
\times, X
              kartesisches Produkt
\Longrightarrow
              Implikation
\iff
              Äquivalenz
              offenes Intervall mit unterer Grenze a und oberer Grenze b
(a,b)
[a,b]
              geschlossenes Intervall mit unterer Grenze a und oberer Grenze b
\mathbf{1}_A
              Indikatorfunktion (s. S. 10)
A
              Atomsystem einer zugehörigen \sigma-Algebra
C
              Preisvektor einer europäischen Call-Option
D
              Preisvektor eines beliebigen Derivats
               \{H \in \mathbb{V}_+ \mid H \geq \hat{H}\}
\mathfrak{D}_{\hat{H}}
\Delta M_n
              M_n - M_{n-1}
\mathrm{E}(Z)
              Erwartungswert einer Zufallsvariablen Z
E_{\rm P}(Z)
              Erwartungswert einer Zufallsvariablen Z bezgl. des Maßes P
              bedingter Erwartungswert einer Zufallsvariablen Z unter einer \sigma-Algebra \mathcal{G}
E(Z \mid g)
              (s. S. 14)
```

Œ	A1 1
\mathcal{F}_{f}	σ-Algebra Fingsbrönkung des Definitionsbereichs der Funktion f auf die Monge A
$f _A$	Einschränkung des Definitionsbereichs der Funktion f auf die Menge A (s. S. 10)
G_n	Gewinn zum Zeitpunkt n (s. S. 31)
$ ilde{G}_n$	diskontierter Gewinn zum Zeitpunkt n (s. S. 31)
\mathbb{G}^n	Menge aller diskontierten Gewinne zum Zeitpunkt $n = T$
9	σ -Algebra
Γ	konvexer Kegel der nichtnegativen reellwertigen Zufallsvariablen ohne
1	Null (s. S. 37)
H	σ -Algebra
i	risikoloser Zins
$\inf A$	Infimum einer geordneten Menge A
$\lambda \to 0$	λ konvergiert gegen 0
$\max A$	Maximum einer geordneten Menge A
$\min A$	Minimum einer geordneten Menge A
M	Betrag einer Zahl M oder Anzahl der Elemente einer Menge M
M_{+}	Alle Vektoren von M , Teilmenge von \mathbb{R}^n , deren Vektoren nur nichtne-
	gative Einträge besitzen
$M^{^c}$	Komplement der Menge M
$\{M_n\}_{n=0,\dots,T}$	Endliche Familie von Elementen $M_n, n = 0, \dots, T$
$n = 0, \dots, T$	Index n , der von 0 bis T läuft
\mathbb{N}	natürliche Zahlen
(Ω, \mathcal{F}, P)	Wahrscheinlichkeitsraum mit Grundmenge Ω , σ -Algebra $\mathcal F$ und Wahr-
	scheinlichkeitsmaß P
(Ω, P)	Kurzschreibweise für einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega), P)$ mit
_	endlicher Grundmenge Ω
P	Preisvektor einer europäischen Put-Option
P	Wahrscheinlichkeitsmaß Wahrscheinlichkeitsmaß
$P(\omega)$	Kurzschreibweise für $P(\{\omega\})$
P	Menge aller äquivalenten Martingalmaße bzgl. eines Marktes
P	Menge aller Martingalmaße bzgl. eines Marktes
ϕ	Handelsstrategie (s. S. 30)
Φ	Menge aller Handelsstrategien eines Marktes (s. S. 31)
Φ_s	Menge aller selbstfinanzierenden Handelsstrategien eines Marktes (s. S.
$\mathfrak{N}(\Omega)$	31) Potongmongo über dem Crundraum O
$\mathfrak{P}(\Omega)$	Potenzmenge über dem Grundraum Ω risikoloser Zinsfaktor $1+i$
r	Menge der reellen Zahlen
\mathbb{R}^n	Menge der Vektoren mit n Komponenten aus den reellen Zahlen
\mathbb{R}^n_+	Menge der Vektoren mit n Komponenten aus den reellen Zahlen, die
# * +	alle nichtnegativ sind
$\mathbb{R}^{T \times d \times n}$	$\mathbb{R}^T imes \mathbb{R}^d imes \mathbb{R}^m$
\mathbb{R}^{Ω}	Menge aller Funktionen $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$
	. O

```
S
              Preisvektor eines Finanzgutes (s. S. 24)
\tilde{S}
              diskontierter Preisvektor eines Finanzgutes (s. S. 27)
              Volatilität (s. S. 27)
\sigma
\sup A
              Supremum einer Menge A
              \sigma - i (s. S. 49)
\tau
              Diskontfaktor \frac{1}{x}
v
V_n
              Portfolio zum Zeitpunkt n (s. S. 30)
\tilde{V}_n
              diskontiertes Portfolio zum Zeitpunkt n (s. S. 31)
\mathbb{V}
              Menge aller diskontierten Portfolios zum Zeitpunkt n=T
\langle x, y \rangle
              euklidisches Skalarprodukt zweier Vektoren x, y \in \mathbb{R}^n
\langle x, y \rangle_{\rm P}
              gewichtetes Skalarprodukt (s. S. 40)
\perp
              steht senkrecht bezgl. des euklidischen Skalarprodukts
              steht senkrecht bezgl. des gewichteten Skalarprodukts \langle \cdot, \cdot \rangle_{P} (s. S. 40)
\perp_{\mathrm{P}}
              euklidische Norm eines Vektors x \in \mathbb{R}^m
||x||
```

Literaturverzeichnis

- [1] M. ADELMEYER: Call und Put. Einführung in Optionen aus wirtschaftlicher und mathematischer Sicht. Orell Füssli, Zürich, 2000.
- [2] M. AVELLANEDA: Quantitative Modeling of Derivative Securities. Chapman & Hall/CRC, 2000.
- [3] P. BILLINGSLEY: Probability and Measure. John Wiley & Sons, New York, 1995.
- [4] N. H. BINGHAM UND R. KIESEL: Risk-Neutral Valuation. Pricing and Hedging of Financial Derivatives. Springer, 1998.
- [5] D. BECHERER: Rational Hedging and Valuation with Utility-Based Preferences. Dissertation an der Technischen Universität zu Berlin, 2001.
- [6] J. C. Cox, A. Ross, M.Rubinstein: Option Pricing: A Simplified Approach. Journal of Financial Economics, Bd. 7, S. 229–263, 1979.
- [7] R.-A. DANA, M. JEANBLANC: Financial Markets in Continuous Time. Springer-Verlag Berlin, 2003.
- [8] M. H. A. DAVIS UND V. G. PANAS: European option pricing via a utility maximization method. Quantitative Methods, Supercomputers and AI in Finance, Hrsg. S. Zenios, Stanley Thornes, Cheltenham, 1995.
- [9] E. EBERLEIN: Grundideen moderner Finanzmathematik. Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Heft 3, S. 10–20, 1998.
- [10] R. J. Elliott, P. E. Kopp: Mathematics of Financial Markets. Springer-Verlag, 1999.
- [11] H. FÖLLMER, P. LEUKERT: Quantile Hedging. Finance and Stochastics, Bd. 3, Nr. 3, S. 251–273, 1999.
- [12] H. FÖLLMER, A. SCHIED: Stochastic Finance. An Introduction in Discrete Time. Walter de Gruyter Verlag, Berlin, 2002.

- [13] J. M. Harrison, D. M. Kreps: Martingales and Arbitrage in Multi-period Securities Markets. Journal of Economic Theory, Bd. 20, S. 381–408, 1979.
- [14] J. M. HARRISON, S. R. PLISKA: Martingales an Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading. Stochastic Processes and their Applications, Bd. 115, S. 215–260, 1981.
- [15] J. C. Hull: Options, Futures and Other Derivatives. Prentice Hall International, 4. Auflage, 2000.
- [16] A. Irle: Finanzmathematik. Die Bewertung von Derivaten. Teubner-Verlag, Stuttgart, 1998.
- [17] J. KALLSEN: Utility-Based Derivative Pricing in Incomplete Markets. H. Geman, D. Madan, S. R. Pliska, T. Vorst: Mathematical Finance, Bachelier Congress 29. Juni 1. Juli 2000, Springer, 2002.
- [18] J. Kallsen: Derivative Pricing based on Local Utility Maximization. Finance and Stochastics, Bd. 6, Nr. 1, S. 91–113, 2002.
- [19] M. Kijima: Stochastic Processes with Application to Finance. Chapman & Hall/CRC, 2003.
- [20] R. KORN, E. KORN: Optionsbewertung und Portfolio-Optimierung. Vieweg-Verlag, 1999
- [21] Y. K. KWOK: Mathematical Models of Financial Derivatives. Springer-Verlag Singapur, 1998.
- [22] D. LAMBERTON, B. LAPEYRE: Stochastic Calculus Applied to Finance. Chapman & Hall, London, 1997.
- [23] W. Mackens, H. Voss: Mathematik I für Studierende der Ingenieurwissenschaften. HECO-Verlag, de Hesselle & Eickwinkel, 1. Auflage, 1993
- [24] P. K. MEDINA UND S. MERINO: Mathematical Finance and Probability. A Discrete Introduction. Birkhäuser, 2003.
- [25] K. MEYBERG: Algebra 1. Hanser, 2. Auflage, 1980.
- [26] M. MUSIELA, M. RUTKOWSKI: Martingale Methods in Financial Modelling. Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [27] D. Pfeifer: Zur Mathematik derivativer Finanzinstrumente: Anregungen für den Stochastik-Unterricht in der Schule. Stochastik in der Schule, Bd. 20, S. 25–37, 2000.
- [28] S. R. Pliska: Introduction to Mathematical Finance. Blackwell, 1997.

- [29] E. Z. Prisman: Pricing Derivative Securities. Academic Press, 2000.
- [30] K. Sandmann: Einführung in die Stochastik der Finanzmärkte. Springer-Verlag, 1999.
- [31] W. Schachermayer: Optimal Investment in Incomplete Financial Markets. H. Geman, D. Madan, S. R. Pliska, T. Vorst: Mathematical Finance, Bachelier Congress 29. Juni 1. Juli 2000, Springer, 2002.
- [32] M. Schäl: On Quadratic Cost Criteria for Option Hedging. Mathematics of Operations Research, Bd. 19, S. 120–131, 1994.
- [33] M. Schweizer: Mean-Variance Hedging for General Claims. Discussion Paper, Friedrich-Wilhelms-Universität zu Bonn, Sonderforschungsbereich 303, 1990.
- [34] M. Schweizer: Variance-Optimal Hedging in Discrete Time. Mathematics of Operations Research, Bd. 20, S. 1–32, 1995a.
- [35] M. Schweizer: Approximation Pricing and the Variance-Optimal Martingal Measure. Annals of Probability, Bd. 24, S. 206–236, 1996.
- [36] M. Schweizer, H. Pham, T. Rheinländer: *Mean-variance Hedging for Continuous Processes: New Proofs and Examples.* Finance and Stochastics, Bd. 2, S. 173–198, 1998.
- [37] M. SCHWEIZER: A Guided Tour through Quadratic Hedging Approaches. Discussion Paper, Humboldt-Universität zu Berlin, Sonderforschungsbereich 373, Internetausgabe: http://sfb.wiwi.hu-berlin.de/papers/1999/dpsfb199996.pdf.zip, 1999.
- [38] P. Steiner, H. Uhlir: Wertpapieranalyse., Physica-Verlag, Heidelberg, 4. Aufl., 2001.
- [39] G. Wolczyňnska: An Explicit Formula for Option Pricing in Discrete Incomplete Markets: Journal of Theoretical and Applied Finance, Bd. 1, Nr. 2. 283–288, 1998.

Lebenslauf

PERSÖNLICHE DATEN

Geburtsdatum	13.09.1977
Geburtsort	Hamburg
Familienstand	ledig
Staatsangehörigkeit	deutsch

AUSBILDUNG & BERUFLICHER WERDEGANG

1983 - 1987	Grundschule Vahrendorf
1987 - 1996	Friedrich-Ebert-Gymnasium zu Hamburg. Abschluss:
	allgemeine Hochschulreife
1996 - 1997	Zivildienst
1997 - 2001	Studium der Mathematik an der Universität Hamburg.
	Abschluss: Diplom
2001 - 2002	Wissenschaftlicher Mitarbeiter im Drittmittelprojekt
	e-stat an der Universität Oldenburg
2002 - 2004	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachbereich/Insti-
	tut für Mathematik an der Universität Oldenburg

PUBLIKATIONEN

2002	e-stat: Basic Stochastic Finance at School Level, Proceedings in
	Computational Statistics 2002, Physica-Verlag, p. 321–326. (Zu-
	sammen mit D. Pfeifer)

2003 Teaching Stochastic Finance in a Multimedia Environment, Bulletin of the International Statistical Institute, 54. Session, Contributed Papers, Vol. LX, Bd. 2, S. 75–76. (Zusammen mit D. Pfeifer)

Eidesstattliche Erklärung

Die vorliegende Dissertation wurde selbständig verfasst und es wurden nur die angegebenen Hilfsmittel benutzt. Kein Teil der Dissertation wurde bisher veröffentlicht. Die Dissertation wurde weder in ihrer Gesamtheit noch in Teilen einer anderen wissenschaftlichen Hochschule zur Begutachtung vorgelegt.

Ort

Datum

Unterschrift