CARL VON OSSIETZKY universität OLDENBURG
FAKULTÄT V
MATHEMATIK UND NATURWISSENSCHAFTEN

Fachdidaktisches Wissen von Lehrerinnen und Lehrern und die didaktische Strukturierung von Mathematikunterricht

Fallanalysen zur kognitiven Aktivierung in Unterrichtsplanungen und realisiertem Unterricht

Von der Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften der Carl von Ossietzky Universität Oldenburg zur Erlangung des Grades und Titels einer Doktorin der Philosophie (Dr. phil.) angenommene Dissertation.

von Manuela Hillje

geboren am 23.Februar 1984 in Oldenburg

Betreuer und Gutachter:	Prof. Dr. Michael Neubrand
Zweitgutachter:	Prof. Dr. Astrid Fischer
Tag der Disputation:	25. Oktober 2012

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich allen Personen, die mich beim Entstehen dieser Arbeit unterstützt haben, ganz herzlich danken.

Zu allererst gilt mein Dank natürlich den 5 Lehrerinnen und Lehrern, die sich die Zeit genommen haben, an meiner Studie mitzuwirken. Ohne sie hätte diese Arbeit nicht entstehen können. Es ist nicht selbstverständlich, einen so tiefen Einblick in das tägliche Unterrichten und die zugrundeliegenden Gedanken zu gewähren.

Mein besonderer Dank gilt Prof. Dr. Michael Neubrand, dem Betreuer meiner Dissertation, sowie der Zweitgutachterin Prof. Dr. Astrid Fischer. Beide haben mich auf ihre Art und Weise durch viele fruchtbare aber auch kritische Diskussionen unterstützt, beraten und ermuntert. Ihr theoretisches Hintergrundwissen sowie ihre Erfahrungen in der empirischen Forschung waren für mich sehr hilfreich.

Sowohl allen Teilnehmerinnen und Teilnehmern des Studiengangs „ProfaS“ an der Carl von Ossietzky Universität Oldenburg als auch allen Doktorandinnen und Doktoranden des Doktorandenkolloquiums Bremen-Oldenburg danke ich für die anregenden Rückmeldungen und Gespräche. Sie haben entscheidende Ideen für die Verknüpfung unterschiedlicher Erhebungsmethoden, die Kategorien zur Auswertung sowie die Darstellung der Ergebnisse beigetragen.

Der COACTIV-Arbeitsgruppe an der Universität Regensburg danke ich für ihre umfangreiche Unterstützung bei der Durchführung und Auswertung des COACTIV-Tests. Prof. Dr. Stefan Krauss, Christine Schmeisser, Alfred Lindl und Agnetha Henne haben damit einen entscheidenden Beitrag zur Anknüpfung meiner Analysen an bestehende Forschungsergebnisse geleistet.

Diana Hundscheidt, Stefanie Kuhlemann, Alexander Meyer, Andrea Ohlert, Kathrin Schlaarmann und Sandra Thom danke ich für das Korrekturlesen einiger Kapitel dieser Arbeit. Besonders hervorheben möchte ich Stephanie Schlump, die nicht nur einen Großteil der Arbeit kritisch korrigiert hat, sondern vor allem auch einen Teil der Daten kodierte. Durch ihre Hilfe konnte ich das Kategoriensystem ausschärfen sowie die Objektivität der Kodierungen überprüfen. Vielen Dank dafür.

Marc Rhode und meiner gesamten Familie danke ich abschließend dafür, dass sie mich in den nicht immer einfachen Jahren vielfältig unterstützt und ermuntert haben. Vor allem mein Sohn Tammo musste häufig auf Zeit mit seiner Mama verzichten. Er hat mir aber auch die Kraft gegeben, diese Arbeit fertigzustellen. Angelika Hillje, Ralf Hillje, Bärbel Seidel, Sven Brand, Maria und Hans Rhode, Christian und Malena Hillje sowie Pia und Maik Seidel, haben sich viele Stunden liebevoll um Tammo gekümmert und damit entscheidend zur Entstehung dieser Arbeit beigetragen. Danke!

Manuela Hillje

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

„We are only at the beginning of understanding how teacher knowledge relates to teaching and student learning“

(Kersting, Givvin, Thompson, Santagata, & Stigler, 2012, S. 587)

Es gibt in der Mathematikdidaktik bereits viele Studien, die den Zusammenhang zwischen dem professionellen Wissen der Lehrerinnen und Lehrer, ihrem Unterricht und dem Lernen der Schülerinnen und Schüler untersuchen. Zu den größeren Studien zählen beispielsweise die TIMS-Video-Studie (Hiebert, Stigler, & Manaster, 1999), das COACTIV-Forschungsprogramm (Kunter et al., 2011), TEDS-M (Blömeke, Kaiser, & Lehmann, 2010a) die Studien der sogenannten Michigan Group (Ball & Bass, 2009) und das sogenannte Pythagoras-Projekt (Klieme, Lipowsky, Rakoczy, & Ratzka, 2006). Diese Studien haben bereits vielfältige Ergebnisse hervorgebracht. Beispielsweise konnte bei COACTIV und TEDS-M gezeigt werden, dass Gymnasiallehrer über deutlich mehr fachdidaktisches Wissen und mathematisches Fachwissen im Sinne von Shulman (1986) verfügen als Lehrende an anderen Schulformen (Blömeke, Kaiser, & Lehmann, 2010b; Krauss et al., 2008). Dabei wirkt sich hohes fachdidaktisches Wissen positiv auf die Leistungen der Schülerinnen und Schüler und auch auf die kognitive Herausforderung des Unterrichts aus, wie bei COACTIV und in den Studien der Michigan Group bestätigt werden konnte (Baumert & Kunter, 2011b; Hill, Rowan, & Ball, 2005). Dennoch weisen Kersting et al. (2012) darauf hin, dass die Forschung zum Zusammenhang zwischen Lehrerwissen, dem Unterricht und der Schülerleistung noch ganz am Anfang steht. Dies kann insbesondere damit begründet werden, dass im Rahmen der bisher genannten Studien nicht untersucht wurde, wie diese Zusammenhänge entstehen. Es wurde bisher nur das vorhandene Wissen erhoben, aber nicht dessen Umsetzung in Handlungen in den Blick genommen. Dabei zeigen die Ergebnisse des Pythagoras-Projektes, dass sich die Überzeugungen der Lehrerinnen und Lehrer, als eine wichtige Komponente professioneller Kompetenz, nicht immer auch in den Unterrichtshandlungen widerspiegeln (Klieme, Lipowsky, et al., 2006). Dies kann auch für das fachdidaktische Wissen vermutet werden, da von vielen Autoren der Übergang zwischen dem Wissen und dem Handeln der Lehrpersonen als problematisch angesehen wird (siehe z.B. Bromme, 1992; Neuweg, 2011; Oser, 1997; Wahl, 2001).

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich daher mit der Frage, wie Lehrerinnen und Lehrer ihr professionelles Wissen bei der didaktischen Strukturierung ihres eigenen Unterrichts nutzen. Dabei wird der Fokus auf das fachdidaktische Wissen gelegt, welches sich in den oben beschriebenen Studien als erklärungsreicher Faktor herausgestellt hat. Im Folgenden wird ein Überblick über die einzelnen Kapitel dieser Arbeit gegeben.

Im Kapitel 2 werden die Forschungsfragen dieser Arbeit entwickelt, indem die methodischen Designs sowie die zentralen Ergebnisse der bereits genannten Studien im Detail vorgestellt sowie deren Grenzen aufgezeigt werden. Darüber hinaus dienen die Beschreibung der einzelnen Studien dazu, die zu einem späteren Zeitpunkt dargestellten Konzeptionen des professionellen Wissens und der kognitiven Aktivierung der einzelnen Arbeitsgruppen in ihren Entstehungszusammenhang einzubetten, ohne dass der Fokus auf die theoretischen Grundlagen durch Hintergrundinformationen zu den einzelnen Studien gestört wird. Außerdem können die im ersten Kapitel dargestellten Ergebnisse der bisherigen Studien gegen Ende der Arbeit zum Teil mit den im Rahmen dieser Arbeit gewonnenen Erkenntnissen in Beziehung gesetzt werden.

Das Kapitel 3 stellt aus unterschiedlichen Blickrichtungen dar, welche Kompetenzen Lehrerinnen und Lehrer benötigen, um die Anforderungen der Unterrichtsgestaltung bewältigen zu können. Dabei werden das fachdidaktische Wissen und das mathematische Fachwissen als zwei zentrale Elemente der professionellen Kompetenz von Lehrerinnen und Lehrern herausgearbeitet, die eng miteinander verbunden sind. Anschließend wird das dieser Arbeit zugrunde liegende Kompetenzmodell vorgestellt, welches auch als Grundlage der COACTIV-Studie diente und das fachdidaktische Wissen und das mathematische Fachwissen in einen konzeptionellen Rahmen einbettet.
Im Kapitel 4 werden verschiedene Konzeptionen zum fachdidaktischen Wissen und zum mathematischen Fachwissen vorgestellt und miteinander verglichen. Darüber hinaus wird in diesem Kapitel der Zusammenhang zwischen dem Wissen der Lehrerinnen und Lehrer und ihrem Handeln im Unterricht, welcher vielfach als problematisch beschrieben wird, thematisiert. Hieraus kann abgeleitet werden, dass für eine Untersuchung der Nutzung des fachdidaktischen Wissens, wie es diese Arbeit zum Ziel hat, die bloße Betrachtung des Wissens nicht ausreichend ist. Im Kapitel 5 wird deshalb aufbauend auf den Konzeptionen anderer Arbeitsgruppen ein Konzept der kognitiven Aktivierung entwickelt, welches insbesondere kognitiv aktivierende Elemente von Aufgaben, aber auch kognitiv aktivierende Aspekte des Unterrichts, in den Blick nimmt. Dieses Konzept wird im Rahmen dieser Arbeit zur Einschätzung der Qualität der Umsetzung des vorhandenen Wissens und zur Beurteilung der Unterrichtsqualität verwendet.
Das Kapitel 6 stellt den Übergang vom Theorieteil zum Methodenteil dieser Arbeit dar, da hier größtenteils aufbauend auf den in den vorangegangenen Kapiteln dargestellten theoretischen Grundlagen die im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Analyseinstrumente erläutert werden. Es wird einerseits das Klassifikationssystem für die Analyse des Potenzials der eingesetzten Aufgaben unabhängig vom Unterricht vorgestellt. Andererseits werden die Kategorien zum fachdidaktischen Wissen und zur kognitiven Aktivierung erläutert, die im Rahmen einer qualitativen Inhaltsanalyse verwendet werden. Das methodische Design dieser Arbeit wird im Kapitel 7 im Detail vorgestellt. Es werden die Kombination verschiedener Erhebungsinstrumente und Auswertungsmethoden begründet und die einzelnen Schritte der Datenerhebung dargestellt, woraufhin eine Erläuterung der methodischen Schritte der Auswertung folgt.
Die Kapitel 8-12 dienen der ausführlichen Darstellung der Analysen der didaktischen Strukturierungen der einzelnen Lehrpersonen und stellen bereits Ergebnisse dieser Studie dar. Es werden zunächst die von den Lehrerinnen und Lehrern eingesetzten Aufgaben unabhängig vom Unterricht analysiert. Dies wird mit der Aufgabenbearbeitung im Unterricht und den Aussagen der Lehrerinnen und Lehrer in der Unterrichtsplanung und im an den Unterricht anschließenden Interview verglichen. Hieraus werden Rückschlüsse auf das vorhandene fachdidaktische Wissen und dessen Umsetzung bei der didaktischen Strukturierung gezogen.
Im Kapitel 13 werden werden einerseits die qualitativen Analysen der einzelnen Lehrpersonen miteinander verglichen. Andererseits werden Vergleiche zwischen den qualitativen Analysen und den COACTIV-Testergebnissen der teilnehmenden Lehrerinnen und Lehrer angestellt. Hieraus werden im Vergleich mit den Ergebnissen weiterer Studien die zentralen Ergebnisse dieser Arbeit abgeleitet. Die Arbeit schließt mit einem Ausblick im Kapitel 14 und einer Zusammenfassung im Kapitel 15.

2 Bestehende Untersuchungen zum Lehrerwissen

Zu Beginn dieser Arbeit werden zunächst Entwicklungen in der Unterrichtsforschung mit Blick auf die Lehrerpersönlichkeit und das Lehrerwissen aus allgemeindidaktischer Perspektive erläutert (siehe 2.1), um vor allem einen Überblick über verschiedene Untersuchungsansätze in der Forschung zum Lehrerwissen zu geben. Anschließend werden einige mathematikdidaktische Studien vorgestellt, die die Erforschung des Professionswissen der Lehrerinnen und Lehrer zum Ziel hatten und zum Teil auch schon sehr umfassende Ergebnisse über die Zusammenhänge zwischen Lehrerwissen, Unterrichtsqualität und Schülerleistung erbracht haben (siehe 2.2 bis 2.6). Die im Rahmen dieser Studien entwickelten Konzeptionen zum fachbezogenen Wissen der Lehrerinnen und Lehrer und zur kognitiven Aktivierung dienen als Grundlage für die Entwicklung eines Analyseinstrumentes, mit dem vor allem die Nutzung des fachdidaktischen Wissens bei der didaktischen Strukturierung von Unterricht untersucht werden kann. Die Erläuterungen dieser Studien dienen damit einerseits der späteren Einordnung der vorgestellten Konzeptionen in deren Entstehungszusammenhang (siehe Kapitel 4 und 5). Andererseits werden anhand dieser großen Studien Forschungslücken aufgezeigt und die Forschungsfragen dieser Arbeit entwickelt (siehe 2.7). Bisher wurde das Lehrerwissen größtenteils unabhängig vom eigenen Unterricht der Lehrerinnen und Lehrer erfasst. Mithilfe des zugrundeliegenden Modells zur Rekonstruktion fachdidaktischer Prozesse wird daher im Rahmen dieser Arbeit vor allem die Nutzung des fachdidaktischen Wissens bei der Planung, Durchführung und Reflexion von Mathematikunterricht untersucht (siehe 2.8).

2.1 Entwicklungen in der Unterrichtsforschung

In den 50er und 60er-Jahren des 20. Jahrhunderts wurden viele Studien zu positiven Merkmalen der Lehrerpersönlichkeit durchgeführt (*Persönlichkeitsparadigma*, Ingenkamp, 1970), die allerdings aus heutiger Sicht meist schwache und triviale Ergebnisse hervorbrachten. Außerdem lassen sich die beim Persönlichkeitsparadigma untersuchten Merkmale nur schwer durch gezielte Fortbildungsmaßnahmen verbessern. Der eigentliche Beginn der Lehrerprofessionsforschung wird heute überwiegend im Prozess-Produkt-Paradigma gesehen (Krauss et al., 2008).

Das Prozess-Produkt-Paradigma

Ab 1970 beschäftigte sich die wissenschaftliche Forschung mit dem konkreten Lehrerhandeln im Unterricht. Im Rahmen des sogenannten *Prozess-Produkt-Paradigmas* wird versucht, aus der empirischen Erfassung von Prozessmerkmalen des Unterrichts (z.B. Lehrerverhalten, Unterrichtsführung, Lehrer-Schüler-Interaktion) und der Erfassung von Zielkriterien von Unterricht (den ‚Produkten‘, z.B. Lernzuwachs) auf Zusammenhänge zwischen den untersuchten Prozessen und Produkten zu schließen (Brunner, Kunter, Krauss, Klusmann, et al., 2006; Krauss et al., 2008). Hierdurch konnten zahlreiche Aspekte lern- und leistungsrelevanten Unterrichtshandelns von Lehrkräften identifiziert werden (Brophy, 1999; Brophy & Good, 1986; Helmke, 2009). Es konnte beispielsweise in einer Vielzahl von Untersuchungen die Effizienz folgender Verhaltensweisen nachgewiesen werden:

- Klare und konsistente Darbietung der Stoffinhalte, der jeweiligen Aufgabenstellungen sowie der Unterrichtsziele
- Angemessenes – nicht maximales – Unterrichtstempo, dass Reflexionsschleifen erlaubt
- Störungspräventive Unterrichtsführung und effektive Behandlung von kritischen Ereignissen

- Berücksichtigung individueller Voraussetzungen (Adaptivität), Überwachung der Schülerarbeit und der Lernfortschritte (Monitoring)
- Emotional qualitätsvolle Lehrer-Schüler Beziehung (Krauss et al., 2008, S. 226).

Allerdings zeigen empirische Studien auch, dass vor allem ein gutes Zusammenspiel verschiedener Verhaltensweisen zu erfolgreichem Unterricht führen kann (Baumert & Köller, 2000a) und dass auf ganz verschiedene, aber nicht beliebige Art und Weise gleichermaßen guter Unterricht durchgeführt werden kann (Weinert, 1996). Die Ausgestaltung und Kombination von Verhaltensweisen muss an die verschiedenen Unterrichtsfächer, unterschiedliche Klassenstufen und Themenbereiche angepasst werden (Helmke, 2009; Oser & Baeriswyl, 2000).

Das Prozess-Produkt-Paradigma gilt heute noch als aktuell, wobei es häufig zum *Prozess-Mediations-Produkt-Modell* erweitert wird (Brunner, Kunter, Krauss, Klusmann, et al., 2006; Krauss et al., 2008), in dem „die individuellen Informationsverarbeitungsprozesse der Schüler (Mediation) als Schlüsselmerkmale des Lernens mitberücksichtigt“ werden (Krauss et al., 2008, S. 227). Ein Beispiel hierfür ist das Angebots-Nutzungs-Modell von Helmke (2009). Im Rahmen dieser Forschungsrichtung werden vor allem Unterrichtsbeobachtungen, auch mit Videounterstützung, durchgeführt, die im Prozess-Mediations-Produkt-Modell beispielsweise durch Schülerfragebögen ergänzt werden (Krauss, 2011). Hier sind zum Beispiel die TIMSS-Video Studie (Hiebert et al., 1999) und das Pythagoras-Projekt zu nennen (siehe 2.2 und 2.6).

Die Expertiseforschung

Seit den 1980er Jahren werden auch die Methoden der Expertiseforschung in der Unterrichtsforschung angewendet (Krauss et al., 2008). Eine Definition des Begriffs ‚Experte‘ scheint dabei schwierig. Im Wesentlichen lassen sich in der Expertiseforschung auch bezogen auf den Lehrerberuf der leistungsorientierte und der wissensorientierte Ansatz unterscheiden (Krauss, 2011).

Im *leistungsorientierten* Ansatz werden Experten durch dauerhaft herausragende Leistungen in einem bestimmten Gebiet charakterisiert. Hier wird deutlich, dass sich Expertise nur im Vergleich zwischen Personen und auch nur in Bezug zum jeweiligen Fachgebiet bestimmen lässt (Gruber & Mandl, 1996). Eine gängige Methode des leistungsorienteierten Ansatzes der Expertiseforschung ist der Experten-Novizen-Vergleich, wobei als Novizen diejenigen Personen definiert werden, die die hohe Leistungsstärke in dem jeweiligen Fachgebiet entweder noch nicht erreicht haben oder nicht erreichen können (Chi, 2011; Gruber & Mandl, 1996). Das domänenspezifische Wissen von Experten wurde dabei als der erklärungsmächtigste Faktor von Expertenleistungen identifiziert (Gruber & Mandl, 1996). Experten wissen nicht nur mehr als Laien, sie haben ihr Wissen vor allem gut vernetzt (Krauss, 2011; Krauss et al., 2008). Die unterschiedlichen Wissensstrukturen führen beispielsweise dazu, dass von Experten und Novizen mathematische Probleme unterschiedlich repräsentiert werden (Chi, 2011). So beschreibt Chi (2011) Untersuchungen, in denen Experten eher die tiefgründigen Aspekte von Problemen benennen, während in den Darstellungen der Novizen die oberflächlichen Aspekte der Probleme betont werden. Diese unterschiedlichen Repräsentationen von Wissen können als Erklärung dafür dienen, dass Experten und Novizen unterschiedliche Problemlösestrategien anwenden (Chi, 2011; Gruber & Mandl, 1996).

Im *wissensorientierten* Ansatz werden diejenigen Personen als Experten bezeichnet, die eine spezialisierte, komplexe Aufgabe erfolgreich bewältigen können (z.B. das schulische Unterrichten). Im Fokus steht hier vor allem das hierzu benötigte Wissen, auch Expertenwissen oder Professionswissen genannt, welches von den Mitgliedern einer Profession geteilt wird.

Es werden im Gegensatz zum leistungsorientierten Ansatz nicht die individuellen Bedingungen für herausragende Leistungen betrachtet (Krauss, 2011). Bromme (1992) bezeichnet dementsprechend alle Mitglieder einer Profession als Experten, wodurch sich die Profession zum Laien abgrenzen lässt. Durch umfassende Analysen der Anforderungssituation (im Lehrerberuf die Anforderungssituation des Unterrichtens) werden im wissensorientierten Ansatz Rückschlüsse auf das zur Bewältigung dieser Anforderungen benötigte Wissen gezogen (Krauss, 2011).
Da die Unterscheidung in Experten und Novizen aufgrund fehlender Leistungskriterien im Lehrerberuf schwierig ist, liegt gerade die Übertragung des wissensorientierten Ansatzes der Expertiseforschung auf die Forschung zum Lehrerberuf nahe (Krauss, 2011). In der mathematikdidaktischen Forschung rückt in den letzten Jahren mehr und mehr das Expertenwissen der Lehrerinnen und Lehrer in den Fokus der Forschung. Insbesondere sind hier die großen Studien COACTIV, TEDS-M und die Studien der Michigan-Group zu nennen, die das Prozess-Produkt-Paradigma mit der Expertiseforschung verbinden (siehe 2.3 bis 2.5). Im Folgenden werden die bisher erwähnten Studien näher erläutert sowie Grenzen der jeweiligen Studien aufgezeigt, was in der Entwicklung der Forschungsfragen dieser Arbeit mündet.

2.2 TIMSS

Im Zentrum der großen internationalen Erhebung im Rahmen der Third International Mathematics and Science Study (TIMSS, 1994/1995), an der sich 24 Länder beteiligten, stand ein Leistungstest zur Erfassung der mathematisch-naturwissenschaftlichen Grundbildung der Schülerinnen und Schüler. In Deutschland wurden repräsentative Stichproben von Schülerinnen und Schülern der Sekundarstufe I (Klassenstufe 7 und 8) sowie der Sekundarstufe II (kurz vor ihrem Abschluss) getestet (für Details zur Testkonstruktion siehe Baumert, Köller, Lehrke, & Brockmann, 2000). Das Niveau der mathematisch-naturwissenschaftlichen Grundbildung der deutschen Schülerinnen und Schüler lag beim internationalen Vergleich im mittleren Bereich. Insbesondere das Umgehen mit komplexen Operationen, das Anwenden von Modellvorstellungen und das selbstständige mathematische Argumentieren bereitete deutschen Schülerinnen und Schülern Schwierigkeiten, wohingegen sie relative Stärken im Lösen mathematischer Routineaufgaben aufwiesen (Baumert, Klieme, & Bos, 2001).
Der Leistungstest wurde unter anderem durch eine Schüler- und Lehrerbefragung ergänzt, in der die Schülerinnen und Schüler sowie die Lehrpersonen zur Einschätzung der Häufigkeit bestimmter mathematischer Aktivitäten in ihrem Mathematikunterricht, die Hinweise auf didaktische Akzentsetzungen geben können, aufgefordert wurden. Hierzu zählen beispielsweise das Erklären eigener Gedankengänge, das Darstellen und Analysieren von Zusammenhängen, das Lösen von Gleichungen, das Auswendiglernen von Regeln und Verfahren sowie das Anwenden von Mathematik auf Alltagsprobleme (Baumert & Köller, 2000b). Hieraus wurden indirekt, d.h. ohne direkte Beobachtung des Unterrichts, Rückschlüsse auf die Gestaltung des Mathematikunterrichts durch die Lehrerinnen und Lehrer gezogen und diese mit den Leistungen der Schülerinnen und Schüler in Beziehung gesetzt. Als positiv erwies sich dabei ein Mathematikunterricht, in dem die Schülerinnen und Schüler vor allem eine verständnisorientierte Unterrichtsführung wahrnehmen, die insbesondere auf kognitiv anspruchsvolle Tätigkeiten der Lernenden Wert legt. Dieser Unterricht zeichnet sich durch Nicht-Routineaufgaben mit eher problemlösendem Charakter, mathematisches Modellieren und das Erklären und Analysieren mathematischer Zusammenhänge aus. Dagegen hängt ein eher rezeptiv erlebter Unterricht negativ mit der Schülerleistung zusammen (Baumert, Klieme, & Bos, 2001).

TIMSS-Video

Die bisher beschriebenen Analysen der TIMS-Studie lassen nur relativ indirekte Schlüsse auf den Unterricht und das Lehrerhandeln zu, da der Unterricht nicht direkt beobachtet wurde. Deutschland beteiligte sich aber neben Japan und den USA zusätzlich an einer begleitenden Videostudie (1995). In zufällig aus der TIMSS-Stichprobe ausgewählten Klassen wurden insgesamt 231 Unterrichtsstunden zu den Stoffgebieten Geometrie und Algebra videografiert (100 in Deutschland, 50 in Japan, 81 in den USA, je eine Unterrichtsstunde pro Lehrkraft). Zusätzlich wurden Daten in Form von Aufzeichnungen der Lehrerinnen und Lehrer zur Unterrichtsvorbereitung, Arbeitsblättern und Schulbuchseiten sowie ein Fragebogen zu Zielen der Stunde erfasst. In umfangreichen Diskussionen wurde ein Kategoriensystem entwickelt, das insbesondere Aspekte erhoben, die mögliche Unterschiede im Mathematiklernen der Schülerinnen und Schüler erklären können und anhand derer die didaktisch-methodische Anlage und die Durchführung des Unterrichts in den verschiedenen Kulturen beschrieben werden kann (Hiebert et al., 1999; J. Neubrand, 2002). Außerdem wurden sogenannte „Stundenablaufpläne (lesson plans)“ (J. Neubrand, 2002, S. 199) erstellt, die den Unterricht in schriftlicher Form möglichst detailliert darstellen und eine unvoreingenommene Analyse der Unterrichtsstunden erlauben, da kulturelle Kennzeichen (z.B. typische Schülernamen) ausgeblendet werden können (Hiebert et al., 1999). Anhand dieser ‚lesson plans‘ wurden insbesondere die im Unterricht eingesetzten Aufgaben und auch der Umgang mit den Aufgaben im Unterricht analysiert, da Aufgaben ein entscheidendes Mittel für die Gestaltung von Unterricht darstellen (Bromme, Seeger, & Steinbring, 1990; J. Neubrand, 2006). Die Analysen anhand der eingesetzten Aufgaben haben sich bewährt, um verschiedene inhaltliche Strukturen im Unterricht und in den bereitgestellten Lerngelegenheiten aufzuzeigen (Jordan et al., 2006; J. Neubrand, 2006). So wurde beispielsweise anhand der Aufgabenanalysen festgestellt, dass in Deutschland die im Unterricht bearbeiteten Aufgaben überwiegend prozedurales Denken (siehe 5.2.2) erfordern und ein eher niedriges kognitives Anspruchsniveau aufweisen, wohingegen im japanischen Unterricht sowohl prozedurales als auch begriffliches Denken (siehe 5.2.2) ausgeglichen auftreten und Aufgaben auf verschiedenen kognitiven Anspruchsniveaus gestellt werden (J. Neubrand, 2002).

Des Weiteren konnte TIMSS-Video zeigen, dass in Deutschland im Geometrie- und Algebraunterricht vor allem das fragend-entwickelte Unterrichtsgespräch überwiegt, in dem relativ komplexe und anspruchsvolle Aufgabenstellungen (aber mit Fokus auf prozeduralem Denken) im Unterrichtsgespräch unter starker Steuerung durch die Lehrerinnen und Lehrer kleinschrittig bearbeitet werden, so dass die Schülerinnen und Schüler oft nur noch elementare Teilleistungen erbringen müssen. Insbesondere im japanischen Unterricht stehen dagegen häufig offene Problemstellungen und Denkaufgaben im Vordergrund, die auch in ihrer Offenheit im Unterricht behandelt werden, d.h. es werden verschiedene Lösungen und Lösungswege thematisiert und Aufgabenstellungen von den Schülerinnen und Schülern selbst entwickelt (Klieme, Schümer, & Knoll, 2001). Hier zeigt sich ganz deutlich, dass die kognitive Aktivierung (siehe Kapitel 5) der Schülerinnen und Schüler von der Bearbeitung der Aufgaben im Unterricht und nicht allein von der Art der eingesetzten Aufgaben abhängt.

Die im Rahmen von TIMSS-Video entwickelten Instrumente, insbesondere der Fokus auf die eingesetzten Aufgaben, haben sich als gut geeignet herausgestellt, um durchgeführten Unterricht zu analysieren. Allerdings ‚beschränkte‘ sich die TIMS-Studie auf die Erfassung von Unterrichtsqualität und Schülerleistung. Der Einfluss des Lehrerwissens wurde nicht untersucht.

Folgerungen aus TIMSS

Aufgrund der Analysen der TIMS-Video-Studie und weiterer Studien der deutschsprachigen TIMSS-Arbeitsgruppe wurden drei Dimensionen von Unterrichtsqualität herausgearbeitet (Klieme, Schümer, et al., 2001), die für die Entwicklung der Leistung der Schülerinnen und Schüler im Sinne eines konzeptuellen Verständnisses sowie für die Motivation förderlich sind (siehe auch Kapitel 5):

1. strukturierende, klare und störungspräventive Unterrichtsführung mit viel effektiv genutzter Lernzeit (time on task)
2. unterstützendes, schülerorientiertes Sozialklima mit individueller Bezugsnormorientierung, angemessenem Lerntempo und angemessenem Leistungsdruck
3. kognitive Aktivierung, die sich z.B. durch offene Aufgaben und einen diskursiven Umgang mit Fehlern auszeichnet (Klieme, Pauli, & Reusser, 2006).

An den Wiederholungen der TIMS-Studie 1999 und 2003 sowie der Ausweitung von TIMSS-Video 1999 hat Deutschland nicht wieder teilgenommen (Clausen, Reusser, & Klieme, 2003). Es wurden aber ausgehend von den Ergebnissen der TIMS-Studie in Deutschland vielfältige Studien zur Bildungsqualität von Schule (zusammengefasst im von der DFG geförderten Schwerpunktprogramm BIQUA) und zur vergleichenden Leistungsmessung der Schülerinnen und Schüler (insbesondere PISA) initiiert (Klieme & Baumert, 2001). Auch die COACTIV-Studie stellt eine Reaktion auf die Ergebnisse der TIMS-Studie dar, indem zusätzlich zu Leistungsdaten der Schülerinnen und Schüler und Analysen der Unterrichtsgestaltung vor allem der Lehrer als Einflussfaktor für Leistungsentwicklung in den Blick genommen wurde (Baumert, Kunter, Blum, Klusmann, et al., 2011).

2.3 COACTIV

Das COACTIV-Forschungsprogramm ‚Professionswissen von Lehrkräften, kognitiv aktivierender Mathematikunterricht und die Entwicklung mathematischer Kompetenz', welches seit 2002 am Max-Planck-Institut für Bildungsforschung in Berlin in Kooperation mit anderen Hochschulen entwickelt wird, widmet sich der „Struktur, Genese und Handlungsrelevanz professioneller Kompetenz von Lehrkräften" (Baumert, Kunter, Blum, Klusmann, et al., 2011, S. 69). Es wurden bislang zwei Hauptstudien abgeschlossen. In der ersten Hauptstudie von COACTIV (2002-2006), wurden vor allem die theoretischen Grundlagen sowie verschiedene Erhebungsinstrumente des Programms entwickelt und getestet, um die professionelle Kompetenz von praktizierenden Lehrerinnen und Lehrern zu erheben. Die zweite Hauptstudie, COACTIV-R (2007-2009), untersuchte den Kompetenzerwerb von Lehramtsanwärterinnen und Lehramtsanwärtern im Vorbereitungsdienst im Fach Mathematik. Die dritte Hauptstudie, BilWiss (seit 2010), konzentriert sich auf das bildungswissenschaftliche Wissen von Absolventinnen und Absolventen verschiedener Lehramtsstudiengänge. Alle drei Hauptstudien sind längsschnittlich angelegt und werden durch mehrere kleinere Studien ergänzt (Baumert, Kunter, Blum, Klusmann, et al., 2011; Löwen, Baumert, Kunter, Krauss, & Brunner, 2011).

Im Rahmen dieser Arbeit ist vor allem die 2002-2006 durchgeführte erste Hauptstudie, die mit PISA 2003 verbunden und im Rahmen des Schwerpunktprogramms BIQUA von der DFG gefördert wurde, von Bedeutung. Hier wurde neben den Überzeugungen, motivationalen Merkmalen, Möglichkeiten zur Selbstregulation und Aspekten des pädagogischen Wissens (für Einzelheiten siehe das Kompetenzmodell in 3.2) insbesondere das mathematische Fachwissen sowie das fachdidaktische Wissen von Mathematiklehrkräften mithilfe eines speziell entwickelten Wissenstests erhoben (siehe 7.3.6). Einen Überblick über die verschiedenen eingesetzten Instrumente, die zum größten Teil im Rahmen von COACTIV neu entwickelt wurden, gibt Abbildung 2.1.

Lehrer	*Unterricht*	*Schüler*
• **Wissenstest** - fachdidaktisches Wissen - mathematisches Fachwissen • **Reaktionszeittest** - schnelle Beurteilung der fachlichen Richtigkeit von Schülerantworten • **Fragebögen** - Diagnostische Kompetenz/Leistungsbeurteilung - Überzeugungen - motivationale Orientierungen - selbstregulative Fähigkeiten - Soziodemografie (PISA)	• **Lehrerbefragung** - Klassenführung - Kognitive Aktivierung - Konstruktive Unterstützung • **Schülerbefragung** - Klassenführung - Kognitive Aktivierung - Konstruktive Unterstützung • **Analyse von Unterrichtsmaterial** - Hausaufgaben - Unterrichtsaufgaben - Klassenarbeiten	• **Leistungstests** - PISA-Test - Nationaler Ergänzungstest - Curricular sensitiver Test zur Abbildung von Lernfortschritten • **Fragebögen** - Überzeugungen - Motivationale Merkmale - Emotionales Erleben (PISA) - Soziodemografie (PISA)

Abbildung 2.1: Mehrmethodischer Zugang von COACTIV
(nach Löwen et al., 2011, S. 77-78, sowie Krauss & Brunner, 2011)

Die schriftlichen, teilweise computerunterstützten Tests zum mathematischen Fachwissen und zum fachdidaktischen Wissen stellen dabei die wichtigste COACTIV-Entwicklung dar (Löwen et al., 2011) (siehe auch 7.3.6). Hierzu wurde zunächst eine ausführliche Konzeptionalisierung der Kompetenzfacetten ‚fachdidaktisches Wissen' und ‚mathematisches Fachwissen' erarbeitet (siehe 4.1.2 und 4.2.2). Insbesondere wurde das fachdidaktische Wissen in die drei Komponenten *schülerbezogenes Wissen*, *Wissen über das Verständlichmachen* mathematischer Inhalte und *inhaltsbezogenes Wissen* unterteilt. Neben diesen drei Facetten des fachdidaktischen Wissens wurde im Rahmen von COACTIV bei der Testentwicklung insbesondere die kognitive Aktivierung der Schülerinnen und Schüler berücksichtigt (Krauss et al., 2011).
In Abbildung 2.2 ist für jede Facette des fachdidaktischen Wissens je eine Beispielaufgabe aus dem COACTIV-Test abgebildet: Die Lehrerinnen und Lehrer wurden mehrfach zur Beschreibung, bzw. Analyse von Schülerfehlern aufgefordert, sollten ausgewählte Inhalte erklären und für mehrere Aufgaben verschiedene mögliche Lösungen nennen. Der Test fokussiert damit auf einzelne Aspekte des fachdidaktischen Wissen, wie sie in der Konzeption von COACTIV herausgearbeitet werden (siehe 4.1.2) Einige Aspekte des fachdidaktischen Wissens werden aber nur kaum oder gar nicht erhoben (z.B. gibt es nur sehr wenige Aufgaben zur Beurteilung richtiger Schülerlösungen, siehe hierzu 7.3.6) (vgl. Krauss et al., 2011).
Im Fachwissenstest wurde vor allem ein tieferes Verständnis der Fachinhalte des Sekundarstufencurriculums getestet, wozu insbesondere das Einordnen der Strukturen des Schulwissens in allgemeinere mathematische Zusammenhänge und typische Arbeitsweisen und Wissensbildungsprozesse in der Mathematik gehören (Krauss et al., 2008) (siehe auch Abbildung 7.5). Ergänzend wurde ein computerbasierter Reaktionszeittest durchgeführt, in dem die schnelle Beurteilungsfähigkeit der Richtigkeit von Schülerantworten erhoben wurde (Krauss & Brunner, 2011). Außerdem wurden die Lehrerinnen und Lehrer aufgefordert zu beschreiben, wie sie drei auf Video gezeigte Unterrichtsszenen fortführen würden. Hierzu sind aber noch keine Ergebnisse publiziert (Bruckmaier, in Vorbereitung). Es wurden die Lehrerinnen

und Lehrer der an der nationalen PISA-Ergänzung 2003-2004 teilnehmenden Klassen getestet, so dass die Ergebnisse der Lehreruntersuchung mit den Leistungen der Schülerinnen und Schüler bei PISA in Beziehung gesetzt werden konnten (Krauss et al., 2008; Löwen et al., 2011).

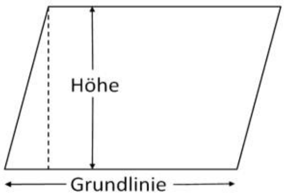
Mathematikbezogene Schülerkognitionen	Verständlichmachen mathematischer Inhalte	Potenzial von Mathematikaufgaben
„Parallelogramm“ Die Fläche eines Parallelogramms lässt sich berechnen aus der Länge der Grundlinie mal Länge der Höhe.  Geben Sie bitte ein Beispiel eines Parallelogramms (anhand einer Skizze), an dem Schüler bei dem Versuch, diese Formel anzuwenden, eventuell scheitern könnten.	**„Minus 1 mal minus 1“** Eine Schülerin sagt: Ich verstehe nicht, warum $(-1) \cdot (-1) = 1$ ist. Bitte skizzieren Sie kurz möglichst viele verschiedene Wege, mit denen Sie der Schülerin diesen Sachverhalt klarmachen können.	**„Quadrat“** Wie ändert sich der Flächeninhalt eines Quadrats, wenn man die Seitenlängen verdreifacht? Begründe deine Antwort. Bitte schreiben Sie möglichst viele verschiedene Lösungsmöglichkeiten (Begründungen) zu dieser Aufgabe kurz auf.

Abbildung 2.2: Beispielaufgaben aus dem COACTIV-Test zum fachdidaktischen Wissen (Krauss et al., 2011, S. 140)

Neben der Schüler- und der Lehrerebene wurde auch die dritte Ebene, der Unterricht, vor allem durch Analysen der von den Lehrerinnen und Lehrern im Laufe des Schuljahres gestellten Aufgaben, betrachtet. Dabei wurde insbesondere das Potenzial der Aufgaben zur kognitiven Aktivierung der Schülerinnen und Schüler analysiert (Jordan et al., 2008). Damit folgt COACTIV dem Ansatz der TIMS-Studie, in der sich die Aufgaben als geeignete Indikatoren für die inhaltlichen Strukturen von Unterricht und das Bereitstellen von Lerngelegenheiten erwiesen haben (siehe 2.2). Ergänzend wurde der kognitive Anspruchsgehalt des Unterrichts durch Lehrer- und Schülerbefragungen erhoben. Der Unterricht wurde jedoch nicht videografiert, weshalb keine Aussagen über die Bearbeitung der Aufgaben im Unterricht möglich sind (Löwen et al., 2011).
Zu Beginn der COACTIV-Studie nahmen 351 Lehrkräfte teil, die auf alle Schulformen verteilt waren. Für die längsschnittlichen Analysen (Klasse 9 und 10) konnten allerdings nur die Daten von 155 Lehrkräften herangezogen werden, da einerseits Lehrerwechsel stattfanden und da andererseits die Hauptschullehrkräfte nicht an der zweiten Erhebung teilnahmen, weil es nicht in allen Bundesländern einen 10. Jahrgang an Hauptschulen gibt. Durch die Kombination des Prozess-Mediations-Produkt-Paradigmas (siehe 2.1) mit Prinzipien der Expertiseforschung, konnten im Rahmen von COACTIV vielfältige Zusammenhänge zwischen dem professionellen Wissen der Lehrerinnen und Lehrer, dem (potenziellen) kognitiven Anspruchsgehalts des Unterrichts und dem Lernzuwachs der Schülerinnen und Schüler analysiert werden (Krauss et al., 2008).

Ergebnisse

Die Analysen zeigen, dass Gymnasiallehrkräfte im Allgemeinen nicht nur über deutlich mehr Fachwissen, sondern auch über ein höheres fachdidaktisches Wissen verfügen als nichtgymnasiale Lehrkräfte. Dies deutet auf die Bedeutung des Fachwissens zur Entwicklung des fachdidaktischen Wissens hin. Die Schulformzugehörigkeit scheint für das vorhandene professionelle Wissen eine große Rolle zu spielen. Bei den Gymnasiallehrerinnen und -lehrern korrelieren fachdidaktisches Wissen und mathematisches Fachwissen sehr stark. Es gibt aber eine kleine Gruppe nichtgymnasialer Lehrkräfte, die trotz niedrigen Fachwissens ein relativ hohes fachdidaktisches Wissensniveau erreichen (siehe Abbildung 2.3). Es kann also auf allen Niveaus des Fachwissens ein hohes Niveau des fachdidaktischen Wissens erreicht werden. Allerdings scheint niedriges fachdidaktisches Wissen immer mit niedrigem Fachwissen verbunden zu sein (Baumert & Kunter, 2011b; Krauss et al., 2008). Dabei zeigten die Analysen, dass die Berufspraxis keinen entscheidenden Beitrag zur Entwicklung des fachdidaktischen Wissens und des mathematischen Fachwissens zu liefern scheint.

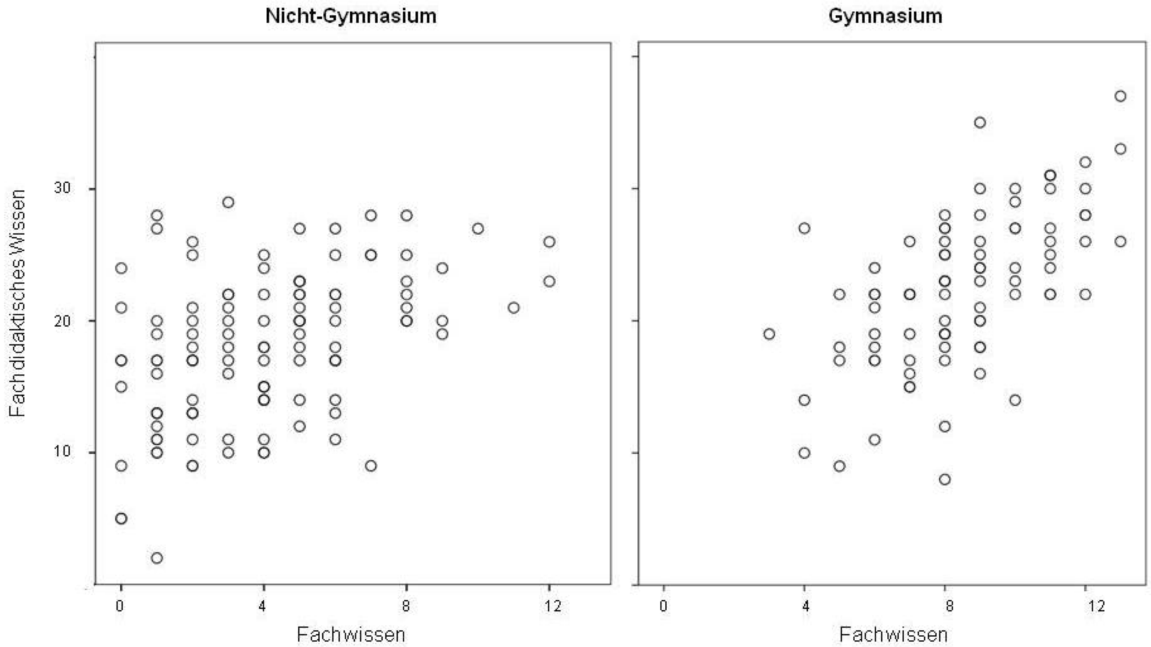


Abbildung 2.3: Ergebnisse des COACTIV-Tests (Krauss et al., 2008, S. 243)

Ein zentrales Ergebnis der COACTIV-Studie ist der Einfluss des fachdidaktischen Wissens einerseits auf die kognitive Herausforderung des Unterrichts und auf die Lernunterstützung sowie andererseits auf die Leistungen der Schülerinnen und Schüler. Hohes fachdidaktisches Wissen scheint zu besseren Schülerleistungen zu führen, wohingegen hohes Fachwissen alleine nicht diesen Effekt zeigte. Die direkte Wirkung des Professionswissens auf Unterricht und Schülerleistung geht also scheinbar primär vom fachdidaktischen Wissen aus. Hieraus darf aber nicht auf eine geringe Bedeutung des Fachwissens für Unterrichtsqualität und Schülerleistungen geschlossen werden, da das Fachwissen als potenzielle Quelle für fachdidaktisches Wissen nachgewiesen wurde (Baumert & Kunter, 2011b; Baumert, Kunter, Blum, Brunner, et al., 2011; Krauss et al., 2008). Das „Fachwissen [definiert] den Entwicklungsraum des fachdidaktischen Wissens und damit auch indirekt die Unterrichtsqualität“ (Baumert & Kunter, 2011b, S. 185).

Die Aufgabenanalysen im Rahmen von COACTIV konnten zeigen, dass Klassen, in denen Aufgaben mit relativ höherem kognitiven Potenzial gestellt wurden, einen höheren Leistungszuwachs auf den PISA-Aufgaben von Klasse 9 nach Klasse 10 aufwiesen, als Klassen mit eher niedrigem Anspruchsgehalt der Aufgaben (Jordan et al., 2008; Kunter et al., 2006; M. Neubrand, Jordan, Krauss, Blum, & Löwen, 2011). Andererseits arbeitete COACTIV in bisher nicht erreichter empirischer Deutlichkeit heraus, dass in Deutschland eine ausgeprägte Ein-

seitigkeit der Aufgabenstellung im Mathematikunterricht besteht (Jordan et al., 2008; Jordan et al., 2006). „Das durch die Aufgaben vermittelte kognitive Aktivierungspotenzial im Mathematikunterricht in Deutschland [ist] sehr niedrig ausgeprägt […]. Die in Deutschland eingesetzten Aufgaben sind sehr homogen: Mathematisches Argumentieren findet kaum statt, […] außermathematische und innermathematische Bezüge werden im Sinne des Modellierens nur wenig hergestellt“ (Jordan et al., 2008, S. 103). Kognitiv aktivierende Aufgaben sind demnach im deutschen Schulunterricht eher selten zu finden, obwohl sich hierdurch die Unterrichtsqualität steigern ließe. Dies ist passend zu den Ergebnissen der TIMS-Studie, die gute Leistungen der deuten Schülerinnen und Schüler beim Lösen von Routineaufgaben, aber Schwächen bei komplexeren Aufgaben aufzeigen (siehe 2.2).
Es ist allerdings anzumerken, dass im Rahmen von COACTIV die eingesetzten Aufgaben unabhängig vom Unterricht analysiert wurden, da keine Unterrichtsbeobachtungen durchgeführt wurden. Deshalb können nur indirekte Schlüsse auf das tatsächliche Anspruchsniveau des Unterrichts gezogen werden, denn entscheidend für die kognitive Aktivierung der Schülerinnen und Schüler ist die Bearbeitung der Aufgaben im Unterricht (vgl. Blum, Drüke-Noe, Hartung, & Köller, 2006). So könnte es einerseits sein, dass das Potenzial der eingesetzten Aufgaben nicht genutzt wird, indem die Lehrperson beispielsweise Teile des Lösungsweges vorgibt. Andererseits können auch einfache Aufgaben, die überwiegend prozedurales Wissen erfordern (siehe 5.2.2), kognitiv herausfordernd bearbeitet werden, wenn auf zugrundeliegende Sätze eingegangen wird oder wenn anhand der Aufgabe allgemeine Strategien erarbeitet werden (vgl. J. Neubrand, 2002).
Außerdem wird bei COACTIV das fachdidaktische Wissen unabhängig vom eigenen Unterricht der Lehrerinnen und Lehrer erhoben, weshalb zwar Aussagen über die Zusammenhänge zwischen fachdidaktischem Wissen, mathematischem Fachwissen, Unterrichtsqualität und Schülerleistung getroffen werden können, es kann aber nicht analysiert werden, *wie* sich das fachdidaktische Wissen auf die Unterrichtsqualität und auf die Leistungen der Schülerinnen und Schüler auswirkt.
Die Zusammenhänge zwischen den einzelnen Aspekten des Wissens konnten auch in anderen Studien, z.B. TEDS-M bestätigt werden.

2.4 TEDS-M bzw. MT21

Mit TEDS-M[1] wurde im Jahr 2008 erstmals eine international vergleichende Studie zur professionellen Kompetenz angehender Lehrerinnen und Lehrer in insgesamt 16 Ländern durchgeführt (Blömeke, Kaiser, & Lehmann, 2010c). Die hier eingesetzten Instrumente wurden teilweise in der Vorläuferstudie MT21 (Mathematics Teaching in the 21st Century) entwickelt und bei angehenden Lehrerinnen und Lehrern in sechs Ländern getestet (Blömeke, Kaiser, & Lehmann, 2008; Tatto et al., 2008). Deutschland war in beiden Studien involviert (Blömeke, Kaiser, & Lehmann, 2008; Blömeke, Kaiser, et al., 2010c).
In TEDS-M und MT-21 wurden ebenfalls mehrere Erhebungsinstrumente miteinander kombiniert. Es gab einen vom Ausbildungsgang abhängigen Lehrerfragebogen, in dem unter anderem mathematisches Fachwissen und fachdidaktisches Wissen in standardisierten Tests abgefragt wurden (Blömeke, Kaiser, & Lehmann, 2008; Blömeke, Kaiser, et al., 2010b). Es wurden aber auch die Beliefs sowie die Lerngelegenheiten für die angehenden Lehrerinnen und Lehrer erhoben. Außerdem wurden die Curricula der teilnehmenden Länder analysiert, die ausbildenden Institutionen (in Deutschland die Bundesländer, die die Prüfungs- und Aus-

[1] TEDS-M (Learning to Teach Mathematics – Teacher Education and Development Study) wurde von der IEA (International Association for the Evaluation of Educational Achievement) gefördert.

bildungsverordnungen festlegen) und die Ausbilder (Lehrende an Universitäten und Hochschulen sowie Studienseminaren) befragt. Die internationale Einbettung hatte aufgrund der unterschiedlichen Schwerpunktsetzungen der einzelnen Länder in der Lehramtsausbildung einerseits zur Folge, dass in den Fragebogen nicht alle aus deutscher Sicht wichtigen Aspekte des mathematischen Fachwissens und des fachdidaktischen Wissens integriert werden konnten, da der Fragebogen auf internationaler Ebene konsensfähig sein musste. Andererseits konnte durch die internationale Einbettung auf umfangreiche Expertise zur Lehrerausbildungsforschung zurückgegriffen werden, die in Deutschland zurzeit noch am Anfang steht (Blömeke, Kaiser, & Lehmann, 2008).

Der TEDS-M Test zum mathematischen Fachwissen und zum fachdidaktischen Wissen ist eine Weiterentwicklung des für MT21 entwickelten Tests. Er enthält möglichst gleichverteilt Items zur Algebra, Geometrie, Arithmetik und Stochastik sowie zu verschiedenen Aspekten des fachdidaktischen Wissens (siehe 4.1.3), wobei die Anzahl der Items für den Fachwissenstest höher ist (76 von 103 Items). Die Aufgaben sind über drei verschiedene Schwierigkeitsniveaus verteilt, allerdings sind keine Items zum fortgeschrittenen Niveau im fachdidaktischen Testteil enthalten. Ein Großteil der Items ist mit Multiple-Choice zu bearbeiten, lediglich 15 Items weisen ein offenes Antwortformat auf (siehe Abbildung 2.4 und Abbildung 2.5). Die Aufgaben sind zwar in fiktive Unterrichtsszenarien eingebettet, der überwiegende Anteil der Multiple-Choice-Items lässt aber keine näheren Rückschlüsse auf die Art der Bearbeitung der Aufgaben zu und kann somit zufällig ‚richtig' gelöst werden. Insbesondere ist das Spektrum der Antworten durch die Vorgaben stark beschränkt, so dass die mögliche Breite des Lehrerwissens nur bedingt erfasst werden kann.

Die folgenden Aufgaben stammen aus einem Mathematikschulbuch für die Sekundarstufe I.

1. Peter, David und Jonathan spielen mit Murmeln. Zusammen haben sie 198 Murmeln. Peter hat 6-mal so viele Murmeln wie David und Jonathan hat 2-mal so viele Murmeln wie David. Wie viele Murmeln hat jeder Junge?
2. Die drei Kinder Anna, Philipp und Lukas besitzen zusammen 198 €. Anna hat 6-mal so viel Geld wie Philipp und 3-mal so viel wie Lukas. Wie viel Euro hat jedes Kind.

(a) Lösen Sie beide Aufgaben.

(b) Üblicherweise bereitet die zweite Aufgabe Schülerinnen und Schülern der Sekundarstufe I größere Probleme als die erste. Nennen Sie einen Grund der für den unterschiedlichen Schwierigkeitsgrad verantwortlich sein könnte.

Abbildung 2.4: TEDS-M Aufgabenbeispiel „Murmelverhältnisse" zur Erfassung mathematischen Wissens im Bereich Algebra und mathematikdidaktischen Wissens in der Subdimension Interaktion (Döhrmann, Kaiser, & Blömeke, 2010, S. 190)

Wir wissen, dass es nur einen Punkt auf der Zahlengeraden gibt, der die Gleichung 3x = 6 erfüllt, nämlich x = 2.

Stellen wir uns nun die Gleichung übertragen auf die Ebene vor, mit den Koordinaten x und y, und dann im Raum, mit den Koordinaten x, y und z. Wie sieht die Menge der Punkte, die die Gleichung 3x = 6 erfüllen, dort aus?

Kreuzen Sie <u>ein</u> Kästchen <u>pro Zeile</u> an

	Ein Punkt	**Eine Gerade**	**Eine Ebene**	**Etwas Anderes**
A. Die Lösung von 3x = 6 in der Ebene	☐	☐	☐	☐
B. Die Lösung von 3x = 6 im Raum	☐	☐	☐	☐

Abbildung 2.5: TEDS-M Aufgabenbeispiel „Punktmenge in Ebene und Raum" zur Erfassung geometrischen Wissens (Döhrmann et al., 2010, S. 180)

In der Vorläuferstudie MT21 nahmen insgesamt 878 angehende Lehrkräfte teil, die sich in der ersten Ausbildungsphase (Grund- oder Hauptstudium) oder in der zweiten Ausbildungsphase (Referendariat) befanden, jedoch nicht repräsentativ für alle angehenden Mathematiklehrkräfte in Deutschland waren (Blömeke, Felbrich, & Müller, 2008b). Dagegen wurden im Rahmen von TEDS-M in Deutschland 771 Referendarinnen und Referendare im letzten Jahr ihrer Ausbildung befragt, die die angehenden Lehrkräfte für die Sekundarstufe I repräsentierten[2] (Blömeke, Kaiser, et al., 2010b).

Ergebnisse

TEDS-M stellte analog zu COACTIV fest, dass in allen Dimensionen des professionellen Wissens (siehe 4.1.3) angehende Gymnasiallehrkräfte einen deutlichen Leistungsvorsprung gegenüber angehenden Lehrkräften anderer Schulformen aufweisen (Blömeke, Kaiser, Döhrmann, & Lehmann, 2010; Blömeke, Kaiser, Schwarz, et al., 2008). Auch im internationalen Vergleich zeichnen sich angehende Gymnasiallehrkräfte durch herausragende mathematische und mathematikdidaktische Leistungen aus, während fast die Hälfte der deutschen angehenden Lehrkräfte für Haupt- und Realschulen ein mathematisches Wissen aufweist, das dem untersten TEDS-M Kompetenzniveau entspricht, d.h. sie haben häufig selber Schwierigkeiten Aufgaben zu lösen, die auf dem Niveau der zu unterrichtenden Schülerinnen und Schüler liegen. Interessanterweise zeigt diese Gruppe aber teilweise Stärken im fachdidaktischen Wissen (Blömeke, Kaiser, et al., 2010b; Blömeke, Kaiser, Schwarz, et al., 2008).
Somit konnte TEDS-M anhand der von Ihnen entwickelten Konzeptionen des fachdidaktischen Wissens und des mathematischen Fachwissens mithilfe der daraus resultierenden Aufgaben die Zusammenhänge zwischen den Wissensfacetten auch auf internationaler Ebene aufzeigen. Da es sich bei den Probanden um angehende Lehrerinnen und Lehrer handelte, konnten in TEDS-M aber keine Zusammenhänge zum Unterricht oder zu Schülerleistungen hergestellt werden. Zumindest die Zusammenhänge zwischen dem Wissen der Lehrerinnen und Lehrer und den Schülerleistungen konnten aber in den Studien der Michigan-Group nachgewiesen werden.

2.5 Studien der ‚Michigan-Group'

Auch die sogenannte ‚Michigan Group' um Ball, Bass und andere beschäftigt sich mit dem professionellen Wissen von Lehrerinnen und Lehrern. Sie entwickelten in den vergangenen 20 Jahren eine „practice-based theory" (Ball & Bass, 2009, S. 11), um das zum Unterrichten benötigte mathematische Wissen, das sogenannte *„mathematical knowledge for teaching (MKT)"* (Ball & Bass, 2009, S. 11), zu beschreiben. Hierzu analysierten sie umfangreiches Material, welches ein Jahr des Mathematikunterrichts einer dritten Klasse (1989-1990) dokumentiert. Es wurden neben Unterrichtsvideos, Audiomitschnitten, Transkripten, Kopien der Schülerbearbeitungen, Hausaufgaben und Klassenarbeiten ebenso die Planung, Notizen und Reflexionen der Lehrkraft analysiert. Ball et al. stellten anhand der Analysen zunächst die unterschiedlichen mathematikbezogenen Anforderungen heraus, die Lehrerinnen und Lehrer in der Tätigkeit des Unterrichtens erfüllen müssen. Hierzu zählen beispielsweise das Präsentieren und Zugänglichmachen von mathematischen Inhalten, das Umgehen mit Schülerantworten, Auswahl und Modifikation von Aufgaben sowie Gebrauch mathematischer Zeichen und Sprache (Ball & Bass, 2003; Ball, Thames, & Phelps, 2008). Anschließend entwickel-

[2] Im Rahmen von TEDS-M wurden auch Primarstufenlehrkräfte befragt, die Ergebnisse hierzu wurden gesondert dargestellt und sind im Rahmen dieser Arbeit nicht von Bedeutung (siehe Blömeke, Kaiser, et al., 2010a).

ten sie eine Theorie, die beschreibt, welches Wissen Lehrerinnen und Lehrer zum Erfüllen dieser Anforderungen benötigen (siehe 4.1.4 und 4.2.4).
Um die entwickelten Kategorien des ‚mathematical knowledge for teaching' empirisch zu testen und gleichzeitig den Einfluss auf die Schülerleistungen zu überprüfen, entwickelte die Michigan-Group Test-Items. Da diese Items für große Stichprobenzahlen geeignet sein sollten, handelt es sich durchweg um Multiple-Choice-Items, welche auf Grundlage der vorangegangenen Analysen, Literaturrecherchen, Curriculumanalysen, Beispielen von Schülerarbeiten und persönlicher Erfahrung der Forschungsgruppe erarbeitet wurden. Ein Teil der Items sollte *„specialized knowledge of mathematics"* (Ball, Hill, & Bass, 2005, S. 22) erheben, also das spezielle, zum Unterrichten benötigte mathematische Wissen, welches nur Lehrerinnen und Lehrer benötigen. Ein zweiter Teil der Items legte den Fokus auf *„common knowledge of mathematics"* (Ball et al., 2005, S. 22), welches den meisten Erwachsenen zur Verfügung stehen sollte (siehe Abb. 4.1**Fehler! Verweisquelle konnte nicht gefunden werden.**).
ie Items beider Kategorien wurden in fiktive Unterrichtsszenarien eingebettet (Ball et al., 2005) (siehe Abbildung 2.6). Allerdings gelten die schon im Zusammenhang mit den TEDS-M-Items genannten Beschränkungen, da es sich ausschließöich um Multiple-Choice-Items handelt.

specialized knowledge of mathematics

Imagine that you are working with your class on multiplying large numbers. Among your students' papers, you notice that some have displayed their work in the following ways:

Student A	Student B	Student C
35	35	35
x 25	x 25	x 25
125	175	25
+ 75	+ 700	150
875	875	100
		+ 600
		875

Which of these Students is using a method that could be used to multiply any two whole numbers?

	Method would work for all whole numbers	Method would NOT work for all whole numbers	I'm not sure
a) Method A	1	2	3
b) Method B	1	2	3
c) Method C	1	2	3

common knowledge of mathematics

Ms. Dominguez was working with a new textbook and she noticed that it gave more attention to the number 0 than her old book. She came across a page that asked students to determine if a few statements about 0 were true or false. Intrigued, she showed them to her sister who is also a teacher, and asked her what she thought. Which statements should her sister select as being true? (Mark YES, NO, or I'M NOT SURE for each item below.)

	Yes	No	I'm not sure
a) 0 is an even number	1	2	3
b) 0 is not really a number. It is a placeholder in writing big numbers	1	2	3
c) The number 8 can be written as 008.	1	2	3

Abbildung 2.6: Item-Beispiele der Michigan-Group (Ball et al., 2005, S. 43)

Ein Großteil der entwickelten Items wurde unter anderem in einen Lehrerfragebogen im Rahmen der „Study of Instructional Improvement (SII)" integriert (Hill et al., 2005), welche in den Jahren 2000-2004 Daten von ungefähr 700 Lehrkräften und den von ihnen unterrichteten Schülerinnen und Schülern der ersten und dritten Klassen an ausgewählten amerikanischen Grundschulen erhoben. Insbesondere bearbeiteten die Schülerinnen und Schüler den standardisierten Test „Terra Nova" (für Details siehe Ball et al., 2005; Hill et al., 2005), so dass auch Vergleiche der Ergebnisse der Lehrerinnen und Lehrer mit den Schülerleistungen möglich waren.

Ergebnisse

Als ein zentrales Ergebnis konnte die Michigan-Group zeigen, dass das ‚mathematical knowledge for teaching' von Grundschullehrkräften als kombiniertes Fach- und fachdidaktisches Wissen Leistungsfortschritte von Schülerinnen und Schülern vorherzusagen erlaubt (Hill et al., 2005). Damit wiesen Ball et al. erstmals stichhaltig eine praktische Bedeutung des auf Schule und Unterricht gerichteten spezifischen Fachwissens nach (Baumert & Kunter, 2006). Ball et al. erhalten somit im Primarbereich in den USA ähnliche Ergebnisse über den Zusammenhang zwischen fachdidaktischem Wissen und Schülerleistung wie die COACTIV-Studie für den Sekundarbereich in Deutschland. Zwar arbeitete die Michigan-Group in der Entwicklung der Facetten des ‚mathematical knowledge for teaching' mit detaillierten Unterrichtsmaterialien, insbesondere Unterrichtsvideos, die eigentliche Untersuchung fand aber nur mithilfe schriftlicher Test statt, so dass keine Aussagen über Zusammenhänge des ‚mathematical knowledge for teaching' mit dem Unterricht der Lehrerinnen und Lehrer getroffen werden können.

In den bisher beschriebenen Studien wurde jeweils ein ausführliches Konzept des professionellen Wissens erarbeitet, wobei sich die einzelnen Ansätze in ihrer Unterteilung in die einzelnen Wissenskomponenten leicht unterscheiden (siehe 4.1 und 4.2). Ebenso entwickelten die drei Arbeitsgruppen jeweils umfassende Tests zur Erhebung des professionellen Wissens der Lehrpersonen, welche außer in der COACTIV-Studie aber zum Großteil Multiple-Choice-Items enthielten, die durch die vorgegebenen Antworten keine Aussagen über die Breite des vorhandenen Wissens der Lehrerinnen und Lehrer ermöglichen. Es konnten aber vor allem Zusammenhänge zwischen verschiedenen Bereichen des Lehrerwissens und der Unterrichtsqualität bzw. den Leistungen der Schülerinnen und Schüler hergestellt werden. Allerdings wurde in keiner der Studien der Unterricht direkt analysiert, da keine Unterrichtsbeobachtungen stattfanden, so dass keine Aussagen darüber getroffen werden können, *wie* sich das professionelle Wissen auf den Unterricht auswirkt. Im Rahmen des sogenannten ‚Pythagoras-Projektes' wurde dagegen eine Verknüpfung des professionellen Wissens der Lehrerinnen und Lehrer mit durch Unterrichtsvideos erhobenen Aspekten der Unterrichtsqualität vorgenommen.

2.6 Das Pythagoras-Projekt

Die deutsch-schweizerische Studie „Unterrichtsqualität, Lernverhalten und mathematisches Verständnis" (Klieme, Lipowsky, et al., 2006), das sogenannte Pythagoras-Projekt (2000-2006), stellt eine Fortsetzung der TIMSS 1995 und TIMSS 1999 Videostudien dar (siehe Abschnitt 2.2) und wurde im Rahmen des Schwerpunktprogramms Biqua unter anderem von der DFG gefördert (Klieme, Lipowsky, et al., 2006).

Im Rahmen des Pythagoras-Projektes wurden von je 20 Lehrpersonen aus Deutschland und der Schweiz je die drei Einführungsstunden zum Satz des Pythagoras (daher der Projektname) sowie drei Unterrichtsstunden zum Einsatz von Textaufgaben in einem anderen Themengebiet videografiert. Ausgehend von den in der TIMSS-Videostudie entwickelten Qualitätsdimensionen (siehe Abschnitt 2.2) wurden umfassende Kategoriensysteme entwickelt, die unter anderem die Einschätzung des kognitiven Anspruchsgehaltes der Aufgabenstellungen und der Aufgabenbearbeitungen im Unterricht sowie eine Beurteilung der fachdidakti-

schen Qualität der Theoriephasen im Unterricht, ermöglichen (Drollinger-Vetter, 2006; Drollinger-Vetter & Lipowsky, 2006a, 2006b).
Diese Analysen wurden durch einen Lehrerfragebogen zur Erhebung des professionellen Wissens ergänzt, der sich aber stark von den in Abschnitt 2.3 - 2.5 vorgestellten Verfahren unterscheidet. Das fachbezogene Wissen wurde beispielsweise über die Anzahl der zur Unterrichtsvorbereitung verwendeten Informationsquellen indirekt erhoben. Außerdem enthielt der Fragebogen vor allem Items, mit denen das fachspezifische pädagogische Wissen der Lehrpersonen und insbesondere ihre Vorstellungen und Überzeugungen zum Aufbau mathematischen Verständnisses im Unterricht erfasst wurden. Die Items basieren auf bereits vorhandenen Skalen (vgl. z.B. Staub & Stern, 2002) und erfordern eine Einschätzung von vorgegebenen Aussagen auf einer vierstufigen Likert-Skala von ‚stimmt gar nicht' bis ‚stimmt genau'. Sie ermöglichen insbesondere eine Unterscheidung zwischen einer eher konstruktivistischen und einer eher rezeptiven allgemeinen Sicht auf Mathematik und Mathematikunterricht (Lipowsky, Thußbas, Klieme, Reusser, & Pauli, 2003) (siehe Abbildung 2.7)

Inwieweit stimmen Sie folgenden Aussagen zu?	stimmt gar nicht	stimmt nur teilweise	stimmt größtenteils	stimmt genau
Schüler/innen lernen Mathematik am besten, indem sie selbst Wege zur Lösung von Problemen entdecken.	☐	☐	☐	☐
Effektive Lehrpersonen führen die richtige Art und Weise vor, in der ein Anwendungsproblem zu lösen ist.	☐	☐	☐	☐

Abbildung 2.7: Zwei Beispiele für Items zur Erhebung von Überzeugungen der Lehrerinnen und Lehrer im Pythagoras-Projekt (nach Leuchter, 2009, S. 158-159)

Außerdem dienten Interviews mit den Lehrpersonen im Anschluss an den durchgeführten Unterricht zur Erfassung handlungsnaher Kognitionen. Die Analysen beschränkten sich aber auf die Überzeugungen der Lehrpersonen, welche eine wichtige Komponente der professionellen Kompetenz darstellen (siehe Kapitel 3). Es wurde insbesondere erfasst, inwieweit die Lehrpersonen in Bezug zu ihrem eigenen Unterricht eine konstruktivistische oder eher rezeptive Sichtweise auf Mathematik vertreten. Zwar wurden auch Fragen zur Begründung der Aufgabenauswahl gestellt (dies stellt beispielsweise nach der Konzeption der COACTIV-Arbeitsgruppe einen entscheidenden Aspekt des fachdidaktischen Wissens dar), diese wurden jedoch nicht im Detail ausgewertet (Leuchter, 2009). Das fachdidaktische Wissen und das mathematische Fachwissen, wie es in den in 2.3-2.5 vorgestellten Studien konzeptualisiert worden ist, wurde nicht getestet.
Es wurden aber im Rahmen des Pythagoras-Projektes auch Schülerbefragungen und Schülerleistungstests durchgeführt, um im Sinne des Prozess-Mediations-Produkt-Paradigmas die Analysen des Lehrerhandelns anhand der Unterrichtsvideos mit Schüleraussagen und Schülerleistungen in Verbindung bringen zu können (Leuchter, 2009).

<u>*Ergebnisse*</u>

Die Ergebnisse des Pythagoras-Projektes zeigen unter anderem, dass die deutschen Lehrerinnen und Lehrer im Vergleich zu den Schweizer Lehrkräften eher konstruktivistische allgemeine Überzeugungen vom Lernen vertreten. Allerdings weisen die im Interview in Zusammenhang mit dem Unterricht erhobenen Überzeugungen eher auf ein rezeptives Verständnis der deutschen Lehrkräfte hin und der Unterricht in der Schweiz weist ein höheres Maß an kognitiver Aktivierung auf (siehe hierzu Kapitel 5). Die Überzeugungen der Lehrpersonen wirken sich also scheinbar nicht durchgängig auf das Handeln im Unterricht aus (Klieme, Lipowsky, et al., 2006; Leuchter, 2009). Des Weiteren konnten die Analysen zeigen, dass sowohl in durch die Lehrperson geführten Unterrichtsgesprächen als auch in explorativ-entdeckenden Phasen eine hohes Maß an kognitiver Aktivierung der Schülerinnen und Schüler erreicht werden kann (Pauli, Drollinger-Vetter, Hugener, & Lipowsky, 2008). Es konnte aber nur ein schwacher Zusammenhang der kognitiven Aktivierung mit den Schülerleistungen nachgewiesen werden (Klieme, Lipowsky, et al., 2006).

2.7 Entwicklung der Forschungsfragen

Im Rahmen des zuletzt vorgestellten Pythagoras-Projektes wurde zwar nach eigener Aussage das professionelle Wissen der Lehrerinnen und Lehrer erhoben. Allerdings wurden insbesondere das fachdidaktische Wissen und das mathematische Fachwissen nicht umfassend konzeptionalisiert und in die Erhebungsinstrumente eingearbeitet, bzw. entscheidende Aspekte des fachdidaktischen Wissens wurden zwar erhoben, aber nicht ausgewertet (siehe 2.6). Stattdessen wurde der Fokus vor allem auf die Überzeugungen der Lehrerinnen und Lehrer als einem wichtigen Aspekt der professionellen Kompetenz gelegt (siehe 3.2). Dagegen wurden in den vorgestellten Studien COACTIV, TEDS-M und den Studien der Michigan Group zunächst eine umfassende, theoretisch und teilweise auch praktisch fundierte, Konzeption des fachdidaktischen Wissens und des mathematischen Fachwissens erarbeitet. Diese wurden jeweils in schriftlichen Testaufgaben umgesetzt. Durch den hohen Anteil von Multiple-Choice-Items (außer bei COACTIV) konnte aber insbesondere aufgrund der vorgegebenen Antwortmöglichkeiten nicht die Breite des bei den Lehrerinnen und Lehrern vorhandenen Wissens (z.B. zu möglichen Lösungen einer Aufgabe) erhoben werden. Außerdem kann nicht ausgeschlossen werden, dass die Items zufällig ‚richtig' angekreuzt wurden. Die COACTIV-Items haben zwar ein offenes Antwortformat, allerdings werden im schriftlichen Test nicht alles Aspekte des fachdidaktischen Wissens aus der Konzeption von COACTIV erhoben. Daher scheinen die drei entwickelten Tests nur in beschränktem Maße geeignet, um das fachdidaktische Wissen der Lehrerinnen und Lehrer umfassend zu erheben.
Außerdem sind die Items zum fachdidaktischen Wissen in den drei Arbeitsgruppen zwar in fiktive Unterrichtsszenarien eingebettet worden, diese sind jedoch unabhängig vom eigenen Unterricht der Lehrerinnen und Lehrer. Die Lehrkräfte können sich die Antworten in Ruhe überlegen, da keine direkten Interaktionen mit Schülerinnen und Schülern nötig sind (außer im Reaktionszeit-Test bei COACTIV). Es wird daher nur theoretisches Wissen getestet, welches noch keine Rückschlüsse darauf zulässt, *wie* das fachdidaktische Wissen im Unterricht oder zur Unterrichtsvorbereitung genutzt wird. Bromme und Seeger (1979) weisen zum Beispiel darauf hin:

> […] theoretisches Wissen plus Erfahrung macht noch keinen guten, erfolgreichen Lehrer […] das Problem der Anwendung von Theorien wird damit zu der Frage, wie Wissen und Handeln des Lehrers zusammenhängen […] Auch wer vor dem Unterricht plant ist nicht davor geschützt, dass der Unterricht dann doch ganz anders abläuft, (…) Die Umsetzung von Gedachtem, Bewusstem stellt sich als Problem vor allem während des Unterrichts (Bromme & Seeger, 1979, S. 2).

In der COACTIV-Studie wurde zwar der eigene Unterricht der Lehrerinnen und Lehrer anhand der im Laufe eines Schuljahres eingesetzten Aufgaben analysiert, allerdings kann durch das ermittelte (niedrige) Potenzial der Aufgaben nicht direkt auf den Unterricht der Lehrpersonen geschlossen werden, da die Art der Bearbeitung der Aufgaben im Unterricht entscheidend für die kognitive Aktivierung der Schülerinnen und Schüler und damit für die Unter-

richtsqualität ist (siehe 2.3). Für eine detaillierte Einschätzung der Umsetzung der Aufgaben sind Unterrichtsbeobachtungen unbedingt notwendig.
Dass das theoretisch vorhandene Wissen nicht unbedingt mit dem im Unterricht umgesetzten Wissen übereinstimmt, zeigt sich auch in einer ersten Pilotierungsuntersuchung zur Entwicklung der Fragestellung dieser Arbeit. Es wurde der Unterricht eines Lehrers am Gymnasium videografiert und durch ein anschließendes, noch unstrukturiertes Interview mit dem Lehrer zur Planung und Durchführung seines Unterrichts, ergänzt. Der Lehrer wurde gebeten, einige vorgegebene Aufgaben in den Unterricht zu integrieren, die insbesondere außer- und innermathematische Modellierungen, mathematisches Argumentieren sowie die Verwendung von Darstellungen erfordern und verschiedene Lösungswege zulassen, also ein erhöhtes kognitives Aktivierungspotenzial aufweisen (für Einzelheiten siehe 5.2 und 7.3.1).
Erste Analysen zeigten, dass der Lehrer das Potenzial der Aufgaben im Unterricht nicht nutzte, da die Schülerinnen und Schüler zum Beispiel kaum die Möglichkeit zum Argumentieren bekamen. Auch wurden zwar teilweise verschiedene Lösungswege durch die Schülerinnen und Schüler vorgestellt, diese wurden aber nicht miteinander verglichen. Der Lehrer lenkte den Unterricht sehr stark durch häufige fragend-entwickelnde Unterrichtsgespräche und ging teilweise auf Probleme der Lernenden nicht ein. Im Interview konnte sich der Lehrer dagegen sehr differenziert zum Potenzial der einzelnen Aufgaben und auch zu anderen Aspekten des fachdidaktischen Wissens (z.B. Umgang mit Schülerfehlern, -problemen) äußern. Dies lässt vermuten, dass dieser Lehrer über fundiertes theoretisches Wissen verfügt und beispielsweise im COACTIV-Test gut abgeschnitten hätte. Es wäre aber auch denkbar, dass einige Lehrerinnen und Lehrer im Unterrichtshandeln ein noch größeres Wissensrepertoire als im COACTIV-Test zeigen. Hieraus ergibt sich die erste Forschungsfrage dieser Arbeit:

1. Forschungsfrage

Wie nutzen Lehrerinnen und Lehrer ihr fachdidaktisches Wissen bei der Planung, Durchführung und Reflexion von Unterricht?

Es werden hier bewusst neben der Unterrichtsdurchführung auch die Planung und Reflexion des Unterrichts in die Fragestellung integriert, da diese drei Phasen die *didaktische Strukturierung* des Unterrichts ausmachen (Kattmann, 2007; H. Meyer, 2007a). In der Definition des Begriffs ‚didaktische Struktur' von J. und M. Neubrand wird deutlich, dass sich durch die Analyse der didaktischen Struktur des Unterrichts Rückschlüsse auf das fachdidaktische Wissen der Lehrerinnen und Lehrer ziehen lassen:

> Unter ‚didaktischer Struktur' einer Stunde verstehen wir [...] die spezifischen, von der Lehrerin oder dem Lehrer so gewählten Arrangements der Querverbindungen, Wiederaufnahmen, Vernetzungen innerhalb der Stunde. Die gewählten Charakteristika dieser Vernetzungen sagen etwas aus über die Umsetzung didaktischer Konzepte, die der Stunde zugrunde liegen. (J. Neubrand & Neubrand, 2000, S. 44).

Teilweise wurde schon im Rahmen der COACTIV-Studie versucht, Antworten auf die erste Fragestellung zu finden, beispielsweise mit dem Reaktionszeittest zum schnellen Beurteilen von Schülerantworten (Krauss & Brunner, 2011) oder mit der Aufforderung zur Auswahl und Sequenzierung von vorgegebenen Aufgaben für fiktive Unterrichtsszenarien (Bruckmaier, Krauss, Blum, & Neubrand, 2012). Diese COACTIV-Instrumente sind zwar näher am Handeln der Lehrpersonen während des Unterrichts und an der Unterrichtsvorbereitung als die schriftlichen Tests, sie sind aber immer noch unabhängig vom eigenen Unterricht der Lehrerinnen und Lehrer. Außerdem werden jeweils nur Teilaspekte des fachdidaktischen Wissens der Lehrerinnen und Lehrer erhoben, während im Unterricht viele Aspekte gleichzeitig und oft spontan auftreten (z.B. Auswahl eines Beispiels als Reaktion auf einen Schülerfehler). Die

COACTIV-Arbeitsgruppe schlägt selbst vor, dass die verwendeten Instrumente durch Unterrichtsbeobachtungen ergänzt werden sollten (Krauss et al., 2011).
Lindmeier, Heinze und Reiss (2010) entwickelten in einer Machbarkeitsstudie ein Instrument, mit dem das fachbezogene Lehrerwissen deutlich handlungsnäher erfasst werden kann, als in den vorgenannten Studien (siehe 4.3.1). Sie entwarfen einen computerbasierten Fragenbogen, in den vor allem Videoitems integriert waren, die die Lehrpersonen beispielsweise dazu auffordern, Schülerarbeiten zu analysieren oder in einer begrenzten Zeit spontan auf fehlerhafte Schülerantworten zu reagieren. Allerdings beschränkt sich auch dieser Test auf einzelne Aspekte des Lehrerwissens, da z.B. keine Reaktionen auf richtige Strategien der Lernenden eingefordert werden (Lindmeier et al., 2010). Außerdem fokussieren auch die in diesem Test vorgestellten Situationen auf einen Aspekt, während Lehrerinnen und Lehrer im Unterricht viele Aspekte gleichzeitig berücksichtigen müssen. Es kann nicht ausgeschlossen werden, dass die Lehrpersonen in tatsächlichen Unterrichtssituationen anders handeln würden, als sie es im Rahmen dieses Testes unabhängig vom eigenen Unterricht beschreiben. Dies hat sich beispielsweise in der oben geschilderten Pilotierung im Rahmen dieser Arbeit gezeigt. Für eine umfassende Beantwortung der ersten Fragestellung sind daher Unterrichtsbeobachtungen unerlässlich.
Für die Unterrichtsbeobachtung eignen sich vor allem die Verfahren, die in TIMSS-Video und im Pythagoras-Projekt entwickelt wurden (siehe 2.2 und 2.6), diese müssen allerdings noch an die Erhebung des fachdidaktischen Wissens angepasst werden. Hierzu können auch die Arbeiten von Rowland et al. (2008; 2005) hilfreich sein, die ein Analyseinstrument für Unterrichtsbeobachtungen erarbeitet haben, welches vor allem auf die fachbezogenen Aspekte des Handelns im Unterricht in Abgrenzung zu den allgemeinpädagogischen Aspekten des Unterrichts eingeht. Hierzu zählen insbesondere Elemente des fachdidaktischen Wissens. Allerdings wurde dieses Beobachtungsinstrument bisher vor allem für Unterrichtsnachbesprechungen im Rahmen der Lehrerausbildung angewendet und nicht für die Erforschung des fachdidaktischen Wissen von Lehrerinnen und Lehrern. Außerdem werden noch Instrumente benötigt, die sich für die Analyse des fachdidaktischen Wissens während der Unterrichtsplanung und Reflexion des Unterrichts, als zwei wichtigen Phasen der didaktischen Strukturierung, eignen. Es stellt sich daher die zweite Forschungsfrage dieser Arbeit:

2. Forschungsfrage

Wie zeigt sich fachdidaktisches Wissen bei der Planung, Durchführung und Reflexion von Unterricht?

Die bisher genannten Untersuchungen konnten diese Frage nicht ausreichend beantworten, da bisher noch nicht die Nutzung des fachdidaktischen Wissens bei der didaktischen Strukturierung von Unterricht umfassend untersucht wurde (siehe 1. Forschungsfrage). Mit Hilfe des dieser Arbeit zugrundeliegenden Modells zur Rekonstruktion fachdidaktischer Prozesse wird im folgenden Abschnitt erläutert, wie im Rahmen dieser Arbeit zunächst die zweite Forschungsfrage beantwortet werden soll. Es wird ein Analyseinstrument für die Erfassung des fachdidaktischen Wissens bei der Planung, Durchführung und Reflexion von Unterricht entwickelt. Anschließend dient dieses Instrument der Analyse der didaktischen Strukturierungen von 5 Lehrpersonen in einer exemplarischen Fallstudie zur Beantwortung der ersten Forschungsfrage, soweit dies anhand der kleinen Stichprobe möglich ist. Ergänzend wird in Anlehnung an COACTIV zumindest in Ansätzen versucht, einen qualitativen Blick auf die in der COACTIV-Studie auf quantitativer Ebene analysierten Zusammenhänge des fachdidaktischen Wissens mit dem mathematischen Fachwissen und der Unterrichtsqualität zu werfen. Hierzu dient die dritte Forschungsfrage:

3. Forschungsfrage

Wie hängt die Nutzung des fachdidaktischen Wissens mit dem mathematischen Fachwissen und der Unterrichtsqualität zusammen?

Zusammenhänge zu Schülerleistungen können im Rahmen dieser qualitativen Untersuchung, die nicht an einen Leistungstest gekoppelt ist, nicht analysiert werden.

2.8 Das Modell zur Rekonstruktion fachdidaktischer Prozesse als Rahmenmodell dieser Arbeit

Diese Arbeit entstand im Rahmen des *Promotionsprogramms fachdidaktische Strukturierung (ProfaS)* an der Carl von Ossietzky Universität Oldenburg, welches die Analyse von Prozessen fachdidaktischer Strukturierung in der Schulpraxis und Lehrerbildung zum Ziel hat. Dem Promotionsprogramm liegt das Modell der didaktischen Rekonstruktion zugrunde, welches sich unter anderem im *Promotionsprogramm Didaktische Rekonstruktion* (ProDid) an der Carl von Ossietzky Universität Oldenburg bewährt hat (Kattmann, 2007; Kattmann, Duit, Gropengießer, & Komorek, 1997) und im Rahmen von ProfaS auf die Lehrerbildung übertragen wird. Das sogenannte *Modell zur Rekonstruktion fachdidaktischer Prozesse* eignet sich für die Analyse des fachdidaktischen Wissens von Lehrerinnen und Lehrern insbesondere im Zusammenhang mit der didaktischen Strukturierung von Unterricht (Nawrath, 2010; Van Dijk & Kattmann, 2007) und ist deshalb als Rahmenmodell für die Beantwortung der im vorherigen Abschnitt hergeleiteten Fragestellungen geeignet. Abbildung 2.8 zeigt die Adaption des Modells im Rahmen dieser Arbeit.

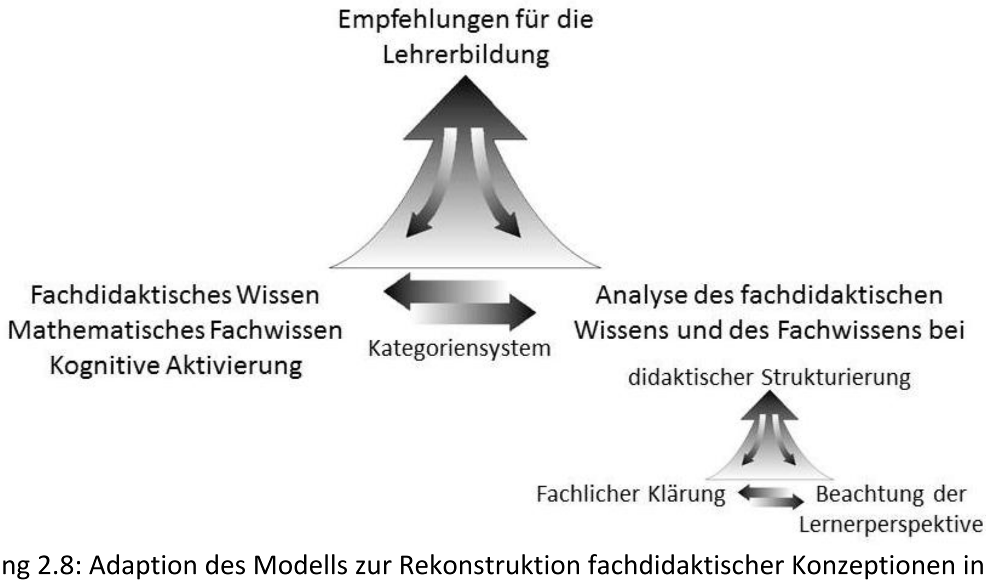


Abbildung 2.8: Adaption des Modells zur Rekonstruktion fachdidaktischer Konzeptionen innerhalb dieser Arbeit (in Anlehnung an Nawrath, 2010; Van Dijk & Kattmann, 2007)

Im Rahmen der sogenannten *Klärung domänenspezifischer fachdidaktischer Konzeptionen* (linke untere Ecke des großen Dreiecks in Abbildung 2.8) wird zunächst die Bedeutung des fachbezogenen Wissens (fachdidaktisches Wissen und mathematisches Fachwissen) für das Lehrerhandeln herausgearbeitet (siehe Kapitel 3), woraufhin verschiedene Konzepte zur Struktur und den verschiedenen Komponenten des fachdidaktischen Wissens und des mathematischen Fachwissens von Lehrerinnen und Lehrern analysiert, verglichen und zu einer

Konzeption vereint werden (siehe Kapitel 4). Ausgehend von diesen Analysen werden zur Beantwortung der zweiten Forschungsfrage Kategorien für die Erfassung des fachdidaktischen Wissens bei der Unterrichtsplanung, -durchführung und -reflexion erarbeitet, die insbesondere auch eine Analyse der eingesetzten Aufgaben ermöglichen (siehe Kapitel 6). Die Kategorien zum fachdidaktischen Wissen zeigen allerdings ähnlich wie die Kategorien von Rowland et al. (2005) lediglich die Situationen an, in denen sich fachdidaktisches Wissen zeigt, beispielsweise die Reaktion auf Schülerantworten. Sie lassen aber noch keine Rückschlüsse auf die Qualität der Nutzung des Wissens, zum Beispiel auf die Angemessenheit der Reaktion der Lehrperson, zu. Deshalb werden im Rahmen der zweiten Forschungsfrage Kategorien der kognitiven Aktivierung als einer wichtigen Dimension von Unterrichtsqualität (siehe 2.2) hinzugefügt (siehe Kapitel 6). Diese wurden zuvor ebenfalls aus theoretischer Sicht analysiert (siehe Kapitel 5) und ermöglichen durch die Verbindung der Kategorien des fachdidaktischen Wissens mit Kategorien zur Einschätzung der Unterrichtsqualität auch eine Bewertung des genutzten fachdidaktischen Wissens.

Mithilfe dieses Kategoriensystems werden nun die im Rahmen der *empirischen Untersuchung zum fachdidaktischen Wissen der Lehrerinnen und Lehrer* (rechte untere Ecke des großen Dreiecks, siehe Abbildung 2.8) erhobenen Daten analysiert. Bei der Auswahl der Methodik wird speziell darauf geachtet, das Wissen der Lehrerinnen und Lehrer möglichst handlungsnah und umfassend zu erheben. So sollen die Lehrkräfte ihre Unterrichtsplanung anhand eines offenen Fragenkatalogs schriftlich festhalten, der Unterricht wird videografiert und im Anschluss werden die erhobenen Unterrichtsstunden in einem leitfadengestützten Interview reflektiert, in dem die eingesetzten Aufgaben als ‚stimulated recall' (siehe z.B. Clarke, Keitel, & Shimizu, 2006) dienen (siehe Kapitel 7). Im Rahmenmodell dieser Arbeit wird dabei innerhalb der empirischen Untersuchung das ‚ProDid-Modell' (Kattmann, 2007; Kattmann et al., 1997; kleines Dreieck unten rechts) integriert. Es wird untersucht, wie die Lehrerinnen und Lehrer den Prozess der didaktischen Rekonstruktion durchlaufen, indem sie durch den Einsatz ihres Fachwissens und ihrer Kenntnisse über das Schülerdenken den Unterricht didaktisch strukturieren (vgl. Van Dijk & Kattmann, 2007).

Das entwickelte Kategoriensystem sowie die erarbeitete Methodik der empirischen Untersuchung stellen eine Möglichkeit dar, die Nutzung des fachdidaktischen Wissens bei der didaktischen Strukturierung des eigenen Unterrichts der Lehrerinnen und Lehrer aufzuzeigen, wodurch die zweite Forschungsfrage beantwortet werden soll. Die qualitativen Analysen mithilfe dieses Verfahrens dienen anschließend dazu, die erste Forschungsfrage zumindest in Ansätzen zu beantworten (siehe Kapitel 8-13). Da im Kategoriensystem durch die Kategorien zur kognitiven Aktivierung bereits die Einschätzung der Unterrichtsqualität integriert wurde, lassen sich anhand der qualitativen Analysen insbesondere Zusammenhänge zwischen dem fachdidaktischen Wissen und der Unterrichtsqualität herstellen, wodurch die dritte Forschungsfrage teilweise beantwortet werden kann. Die Lehrerinnen und Lehrer bearbeiten zusätzlich zu den qualitativen Datenerhebungen im Zusammenhang mit ihrem Unterricht den schriftlichen COACTIV-Test zum fachdidaktischen Wissen und zum mathematischen Fachwissen. Hierdurch werden zusätzliche Verbindungen zu den Ergebnissen der COACTIV-Studie möglich. Darüber hinaus können aus der Kombination der bisherigen Erhebungsinstrumente mit dem COACTIV-Test zumindest in Ansätzen weitere Antworten auf die dritte Forschungsfrage gefunden werden.

Aus den Vergleichen im Rahmen der Analysen dieser Arbeit können zum Abschluss *Empfehlungen für die Lehrerbildung* abgeleitet werden (siehe Spitze des großen Dreiecks in Abbildung 2.9 und Abschnitt 14.1) sowie Folgerungen für weitere mögliche und nötige Studien gezogen werden (siehe 14.2).

3 Professionelle Kompetenz von Lehrerinnen und Lehrern

Im Oktober 2000 beschreiben der Präsident der Kultusministerkonferenz und die Vorsitzenden der Lehrerverbände in einer gemeinsamen Erklärung das Berufsbild der Lehrerinnen und Lehrer. Dort heißt es unter anderem:

> Lehrerinnen und Lehrer sind Fachleute für das Lehren und Lernen. Ihre Kernaufgabe ist die gezielte und nach wissenschaftlichen Erkenntnissen gestaltete Planung, Organisation und Reflexion von Lehr- und Lernprozessen sowie ihre individuelle Bewertung und systemische Evaluation. Die berufliche Qualität von Lehrkräften entscheidet sich an der Qualität ihres Unterrichts (Kultusministerkonferenz, 2004, S. 3).

Neben der didaktischen Strukturierung von Unterricht benennt die KMK noch viele weitere Anforderungen an die Lehrerinnen und Lehrer, beispielsweise die Erziehung und Beratung der Schülerinnen und Schüler, die Elternarbeit, die Fort- und Weiterbildung sowie die Schulentwicklung (Kultusministerkonferenz, 2004). Es wird deutlich, dass Lehrerinnen und Lehrer die unterschiedlichsten Anforderungen erfüllen müssen. Die didaktische Strukturierung von Unterricht ist dabei nach Ansicht der KMK als die Kernaufgabe des Lehrerberufs anzusehen. Es stellt sich aber die entscheidende Frage, welche Kompetenzen Lehrerinnen und Lehrer benötigen, um diese vielfältigen Aufgaben, und insbesondere die Anforderungen der Unterrichtsgestaltung, bewältigen zu können. Im folgenden Abschnitt werden einige mögliche Antworten aus unterschiedlichen Blickrichtungen auf diese Frage vorgestellt, um die Bedeutung des fachdidaktischen Wissens und des mathematischen Fachwissen, die im Rahmen dieser Arbeit eine zentrale Rolle spielen, für die Bewältigung der Kernaufgabe darzulegen (siehe 3.1). Anschließend wird das dieser Arbeit zugrunde liegende Kompetenzmodell vorgestellt, welches auch als Grundlage der COACTIV-Studie diente (siehe 3.2).

3.1 Anforderungen an Lehrerinnen und Lehrer aus unterschiedlichen Perspektiven

3.1.1 Unterrichtsrelevante Lehrermerkmale nach Helmke

Es gibt eine Reihe von Versuchen, die unterrichtsrelevanten Merkmale von Lehrerinnen und Lehrern aus Sicht der Erziehungswissenschaft zu beschreiben (vgl. Baumert & Kunter, 2006; Bromme, 1992; Helmke, 2009). Helmke (2009) unterteilt diese in vier Gruppen:

1. Sachkompetenz, Expertise
2. Unterrichtsrelevante Personenmerkmale und Orientierungen
3. Schlüsselkompetenzen für das Unterrichten
4. Standards des Lehrerhandelns

Unter *Sachkompetenz* versteht Helmke (2009) nicht nur die wissenschaftliche Beherrschbarkeit der fachlichen Inhalte, sondern ebenso ihr didaktische Strukturierbarkeit. Er macht deutlich, dass zur Sachkompetenz nicht nur das reine Fachwissen, sondern eine Mischung aus fachdidaktischer, fachwissenschaftlicher, pädagogisch-psychologischer und entwicklungspsychologischer Expertise gehört, um die Inhalte unter Berücksichtigung von Schülervorstellungen anregend und verständlich vermitteln zu können. Die international bedeutendste Klassifikation des Lehrerwissens stammt von Shulman (1986) (siehe auch 3.2.1) (Helmke, 2009).

Als *unterrichtsrelevante Personenmerkmale und Orientierungen* nennt Helmke zunächst die Einstellung der Lehrkraft zum unterrichteten Fach sowie das Engagement und den Humor. Diese Merkmale sind bisher wenig erforscht. Einen wichtigen Unterpunkt stellen aber die subjektiven Theorien dar, die ähnlich wie wissenschaftliche Theorien aufgebaute Aussagen- und Überzeugungssysteme darstellen (siehe auch 3.2.2) und vielfach unbewusst das Lehrerhandeln steuern. Diese sind eng verbunden mit den epistemologischen Überzeugungen. Hierunter versteht man die subjektiven Überzeugungen der Lehrerinnen und Lehrer zur Struktur des Wissenserwerbs (Helmke, 2009; Steinbring, 1998). Auch die Bereitschaft und Fähigkeit zur Selbstreflexion, die eine Schlüsselbedingung für die Verbesserung des eigenen Unterrichts und damit für einen nachhaltigen Unterrichtserfolg darstellt, zählt Helmke zu den unabdingbaren Merkmalen von Lehrpersonen (Helmke, 2009).

Die Beschreibung von vier *Schlüsselkompetenzen* (nach Weinert, 2001) liefert nach Helmke (2009) eine weitere Möglichkeit, die Anforderungen an die Lehrerinnen und Lehrer aufzuzeigen. Hierzu zählen die Fachkompetenz, die didaktische Kompetenz, die Klassenführungskompetenz sowie die diagnostische Kompetenz.

Die *Standards des Lehrerhandelns* stellen nach Helmke eine vierte Gruppierung dar, in der unter anderem von politischer Seite aus festgelegt wird, welche Kompetenzen von Absolventinnen und Absolventen der Lehramtsausbildung erwartet werden, damit sie den beruflichen Anforderungen gewachsen sind (Helmke, 2009). Im Folgenden werden einige dieser Standards vorgestellt.

3.1.2 Standards der Lehrerbildung bei Oser

Oser hat einen Ansatz für die Dimensionierung von Lehrerkompetenzen entwickelt, der sich als fruchtbare Basis für die empirische Forschung zum Lehren und Lernen sowie zum Lehrerwissen bewährt hat (Helmke, 2009). Für die professionelle Kompetenz und deren optimale Erreichung verwendet Oser (1997) den Begriff Standard, den er wie folgt definiert:

> Standards seien optimal ausgeführte bzw. optimal beherrschte und in vielen Situationen anwendbare Fähigkeiten und Fertigkeiten, die nur von Professionellen Verwendung finden können, aber nicht von Laien oder von Personen anderer Profession (Oser, 1997, S. 28).

Oser entwickelte durch Expertengespräche 88 Standards für professionell ausgebildete Lehrpersonen, die er in 12 Gruppen gruppierte (Oser, 1997). Allerdings enthält nur die Gruppe 12 (allgemeine und fachdidaktische Kompetenzen) explizit einen Bezug zum Unterrichtsfach. Die Standards sind in der Form von Fragen formuliert, wie sie zum Beispiel am Ende der Ausbildung oder innerhalb von Erhebungen gestellt werden können. Im Folgenden sind exemplarisch einige Einzelstandards aus der 12. Gruppe, die im Rahmen dieser Arbeit am ehesten von Bedeutung sind, aufgelistet.

Die Standards von Oser umfassen auch über das Unterrichten hinausgehende Kompetenzbereiche, die für eine erfolgreiche Berufstätigkeit wichtig sind. Darüber hinaus sind sie so detailliert, dass sie sich sowohl für die curriculare Umsetzung als auch für empirische Studien eignen (Helmke, 2009). Allerdings kritisiert Terhart (2002) in seiner Expertise für die Kultusministerkonferenz (KMK) die fehlende Fachlichkeit der Standards von Oser, die sich nur auf die pädagogischen und didaktischen Kompetenzen beziehen und die fachlichen Kompetenzen außen vor lassen. Diese Kritik ist durchaus berechtigt: Schon in den Bezeichnungen der 12 Gruppen taucht das fachliche Wissen in keiner Weise auf. Die einzige Gruppe, in der das Fachwissen zumindest indirekt erwähnt wird, ist die letztgenannte Gruppe 12. Allerdings zeigt auch hier die genauere Betrachtung der einzelnen Unterpunkte, dass das Fachwissen hier nur eine untergeordnete Rolle spielt (siehe Abbildung 3.1). Dies steht beispielsweise im Gegensatz zu Ergebnissen der COACTIV-Studie, die insbesondere die große Bedeutung des Fachwissens für die Gestaltung des Unterrichts hervorheben (siehe 2.3).

Ich habe in der Fachdidaktik # gelernt z.B. …
- gesellschaftlich und fachdidaktisch bedeutsame Lerninhalte auszuwählen.
- Lernziele im kognitiven, emotionalen und/oder psychomotorischen Bereich zu formulieren.
- mich bei der Unterrichtsdurchführung an meiner Planung u orientieren und trotzdem bei Unvorhergesehenem flexibel zu reagieren.
- wie man mit den Schülerinnen und Schülern einen Begriff oder ein Konzept aufbaut und anwendet und sie dabei aktiv mitarbeiten lässt.
- den Aufbau der Fachinhalte über mehrere Klassen mit Hilfe des Lehrplans und der Schulbücher klar zu strukturieren.
- die Vor- und Nachteile unterschiedlicher Schulbücher zum Fach aufzuzeigen.
- Fachlehrmittel zu bewerten, auszuwählen und dem Lehrplan entsprechend einzusetzen.
- exemplarisch Inhalte auszuwählen.
- den Schülerinnen und Schüler Möglichkeiten zur mehrfachen Verarbeitung (schriftlich, bildlich, sensumotorisch, auditiv) von neuen Lerninhalten zu geben.

Abbildung 3.1: Auszug aus den Einzelstandards der Gruppe allgemeine und fachdidaktische Kompetenzen (Oser, 1997, S. 35)

3.1.3 Standards der Lehrerbildung der KMK

Im Gegensatz zur Wissenschaftsperspektive von Oser hat die KMK aus politischer Sicht Standards für die Lehrerbildung beschlossen, in der die Anforderungen, die Lehrerinnen und Lehrer erfüllen sollen, definiert werden. Diese bauen unter anderem auf der Expertise von Terhart (2002) auf. Unterteilt in die vier Kompetenzbereiche *Unterrichten, Erziehen, Beurteilen* und *Innovieren* werden insgesamt 11 Kompetenzen auf der Grundlage der Anforderungen beruflichen Handelns (siehe Beginn Kapitel 3) beschrieben. Den einzelnen Kompetenzen werden jeweils Standards für die theoretische und die praktische Ausbildungsphase zugeordnet. Exemplarisch werden die Standards zur Kompetenz 1 dargestellt, da dieser Kompetenzbereich die Kernaufgabe des Lehrerberufs darstellt und im Rahmen dieser Arbeit von zentraler Bedeutung ist.
Interessant ist vor allem, dass diese Standards zunächst fachunabhängig festgelegt wurden. Dies führt dazu, dass die von Terhart (2002) geäußerte Kritik der fehlenden Fachlichkeit an den Standards von Oser auch auf die Standards der Lehrerbildung der KMK übertragbar ist. Der einzige Kompetenzbereich, in dem das Fachwissen erwähnt wird, ist die zuerst genannte Kompetenz 1. Allerdings wird in den dort ausformulierten Standards das Fachwissen kaum erwähnt.

<table>
<tr><td colspan="2"><u>Kompetenz 1:</u>
Lehrerinnen und Lehrer planen Unterricht fach- und sachgerecht und führen ihn sachlich und fachlich korrekt durch.</td></tr>
<tr><td>Standards für die theoretischen Ausbildungsabschnitte</td><td>Standards für die praktischen Ausbildungsabschnitte</td></tr>
<tr><td>Die Absolventinnen und Absolventen...
• kennen die einschlägigen Bildungstheorien, verstehen bildungs- und erziehungstheoretische Ziele sowie die daraus abzuleitenden Standards und reflektieren diese kritisch.
• kennen allgemeine und fachbezogene Didaktiken und wissen, was bei der Planung von Unterrichtseinheiten beachtet werden muss.
• kennen unterschiedliche Unterrichtsmethoden und Aufgabenformen und wissen, wie man sie anforderungs- und situationsgerecht einsetzt.
• kennen Konzepte der Medienpädagogik und -psychologie und Möglichkeiten und Grenzen eines anforderungs- und situationsgerechten Einsatzes von Medien im Unterricht.
• kennen Verfahren für die Beurteilung von Lehrleistung und Unterrichtsqualität.</td><td>Die Absolventinnen und Absolventen...
• verknüpfen fachwissenschaftliche und fachdidaktische Argumente und planen und gestalten Unterricht.
• wählen Inhalte und Methoden, Arbeits- und Kommunikationsformen aus.
• integrieren moderne Informations- und Kommunikationstechnologien didaktisch sinnvoll und reflektieren den eigenen Medieneinsatz.
• überprüfen die Qualität des eigenen Lehrens.</td></tr>
</table>

Abbildung 3.2: Standards für die Lehrerbildung zur Kompetenz 1
(Kultusministerkonferenz, 2004, S. 7)

Im Oktober 2008 wurden diese fachunabhängigen Standards für die Lehrerbildung der KMK durch fachbezogene Kompetenzen ergänzt (Kultusministerkonferenz, 2008). Die fachbezogenen Standards für das Fach Mathematik gehen auf gemeinsame Empfehlungen der DMV, GDM und MNU zurück (2008), und betonen unter anderem die Bedeutung des mathematischen Fachwissens für das Unterrichten von Mathematik (siehe Abbildung 3.3).
Diese Standards des beruflichen Könnens gehören nach Helmke (2009) zu den fundiertesten Publikationen im deutschsprachigen Raum. Allerdings beschränken sich diese Standards sehr auf das Kennen bzw. Wissen (Blömeke, Felbrich, & Müller, 2008b), und nicht direkt auf die Gestaltung von Unterricht. So wird beispielsweise betont, dass die angehenden Lehrerinnen und Lehrer mathematische Sachverhalte selbst darstellen können, allerdings wird nicht beschrieben, dass sie die entsprechenden Sachverhalte auch vermitteln können. Dies könnte damit begründet werden, dass diese Standards am Ende der Ausbildung gelten sollen, eventuell sind für die Anforderungen im späteren Berufsalltag noch weiterreichende Standards zu formulieren. Solche Standards stellen beispielsweise die amerikanischen NCTM-Principles and Standards for School Mathematics dar.

Die Studienabsolventinnen und -absolventen verfügen über anschlussfähiges mathematisches und mathematikdidaktisches Wissen, das es ihnen ermöglicht, gezielte Vermittlungs-, Lern- und Bildungsprozesse im Fach Mathematik zu gestalten und neue fachliche und fächerverbindende Entwicklungen selbstständig in den Unterricht und in die Schulentwicklung einzubringen. Sie

- können mathematische Sachverhalte in adäquater mündlicher und schriftlicher Ausdrucksfähigkeit darstellen, mathematische Gebiete durch Angabe treibender Fragestellungen strukturieren, durch Querverbindungen vernetzen und Bezüge zur Schulmathematik und ihrer Entwicklung herstellen,
- können beim Vermuten und Beweisen mathematischer Aussagen fremde Argumente überprüfen und eigene Argumentationsketten aufbauen sowie mathematische Denkmuster auf praktische Probleme anwenden (mathematisieren) und Problemlösungen unter Verwendung geeigneter Medien erzeugen, reflektieren und kommunizieren,
- können den allgemein bildenden Gehalt mathematischer Inhalte und Methoden und die gesellschaftliche Bedeutung der Mathematik begründen und in den Zusammenhang mit Zielen und Inhalten des Mathematikunterrichts stellen,
- können fachdidaktische Konzepte und empirische Befunde mathematikbezogener Lehr-Lern- Forschung nutzen, um Denkwege und Vorstellungen von Schülerinnen und Schülern zu analysieren, Schülerinnen und Schüler für das Lernen von Mathematik zu motivieren sowie individuelle Lernfortschritte zu fördern und zu bewerten,
- können Mathematikunterricht auch mit heterogenen Lerngruppen auf der Basis fachdidaktischer Konzepte analysieren und planen und auf der Basis erster reflektierter Erfahrungen exemplarisch durchführen.

Abbildung 3.3: mathematikspezifisches Kompetenzprofil (Kultusministerkonferenz, 2008, S. 30)

3.1.4 NCTM-Principles and Standards for School Mathematics

Anders als in Deutschland werden im anglo-amerikanischen Sprachraum schon seit längerer Zeit programmatische Standards und Prinzipien für das Lehren und Lernen entwickelt, die vor allem auch für die einzelnen Unterrichtsfächer spezifisch sind (Helmke, 2009). Der NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) stellt in seinen ‚Principles and Standards for school mathematics' (NCTM, 2000) zunächst sechs Hauptprinzipien auf, die Grundlage für alle schulmathematikspezifischen Entscheidungen der Lehrerinnen und Lehrer sein sollen (siehe Abbildung 3.4).

Equity. Excellence in mathematics education requires equity—high expectations and strong support for all students.
Curriculum. A curriculum is more than a collection of activities: it must be coherent, focused on important mathematics, and well articulated across the grades.
Teaching. Effective mathematics teaching requires understanding what students know and need to learn and then challenging and supporting them to learn it well.
Learning. Students must learn mathematics with understanding, actively building new knowledge from experience and prior knowledge.
Assessment. Assessment should support the learning of important mathematics and furnish useful information to both teachers and students.
Technology. Technology is essential in teaching and learning mathematics; it influences the mathematics that is taught and enhances students' learning.

Abbildung 3.4: Principles for School Mathematics des NCTM (NCTM, 2000)

Die Bedeutung des mathematischen Fachwissens wird in der Ausformulierung dieser Prinzipien deutlich hervorgehoben. Dies wird beispielsweise im *Curriculum Principle* deutlich, welches betont, dass die Bedeutung und das Wesen der Mathematik als eine stark vernetzte und kumulative Disziplin den Schülerinnen und Schüler verdeutlicht werden sollen. Das *Teaching Principle* unterstreicht insbesondere die Bedeutung des tiefen fachlichen Verständnisses der Lehrerinnen und Lehrer, um beispielsweise geeignete Materialien auszuwählen und mithilfe angemessener Instruktionen das Lernen zu unterstützen.

3.1.5 Bedeutung des fachdidaktischen Wissens und des mathematischen Fachwissens

Anhand der hier beschriebenen Standards und auch der an ihnen geäußerten Kritik wird deutlich, dass die Bedeutung des Fachwissens für die Bewältigung der beruflichen Anforderungen der Lehrerinnen und Lehrer nicht zu unterschätzen ist. Außerdem zeigt sich, dass das fachdidaktische Wissen in allen hier vorgestellten Konzeptualisierungen einen hohen Stellenwert einnimmt. Die beiden im Rahmen dieser Arbeit betrachteten Kompetenzfacetten, das fachdidaktische Wissen und das mathematische Fachwissen, scheinen demnach zentral für die Bewältigung der Kernaufgabe der Lehrerinnen und Lehrer, die didaktische Strukturierung von fachlich adäquatem Unterricht, zu sein.
Um diese beiden Facetten der Kompetenz näher einordnen zu können, wird im Folgenden das im Rahmen der COACTIV-Studie entwickelte Kompetenzmodell vorgestellt, welches aus einer Forschungssicht heraus die von Helmke benannten vier Aspekte der Konzeptualisierungen integriert und unter Einbeziehung der fachlichen Inhalte eine Beschreibung der Anforderungen vornimmt, die praktizierende Lehrerinnen und Lehrer bewältigen müssen. Dieses Kompetenzmodell dient als Grundlage für diese Arbeit.

3.2 Das Kompetenzmodell bei COACTIV

Die COACTIV-Arbeitsgruppe entwickelte aufgrund theoretischer Analysen ein allgemeines Kompetenzmodell, welches sie für das Fach Mathematik spezifiziert haben (Baumert & Kunter, 2011a; Brunner, Kunter, Krauss, Klusmann, et al., 2006). Als zentrale Aufgabe der Lehrerinnen und Lehrer sieht COACTIV, ähnlich wie die KMK (siehe Beginn Kapitel 3), die didaktische Strukturierung der Lehr-Lernsituationen im Unterricht sowie die Vermittlung der schulischen Lernziele. Dabei stehen die didaktische Vorbereitung und Gestaltung des Unterrichts im Mittelpunkt der Anforderungen. Das Kompetenzmodell soll daher vor allem jene Lehrermerkmale in den Blick nehmen, die für die Vermittlung der schulischen Lerninhalte unbedingt notwendig sind. Der Begriff ‚Kompetenz' beschreibt dabei prinzipiell erlern- und vermittelbare persönliche Voraussetzungen zur erfolgreichen Bewältigung dieser spezifischen Anforderungen (Baumert & Kunter, 2011a).
In Anlehnung an den Begriff der ‚Handlungskompetenz' von Weinert (2001) werden von der COACTIV-Arbeitsgruppe vier Aspekte der professionellen Kompetenz von Lehrerinnen und Lehrern unterschieden: *Professionswissen, Überzeugungen und Werthaltungen, Motivationale Orientierungen sowie Selbstregulation* (siehe Abbildung 3.5). Durch die Interaktion dieser verschiedenen Aspekte wird die Grundlage für professionelles Lehrerhandeln gebildet, welches sich durch verschiedenste Aspekte der Unterrichtsqualität, insbesondere ein reichhaltiges Repertoire an Handlungsmöglichkeiten in unterschiedlichsten Situationen, auszeichnet (Brunner, Kunter, Krauss, Klusmann, et al., 2006).

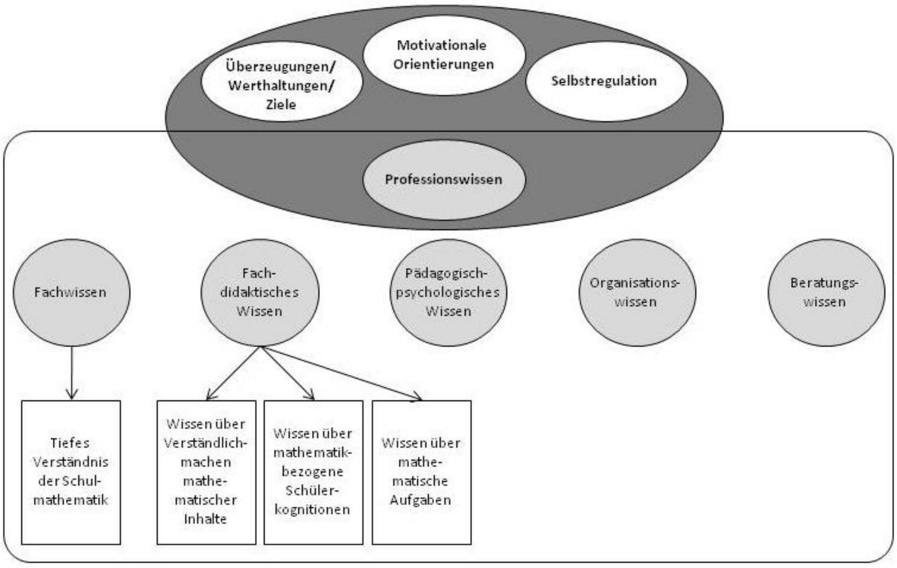


Abbildung 3.5: Das Kompetenzmodell von COACTIV mit Spezifikation für das fachbezogene Professionswissen (nach Baumert & Kunter, 2011a, S. 32)

Einen vergleichbaren Ansatz wählte die TEDS-M-Arbeitsgruppe. Auch sie gehen in Anschluss an Weinert (2001) von einer Definition professioneller Kompetenz aus, die die Bewältigung der beruflichen Anforderungen in den Mittelpunkt stellt (Blömeke, Felbrich, & Müller, 2008b; Bromme, 1992) (siehe 3.1.1). Im Folgenden werden die verschiedenen Aspekte der professionellen Kompetenz im Einzelnen vorgestellt.

3.2.1 Professionelles Wissen der Lehrerinnen und Lehrer

Den Kern der professionellen Kompetenz bildet das Professionelle Wissen der Lehrerinnen und Lehrer (Baumert & Kunter, 2006, 2011a; Blömeke, Felbrich, & Müller, 2008b), welches ein sehr komplexer Bereich mit vielen Facetten zu sein scheint. Für einen Überblick über verschiedene Theorien siehe z.B. Blömeke (2002).

Baumert und Kunter (2011a) fassen zentrale Ergebnisse der auf der Expertiseforschung aufbauenden Forschung zum professionellen Wissen wie folgt zusammen:

- Professionelles Wissen ist domänenspezifisch und ausbildungs- bzw. trainingsabhängig (Kompetenzen im engeren Sinne).
- Professionelles Wissen ist gut vernetzt und hierarchisch organisiert.
- In professionellen Domänen ist das zentrale Fach- und Handlungswissen um Schlüsselkonzepte und eine begrenzte Zahl von Ereignisschemata arrangiert, an die Einzelfälle, episodische Einheiten oder Sequenzen von Episoden (Skripts) angedockt sind.
- Professionelles Wissen integriert unterschiedliche Verwendungskontexte und erlaubt dadurch variantenreiches, adaptives Verhalten in Problemsituationen.
- Basisprozeduren sind automatisiert, aber gleichwohl flexibel an die spezifischen Bedingungen des Einzelfalls und des Kontextes adaptierbar (Baumert & Kunter, 2011a, S. 34; nach Berliner, 2001; Bromme, 2008; Hatano & Inagaki, 1986; Neuweg, 2001; Palmer et.al. 2005)

Das professionelle Wissen lässt sich in Anlehnung an Fenstermacher (1994) unterscheiden in theoretisch-formales Wissen (*formal knowledge*) und praktisches Wissen und Können (*practical knowledge*). Vor allem das Fachwissen, aber auch Teile des fachdidaktischen und allgemeinen pädagogischen Wissens lassen sich als theoretisch-formales Wissen beschreiben, welches mental repräsentiert ist. Dagegen basiert das kommunikative Lehrerhandeln innerhalb der Schulklasse oder der Schule auf praktischem Wissen und Können, welches auf Er-

fahrungen aufbaut. Es ist in spezifische Kontexte eingebettet sowie auf konkrete Problemstellungen bezogen und bleibt in der Regel implizit (Baumert & Kunter, 2006, 2011a).
Eine der einflussreichsten Taxonomien zum Wissen von Lehrerinnen und Lehrern ist die Konzeption von Shulman (1986, 1987). Er führt die Begriffe *pedagogical knowledge* (allgemeines pädagogisches Wissen), *content knowledge* (Fachwissen) und *pedagogical content knowledge* (Fachdidaktisches Wissen, häufig auch abgekürzt PCK) ein. Diese drei Kategorien werden heute allgemein als die Kernkategorien des professionellen Wissens von Lehrerinnen und Lehrern akzeptiert und allen dreien wird eine zentrale Bedeutung bei der Unterstützung von Wissenserwerbs- und Wissenskonstruktionsprozessen der Schülerinnen und Schüler zugesprochen (siehe z.B. Blömeke, Felbrich, Müller, Kaiser, & Lehmann, 2008). In ersten Veröffentlichungen Shulmans taucht auch das *curricular knowledge* (curriculares Wissen) als eine eigene domänenabhängige Kategorie auf (Shulman, 1986). Allerdings wird diese Kategorie in späteren Publikationen seiner Arbeitsgruppe als ein Teil des *pedagogical content knowledge* angesehen (Grossman, 1990). Des Weiteren ergänzt Shulman (1987) seine Typologie durch die Bereiche *knowledge of learners* (Psychologie des Lernens), *knowledge of educational context* (Organisationswissen) sowie um erziehungsphilosophisches, bildungstheoretisches und bildungshistorisches Wissen (Baumert & Kunter, 2011a; Shulman, 1987). Im Kompetenzmodell von COACTIV werden den drei Kernbereichen des professionellen Wissens von Shulman das Organisations- und Beratungswissen hinzugefügt, dem allgemein-pädagogischen Wissen werden hier psychologische Aspekte hinzugefügt (Baumert & Kunter, 2011a).
Die einzelnen Facetten des professionellen Wissens werden im Folgenden überblicksartig dargestellt. Auch das mathematikdidaktische Wissen und das mathematische Fachwissen stellen einen wichtigen Teil des professionellen Wissens dar. Da der Fokus dieser Arbeit jedoch auf diesen beiden Komponenten des professionellen Wissens liegt, werden sie im folgenden Kapitel ausführlich und aus verschiedenen Perspektiven beschrieben und nicht innerhalb dieser kurzen Übersicht aufgeführt.

Allgemein-pädagogisches Wissen

Das allgemein-pädagogische Wissen ist relativ unabhängig vom zu unterrichtenden Fach und ist beim Gestalten von Lerngelegenheiten in verschiedenen Unterrichtsfächern von Bedeutung (Brunner, Kunter, Krauss, Klusmann, et al., 2006). Es integriert vor allem Wissen aus der allgemeinen Didaktik und der Lehr-Lern-Psychologie, also Aspekte von Shulmans *pedagogical knowledge,* aber auch des von Shulman benannten *knowledge of learners*, welches eher psychologische Aspekte umfasst (Baumert & Kunter, 2011a; Voss & Kunter, 2011).
In Abbildung 3.6 ist eine Systematisierung von Baumert und Kunter (2011a) von bestehenden, weitgehend konsensfähigen Vorschlägen zu den einzelnen Wissensfacetten allgemein-pädagogischen Wissens aufgelistet.
Baumert und Kunter (2011a) weisen darauf hin, dass die einzelnen Wissensfacetten unterschiedlich weit von der praktischen Berufs- und Unterrichtstätigkeit entfernt sind. In der Erweiterung der COACTIV-Studie auf Referendare (COACTIV-R) wurde beispielsweise der Fokus auf Wissen über effektive Klassenführung, Wissen über Unterrichtsmethoden, Wissen über Leistungsbeurteilung, Wissen über individuelle Lernprozesse und Wissen über individuelle Besonderheiten der Schülerinnen und Schüler gelegt (Voss & Kunter, 2011).

1. Konzeptuelles bildungswissenschaftliches Grundlagenwissen
   - Erziehungsphilosophisch, bildungstheoretische und historische Grundlagen von Schule und Unterricht
   - Theorie der Institution
   - Psychologie der menschlichen Entwicklung, des Lernens und der Motivation
2. Allgemeindidaktisches Konzeptions- und Planungswissen
   - Metatheoretische Modelle der Unterrichtsplanung
   - Fachübergreifende Prinzipien der Unterrichtsplanung
   - Unterrichtsmethoden im weiten Sinne.
3. Wissen über Unterrichtsführung und Orchestrierung von Lerngelegenheiten
   - Inszenierungsmuster von Unterricht,
   - Variationen von Sozialformen und Methoden,
   - Effektive Klassenführung *(classroom management)*,
   - Sicherung der konstruktiv-unterstützenden Lernumgebung.
4. Wissen über fachübergreifende Prinzipien des Diagnostizierens, Prüfens und Bewertens
   - Lernen und Leisten: Grundlagen der Diagnostik,
   - Prozessdiagnostik,
   - Rückmeldungen,
   - Summatives Prüfen und Bewerten.
5. Methodische Grundlagen empirischer Sozialforschung

Abbildung 3.6: Facetten des allgemein-pädagogischen Wissens
(Baumert & Kunter, 2011a, S. 39)

Die *Klassenführung* wird als Steuerung und Koordination des sozialen Klassengefüges aufgefasst. Sie dient der Maximierung der Zeit, die für verständnisvolle Lernprozesse und soziale Aushandlungen zur Verfügung steht sowie der Reduktion von Störungen. Hier ist vor allem ein zügiger, dynamischer und gradliniger Stundenablauf wünschenswert, bei dem die Aufmerksamkeit aller Lernenden auf die Lehraktivitäten gerichtet ist (Voss & Kunter, 2011). *Unterrichtemethoden* bilden das Handwerkszeug der Lehrerinnen und Lehrer, um mit ihrem Einsatz und ihrer Orchestrierung die Lernprozesse der Schülerinnen und Schüler zu steuern. Es gibt in der allgemeinen Didaktik mittlerweile eine große Anzahl erprobter unterrichtsmethodischer Ansätze (H. Meyer, 2007b). Die *Leistungsbeurteilung* von Schülerinnen und Schülern erfüllt im Unterrichts viele Funktionen (Weinert, 2002). Die Lehrkräfte erhalten beispielsweise wichtige Rückmeldungen über das Erreichen der Unterrichtsziele und das Verständnis der Schülerinnen und Schüler für die Inhalte, die auch für die weitere Planung des Unterrichts von Bedeutung sind (Voss & Kunter, 2011). Für die Unterstützung der *individuellen Lernprozesse* der Schülerinnen und Schüler benötigen Lehrkräfte ebenfalls ein Verständnis von der Psychologie des Lernens, aber auch Wissen über die unterschiedlichen Besonderheiten in den individuellen Lernprozessen und Lernvoraussetzungen der Lernenden, um im Unterricht durch Differenzierung die besonderen Begabungen oder Schwierigkeiten der Schülerinnen und Schüler berücksichtigen zu können (Voss & Kunter, 2011). Einen ähnlichen Ansatz wie COACTIV-R wählte die TEDS-M Studie, die das pädagogische Wissen in den Dimensionen Strukturierung von Unterricht, Motivierung, Umgang mit Heterogenität, Klassenführung und Leistungsbeurteilung erfasste (Blömeke, Felbrich, & Müller, 2008a).

Das hier beschriebene fachunabhängige Wissen müssen die Lehrerinnen und Lehrer für die erfolgreiche Bewältigung der beruflichen Anforderungen mit dem fachbezogenen Wissen geeignet vernetzen (Blömeke, Felbrich, & Müller, 2008a; Brunner, Kunter, Krauss, Klusmann, et al., 2006; Shulman, 1987). Beispielsweise spielt für eine effektive Klassenführung in der konkreten Unterrichtssituation auch das fachbezogene Wissen eine wichtige Rolle, da nicht nur durch fachübergreifende Strategien, wie z.B. das Unterbinden von Störungen, sondern auch durch anregende fachliche Aufgaben oder Diskussionen, die Lernzeit maximiert werden kann. Hier greifen also allgemein-pädagogische und fachspezifische Komponenten der effektiven Klassenführung ineinander (Voss & Kunter, 2011).

Organisations- und Beratungswissen

Das Organisationswissen bezieht sich auf die Funktionslogik und die Funktionsfähigkeit des Bildungssystems und der einzelnen Bildungseinrichtungen. Hierzu zählt Wissen über das Bildungssystem und seine Rahmenbedingungen, Steuerung und Tranzparenzsicherung, Schulorganisation, Schulökologie, Schulverfassung, Rechte von Schülerinnen und Schülern, Eltern und Lehrkräften, Aufgaben der Schulleitung, Schuleffektivität und Schulqualität sowie Schultheorien (Baumert & Kunter, 2011a).

Das Beratungswissen ist in der Regel sozial verteilt und fachunabhängig und muss während einer Beratung gebündelt und adressatenspezifisch interpretiert werden. Im schulischen Kontext werden sowohl einzelne Schülerinnen und Schüler, Schülergruppen sowie Eltern und Familien beispielsweise zur weiteren Schullaufbahn oder bei Lernschwierigkeiten und Verhaltensproblemen beraten. Dabei werden in den Beratungssituationen häufig Themen angesprochen, die über ein einzelnes Unterrichtsfach hinausgehen und gegebenenfalls das Hinzuziehen weiterer Lehrerinnen und Lehrer oder der Eltern erfordern. Dies führt dazu, dass Beratungssituationen thematisch und sozial sehr komplex sein können. Sie erfordern daher spezielles Wissen (Baumert & Kunter, 2011a).

Diese beiden Kompetenzbereiche stellen zwar für die Bewältigung der beruflichen Anforderungen wichtige Wissensbereiche von Lehrerinnen und Lehrern dar, sie weisen aber keine unmittelbare Handlungsrelevanz für die Gestaltung des Unterrichts auf (Baumert & Kunter, 2011a), und werden im Rahmen dieser Arbeit nicht berücksichtigt.

3.2.2 Überzeugungen und Werthaltungen

Im hier vorgestellten Kompetenzmodel wird auf theoretischer Ebene Wissen und Können von Werthaltungen und Überzeugungen (in der gängigen Literatur häufig auch beliefs oder subjektive Theorien genannt) unterschieden, wobei die Übergänge fließend sind (Baumert & Kunter, 2011a). Es liegt bisher keine einheitliche Definition von Überzeugungen bzw. Beliefs vor, die den unterschiedlichsten Theorien gerecht wird (Goldin, Rösken, & Törner, 2009). Im Rahmen der COACTIV-Studie wurden Überzeugungen beispielsweise definiert als „überdauernde existenzielle Annahmen über Phänomene oder Objekte der Welt, die subjektiv für wahr gehalten werden, sowohl implizite als auch explizite Anteile besitzen und die Art der Begegnung mit der Welt beeinflussen“ (Voss, Kleickmann, Kunter, & Hachfeld, 2011, S. 235). Durch ihre orientierende und handlungsleitende Funktion bilden Überzeugungen eine Brücke zwischen Wissen und Handeln (Blömeke, Müller, Felbrich, & Kaiser, 2008; Schmotz, Felbrich, & Kaiser, 2010; Staub & Stern, 2002). Es kann unterschieden werden zwischen

- Wertbindungen
- epistemologischen Überzeugungen
- subjektiven Theorien zum Lernen und Lehren von Mathematik
- Zielsystemen (Baumert & Kunter, 2006, S. 497)

Schoenfeld (1998) geht davon aus, dass bei der Entwicklung und Konkretisierung von Unterrichtsprozessen die epistemologischen Überzeugungen von Lehrkräften, ihre subjektiven Theorien vom Lernen und Lehren und ihre Ziele mit ihrem spezifischen Wissen wechselwirken (Schoenfeld, 1998; nach Baumert & Kunter, 2006).

Die *Wertbindungen* werden auch als Berufsethik bezeichnet. Hierzu zählen z.B. Verpflichtungsaspekte der Fürsorge, Gerechtigkeit und Wahrhaftigkeit (Oser, 1998; nach Baumert & Kunter, 2006). Es gibt aber bisher kaum Untersuchungen, die die Bedeutung der Wertbindungen für professionelles Handeln im Lehrerberuf aufzeigen (Baumert & Kunter, 2006).
Die *epistemologischen Überzeugungen* beschreiben sowohl die allgemeinen als auch die fachspezifischen subjektiven Vorstellungen der Lehrerinnen und Lehrer zum Wissenserwerb (Baumert & Kunter, 2006; Schmotz et al., 2010). Es kann dabei zwischen epistemologischen Überzeugungen zur Struktur der Mathematik (z.B. dynamische vs. statische Aspekte) und Überzeugungen zum Erwerb mathematischen Wissens (z.B. Transmissions- vs. Konstruktionsorientierung) unterschieden werden (Blömeke, Müller, et al., 2008; Voss et al., 2011). Sie beeinflussen das Denken und Schlussfolgern, die Informationsverarbeitung, das Lernen und die Motivation (Köller, Baumert, & Neubrand, 2000).
Die *subjektiven Theorien zum Lernen und Lehren von Mathematik* sind im Vergleich zu den epistemologischen Überzeugungen handlungsnäher, da sie auf die unterrichtsmethodische Umsetzung und auch die *Unterrichtsziele* Bezug nehmen (Müller, Felbrich, & Blömeke, 2008). Voss et al. (2011) benennen drei mögliche Sichtweisen: „learner-focused, content-focused with an emphasis on conceptual understanding und content-focused with an emphasis on performance" (Voss et al., 2011, S. 238). Baumert und Kunter (2006) zählen eine Reihe von Untersuchungen auf, die auf theoretischer Ebene davon ausgehen, dass die impliziten Theorien der Lehrpersonen vom Lehren und Lernen und die allgemeinen Zielvorstellungen, die Wahrnehmung und Deutung von Unterrichtssituationen, die Erwartungen an die Schülerinnen und Schüler und auch das professionelle Handeln beeinflussen (Baumert & Kunter, 2006; vgl. z.B. Schoenfeld, 1998). Baumert und Kunter (2006) benennen des Weiteren eine Reihe von empirischen Untersuchungen, die auf diese Zusammenhänge hinweisen. So zeigen z.B. Diedrich, Thußbas und Klieme (2002) im Rahmen des Pythagoras-Projektes (siehe 2.6), dass Lehrerinnen und Lehrer mit einem konstruktivistischen Lernverständnis anspruchsvollere Ziele im Mathematikunterricht verfolgen, als Lehrkräfte mit rezeptivem Lernverständnis.
Darüber hinaus konnte im COACTIV-Projekt (siehe 2.3) gezeigt werden, dass sowohl die Überzeugungen zur Natur des mathematischen Wissens (epistemologische Überzeugungen), als auch die Überzeugungen zum mathematischen Lernen und Lehren in einer eher konstruktivistischen oder transmissiven Orientierung zusammenfallen, d.h. Lehrkräfte, die eher konstruktivistische Überzeugungen zum Wissenserwerb aufweisen, stimmten eher auch konstruktivistischen Ideen der Unterrichtsgestaltung zu. Lehrpersonen mit eher transmissiven Überzeugungen zum Wissenserwerb sprachen sich dagegen eher auch für transmissive Konzepte der Unterrichtsgestaltung aus. Allerdings schließen sich diese beiden Pole der Überzeugungen nicht gegenseitig aus. Lehrkräfte können demnach sowohl konstruktivistische als auch transmissionsorientierte Überzeugungen gleichzeitig vertreten (Voss et al., 2011). Außerdem konnte in der COACTIV-Studie gezeigt werden, dass Lehrkräfte mit konstruktivistischen subjektiven Theorien ihre Schülerinnen und Schüler im Unterricht eher zur kognitiven Selbstständigkeit anregen und ein hohes kognitives Anspruchsniveau erreichen, wohingegen Lehrerinnen und Lehrer mit transmissionsorientierten Überzeugungen die kognitive Selbstständigkeit der Lernenden deutlich seltener unterstützen (Brunner, Kunter, Krauss, Baumert, et al., 2006; Voss et al., 2011). Die Überzeugungen und Werthaltungen haben damit einen großen Einfluss auf die Unterrichtsgestaltung. Sie stehen zwar nicht im Fokus dieser Arbeit, die den Schwerpunkt auf das fachdidaktische Wissen und das mathematische Fachwissen legt, sie werden aber dennoch am Rande mit berücksichtigt.

3.2.3 Motivationale Orientierungen und Selbstregulation

Neben den kognitiven Komponenten der professionellen Kompetenz, Wissen und Überzeugungen, sind auch die emotionalen Aspekte der Motivation und der Selbstregulation wichtige Bereiche der Lehrerkompetenz, da der Lehrerberuf eine vielseitige Tätigkeit darstellt (siehe 3.1), die viel Selbststeuerung erfordert (Kunter, 2011). Motivationale Merkmale geben gerade bei solchen Tätigkeiten wichtige Hinweise auf die erfolgreiche Bewältigung dieser Anforderungen (Kanfer & Heggestad, 1997; nach Kunter, 2011). Zu den drei zentralen Bereichen der Lehrermotivationsforschung zählen *Berufswahlmotive*, *Selbstwirksamkeitserwartungen* sowie *intrinsische Orientierungen* bzw. *Enthusiasmus*.

Die *Berufswahlmotive* spielen vor allem zu Beginn des Lehrerberufs eine Rolle, es fehlen aber konsistente Forschungsergebnisse in diesem Bereich (Kunter, 2011). Unter *Selbstwirksamkeitsüberzeugungen* von Lehrkräften versteht man den Grad der Überzeugung der Lehrerinnen und Lehrer, das Verhalten der Lernenden auch in schwierigen Situationen unterstützen und fördern zur können (Kunter, 2011 in Anlehnung an Bandura, 1997). COACTIV und andere Studien zeigen, dass hohe Selbstwirksamkeitserwartungen die Bewältigung der beruflichen Anforderungen fördern können (Baumert & Kunter, 2006, 2011a; Kunter, 2011). *Enthusiasmus* wird schon lange als Merkmal effektiver Lehrkräfte genannt (z.B. Brophy & Good, 1986). Allerdings fehlt es an empirischen Studien, die Enthusiasmus direkt als Personenmerkmal konzeptualisieren und in Beziehung zum Unterrichtshandeln setzten (Kunter, 2011). Im Rahmen von COACTIV wurde erstmals zwischen tätigkeitsbezogener (Enthusiasmus für das Unterrichten) und fachbezogener intrinsischer Motivation (Enthusiasmus für das Fach Mathematik) unterschieden. Es wurde festgestellt, dass sich der Grad an Enthusiasmus über die Zeit verändern und je nach Kontext variieren kann. Außerdem wirkt sich hoher Enthusiasmus für das Unterrichten positiv auf die Leistungen der Schülerinnen und Schüler aus, während keine klaren Zusammenhänge zwischen Fachenthusiasmus und Schülerleistung festgestellt werden konnten.

Der Begriff *Selbstregulation* ist je nach Kontext unterschiedlich geprägt. Im Rahmen der professionellen Kompetenz von Lehrkräften bezieht sich Selbstregulation auf den Umgang mit den eigenen, von der Lehrkraft wertgeschätzten Ressourcen (z.B. materielle Werte, Selbstwirksamkeitsüberzeugungen, Familienstand, Zeit, Wissen) im beruflichen Kontext (Klusmann, 2011). In der Forschung zur Selbstregulation wird zwischen den Effekten auf die Unterrichtsqualität und auf das berufliche Wohlbefinden unterschieden. Betrachtet man die Merkmale beruflichen Engagements, also die generelle Bereitschaft, Anstrengung und Energie in die Arbeit zu stecken (Investment von Ressourcen), und die Widerstandsfähigkeit, also die Fähigkeit zur Distanzierung von Arbeitsbelangen und den Umgang mit Misserfolg (Erhaltung von Ressourcen), so lassen sich vier verschiedene Typen der Selbstregulation identifizieren: der *Gesundheitstyp*, der *Schontyp* sowie zwei unterschiedliche *Risikotypen A* und *B* (Buchwald & Hobfoll, 2004; Schaarschmidt, Kieschke, & Fischer, 1999; nach Klusmann, 2011). COACTIV konnte diese vier Typen replizieren und Zusammenhänge zum beruflichen Wohlbefinden und der Unterrichtsgestaltung herstellen (Klusmann, 2011).

Der *Gesundheitstyp* zeichnet sich demnach durch hohes Engagement und gleichzeitig hohe Widerstandsfähigkeit aus, was sich positiv sowohl auf das Unterrichtsverhalten als auch auf das berufliche Wohlbefinden auswirkt. Der *Schontyp* kann durch sein niedriges Engagement bei hoher Widerstandsfähigkeit zwar gut mit seinen eigenen Ressourcen bei gleichzeitigem Wohlbefinden haushalten, allerdings leidet hierunter die Unterrichtsqualität. Die beiden Risikotypen A und B zeichnen sich beide durch eine geringe Widerstandsfähigkeit aus, worunter in beiden Fällen das Wohlbefinden leidet. Allerdings erhält der Risikotyp A im Gegensatz zum Risikotyp B aufgrund des hohen Engagements gute Beurteilungen der Unterrichtsqualität, wobei davon auszugehen ist, dass dieses reine Ressourceninvestment nicht dauerhaft aufrechterhalten werden kann. Die Befunde von COACTIV deuten auf eine unterstützende Funktion des beruflichen Enthusiasmus auf das berufliche Wohlbefinden hin, das professionelle Wissen scheint dagegen in keinem Zusammenhang zu beruflicher Erschöpfung oder Arbeitszufriedenheit zu stehen (Klusmann, 2011).

Die motivationalen Orientierungen und die Selbstregulationsfähigkeiten der Lehrpersonen werden im Rahmen dieser Arbeit nur am Rande berücksichtigt, da diese Arbeit die nähere Untersuchung des fachdidaktischen Wissens und des mathematischen Fachwissens als Teilbereiche des professionellen Wissens der Lehrerinnen und Lehrer zum Ziel hat. Diese beiden Facetten des Professionswissens werden deshalb im folgenden Kapitel ausführlich und aus verschiedenen Blickwinkeln erläutert.

4 Inhaltsbezogene Komponenten des professionellen Wissens: Fachdidaktisches Wissen und mathematisches Fachwissen

Shulman (1986) führte unter anderem die Begriffe *pedagogical knowledge* (allgemeines pädagogisches Wissen), *content knowledge* (Fachwissen) und *pedagogical content knowledge* (Fachdidaktisches Wissen) ein (siehe 3.2.1). Diese werden heute allgemein als die Kernkategorien des professionellen Wissens von Lehrerinnen und Lehrern akzeptiert (siehe z.B. Blömeke, Felbrich, Müller, et al., 2008). Die Theorie von Shulman ist allerdings noch fächerübergreifend und muss beim fachdidaktischen Wissen und beim Fachwissen noch für die jeweilige Domäne - hier die Mathematik - spezifiziert werden. Baumert weist in seinem Eröffnungsvortrag der GDM-Tagung 2010 in München darauf hin, dass es weltweit erst drei größere Studien gab, die sich mit der Erfassung des professionellen Wissens der Lehrerinnen und Lehrer befassten (siehe auch Blömeke, Felbrich, Müller, et al., 2008): die COACTIV-Studie (siehe 2.3), die internationale Vergleichsstudie TEDS-M, bzw. deren Vorläuferstudie MT21 (siehe 2.4) sowie die Studien der sogenannten Michigan-Group um Ball et al. (siehe 2.5). Im Folgenden wird für alle drei Arbeitsgruppen die jeweils auf Shulman aufbauende Konzeptualisierung der Begriffe fachdidaktisches Wissen (siehe 4.1) und mathematisches Fachwissen von Lehrerinnen und Lehrern (siehe 4.2) erläutert. Es wird dabei davon ausgegangen, dass fachdidaktisches Wissen und Fachwissen auf theoretischer und empirischer Ebene trennbar sind (Baumert & Kunter, 2011b; Blömeke, Kaiser, & Lehmann, 2008; Blömeke, Kaiser, et al., 2010c). Anschließend werden zwei Konzeptualisierungen zum inhaltsbezogenen Lehrerwissen vorgestellt, die in kleineren Studien erarbeitet wurden und in denen keine Trennung von fachdidaktischem Wissen und mathematischem Fachwissen vorgenommen wird (siehe 4.3). Abschließend wird in diesem Kapitel der Zusammenhang zwischen dem Wissen der Lehrerinnen und Lehrer und ihrem Handeln im Unterricht thematisiert, welcher vielfach als problematisch beschrieben wird (siehe 4.4).

4.1 Fachdidaktisches Wissen (Mathematik)

4.1.1 Fachdidaktisches Wissen bei Shulman

Shulman versteht unter *pedagogical content knowledge* im wesentlichen Wissen über das Vermitteln von Inhalten im Gegensatz zum bloßen Verstehen dieser Inhalte.

> Within the category of pedagogical content knowledge I include, for the most regularly taught topics in one's subject area, the most useful forms of representation of those ideas, the most powerful analogies, illustrations, examples, explanations, and demonstrations – in a word, the ways of representing and formulating the subject that make it comprehensible to others. Since there are no single most powerful forms of representation, the teacher must have at hand a veritable armamentarium of alternative forms of representations, some of which derive from research whereas others originate in the wisdom of practice. Pedagogical content knowledge also includes an understanding of what makes the learning of specific topics easy or difficult: the conceptions and preconceptions that students of different ages and backgrounds bring with them to the learning of those most frequently taught topics and lessons. If those preconceptions are misconceptions, which they so often are, teachers need knowledge of the strategies most likely to be fruitful in reorganizing the understanding of learners, because those learners are unlikely to appear before them as blank slates (Shulman, 1986, S. 9-10).

Shulman betont also einerseits Wissen über verschiedene Möglichkeiten des Verständlichmachens der Inhalte, andererseits stellt er die Bedeutung des Wissens über Schülerkonzepte und Fehlvorstellungen heraus.

4.1.2 Mathematikdidaktisches Wissen bei COACTIV

Im Rahmen der COACTIV-Studie wurde ausgehend von Shulmans fachunabhängiger Konzeptualisierung das fachdidaktische Wissen für das Fach Mathematik fokussiert abgebildet. Dabei wurde der Schwerpunkt auf die kognitive Aktivierung (siehe Kapitel 5) der Schülerinnen und Schüler in einer fachlich gehaltvollen Lernumgebung gelegt, wobei vor allem die mathematikbezogenen Ansätze im Unterricht und weniger das Wissen über das methodische Repertoire für den Unterricht von Interesse war (Krauss et al., 2008). Fachdidaktisches Wissen für das Unterrichtsfach Mathematik wird bei COACTIV durch die folgenden drei zentralen Wissenskomponenten konzeptualisiert:

- Wissen über *mathematikbezogene Schülerkognitionen* (Fehlkonzeptionen, typische Fehler, Strategien) sowie über die Diagnose von Schülerwissen und Verständnisprozessen.
- Wissen über das *Verständlichmachen von mathematischen Inhalten* (multiple Repräsentationsformen und Erklärungsmöglichkeiten)
- Wissen über das didaktische und diagnostische *Potential von Mathematikaufgaben*, Wissen über die kognitiven Anforderungen und impliziten Wissensvoraussetzungen, ihre didaktische Sequenzierung und die langfristige curriculare Anordnung von Stoffen (Baumert & Kunter, 2006; Krauss et al., 2008; Kunter et al., 2011)

Die beiden ersten Komponenten gehen auf Shulman zurück, jedoch bilden sie nur zwei Ecken eines didaktischen Dreiecks (zum didaktischen Dreieck siehe z.B. Reusser, 2009; Zierer, 2012). Die erste Ecke der fachbezogenen Vorstellungen und Überzeugungen der Schülerinnen und Schüler bezieht sich sowohl auf das Vorwissen, als auch auf mögliche Fehler und Schwierigkeiten der Schülerinnen und Schüler, die für verständnisvolles Lernen nutzbar gemacht werden können, sofern die Lehrkraft in der Lage ist, diese zu erkennen, konzeptuell einzuordnen und zu analysieren (Baumert & Kunter, 2011b; Krauss et al., 2008). Auch geeignete Reaktionen auf Schülerantworten und -fehler werden unter diese Kategorie gefasst (Baumert, Blum, & Neubrand, 2002). Die zweite Ecke des didaktischen Dreiecks bilden die spezifisch fachbezogenen Darstellungsaktivitäten und Interventionsmöglichkeiten der Lehrerinnen und Lehrer, die zur Unterstützung der aktiven Wissenskonstruktionsprozesse der Schülerinnen und Schüler dienen. Hierzu gehören vor allem multiple Repräsentationsformen und Erklärungen (Baumert & Kunter, 2011b; Krauss et al., 2008). Die dritte Ecke des didaktischen Dreiecks, welche bei Shulman nicht explizit erwähnt wird, beschreibt das Wissen über mathematische Inhalte. Dies wurde bei COACTIV durch Wissen über das Potential von Aufgaben abgebildet, denn Aufgaben sind ein zentrales Element zur Gestaltung des Mathematikunterrichts durch die Lehrerinnen und Lehrer (siehe 6.1.1). Hierbei steht vor allem das Wissen über den möglichen Beitrag einer Aufgabe zur erfolgreichen Wissenskonstruktion der Schülerinnen und Schüler im Vordergrund (Krauss et al., 2008). Es ist hier aber auch Wissen über die langfristige curriculare Anordnung von Stoffen enthalten, welches bei Shulman (1986) noch als eigene Kategorie des *curricular knowledge* auftauchte, später aber ebenfalls unter das fachdidaktische Wissen gefasst wurde (siehe 3.2.1).

4.1.3 Mathematikdidaktisches Wissen bei TEDS-M

Eine auf den ersten Blick völlig andere Konzeption des fachdidaktischen Wissens, die aber auf den zweiten Blick viele Gemeinsamkeiten mit der Konzeptualisierung des fachdidaktischen Wissens bei COACTIV aufweist, wählte die TEDS-M-Arbeitsgruppe. Im Anschluss an Bromme (1994) und ebenfalls aufbauend auf Shulman (1986) wird bei TEDS-M sowie MT21 mathematikdidaktisches Wissen als derjenige zentrale Bereich aufgefasst, in dem mathematisches Wissen, allgemeine Vorstellungen von Mathematik, Wissen über curriculare Konzeptionen zum Mathematikunterricht, Wissen über unterrichtspraktische Aspekte sowie Wissen über Schülervorstellungen aufeinander bezogen werden. Es wird unterschieden zwischen *Lehr*bezogenen und *Lernprozess*bezogenen Anforderungen (Blömeke, Kaiser, et al., 2010c; Blömeke, Seeber, et al., 2008):

Zu den *Lernprozess*bezogenen Anforderungen, die vor allem während des Unterrichts relevant sind, da sie das unterrichtliche Handeln der Lehrerinnen und Lehrer in der unmittelbaren Interaktion mit den Schülerinnen und Schüler betreffen, zählen:

- Schülerantworten bezüglich kognitiver Niveaus, Komplexität der Struktur sowie eventueller Fehler und Fehlermuster einzuordnen,
- Rückmeldungen geben,
- Angemessen mit Interventionsstrategien zu reagieren,
- Motivieren, bzw. Motivation aufrecht erhalten (Blömeke, Felbrich, & Müller, 2008b).

Die *Lehr*bezogenen Anforderungen stehen vor Beginn des Unterrichts fest und lassen sich wiederum in zwei Komponenten aufteilen:

- Die unterrichtsplanerische Komponente beinhaltet, dass fachliche Inhalte für Schülerinnen und Schüler ausgewählt, begründet, angemessen vereinfacht und unter Gebrauch verschiedener Repräsentationsformen aufbereitet werden müssen.
- Die curriculare Komponente beschreibt Wissen über den Kompetenzaufbau der Schülerinnen und Schüler über die Schuljahre hinweg (Blömeke, Felbrich, & Müller, 2008b).

Die Lernprozessbezogenen Anforderungen stellen eine fachliche Ausformulierung von Shulmans Konzeption dar, sie fügen allerdings die motivationale Komponente hinzu. Auch die erste Komponente der Lehrbezogenen Anforderungen geht deutlich auf Shulmans Konzeptualisierung des fachdidaktischen Wissens zurück, wogegen die zweite Komponente der Lernbezogenen Anforderungen dem curricularen Wissen bei Shulman entspricht.

4.1.4 Mathematikdidaktisches Wissen bei der Michigan-Group

Die Konzeption zum fachdidaktischen Wissen der ‚Michigan Group' geht wie die Konzeptionen von COACTIV und TEDS-M auf Shulman zurück. Allerdings basiert die Konzeption der Michigan Group vor allem auf ihrer Erforschung der Unterrichtspraxis, während die Konzeptionen von COACTIV und TEDS-M vor allem auf theoretischen Überlegungen beruhen. Dies zeigt sich vor allem in der praxisnäheren Ausformulierung der einzelnen Kategorien der Michigan Group.

Ball et al. erklären, dass Lehrerinnen und Lehrer ein spezielles mathematisches Wissen benötigen und nennen dies „mathematical knowledge for teaching (MKT)" (Ball & Bass, 2009, S. 12). Es enthält sowohl Komponenten des fachdidaktischen Wissens, als auch Komponenten des mathematischen Fachwissens (siehe Abbildung 4.1). Diese beiden Facetten des Professionswissens sind innerhalb der Konzeption der Michigan Group deutlich stärker miteinander verwoben als bei COACTIV und TEDS-M. Insbesondere wird an der Darstellung des mathematical knowledge for teaching der Übergang vom fachdidaktischen Wissen zum mathematischen Fachwissen deutlich, der sich vor allem in der Definition des *spezialized content knowledge* zeigt. Dieses wird zwar dem mathematischen Fachwissen zugeordnet, es enthält jedoch viele fachdidaktische Bezüge (siehe 4.2.4). Hier wird die große Bedeutung des Fachwissens deutlich, die die Michigan Group auch für das Wissen der Primarstufenlehrerinnen und -lehrer anzunehmen scheint.

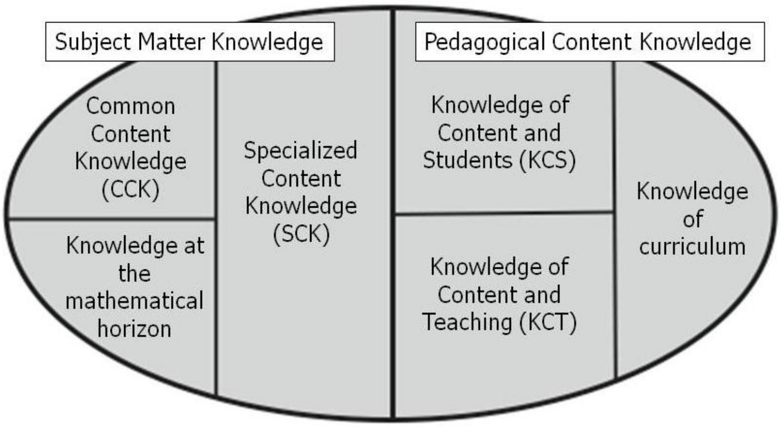


Abbildung 4.1: Konzeption des 'mathematical knowledge for teaching'
(Ball & Bass, 2009, S. 15)

Das fachdidaktische Wissen wird nach Ball et al. (2008) auf oberster Ebene in drei Kategorien eingeteilt, welche jeweils einen starken Bezug zur Mathematik aufweisen: Knowledge of Content and Students, Knowledge of Content and Teaching und Knowledge of Content and Curriculum.

Knowledge of Content and Students kombiniert Wissen über Schülerinnen und Schüler und Wissen über Mathematik. Lehrerinnen und Lehrer müssen:

- vorhersehen, wie Schülerinnen und Schüler denken und wo sie Probleme haben werden,
- interessante und motivierende Beispiele auswählen,
- mögliche Schülerlösungen antizipieren,
- den Schwierigkeitsgrad einschätzen und
- sich entwickelnde und unvollständige Denkprozesse der Schülerinnen und Schüler hören und interpretieren.

Insbesondere müssen Lehrerinnen und Lehrer verbreitete Schülerkonzepte und Fehlvorstellungen kennen (Ball et al., 2008).

Knowledge of Content and Teaching kombiniert Wissen über das Unterrichten selbst und Wissen über Mathematik. Dazu zählt einerseits mathematisches Wissen über die Gestaltung von Unterricht. Lehrerinnen und Lehrer müssen:

- mathematische Inhalte in eine Reihenfolge für den Unterricht bringen,
- Beispiele auswählen, einerseits für den Einstieg, oder aber zur Vertiefung des Wissens,
- geeigneter Repräsentationsformen beurteilen und
- verschiedene Methoden und Vorgehensweisen zur Einleitung von Lernprozessen erkennen.

Auf der anderen Seite betrifft das *Knowledge of Content and Teaching* auch im Unterrichtsverlauf zu treffende Entscheidungen, die zur weiteren Gestaltung des Unterrichts dienen. Lehrerinnen und Lehrer müssen entscheiden:

- welche Schülerbeiträge aufgegriffen und welche ignoriert oder für später aufbewahrt werden,

- wann der Unterricht für erneute Klärung unterbrochen wird und
- wann die nächste Frage oder Aufgabe gestellt wird, um den Lernprozess der Schülerinnen und Schüler voranzubringen.

Insbesondere zählt zum Knowledge of Content and Teaching auch das Wissen über mögliche Konsequenzen der hier getroffenen Entscheidungen (Ball et al., 2008).

Knowledge of Content and Curriculum zählen Ball et al. ebenfalls zum fachdidaktischen Wissen. Es ist aber noch nicht geklärt, ob das curriculare Wissen eine eigene Subkategorie des fachdidaktischen Wissens darstellt, oder ob es ein Teil des Knowledge of Content and Teaching ist (Ball et al., 2008). Zum Knowledge of Content and Curriculum gehört z.B. das Wissen über:

- Bildungsziele,
- Standards,
- Staatliche Vorgaben und
- Klassenstufen, in denen bestimmte Inhalte normalerweise unterrichtet werden (Ball & Bass, 2009; Ball et al., 2008).

4.1.5 Vergleich

Auf den ersten Blick scheinen diese Konzeptionen ganz unterschiedlich aufgebaut zu sein, sie sprechen aber jeweils ähnliche Inhalte an. Bei der Beschreibung der Konzeptualisierung des fachdidaktischen Wissen bei COACTIV wurde schon explizit die Unterteilung der einzelnen Komponenten des fachdidaktischen Wissens in die miteinander wechselwirkenden Ecken eines didaktischen Dreiecks – Lernende, Lehrende und Gegenstand – aufgezeigt (Reusser, 2009). Auch van Dijk und Kattmann (2007) weisen darauf hin, dass sich das fachdidaktische Wissen von Lehrerinnen und Lehrern in diese drei Hauptkomponenten unterteilen lässt.

Vergleicht man die drei vorgestellten Konzeptionen miteinander, so fällt auf, dass sich trotz der stark unterschiedlichen Bezeichnungen auch die einzelnen Komponenten des fachdidaktischen Wissens in den Konzeptualisierungen von TEDS-M und der Michigan Group den drei Ecken des didaktischen Dreiecks zuordnen lassen. So werden beim *Wissen über mathematikbezogene Schülerkognitionen* (COACTIV), bei den *Lernprozessbezogenen Kompetenzen* (TEDS-M) und beim *Knowledge of Content and Students* (Michigan Group) übereinstimmend Wissen über typische Fehler und Fehlermuster, verbreitete Schülerkonzepte und Strategien sowie mögliche Schülerlösungen eingeordnet, womit die Schülerecke des Dreiecks abgebildet wird. Allerdings lassen sich in den Lernprozessbezogenen Anforderungen der TEDS-M-Arbeitsgruppe mit den Interventionsstrategien Aspekte finden, die eher der Lehrerecke des Dreiecks zuzuordnen sind. Hier findet sich auch das *Verständlichmachen mathematischer Inhalte* (COACTIV), die *unterrichtsplanerische Komponente der lehrbezogenen Anforderungen* (TEDS-M) und das *Knowledge of Content and Teaching* (Michigan Group) wieder, in denen der Fokus auf der Aufbereitung der Inhalte vor allem durch Wissen über verschiedene Repräsentationsformen liegt. Bei TEDS-M und der Michigan Group wird in diesen eher lehrerbezogenen Komponenten auch die Auswahl und Sequenzierung fachlicher Inhalte eingeordnet. Die COACTIV-Arbeitsgruppe ordnet die didaktische Sequenzierung der Inhalte dagegen der Komponente *Potenzial von Mathematikaufgaben* zu, die eher die Inhaltsebene des didaktischen Dreiecks beschreibt. Hier wird bei COACTIV, ebenso wie bei der *curricularen Komponente der Lehrbezogenen Anforderungen* (TEDS-M) und beim *Knowledge of Curriculum* (Michigan Group), das Wissen über die curriculare Anordnung von Stoffen, aber auch Wissen über den Kompetenzaufbau und die kognitiven Anforderungen der Aufgaben zusammengefasst.

Abbildung 4.2 zeigt den Vergleich dieser Konzeptionen und die Zuordnung der einzelnen Komponenten des fachdidaktischen Wissens der verschiedenen Arbeitsgruppen zu den Ecken des didaktischen Dreiecks. Die einzelnen Spalten machen die überwiegende inhaltliche Übereinstimmung innerhalb der Komponenten der drei Arbeitsgruppen deutlich. In einigen Fällen sind aber einzelne Aspekte einer anderen Ecke des didaktischen Dreiecks zuzuordnen als die anderen Teilaspekte der entsprechenden Unterkategorie. Beispielsweise gehören die Interventionsstrategien bei TEDS-M eher zur Komponente Wissen über das Verständlichmachen mathematischer Inhalte. Daher ist die Tabelle an den entsprechenden Stellen leicht in die nebenstehende Spalte eingerückt, um diese Überschneidungen zu verdeutlichen.

	Schülerbezogenes Wissen	Wissen über das Verständlichmachen mathematischer Inhalte	Inhaltsbezogenes Wissen
COACTIV	**mathematikbezogene Schülerkognitionen** Fehlkonzeptionen, typische Fehler, Strategien	**Verständlichmachen von mathematischen Inhalten** multiple Repräsentationsformen und Erklärungsmöglichkeiten	**Potential von Mathematikaufgaben** kognitive Anforderungen und implizite Wissensvoraussetzungen, didaktische Sequenzierung und langfristige curriculare Anordnung von Stoffen
Michigan-Group	**Knowledge of Content and Students** verbreitete Schülerkonzepte und Fehlvorstellungen, mögliche Schülerlösungen und den Schwierigkeitsgrad einschätzen	**Knowledge of Content and Teaching** math. Inhalte in Reihenfolge für den Unterricht bringen, Beispiele auswählen, geeignete Repräsentations-formen, instruktionelle Entscheidungen	**Knowledge of Content and Curriculum** Bildungsziele / Standards / Staatliche Vorgaben Klassenstufen, in denen bestimmte Inhalte normalerweise unterrichtet werden
TEDS-M	**Lernprozessbezogene Anforderungen** Schülerantworten bezüglich kognitiver Niveaus, Komplexität der Struktur sowie Fehler und Fehlermuster einordnen Rückmeldungen geben, Interventionsstrategien anwenden	**Lehrbezogene Anforderungen** ***Unterrichtsplanerische Komponente*** fachliche Inhalte auswählen, begründen, angemessen vereinfachen und unter Gebrauch verschiedener Repräsentationsformen aufbereiten	***curriculare Komponente*** Wissen über den Kompetenzaufbau über die Schuljahre hinweg

Abbildung 4.2: Vergleich und Zuordnung der einzelnen Aspekte in den Konzeptionen von COACTIV, TEDS-M und der Michigan Group zu den Komponenten des didaktischen Dreiecks

4.2 Fachwissen

„Fachwissen ist die Grundlage, auf der fachdidaktische Beweglichkeit entstehen kann“ (Baumert & Kunter, 2006, S. 496). Die Ergebnisse der COACTIV-Studie und von MT21 zeigen, dass Fachwissen zwar eine notwendige, aber keine hinreichende Voraussetzung für das fachdidaktische Wissen von Lehrerinnen und Lehrern ist (Baumert & Kunter, 2006; Blömeke, Kaiser, & Lehmann, 2008; Krauss et al., 2008; Kunter et al., 2011). Mietzel (2003) betont, dass nicht allein die Menge der bekannten Fakten, sondern vor allem der Grad der Strukturierung, also die Beziehungen zwischen den einzelnen Wissenselementen, für erfolgreiches Unterrichten von Bedeutung sind.

4.2.1 Fachwissen bei Shulman

Nach Shulman sollten Lehrerinnen und Lehrer neben Faktenwissen vor allem über Wissen über die Strukturen des Faches verfügen. Er beschreibt *content knowledge* wie folgt:

> To think properly about content knowledge requires going beyond knowledge of the facts or concepts of a domain. It requires understanding the structures of the subject matter […]. For Schwab (1978) the structures of a subject include both the substantive and syntactic structure. The substantive structures are the variety of ways in which the basic concepts and principles of the discipline are organized to incorporate its facts. The syntactic structure of a discipline is the set of ways in which truth or falsehood, validity or invalidity, are established. […]. The teacher need not only understand that something is so, the teacher must further understand why it is so, on what grounds its warrant can be asserted, and under what circumstances our belief in its justification can be weakened and even denied. (Shulman, 1986, S. 9)

Lehrkräfte sollten also nach Shulman vor allem über Argumentations- und Begründungskompetenz für die Zusammenhänge innerhalb eines Faches verfügen. Damit weist Shulman trotz seiner fachunabhängigen Sichtweise auf wichtige Aspekte des mathematischen Fachwissens hin, wie sie auch in den Konzeptionen des Fachwissens der drei Arbeitsgruppen, COACTIV, TEDS-M und Michigan Group, berücksichtigt werden (siehe 4.1).

4.2.2 Mathematisches Fachwissen bei COACTIV

Bei COACTIV werden zunächst vier Ebenen des mathematischen Fachwissens unterschieden:

- *mathematisches Alltagswissen* von Erwachsenen, dass auch nach der Schulzeit noch präsent ist,
- *Beherrschung des Schulstoffs* auf dem Niveau eines durchschnittlichen bis guten Schülers am Ende der Schulzeit,
- *tiefes Verständnis der mathematischen Fachinhalte des Curriculums der Sekundarstufe* (z.B. auch ‚Elementarmathematik vom höheren Standpunkt‘ nach Felix Klein (1968), wie sie an der Universität gelehrt wird),
- *reines Universitätswissen*, dass vom Curriculum der Schule losgelöst ist (z.B. Galoistheorie, Funktionalanalysis) (Baumert & Kunter, 2006; Krauss et al., 2008).

Es stellt sich allerdings die Frage, über Fachwissen auf welcher Ebene Mathematiklehrkräfte verfügen sollten, um erfolgreich unterrichten zu können. Die COACTIV-Studie konzentrierte sich beim Fachwissenstest für die Lehrerinnen und Lehrer auf die dritte Ebene des mathematischen Fachwissens: tiefes Verständnis der mathematischen Fachinhalte des Curriculums der Sekundarstufe (Krauss et al., 2011). Auf dieser Ebene wird vor allem das schon von Shulman als so wichtig erachtete Herstellen von Zusammenhängen, Wissen über die Strukturen des Faches sowie Wissen über typische mathematische Argumentationsweisen sichtbar. Insbesondere wird durch die Einordnung bestimmter Strukturen des Schulwissens in allgemeinere mathematische Zusammenhänge das Erkennen von mathematischen Arbeitsweisen anhand elementarer Gegenstände ermöglicht (Baumert & Kunter, 2011b).

4.2.3 Mathematisches Fachwissen bei TEDS-M

In der TEDS-M-Studie bzw. bei MT21 werden inhaltlich ähnliche Unterscheidungen des mathematischen Fachwissens vorgenommen. Diese sind allerdings viel formaler anhand des vorgegebenen Curriculum festgelegt:

- Schulwissen der Sekundarstufe I,
- Schulwissen der Sekundarstufe II,
- Schulmathematik vom höheren Standpunkt aus,
- Universitäres Wissen (Blömeke, Seeber, et al., 2008).

Obwohl diese Unterteilung anhand einer ganz anderen Grundlage festgelegt wurde, entsprechen diese Stufen größtenteils den Stufen der COACTIV-Arbeitsgruppe (Blömeke, Kaiser, et al., 2010c). Beispielsweise ist das mathematische Alltagswissen von Erwachsenen in etwa vergleichbar mit dem Schulwissen der Sekundarstufe I. Insbesondere sehen beide Arbeitsgruppen das Wissen bis zur dritten Stufen, also vertieftes Wissen der Schulmathematik, als für Lehrerinnen und Lehrer relevantes Wissen an. Die Erfassung dieses Wissens auf Stufe 3 stand in beiden Tests im Fokus. Allerdings werden bei TEDS-M im Gegensatz zu COACTIV auch die ersten beiden Facetten des mathematischen Fachwissens getestet. In der MT21-Studie wurde auch die vierte Facette zumindest in reduziertem Umfang erhoben (Blömeke, Kaiser, et al., 2010c; Blömeke, Seeber, et al., 2008).
Aufgrund der relativ groben Unterscheidung von mathematischem und mathematikdidaktischem Wissen wurde von der TEDS-M Arbeitsgruppe eine ergänzende Klassifikation des fachbezogenen professionellen Wissens vorgenommen und bei der Testentwicklung berücksichtigt. Diese unterscheidet das Wissen einerseits nach fachbezogenen *Inhaltsgebieten* (Arithmetik, Algebra, Funktionen, Geometrie und Statistik) sowie nach von den angehenden Lehrerinnen und Lehrern geforderten *kognitiven Aktivitäten* (Algorithmisieren, Problemlösen und Begründen sowie Modellieren) (Blömeke, Seeber, et al., 2008; Tatto et al., 2008). Diese Klassifikation wird im Rahmen dieser Arbeit zwar nicht zur Kategorienbildung für das fachdidaktische Wissen verwendet, die einzelnen Unterpunkte finden sich allerdings in den Kategorien zur kognitiven Aktivierung wieder (siehe 5.1.2) und werden somit im Rahmen dieser Arbeit ebenfalls berücksichtigt.

4.2.4 Mathematisches Fachwissen bei der Michigan-Group

Bei COACTIV und TEDS-M waren die einzelnen Stufen des Fachwissens hierarchisch geordnet, da jeweils die nächsthöhere Stufe die vorhergehenden Stufen umfasst. Dagegen unterscheiden Ball et al. verschiedene Ebenen des Fachwissens, die eher nebeneinander stehen. Sie unterscheiden zwischen den drei Komponenten *Common Content Knowledge, Specialized Content Knowledge* und *Knowledge at the Mathematical Horizon* (Ball et al., 2008) (siehe Abbildung 4.1):
Common Content Knowledge beschreibt mathematisches Wissen und mathematische Fähigkeiten, wie sie auch außerhalb des Mathematikunterrichts genutzt werden. Hierzu zählt vor allem das korrekte Lösen mathematischer Probleme. Dabei bedeutet der Begriff ‚common' nicht, dass jeder dieses Wissen hat, sondern dass dieses Wissen in vielen Bereichen benötigt wird. Diese Wissenskomponente spielt nach Ball et al. eine zentrale Rolle bei der Planung und Durchführung von Mathematikunterricht.
Specialized Content Knowledge beinhaltet mathematisches Wissen und mathematische Fähigkeiten, die ausschließlich zum Unterrichten von Mathematik benötigt werden. Ball et al. (2008) beschreiben diese Komponente des Fachwissens anhand von Beispielen. Lehrerinnen und Lehrer müssen ein dekomprimiertes mathematisches Wissen haben, um zum Beispiel:

- Fehlermuster der Schülerinnen und Schüler zu erkennen,
- einzuschätzen, ob eine ungewöhnliche Lösung generell funktioniert,
- mathematische Ideen zu präsentieren,
- Verbindungen zwischen den Inhalten herzustellen,
- mathematische Erklärungen zu geben und zu evaluieren,
- Merkmale bestimmter Inhalte für Schülerinnen und Schüler sichtbar und lernbar zu machen,
- ... (für weitere Anforderungen, die Specialized Content Knowledge erfordern, siehe Ball et al., 2008, S. 400).

Zur Bewältigung dieser Anforderungen benötigen die Lehrerinnen und Lehrer spezielles mathematisches Verständnis und mathematische Argumentationen, also eine Art Wissen, die in besonderer Weise über das Schülerwissen hinausgeht. Sie müssen zum Beispiel:

- Verschiedene Interpretationen der mathematischen Operationen kennen, die die Schülerinnen und Schüler nicht explizit unterscheiden (z.B. Aufteilen und Verteilen bei der Division);
- Das Stellenwertsystem in einer Art und Weise verstehen, wie es über das Verständnis der meisten Erwachsenen weit hinausgeht;
- Über den Gebrauch der mathematischen Sprache sprechen können (z.B. über den Unterschied zwischen dem mathematischen Begriff ‚Kreis' und der umgangssprachlichen Bedeutung, z.B. der ‚Kreis Ostfriesland', vgl. Vollrath & Roth, 2012);
- Mathematische Ideen erklären und beweisen können (z.B. Multiplikation mit dem Kehrbruch bei Division von Brüchen) (Ball et al., 2008).

Ball et al. (2008) grenzen dies zu dem Wissen der Schülerinnen und Schüler ab, die zwar auch verschiedene Strategien für einzelne Berechnungen kennen sollen, aber beispielsweise nicht alle verschiedenen Möglichkeiten kennen müssen, um die Aufgabe 38÷4 zu veranschaulichen.

Diese Komponente des mathematischen Fachwissens weist eine große Nähe zum fachdidaktischen Wissen auf, wie auch in Abbildung 4.1 zu sehen ist. Somit wird in der Konzeption der Michigan Group ein fließender Übergang vom fachdidaktischen Wissen zum mathematischen Fachwissen deutlich hervorgehoben.

Knowledge at the Mathematical Horizon definieren Ball & Bass (2009) als ein Bewusstsein über die mathematische Landschaft, in die die gegenwärtigen Erfahrungen und Instruktionen eingebettet sind. Hierzu gehören:

1) A sense of the mathematical environment surrounding the current "location" in instruction,
2) Major disciplinary ideas and structures,
3) Key mathematical practices,
4) Core mathematical values and sensibilities (Ball & Bass, 2009, S. 16).

Das Knowledge at the Mathematical Horizon findet sich in dieser Form nicht in den Konzeptionen von COACTIV und TEDS-M wieder, es enthält allerdings Elemente der ‚Schulmathematik vom höheren Standpunkt' (vgl. Klein, 1968), wie sie vor allem auf der dritten Stufe des Fachwissens bei COACTIV und TEDS-M zu finden sind, beispielsweise mathematische Kernideen und Schlüsselmethoden. Darüber hinaus werden bei der Michigan Group die Zusammenhänge innerhalb der Mathematik betont. Die Bedeutung der fachlichen Inhalte und insbesondere der Strukturen des Faches auch für Primarstufenlehrkräfte zeigt sich in dieser Konzeption des Mathematical Knowledge for Teaching ganz deutlich, obwohl rein universitäre Inhalte hier nicht zu finden sind. Offensichtlich schreibt die Michigan Group, ähnlich wie auch COACTIV und TEDS-M, diesen Inhalten keine direkte Bedeutung für die Erfüllung der Anforderungen des Unterrichtens zu.

4.3 Konzeptionen zum mathematikbezogenen Wissen ohne Trennung von fachdidaktischem Wissen und mathematischem Fachwissen

Die bisher beschriebenen Konzeptionen nehmen eine explizite Trennung zwischen fachdidaktischem Wissen und mathematischem Fachwissen vor. Diese ist zwar empirisch möglich, es besteht jedoch Konsens darüber, dass dieses beiden Facetten des Professionswissen stark zusammenhängen (vgl. Krauss et al., 2008; Lindmeier, 2011). Im Folgenden werden zwei Konzeptionen zum mathematikbezogenen Wissen vorgestellt, die im Rahmen kleinerer Studien entwickelt wurden und die keine explizite Trennung zwischen mathematischem Fachwissen und fachdidaktischem Wissen vornehmen. Sie unterscheiden sich daher in der Struktur sehr stark von den in den Abschnitten 4.1 und 4.2 vorgestellten Konzeptionen und sind beispielsweise in der Beschreibung der Kategorien deutlich näher am konkreten Unterrichtshandeln der Lehrerinnen und Lehrer.

4.3.1 Ein Strukturmodell der kognitiven Ressourcen von Lehrkräften nach Lindmeier, Heinze und Reiss

Lindmeier, Heinze und Reiss stellen ein „Strukturmodell zur Modellierung der kognitiven Ressourcen von Lehrkräften“ (Lindmeier et al., 2010, S. 561) vor, welches die Ansätze der drei großen Arbeitsgruppen COACTIV, TEDS-M und Michigan-Group integriert. Dabei baut es ebenfalls auf dem Kompetenzbegriff nach Weinert (2001) auf. Es ist fachunabhängig formuliert und muss für das jeweilige Fachgebiet, hier die Mathematik, spezifiziert werden (Lindmeier, 2011). Lindmeier et al. unterscheiden eine *Basiskomponente*, eine *reflektive* und eine *aktionsbezogene Komponente* der Lehrerkompetenz.

In der *Basiskomponente* wird aufgrund der ohnehin schwierigen Trennung (vgl. Krauss et al., 2008; Lindmeier, 2011) fachdidaktisches und mathematisches Fachwissen zu einer Komponente zusammengefasst. Hier wird zwar die klassische Trennung nach Shulman (1986) nicht mehr deutlich, sie widerspricht dem Modell jedoch auch nicht (Lindmeier et al., 2010). Dieses Modell verzichtet lediglich darauf, zwei zwar empirisch unterscheidbare aber dennoch stark zusammenhängende Bereiche des professionellen Wissens zu trennen (Lindmeier, 2011). Demnach enthält die Basiskomponente unter anderem folgende Aspekte:

- Beherrschung des mathematischen Fachwissens,
- Kenntnisse zugrundeliegender Konzepte und Prinzipien,
- Wissen über typische Schülerfehler,
- Ansätze zum Unterrichten bestimmter Konzepte,
- Wissen über mögliches Vorwissen der Schülerinnen und Schüler und
- curriculares Wissen (z.B. über die Implementation von Inhalten in curricularen Rahmungen) (Lindmeier, 2011, S. 105).

Die *reflektive Komponente* der professionellen Kompetenz beinhaltet sowohl Fähigkeiten zur Reflexion der Sequenzierung von Aufgaben und zur didaktischen Strukturierung von Unterricht, die für die Unterrichtsvorbereitung benötigt werden, als auch Fähigkeiten zur Analyse der Lernprozesse der Schülerinnen und Schüler in der Nachbereitung des Unterrichts (Lindmeier, 2011; Lindmeier et al., 2010). Hierzu zählen unter anderem:

- Beurteilung situationsspezifischer Anforderungen der Aufgaben,
- Überlegungen zu möglichen Behinderungen des erfolgreichen Lernens durch die gewählte Repräsentation des Inhaltes,
- Einschätzung möglicher Schüler- und Lehrerhandlungen,
- Analyse schriftlicher Schülerlösungen bezüglich der mathematischen Korrektheit und dem Auftreten möglicher Fehlvorstellungen,

- kritische Bewertung von Lehrmethoden und Organisationsstrategien und
- Vergleich der eigenen Bewertungen vor und nach dem Unterricht (Lindmeier, 2011, S. 107).

Die *aktionsbezogene Komponente* beschreibt professionelle Anforderungen, die sich beim Unterrichten ergeben, wenn beispielsweise durch Schülerideen oder -fehler herausfordernde Situationen entstehen, die eine spontane, aber fachlich adäquate Reaktion der Lehrkraft erfordern. Diese Anforderungen sind vor allem durch die Notwendigkeit des sofortigen Reagierens gekennzeichnet, weshalb keine tieferen reflektiven Prozesse aktiviert werden können (Lindmeier, 2011; Lindmeier et al., 2010). Die aktionsbezogene Komponente beinhaltet beispielsweise:

- schnelle Analyse von Schülerantworten,
- Spontane Erklärung eines Inhaltes als Antwort auf eine Schülerfrage oder als Reaktion auf entstandene Schwierigkeiten der Schülerinnen und Schüler,
- Auswahl mächtiger Beispiele oder Gegenbeispiele als Reaktion auf eine Schülerfrage,
- spontanes Ausdenken von Schlüsselproblemen, um das Verständnis der Schülerinnen und Schüler im Unterricht zu testen (z.B. auf der Grundlage einer fehlerhaften Schülerlösung, um zu überprüfen, ob der Schüler generell etwas nicht verstanden hat) (Lindmeier, 2011, S. 108).

Lindmeier et al. (2010) vermuten starke Zusammenhänge zwischen diesen drei Komponenten, welche sie auch in einer Machbarkeitsstudie zur Konstruktion eines quantitativen Testinstrumentes zeigen konnten. So scheinen sowohl die reflektive als auch die aktionsbezogene Komponente mit der Basiskomponente zusammenzuhängen. Sie können dabei zeigen, dass sich die aktionsbezogenen Kompetenzen substanziell von den reflektiven Kompetenzen und vom Basiswissen unterscheiden (Lindmeier, 2011; Lindmeier et al., 2010).

4.3.2 Das ‚Knowledge Quartett' von Rowland, Huckstep und Thwaites

Auch Tim Rowland und seine Kollegen von der University of Cambridge in England entwickelten einen theoretischen Ansatz zur Analyse von Unterricht, der sich z.B. stark von der Theorie von Ball et al. unterscheidet (Rowland, 2008). Dieser Ansatz diente in erster Linie nicht der Erforschung des professionellen Wissens der Lehrerinnen und Lehrer. Er wurde für die Lehrerausbildung entwickelt, um Unterrichtsbeobachtungen zu ermöglichen, die sich vor allem auf die inhaltsbezogenen Aspekte, also das fachdidaktische Wissen und das mathematische Fachwissen der Lehrerinnen und Lehrer, konzentrieren. Hierzu analysierten Rowland et al. (2005) 24 Unterrichtsvideos sowie die dazugehörigen Unterrichtsplanungen angehender Lehrerinnen und Lehrer um herauszufinden, auf welche Weise ihr mathematisches Fachwissen und ihr fachdidaktisches Wissen in der Unterrichtspraxis sichtbar werden. Rowland et al. (2005) bauen dabei theoretisch auch auf Shulman auf, aber in den von ihnen induktiv entwickelten Kategorien zur Analyse von Unterricht lassen sich das mathematische Fachwissen und das fachdidaktische Wissen ebenso theoretisch nicht trennen, wie verschiedene Komponenten des fachdidaktischen Wissens. Sie unterscheiden vielmehr verschiedene Situationen, in denen *Mathematical Knowledge for Teaching* zum Vorschein kommt, die sie zu vier Kategorien, *foundation, transformation, connection* und *contingency,* dem sogenannten „Knowledge Quartett" (Rowland, 2008, S. 288; Rowland et al., 2005), zusammenfassen:
Foundation beschreibt im Gegensatz zu den anderen drei Kategorien verinnerlichtes Wissen, unabhängig davon, ob dieses Wissen gezielt eingesetzt wurde. Dazu gehören Wissen und auch Beliefs über:

- die Bedeutung und Beschreibung relevanter mathematischer Konzepte und Beziehungen zwischen diesen,
- verschiedene Faktoren, die aus Sicht der Unterrichtsforschung bedeutsam für das Lehren und Lernen von Mathematik sind,
- das Wesen der Mathematik und die Bedeutung des Mathematikunterrichts (Rowland et al., 2005, S. 260-261).

Transformation bezeichnet das Handlungswissen, das Lehrerinnen und Lehrer in Unterrichtsplanung und -durchführung nutzen, um das eigene Fachwissen für die Schülerinnen und Schüler lernbar zu machen. Hierzu gehört der Gebrauch geeigneter Analogien, Illustrationen, Erklärungen und Demonstrationen. Insbesondere lassen sich drei Möglichkeiten für die Auswahl von Beispielen unterscheiden:

- für den Aufbau von mathematischen Konzepten, Prozeduren oder bedeutenden Begriffen,
- um typische Fehlvorstellungen aufzudecken und zu beseitigen,
- zum Beweis (generelles Beispiel) oder zur Widerlegung (Gegenbeispiel) von mathematischen Vermutungen (Rowland et al., 2005, S. 261-262).

Connection beschreibt Handlungswissen darüber, wie Lehrerinnen und Lehrer in Unterrichtsplanung und -durchführung verschiedene mathematische Inhalte innerhalb einer Unterrichtsstunde oder über mehrere Unterrichtsstunden hinweg in einen stimmigen Zusammenhang bringen und dabei:

- Verbindungen zwischen unterschiedlichen Bedeutungen und Beschreibungen bestimmter Konzepte oder zwischen alternativen Repräsentationsmöglichkeiten dieser Konzepte und Ausführungen von Prozeduren herstellen,
- die relative Komplexität und die kognitiven Anforderungen der mathematischen Konzepte und Prozeduren bei der Anordnung der Inhalte (insbesondere bei der Auswahl von Aufgaben) berücksichtigen (Rowland et al., 2005, S. 262-263).

Contingency bezeichnet Wissen über Interaktion, das sich in der Fähigkeit der Lehrerinnen und Lehrer zeigt, schnell und angemessen auf Beiträge der Schülerinnen und Schüler während des Unterrichts zu reagieren. Gelegentlich zeigt sich dieses Wissen in der Bereitschaft der Lehrkraft, von der geplanten Vorgehensweise abzuweichen und stattdessen einen unerwarteten Schülerbeitrag weiterzuentwickeln, um:

- diesem einen Schüler besonders zu helfen, oder
- einen besonders fruchtbaren Zugang für andere Schüler zu schaffen (Rowland et al., 2005, S. 263-264).

Obwohl das Knowledge Quartett vor allem für die Lehrerausbildung entwickelt wurde, eignen sich die hier vorgestellten Kategorien in gewisser Weise auch für die Erforschung des professionellen Wissens von Lehrerinnen und Lehrern anhand von Unterrichtsbeobachtungen (siehe 6.2).

Vergleich

In den Ansätzen von Lindmeier et al. sowie Rowland et al. sind die Kategorien der drei Arbeitsgruppen COACTIV, TEDS-M und Michigan Group wiederzufinden. Allerdings werden sie hier ganz anders strukturiert, unter anderem wird die Trennung von fachdidaktischem Wissen und mathematischem Fachwissen aufgehoben. Die Konzeption von Rowland et al. weist dabei viele Übereinstimmungen mit dem Ansatz von Lindmeier et al. auf. Die dort benannte Basiskomponente entspricht im Großen und Ganzen der Kategorie foundation (siehe 4.3.1), da in beiden Kategorien sowohl Elemente des Fachwissens als auch des fachdidaktischen

Wissens zusammengefasst werden. Diese werden auch bei den Arbeitsgruppen COACTIV, TEDS-M und Michigan Group beschrieben (siehe 4.1 und 4.2), allerdings zählen Rowland et al. hier auch die Beliefs hinzu. Die Kategorien transformation und connection enthalten vor allem Elemente der reflektiven Komponente nach Lindmeier et al. (siehe 4.3.1), die ebenfalls in den Konzeptionen der anderen Arbeitsgruppen zu finden sind und auch bei Shulman benannt werden (siehe 4.1 und 4.2). Die Kategorie contingency entspricht ziemlich genau der aktionsbezogenen Komponente von Lindmeier et al. Außerdem lassen sich teilweise auch Aspekte der aktionsbezogenen Komponente in den Konzeptionen von COACTIV, TEDS-M und der Michigan Group wiederfinden. Insgesamt stellen alle hier vorgestellten Konzeptionen das fachdidaktische Wissen und das mathematische Fachwissen als zwei zentrale Komponenten des professionellen Wissens heraus.
Sowohl die Basiskomponente als auch die reflektive Komponente des Lehrerwissens nach Lindmeier (2011) wurden in den Fragebögen der drei großen Studien, COACTIV, TEDS-M und den Studien der Michigan Group, erfasst. Dagegen konnte die aktionsbezogene Komponente des Professionswissens anhand der schriftlichen Tests nicht beurteilt werden. Lediglich die Ergänzung des COACTIV-Fragebogens durch einen computergestützten Speed-Test (Krauss & Brunner, 2011) und die bisher nicht ausgewertete Fortführung von auf Video gezeigten Unterrichtsszenen (Bruckmaier, in Vorbereitung) lassen Rückschlüsse auf die aktionsbezogene Komponente des Lehrerwissens zu (siehe 2.3). Aber auch wenn die Studien von Lindmeier et al. sowie Rowland et al. die aktionsbezogene Komponente des Lehrerwissens explizit mit einbeziehen, können die Ergebnisse dieser Studien noch nicht hinreichend erklären, wie das theoretische Wissen und das Handeln der Lehrerinnen und Lehrer im Unterricht zusammenhängen.

4.4 Vom Wissen zum Handeln

Viele Studien und Autoren weisen drauf hin, dass der Übergang vom Wissen zum Handeln[3] von Lehrerinnen und Lehrer problematisch ist (z.B. Helmke, 2009; Neuweg, 2002; Oser, 1997). Leuchter (2009) analysierte in ihrer Dissertation die bisherige Forschungslage zum Zusammenhang zwischen Wissen und Handeln von Lehrpersonen im Unterricht. Sie benennt mehrere Studien, die auf einen Einfluss des fachdidaktischen Wissens und des Fachwissens auf das Unterrichtshandeln der Lehrerinnen und Lehrer hinweisen. Allerdings merkt sie auch an, dass die bisherige Forschungslage noch eher inkonsistente Ergebnisse hervorgebracht hat und führt dies darauf zurück, dass die Erfassung verschiedener Komponenten des Lehrerwissens methodisch schwierig ist, da ein Großteil des handlungsleitenden Wissens implizit vorliegt (Leuchter, 2009). Wahl (2001) spricht sogar von der „Kluft zwischen Wissen und Handeln“ (Wahl, 2001, S. 157), da empirische Studien zeigen konnten, dass die im Studium und im Referendariat erworbenen didaktischen Theorien und Leitlinien im Laufe des Berufsalltags fast völlig verschwinden.

Handlungstheoretischer Erklärungsversuch nach Wahl

Wahl beschreibt das Handeln von Lehrpersonen als Antwort auf im Berufsalltag immer wiederkehrende Anforderungen, wie z.B. das Vorbereiten von Unterricht, das Unterrichten selbst, aber auch den Umgang mit Kolleginnen und Kollegen sowie den Eltern. Er erklärt das Handeln in drei Teilstrukturen: Das Bilden von *Situations-Prototypen*, das Bilden von *Handlungs-Prototypen* und die *Zuordnung von Situations- und Handlungs-Prototypen*.

[3] Häufig wird auch zwischen ‚Wissen‘ und ‚Können‘ der Lehrpersonen unterschieden (siehe z.B. Neuweg, 2011)

Die Bildung von *Situations-Prototypen* ermöglicht es den Lehrpersonen, schnell und souverän auf Anforderungen zu reagieren, da sie die aktuelle Situation nicht mehr in allen Einzelheiten analysieren müssen, sondern auf ähnliche, bereits im Detail durchdachte Problemsituationen zurückgreifen können. Die Situationsanalyse beschränkt sich dann auf den Vergleich mit der bereits erlebten Situation. Unter *Handlungs-Prototypen* versteht Wahl „kleine, grobe ‚Drehbücher'"(Wahl, 2001, S. 159), die in wiederkehrenden Situationen ein zielsicheres und effizientes Handeln ermöglichen, da die Handlungsmöglichkeiten nicht in jeder Situation völlig neu erfunden werden müssen. Durch die *Zuordnung von Situations- und Handlungs-Prototypen* können Lehrerinnen und Lehrer beim Erkennen einer typischen Situation fast zeitgleich mehrere bewährte Handlungsoptionen abrufen. In empirischen Studien konnte Wahl zeigen, dass größtenteils eine oder zwei und maximal sechs Handlungsalternativen zu prototypischen Situationen vorliegen. Außerdem erwiesen sich die gebildeten Prototypen und deren Zuordnungen als äußert stabil. Wahl folgert daraus, dass für eine Veränderung des Lehrerhandelns durch Fortbildungen eine Änderung der Handlungsprototypen und deren Situationszuordnungen anzustreben ist. Dies ist allerdings schwierig, da es sich hier um überwiegend implizite, also unbewusst ablaufende, Vorgänge handelt (Wahl, 2001).
Wahl beschreibt hier zwar, wie sich die Handlungen von Lehrpersonen strukturieren lassen, allerdings setzt er dies nicht in Beziehung zum theoretischen Wissen der Lehrerinnen und Lehrer. Er merkt lediglich an, dass sich die Handlungs-Prototypen durch die Vermittlung von Expertenwissen, verknüpft mit individueller Auseinandersetzung mit diesem Expertenwissen, ändern lassen (Wahl, 2001). Im Gegensatz dazu beschränkt sich Neuweg (2011) auf die Beschreibung verschiedener Wissensebenen, um das Handeln der Lehrerinnen und Lehrer zu erklären.

Ebenen des Wissens nach Neuweg

Neuweg (2011) beschreibt drei verschiedene Ebenen des Wissens von Lehrpersonen (siehe Abbildung 4.3). Die erste Ebene bezeichnet mehr oder weniger systematisches Wissen, das vor allem in der Ausbildung erworben wird, aber noch weit vom Können entfernt ist. Neuweg bezeichnet dieses Wissen auch als „Wissen im Buch" (Neuweg, 2011, S. 452). Die zweite Ebene betrifft die kognitiven Strukturen von Lehrerinnen und Lehrern und wird von Neuweg auch als „Wissen im Kopf" (Neuweg, 2011, S. 452) bezeichnet. Dieses Wissen ist einerseits Ergebnis von Lernen, dient aber auch als innere Grundlage für Verhalten. Die Grenzen zu den anderen beiden Wissensbereichen sind deshalb unscharf, insbesondere auch, da ein Großteil dieses Wissens nicht explizit sondern implizit vorliegt. Abbildung 4.3 zeigt, dass sowohl das „Wissen im Buch" als auch das „Wissen im Kopf" vom Lernen durch Erfahrung beeinflusst werden. Das „Können", also die Umsetzung des Wissens in Handlungen, beschreibt nach Neuweg die dritte Ebene des Wissens. Dieses Wissen muss aber nicht notwendigerweise auch verbalisiert werden können, es lässt sich aber aus Handlungsepisoden verstehend rekonstruieren, ist dann aber als Wissen des Forschers über das Können der Lehrkraft zu betrachten (Neuweg, 2002, 2011).
Neuweg führt weiterhin aus, dass sich das ‚Wissen im Kopf' vor allem durch Befragung und situierte Aufgaben, aber auch durch Analysen von Denkprozessen, insbesondere im Rahmen der Planung von Unterricht oder durch stimulated recall, erfassen lässt. Das fachdidaktische Wissen lasse sich außerdem als ‚Können' über Unterrichtsbeobachtungen oder sehr unterrichtsnahe Problemstellungen erfassen (Neuweg, 2011). Im Rahmen der COACTIV-Studie wurde beispielsweise durch unterrichtsnahe Aufgaben, die häufig auch in Unterrichtskontexte eingebettet waren, versucht, Wissen auf den Ebenen 2 und 3 zu erheben.

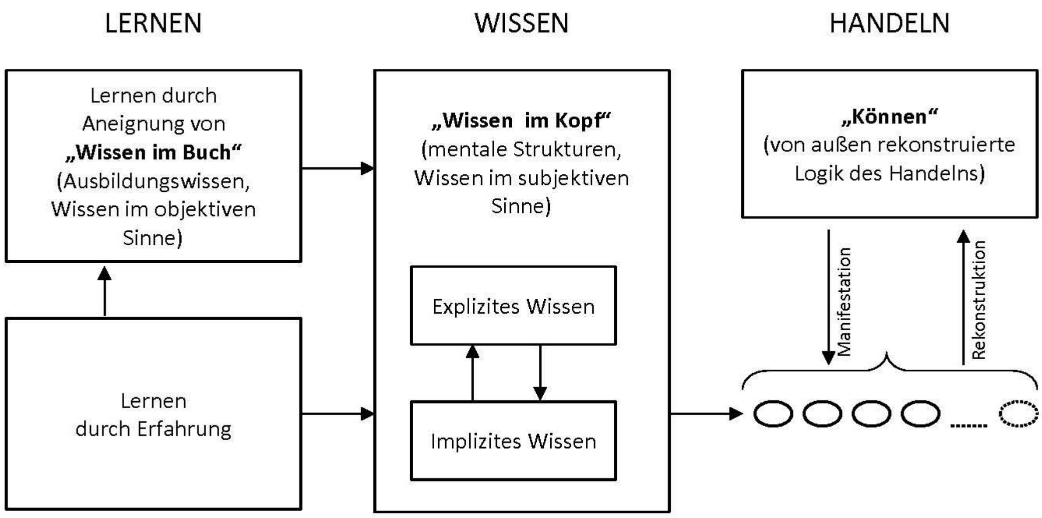


Abbildung 4.3: Ebenen des Lehrerwissens (nach Neuweg, 2011, S. 453)

Trotz dieses Schwerpunktes auf dem Wissen der Lehrerinnen und Lehrer, ist sich Neuweg durchaus bewusst, dass sich das Handeln nicht nur auf Grundlage des Wissens vollzieht. Er erinnert an Bromme (1992), der darauf hinweist, dass das Können der Lehrerinnen und Lehrer „nicht allein durch das Konstrukt des Wissens zu beschreiben und zu erklären [ist]. […] Das beobachtbare Handeln von Experten ist offensichtlich reicher als das Wissen (im kognitiven Sinne), das ihm zugrunde liegt“ (Bromme, 1992, S. 133, 138). Dies wird auch von Tenorth (2006) unterstützt, der insbesondere die Verwendung des Begriffs professioneller Schemata anstelle des Wissensbegriffs für die Beschreibung des Lehrerhandelns vorschlägt.

Professionelle Handlungsschemata nach Tenorth

Tenorth (2006) weist darauf hin, dass das Wissen eine wichtige Bedeutung für das Unterrichten hat. Das Unterrichten lasse sich aber nicht verstehen, wenn man das Wissen alleine betrachtet, da noch vielfältige andere Faktoren eine Rolle spielen. Dies spiegele sich auch im Kompetenzbegriff wider (siehe z.B. Abbildung 3.5), der aber ähnlich wie der Begriff des Wissens nicht einheitlich definiert ist (siehe hierzu Weinert, 2001). Tenorth schlägt in Abgrenzung zum Wissens und zum Kompetenzbegriff den Begriff der „professionellen Schemata“ (Tenorth, 2006, S. 589) vor. Professionelle Schemata integrieren das Wissen und insbesondere die Verarbeitung von Erfahrung. Sie enthalten auch operative Routinen, die es den Lehrerinnen und Lehrern ermöglichen, in problemhaltigen Situationen teilweise auf eine reflektierende Analyse des Einzelfalls zu verzichten und stattdessen auf bewährte Schemata zurückzugreifen. Tenorth betont aber, dass sich diese Muster des Handelns nicht auf bloße Routinen reduzieren lassen (Tenorth, 2006).
Hier werden einerseits Parallelen zu den Situations- und Handlungs-Prototypen von Wahl deutlich. Andererseits bauen die vorgeschlagenen Schemata ähnlich wie die verschiedenen Ebenen des Wissens von Neuweg auf erlerntem Wissen und auf Erfahrungen auf. Die verschiedenen Aspekte der bisherigen Konzeptionen werden im Konzept der Handlungskompetenz von Weinert integriert.

Konzept der Handlungskompetenz nach Weinert

Weinert (2001) beschreibt Handlungskompetenz von Lehrerinnen und Lehrern als systematische Verknüpfung von intellektuellen Fähigkeiten (also Wissen im engeren Sinne) mit spezifischen kognitiven Fähigkeiten, Fertigkeiten und Kenntnissen sowie Strategien und Routinen, die für die Bewältigung der Anforderungen nötig sind. Weinert fügt aber der Handlungskompetenz eine motivationale Komponente hinzu. Er zeigt damit auf, dass das tatsächliche Lehrerhandeln im Unterricht nicht nur von den kognitiven Möglichkeiten der Lehrperson, sondern auch von ihrer Motivation abhängt. Das Konzept von Weinert ist aber sehr allgemein gehalten und beschreibt nicht, wie Handlungskompetenz erworben wird oder wie die einzelnen Aspekte der Handlungskompetenz miteinander verknüpft werden.

Vergleich

Die hier vorgestellten Erklärungsversuche für den Zusammenhang zwischen Wissen und Handeln der Lehrerinnen und Lehrer unterscheiden sich vor allem in der Begriffswahl, aber auch in der Betonung des Wissens, stark voneinander. Hier wird deutlich, dass es sich beim Übergang vom Wissen zum Handeln um ein sehr komplexes Feld handelt, das bisher kaum erforscht worden ist. Außerdem sind die hier vorgeschlagenen Erklärungsversuche fachunabhängig. Im Rahmen dieser Arbeit soll daher versucht werden, zumindest in Einzelfällen den Zusammenhang zwischen dem Wissen und dem Handeln der Lehrpersonen aus mathematikdidaktischer Sicht zu analysieren. Dabei werden die in den Abschnitten 4.1 und 4.3 dargestellten Aspekte des fachdidaktischen Wissens zu einem Kategoriensystem zur Analyse des fachdidaktischen Wissens und des mathematischen Fachwissens vereint (siehe 6.2.1). Die Erläuterungen in Abschnitt 4.4 machen aber deutlich, dass eine bloße Betrachtung des Wissens der Lehrerinnen und Lehrer nicht ausreichend ist. Zur Einschätzung der Qualität der Handlungen und der Umsetzung des fachbezogenen Wissens der Lehrpersonen sind weitere Kategorien nötig, die insbesondere die Qualität des Unterrichts als Resultat der Handlungen der Lehrerinnen und Lehrer in den Blick nehmen. Im Rahmen dieser Untersuchung wird das Konzept der kognitiven Aktivierung als eine wichtige Qualitätsdimension von Unterricht gewählt, um den Zusammenhang zwischen dem Wissen und dem Handeln der Lehrerinnen und Lehrer bei der didaktischen Strukturierung von Unterricht herzustellen. Dieses Konzept der kognitiven Aktivierung wird im nächsten Kapitel ausführlich dargestellt.

5 Kognitive Aktivierung

Der Frage ‚Was ist guter Unterricht?‘ gehen Didaktiker unterschiedlicher Fachrichtungen, Pädagogen und Psychologen bereits seit vielen Jahren nach (für einen kurzen Überblick und weiterführende Literatur siehe z.B. Helmke, 2009; oder Klieme, Lipowsky, et al., 2006). Im Ergebnis werden häufig Listen oder Kataloge von Schlüsselmerkmalen, zentralen Prinzipien oder Qualitätsbereichen aufgestellt, die allerdings keine einheitliche empirische Basis aufweisen (Helmke, 2009).

Im Rahmen der TIMSS-Video-Studie wurden basierend auf umfangreichen Analysen von Mathematikunterricht drei Dimensionen von Unterrichtsqualität herausgearbeitet (Klieme, Schümer, et al., 2001), die für die Leistungsentwicklung der Schülerinnen und Schüler im Sinne eines konzeptuellen Verständnisses sowie für die Motivation der Lernenden förderlich sind:

1. strukturierende, klare und störungspräventive Unterrichtsführung mit viel effektiv genutzter Lernzeit (time on task);
2. unterstützendes, schülerorientiertes Sozialklima mit individueller Bezugsnormorientierung, angemessenem Lerntempo und angemessenem Leistungsdruck;
3. kognitive Aktivierung der Schülerinnen und Schüler, die z.B. durch offene Aufgaben und einen diskursiven Umgang mit Fehlern gekennzeichnet ist (Klieme, Lipowsky, et al., 2006).

Während die ersten beiden Dimensionen thematisch den Erziehungswissenschaften zuzuordnen sind (vgl. Helmke, 2009), ist aus Sicht der Mathematikdidaktik vor allem die Dimension der kognitiven Aktivierung von Bedeutung.

„Kognitive Aktivierung bedeutet […], herausfordernde und kognitiv anregende Lerngelegenheiten zu bieten“ (Dubberke, Kunter, McElvany, Brunner, & Baumert, 2008, S. 195). Diese Definition zeigt den Zusammenhang der kognitiven Aktivierung mit den Lerngelegenheiten und damit auch mit dem Lerngegenstand der Schülerinnen und Schüler, hier die Mathematik. Im Pythagoras-Projekt (siehe 2.6) konnte zwar nur ein schwacher Zusammenhang zwischen kognitiver Aktivierung und individueller Schülerleistung nachgewiesen werden (Hugener, 2008), dagegen zeigen andere Studien einen signifikanten Einfluss der kognitiven Aktivierung auf die Leistungen der Schülerinnen und Schüler (Klieme, Schümer, et al., 2001; Kunter et al., 2011). Einen Hinweis auf den positiven Einfluss der kognitiven Aktivierung liefert beispielsweise die Betrachtung des japanischen Mathematikunterrichts, der verstärkt als kognitiv aktivierend angesehene Unterrichtsmerkmale (z.B. das Lösen anspruchsvoller und komplexer Aufgaben, Anknüpfung am Vorwissen der Schülerinnen und Schüler, selbständiges Entdecken, Austauschen und Besprechen von Lösungsideen, -methoden) beinhaltet (Hugener, Pauli, & Reusser, 2007; Klieme & Bos, 2000). Die japanischen Schüler erzielen bei internationalen Vergleichsstudien (z.B. PISA, siehe PISA-Konsortium Deutschland, 2004, 2007) durchgehend sehr gute Ergebnisse. Im Gegensatz dazu zeigen die deutschen Schülerinnen und Schüler nur unbefriedigende Leistungen. Als einen Grund hierfür sehen Bildungsforscher und Mathematikdidaktiker den in Deutschland vorherrschenden kleinschrittig fragend-entwickelnden Erarbeitungsunterricht (Hugener, 2006; Klieme, Schümer, et al., 2001). Dieser zeichnet sich gerade nicht durch kognitiv aktivierende Unterrichtsmerkmale, sondern im Gegensatz dazu durch ein rezeptives Lernverständnis aus (Klieme & Bos, 2000; J. Neubrand, 1998).

Auch in anderen Auflistungen von Kennzeichen für Unterrichtsqualität als der hier vorgestellten (Klieme, Lipowsky, et al., 2006; s.o.) wird die Dimension der kognitiven Aktivierung aufgegriffen (z.B. Helmke, 2009) oder es finden sich Teilaspekte von kognitiver Aktivierung (siehe 5.1.2) in mehreren Dimensionen der Unterrichtsqualität wieder (z.B. H. Meyer, 2004). Es gibt bisher aber keine einheitliche Begriffsbestimmung (Leuders & Holzäpfel, 2011), die obige Definition stellt nur eine von mehreren Möglichkeiten der Beschreibung des Konstrukts der kognitiven Aktivierung dar. Um das dieser Arbeit zugrundeliegende Konzept der kognitiven Aktivierung umfassend darzustellen, wird im Folgenden zunächst die kognitive Aktivierung allgemein aus Sicht der pädagogischen Psychologie beschrieben (siehe 5.1.1), woraufhin das Konzept für die Mathematikdidaktik spezifiziert wird (siehe 5.1.2). Hierzu werden zunächst kognitiv aktivierende Elemente von Mathematikaufgaben vorgestellt (siehe 5.2). Diese werden anschließend durch die Beschreibung kognitiv aktivierender Elemente von Unterricht ergänzt, die nicht unbedingt mit dem Einsatz von Aufgaben im Unterricht zusammenhängen (siehe 5.3).

5.1.1 Kognitive Aktivierung aus Sicht der pädagogischen Psychologie

In der pädagogischen Psychologie wird die kognitive Eigenaktivität von verschiedenen Autoren als Voraussetzung für den Wissenserwerb genannt. Shuell (1988) beschreibt vier Merkmale, die kognitive Vorgänge aufweisen können: Sie sind *aktiv* (zur Verarbeitung der eingehenden Informationen müssen Schülerinnen und Schüler etwas tun), *konstruktiv* (neue Informationen müssen aufgearbeitet und mit anderen Informationen in Beziehung gesetzt werden), *kumulativ* (neues Wissen baut auf vorhandenes auf, bzw. das bereits Bekannte wird zum Wissensaufbau genutzt) und *zielgerichtet* (Lernen ist am erfolgreichsten, wenn das Ziel gegenwärtig ist). In diesem Sinne kann kognitive Aktivierung als Anregung kognitiver Prozesse verstanden werden, in denen Schülerinnen und Schüler selbst aktiv Wissen konstruieren. Sie bauen mentale Konstruktionen auf, indem sie bewusst neue Informationen in bestehende kognitive Strukturen integrieren. Dies entspricht dem Verständnis von ‚Lernen' in modernen pädagogisch-psychologischen Lerntheorien (z.B. Brünken & Seufert, 2006; Mietzel, 2003). Dabei stellt die kognitive Aktivität der Lernenden eine zentrale Voraussetzung für einen gelingenden Wissenserwerb dar (Drollinger-Vetter & Lipowsky, 2006a). Insbesondere sind aber die internen Konstruktionsprozesse individuell verschieden (Sjuts, 1999).
Auch Hasselhorn und Gold (2006) betonen die Bedeutung der konstruktiven Eigenaktivität der Schülerinnen und Schüler für erfolgreiches Lernen. Herausfordernd sind dabei vor allem Lerngelegenheiten, die die von Wygotski definierte ‚Zone der nächstmöglichen Entwicklung' betreffen (nach Mietzel, 2003). Diese Zone beschreibt das potenzielle Wissen der Schülerinnen und Schüler, welches sie mit Hilfe anderer erreichen könnten. Sie ist von der Lernbereitschaft, welche definiert wird als das aktuelle Können eines Kindes, zu unterscheiden. Insbesondere wird in Weiterentwicklungen von Wygotskis Vorstellungen darauf hingewiesen, dass die Zone der nächstmöglichen Entwicklung vom jeweils verfügbaren Wissen in einem Lernbereich abhängt (Mietzel, 2003).
In der pädagogischen Psychologie wird insbesondere die Bedeutung des strukturierten Aufbaus von Wissen, z.B. um wichtige Ideen herum, betont, denn je besser das Wissen vernetzt ist, desto schneller kann es abgerufen und angewendet werden (Brophy, 1999; Krause & Stark, 2006; Mietzel, 2003). Weinert spricht in diesem Zusammenhang von „intelligentem Wissen" (Weinert, 1998, S. 115), welches er als „wohlorganisiertes, disziplinär, interdisziplinär und lebenspraktisch vernetztes System von flexibel nutzbaren Fähigkeiten, Fertigkeiten, Kenntnissen und metakognitiven Kompetenzen" (Weinert, 1998, S. 115) definiert.

5.1.2 Kognitive Aktivierung in der Mathematikdidaktik

Die bisherigen Ausführungen waren allgemein und müssen noch für die Mathematikdidaktik adaptiert werden. Dies wird in der Forschung auf unterschiedliche Art und Weise operationalisiert. Einen Überblick über verschiedene Konzeptualisierungen in der Mathematikdidaktik, in denen die kognitive Aktivierung eine Rolle spielt, geben Leuders und Holzäpfel (2011). Sie weisen darauf hin, dass kognitiv aktivierender Unterricht in der Forschung grundsätzlich auf drei verschiedene Arten operationalisiert wird: Beispielsweise im Rahmen von COACTIV wird die kognitive Aktivierung anhand von Merkmalen der im Unterricht eingesetzten Aufgaben bewertet, während zum Beispiel im Pythagoras-Projekt eine Einschätzung der kognitiven Aktivierung anhand beobachtbarer Unterrichtsmerkmale vorgenommen wird. Es gibt aber auch Studien, die das kognitive Aktivierungsniveau des Unterrichts anhand von Selbsteinschätzungen von Lehrerinnen und Lehrern sowie Schülerinnen und Schülern beurteilen. Insbesondere der dritte Ansatz ist aber als problematisch einzuschätzen, da bei der Selbstwahrnehmung das Konzept der kognitiven Aktivierung mit dem Schwierigkeitsgrad des Unterrichts verwechselt werden kann (Leuders & Holzäpfel, 2011). Im Folgenden werden deshalb die ersten beiden Ansätze näher beschrieben.

5.2 Kognitiv aktivierende Aufgaben

Aufgaben sind nach Bromme, Seeger und Steinbring (1990) für die Lehrerinnen und Lehrer ein entscheidendes Mittel zur Gestaltung des Mathematikunterrichts und damit auch der Unterrichtsqualität, da Mathematiklernen zum großen Teil anhand von Aufgaben stattfindet (Bromme et al., 1990; siehe auch Silver & Mesa, 2011). Das Vorkommen von Aufgaben mit angemessenem kognitiven Potenzial ist eng mit der kognitiven Aktivierung der Schülerinnen und Schüler, und somit auch mit den möglichen Lerngelegenheiten, verbunden (Jordan et al., 2006). „Aufgaben sind also die Träger der kognitiven Aktivität der Schüler“ (Jordan et al., 2006, S. 13). Aus diesem Grund wurden bei COACTIV zur Einschätzung des kognitiven Aktivierungsniveaus des Unterrichts die von den Lehrerinnen und Lehrern eingesetzten Aufgaben analysiert. Dazu wurden Auswertungskategorien erarbeitet, die in vier Dimensionen zusammengefasst werden können:

A. *Mathematische Stoffgebiete* als inhaltlicher Rahmen, insbesondere stoffliche Breite und Grad der Vernetzung zu zurückliegenden Inhalten, also der curriculare Zusammenhang des in der Aufgabe benötigten mathematischen Wissens.
B. *Typen mathematischen Denkens* als kognitiver Rahmen, insbesondere die Unterscheidung, ob prozedurales oder begriffliches Denken überwiegt oder ob eher der Abruf von Faktenwissen erforderlich ist.
C. *Kognitive Elemente des Modellierungskreislaufs*, insbesondere die Notwendigkeit inner- und außermathematischer Modellierung, die Aktivierung mathematischer Grundvorstellungen und die Erfordernis mit mathematischen Texten umzugehen, mathematische Darstellungen zu gebrauchen und mathematisch zu argumentieren.
D. *Lösungsraum und Repräsentationsmodi*, insbesondere die Anzahl der eingeforderten Lösungswege (vgl. Jordan et al. 2008).

Die einzelnen Aspekte dieser vier Dimensionen fördern die kognitive Aktivität der Lernenden und haben einen positiven Einfluss auf die Lernwirksamkeit, wie im Folgenden für die einzelnen Dimensionen näher erläutert wird.

5.2.1 Dimension A: Inhaltliche Vernetzung

Schon in Abschnitt 5.1.1 wird aus Sicht der pädagogischen Psychologie die Bedeutung der Vernetzung neuen Wissens mit bereits bestehenden Wissensstrukturen beim Lernen neuer Inhalte betont. Dabei kann das vernetzte Wissen nach H. Meyer (2004) auf zweierlei Arten zum Transfer genutzt bzw. durch diesen aufgebaut werden:

- Beim Vertikalen Transfer wird der neue Inhalt entweder mit schon bekannten Inhalten vernetzt oder es wird durch Verallgemeinerung oder Vorwegnahme zukünftiger Inhalte die Bedeutung des aktuellen Stoffes aufgezeigt.
- Beim horizontalen Transfer wird neues Wissen in andere Bereiche übertragen. Dies geschieht z.B. beim Üben und Wiederholen in neuen Bezügen, aber auch beim Anwenden von neu Gelerntem auf andere Themen (H. Meyer, 2004).

Der vertikale Transfer wird vor allem durch Verbindungen mit dem Vorwissen der Schülerinnen und Schüler gefördert. Da beim Lernen die neuen Informationen auf Basis des bestehenden Wissens interpretiert werden, ist es wichtig, gezielt auf das Vorwissen einzugehen und Beziehungen zwischen neuen und bestehenden Informationen zu erzeugen (Seel, 2000; Shuell, 1988). Durch die gezielte Aktivierung von Wissensbeständen wird ein bedeutungsvolles und nachhaltiges Lernen sowie die Korrektur und Vermeidung von Fehlkonzepten unterstützt (Krause & Stark, 2006). Auch Mietzel (2003) beschreibt mehrere Studien, die die Bedeutung des Vorwissen zur Wissenskonstruktion untersuchten. Die Ergebnisse zeigen, dass die Berücksichtigung des Vorwissens von besonderer Bedeutung ist, da neue Informationen, die mit dem Vorwissen nicht in Einklang stehen, nur schwer gelernt werden. Es besteht die Tendenz, diese diskrepanten Informationen zurückzuweisen und am bisherigen Wissen festzuhalten (Chinn & Brewer, 1993, nach Mietzel, 2003). Auch Hugener, Pauli und Reusser (2007) weisen darauf hin, dass die Anknüpfung an das Vorwissen ein Merkmal kognitiv aktivierenden Unterrichts ist.

Der horizontale Transfer wird durch das Herstellen von Verbindungen zwischen verschiedenen mathematischen Stoffgebieten oder auch innerhalb eines Stoffgebietes zwischen verschiedenen Themenbereichen ermöglicht. Durch das Aufzeigen der (sachlogischen) Struktur bzw. der inneren Zusammenhänge des neuen Lernstoffs, wird der Aufbau vernetzten Wissens gefördert (H. Meyer, 2004; Mietzel, 2003). Durch die zu beobachtende stoffliche Breite kann damit eine Aussage über den Grad der inhaltlichen Vernetztheit als ein Teilaspekt der kognitiven Aktivierung getroffen werden (Jordan et al., 2006). Die Beschreibung der inhaltlichen Vernetzung des Unterrichts stellt deshalb einen wichtigen Aspekt der qualitativen Analysen im Rahmen dieser Arbeit dar.

5.2.2 Dimension B: Mathematische Denkweisen

Es gibt durchaus verschiedene Ansätze zur Unterscheidung in verschiedene Typen mathematischer Denkweisen, die jeweils unterschiedliche Arten mathematischen Wissens erfordern. „These frameworks differ in their detail but are connected through their differentiation between context-oriented and process-oriented elements of human cognition” (Reiss & Wellstein, 1995, S. 5, zitiert nach J. Neubrand, 2002). Hiebert und Lefevre (1986) unterscheiden beispielsweise zwischen ‚conceptual knowledge‘ (begriffliches Wissen) und ‚procedural knowledge‘ (prozedurales Wissen) (Hiebert & Lefevre, 1986, S. 3; J. Neubrand, 2002). In ähnlicher Weise beschreiben auch Kilpatrick, Swafford, and Findell (2001) ‚conceptual understanding‘ und ‚procedural fluency‘ als zwei wichtige Elemente, um Mathematik erfolgreich zu lernen.

Begriffliches Wissen kann demnach charakterisiert werden als Wissen, welches reich an Beziehungen ist. Es lässt sich darstellen als ein verbundenes Netzwerk von Einzelinformationen. Begriffliches Wissen wird einerseits erlangt, indem bereits im Gedächtnis vorhandene Informationen miteinander in Beziehung gesetzt werden. Andererseits wird es durch die Einbettung neuer Informationen in das bestehende Netzwerk aufgebaut (Hiebert & Lefevre, 1986; Kilpatrick et al., 2001). Dabei können die Beziehungen auf zwei verschiedenen Niveaus aufgebaut werden: Auf dem „primary Level" (Hiebert & Lefevre, 1986, S. 4) wird die Beziehung auf demselben oder einem niedrigeren Abstraktionsgrad[4] konstruiert, auf dem auch die Information selbst gegeben ist. Wird die Beziehung auf einem höheren Abstraktionsgrad gespeichert, als die ursprüngliche Information (also unabhängiger vom jeweiligen Kontext), sprechen Hiebert und Lefevre vom „reflective level" (Hiebert & Lefevre, 1986, S. 5). Begriffliches Wissen führt dazu, dass Schülerinnen und Schüler weniger lernen müssen, da sie durch die vielfältigen Beziehungen auch Gemeinsamkeiten, beispielsweise zwischen verschiedenen Verfahren, sehen, sodass die unterschiedlichen Verfahren nicht im Einzelnen behalten werden müssen (z.B. genügt für Additionen wie 3+5 und 5+3 ein Verfahren, wenn das Konzept des Kommutativgesetzes verstanden wurde). Dabei kann das begriffliche Wissen nicht notwendigerweise von den Schülerinnen und Schülern verbalisiert werden, da es auch implizit vorliegen kann (Kilpatrick et al., 2001).

Das *Prozedurale Wissen* setzt sich nach Hiebert und Lefevre (1986) aus zwei Bereichen zusammen: Einerseits das Wissen über die formale Sprache bzw. die symbolischen Repräsentationen in der Mathematik, welches den vertrauten Umgang mit Symbolen zur Repräsentation mathematischer Ideen und ein Bewusstsein für die syntaktischen Regeln zum Umgang mit Symbolen beinhaltet. Andererseits besteht prozedurales Wissen aus den Algorithmen bzw. Regeln zum Lösen mathematischer Aufgaben, welche aufgefasst werden als eine Aneinanderreihung von Symbolmanipulationen. Prozedurales Wissen beinhaltet zumindest oberflächliche Strategien des Problemlösens, welche nicht notwendigerweise auf Symbolen beruhen, aber kein Wissen über die Bedeutungen der einzelnen Schritte beinhalten (Hiebert & Lefevre, 1986). Kilpatrick et al. (2001) betonen insbesondere die Auswahl geeigneter Prozeduren sowie deren korrekten und flexiblen Einsatz als Teil des prozeduralen Wissen.

Die beiden Wissensarten prozedurales und begriffliches Wissen lassen sich vom *Faktenwissen* (häufig auch deklaratives Wissen genannt, siehe J. Neubrand, 2002) abgrenzen, für welches keine weiter reichenden Beziehungen des Wissens notwendig sind. Dagegen wird sowohl durch prozedurales Wissen als auch durch begriffliches Wissen die Vernetzung des Wissens gefördert. Allerdings gibt es einen großen Unterschied zwischen den beiden Wissensarten: Während beim prozeduralen Wissen hauptsächlich nur Beziehungen im Sinne von ‚danach' gebraucht werden, um die lineare Reihenfolge von Prozeduren festzulegen, besteht begriffliches Wissen aus einer Vielzahl verschiedener Arten von Beziehungen und Vernetzungen (Hiebert & Lefevre, 1986). Allerdings sind der Aufbau beider Wissensarten und vor allem die Vernetzung von prozeduralem und begrifflichem Wissen als bedeutsam für die Entwicklung von mathematischer Kompetenz anzusehen. Denn einerseits wird durch die Verbindung mit begrifflichem Wissen der mathematischen Symbolsprache erst eine Bedeutung gegeben. Es wird aber andererseits durch die Verknüpfung beider Wissensarten auch die Zahl der zu lernenden Prozeduren reduziert sowie die Effektivität der Auswahl und Nutzung geeigneter Prozeduren erhöht (Hiebert & Lefevre, 1986; Kilpatrick et al., 2001).

[4] Hiebert und Lefevre verstehen unter Abstraktiongrad das Maß, in dem die Information oder die Beziehung an einen gewissen Kontext gebunden ist. Der Abstraktionsgrad steigt mit der Loslösung des Wissens von einem spezifischen Kontext.

Auch Brophy (1999) betont, dass anhand von Aufgaben geübt werden sollte, die begriffliches Verständnis des Wissens sowie eine selbstregulierte Anwendung der Fertigkeiten ermöglichen, anstelle von Aufgaben, die das bloße Erinnern von Fakten oder das Ausführen einfacher Prozeduren ohne Anbindung an das Curriculum erfordern. Hasemann und Stern (2002) haben zudem empirisch nachgewiesen, dass die Fähigkeit Sachaufgaben zu lösen eher von der Entwicklung systematischen begrifflichen Wissens profitiert, als von einer direkten Übung der Sachaufgaben selbst.

Die Aktivierung von prozeduralem und begrifflichem Wissen ist nach den vorangehenden Beschreibungen eine wichtige Voraussetzung für die Vernetzung von Wissen, wobei die Qualität der Vernetzungen und damit die Qualität der kognitiven Aktivierung höher ist, wenn nicht prozedurales Wissen allein, sondern vor allem in Verbindung mit begrifflichem Wissen aktiviert wird. Hiebert und Lefevre (1986) bemängeln aber, dass der Fokus der Instruktion in der Schule häufig auf prozeduralem Wissen liegt, ohne Verbindungen zum begrifflichen Wissen herzustellen. Dadurch werden Prozeduren schnell vergessen und können nicht in anderen Kontexten rekonstruiert werden. Sie werden oftmals nur teilweise erinnert oder mit anderen Verfahren in ungeeigneter Weise kombiniert. Schülerinnen und Schüler scheitern deshalb häufig daran, Vernetzungen zwischen verschiedenen Wissenselementen zu erkennen oder zu konstruieren. Hiebert und Lefevre nennen dafür vor allem drei Gründe: (a) Das zu vernetzende Wissen existiert nicht, (b) Schülerinnen und Schüler erkennen die Zusammenhänge nicht, die z.B. für Erwachsene offensichtlich sind, und (c) das Wissen bleibt an den Kontext, in dem es gelernt wurde, gebunden und kann nicht abstrahiert werden (Hiebert & Lefevre, 1986).

Im Rahmen der qualitativen Analysen dieser Arbeit wird auch die Aktivierung von prozeduralem und begrifflichem Wissen durch die Lehrerinnen und Lehrer im Unterricht untersucht. Es kann dadurch beschrieben werden, ob die Lehrpersonen wie von Hiebert und Lefevre beschrieben das prozedurale Wissen fokussieren. Dies würde bedeuten, dass das schon 1986 erkannte Problem weiterhin Bestand hat. Es ist dagegen wünschenswert, dass die Lehrkräfte in gleichem Maße prozedurales und begriffliches Denken ermöglichen und damit die Schülerinnen und Schüler kognitiv aktivieren.

5.2.3 Dimension C: Kognitive Elemente eines Modellierungskreislaufes

Außer- und innermathematische Modellierungen

Das mathematische Modellieren spielt in den letzten Jahren in der mathematikdidaktischen Forschung und Unterrichtsentwicklung eine bedeutende Rolle, wie sich beispielsweise an den vielfältigen Beiträgen zum Modellieren im Rahmen der GDM-Tagungen der vergangenen Jahre zeigt. Auch in den Bildungsstandards stellen Modellierungen eine wichtige, im Unterricht zu erlernende Kompetenz dar. Hier werden Modellierungen als das Verstehen, Strukturieren und Lösen realitätsbezogener Probleme mithilfe mathematischer Mittel charakterisiert, wozu auch das Erkennen und Beurteilen von Mathematik in der Welt gezählt wird (Blum et al., 2006) (siehe Abbildung 5.1).

(K3) Mathematisch modellieren

Dazu gehört:

- den Bereich oder die Situation, die modelliert werden soll, in mathematische Begriffe, Strukturen und Relationen übersetzen,
- in dem jeweiligen mathematischen Modell arbeiten,
- Ergebnisse in dem entsprechenden Bereich oder der entsprechenden Situation interpretieren und prüfen.

Abbildung 5.1: Die Kompetenz ‚mathematisch Modellieren' in den Bildungsstandards für den mittleren Schulabschluss (Kultusministerkonferenz, 2003, S. 12)

Im Zusammenhang mit Modellierungen werden in der Mathematikdidaktik häufig vor allem Anwendungsaufgaben genannt. Der Prozess der Lösung von außermathematischen Modellierungsaufgaben lässt sich auf unterschiedliche Weise als Kreislauf darstellen. Einen Überblick über verschiedene Modellierungskreisläufe gibt z.B. Hinrichs (2008). In allen Kreisläufen sind aber mehr oder weniger die von Schupp (1988) vorgeschlagenen Teilprozesse *mathematisieren*, *verarbeiten*, *interpretieren* und *validieren* wiederzufinden, welche einerseits zwischen der Ebene der ‚Welt' und der Ebene der ‚Mathematik', andererseits zwischen dem ‚Problem' und der ‚Lösung' vermitteln (Klieme, Neubrand, & Lüdtke, 2001) (siehe Abbildung 5.2).

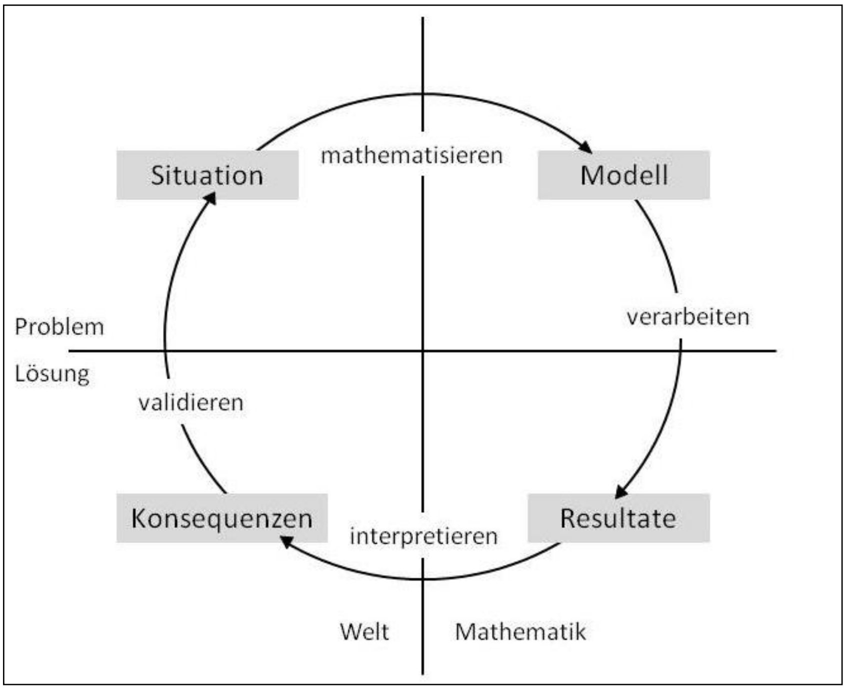


Abbildung 5.2: Modellierungskreislauf nach Jordan et al. (2006) in Anlehnung an Schupp (1988)

Ergänzend zu dieser rein anwendungsorientierten Sichtweise kann Modellieren aber auch *allgemein* den mehrschrittigen Prozess beim Lösen einer Aufgabe beschreiben. Im Rahmen von PISA wurde die Perspektive des Modellierens erweitert und das Grundschema (siehe Abbildung 5.2) auf innermathematische Situationen übertragen. Als innermathematisch problemhaltige Aufgaben, die innermathematische Modellierungen erfordern, werden Aufgaben charakterisiert, in denen nicht gleich der Ansatz, bzw. das Modell benannt ist (d.h. das zu aktivierende Wissen ist nur implizit gegeben). Sie sind von rein technischen Aufgaben, welche lediglich die Aktivierung von Faktenwissen oder das Ausführen einfacher Fertigkeiten erfordern (siehe Dimension B), abzugrenzen. Zur Lösung dieser innermathematisch problemhaltigen Aufgaben sind zu außermathematischen Modellierungsaufgaben analoge oder strukturgleiche kognitive Prozesse erforderlich (Jordan et al., 2006). Diese werden in den Bildungsstandards nicht unter die Kompetenz ‚Modellieren' gefasst, sondern sind Bestandteil anderer Kompetenzen, insbesondere der Kompetenz Problemlösen (Blum et al., 2006)(siehe Abbildung 5.3).

(K2) Probleme mathematisch lösen
Dazu gehört:
- vorgegebene und selbst formulierte Probleme bearbeiten,
- geeignete heuristische Hilfsmittel, Strategien und Prinzipien zum Problemlösen auswählen und anwenden,
- die Plausibilität der Ergebnisse überprüfen sowie das Finden von Lösungsideen und die Lösungswege reflektieren.

Abbildung 5.3: Die Kompetenz ‚Probleme mathematisch lösen' in den Bildungsstandards für den mittleren Schulabschluss (Kultusministerkonferenz, 2003, S. 12)

Hier wird die enge Verbindung zwischen Modellierungen und dem Problemlösen (siehe z.B. Bruder, 2003) deutlich, wobei sich das Problemlösen im allgemeinen Verständnis immer sowohl auf außermathematische, wie auf innermathematische Probleme beziehen kann (Greefrath, 2010). Außermathematisches und innermathematisches Modellieren stellen demnach zwei unterschiedliche Spezifikationen von Problemlöseprozessen dar. Aber nicht jede Modellierungsaufgabe erfordert notwendigerweise einen Problemlöseprozess (z.B. einfache Textaufgaben).
Mithilfe des Kreislaufmodells zum Modellieren (siehe Abbildung 5.2) ist es möglich, in beiden Bereichen die unterschiedlichen kognitiven Tätigkeiten beim Bearbeiten einer Aufgabe sichtbar zu machen. Dabei kann sowohl im außermathematischen als auch im innermathematischen Kontext von *Übersetzungs-* , *Strukturierungs-*, *Verarbeitungs-* sowie *Interpretationsanforderungen* gesprochen werden (Jordan et al., 2006). Ein Modellierungsprozess in diesem allgemeinen Sinne beginnt mit einer *problemhaltigen Situation*. Dies kann eine konkrete reale Situation aber auch ein komplexes innermathematisches Problem sein. Im Teilprozess des Mathematisierens wird das vorgelegte situative Problem in ein *mathematisches Modell* übersetzt. Dies ist der komplexeste Teilprozess, da hier viele Arten des Verstehens (z.B. Text verstehen, mathematische Struktur herstellen, wichtige von unwichtigen Aspekten unterscheiden) notwendig sind. Außerdem muss innerhalb dieses Teilprozesses ein geeignetes mathematisches Modell gefunden werden, wozu in der Regel verschiedene Repräsentationsformen (siehe unten) herangezogen werden. Modelle können dabei nicht nur „Ansätze im Sinne von Formeln oder Gleichungen sein, sondern es kann sich auch um die Herstellung einer Zeichnung, um die Angabe eines strukturellen Zusammenhangs, das Aufstellen eines geschickt gegliederten Plans und Ähnliches handeln" (Klieme, Neubrand, et al., 2001, S. 145). Demnach kann auch der nun folgende innermathematische Verarbeitungsprozess sehr unterschiedlich gestaltet sein (z.B. Berechnung einer Lösung, graphisches Arbeiten, logische Folgerungen ziehen oder einen Plan abarbeiten). Dabei können sowohl algorithmische Vorgehensweisen als auch begriffliche Verarbeitungen auftreten. Die so erhaltenen *mathematischen Resultate* werden im Teilprozess des Interpretierens in die situative Einbettung rück-

übersetzt,[5] um *Konsequenzen* der mathematischen Resultate für die Ausgangssituation zu erhalten. Dabei können beispielweise bei mehreren Lösungen diejenigen ausgewählt werden, die in der Ausgangssituation auch Sinn machen, es werden also wieder Zusammenhänge zur Ausgangssituation hergestellt. Im folgenden Schritt des Validierens wird die Gültigkeit des gewählten Modells und somit die Gültigkeit der gewonnenen Ergebnisse reflektiert, woraufhin der Modellierungsprozess gegebenenfalls mit einem veränderten Modell nochmals durchlaufen werden muss (Klieme, Neubrand, et al., 2001). Das Durchlaufen des Modellierungskreislaufs bei außer- und innermathematischen Modellierungen weist viele direkte Parallelen mit verschiedenen Strukturierungen von Problemlöseprozessen auf (vgl. Greefrath, 2010), beispielsweise dem Problemlöseprozess von Polya (1967), welcher aus den vier Phasen *Verstehen der Aufgabe*, *Ausdenken eines Planes*, *Ausführen des Planes* und *Rückschau* besteht.
Es kann zwar allgemein zwischen außer- und innermathematischen Modellierungsaufgaben unterschieden werden, allerdings ist es auch denkbar, dass eine außermathematische Situation zugleich eine innermathematische Modellierung erfordert (vgl. Greefrath, 2010; Jordan et al., 2006). Dann kommen in einer Aufgabe diese beiden Arten mathematischer Anforderungen verschränkt vor. Dies ist beispielsweise der Fall, wenn die Mathematisierung der außermathematischen Situation keine fertige Formel, Gleichung oder Lösungsmethode ergibt, so dass eine neue innermathematisch problemhaltige Situation aufgeworfen wird.

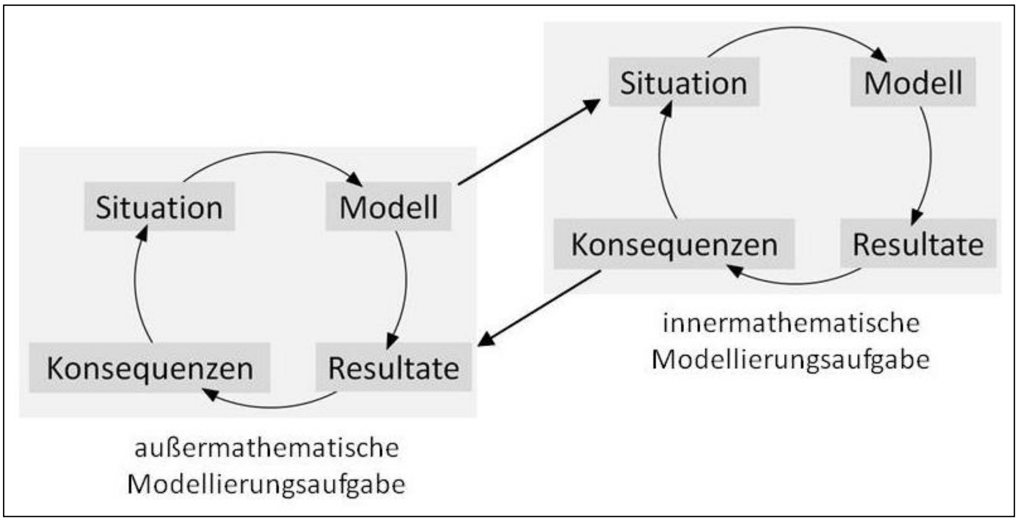


Abbildung 5.4: Erweiterung des Modellierungskreislaufes nach Jordan et al. (2006)

Abbildung 5.4 verdeutlicht die Zusammenhänge zwischen den außer- und innermathematischen Modellierungskreisläufen und bildet insbesondere Aufgaben ab, in denen beide Anforderungen auftreten. Hier wird vor allem die Strukturgleichheit der inner- und außermathematischen Prozesse deutlich. Bei reinen außermathematischen Aufgaben, bei denen durch das Mathematisieren eine technische innermathematische Aufgabe entsteht (z.B. die ‚klassischen Textaufgaben‘, siehe auch 6.1.2), wird im Lösungsprozess nur der linke Kreislauf durchlaufen. Analog dazu erfordern reine innermathematische problemhaltige Situationen ohne außermathematische Kontextanbindung im Lösungsprozess nur das Durchlaufen des rechten Zyklus. Auch die reinen technischen Aufgaben, bei denen keine Mathematisierung

[5] Klieme, Neubrand und Lüdke (2001) lassen nun zunächst die Konsequenzen und erst nach der Rückübersetzung die Resultate folgen, in späteren Publikationen dieser Arbeitsgruppe (siehe z.B. Jordan et al., 2006) werden aber zunächst die Resultate und anschließend die Konsequenzen aufgegriffen.

und keine innermathematische Strukturierungsleistung notwendig sind, lassen sich in diesem Modell verorten. Hier tritt im Lösungsprozess nur der rechte Teilprozess ‚Modell → Resultate' des innermathematischen Zyklus auf (Jordan et al., 2006).
Die obigen Erläuterungen machen deutlich, dass die kognitive Aktivität der Schülerinnen und Schüler beim Lösen einer Modellierungsaufgabe mit der Komplexität der zu durchlaufenden Teilprozesse des Modells in Abbildung 5.4 zunimmt. Für die Einschätzung der kognitiven Aktivität im Unterricht ist jedoch nicht nur zu entscheiden, ob die Aufgabe das Durchlaufen der Teilprozesse ermöglicht. Es ist insbesondere von Bedeutung, ob die Prozesse auch tatsächlich von den Schülerinnen und Schülern bei der Bearbeitung der Aufgabe durchlaufen werden, da beispielsweise durch Hilfestellungen und Vorgaben Teilprozesse durch die Lehrerinnen und Lehrer übernommen werden können. Es ist aber auch denkbar, dass eine Aufgabe, die potenziell beispielsweise gar nicht das Durchlaufen eines innermathematischen Modellierungskreislaufes erfordert, da nach dem Mathematisieren eine gängige Formel verwendet werden kann, im Unterricht zu einer innermathematisch problemhaltigen Aufgabe wird und somit innermathematische Modellierungen erfordert, da die entsprechende Formel den Schülerinnen und Schülern bisher nicht bekannt ist. Dies wird im Rahmen dieser Arbeit durch die Einschätzung des Aufgabenpotenzials unabhängig vom Unterricht und die davon losgelöste Einschätzung der während des Unterrichts tatsächlich ablaufenden Teilprozesse des Modellierens realisiert, soweit dies durch Unterrichtsbeobachtungen möglich ist.

Grundvorstellungen

Mathematische Grundvorstellungen beschreiben nach vom Hofe (1995) Beziehungen zwischen mathematischen Inhalten, Realkontexten und individuellen mentalen Strukturen. Sie tragen die Bedeutung des mathematischen Inhalts und sind für das Individuum Repräsentanten des inhaltlichen „Kerns" (Jordan et al., 2006, S. 49). Grundvorstellungen lassen sich zu allen Bereichen der Mathematik formulieren, in Abbildung 5.5 sind konkrete Beispiele für Grundvorstellungen zum Bruchzahlbegriff dargestellt.

- Anteils-Vorstellung – Maria hat eine ¾ Pizza (Bruch als Teil eines Ganzen)
- Operator-Vorstellung – Mike gewinnt ¾ von 120€ (Bruch als multiplikative Rechenanweisung, angewendet auf eine Größe)
- Verhältnis-Vorstellung – Apfelsaft und Wasser werden im Verhältnis 3 : 4 zu Apfelschorle gemischt (Bruch zur Beschreibung eines Mischungsverhältnisses

Abbildung 5.5: Beispiele für Grundvorstellungen zum Bruchzahlbegriff (vom Hofe, 2003, S. 6)

Mathematische Begriffe lassen sich in der Regel mithilfe mehrerer Grundvorstellungen erfassen, wobei die Vernetzung dieser Grundvorstellungen als das Grundverständnis des Begriffs angesehen werden kann. Das Netzwerk der Grundvorstellungen unterliegt ständigen Veränderungen durch die Erweiterung von alten und den Zugewinn von neuen Vorstellungen, so dass sich ein immer leistungsfähigeres System mentaler mathematischer Modelle entwickelt, welches zur Förderung der mathematischen Grundbildung[6] beiträgt (Blum, vom Hofe, Jordan, & Kleine, 2004; vom Hofe, 2003). Zahlreiche Untersuchungen zeigen jedoch, dass sich auch viele Fehlvorstellungen bei den Schülerinnen und Schülern ausbilden, die dazu führen, dass die Lernenden sich immer mehr an Regeln, Merksätzen und Formalismen orientieren, deren Sinn sie aber nicht verstehen (vom Hofe, 2003).

[6] Mathematische Grundbildung wird hier in Anlehnung an das aus der PISA-Studie bekannte Konzept der „mathematical literacy" (Baumert, Klieme, Neubrand, et al., 2001) verstanden.

Aufgaben lassen sich nach Blum et al. (2004) nach Ihrer Grundvorstellungsintensität und den damit verbundenen kognitiven Anforderungen kategorisieren, wobei zwischen *elementaren*, *erweiterten* und *komplexen Grundvorstellungen* unterscheiden werden kann.
Elementare Grundvorstellungen nehmen einzelne Objekte in den Blick und sind sehr nahe an den realen oder vorgestellten Handlungen (z.B. die arithmetischen Grundoperationen, die Gegenstands-Vorstellung beim Variablenbegriff oder die Ausdehnungs-Vorstellung bei Flächeninhalten und Volumina).
Erweiterte Grundvorstellungen lassen sich idealtypisch in zwei Kategorien unterscheiden:

- Die Vorstellungen sind bereits losgelöst von realen Handlungen und beziehen sich auf ganze Bereiche von Objekten (z.B. die Einsetzungs-Vorstellung beim Variablenbegriff oder funktionale Vorstellungen beim ebenen Kongruenzbegriff).
- Es werden zwei oder mehr elementare Vorstellungen in nichttrivialer Weise kombiniert, sodass eine neue Begrifflichkeit entsteht (z.B. beinhaltet die Vorstellung zum verminderten Grundwert elementare Prozentvorstellungen und Subtraktions-Vorstellungen).

Komplexe Grundvorstellungen entstehen durch die Kombination von erweiterten Grundvorstellungen mit anderen (elementaren oder erweiterten) Grundvorstellungen (z.B. wird der Ableitungsbegriff aus Änderungsraten- und Grenzwertbegriff gebildet) (Blum et al., 2004, S. 152-153).
Die im vorigen Abschnitt beschriebenen technischen Aufgaben erfordern dabei keine Grundvorstellungen, während rechnerische oder begriffliche Modellierungs- und problembezogene Aufgaben immer Grundvorstellungen erfordern (Blum et al., 2004). Zum Aufbau eines Systems mentaler mathematischer Modelle tragen vor allem abwechslungsreiche Aufgaben bei, die möglichst unterschiedliche Grundvorstellungen ansprechen und so den Ausbau und die Vernetzung der Grundvorstellungen fördern (Blum & vom Hofe, 2003). In diesem Sinne ist die Aktivierung mehrerer, auch erweiterter Grundvorstellungen auch ein Zeichen für kognitive Aktivierung der Schülerinnen und Schüler.

Sprachlogische Komplexität

PISA hat gezeigt, dass das Textverständnis, auch sprachlogische Komplexität genannt, einen erheblichen Einfluss auf die Lösungswahrscheinlichkeit und damit den Schwierigkeitsgrad einer Aufgabe hat (Bruder, 2003; Cohors-Fresenborg, Sjuts, & Sommer, 2004). Aus Sicht der kognitiven Aktivierung ist dieses Merkmal wichtig, da es Aufschluss über das „geistig mathematische Instrumentarium, [das] Instrumentarium zur (intuitiven) Aufnahme, zum (präzisen) Erfassen und zum (zielorientierten) Bearbeiten von komplexen Text- und Aufgabeninformationen" (Cohors-Fresenborg et al., 2004, S. 111; siehe auch Jordan et al., 2006) gibt.
Die sprachlogische Komplexität beschreibt den zu leistenden Aufwand zum Verstehen eines sprachlich gegebenen Aufgabentextes, wodurch eine Vorstellung von der Aufgabe entwickelt wird. Die Schülerinnen und Schüler müssen zunächst die relevanten Informationen identifizieren und in eine mathematische Beschreibung überführen. Dabei können insbesondere sprachliche Konstruktionen zur logischen Struktur der Kontextdarstellung sowie durch die Authentizität einer Situation bedingte Formulierungen, Schwierigkeiten hervorrufen (Cohors-Fresenborg et al., 2004).
Cohors-Fresenborg et al. (2004) unterscheiden drei Stufen der sprachlogischen Komplexität:
Auf *Stufe 0* entspricht die Reihenfolge der Sätze den Schritten der mathematischen Bearbeitung. Hierzu zählen vor allem Einwortsätze (Berechne!) oder einfache Hauptsätze.
Auf *Stufe 1* entspricht die Reihenfolge der Sätze, bzw. Satzteile nicht unmittelbar den Schritten der mathematischen Bearbeitung. Es gibt beispielsweise mehrere Haupt- und Nebensät-

ze, sprachliche Rückbezüge oder irrelevante Informationen. Ebenso können einfache logische Funktionen (Negation, Implikation, Äquivalenz) oder All- und Existenzquantifizierungen auftreten.
Auf *Stufe 3* entspricht die Reihenfolge der Sätze bzw. Satzteile in erschwerter Weise oder gar nicht den Schritten der mathematischen Bearbeitung. Es können verzweigte Haupt- und Nebensätze auftreten, die sprachliche Verflechtungen oder Rückbezüge aufweisen, so dass die logischen Bezüge nur verdeckt vorhanden sind und die gegebenen Informationen nicht direkt für die mathematische Bearbeitung übernommen werden können. Ebenso kann die Aufgabenstellung verknüpfte logische Funktionen oder implizite All- oder Existenzquantifizierungen enthalten (Cohors-Fresenborg et al., 2004, S. 113; Jordan et al., 2006).

Wechsel zwischen Repräsentationsformen

Die Begriffe Repräsentationsformen und Formen der Darstellungen sowie Repräsentationen und Darstellungen werden in der Literatur häufig synonym verwendet.Deshalb werden auch im Rahmen dieser Arbeit diese beiden Bezeichnungen synonym gebraucht. Nach Bruner (1972) kann zwischen enaktiven, ikonischen und symbolischen Repräsentationsformen unterschieden werden (siehe auch Jordan et al., 2006; Wittmann, 1981). Das Bearbeiten eines Inhaltes auf mehreren Ebenen ist für die Vernetzung des Wissens und damit für das Lernen und Behalten von Vorteil (Edelmann, 2000). Die Unterscheidung der drei Ebenen nach Bruner (1972) ist dabei sehr verbreitet. Auf der *enaktiven* Ebene wird der Inhalt handelnd repräsentiert, z.B. indem eine Zeichnung angefertigt wird. Dabei ist es von besonderer Wichtigkeit, dass die Handlung auch zum Aufbau des Verständnisses beiträgt. Die *ikonische* Ebene beschreibt visuelle Darstellungen in Form von Bildern, wozu auch Graphen und Diagramme gezählt werden. Hier zeigt sich hohe Qualität der Verwendung dieser Repräsentationsformen, indem Beziehungen innerhalb einer Darstellung oder zwischen verschiedenen visuellen Darstellungen aufgezeigt werden (Drollinger-Vetter & Lipowsky, 2006a; Jordan et al., 2006).
In der Mathematikdidaktik kann die symbolische Ebene noch in eine sprachliche und eine formale Ebene unterteilt werden (Zech, 1998; siehe auch Drolinger-Vetter & Lipowsky 2006a, Wittmann, 1981). Die *sprachliche* Ebene beinhaltet verbale Repräsentationen der Inhalte (auch schriftliche Sprache), beispielsweise die Formulierung von Sätzen in eigenen Worten, wobei die Beschreibung von Besonderheiten des Satzes von zentraler Bedeutung ist. Auf der *formalen* Ebene wird der Inhalt mit der der Mathematik eigenen formalen Schreibweise repräsentiert, wobei insbesondere Variablen, Symbole und Formeln verwendet werden (Drollinger-Vetter & Lipowsky, 2006a).
In der Literatur finden sich aber auch andere Unterteilungen der verschiedenen Ebenen der Repräsentationsformen, von denen einige im Folgenden kurz beschrieben werden. Es ist beispielsweise die Theorie der semiotischen Darstellungsregister von Duval (z.B. 1993; Übersetzung nach Stölting 2008) zu nennen, in der verschiedene mathematische Repräsentationsebenen als Darstellungsregister beschrieben werden. Beim Umgang mit diesen Registern können einerseits für das Register charakteristische Repräsentationen identifiziert und konstruiert werden, es können Umformungen an Darstellungen innerhalb des Registers vorgenommen werden und es können Darstellungen in Repräsentationsformen eines anderen Registers übersetzt werden (Duval, 1993; vom Hofe & Jordan, 2009).
Duval betont, dass die Verwendung verschiedener Repräsentationsformen für ein mathematisches Objekt eine notwendige Voraussetzung für Abstraktion ist, damit mathematische Objekte nicht mit ihren Repräsentationen verwechselt werden und in jeder ihrer Repräsentationsformen wiedererkannt werden können. Dabei sind insbesondere die Übersetzungen

zwischen verschiedenen Repräsentationen von zentraler Bedeutung, da sonst zwei verschiedene Darstellungen desselben mathematischen Objektes als zwei unterschiedliche mathematische Objekte aufgefasst werden könnten (Duval, 2006).
Aufbauend auf Duval unterscheidet Stölting (2008) im Zusammenhang mit Funktionen das algebraische Register, in dem die Funktionen als Formeln repräsentiert werden, das graphischen Register, das Register der Tabellen und das Register der Sprache. Ähnlich unterscheiden auch Leuders und Prediger (2005) zwischen verbalen, numerischen (als Tabelle), graphischen (als Diagramm) und symbolischen (als Term) Repräsentationen von Funktionen. Im Vergleich mit den oben beschriebenen vier Ebenen der Repräsentationsformen wird deutlich, dass hier die enaktive Ebene nicht separat aufgeführt wird, die ikonische Ebene wird dagegen in numerische (Tabellen) und grafische Visualisierungen (Diagramme) unterteilt. Diese beiden Aspekte werden beispielsweise bei COACTV beide unter die ikonische Ebene gefasst. Hier zeigt sich, dass die Einteilung der verschiedenen Repräsentationsebenen in der Literatur nicht eindeutig ist. Im Rahmen dieser Arbeit wird die Unterteilung nach Bruner mit der ergänzenden Aufteilung der symbolischen Ebene in eine sprachliche und eine formale Ebene übernommen, wobei die anderen Möglichkeiten der Repräsentationsebenen am Rande mit berücksichtigt werden.
Der Fokus der Arbeit liegt vor allem auf dem Erkennen von Wechseln zwischen Repräsentationsformen, denn alle vorgenannten Autoren betonen die Bedeutung der Verwendung verschiedener Darstellungen und insbesondere der Übersetzung zwischen verschiedenen Repräsentationsformen für den verstehenden Aufbau von Wissen und damit für die kognitive Aktivierung der Schülerinnen und Schüler (Drollinger-Vetter & Lipowsky, 2006a; Duval, 2006; Sjuts, 2002; vom Hofe & Jordan, 2009; Zech, 1998). Beispielsweise Sjuts (2002) weist darauf hin, dass im Unterricht verschiedene Repräsentationsformen angesprochen und insbesondere zwischen verschiedenen Darstellungen gewechselt werden muss, da das Wissen über externe Repräsentationen intern repräsentiert wird. Auch in den Bildungsstandards wird die Verwendung und der Vergleich verschiedener Formen der Darstellung gefordert (siehe Abbildung 5.6).

(K 4) Mathematische Darstellungen verwenden

Dazu gehört:

- verschiedene Formen der Darstellung von mathematischen Objekten und Situationen anwenden, interpretieren und unterscheiden,
- Beziehungen zwischen Darstellungsformen erkennen,
- unterschiedliche Darstellungsformen je nach Situation und Zweck auswählen und zwischen ihnen wechseln.

Abbildung 5.6: Die Kompetenz ‚mathematische Darstellungen verwenden' aus den Bildungsstandards für den mittleren Schulabschluss (Kultusministerkonferenz, 2003, S. 12)

Mathematisch argumentieren

Unter Argumentieren wird im Rahmen von COACTIV „die Fähigkeit verstanden […], eine geschlossene Argumentationskette zu präsentieren oder auch verschiedene Formen von mathematischen Argumentationen zu verstehen bzw. zu bewerten. Hierzu gehören sämtliche Arten von Begründungen, so zum Beispiel das konsequente Durchführen einer Strategie oder das Ausführen eines mathematischen Beweises" (Jordan et al., 2006, S. 40).
Beweise sind ein zentrales Element in der Fachwissenschaft Mathematik, allerdings spielen sie im Mathematikunterricht häufig eine untergeordnete Rolle (Hanna, 2000; M. Meyer &

Prediger, 2009; Reiss, 2009), obwohl mathematisches Argumentieren in den Bildungsstandards explizit gefordert ist und dort auch das Entwickeln von Beweisen beinhaltet (siehe Abbildung 5.7).

(K1) Mathematisch argumentieren Dazu gehört: - Fragen stellen, die für die Mathematik charakteristisch sind („Gibt es …?“, „Wie verändert sich…?“, „Ist das immer so …?“) und Vermutungen begründet äußern, - mathematische Argumentationen entwickeln (wie Erläuterungen, Begründungen, Beweise), - Lösungswege beschreiben und begründen.

Abbildung 5.7: Die Kompetenz ‚mathematisch Argumentieren‘ aus den Bildungsstandards für den mittleren Schulabschluss (Kultusministerkonferenz, 2003, S. 11)

Beweise erfüllen in der Mathematik unterschiedliche Funktionen:
- Sie überzeugen von der Richtigkeit einer Behauptung (*Überzeugungsfunktion*),
- sie ermöglichen Einsichten, *warum* ein Satz gilt und nicht nur, *dass* er gilt (*Erklärungsfunktion*),
- sie fördern die Strukturierung von Wissen, indem mehrere Ergebnisse zu einem deduktiven System von Axiomen, Sätzen und Konzepten geordnet werden (*Systematisierungsfunktion*),
- sie helfen beim Entdecken neuer Ergebnisse (*Entdeckungsfunktion*) und
- sie begünstigen die Kommunikation über mathematische Inhalte (*Kommunikationsfunktion*) (siehe Hanna, 2000; M. Meyer & Prediger, 2009; Reiss, 2009).

Hanna (2000) merkt an, dass in der Schule vor allem die Überzeugungs- und Erklärungsfunktion von Bedeutung sind. Durch Beweise können die Schülerinnen und Schüler einen Sachverhalt besser verstehen, wodurch sie neue Probleme leichter lösen können (vgl. Reiss, 2009). Malle (2002) hebt hingegen neben der Überzeugungsfunktion vor allem die Systematisierungsfunktion[7] hervor. Dadurch wird vor allem die Vernetzung von Wissen gefördert, da den Schülerinnen und Schülern die Zusammenhänge in der Mathematik deutlich werden, so dass das Wissen flexibler eingesetzt werden kann (vgl. Reiss, 2009). Hier wird vor allem die kognitive Aktivierung der Schülerinnen und Schüler durch Argumentieren im Unterricht deutlich.

Außerdem bevorzugt Malle den Begriff ‚Begründung‘ statt ‚Beweis‘, wobei er die Entwicklung von einfachen Begründungen auch auf anschaulicher Basis hin zu Argumentationen anhand klar vorgegebener Argumentationsbasen,[8] über mehrere Schuljahre hinweg betont (Malle, 2002). Auch M. Meyer & Prediger (2009) plädieren für eine Kultivierung anderer Begründungsformen neben dem formalen Beweisen. Im Unterricht sollten vor allem das Begründen im weiteren Sinne (z.B. anhand inhaltlich-anschaulicher Argumente) und das Argumentieren in sozialen Kontexten im Mittelpunkt stehen. Dabei sollten insbesondere beziehungsreiche, vielschichtige Stützungen und Repräsentationsformen berücksichtigt werden. Der Grad der Exaktheit hängt nur von den zugrundegelegten Argumentationsbasen ab. Beispielsweise sind in unteren Jahrgangsstufen auch Begründungen anhand generischer Beispiele durchaus angemessen (M. Meyer & Prediger, 2009; siehe auch Malle, 2002). Hier wird

[7] bei Malle „Zusammenhang stiftende Funktion“ (Malle, 2002, S. 4) genannt
[8] Argumentationsbasen bezeichnen eine Menge von Aussagen, die als richtig erachtet werden

deutlich, dass schon durch einfache Begründungen im Unterricht die kognitive Aktivierung der Schülerinnen und Schüler gefördert werden kann.
Die Frage nach dem ‚Warum', also das Begründen und Beweisen von Aussagen, sollte zu einer Selbstverständlichkeit im Mathematikunterricht werden (Malle, 2002; M. Meyer & Prediger, 2009; Reiss & Wellstein, 1995). Es wird dadurch nicht nur das Verständnis für die Mathematik verbessert, sondern es wird eine allgemeine Begründungshaltung und Denkweise erlangt, die für die wissenschaftliche Beschäftigung in anderen Themengebieten und auch für den Alltag nützlich sein kann (Malle, 2002; Reiss, 2009).

5.2.4 Dimension D: Multiple Lösungswege

Im japanischen Unterricht liegt der Fokus des Unterrichts weniger auf dem Ergebnis als auf dem Lösungsprozess, wobei auch der Vergleich verschiedener Lösungswege eine zentrale Rolle spielt. Dies gilt als eine Erklärungsmöglichkeit für das erfolgreiche Abschneiden der japanischen Schülerinnen und Schüler bei internationalen Vergleichsuntersuchungen wie TIMSS und PISA (vgl. Große, 2005; Klieme, Schümer, et al., 2001) (siehe 2.2).
Nach M. Neubrand (2006) sind multiple Lösungswege vom Fach aus erforderlich, da sie den „Prozesscharakter" (M. Neubrand, 1986, S. 25) der Mathematik verdeutlichen (siehe auch Große, 2005; J. Neubrand und M. Neubrand, 1999). Aufgaben, die verschiedene Lösungen und Lösungswege bieten, fördern das selbstständige Denken und die Reflexion des eigenen Lernens (Helmke, 2009) (siehe auch 5.3.1 und 5.3.2). Außerdem ermöglichen sie gegebenenfalls die Kombination verschiedener Strategien, welche möglicherweise erfolgreicher ist als die Anwendung einer einzelnen Strategie, da die Nachteile der einzelnen Strategien ausgeglichen werden können. Das Zusammenspiel verschiedener Strategien kann auch eine effektive Fehlersuche unterstützen (Tabachneck, Koedinger, & Nathan, 1994; nach Große, 2005).
Es kommt aber nicht allein auf die Existenz multipler Lösungswege im Unterricht an, denn die Einbettung der unterschiedlichen Lösungswege in die gesamte Unterrichtsstunde, die Art der Schülerbeteiligung und die mathematische Substanz der ausgewählten alternativen Zugänge spielen eine wichtige Rolle (J. Neubrand und M. Neubrand, 1999). Durch die Offenlegung der verschiedenen Lösungsmöglichkeiten kann der Unterricht strukturiert werden. Dabei sind das Aufzeigen des inneren Zusammenhangs der angesprochenen Themen und die kumulative und systematische Vertiefung eines speziellen Themas von zentraler Bedeutung. Die vielfältigen Lösungswege schaffen Gelegenheiten, durch jeden neuen Weg „die Einsicht in die Struktur" (Wittmann, 1995, S. 16) zu vertiefen und somit mehr als nur Ergebnisse zu produzieren. Schon bei kleinen Unterschieden in den Lösungswegen wird das Durchdringen des Stoffes gefördert und es kann Wissen vernetzt werden, wenn diese Unterschiede bewusst gemacht werden. Dabei ist es sinnvoll, auch fehlerhafte Lösungen und nicht zielführende Lösungsansätze zu thematisieren, da hierdurch Ausblicke auf später zu behandelnde Stoffe möglich werden, die ebenfalls zur Vernetzung des Wissens beitragen (M. Neubrand, 2006).
Auch die Verdeutlichung verschiedener Qualitäten der unterschiedlichen Lösungswege und die Thematisierung der Angemessenheit der mathematischen Werkzeuge können zur Wissensvernetzung beitragen. Hierdurch wird eine Bewertung des Lösungsvorgangs ermöglicht und das mathematische Verständnis gefördert (M. Neubrand, 2006; Sjuts, 2002). Die Vorstellung verschiedener Lösungswege bietet den Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit sich auszusuchen, welchen Weg sie verstehen und womit sie umgehen können (Sjuts, 2002).
Des Weiteren lassen sich die vielfältigen Lösungswege auch auf ihren kognitiven Anspruchsgehalt hin unterscheiden und ermöglichen so Rückmeldungen über den Leistungsstand der

Schülerinnen und Schüler. Hierfür ist es aber unabdingbar, dass die Lehrkraft selbst über Wissen über die unterschiedlichen Lösungsmöglichkeiten einer Aufgabe verfügt und auch allgemeiner verschiedene Darstellungsmöglichkeiten eines Begriffes oder Verfahrens kennt (M. Neubrand, 2006) (siehe auch 4.1).

5.3 Kognitive Aktivierung im Unterricht

Mit den bisher beschriebenen Kennzeichen kognitiv aktivierender Aufgaben lassen sich Aussagen über das Potenzial der Aufgaben zur kognitiven Aktivierung treffen. Entscheidend ist aber vor allem die Art der Bearbeitung der Aufgaben im Unterricht (Blum et al., 2006). Allein vom Potenzial der Aufgaben zur kognitiven Aktivierung kann nicht direkt auf die kognitive Aktivierung der Schülerinnen und Schüler im Unterricht geschlossen werden (Leuders & Holzäpfel, 2011), da unter anderem in der TIMSS 1999 Videostudie (Hiebert et al., 2003) (siehe 2.2) gezeigt werden konnte, dass das Potenzial von Aufgabenstellungen bei der tatsächlichen Realisierung im Unterricht nicht immer genutzt wird (Drollinger-Vetter & Lipowsky, 2006b; J. Neubrand, 2006).
Die im vorangegangenen Abschnitt erläuterten Aspekte lassen sich auch anhand von Unterrichtsbeobachtungen zur Einschätzung der kognitiven Aktivierung der Schülerinnen und Schüler im tatsächlich realisierten Unterricht nutzen. Insbesondere kann das Potenzial der Aufgaben mit der Implementierung der Aufgaben im Unterricht anhand dieser Merkmale verglichen werden. Allerdings sind im Unterricht weitere Aspekte zu berücksichtigen, durch die sich die kognitive Aktivität der Lernenden bei der Bearbeitung der Aufgaben zeigen kann. Diese lassen sich jedoch nicht anhand der vorliegenden Aufgaben einschätzen und sind deshalb in den bisherigen Beschreibungen nicht berücksichtigt worden. Hierzu zählt beispielsweise der Grad der Selbstständigkeit der Lernenden bei der Aufgabenbearbeitung (siehe 5.3.1). Außerdem spielen Aufgaben im Mathematikunterricht zwar eine bedeutende Rolle (Bromme et al., 1990), es gibt aber dennoch Phasen, die nicht direkt mit Aufgaben in Zusammenhang stehen, und die trotzdem für die Initiierung kognitiv aktiver Lernprozesse der Schülerinnen und Schüler wichtig sind. Hierzu zähhlen beispielsweise Phasen, in denen neue Konzepte erarbeitet oder erklärt werden. Deshalb ist es wichtig, dass sich Konzeptionen zur Beschreibung kognitiver Aktivitäten im Unterricht nicht nur auf die Beschreibung des Umgangs mit den Aufgaben beschränken, sondern den gesamten Unterricht und dabei insbesondere den Umgang mit Aufgaben in den Blick nehmen. Im Folgenden werden die Konzeptionen eines kognitiv aktivierenden Unterrichts der COACTIV-Studie und des Pythagoras-Projektes vorgestellt, um die bisher erläuterten Merkmale kognitiver Aktivierung zu erweitern.

Kennzeichen kognitiv aktivierenden Unterrichts nach COACTIV

Obwohl in der COACTIV-Studie (siehe 2.3) nur die Aufgabenstellungen unabhängig vom Einsatz im Unterricht analysiert wurden, finden sich auch in diesem Zusammenhang Beschreibungen für Kennzeichen kognitiv aktivierenden Unterrichts. Hierzu zählen beispielsweise die Anregung der selbständigen Überprüfung der Gültigkeit von Lösungsvorschlägen, die Ermutigung zur Erläuterung unterschiedlicher Lösungswege und die Förderung der kognitiven Selbstständigkeit der Lernenden (Kunter et al., 2011). Als wichtige Indikatoren werden des Weiteren kognitiv aktivierende Aufgaben, das Einfordern von Erklärungen und Begründungen, kognitiv herausforderndes Umgehen mit Schülerantworten (insbesondere ein konstruktiver Umgang mit Fehlern), Nutzung von Beweisen sowie kognitiv herausforderndes Üben (z.B. durch Vernetzung von Wissen) genannt (Baumert et al., 2003; Dubberke et al., 2008).

Insbesondere zeigt sich kognitive Aktivierung an der Art und Weise der Vernetzung der Aufgaben bei der Implementation im Unterricht (Jordan et al., 2006).
Hier werden viele der schon in Abschnitt 5.2 benannten Merkmale wieder aufgegriffen (multiple Lösungswege, mathematisches Argumentieren, die Vernetzung der Inhalte), es kommen aber auch neue Aspekte hinzu: die Selbstständigkeit der Lernenden sowie ein konstruktiver Umgang mit Fehlern. In ähnlicher Form finden sich viele der bereits beschriebenen Merkmale in der Konzeption des Pythagoras-Projektes wieder.

Kennzeichen kognitiv aktivierenden Unterrichts im Pythagoras-Projekt

Im Pythagoras-Projekt (siehe 2.6) wurden Kategorien für die Einschätzung der kognitiven Aktivierung im Unterricht erarbeitet. Kognitive Aktivierung zeigt sich demnach in Unterrichtsstunden durch:

- anspruchsvolle Aufgaben und Probleme, die das Denken der Schülerinnen und Schüler auf einem hohen kognitiven Niveau anregen,
- Aktivierung das Vorwissens der Schülerinnen und Schüler,
- Ermutigung zur Erklärung eigener Ideen, Konzepte, Lösungen, usw.,
- Interaktion mit den Schülerinnen und Schülern, die ausgehend von vorhandenen Konzepten und Ideen durch Auslösung kognitiver Konflikte Umstrukturierungen sowie Erweiterungen der Wissensstrukturen initiiert,
- Zulassen bzw. Unterstützen eigener Lösungsmethoden der Schülerinnen und Schüler,
- reflektive Analysetätigkeiten (Hugener, 2008; Hugener et al., 2007).

Hier zeigt sich nochmals, welch wichtige Voraussetzung das Potenzial der Aufgaben für einen kognitiv aktivierenden Unterricht darstellt. Neue Aspekte im Vergleich zum Abschnitt 5.2 sind die kognitive Selbstständigkeit der Schülerinnen und Schüler sowie die Interaktion der Lehrkraft mit den Lernenden. Dabei wird die Bedeutung des selbstständigen Entdeckens sowie des Austauschens und Besprechens von Lösungsideen und -methoden (Hugener et al., 2007) sowie die Unterstützung reflektierenden Denkens betont (Hugener, 2008). Diese beiden Aspekte lassen sich auch in der Beschreibung kognitiv aktivierenden Unterrichts in den Bildungsstandards wiederfinden.

Kognitiv aktivierender Unterricht in den Bildungsstandards

In den Bildungsstandards heißt es zur kognitiven Aktivierung: „[…] der Unterricht stimuliert geistige Schülertätigkeiten, ermöglicht und ermutigt selbstständiges Lernen und Arbeiten, fördert lernstrategisches Verhalten (heuristische Aktivitäten) und fordert stets ein Nachdenken über das eigene Lernen und Arbeiten heraus (metakognitive Aktivitäten).“ (Blum et al. 2006, S. 29). Auch hier wird die Bedeutung der kognitiven Selbstständigkeit der Lernenden sowie metakognitiver Aktivitäten unterstrichen. Zusätzlich werden auch noch Aspekte des Problemlösens aufgezählt. Diese werden auch bei Leuders and Holzäpfel (2011) als eine Komponente der kognitiven Aktivierung der Schülerinnen und Schüler genannt werden.
Im Vergleich der drei Beschreibungen kognitiv aktivierenden Unterrichts können den bisher erläuterten Merkmalen kognitiv aktivierender Aufgaben, die sich auch für die Einschätzung der kognitiven Aktivität im Unterricht eignen, noch die Aspekte kognitive Selbstständigkeit, metakognitive Aktivitäten und ein konstruktiver Umgang mit Schülerantworten, insbesondere Schülerfehlern, hinzugefügt werden. Ihr Potenzial zur kognitiven Aktivierung der Lernenden wird im Folgenden erläutert.

5.3.1 Kognitive Selbstständigkeit

Der Aspekt der kognitiven Selbstständigkeit wurde schon in Abschnitt 5.1.1 kurz angesprochen. Er stellt allerdings eine so zentrale Grundlage der kognitiven Aktivierung dar, dass er hier noch näher erläutert wird. Nach modernen sozial-konstruktivistischen Lerntheorien werden die Lernergebnisse im Wesentlichen durch die von den Lernenden selbst ausgeführten Lernaktivitäten bestimmt (z.B. Brünken & Seufert, 2006; Mietzel, 2003). Zur Förderung von Lernprozessen sollten Lehrende unter anderem selbstreguliertes Lernen fördern und angeleitetes und selbstständiges Üben sicherstellen, da hierdurch das neu Gelernte verfestigt und automatisiert wird (Hasselhorn & Gold, 2006). In diesem Zusammenhang spielt auch die Motivation der Lernenden eine wichtige Rolle (siehe z.B. Mietzel, 2003).
Mayer (2004) merkt allerdings an, dass die kognitive Selbstständigkeit nicht dadurch erreicht wird, dass sich die Schülerinnen und Schüler die Inhalte völlig selbstständig erarbeiten müssen („pure discovery“, siehe Mayer, 2004, S. 14). Um verständnisvolles Lernen zu unterstützen, sollten die Lerngelegenheiten vorstrukturiert werden und die Lernenden beim Entdecken von den Lehrerinnen und Lehrern unterstützt werden („guided discovery“, siehe Mayer, 2004, S. 14), um kognitiv aktiv werden zu können. So beschreibt auch Wittmann die Rolle des Lehrers: „Der Lehrer liefert den Schülern Zielrahmen und Orientierungspunkte. Er versetzt sie in komplexere Lernsituationen, mit denen sie sich längere Zeit beschäftigen und an denen sie mathematische Erfahrungen erwerben können. […] Insgesamt leistet er [der Lehrer] Hilfe zur Selbsthilfe“ (Wittmann, 1997a, S. 329-330).
Sowohl bei COACTIV, als auch in der Konzeption des Pythagoras-Projektes, wird in Zusammenhang mit der kognitiven Selbstständigkeit das Erläutern von Lösungen, Ideen und Konzepten durch die Schülerinnen und Schüler betont. Dies wird auch in den Bildungsstandards im Rahmen der Kompetenz mathematisch Kommunizieren gefordert (siehe Abbildung 5.8).

(K 6) Kommunizieren

Dazu gehört:

- Überlegungen, Lösungswege bzw. Ergebnisse dokumentieren, verständlich darstellen und präsentieren, auch unter Nutzung geeigneter Medien,
- die Fachsprache adressatengerecht verwenden,
- Äußerungen von anderen und Texte zu mathematischen Inhalten verstehen und überprüfen.

Abbildung 5.8: Die Kompetenz ‚Kommunizieren‘ aus den Bildungsstandards Für den mittleren Schulabschluss (Kultusministerkonferenz, 2003)

In den Bildungsstandards werden insbesondere zwei Richtungen der Kommunikation angesprochen: einerseits das Verstehen von Texten oder mündlichen Äußerungen der Mitschülerinnen und Mitschüler oder der Lehrkraft (siehe hierzu auch Abschnitt 5.2.3), andererseits die selbstständige, verständliche Darstellung von Überlegungen, Lösungswegen oder Ergebnissen. In der Diskussion oder bei der Präsentation des Erarbeiteten erwerben und entwickeln die Lernenden durch die Versuche des Ausdrückens der eigenen Ideen notwendigerweise die entsprechenden Begriffe, üben den Umgang mit der Fachsprache und die Auswahl geeigneter Repräsentationsformen (Hepp & Miehe, 2006). Für die adäquate Präsentation eines Sachverhaltes müssen die Schülerinnen und Schüler den mathematischen Inhalt durchdringen, indem sie sich selbst damit auseinandersetzen. Dies setzt wiederum voraus, dass sie über geeignete Strategien zur selbstständigen Erarbeitung eines Gegenstandes verfügen (Drüke-Noe & Jahnke, 2007).

5.3.2 Metakognitive Aktivitäten

In der Mathematik spielen vielfältige Reflexionen von Vorgehensweisen und Begründungen eine zentrale Rolle (siehe z.B. Bauer, 1990; Peschek, Prediger, & Schneider, 2008; Skovsmose, 2006). Der Begriff der Reflexion ist dabei so vielschichtig und vielfältig, dass er sich nicht einfach definieren lässt. Ganz allgemein meint „Reflexion […] das Nachdenken über Zusammenhänge, die nicht unmittelbar (objektsprachlich) gegeben sind“ (Peschek et al., 2008, S. 3). Auch im Mathematikunterricht spielen diese reflektierenden Denktätigkeiten eine wichtige Rolle, denn ohne Reflexion können keine Lernprozesse stattfinden (M. Neubrand, 1990; Peschek et al., 2008; Prediger, 2007).
Nach sozialkonstruktivistischen Lerntheorien wird Lernen als Aufbau eines reichhaltigen Beziehungsnetzwerkes verstanden (siehe 5.1.1). Das Herstellen der Beziehungen von neu zu Lernendem mit bestehendem Wissen erfordert ein Bewusstmachen über die bisher selbst aufgebauten Gedächtnisstrukturen. Hier wird einerseits die rückwärtsgerichtete Kontrollfunktion, aber auch die vorwärtsgerichtete Konstruktionsfunktion reflektierenden Denkens deutlich, die die geistige Entwicklung voranbringt (M. Neubrand, 1990). Durch reflektierende Analysetätigkeiten werden also Verbindungen explizit gemacht und Transfer ermöglicht (Hugener, 2008). Außerdem fördern Reflexionen das Verständnis und helfen, Wissen auch nachhaltig verfügbar zu machen (Kaune, 2006; Peschek et al., 2008; Sjuts, 2001). Insbesondere können Reflexionen helfen, mögliche Fehlvorstellungen aufzudecken und zu beheben (Skovsmose, 2006). In Zusammenhang mit Mathematikunterricht können dabei verschiedene Arten von Reflexion unterschieden werden:

- Die *mathematisch-orientierte Reflexion* beschäftigt sich mit mathematischen Konzepten und Algorithmen, beispielsweise der Korrektheit einer Rechnung oder der Gültigkeit eines Satzes.
- Die *modellorientierte Reflexion* thematisiert die Beziehung zwischen der außermathematischen Realität und der Mathematik und prüft beispielsweise die Gültigkeit eines Modells oder die Angemessenheit der im Modellierungsprozess getroffenen Annahmen zur Vereinfachung.
- Die *kontextorientierte Reflexion* beschreibt die Bedeutung der Mathematik im politischen, sozialen oder kulturellen Kontext und thematisiert beispielsweise die Notwendigkeit der Anwendung von Mathematik bei der Lösung eines Problems oder die Konsequenzen der Anwendung von mathematischen Mitteln für den Kontext.
- Die *lebensweltorientierte Reflexion* zeigt den gesellschaftlichen Nutzen der Mathematik sowie die Bedeutung der Mathematik für das eigene Leben auf (Peschek et al., 2008; Skovsmose, 1998).

Der erste Punkt beinhaltet dabei nicht nur das Nachdenken über die Inhalte an sich (z.B. Korrektheit von Beweisen, Formulierung von Definitionen) sondern auch über die Begründung und Bedeutung mathematikspezifischer Verfahrensweisen (z.B. heuristische Verfahren, Beweistechniken, Arten der Begriffsbildung) (siehe M. Neubrand, 1990; Sjuts, 1999).
Kaune (2006) betont insbesondere das Reflektieren als metakognitive Aktivität, also als eine bestimmte Art interner kognitiver Denkprozesse auf höchster Ebene, sozusagen das Denken über das eigene Denken. In ihrer Arbeitsgruppe wird unter Reflexion „ein auf die Sache gerichtetes vergleichendes und prüfendes Nachdenken, Überlegen und Betrachten, das durch Differenziertheit, Distanziertheit und Vertiefung gekennzeichnet ist“ (Sjuts, 1999, S. 40) verstanden. Insgesamt zeigt sich hier, „dass das lernbegleitende Reflektieren den innerfachlichen Lernprozess oft gut befördern kann“ (Peschek et al., 2008, S. 9).

Neben dem Reflektieren spielt in der Mathematik als einer stark strukturierten Disziplin (Kilpatrick et al., 2001), häufig auch strukturiertes und verallgemeinerndes Denken eine wichtige Rolle. In Abschnitt 5.1.1 wird bereits die Bedeutung eines strukturierten Wissensaufbaus vor allem für die Vernetzung des Wissens erläutert. Verallgemeinerungen des Wissens tragen hingegen insbesondere dazu bei, dass das Wissen aus dem Erwerbszusammenhang gelöst wird und flexibel eingesetzt werden kann (siehe auch 5.2.4).

5.3.3 Konstruktiver Umgang mit Schülerantworten

Ein konstruktiver Umgang mit Schülerantworten zeigt sich vor allem an bisher beschriebenen Aspekten kognitiver Aktivierung, beispielsweise durch die selbstständige Überprüfung der Antwort durch die Schülerinnen und Schüler (siehe 5.3.1), eine Aufforderung zur Präsentation der Ergebnisse (siehe 5.3.1), Fragen nach Begründungen (siehe 5.2.3), Vergleiche verschiedener Lösungswege (siehe 5.2.4) oder die Anregung metakognitiver Aktivitäten (siehe 5.3.2).
Insbesondere lassen sich durch den Umgang der Lehrperson mit Fehlern im Unterricht Rückschlüsse auf das fachdidaktische Wissen ziehen (vgl. 4.1). „Fehler sind natürliche Begleiterscheinungen des Lernens und können vielfach konstruktiv genutzt werden.“ (Niedersächsisches Kultusministerium, 2006, S. 9). Als Fehler wird dabei in Anlehnung an Prediger und Wittmann (2009) eine Äußerung, ein Sachverhalt oder Prozess verstanden, der von der (im Unterricht etablierten) mathematischen Norm abweicht. Voraussetzung für einen konstruktiven Umgang mit Fehlern ist, dass sowohl Lehrerinnen und Lehrer als auch Schülerinnen und Schüler Fehler als unabdingbare Begleiterscheinungen des Lernens ansehen, denn ein Bloßstellen nach einem Fehler kann den Lernprozess blockieren (Prediger & Wittmann, 2009). Außerdem sollten die Lernenden:

1. den Fehler erkennen, also *einsehen, dass etwas falsch ist* und insbesondere, *was falsch ist*,
2. den Fehler erklären können, also *verstehen, wie es dazu gekommen ist*,
3. die Möglichkeit haben, den Fehler zu korrigieren, also eine *richtige Vorgehensweise oder Vorstellung zu erwerben* (Prediger & Wittmann, 2009, S. 5).

Dies kann beispielsweise durch geeignete Nachfragen erreicht werden. Außerdem ist es förderlich, Situationen, in denen das Verfahren, die Formel, usw. gültig ist, mit Situationen, in denen diese Regeln nicht angewendet werden dürfen, zu kontrastieren. Dabei sollte die Bearbeitung möglichst schülerzentriert von der Lehrperson moderiert werden, wobei vor allem auch metakognitive Impulse die gemeinsame Suche nach Fehlermustern und Ursachen unterstützen können (Prediger & Wittmann, 2009). Des Weiteren lässt sich durch verschiede Unterrichtsmethoden ein aktiver Umgang mit Fehlern im Unterricht unterstützen (Oser & Spychiger, 2005). Hierzu zählen beispielsweise vorbereitete Folien zur selbstständigen Kontrolle der Hausaufgaben, der Austausch über verschiedene Vorgehensweisen in Kleingruppen oder gegenseitige Hilfe bei der Partnerarbeit (Prediger & Wittmann, 2009).
Häufig ist aber im Unterricht zu beobachten, dass die Lehrperson als Reaktion auf einen Fehler im Unterrichtsgespräch einen weiteren Lernenden aufruft. Dieser benennt die richtige Antwort und der Fehler wird nicht weiter thematisiert. Hier haben sich die Schülerinnen und Schüler zwar gegenseitig korrigiert, allerdings wird weder die Ursache für den Fehler geklärt, noch werden Lerngelegenheiten zur Vermeidung des Fehlers bei späteren Aufgabenbearbeitungen eröffnet (Oser & Spychiger, 2005; Prediger & Wittmann, 2009).

Kognitiv aktivierende Unterrichtselemente haben sich in verschiedenen Studien mehr oder weniger als bedeutsam für die Leistungsentwicklung der Schülerinnen und Schüler gezeigt. Die hier vorgestellte Konzeption der kognitiven Aktivierung vereint sowohl Elemente kognitiv aktivierender Aufgaben als auch kognitiv aktivierenden Unterrichts. Dabei wurden die einzelnen Aspekte größtenteils auf theoretischer Ebene begründet hergeleitet, wie es auch in den dieser Konzeption zugrundeliegenden Studien durchgeführt wurde. Der Einfluss der einzelnen vorgestellten Elemente auf die kognitive Aktivität und die Leistungsentwicklung der Schülerinnen und Schüler ist teilweise noch empirisch zu überprüfen.

5.4 Verbindung fachdidaktisches Wissen und kognitive Aktivierung

Die in diesem Kapitel vorgestellten Dimensionen der kognitiven Aktivierung werden im Rahmen dieser Arbeit zur Einschätzung der Nutzung des fachdidaktischen Wissens im Unterricht herangezogen, da sich im Unterricht das fachdidaktische Wissen nicht direkt messen lässt. Es werden jeweils das gemeinsame Auftreten von Situationen, für deren Bewältigung fachdidaktisches Wissen nötig ist (z.B. Reaktion auf Schülerantworten, Auswahl von Beispielen und Anordnung von Aufgaben, siehe 4.1.5) und von Aspekten kognitiver Aktivierung (z.B. kognitive Selbstständigkeit der Schülerinnen und Schüler, Einforderung von Begründungen, begriffliches Denken) miteinander in Beziehung gesetzt. Im Prinzip lassen sich viele Aspekte der kognitiven Aktivierung in Zusammenhang mit allen drei Dimensionen des Lehrerwissens finden. Beispielsweise kann das Einfordern von Begründungen ein Anzeichen für schülerbezogenes Wissen sein, da es eine wünschenswerte Reaktion auf Schülerantworten darstellt. Das Einfordern von Begründung sagt aber auch etwas darüber aus, was der Lehrer über das Verständlichmachen mathematischer Inhalte weiß, da die Schülerinnen und Schüler durch Begründungen vielfältige Verknüpfungen herstellen können. Inhaltsbezogenes Wissen kann sich dagegen an der Auswahl von Aufgaben zeigen, die überhaupt Begründungen ermöglichen, oder am Erkennen des Argumentationspotenzials einer Aufgabe. In ähnlicher Weise fließen auch die drei Dimensionen des fachdidaktischen Wissens bei der didaktischen Strukturierung von Unterricht ineinander, trotzdem wird im Rahmen der Auswertungen dieser Arbeit die Dreiteilung in die Ecken des didaktischen Dreiecks (siehe 4.1.5) beibehalten, um die einzelnen Aspekte genauer zu analysieren und im Detail auf einzelne Aspekte achten zu können. Für die Einschätzung der drei Dimensionen des fachdidaktischen Wissens ist es notwendig, auch die verschiedenen Aspekte der kognitiven Aktivierung den drei Ecken des didaktischen Dreiecks zuzuordnen, um bei der Ergebnisdarstellung einheitlich die Aspekte der kognitiven Aktivierung mit den Dimensionen des fachdidaktischen Wissens in Beziehung zu setzen. Die Zuordnung in Abbildung 5.9 stellt dabei nur eine Möglichkeit der Unterteilung dar. Insbesondere die Übergänge sind fließend.

Schülerbezogenes Wissen	Wissen über das Verständlichmachen	Inhaltsbezogenes Wissen
• Förderung der kognitiven Selbstständigkeit der Lernenden • Ermutigung zur Erklärungen eigener Vorgehensweisen/ unterschiedlicher Lösungswege • Anregung der selbständigen Überprüfung der Gültigkeit der Lösungsvorschläge	• Argumentationen • Verwendung verschiedener Darstellungen und Repräsentationsformen • außer- oder innermathematische Modellierungen • Reflexion über mathematisches Denken • Vergleich verschiedener Lösungswege	• stoffliche Verbindungen werden hergestellt → inhaltliche Vernetzung im Unterricht • Verbindungen zum Vorwissen • die drei Typen mathematischer Denkweisen (Faktenwissen, prozedurales und begriffliches Wissen) treten ausgewogen auf

Abbildung 5.9: Zuordnung der Aspekte der kognitiven Aktivierung zu den Dimensionen des fachdidaktischen Wissens

6 Entwicklung der Analyseinstrumente

Im Rahmen dieser Arbeit soll die Nutzung des fachdidaktischen Wissens von Mathematiklehrerinnen und -lehrern bei der Planung, Durchführung und Reflexion von Unterricht analysiert werden. Es liegen bisher keine Klassifikationssysteme vor, die sich direkt zur Beschreibung der Nutzung des professionellen Wissens von Lehrerkräften eignen (siehe 2.7). Deshalb wird im Rahmen dieser Arbeit auf Grundlage der bestehenden Klassifikationen zum fachdidaktischen Wissen (siehe 4.1) ein Klassifikationssystem für die Einschätzung der Nutzung des fachdidaktischen Wissens anhand von Unterrichtsbeobachtungen entwickelt. Da das Erkennen des Potenzials von Aufgaben eine wichtige Komponente fachdidaktischen Wissens darstellt (siehe 4.1), werden einerseits Kategorien für eine Aufgabenklassifikation aus vorhandenen Aufgabenklassifikationssystemen übernommen. Das so ermittelte Potenzial der Aufgaben kann mit dem Einsatz der Aufgaben im Unterricht und den Aussagen der Lehrerinnen und Lehrer in der Unterrichtsplanung und im reflektierenden Interview verglichen werden. Hierzu werden die erhobenen Daten (schriftliche Unterrichtsplanungen, Unterrichtsvideos und reflektierendes Interview, siehe 7.3) anhand von Kategorien zum fachdidaktischen Wissen inhaltsanalytisch ausgewertet. Da sich die Qualität der Nutzung des Wissens, bzw. die Umsetzung des Wissens in Handlungen, nur indirekt einschätzen lässt (siehe 4.4), wird in der qualitativen Inhaltsanalyse das fachdidaktische Wissen in Kombination mit Kategorien der kognitiven Aktivierung ausgewertet, da die kognitive Aktivierung eine wichtige Qualitätsdimension von Unterricht darstellt (siehe Kapitel 5).
Im Folgenden wird zunächst das Klassifikationssystem für die Analyse des Potenzials der eingesetzten Aufgaben unabhängig vom Unterricht erläutert (siehe 6.1). Anschließend werden die Kategorien zum fachdidaktischen Wissen und zur kognitiven Aktivierung vorgestellt, die im Rahmen der qualitativen Inhaltsanalyse verwendet wurden (siehe 6.2). Dabei werden auch einige Kategorien zum mathematischen Fachwissen, zu Überzeugungen der Lehrerinnen und Lehrer und zu allgemeineren Aspekten integriert, die eng mit dem fachdidaktischen Wissen zusammenhängen (siehe Kapitel 3 und 4).

6.1 Entwicklung des Kategoriensystems für die Aufgabenklassifikation

6.1.1 Rolle der Aufgaben

Nach Bromme, Seeger & Steinbring (1990) sind mathematische Aufgaben

> für das Lernen von Mathematik, für den Unterricht, für die Unterrichtsvorbereitung und für die Evaluation des Wissensstandes der Schüler von zentraler Bedeutung […], denn:
> - Aufgaben sind in der traditionellen Mathematik-Didaktik stets ein Mittel gewesen, den Lernstoff zu organisieren (vgl. Lenné, 1969, S. 34-35; Walther, 1985).Verschiedene Aufgabentypen haben dazu gedient, die unterschiedlichen Stoffgebiete voneinander zu trennen.
> - Aufgaben sind im Mathematikunterricht allgegenwärtig. Empirische Untersuchungen zeigen, dass Unterrichtsvorbereitung und Unterrichtsablauf zu weiten Teilen um Aufgaben herum organisiert sind. Sie wirken als Orientierungs- und Kristallisationspunkte für die Lehrer-Schüler-Interaktion (vgl. Bromme, 1981; Hopf, 1980).
> - Aufgaben sind das Objekt der Lernanstrengungen der Schüler. Für eine psychologische Theorie des Lernens von Schülern ist die Bedeutung der Aufgaben für Verstehen und Lernen zu analysieren. Dabei geht es vor allem um den Zusammenhang von Aufgaben und Fehlern. Versteht man Fehler nicht bloß als Abweichung vom richtigen Weg der eindeutigen Aufgabenlösung, sondern als Hinweis auf die konstruktive Natur des Lernens, dann verändert sich damit auch der Begriff von ‚Aufgabe'. Eine Theorie des Lernens im Mathematikunterricht benötigt

einen theoretischen Begriff von Aufgabe, in dem diese Beziehung zu Fehlern berücksichtigt wird (Bromme et al., 1990, S. 1-2).

Aufgaben sind demnach für die Lehrerinnen und Lehrer ein entscheidendes Mittel zur Gestaltung des Mathematikunterrichts. Dabei wird in dieser Arbeit in Anlehnung an COACTIV folgende Definition von ‚Aufgaben' zugrundegelegt: „Aufgaben sind eine Aufforderung zur *gezielten* Bearbeitung eines *eingegrenzten* mathematischen Themas. Aufgaben sind immer Auseinandersetzung mit einem *Beispiel* eines Sachverhalts" (J. Neubrand, 2002, S. 16-17; vgl. auch Christiansen & Walther, 1986; Glaeser 1980). Dabei können Aufgaben aber durchaus ‚allgemeine' Beziehungen thematisieren, solange es sich um die „Bearbeitung und Auseinandersetzung mit einer spezifischen mathematischen Situation handelt" (J. Neubrand, 2002, S. 17). Dagegen ist eine einzelne Frage im Unterrichtsgespräch, die der Wiederholung oder Erklärung eines Sachverhalts, der Fortführung des Unterrichtsverlaufes oder Ähnlichem dient, keine Aufgabe nach obiger Definition (J. Neubrand, 2002).

Nach Jordan et al. (2008) hat die Lehrkraft zwei Möglichkeiten, Mithilfe von Aufgaben als Gestaltungsmittel Einfluss auf den Unterricht zu nehmen. Einerseits durch die *Auswahl und Anordnung der Aufgaben*, da die kognitive Aktivität der Schülerinnen und Schüler eng daran gekoppelt ist, ob überhaupt und wenn ja in welcher Abfolge Aufgaben mit adäquatem kognitivem Potential als Gelegenheit zum verständnisvollen Lernen von Mathematik in den Unterricht eingebracht werden. Andererseits wird die Art und Weise, wie die Aufgaben im Unterricht verwendet werden, also der *Umgang mit den Aufgaben*, auf die Motivation, das Selbstkonzept sowie das Interesse der Schülerinnen und Schüler wirken (vgl. J. Neubrand, 2002).

Es gibt zum Beispiel nach J. Neubrand (2002) sowie Bromme et al. (1990) Kategorien, die es erlauben, die Art der Einbindung von Aufgaben in den Unterricht – z.B. die Vernetzung des Unterrichts durch Aufgaben, die Funktion der Aufgabe innerhalb des Unterrichtsablaufs etc. – zu beschreiben. Dies führt J. Neubrand auch exemplarisch an Stunden aus der TIMSS-Video-Studie aus (J. Neubrand, 2002, 2006). Insbesondere hat sich hier gezeigt, dass auf der Grundlage einer Analyse der im Unterricht gestellten Aufgaben tatsächlich unterschiedliche Strukturen von Lerngelegenheiten aufgezeigt werden können (vgl. Jordan et al., 2008). Die von der Lehrkraft eingesetzten Aufgaben sind daher die wichtigsten Indikatoren dafür, ob der Unterricht Lerngelegenheiten für die jeweiligen Zielbereiche zur Verfügung stellt (siehe z.B. Bromme et al., 1990). Deshalb wird im Rahmen dieser Arbeit die Nutzung des fachdidaktischen Wissens der Lehrerinnen und Lehrer vor allem anhand der eingesetzten Aufgaben analysiert. Zu diesem Zweck wird auch das Potenzial der Aufgaben anhand der im folgenden Abschnitt vorgestellten objektiven Kennzeichen von Aufgaben bewertet.

6.1.2 Objektive Kennzeichen der Aufgaben

Zur Analyse der objektiven Kennzeichen[9] der im Unterricht bearbeiteten Aufgaben wird das von Jordan et al. (2006) entwickelte Klassifikationsschema herangezogen, welches für die Analyse einer großen Aufgabenanzahl im Rahmen der COACTIV-Studie entwickelt wurde. Dieses Klassifikationssystem fokussiert vor allem das Potenzial der Aufgaben zur kognitiven Aktivierung der Schülerinnen und Schüler (Jordan et al., 2006). Da im Rahmen dieser Untersuchung die kognitive Aktivierung der Schülerinnen und Schüler auch im Unterricht zur Einschätzung des fachdidaktischen Wissens herangezogen wird, scheint dieses Klassifikationssystem für einen Vergleich zwischen dem Potenzial der Aufgaben mit der Umsetzung der Aufgaben im Unterricht und den Aussagen der Lehrerinnen und Lehrer gut geeignet zu sein.

[9] Unter objektiven Kennzeichen werden im Anschluss an Neubrand (2002) diejenigen Merkmale verstanden, die sich unabhängig vom Unterricht aus der Aufgabenstelllung erfassen lassen.

So können Rückschlüsse auf das fachdidaktische Wissen der Lehrerinnen und Lehrer gezogen werden. Darüber hinaus können durch einen Vergleich der objektiven Kennzeichen der im Unterricht eingesetzten Aufgaben untereinander auch Aussagen über die Entwicklung des kognitiven Anforderungsniveaus und die inhaltliche Vernetzung des Unterrichts getroffen werden.
Das Klassifikationsschema von Jordan et al. (2006) baut auf Teilen eines von J. Neubrand (2002) entwickelten Klassifikationsschema auf, welches Kategorien enthält, mit deren Hilfe Aussagen über die Vernetzung der Aufgaben gemacht werden können. Hierzu zählen die Kategorien ‚Wissenseinheit', ‚mathematischer Gegenstand' und ‚Kontext'. Diese Kategorien werden in das hier verwendete Analyseinstrument integriert. Außerdem werden die Kategorien von Jordan et al. (2006) und J. Neubrand (2002) teilweise an das qualitative Vorgehen angepasst, indem sie etwas umstrukturiert werden. Dies wird bei der Beschreibung der entsprechenden Kategorien näher erläutert.

Mathematische Stoffgebiete

Zunächst werden die Aufgaben daraufhin analysiert, aus welchen mathematischen Stoffgebieten Wissen zur Bearbeitung der Aufgabe benötigt wird. Hierbei kann einerseits festgestellt werden, ob der Fokus der Aufgabe im Bereich Arithmetik, Algebra, Geometrie, oder Stochastik liegt. Gleichzeitig kann aber anhand von Kodierungen zu mehreren Stoffgebieten deutlich werden, ob zumindest auch teilweise Wissen aus anderen Stoffgebieten in der Aufgabe benötigt wird. Auch innerhalb der verschiedenen Teilgebiete kann bei der Analyse festgehalten werden, welches inhaltliche Wissen genau in der Aufgabe benötigt wird. Anstelle der bei Jordan et al. (2006) vorgegebenen Codes, die für die quantitativen Analysen im Rahmen der COACTIV-Studie entwickelt wurden, werden für die hier vorzunehmenden qualitativen Analysen möglichst genaue Beschreibungen des innerhalb des jeweiligen Stoffgebietes benötigten Wissens vorgenommen. Hierzu können auch die Begriffe „Wissenseinheit" (J. Neubrand, 2002, S. 95) und „mathematischer Gegenstand" (J. Neubrand, 2002, S. 142) von Bedeutung sein.

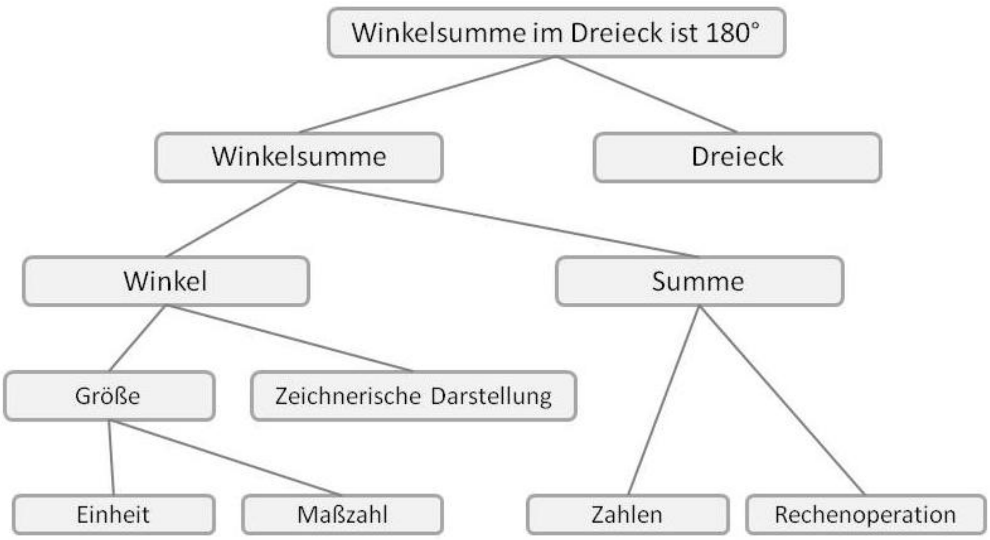


Abbildung 6.1: Wissenseinheit ‚Winkelsumme im Dreieck ist 180°' (J. Neubrand, 2002, S. 100)

Als (die zur Lösung einer Aufgabe notwendigen) Wissenseinheiten bezeichnet J. Neubrand „Die von einem Experten in Hinblick auf die Anforderungen der jeweiligen Aufgabe aktivierten Wissensbestandteile" (J. Neubrand, 2002, S. 95). Sie betont, dass mit Wissenseinheiten

die objektive Anforderungsstruktur einer Aufgabe aufgezeigt werden kann. Insbesondere beinhalten Wissenseinheiten hierarchisch aufgebautes Wissen. Die Wissenseinheit ‚Winkelsumme im Dreieck ist 180°' beinhaltet z.B. auf einer unteren Ebene Wissen darüber, was ein Dreieck oder eine Winkelsumme ist. In Abbildung 6.1 wird eine mögliche hierarchische Struktur zur Wissenseinheit ‚Winkelsumme im Dreieck ist 180°' dargestellt.
Als Wissenseinheit wird demnach die hierarchisch oberste Ebene des zur Lösung der Aufgabe benötigten Wissens bezeichnet. Dies ist wichtig für die Unterscheidung, ob eine oder mehrere Wissenseinheiten zur Lösung der Aufgaben notwendig sind (J. Neubrand, 2002). Hieraus lassen sich nun Rückschlüsse auf die Verknüpfung verschiedener Stoffgebiete (z.B. Algebra und Geometrie) oder verschiedener Teilgebiete eines Stoffgebietes (z.B. Flächenberechnung zusammengesetzter Figuren und Umfangsberechnungen zusammengesetzter Figuren innerhalb der Geometrie) ziehen.
„Unter ‚mathematischem Gegenstand' – oder gelegentlich angemessener ‚mathematischem Objekt' – wird ein bestimmtes, mehrere Elemente zusammenfassendes Sachgebiet, das als Einheit betrachtet werden kann, oder ein einheitlicher Themenkreis, aus dem Aufgaben ausgewählt werden, verstanden." (J. Neubrand, 2002, S. 142). Beispielsweise kann ein Sachthema (z.B. Prozentrechnung) einen mathematischen Gegenstand beschreiben. Bei geometrischen Figuren (z.B. Raute) spricht man eher von mathematischen Objekten (J. Neubrand, 2002). Durch den Vergleich der Wissenseinheiten und des mathematischen Gegenstandes/der Gegenstände der einzelnen Aufgaben, können Vernetzungen zwischen den Aufgaben aufgezeigt werden.

Kontext

Durch die Codierung der Kontexte können zwar nicht die kognitiven Anforderungen einer Aufgabe bestimmt werden (dies geschieht durch die Codierung der damit zusammenhängenden Modellierungen, siehe unten), es können aber Vernetzungen zwischen den Aufgaben aufgezeigt werden (J. Neubrand, 2002), weshalb diese Kategorie in das Klassifikationsschema integriert wurde. Es wird im Anschluss an J. Neubrand (2002) zwischen *außermathematischen* und *innermathematischen Kontexten* unterschieden. Die *außermathematischen Kontexte* lassen sich in drei Bereiche gliedern:

- ‚Real world' Kontexte, in denen reale Daten und Zusammenhänge verwendet oder authentische Situationen modelliert werden.
- ‚Scheinbar real world' Kontexte, bei denen konstruierte Daten und Zusammenhänge in Aufgaben eingekleidet werden.
- ‚Measurement' Kontexte, in denen lediglich mit Größen gerechnet wird. Hierzu zählen auch Rechnungen mit Anzahlen (z.B. 400 Schüler, 30 Orangen) (J. Neubrand, 2002).

Ein innermathematischer Kontext liegt vor, wenn „die zu bearbeitende Wissenseinheit in einen weiteren mathematischen Zusammenhang eingebettet ist, der über die zu bearbeitende Wissenseinheit hinausgeht und innermathematische Bezüge erfordert" (J. Neubrand, 2002, S. 112). Dabei können verschiedene Stoffgebiete (z.B. Geometrie und Algebra) aufeinander bezogen werden (globaler innermathematischer Kontext) oder es werden verschiedene Teilgebiete innerhalb eines Stoffgebietes (z.B. Flächen von Dreiecken und Vierecken) gleichzeitig angesprochen (lokaler innermathematischer Kontext). Ein lokaler innermathematischer Kontext liegt auch vor, wenn an früher gelernte (bereits automatisierte) Stoffe angeknüpft wird (J. Neubrand, 2002).

Mathematische Tätigkeiten

Die Codierung der mathematischen Tätigkeiten gibt Aufschluss über die in der Aufgabe zu aktivierenden kognitiven Prozesse (Jordan et al., 2006) (siehe 5.2.3).

Außermathematisches Modellieren

Außermathematisches Modellieren findet statt, wenn Übersetzungen zwischen Realität und Mathematik vorgenommen werden müssen (siehe 5.2.3). Dabei ist das Niveau der Modellierung niedrig, wenn das Modell explizit gegeben ist oder nahe liegt, die Interpretation ist dann direkt möglich. Sind die Übersetzungen überschaubar, aber nicht unmittelbar auszuführen, da z.B. verschiedene Gegenstände miteinander in Beziehung gesetzt werden müssen oder die Mathematisierung mehrere Schritte erfordert, so ist die außermathematische Modellierung auf mittlerem Niveau einzuordnen. Das Niveau der Modellierung ist dagegen hoch, wenn verwendete mathematische Modelle verglichen, reflektiert oder kritisch beurteilt werden müssen, oder wenn das zu entwickelnde mathematische Modell sehr komplex ist (Jordan et al., 2006).

Innermathematisches Modellieren

Innermathematisches Modellieren ist dagegen erforderlich, wenn Übersetzungen innerhalb der Mathematik nötig sind oder wenn zunächst ein Ansatz gefunden werden muss (siehe 5.2.3). Wird der Lösungsansatz durch die Aufgabenstellung nahe gelegt und werden nur Kenntnisse des in der Aufgabe betrachteten mathematischen Gegenstandes benötigt, so ist das innermathematische Modellierungsniveau niedrig. Auch wenn nur ein Modellierungsschritt zur Modellierung nötig ist, wird das Modellierungsniveau als niedrig eingeordnet. Müssen für den Lösungsansatz zunächst Verbindungen zu anderen mathematischen (Teil-) Gebieten hergestellt werden, die über den in der Aufgabe angesprochenen mathematischen Gegenstand hinausgehen, oder müssen mehrere Modellierungsschritte ausgeführt werden, so ist eine innermathematische Modellierung auf mittlerem Niveau erforderlich. Das Niveau ist dagegen hoch, wenn zur Lösung der Aufgabe eine umfassende Strategie entworfen werden muss oder das Nachdenken über eine ganze Klasse von mathematischen Gegenständen erforderlich ist. Müssen allgemeine Aussagen getroffen oder Lösungswege kritische reflektiert werden, ist das Niveau der innermathematischen Modellierung ebenfalls hoch (Jordan et al., 2006).

Mathematisches Argumentieren

Das mathematische Argumentieren kann sich sowohl auf reale Sachverhalte als auch auf innermathematische Prozesse beziehen (siehe 5.2.3). Ist für die Argumentation nur die Wiedergabe von Standardargumenten sowie einschrittigen oder rein rechnerischen Argumenten nötig, so ist das Niveau der Argumentation niedrig. Müssen überschaubare mehrschrittige mathematische Argumente entwickelt und dargelegt oder gegebenenfalls nachvollzogen werden, die auch begrifflich geprägt sind, so wird auf mittlerem Niveau argumentiert. Das Niveau der Argumentation ist dagegen hoch, wenn komplexe mathematische Argumente (z.B. Begründungen, Beweise, Strategien, Verallgemeinerungen) entwickelt und schriftlich dargelegt oder nachvollzogen werden müssen, oder wenn verschiedene Arten von mathematischen Argumentationen verglichen und bewertet werden sollen (Jordan et al., 2006).

Gebrauch mathematischer Darstellungen
In der Kategorie Darstellungen werden hier in Anlehnung an COACTIV insbesondere die ikonischen Repräsentationsformen nach Bruner (1972) betrachtet (siehe 5.2.3). Dazu gehören z.B. Bilder, Tabellen, Graphen und Diagramme. Müssen lediglich Informationen aus gegebenen Darstellungen entnommen oder Standarddarstellungen mittels gegebener Informationen angefertigt oder fortgesetzt werden, so werden die Darstellungen nur auf niedrigem Niveau verwendet. Werden geeignete Darstellungen ausgewählt, findet ein Wechsel zwischen Darstellungen statt oder werden Zusammenhänge zwischen den Darstellungen hergestellt, handelt es sich um Verwendung von Darstellungen auf mittlerem Niveau. Das Niveau ist dagegen hoch, wenn gegebene Darstellungen beurteilt und reflektiert werden müssen (Jordan et al., 2006).

Typen mathematischen Arbeitens

Anhand der Codierung der mathematischen Tätigkeiten und der Kontexte kann festgestellt werden, welche kognitiven Prozesse bei der Lösung der Aufgabe potenziell überwiegen (Jordan et al., 2006). Es wird in Anlehnung an das in Zusammenhang mit der PISA-Studie entwickelte Konzept der ‚mathematical literacy' (siehe z.B. M. Neubrand, 2003; M. Neubrand, 2004) zwischen *technischen Aufgaben* sowie *rechnerischen* oder *begrifflichen Modellierungs- und problembezogenen Aufgaben* unterschieden (M. Neubrand, 2004).
Die *technischen Aufgaben* haben keinerlei Kontextanbindung und erfordern die kalkülhafte Durchführung eines vorgegebenen Ansatzes mithilfe bekannter mathematischer Prozeduren. Es wird unterschieden, ob es sich bei dem benötigten Wissen um Faktenwissen oder um Fertigkeiten und somit eher einfaches prozedurales Wissen handelt (siehe 5.2.2). Dies wurde bei Jordan et al. (2006) in einer eigenen Kategorie kodiert, kann aber in diesem qualitativen Design in einer Kategorie zusammengefasst werden.
Bei Aufgaben, die einen inner- oder außermathematischen Kontext haben und die Modellierungen im Sinne von Abschnitt 5.2.3 erfordern, ist zu entscheiden, ob in der Phase der Verarbeitung eher prozedurales oder begriffliches Denken erforderlich ist (siehe 5.2.2). Analog zur Bezeichnung bei PISA und COACTIV werden Modellierungsaufgaben, die in der Phase der Verarbeitung eher prozedurales Wissen erfordern, als *rechnerische Modellierungs- und problembezogene Aufgaben* charakterisiert. Hier führt die Mathematisierung auf einen rechnerisch zu lösenden Ansatz. Dagegen werden Modellierungsaufgaben, die eher begriffliches Wissen erfordern, als *begriffliche Modellierungs- und problembezogene Aufgaben* bezeichnet. Insbesondere erfordern diese Aufgaben das Herstellen von Zusammenhängen oder das Erkennen von Beziehungen zwischen den einzelnen mathematischen Gegenständen einer Aufgabe (siehe z.B. Klieme, Neubrand, et al., 2001; M. Neubrand, 2003, 2004).

Weitere Kategorien für die objektiven Kennzeichen

Im Rahmen dieser Arbeit haben sich vor allem die bisher vorgestellten Kategorien aus den bestehenden Aufgabenklassifikationssystemen als geeignet für die qualitativen Analysen und insbesondere für den Vergleich des Potenzials der Aufgaben mit der Umsetzung im Unterricht herausgestellt. Die bisher vorgestellten Aspekte lassen sich ebenfalls im Unterricht beobachten oder ermöglichen Aussagen über die Vernetzung des Unterrichts. Es wurden bei der Aufgabenklassifikation aber auch weitere Kategorien berücksichtigt, die allerdings nur am Rande in die Auswertung mit eingeflossen sind und deshalb im Folgenden nur kurz beschrieben werden. Hierzu zählen die *Grundvorstellungen*, die *sprachlogische Komplexität*, die Art der *Aufgabenstellung*, der mögliche *Lösungsprozess* und das *Ergebnis*.

In der Kategorie *Grundvorstellungen* wird die Intensität der angesprochenen Grundvorstellungen festgehalten. Dabei wird einerseits berücksichtigt, ob nur eine oder mehrere Grundvorstellungen für die Lösung der Aufgabe aktiviert werden müssen und ob es sich um elementare (z.B. Subtraktion) oder erweiterte Grundvorstellungen (z.B. Einsetzungsvorstellung beim Variablenbegriff) handelt (Jordan et al., 2006) (siehe 5.2.3).
Die Kategorie *sprachlogische Komplexität* beschreibt, „inwieweit der sprachliche Fluss bei der Aufgabenstellung mit dem Lösungsprozess in einem mathematischen Modell übereinstimmt“ (Jordan et al., 2006, S. 53). Das Niveau der sprachlogischen Komplexität ist umso höher, je schwieriger es ist, die relevanten Informationen aus einem Kontext zu identifizieren und in eine mathematische Beschreibung zu überführen. Außerdem erhöht die Zahl der Haupt- und Nebensätze die Schwierigkeit (Jordan et al., 2006) (siehe 5.2.3).
In der Kategorie *Aufgabenstellung* wurden mehrere Teilkategorien aus Jordan et al. (2006) zu den drei Unterkategorien ‚Repräsentationsformate', ‚explizit geforderte Lösungswege' und ‚Lösungs- und Strukturierungshilfen' zusammengefasst. Es wird einerseits in Form einer Aufzählung festgehalten, welche Repräsentationsformate in der Instruktion der Aufgabenstellung verwendet werden. Hierzu gehören Text, relevante und irrelevante Zahlen, Terme, Formeln, Tabelle, Graph, Grafik, Diagramm, Bild oder Foto. Es werden nur die Repräsentationsformate erhoben, die wirklich inhaltliche Informationen zur Aufgabenstellung beitragen (also z.B. keine Bilder ohne Bezug zur Aufgabe). Auch werden Texte oder Zahlen, die innerhalb anderer Repräsentationsformate auftauchen (z.B. Beschriftungen in Bildern oder Maßeinheiten an Skizzen) nicht gesondert kodiert (Jordan et al., 2006). Des Weiteren wird festgestellt, ob die Aufgabenstellung die Aufforderung zur Verwendung einer bestimmten Methode enthält, oder ob darauf hingewiesen wird, mehrere Lösungswege zu beschreiten. Es ist aber auch möglich, dass kein Lösungsweg explizit gefordert wird (Jordan et al., 2006). Außerdem wird analysiert, ob die Aufgabenstellung zusätzliche Hinweise enthält, die den Lösungsweg vorstrukturieren bzw. helfen, den Lösungsansatz zu finden. Dies zeigt sich insbesondere an Informationen, die weggelassen werden könnten, ohne das mathematische Problem zu verändern (Jordan et al., 2006). Die möglichen Lösungs- und Strukturierungshilfen werden in der Kodierung genau beschrieben.
In der Kategorie *Lösungsprozess* wird einerseits festgehalten, ob die mathematische Richtung der Auseinandersetzung konform oder entgegengesetzt zur mathematischen Konzeptbildung ist. Außerdem wird der Umfang der Bearbeitung bei konventionellem Vorgehen festgestellt. Dabei wird unterschieden, ob mehr oder weniger als vier Lösungsschritte bzw. Entscheidungen zur Lösung der Aufgabe nötig sind und ob die Aufgabe eine oder mehrere Teilaufgaben enthält. Unter Teilaufgaben werden hier größere eigenständige Phasen im Lösungsprozess verstanden, die für sich gesehen als Aufgabe codiert werden könnten, da sie z.B. Zwischenschritte mit Teillösungen darstellen (Jordan et al., 2006).
In der Kategorie *Ergebnis* werden wieder mehrere Kategorien aus Jordan et al. (2006) zu einer Kategorie zusammengefasst, in der die für die Antwort zwingend erforderlichen Repräsentationsformate (Text, Zahl, Term, Formel, Tabelle, Graph, Grafik, Diagramm, Bild oder Foto) aufgelistet werden. Außerdem wird festgestellt, ob das Antwortformat geschlossen oder offen ist, d.h. ob Antwortalternativen (z.B. multiple choice oder wahr-/falsch-Aussagen) vorgegeben sind oder nicht (Jordan et al., 2006). In einem dritten Schritt wird festgehalten, ob die Lösung eindeutig ist oder ob mehrere Lösungen möglich sind. Bei Jordan et al. (2006) wird hier nur die Eindeutigkeit des Ergebnisses, nicht des Lösungsweges, thematisiert. Da der Vergleich verschiedener Lösungswege aber ein wichtiger Aspekt kognitiver Aktivierung ist (siehe 5.2.4), wird im Rahmen dieser Arbeit insbesondere festgehalten, ob die Aufgaben ver-

schiedene Lösungswege ermöglichen, um dies mit der Umsetzung der Aufgaben im Unterricht vergleichen zu können.
Es kann durchaus sein, dass sich einige der hier nur am Rande berücksichtigten Aspekte bei der Betrachtung anderer Unterrichtsstunden als sehr bedeutsam herausstellen, beispielsweise die sprachlogische Komplexität. Allerdings sind alle im Rahmen dieser Arbeit analysierten Aufgaben von relativ niedriger sprachlogischer Komplexität, so dass beispielsweise diese Kategorie hier nicht sehr aussagekräftig war.

6.1.3 Aufgabenbearbeitung im Unterricht

Der Unterrichtseinsatz von Aufgaben mit kognitivem Aktivierungspotenzial bedeutet noch nicht, dass dieses Potenzial auch genutzt wird. Entscheidend ist vor allem die Aufgabenbearbeitung im Unterricht (Blum et al., 2006). Deshalb werden zusätzlich zu den objektiven Kennzeichen von Aufgaben aus dem von J. Neubrand (2002) entwickelten Aufgabenklassifikationsschema Kategorien ausgewählt, die die Bearbeitung der Aufgaben im Unterricht charakterisieren. So wird z.B. kodiert, ob die Aufgabe eher verfahrens- oder verständnisbetont bearbeitet wurde oder welche Lösungswege konkret im Unterricht vorkamen. Die vielen Kategorien bei J. Neubrand (2002), die Vergleiche und Verbindungen zwischen den Aufgaben herstellen, werden nicht in das Kategoriensystem aufgenommen. Da es sich bei dieser Untersuchung im Gegensatz zu den Untersuchungen von Jordan et al. (2006) sowie J. Neubrand (2002) nicht um eine quantitative Studie handelt, werden diese Vergleiche zwischen den Aufgaben mithilfe qualitativer Analysen der Unterrichtsstruktur durchgeführt (siehe 6.2). Dabei werden die hier nicht berücksichtigten Kategorien von J. Neubrand (2002) wiederum hinzugezogen.
Zur Beurteilung der folgenden Aspekte werden die Unterrichtstranskripte und gegebenenfalls auch die Unterrichtsvideos herangezogen, wobei hier schon eine enge Verzahnung mit der qualitativen Inhaltsanalyse stattfindet. Dennoch können durch die überblicksartige Darstellung der hier genannten Kategorien im Rahmen der Aufgabenkategorisierung Strukturen im Unterricht aufgezeigt werden, die ansonsten aufgrund der umfassenden qualitativen Daten verloren gehen könnten.

Verständnis- oder verfahrensbetonte Bearbeitung der Aufgabe

Zunächst wird festgestellt, ob die Aufgabe verständnis- oder verfahrensbetont bearbeitet wird. Selbst eine simple Aufgabe mit nur einer erforderlichen Wisseneinheit und ohne außer- oder innermathematischen Kontext kann eine im Freudenthalschen Sinne ‚bedeutungshaltige' Aufgabe werden, wenn z.B. auf zugrundeliegende Sätze oder allgemeine mathematische Zusammenhänge eingegangen wird (J. Neubrand, 2002). Dies ist nach J. Neubrand (2002) anhand der Unterrichtstranskripte feststellbar. Eine verständnisbetonte Bearbeitung zeigt sich beispielsweise durch:
- metakognitive Reflexion über mathematische Inhalte bzw. über mathematisches Arbeiten,
- komplexe mathematische Denk- und Begründungsaktivitäten,
- Anwenden von Prozeduren in Verbindung mit Konzepten, Bedeutungen oder Verstehen,
- naive, flexible oder systematische Probierverfahren, die mathematisches Verständnis erfordern (J. Neubrand, 2002).

Eine verfahrensbetonte Aufgabenbearbeitung erkennt man:

- am Anwenden von Prozeduren ohne Verbindung mit Konzepten, Bedeutungen oder Verstehen, also schematischer Umgang mit Symbolen und Begriffen,
- am Anwenden von Prozeduren in Verbindung mit Fehlvorstellungen oder nicht korrekten mathematischen Begründungen,
- am Auswendiglernen,
- an anderen nicht ‚bedeutungshaltigen' Tätigkeiten in der Mathematik,
- an Begründungen mit nichtmathematischem Inhalt (J. Neubrand, 2002).

Diese Kategorisierung hat sich im Rahmen dieser Arbeit als besonders hilfreich für den Vergleich des Potenzials der Aufgabe mit der Umsetzung der Aufgabe im Unterricht herausgestellt.

Weitere Kategorien für die Aufgabenbearbeitung

Die weiteren von J. Neubrand (2002) übernommenen Kategorien für die Aufgabenbearbeitung im Rahmen des Aufgabenklassifikationssystems waren bei der Datenauswertung ebenfalls hilfreich. Allerdings wurden sie nur am Rande berücksichtigt, da sie sich häufig innerhalb der qualitativen Inhaltsanalyse besser betrachten ließen (siehe 6.2). Die Kurzfassung der folgenden Aspekte innerhalb des Kategoriensystems kann aber insbesondere Vernetzungen und Strukturen innerhalb des Unterrichts verdeutlichen. Hierzu zählen das *Bereitstellen* der Aufgabe, vorkommende *Lösungswege*, *Hilfsmittel*, *Sozialform*, *Vorstellung der Lösungswege* und die *didaktische Funktion* der Aufgaben.
Beim *Bereitstellen* der Aufgabe wird festgehalten, ob die Lehrerinnen und Lehrer die Rechenarten oder die Lösungsmethoden für die Aufgabe als Hilfestellung vorgeben (J. Neubrand, 2002), da dies einen entscheidenden Einfluss auf das tatsächliche kognitive Anforderungsniveau der Aufgaben hat. Es wird dabei nicht einfach nur ja/nein kodiert, sondern möglichst genau beschrieben, wann und wie Rechenarten oder Lösungsmethoden bereitgestellt werden. Es werden die *vorkommenden Lösungswege* knapp in ihrer Struktur beschrieben, um die vorkommenden Lösungswege zu vergleichen und um zu beurteilen, wie sich die Lösungswege der einzelnen Aufgaben voneinander unterscheiden, bzw. wo Vernetzungen durch gleiche Strukturen in den Lösungswegen zu finden sind (vgl. J. Neubrand, 2002). Außerdem wird festgehalten, ob die anzuwendenden Lösungsmethoden den Schülerinnen und Schülern bereits bekannt sind und verwendet werden müssen, oder ob diese neu bzw. weiterentwickelt werden müssen (J. Neubrand, 2002). In der Kategorie *Hilfsmittel* wird im Gegensatz zu den Kategorien von J. Neubrand (2002) in dem hier entwickelten Kategorienschema eine Aufzählung der verwendeten Hilfsmittel vorgenommen, die Unterkategorien von J. Neubrand (2002) (Computer, Taschenrechner, Lineal, Winkelmesser, Zirkel) dienen dabei als Beispiele, es können aber auch andere Hilfsmittel aufgelistet werden. In der Kategorie *Sozialform* wird einerseits die Sozialform der Bearbeitung festgehalten, aber auch die Sozialform der Besprechung der Lösungen. Insbesondere wird kodiert, ob die Lehrperson oder die Schülerinnen und Schüler den/die *Lösungsweg(e) vorstellen* und wie die Lösungen präsentiert werden (z.B. mündlich, an der Tafel, in einer Schülerarbeitsphase oder im Klassengespräch). Die Kodierung der *didaktischen Funktion* dient der Analyse der Lehr- und Lerndynamik einer Unterrichtsstunde (J. Neubrand, 2002). Es wird unterschieden, ob die Aufgabe der Illustration, der Übung, der Anwendung, der Antizipation (exemplarische Vorwegnahme eines neuen, systematisch erst später behandelten Stoffes), dem Einbringen neuer Elemente, der Wiederholung, der Reflexion (oder Zusammenfassung aktuell erarbeiteter stofflicher oder methodischer Inhalte) oder der Motivation dient (vgl. J. Neubrand, 2002).

Mit den in diesem Abschnitt vorgestellten Kategorien wird im Rahmen dieser Arbeit einerseits der Ablauf des Unterrichts überblicksartig dargestellt (siehe 7.4.1), um die Vernetzungen innerhalb des Unterrichts auf verschiedenen Ebenen (z.B. Inhalt, Kontext, Lösungsstruktur) zu analysieren. Andererseits wird das Potenzial der von den Lehrkräften eingesetzten Aufgaben unabhängig vom Unterricht ermittelt um es mit dem Einsatz der Aufgaben im Unterricht in Beziehung zu setzen (siehe 7.4.2). Hierzu wurde ein weiteres Kategoriensystem für die qualitative Inhaltsanalyse entwickelt, welches im folgenden Abschnitt vorgestellt wird.

6.2 Entwicklung der Kategorien für die Qualitative Inhaltsanalyse

Die im Folgenden dargestellten Kategorien dienen der Analyse der schriftlichen Unterrichtsplanung, des videografierten Unterrichts sowie eines anschließenden reflektierenden Interviews der an dieser Untersuchung beteiligten Lehrerinnen und Lehrer (siehe 7.4.2). Sie basieren größtenteils auf den in Kapitel 4 und 5 vorgestellten Konzeptionen. In den Pilotierungsuntersuchungen hat sich gezeigt, dass anhand der Unterrichtsvideos und Interviews vor allem das fachdidaktische Wissen und die didaktische Strukturierung des Unterrichts erfasst werden können. Das mathematische Fachwissen zeigt sich dagegen eher indirekt und wird auch in den vorliegenden Konzeptionen nicht ausführlich untergliedert, so wie es für das fachdidaktische Wissen der Fall ist (siehe Kapitel 4). Deshalb nimmt das mathematische Fachwissen nur eine kleine Rolle innerhalb des Kategoriensystems ein.

6.2.1 Fachdidaktisches Wissen

Die Kategorien zum fachdidaktischen Wissen basieren auf den theoretischen Darstellungen in Abschnitt 4.1. Hier hat sich gezeigt, dass sich in den Konzeptionen der drei großen Arbeitsgruppen (COACTIV, TEDS-M und Michigan-Group) das fachdidaktische Wissen im Wesentlichen in drei Bereiche untergliedern lässt: ‚Schülerbezogenes Wissen', ‚Wissen über das Verständlichmachen mathematischer Inhalte' und ‚inhaltsbezogenes Wissen' (siehe 4.1.5). Diese Dreiteilung wird bei der Erstellung des Kategoriensystems beibehalten, um möglichst gezielt die verschiedenen Aspekte des professionellen Wissens zu beobachten. Bei den hier beschriebenen Kategorien handelt sich um ‚Suchkategorien', die zur Identifizierung der für die Beantwortung der Fragestellung interessanten Stellen im Material führen sollen, die dann interpretiert werden können. Dabei fließen die einzelnen Kategorien wieder ineinander. Die Analysen haben gezeigt, dass sich durch diese Vorgehensweise viele für das fachdidaktische Wissen relevante Stellen im Material zeigen, die bei einer allgemeineren Betrachtung verloren gehen könnten.
Die einzelnen Konzeptionen der drei großen Arbeitsgruppen beinhalten teilweise übereinstimmende Aspekte, teilweise ergänzen sie sich, da jede Arbeitsgruppe einen anderen Fokus hat. Auch die Kategorien von Rowland et al. (2005) und die von Lindmeier (2011) beschriebenen Komponenten des fachdidaktischen Wissens finden sich im vorliegenden Kategoriensystem größtenteils wieder.

Schülerbezogenes Wissen

In der schülerbezogenen Wissensfacette tauchen über die Konzeptionen hinweg folgende Punkte auf (siehe 4.1.5 und 4.3):

- mögliche Lösungen
- verbreitete Konzepte/Strategien
- typische Fehler
- Fehlkonzepte
- Schwierigkeitsgrad einschätzen

Im Doktorandenkolloquium Bremen-Oldenburg im April 2011 wurden diese groben Kategorien zur Diskussion gestellt. Es hat sich gezeigt, dass die Unterscheidung zwischen Fehler und Fehlkonzept schwierig ist. Deshalb wird auf diese Unterscheidung in den Kategorien verzichtet. Zusätzlich wird aber aufgrund der Diskussion im Kolloquium eine Kategorie für mögliche Probleme/Schwierigkeiten hinzugefügt, da nicht jedes Problem ein Fehler ist. Es wird allgemein auf das Adjektiv ‚typisch' verzichtet, da schwierig zu entscheiden ist, was ein typischer Fehler bzw. ein typisches Problem ist und was nicht. In Abbildung 6.2 wird ein Überblick über die in dieser Arbeit für die qualitative Inhaltsanalyse verwendeten Kategorien zum schülerbezogenen Wissen gegeben. Die einzelnen Kategorien werden im Folgenden näher erläutert.

Richtige Lösung
- mögliche Schülerlösung trat im Unterricht auf
- mögliche Schülerlösung trat im Unterricht nicht auf
- Reaktion richtige Lösung
- mögliche Lösung Lehrer

Konzepte/Strategien
- Konzepte/Strategien trat im Unterricht auf
- Konzepte/Strategien trat im Unterricht nicht auf
- Reaktion auf Strategie/Konzept

Fehler
- Fehler trat im Unterricht auf
- Fehler trat im Unterricht nicht auf
- Reaktion auf Fehler

Probleme/Schwierigkeiten
- Problem/Schwierigkeit trat im Unterricht auf
- Problem/Schwierigkeit trat im Unterricht nicht auf
- Reaktion auf Probleme/Schwierigkeiten
- keine Probleme/Schwierigkeiten

Schwierigkeitsgrad einschätzen

Gelegenheiten nutzen

Abbildung 6.2: Überblick über die Kategorien zum schülerbezogenen Wissen

Richtige Lösungen stellen im Rahmen dieser Arbeit Schülerlösungen von Aufgaben dar, die mathematisch korrekt sind, auch wenn beispielsweise einige Begründungen fehlen, die im mathematischen Sinne notwendig wären. Insbesondere dürfen keine im mathematischen Sinne falschen Bestandteile vorhanden sein. *Konzepte/Strategien* stellen dagegen allgemeine Konzepte und Begriffe oder auch allgemeine Vorgehensweisen dar, die nicht auf eine Aufgabe beschränkt sind (z.B. Berechnung des Umfanges von Vielecken durch Addition aller Seitenlängen). Unter einem *Fehler* wird im Rahmen dieser Arbeit eine Äußerung, ein Sachverhalt oder Prozess verstanden, der von der mathematischen Norm abweicht (siehe hierzu auch 5.3.3). *Probleme bzw. Schwierigkeiten* werden im Rahmen dieser Arbeit definiert als Situationen, in denen die Schülerinnen und Schüler beim Lösen einer Aufgabe nicht weiterkommen, ohne dass sie einen Fehler gemacht haben, oder in denen sie unsicher sind, ob der von ihnen gewählte Lösungsweg funktioniert. Dies zeigt sich beispielsweise an Fragen an die Lehrkraft oder direkt in den Schüleräußerungen.

Im Unterricht lässt sich das schülerbezogene Wissen nicht direkt beobachten, es kann nur aus bestimmten Ereignissen im Unterricht interpretiert werden. Deshalb werden zu den vier Aspekten Konzepte/Strategien, richtige Schülerlösungen, Fehler und Probleme/Schwierigkeiten das Auftreten im Unterricht (jeweils die erste Unterkategorie) und insbesondere die Reaktion der Lehrperson (jeweils die dritte Unterkategorie) kodiert (siehe auch Lindmeier, 2011). So kann beispielsweise beurteilt werden, ob die Lehrperson im Unterricht richtige Lösungen oder Fehler erkennt und wie sie auf diese reagiert.

Im Interview und in der Unterrichtsplanung wird für einen möglichen Vergleich zwischen den Aussagen der Lehrperson und dem Handeln im Unterricht in denselben Kategorien die Erläuterungen der Lehrkraft zu diesen vier Aspekten festgehalten. Dabei wird zwischen Aussagen zu Situationen, die im Unterricht beobachtet werden konnten (jeweils die erste Unterkategorie), und Erläuterungen möglicher Konzepte, Lösungen, Fehler und Probleme, die im Unterricht nicht auftraten (jeweils die zweite Unterkategorie), unterschieden. Hieraus kann dann direkt auf das Wissen der Lehrkräfte zu möglichen Schülerlösungen und -fehlern geschlossen werden.

In der Kategorie richtige Lösung werden auch Erläuterungen von Aufgabenlösungen, die der Lehrer zwar kennt, die er aber nicht von seinen Schülerinnen und Schüler erwartet (z.B. weil die für diesen Lösungsweg nötigen Grundlagen noch nicht vorhanden sind), kodiert (vierte Unterkategorie). In der Kategorie Probleme/Schwierigkeiten werden auch Erläuterungen von Unterrichtsszenen, in denen die Lernenden entgegen der Erwartung des Lehrers keine Probleme hatten, kodiert, da damit Rückschlüsse darauf gezogen werden können, inwieweit die Lehrerinnen und Lehrer ihre Schülerinnen und Schüler einschätzen können.

In der Kategorie *Schwierigkeitsgrad* werden zusätzlich zu den bisher beschriebenen Kategorien Erläuterungen der Lehrerinnen und Lehrer zum Schwierigkeitsgrad der Aufgaben sowohl im Unterricht als auch im Interview, bzw. in der Planung, kodiert, da das Einschätzen des Schwierigkeitsgrad der Aufgaben einen wichtigen Aspekt des schülerbezogenen Wissens darstellt. Des Weiteren werden in Anlehnung an Rowland (2008) für das schülerbezogene Wissen Situationen im Unterricht festgehalten, in denen die Lehrperson *Gelegenheiten nutzt*, indem beispielsweise ein Schülerbeitrag aufgegriffen und weiterentwickelt wird. Die Erläuterungen der Lehrpersonen zum Nutzen dieser Gelegenheiten im Interview werden mit derselben Kategorie kodiert.

Wissen über das Verständlichmachen mathematischer Inhalte

Für das Wissen über das Verständlichmachen mathematischer Inhalte lassen sich aus den verschiedenen Konzeptionen folgende Unterpunkte ableiten (siehe 4.1.5 und 4.3):

- fachliche Inhalte auswählen
- geeignete Repräsentationsformen auswählen/verwenden
- Beispiele auswählen
- Vereinfachungen der Inhalte
- Erklärungsmöglichkeiten
- Gebrauch von Begriffen

Insbesondere bei der ersten Kategorie spielt auch das Herstellen von Verbindungen zwischen den Aufgaben bzw. zwischen fachlichen Inhalten eine Rolle. Dies wird hier in der inhaltsbezogenen Komponente des fachdidaktischen Wissens mit berücksichtigt. Abbildung 6.3 gibt einen Überblick über die auf Grundlage dieser Unterpunkte festgelegten Kategorien zum Wissen über das Verständlichmachen mathematischer Inhalte. Die einzelnen Kategorien werden im Folgenden näher erläutert.

Repräsentationsformen	Vereinfachungen der Inhalte
• Repräsentationsformen Begründung	• Vereinfachung Begründung
• enaktiv	• Vereinfachung im Unterricht
• ikonisch	**Erklärungsmöglichkeiten**
• sprachlich	• Erklärungsmöglichkeit Begründung
• formal	• Erklärungsmöglichkeit im Unterricht
• Wechsel Repräsentationsform	**Gebrauch von Begriffen**
Beispiele	• mathematischer Begriff
• Beispiel Begründung	• Alltagsbegriff
• Beispiel im Unterricht	

Abbildung 6.3: Überblick über die Kategorien zum Wissen über das Verständlichmachen mathematischer Inhalte

Repräsentationsformen beschreiben verschiedene Ebenen der Repräsentation eines Inhaltes. Beispielsweise kann der Satz des Pythagoras als Skizze, als Formel oder als sprachlicher Satz repräsentiert werden. *Beispiele* sind als Spezialfälle eines allgemeineren Falls anzusehen (z.B. wenn eine allgemeine Formel anhand eines Zahlenbeispiels verdeutlicht wird), während *Vereinfachungen* der Inhalte eine Reduktion des zu lernenden Inhaltes darstellen (beispielsweise zunächst die Betrachtung eines 8-Ecks anstelle eines n-Ecks). *Erklärungsmöglichkeiten* stellen Situationen dar, in denen die Lehrperson den Schülerinnen und Schülern einen Sachverhalt erläutert. Dabei können insbesondere Beispiele oder Vereinfachungen zum Tragen kommen. Als mathematische *Begriffe* werden in der Mathematik übliche Bezeichnungen gedeutet. Dabei ist ein Begriff aber mehr als ein bloßer Name, denn Begriffe umfassen häufig auch dahinterliegende Eigenschaften. Beispielsweise umfasst der Begriff ‚Parallelogramm' auch die Eigenschaften des Parallelogramms. Dagegen werden Begriffe, die nicht der mathematischen Fachsprache entstammen aber dennoch häufig für die Beschreibung von mathematischen Vorgehensweisen und Eigenschaften verwendet werden, als Alltagsbegriffe bezeichnet (z.B. ‚rumlaufen' für die Addition aller Seitenlängen bei der Umfangsberechnung).

Diese Kategorien beschreiben vor allem Elemente, die in der Unterrichtsplanung auftreten und auch im reflektierenden Interview sichtbar werden können. Deshalb wird in das Kategoriensystem jeweils eine Kategorie zur Begründung der Auswahl von Repräsentationsformen, Beispielen, Vereinfachungen und Erklärungsmöglichkeiten aufgenommen (jeweils die erste Unterkategorie). Im Doktorandenkolloquium Bremen-Oldenburg wurde vorgeschlagen, Unterkategorien für die Art der Begründung (z.B. mit mathematischen oder eher pädagogisch-methodischen Argumenten) zu bilden. Aufgrund der großen Zahl an Kategorien und der sehr unterschiedlichen Möglichkeiten der Begründung, wird auf diese Unterkategorien verzichtet. Stattdessen wird bei der Interpretation der Kategorien auch die Art der Begründung berücksichtigt.

Auch während des Unterrichts müssen immer wieder kleine Planungsentscheidungen getroffen werden, oft sogar sehr spontan. Insbesondere ist im Unterricht die Umsetzung der Planungsentscheidungen zu beobachten (Lindmeier, 2011). Aus diesen Gründen wird jeweils das Auftreten der oben genannten Aspekte im Unterricht kodiert (jeweils zweite Unterkategorie) und mit den Aussagen der Lehrerinnen und Lehrer im Interview verglichen. Dabei werden die unterschiedlichen möglichen Repräsentationsformen, enaktiv, ikonisch, sprachlich und formal (siehe 5.2.3), unterschieden. Insbesondere werden Stellen im Material kodiert, an denen ein Wechsel der Repräsentationsform oder zwischen verschiedenen ikonischen Darstellungen stattfindet, da dies ein kognitiv aktivierendes Element von Unterricht sein kann (siehe 5.2.3).

Beim Gebrauch der Begriffe wird auf Vorschlag aus dem Doktorandenkolloquium Bremen-Oldenburg die Unterscheidung zwischen mathematischen und alltagssprachlichen Begriffen vorgenommen (vgl. Vollrath & Roth, 2012), wobei innerhalb dieser Kategorien sowohl die Nutzung von Begriffen im Unterricht, als auch Interviewaussagen der Lehrpersonen zum Gebrauch von Begriffen festgehalten werden.

Inhaltsbezogenes Wissen

In der inhaltsbezogenen Wissenskomponente unterscheiden sich die verschiedenen Konzeptionen in Abschnitt 4.1 sehr stark. Zusammenfassend können folgende wichtige Aspekte herausgestellt werden (siehe 4.1.5):

- fachliche Inhalte
- Vernetzung des Unterrichts
- Aufgaben
- Curriculum
- Bildungsstandards
- Bildungsziele

Der Unterpunkt fachliche Inhalte auswählen wird bei TEDS-M und der Michigan-Group unter Wissensfacetten gefasst, die ansonsten eher Wissen über das Verständlichmachen mathematischer Inhalte beinhalten (siehe Abbildung 4.2). Hier ist der Bezug zum Inhalt aber so stark, dass diese Kategorie in diesem Kategoriensystem der inhaltsbezogenen Komponente des fachdidaktischen Wissens zugeordnet wird (siehe Abschnitt 4.1.5). Der Zusammenhang der einzelnen Komponenten ‚schülerbezogenes Wissen', ‚Wissen über das Verständlichmachen' und ‚inhaltsbezogenes Wissen' wird hier deutlich, woraus folgt, dass bei der Interpretation diese Komponenten kategorienübergreifend betrachtet werden müssen. Abbildung 6.4 6.4 gibt einen Überblick über die Kategorien zum inhaltsbezogenen Wissen. Die einzelnen Kategorien werden im Folgenden näher erläutert.

Fachliche Inhalte
- fachliche Inhalte Begründung
- fachliche Inhalte im Unterricht

Vernetzung
- Verbindungen Konzepte/Prozeduren
- Verbindungen Aufgaben
- stoffliche Verbindungen
- früher Gelerntes
- zugrundeliegende Sätze
- Verbindungen auf der Realitätsebene
- Lernstatus im gesamten Thema
- keine Vernetzung

Aufgaben
- Aufgaben Begründung
- Aufgabenreihenfolge
- Aufgabenstellung im Unterricht

Kerncurriculum

Bildungsstandards

Ziele
- inhaltsbezogene Ziele
- prozessbezogene Ziele
- allgemeine Ziele

Abbildung 6.4: Überblick über die Kategorien zum inhaltsbezogenen Wissen

In der Kategorie *fachliche Inhalte* wird die Erläuterung der Lehrperson zur Auswahl der fachlichen Inhalte, also der Mathematik die gelernt werden soll, erfasst (erste Unterkategorie). Meistens sind die fachlichen Inhalte an Aufgaben gebunden, die die Schülerinnen und Schüler bearbeiten, so dass die Bearbeitung der fachlichen Inhalte in den Kategorien zum schülerbezogenen Wissen erfasst wird. Da aber nicht alle Inhalte in Form von Aufgaben oder mit Schülerbeteiligung gelernt werden, wird auch eine Kategorie gebildet, die die Thematisie-

rung fachlicher Inhalte im Unterricht ohne Zusammenhang mit Aufgaben kennzeichnet (zweite Unterkategorie).
Die *Vernetzung* des Schülerwissens, also das Herstellen von Beziehungen zwischen verschiedenen Inhalten, ist ein weiterer wichtiger Aspekt des inhaltsbezogenen Wissens der Lehrerinnen und Lehrer. Hier spielen Aspekte der kognitiven Aktivierung wieder eine große Rolle (siehe 5.2.1), wobei die Möglichkeiten der Vernetzung innerhalb des Unterrichts sehr vielfältig sind. Es können einerseits Verbindungen zwischen Konzepten und Verbindungen zwischen Prozeduren hergestellt werden. Andererseits können sich Vernetzungen zwischen den Aufgaben einer Unterrichtsstunde bzw. Unterrichtseinheit und stoffliche Verbindungen zu anderen Themengebieten (z.B. zwischen Geometrie und Algebra) oder innerhalb eines Themengebietes (z.B. Flächeninhalt- mit Umfangsberechnungen innerhalb der Geometrie) zeigen. Ebenso sind Verbindungen zum Vorwissen und zu zugrundeliegenden Sätzen möglich. Vernetzungen können im Unterricht ebenfalls auf der Realitätsebene (z.B. über einen gemeinsamen Kontext) hergestellt werden, oder indem der Lernstatus im gesamten Thema verdeutlicht wird. Für diese einzelnen Möglichkeiten der Vernetzung wurde je eine Unterkategorie gebildet (siehe Abbildung 6.4), in der sowohl Situationen im Unterricht, in denen die jeweilige Art der Vernetzung deutlich wird, als auch Aussagen der Lehrerinnen und Lehrer in Planung und Interview zu Vernetzungen kodiert werden. Das Kategoriensystem wurde nach dem Doktorandenkolloquium Bremen-Oldenburg und ersten Analysen um eine Kategorie erweitert, die die ‚Nichtvernetzung' von Inhalten kennzeichnet. Diese wird beispielsweise kodiert, wenn eine Lehrperson erläutert, dass bestimmte Aufgaben nicht zusammenhängen.
In der Kategorie *Aufgaben* werden in zwei verschiedenen Unterkategorien alle Stellen im Material kodiert, in denen die Lehrkraft explizit die Aufgabenauswahl oder die Aufgabenreihenfolge begründet. Hieraus können in Zusammenhang mit den Kategorien der kognitiven Aktivierung (siehe 6.2.2) Rückschlüsse auf das Erkennen des Potenzials der Aufgaben durch die Lehrerinnen und Lehrer als ein wichtiger Aspekt des inhaltsbezogenen Wissens gezogen werden. Dazu werden diese Kodierungen bei der Interpretation der Ergebnisse mit der Klassifizierung der Aufgaben (siehe 6.1.2) und der tatsächlichen Aufgabenbearbeitung im Unterricht verglichen. Für diesen Vergleich ist auch die tatsächliche Aufgabenstellung im Unterricht wichtig, da z.B. im Rahmen der Aufgabenstellung auch Hilfestellungen oder Lösungsmethoden von den Lehrerinnen und Lehrern vorgegeben werden können (vgl. 6.1.3). Deshalb wird jeweils auch die Aufgabenstellung im Unterricht in einer eigenen Kategorie festgehalten.
Vor allem in der Unterrichtsplanung und im Interview kann Wissen über die curriculare Anordnung von Stoffen anhand von Wissen über das *Kerncurriculum* und Wissen über die *Bildungsstandards* deutlich werden. Deshalb werden alle Aussagen der Lehrpersonen zum Kerncurriculum und zu den Bildungsstandards in Planung, Unterrichtsdurchführung und Interview, beispielsweise in Zusammenhang mit der Aufgabenbegründung, kodiert. Auch über die Analyse der vom Lehrer genannten *Ziele* können im Vergleich mit dem tatsächlichen Unterricht Aussagen über das fachdidaktische Wissen der Lehrpersonen und dessen Umsetzung im Unterricht gewonnen werden. Deshalb werden auch alle Aussagen der Lehrerinnen und Lehrer zu Zielen des Unterrichts kodiert. Dabei wird zwischen inhalts- und prozessbezogenen Zielen, wie sie im Zusammenhang mit den Bildungsstandards formuliert werden (siehe z.B. Blum et al., 2006), und allgemeinen, also von der Mathematik unabhängigen Zielen (z.B. Vorbereitung auf den Beruf), unterschieden.

6.2.2 Kognitive Aktivierung

Die Kategorien zur kognitiven Aktivierung basieren auf den in Kapitel 5 dargestellten theoretischen Überlegungen. Teilweise überschneiden sich die Aspekte kognitiver Aktivierung mit den Aspekten des fachdidaktischen Wissens. Deshalb wurden im Laufe der Überarbeitung des Kategoriensystems einige Kategorien kognitiver Aktivierung unter das fachdidaktische Wissen gefasst. Hierzu zählen die Verwendung und der Wechsel zwischen verschiedenen Repräsentationsformen sowie der gesamte Bereich des Herstellens von Vernetzungen. Im Laufe der ersten Auswertung des ersten Lehrers wurde insbesondere festgestellt, dass zur Einschätzung des Ausmaßes der kognitiven Aktivierung durch die Lehrerinnen und Lehrer gerade auch die Stellen im Unterricht aussagekräftig sind, an denen die Schülerinnen und Schüler gerade nicht kognitiv aktiviert werden. Es wurden daher ‚Negativ'-Kategorien in das Kategoriensystem eingebaut, wie im Folgenden bei der Beschreibung der einzelnen Kategorien erläutert wird. Abbildung 6.5 zeigt einen Überblick über die Kategorien zur kognitiven Aktivierung.

In der Kategorie *Argumentationen* wird festgehalten, an welchen Stellen im Unterricht die Lehrkraft Begründungen der Schülerantworten einfordert oder an denen die Schülerinnen und Schüler ohne Aufforderung durch die Lehrperson ihre Antworten begründen (erste Unterkategorie, vgl. 5.2.3). Es werden aber ebenso die Stellen kodiert, an denen die Schülerantworten ohne jegliche Begründung akzeptiert werden (zweite Unterkategorie). Ebenso werden Interview- und Planungsaussagen zur Bedeutung von Argumentationen im Unterricht mit diesen Kategorien kodiert.

Mit der Kategorie *mehrere Lösungswege* werden einerseits Stellen markiert, an denen deutlich wird, dass ein Vergleich mehrerer, strukturell unterschiedlicher Lösungswege stattfindet oder in denen die Lehrerinnen und Lehrer die Bedeutung des Vergleichs verschiedener Lösungswege erläutern (erste Unterkategorie, vgl. 5.2.4). Andererseits werden Situationen kodiert, in denen auf den Vergleich verschiedener Lösungswege verzichtet wird, obwohl es weitere Lösungswege unter den Schülerlösungen gibt (zweite Unterkategorie). Ebenso werden Interview- und Planungsaussagen der Lehrerinnen und Lehrer zur Bedeutung des Vergleichs verschiedener Lösungswege im Unterricht mit diesen Kategorien kodiert.

Argumentationen
- Begründung der Antwort
- keine Begründung der Antwort

Mehrere Lösungswege
- mehrere Lösungswege werden erläutert
- keine weiteren Lösungswege werden vorgestellt

Modellierungen
- außermathematische Modellierungen
- innermathematische Modellierungen

Kognitive Selbständigkeit
- kognitive Selbständigkeit
- leichte Lehrerlenkung
- starke Lehrerlenkung

Selbständige Überprüfung
- selbständige Überprüfung
- Behinderung selbständiger Überprüfung

Mathematische Denkweisen
- Faktenwissen
- prozedurales Denken
- begriffliches Denken

Strukturiertes Denken
- strukturiertes Denken
- Behinderung strukturierten Denkens

Allgemeines Denken
- allgemeines Denken
- Behinderung allgemeinen Denkens

Reflektierendes Denken
- reflektierendes Denken
- Behinderung reflektierenden Denkens

Sonstiges kognitive Aktivierung

Abbildung 6.5: Überblick über die Kategorien zur kognitiven Aktivierung

Um im Unterricht auftretende außer- und innermathematische *Modellierungen* mit den theoretisch zu durchlaufenden Phasen der Modellierungskreisläufe (siehe 5.2.3) vergleichen zu können, werden diese ebenfalls kodiert, ebenso wie Interviewaussagen der Lehrkräfte zur Bedeutung außer- und innermathematischer Modellierungen.
Die *Selbstständigkeit* der Lernenden stellt ein zentrales Kennzeichen kognitiver Aktivierung dar (siehe 5.3.1). Deshalb werden in dieser Kategorie Phasen im Unterricht kodiert, in denen die Lernenden kognitiv selbstständig aktiv sind, also in denen sie selbst ohne substanzielle Hilfe der Lehrperson aber durchaus mit gegenseitiger Unterstützung Gedankengänge entwickeln. Dies bedeutet nicht, dass der Lehrer sich nicht an dem Gespräch beteiligen kann, seine Aussagen beschränken sich aber beispielsweise auf die Bestätigung der Richtigkeit der Gedankengänge. Hiervon abzugrenzen sind Phasen der Lehrerlenkung, in denen noch zwischen leichter und starker Lenkung unterschieden wird. Starke Lehrerlenkung ist dabei gekennzeichnet durch die direkte Vorgabe der Lösung oder (von Teilen) des Lösungsweges durch die Lehrperson. Hierzu werden auch Unterrichtsgespräche gezählt, in denen die Schülerinnen und Schüler nur Suggestivfragen beantworten. Im Gegensatz dazu lässt der Lehrer in Phasen leichter Lehrerlenkung Raum für eigene Ideen der Schülerinnen und Schüler, gibt aber auch substanzielle Hinweise für die Lösung des Problems, die die eigenen Gedankengänge der Lernenden unterstützen. Die Grenzen zwischen diesen drei Kategorien sind fließend, weshalb im Kodierungsprozess die Unterscheidung manchmal schwer fällt. Des Weiteren werden mit diesen Kategorien auch Aussagen der Lehrkräfte zur Selbstständigkeit der Lernenden oder zur Lehrerlenkung festgehalten, so dass der eigene Eindruck der Lehrerinnen und Lehrer mit der tatsächlichen Situation im Unterricht verglichen werden kann.
In der Kategorie *selbstständige Überprüfung* wird zusätzlich zur selbstständigen Bearbeitung der Aufgaben festgehalten, ob die Lernenden zur selbstständigen Überprüfung ihrer falschen oder korrekten Lösungen angeregt werden (erste Unterkategorie). Hierzu zählt auch die Überprüfung des Ergebnisses durch andere Schülerinnen und Schüler, eben ohne Beteiligung des Lehrers. Es wird aber auch festgehalten, ob die selbstständige Überprüfung behindert wird, indem der Lehrer die Kontrolle des Lösungsweges/der Lösung vornimmt, so dass den Schülerinnen und Schülern keine Möglichkeit zur eigenen Überprüfung der Lösungen bleibt (zweite Unterkategorie).
Des Weiteren wird im Kodierungsprozess beurteilt, welche *mathematische Denkweise* jeweils vorherrscht. Es wird dabei ähnlich wie in der Aufgabenklassifikation zwischen der Aktivierung von Faktenwissen, prozeduralem Denken und begrifflichem Denken unterschieden (siehe 6.1.2). So kann die vorherrschende Denkweise bei der Bearbeitung der Aufgaben mit dem Potenzial der Aufgaben verglichen werden. Dabei ist Faktenwissen gekennzeichnet durch das bloße Abrufen von Sätzen, Definitionen und dergleichen, während prozedurales Denken durch das Ausführen bereits erlernter Prozeduren geprägt ist. Dagegen erfordert das begriffliche Denken vor allem das Herstellen von Beziehungen zwischen neu zu erlernenden Inhalten, auch mit bereits gelerntem Wissen, oder das Abrufen von Wissen über Zusammenhänge zwischen mathematischen Inhalten. Auch Interviewaussagen der Lehrkräfte zu den verschiedenen Arten mathematischen Denkens werden mit diesen Kategorien kodiert.
Einen wichtigen Beitrag zur kognitiven Aktivierung liefern auch *strukturiertes*, *allgemeines* und *reflektierendes* Denken (siehe 5.3.2). Diese drei Aspekte werden deshalb ebenfalls im Unterricht und auch in den Interviewaussagen der Lehrerinnen und Lehrer kodiert (jeweils die erste Kategorie). Strukturiertes Denken wird vor allem durch die strukturierte Darstellung von Unterrichtsinhalten und insbesondere durch Zusammenfassungen gefördert, die zur Ordnung des abgespeicherten Wissens beitragen. Allgemeines Denken zeigt sich vor allem in der Verallgemeinerung von Inhalten, aber auch im Herstellen allgemeiner Zusam-

menhänge. Reflexionen über die Lösungswege, die Begründungen und die Denkprozesse fördern reflektierendes Denken. Es ist zwar schwer festzustellen, wann diese drei Aspekte nicht vorliegen, es lassen sich aber Stellen im Unterricht finden, an denen diese drei Aspekte des Denkens explizit behindert werden (jeweils die zweite Unterkategorie), beispielsweise wenn die Allgemeinheit einer Situation durch die Reduktion auf ein Beispiel nicht deutlich wird. Aus der Analyse solcher Situationen lassen sich insbesondere im Vergleich mit den dazugehörigen Interviewaussagen Rückschlüsse auf das fachdidaktische Wissen der Lehrkräfte ziehen.

6.2.3 Fachwissen

Wie schon oben erläutert zeigten erste Analysen, dass sich die erhobenen qualitativen Daten nicht zur ausführlichen Einschätzung des mathematischen Fachwissens der Lehrerinnen und Lehrer eignen. Hierzu dient der COACTIV-Fragebogen (siehe 7.3.6). Zur Ergänzung des Fragebogens sollen aber diejenigen Stellen in Unterrichtsplanung, durchgeführtem Unterricht und dem reflektierenden Interview, an denen sich das mathematische Fachwissen der Lehrerinnen und Lehrer in irgendeiner Weise zeigt (z.B. Begründungen für Aufgabenauswahlen, in der fachwissenschaftliche Argumente herangezogen werden), kodiert werden. Insbesondere werden hier fachliche Fehler der Lehrerinnen und Lehrer kodiert, die sich im Unterricht oder im Interview zeigen können. Aufgrund der geringen Daten zum Fachwissen werden keinerlei Unterkategorien gebildet.

6.2.4 Überzeugungen und Werthaltungen

Die Überzeugungen und Werthaltungen der Lehrerinnen und Lehrer stehen zwar nicht im Fokus dieser Arbeit und werden auch nicht im Interview thematisiert, allerdings lassen sie sich in den Erläuterungen der Lehrkräfte teilweise erkennen. Da in der Literatur mehrfach ein starker Zusammenhang zwischen professionellem Wissen der Lehrerinnen und Lehrer und deren Überzeugungen, insbesondere bei der Umsetzung in Unterrichtshandeln beschrieben wird (siehe 3.2.2), werden Stellen kodiert, an denen sich Überzeugungen der Lehrkräfte zeigen. Es wird dabei zwischen Überzeugungen und Werthaltungen zur *Mathematik*, zum *Mathematikunterricht* und zum *Lernen und Lehren allgemein* unterschieden.

6.2.5 Allgemeine Kategorien

Am *Abweichen von der Planung* kann sich insbesondere in der Begründung dieser Abweichung das fachdidaktische Wissen der Lehrerinnen und Lehrer zeigen (siehe 4.3.2). In diesem Zusammenhang können auch Erläuterungen *alternativer Vorgehensweisen* hilfreich sein, um das Spektrum der Möglichkeiten der Lehrerinnen und Lehrer zu erkennen. Deshalb wird das Vorkommen dieser Situationen gesondert kodiert. Außerdem werden *Begründungen der Methodik* durch die Lehrpersonen festgehalten, auch wenn es sich hier eher um einen pädagogischen Aspekt des professionellen Wissens handelt, denn bei der Unterrichtsplanung spielt unter anderem das Wechselspiel zwischen Methoden und Inhalten eine wichtige Rolle (siehe z.B. H. Meyer, 2007b).

Die in diesem Abschnitt vorgestellten Kategorien werden im Rahmen einer qualitativen Inhaltsanalyse (Mayring, 2010) für die Auswertung von Unterrichtsplanungen, durchgeführtem Unterricht und anschließendem reflektierenden Interview genutzt. Die methodische Anlage der Arbeit, insbesondere die verschiedenen Komponenten der Datenerhebung und das Zusammenspiel verschiedener Auswertungsverfahren, wird im folgenden Kapitel erläutert.

7 Methodologie

Um einen Einblick in das tatsächlich beobachtbare Vorgehen von Lehrerinnen und Lehrern bei der didaktischen Strukturierung von Mathematikunterricht zu erhalten, und dabei insbesondere die Nutzung des fachdidaktischen Wissens bei der Unterrichtsvorbereitung, im durchgeführten Unterricht und bei der Reflexion des Unterrichts zu untersuchen, ist ein mehrstufiges Vorgehen bei der Datenerhebung angebracht, das allerdings bei der Auswertung wieder ineinander fließen muss (siehe Abbildung 7.1).

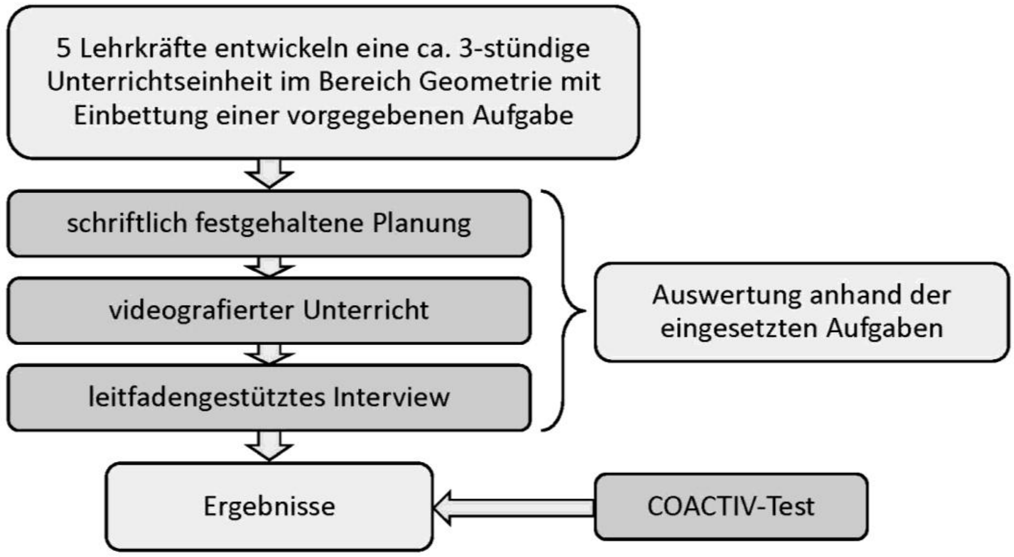


Abbildung 7.1: Übersicht über das methodische Design

Um eine möglichst detaillierte Analyse der didaktischen Strukturierungen der Lehrpersonen durchführen zu können, werden fünf ganz unterschiedliche Lehrerinnen und Lehrer (siehe 7.1) gebeten, eine kleine Unterrichtsreihe von maximal drei Stunden zu einem von ihnen selbst gewählten Thema aus der Geometrie (siehe 7.3.2) zu konzipieren und vorzubereiten. In diese Unterrichtsstunden sollen die Lehrkräfte ein oder zwei passend zum Thema vorgegebene Aufgaben, die nach Aspekten der kognitiven Aktivierung ausgewählt wurden (siehe 7.3.1), verwenden und mit einem inhaltlichen Rahmen sowie selbst gewählten Aufgaben verbinden. Eine Folge von ca. drei Unterrichtsstunden ermöglicht es, auch weiter greifende Vernetzungen zu beobachten. Außerdem können sowohl die Lehrerinnen und Lehrer als auch die Schülerinnen und Schüler im Verlauf der drei Unterrichtsstunden eine gewisse Unbefangenheit gegenüber der Videografierung entwickeln.
Die Lehrpersonen werden gebeten, ihre Unterrichtsplanung nach einem vorgegebenen Fragenkatalog (siehe 7.3.3) schriftlich festzuhalten. Der durchgeführte Unterricht wird videografiert (siehe 7.3.4) und im Anschluss an die drei Unterrichtsstunden werden in einem reflektierenden, leitfadengestützten Interview, in dem auch die eingesetzten Aufgaben als stimulated recall (siehe z.B. Clarke et al., 2006) verwendet werden, Gedanken und Begründungen der Lehrerinnen und Lehrer zur didaktischen Strukturierung erfasst (siehe 7.3.5). Diese Datenquellen werden anhand der eingesetzten Aufgaben ausgewertet, wobei zunächst die objektiven Kennzeichen der Aufgaben auf Grundlage vorhandener Aufgabenklassifikationssysteme (siehe 7.4.1) analysiert werden, um einzuschätzen, welches Potenzial unabhängig vom Unterricht der Lehrpersonen in den Aufgaben steckt. Dies wird dann mit dem Einsatz der Aufgaben im Unterricht und den Aussagen der Lehrerinnen und Lehrer in der Planung und

im Interview in Beziehung gesetzt. Hierzu wird sowohl der Unterricht als auch die schriftliche Unterrichtsplanung und das Interview mithilfe einer strukturierenden, qualitativen Inhaltsanalyse ausgewertet (siehe 7.4.2). Dabei stehen insbesondere die verschiedenen Aspekte des fachdidaktischen Wissens und der kognitiven Aktivierung im Fokus.
Ergänzend zu diesen qualitativen Erhebungen und Analysen bearbeiten die Lehrpersonen auch den COACTIV-Test, um die qualitativ gewonnene Einschätzung des fachdidaktischen Wissens der Lehrerinnen und Lehrer mit den Ergebnissen eines vielfach erprobten Tests vergleichen zu können, in dem auch das mathematische Fachwissen der Lehrerinnen und Lehrer erhoben wird (siehe 7.3.6). So wird es mithilfe des Untersuchungsdesigns einerseits möglich, anhand detaillierter Einzelfallanalysen die Nutzung des fachdidaktischen Wissens in konkreten Praxissituationen aufzuzeigen. Andererseits können über den Vergleich dieser Analysen mit den COACTIV-Test-Ergebnissen Zusammenhänge zwischen realisierten didaktischen Unterrichtsstrukturierungen und dem fachdidaktischen Wissen der Lehrerinnen und Lehrer, wie es in der Konzeption des COACTIV-Tests erhoben wurde, analysiert werden. Außerdem können Bezüge zum in COACTIV erhobenen Fachwissen der Lehrpersonen hergestellt werden.
In den folgenden Abschnitten werden zunächst die teilnehmenden Lehrerinnen und Lehrer sowie deren Auswahl beschrieben (siehe 7.1). Außerdem wird die Kombination verschiedener Erhebungsinstrumente und Auswertungsmethoden begründet (siehe 7.2). Anschließend werden die einzelnen Schritte der Datenerhebung dargestellt (siehe 7.3), woraufhin eine Erläuterung der methodischen Schritte der Auswertung folgt (siehe 7.4).

7.1 Stichprobe

Die Auswahl der Stichprobe erfolgte vor allem nach Kriterien der Zugänglichkeit (Merkens, 2000). Es stellt für Lehrerinnen und Lehrer im Berufsalltag eine ungewohnte Situation dar, dass sie im Rahmen ihres Unterrichts beobachtet und sogar videografiert werden. Das schriftliche Festhalten der Unterrichtsplanung wird nach Aussagen der angefragten Lehrerinnen und Lehrer jenseits des Referendariats nicht mehr ausführlich praktiziert. Es erfordert daher, ebenso wie das an die Unterrichtsstunden anschließende Interview, sehr viel zusätzliche Zeit von den Lehrpersonen, die viele der angefragten Lehrerinnen und Lehrer nicht aufbringen konnten oder wollten. Es hat sich im Rahmen dieser Arbeit daher als relativ mühsam herausgestellt, Lehrerinnen und Lehrer für eine Teilnahme an der Untersuchung zu gewinnen. Es ist bei den Analysen zu berücksichtigen, dass es sich vermutlich um eher interessierte Lehrpersonen handelt.
Aufgrund der tiefgehenden, umfangreichen Analysen je Lehrkraft wird der Stichprobenumfang auf fünf Lehrpersonen festgelegt. Diese sollen sich möglichst stark voneinander unterscheiden, um eine möglichst große Variationsbreite zu erhalten. Durch diese Breite wird versucht, den komplexen Strukturen des Lehrerwissens und -handelns auf den Grund zu gehen (vgl. Flick, 2002). Dies wird im Rahmen dieser Arbeit in drei Dimensionen realisiert: Zum einen werden zwei Lehrkräfte an Hauptschulen und drei Lehrkräfte am Gymnasium, bzw. am gymnasialen Zweig einer kooperativen Gesamtschule, befragt.[10] Außerdem unterscheiden sich die Probanden in ihrer bisherigen Unterrichtserfahrung, das Spektrum reicht von 1,5 bis 20 Jahren Berufserfahrung. Des Weiteren haben nur drei der untersuchten Personen eine traditionelle Lehramtsausbildung durchlaufen. Die teilnehmenden Lehrpersonen werden im Folgenden kurz einzeln beschrieben. Dabei ist die Reihenfolge der Lehrpersonen aufsteigend nach ihren Ergebnissen im COACTIV-Test gewählt worden (vgl. Abbildung 13.1), so dass zu-

[10] Da sich in der kooperativen Gesamtschule der gymnasiale Zweig kaum von einem Gymnasium unterscheidet, wird im Folgenden von drei Gymnasiallehrern gesprochen.

nächst die Analysen der beiden Lehrpersonen an der Hauptschule und anschließend die Analysen der drei Gymnasiallehrer dargestellt werden. Die Erhebungen fanden zwischen November 2010 und März 2011 statt.

7.1.1 Beschreibung der einzelnen Lehrer

Lehrer 1

Der Lehrer 1 ist seit sieben Jahren als Lehrer an einer Hauptschule tätig. Nach einer handwerklichen Ausbildung im Metallbau, ein paar Jahren Berufserfahrung und einem technischen Studium, absolvierte er das klassische Studium für das Lehramt an Grund-, Haupt und Realschulen mit den Fächern Mathematik und evangelische Religion. Nach dem zweiten Staatsexamen war er 4 Semester lang parallel zum Schuldienst an universitären Mathematikdidaktikveranstaltungen beteiligt. Außerdem engagiert er sich in der Physikdidaktik.

Lehrerin 2

Die Lehrerin 2 ist seit sieben Jahren als Lehrerin an einer Hauptschule tätig. Nachdem Sie ihr Diplom in Chemie erworben hatte, unterrichtete sie ca. 15 Jahre lang an berufsbildenden Schulen. Anschließend absolvierte Sie als Quereinsteigerin das Referendariat für die Fächer Physik und Chemie an einer Hauptschule. Sie engagiert sich in der Physikdidaktik und unterrichtet Mathematik fachfremd.

Lehrer 3

Der Lehrer 3 arbeitet seit 1,5 Jahren als Lehrer am gymnasialen Zweig einer kooperativen Gesamtschule. Nach einem naturwissenschaftlichen Studium mit anschließender Promotion in diesem Bereich, arbeitete er acht Jahre in der Forschung bevor er ohne Referendariat als Quereinsteiger mit den Fächern Mathematik und Physik in den Lehrerberuf wechselte.

Lehrer 4

Der Lehrer 4 ist seit 20 Jahren Gymnasiallehrer. Nach dem Abitur absolvierte er eine traditionelle Lehramtsausbildung mit Studium und Referendariat für die Fächer Mathematik und Politik/Wirtschaft, später kamen noch Veranstaltungen im Bereich Informatik hinzu.

Lehrer 5

Der Lehrer 5 ist seit zwei Jahren Lehrer am gymnasialen Zweig einer kooperativen Gesamtschule. Nach einer kaufmännischen Ausbildung und kurzer Tätigkeit in diesem Beruf absolvierte er die traditionelle Lehramtsausbildung für das Lehramt an Gymnasien mit den Fächern Mathematik und Physik inklusive zweijährigem Referendariat.

7.2 Verbindung unterschiedlicher Methoden

Die didaktische Strukturierung des Unterrichts findet auf mehreren Ebenen statt: bei der Planung, Durchführung und Reflexion von Unterricht (siehe 2.8). Die Erfassung des Wissens von Lehrerinnen und Lehrern auf diesen drei Ebenen und die Untersuchung des Zusammenhangs zwischen Wissen und Handeln erfordert die Kombination verschiedener Erhebungsinstrumente (Bromme, 1992). Flick (2011) benennt die Kombination unterschiedlicher qualitativer Methoden als einen Ansatz von Triangulation, der innerhalb der qualitativen Forschung die meiste Aufmerksamkeit erhält.

Die in dieser Arbeit verwendeten qualitativen Methoden, der Fragenkatalog zur Unterrichtsplanung, die Videografie des Unterrichts und das leitfadengestützte Interview (vgl. Abbildung 7.1), ergänzen sich gegenseitig. Dabei liegt sowohl der Konstruktion des Fragenkatalogs für die Unterrichtsplanung, als auch dem Interviewleitfaden dieselbe theoretische Konzeption des fachdidaktischen Wissens zugrunde (siehe 7.3.3 und 7.3.5). Außerdem werden die Daten aller drei Erhebungen mithilfe desselben Kategoriensystems (siehe Kapitel 0) ausgewertet. Die Kombination der drei Methoden ermöglicht daher ein umfassenderes Bild von der Nutzung des fachdidaktischen Wissens bei der didaktischen Strukturierung des Unterrichts, als es jede dieser Methoden alleine vermitteln könnte (vgl. Flick, 2011).
Des Weiteren werden auch auf der Ebene der Auswertung verschiedene qualitative Methoden miteinander in Beziehung gesetzt. Einerseits werden die Aufgaben auf der Grundlage bestehender Aufgabenklassifikationssysteme analysiert. Andererseits wird die didaktische Strukturierung des Unterrichts mithilfe der qualitativen Inhaltsanalyse ausgewertet. Die beiden Methoden ergänzen sich hier gegenseitig, um eine umfassendere Einschätzung des fachdidaktischen Wissens der Lehrerinnen und Lehrer und dessen Nutzung vornehmen zu können.
Eine ähnliche Verbindung verschiedener qualitativer Methoden bei der Datenerhebung und Datenauswertung nehmen auch Blömeke, Risse, Müller, Eichler und Schulz (2006) vor, um die Qualität im Unterricht eingesetzter Aufgaben mit den Intentionen der Lehrerinnen und Lehrer und der Umsetzung der Aufgabenqualität im Unterricht zu analysieren. Auch Kleinknecht (2010) verwendet eine Kombination aus Unterrichtsvideos und anschließendem Interview, um aus einer erziehungswissenschaftlichen Sichtweise heraus den Einsatz von Aufgaben im Mathematik- und Deutschunterricht zu bewerten.
Um die Nutzung des fachdidaktischen Wissens mit dem potentiell zur Verfügung stehenden Wissen der Lehrerinnen und Lehrern vergleichen zu können, kann auf bestehende Erhebungskonstrukte, beispielsweise den COACTIV-Test, zurückgegriffen werden. Dieser wurde bereits vielfach erprobt und eingesetzt und ihm liegt eine ausführliche theoretische Konzeptualisierung zugrunde. Durch die Einbeziehung des COACTIV-Tests werden qualitative Erhebungen mit quantitativen Erhebungen kombiniert. Lange Zeit wurden in der Forschung entweder quantitative oder qualitative Studien durchgeführt. Die Kombination dieser beiden Forschungsrichtungen erfährt aber in den letzten 20 Jahren immer mehr Aufmerksamkeit (Flick, 2011; Teddlie & Tashakkori, 2009). Die Begriffsbestimmung für diese Forschungsrichtung ist dabei aber nicht einheitlich. Es wird unter anderem von ‚mixed methods', Integration oder Triangulation qualitativer und quantitativer Daten gesprochen, wobei mit den unterschiedlichen Bezeichnungen auch teilweise unterschiedliche Zielsetzungen verfolgt werden (Flick, 2011).
Im Rahmen dieser Arbeit sind mit der Kombination qualitativer und quantitativer Erhebungen mehrere Intentionen verbunden: Zum einen stellen die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten qualitativen Analysen eine Vertiefung, bzw. Überprüfung der Ergebnisse der COACTIV-Studie dar (vgl. Flick, 2002). Diese Ergänzung wird auch bei Krauss et al. (2011) vorgeschlagen. Die Einbeziehung des COACTIV-Tests ermöglicht außerdem einen Vergleich des qualitativ erhobenen fachdidaktischen Wissens mit dem mathematischen Fachwissen der Lehrerinnen und Lehrer, welches sich durch die qualitativen Erhebungsinstrumente nur schwer beurteilen lässt. So können zumindest in Ansätzen Rückschlüsse auf den Zusammenhang von fachdidaktischem Wissen und mathematischem Fachwissen gezogen werden, indem sich die qualitativen und quantitativen Instrumente gegenseitig ergänzen (vgl. Flick, 2002). Des Weiteren können die Ergebnisse der im Rahmen dieser Arbeit untersuchten Lehrpersonen mit den Ergebnissen der COACTIV-Studie in Bezug auf die dort untersuchte

Stichprobe verglichen werden, so dass eine Einordnung der qualitativen Ergebnisse in bestehende Forschung möglich wird.

7.3 Erläuterung der methodischen Schritte der Datenerhebung

Die Datenerhebung setzt sich aus der schriftlichen Unterrichtsplanung dreier aufeinanderfolgender Geometriestunden, der videografierten Unterrichtsdurchführung und einem videografierten, reflektierenden Interview zusammen. Dabei sollten die Lehrerinnen und Lehrer jeweils eine oder zwei vorgegebene Aufgaben in den Unterricht einbauen. Die einzelnen Schritte der Datenerhebung werden im Folgenden begründet.

7.3.1 Implementation vorgegebener Aufgaben

In der COACTIV-Studie hat sich gezeigt, dass kognitiv aktivierende Aufgaben (siehe 5.2) eher selten im deutschen Mathematikunterricht verwendet werden (Jordan et al., 2008), weshalb ursprünglich deren Einsatz im Unterricht untersucht werden sollte. Hierzu wurden spezielle PISA-Aufgaben aus dem Bereich der Geometrie (siehe 7.3.2) ausgewählt, die vor allem begriffliches Wissen im Gegensatz zu prozeduralem Wissen oder Faktenwissen erfordern, indem verschiedene Wissenselemente miteinander in Beziehung gesetzt werden müssen. Außerdem sind die ausgewählten Aufgaben auf vielfältige Weise lösbar und erfordern vor allem innermathematisches Modellieren und mathematisches Argumentieren (siehe 5.2). Es ist aber zu erwähnen, dass diese Charakteristika nur auf einen ausgewählten Teil der PISA-Aufgaben zutreffen und keinesfalls als Kriterien aufzufassen sind, denen alle PISA-Aufgaben genügen. Diese Aufgaben sind einer breiteren Sichtweise von Literacy verpflichtet, wie sie z.B. in den deutschen Ergänzungen zur PISA-Studie zum Ausdruck kommt (M. Neubrand, 2004).

In der ersten Pilotierung setzte ein Gymnasiallehrer im Unterricht kaum das Potenzial der von ihm eingesetzten PISA-Aufgaben um. Im anschließenden Interview konnte er dagegen detailliert das Potenzial der Aufgaben beschreiben. Dies lässt darauf schließen, dass der Lehrer über deutlich mehr fachdidaktisches Wissen verfügt, als sich beim Handeln im Unterricht zeigte. So rückte die Untersuchung des fachdidaktischen Wissens in Zusammenhang mit dem durchgeführten Unterricht anstelle des allgemeinen Einsatzes von PISA-Aufgaben im Unterricht in den Fokus des Erkenntnisinteresses.

Da das Erkennen des Potenzials von Aufgaben einen wichtigen Aspekt des fachdidaktischen Wissens darstellt (siehe 4.1), wurde die Implementierung vorgegebener Aufgaben mit kognitivem Aktivierungspotenzial beibehalten. Allerdings wurde die Unterrichtsbeobachtung auf von den Lehrerinnen und Lehrern selbst gewählte Aufgaben ausgeweitet, da die Auswahl von Aufgaben einen wichtigen Aspekt des fachdidaktischen Wissens darstellt (siehe 4.1).

Durch die Auseinandersetzung mit den eher ungewohnten Aufgabentypen sollten die Lehrerinnen und Lehrer zum Nachdenken über ihre Unterrichtsplanungen angeregt werden. Die Aufgaben dienten als „Kristallisationspunkte“ (Bromme et al., 1990, S. 1) zur Aktivierung des fachdidaktischen Wissens. Außerdem können anhand des erhöhten kognitiven Aktivierungspotenzials der Aufgaben wichtige Rückschlüsse auf das fachdidaktische Wissen der Lehrerinnen und Lehrer gezogen werden, indem analysiert wird, ob die Lehrkräfte das erhöhte Potenzial erkennen und ob sie das erkannte Potenzial auch im Unterricht umsetzen.

Die Pilotierungen zeigten auch, dass es relativ schwierig ist, Lehrerinnen und Lehrer zu finden, die genau die gewählten PISA-Aufgaben im derzeitigen Unterricht einsetzen können, da die Aufgaben thematisch nur an wenigen Stellen im Schuljahr und nur in einer bestimmten Jahrgangsstufe passend sind. Ein Abwarten dieses Zeitpunktes hat sich als nicht praktikabel

herausgestellt, da die Lehrpersonen in dieser Wartezeit mehrfach den Kontakt abbrachen. Um also flexibler auf die jeweils aktuellen Unterrichtssituationen reagieren zu können, wurden ergänzend zur Vorgabe der speziell ausgewählten PISA-Aufgaben auch Aufgaben selbst entwickelt. Diese wurden passend zum jeweiligen Geometriethema der Lehrerinnen und Lehrer vorgegeben. Hierdurch wurde auch das Spektrum der möglichen Klassen, in denen die Erhebung stattfinden kann, erweitert. Es musste lediglich ein Zeitpunkt mit den Lehrerinnen und Lehrer abgesprochen werden, zu dem sie in irgendeiner ihrer Mathematikklassen, egal welcher Jahrgangsstufe, ein Thema aus dem Bereich der Geometrie behandeln.
Den Lehrerinnen und Lehrern wurden jeweils mehrere zum Thema passende Aufgaben vorgegeben, aus denen die Lehrpersonen eine oder zwei Aufgaben auswählen sollten. Diese durften auch abgeändert werden, da sich an der Änderung der Aufgaben auch Aussagen über das fachdidaktische Wissen der Lehrerinnen und Lehrer ableiten lassen. Bei den vorgegebenen Aufgaben wurde der Fokus auf ein erhöhtes kognitives Aktivierungspotenzial beibehalten. Insbesondere die Aktivierung von begrifflichem Denken, das Ermöglichen von Argumentationen und verschiedenen Lösungswegen und die Vernetzung von Wissen, beispielsweise durch innermathematische Modellierungen, wurde berücksichtigt. Das Bereitstellen einer Auswahl diente vor allem dazu, den Unterricht der Lehrerinnen und Lehrer nicht zu stark zu beeinflussen. Allerdings ist durch die Erweiterung der vorgegebenen Aufgaben das Spektrum der Variation sehr groß, da nur eine der vorgegebenen Aufgaben von zwei Lehrpersonen im Unterricht eingesetzt wurde. Alle anderen Aufgaben konnten nur jeweils einmal im Unterricht beobachtet werden. Dies ließ sich aufgrund der vorgenannten Schwierigkeiten mit der Bereitschaft zur Teilnahme bei den angefragten Lehrerinnen und Lehrern im Rahmen dieses Projektes nicht anders lösen. Es wurde aber zumindest das Stoffgebiet der Geometrie fokussiert.

7.3.2 Fokussierung auf Geometrieunterricht

Während die Stichprobe der Lehrerinnen und Lehrer sich möglichst stark unterscheiden sollte (siehe 7.1), wurde im Rahmen dieser Arbeit inhaltlich ein Stoffgebiet fokussiert, da beispielsweise in den Analysen von TIMSS-Video gezeigt werden konnte, dass das Verhalten von Lehrerinnen und Lehrern stark vom Stoffgebiet abhängen kann (J. Neubrand, 2006). Auch im Bereich der subjektiven Überzeugungen gibt es einige qualitative Studien, die darauf hinweisen, dass die subjektiven Theorien der Lehrerinnen und Lehrer stark vom inhaltlichen Stoffgebiet abhängig sind. So kann es möglich sein, dass eine Lehrperson beispielsweise in der Stochastik den Anwendungsbezug als sehr wichtig erachtet, während sie in der Geometrie Unterricht auf einer innermathematischen Ebene bevorzugt (vgl. Girnat & Eichler, 2011). Da das fachdidaktische Wissen und insbesondere das Unterrichtshandeln eng mit den Überzeugungen verknüpft zu sein scheint (siehe 3.2.2), wurde im Rahmen dieser Arbeit auf ein mathematisches Stoffgebiet fokussiert, um einen Einfluss des Fachgebietes auf die beobachteten Unterschiede in der didaktischen Strukturierung der Lehrerinnen und Lehrer auszuschließen.
Das Stoffgebiet der Geometrie wurde ausgewählt, weil sich hier die Gestaltung von Aufgaben mit erhöhtem kognitiven Aktivierungspotenzial (siehe 5.2) gut umsetzten lässt, denn „Wie kein anderer Bereich weist die Geometrie einen großen Reichtum an anschaulichen Problemen aller Schwierigkeitsniveaus auf und ist damit von der Grundschule an für die allgemeinen Lernziele ‚Entdecken von Strukturen‘ und ‚Argumentieren‘ so ergiebig“ (Wittmann, 1999, S. 207). Die Geometrie bietet vielfältige Möglichkeiten, die prozessbezogenen Kompetenzen auszubilden, welche in engem Zusammenhang mit den Kategorien der

kognitiven Aktivierung stehen (vgl. Kapitel 5). Außerdem lassen sich viele Verbindungen zu anderen Stoffgebieten, beispielsweise der Arithmetik oder der Algebra, herstellen (M. Neubrand, 2010; Wittmann, 1999). Da sich anhand dieser Aspekte das fachdidaktische Wissen von Lehrerinnen und Lehrer zeigen kann (siehe 4.1), ist das Stoffgebiet der Geometrie gut als Grundlage für diese Untersuchung gut geeignet. Außerdem macht M. Neubrand (2010) am Beispiel einer Aufgabe deutlich, dass in der Geometrie auch auf niedrigem Niveau vielfältige Verbindungen und eher begriffliches Wissen anstelle des Abarbeitens von Rezepten angesprochen werden können. Dies ist im Rahmen dieser Arbeit von besonderer Bedeutung, da in die Erhebung auch Hauptschulklassen einbezogen sind.

7.3.3 Erhebung der Unterrichtsplanung

Die didaktische Struktur wird vor allem während der Unterrichtsplanung festgelegt, bzw. vorbereitet, weshalb zu einer Untersuchung der didaktischen Struktur des Unterrichts eine Erhebung der Unterrichtsplanung unbedingt notwendig ist (siehe 2.8). Außerdem kann sich das fachdidaktische Wissen der Lehrerinnen und Lehrer anhand der Unterrichtsplanung zeigen, denn „die Unterrichtsplanung ist ein gutes ‚Übungsfeld' für die […] Verschmelzung von Theoriewissen und Erfahrungswissen" (Bromme & Seeger, 1979, S. 4). Um möglichst alle drei Dimensionen des fachdidaktischen Wissens, das Wissen in Bezug auf Schülerkognitionen, Lehrerhandeln und Inhalte (siehe 4.1), in der Unterrichtsplanung zu erheben, wurde den Lehrerinnen und Lehrern ein Fragenkatalog zur Unterrichtsvorbereitung vorgelegt, der diese drei Komponenten enthält (siehe Abbildung 7.2).

Was sind ihre allgemeinen Ziele für diese Stunde hinsichtlich…

…des Curriculums (Wohin führt der Inhalt der Stunde)?

…der Fähigkeiten, die bei den Schülerinnen und Schüler ausgebildet werden sollen?

Fragen zum Lehrerhandeln:

- Welche Aufgaben haben Sie ausgewählt?
- Warum haben Sie diese Aufgaben ausgewählt und welche Funktionen haben die Aufgaben im Unterricht (Erarbeitung, Übung …)
- Warum haben Sie diese Reihenfolge der Aufgaben gewählt? Wie hängen die Aufgaben zusammen?
- Begründen Sie bitte methodische Besonderheiten.

Fragen zum Schülerdenken:

- Welche Lösungen erwarten Sie standardmäßig?
- Gibt es alternative Lösungen?
- Wo erwarten Sie Schülerschwierigkeiten? Warum?

Abbildung 7.2: Fragenkatalog zur Unterrichtsvorbereitung

Die Fragen im ersten Abschnitt beziehen sich ausschließlich auf die inhaltsbezogene Komponente des fachdidaktischen Wissens. Die beiden Fragen zielen dabei einerseits auf die inhaltsbezogenen und andererseits auf die prozessbezogenen Kompetenzen der Bildungsstandards ab. Die Verwendung dieser Fachbegriffe wurde hier aber bewusst vermieden. Im zweiten Abschnitt fokussieren die Fragen ebenfalls vor allem die inhaltsbezogene Komponente, da vor allem die gewählten Aufgaben und die Gestaltung des Unterrichts mithilfe der Aufgaben im Mittelpunkt stehen. Allerdings lassen sich aus der Beantwortung dieser Fragen ebenfalls Rückschlüsse auf das Wissen über das Verständlichmachen mathematischer Inhalte ziehen, beispielsweise auf die Wahl der Repräsentationsformen oder Beispiele. Der dritte Abschnitt bezieht sich direkt auf das schülerbezogene Wissen, indem die Lehrkräfte aufgefordert werden, mögliche Schülerhandlungen und -kognitionen vorherzusagen. Es wird dabei bewusst sowohl auf mögliche richtige Lösungen, als auch auf mögliche Probleme und Schwierigkeiten eingegangen, da beide Ebenen der Diagnose einen wichtigen Aspekt des fachdidaktischen Wissens darstellen (vgl. 4.1).

In den Pilotierungen zeigte sich, dass eine detaillierte schriftliche Unterrichtsplanung auch für erfahrene Lehrkräfte eher ungewohnt und schwierig ist. Deshalb wurde es den Lehrerinnen und Lehrern freigestellt, diese Fragen direkt in einem Text oder in Form eines Stundenverlaufsplanes, wie er beispielsweise häufig im Referendariat gefordert ist (H. Meyer, 2007a), zu beantworten. Außerdem wurde den Lehrkräften anhand eines Beispielsentwurfs (siehe Anhang) verdeutlicht, dass die mathematikdidaktischen Fragestellungen im Fokus der Planung stehen sollten und dass die Begründung methodischer Aspekte, beispielsweise der Sozialform, eher nebensächlich ist. Dieses Vorgehen hat sich in der Pilotierung bewährt. Allerdings hat sich in der Hauptuntersuchung gezeigt, dass sich die Lehrerinnen und Lehrer in der Ausführlichkeit der Beantwortung der Fragen stark unterscheiden. Teilweise haben sie sich in der Planung insgesamt sehr kurz gehalten oder sie haben nur einzelne Aspekte sehr ausführlich beschrieben, während sie andere Aspekte völlig vernachlässigten. Der Lehrer 4 begründet beispielsweise sehr ausführlich die Auswahl verschiedener Beweise des Satzes des Pythagoras, erwähnt aber mit keinem Wort mögliche Schülerlösungen und -probleme.

Alternativ hätte man die Planungsgedanken der Lehrpersonen auch mit einem Interview erheben können. Hier hätte aber die Gefahr bestanden, dass die Unterrichtsplanung durch das Interview beeinflusst wird. Die Lehrerinnen und Lehrer könnten beispielsweise durch Fragen des Interviewers über Aspekte nachdenken, die sie in ihrer eigentlichen Planung nicht berücksichtigt hätten, da die Lehrerinnen und Lehrer im Interview auf jede Frage eine Antwort suchen. Dies kann natürlich auch durch die vorgegebenen Fragen bewirkt werden. Allerdings hat sich gezeigt, dass die Lehrkräfte einige der Fragen (z.B. zu möglichen Schülerschwierigkeiten) in der schriftlichen Planung nicht beantworten, was darauf schließen lässt, dass sie sich im Vorfeld keine Gedanken zu diesen Aspekten gemacht haben. Deshalb scheint die schriftliche Unterrichtsplanung eine Erhebungsmethode darzustellen, die deutlich näher an der Planungsrealität liegt als ein Interview und überwiegend die eigenen Gedanken der Lehrerinnen und Lehrer erfasst.

Bei der Auswertung hat sich gezeigt, dass insbesondere zum Wissen über das Verständlichmachen von mathematischen Inhalten nur wenige Rückschlüsse anhand der Unterrichtsplanung gezogen werden konnten. Hier hätte der Fragenkatalog diesbezüglich weiter ausgearbeitet werden müssen.

7.3.4 Videografie des durchgeführten Unterrichts

„Auch wer vor dem Unterricht plant ist nicht davor geschützt, dass der Unterricht dann doch ganz anders abläuft“ (Bromme & Seeger, 1979, S. 3), denn während des Unterrichts müssen die Lehrerinnen und Lehrer viele weitere Informationen über das Verhalten und die Denkprozesse ihrer Schülerinnen und Schüler spontan verarbeiten und darauf reagieren. Es ist also vor allem schnelles Handeln im Klassenzimmer nötig, das überlegte Abwägen von Handlungsalternativen tritt relativ selten auf. Dabei handeln Lehrerinnen und Lehrer oft gekonnt und intelligent, können aber das dazu benötigte Wissen nicht vollständig angeben. (Bromme, 1992).

Da das Wissen beim Handeln vor allem implizit verwendet wird (siehe 4.4), wäre eine Erhebung des professionellen Wissens der Lehrkräfte im Zusammenhang mit ihrem Unterricht allein über ein Interview nicht ausreichend. Deshalb wird im Rahmen dieser Untersuchung

zum Vergleich von Planung, Durchführung und Interviewaussagen der gehaltene Mathematikunterricht videografiert. Hieraus können Rückschlüsse auf das fachdidaktische Wissen und insbesondere die Nutzung dieses Wissens zur Durchführung von Unterricht gezogen werden. Das hierzu nötige fachdidaktische und theoretische Gerüst ist seit der TIMS-Video-Studie in der Mathematikdidaktik relativ weit entwickelt (Clarke et al., 2006; Klieme, Lipowsky, et al., 2006; Törner, Sriraman, Sherin, Heinze, & Jablonka, 2005).
Videoaufzeichnungen eignen sich für detaillierte Analysen von Unterrichtsprozessen in besonderer Weise, da hierdurch deutlich mehr Unterrichtsparameter erfasst werden können als in Gedächtnisprotokollen oder Unterrichtsbeobachtungen durch Dritte. Dabei ist aber zu beachten, dass auch das Video kein reales Bild des Unterrichts liefert. Es ist zwar deutlich realistischer als andere Beobachtungsformen, zeigt aber trotzdem nur einen Ausschnitt der Unterrichtsrealität. Die Videografie bietet den großen Vorteil, dass während der Datenerhebung nur die Blickrichtung der Kamera gewählt werden muss, während z.B. beim Beobachtungsprotokoll direkt entschieden werden muss, welche Aspekte protokolliert werden. Die Analyse der Unterrichtsprozesse kann anhand der Videos beliebig häufig wiederholt und auch von verschiedenen Beobachtern durchgeführt werden. Hierdurch wird die Kommunikation über die Unterrichtsbeobachtung deutlich vereinfacht. Außerdem ist mit den neuen Technologien die Aufzeichnung des Unterrichts auf Video relativ unauffällig möglich (Dinkelaker & Herrle, 2009; Hiebert et al., 2003; von Aufschnaiter & Welzel, 2001).
Im Rahmen der TIMS-Video-Studie und im Pythagoras-Projekt wurde anhand von Videoaufzeichnungen das Ausmaß der kognitiven Aktivierung des Unterrichts beurteilt, wie es auch im Rahmen dieser Arbeit zur Einschätzung der Qualität der Nutzung des fachdidaktischen Wissens vorgesehen ist (siehe 6.2). Deshalb lehnt sich die methodische Umsetzung der Videoaufzeichnung stark an die Vorgaben des Pythagoras-Projektes an, welche wiederum eine Weiterentwicklung der Vorgaben bei TIMSS-Video darstellen (siehe Petko, 2006). Bei den aufgezeichneten Stunden wurde jeweils eine Kamera fest im hinteren Teil des Klassenraums platziert. Diese Kamera war auf die Tafel gerichtet und mit einem Weitwinkelobjektiv ausgestattet, sodass ein möglichst großer Überblick über die Klassensituation gefilmt wurde. Ebenso wie im Pythagoras-Projekt wurde eine zweite Kamera in der Hand gehalten. Diese Kamera fokussierte auf das jeweils aktuelle Unterrichtsgeschehen, insbesondere die aktuelle Interaktion der Lehrperson, da vor allem das Handeln der Lehrerinnen und Lehrer und nicht das Handeln der Schülerinnen und Schüler im Vordergrund des Erkenntnisinteresses steht. In Plenumsphasen war die Kamera vor allem auf die Tafel oder andere Medien (z.B. Overhead-Projektor oder Beamer) gerichtet, wobei versucht wurde, auch die Lehrkraft im Bild zu halten. Die Veränderung beispielsweise des Tafelbildes wurde durch kurzzeitiges Zoomen festgehalten. In Schülerarbeitsphasen, in denen die Lehrerinnen und Lehrer durch den Raum gehen, wurden die Lehrpersonen mit dieser Kamera ‚verfolgt', um die Kommunikation der Lehrerinnen und Lehrer mit einzelnen Lernenden oder Schülergruppen während dieser Arbeitsphasen zu erfassen. Hierbei wurde kurzzeitig auf Schülerdokumente fokussiert und gezoomt (vgl. Dinkelaker & Herrle, 2009; Petko, 2006).
Anfängliche Bedenken, dass dieses ‚Verfolgen' mit der Kamera den Unterrichtsablauf stören würde, haben sich nicht bestätigt. Sowohl die Lehrkräfte als auch die Schülerinnen und Schüler haben die vorhandenen Kameras so gut wie nicht beachtet. Eine Ausnahme stellt der Lehrer 1 dar, der während des Unterrichts teilweise sein Handeln gegenüber der Kamera kommentiert hat. Es ist aber davon auszugehen, dass diese Lehrperson auch ohne das Vorhandensein einer Kamera mit der Beobachterin kommuniziert hätte.
Zusätzlich zu den Videodaten wurden für die Analyse des durchgeführten Unterrichts die eingesetzten Aufgaben, entweder als Arbeitsblatt oder als Kopie der entsprechenden Schul-

buchseiten, von den Lehrerinnen und Lehrern eingefordert, soweit sie noch nicht Bestandteil der schriftlichen Unterrichtsplanung waren.

7.3.5 Reflektierendes, leitfadengestütztes Interview

„Planung wird gesteuert durch Erinnerungen und Antizipationen von vergangenen bzw. zukünftigen Ereignissen“ (Bromme, Hömberg, & Seeger, 1981, S. 4). Deshalb ist die Reflexion des Unterrichts ein entscheidender Schritt der didaktischen Strukturierung. Um das professionelle Wissen bei der Reflexion zu erfassen, bietet sich als Erhebungsmethode ein Interview im Anschluss an die durchgeführten Unterrichtsstunden an, weil sich mit dieser Methode relativ einfach reichlich Datenmaterial über die Erfahrungen und das Wissen der Befragten erheben lässt (Friebertshäuser, 1997). Da in der vorliegenden Untersuchung eine soziale Situation, nämlich der Mathematikunterricht, untersucht werden soll, eignet sich nach Gläser und Laudel (2006) das Experteninterview.[11] Durch diese spezielle Interviewtechnik lässt sich in besonderer Weise das spezifische Wissen der Experten erschließen. Auch Meuser und Nagel (1997) betonen die besondere Eignung des Experteninterviews zur Rekonstruktion komplexer Wissensbestände. Dabei schlagen Sie vor, bei der Auswertung der Interviews nicht nur auf das von den Experten bewusst geäußerte Wissen zu schauen, sondern auch das indirekte, das sogenannte implizite Wissen, mit zu berücksichtigen.
Mithilfe eines Interviews wurden deshalb im Rahmen dieser Arbeit weitere Gedanken der Lehrerinnen und Lehrer sowie Begründungen für ihr Verhalten während der Unterrichtsstunden erfasst. Damit können weitere Rückschlüsse auf ihr fachdidaktisches Wissen und auch ihre Reflexionsfähigkeit gezogen werden, indem ihre Sichtweise auf den Unterricht mit dem tatsächlich durchgeführten Unterricht verglichen wird. Da das Interview dem Unterricht nachgeschaltet ist, konnte der eigentliche Unterricht durch die Durchführung des Interviews nicht mehr beeinflusst werden.
Allgemein besteht bei Interviews immer die Gefahr der Beeinflussung des Befragten durch verbale oder nonverbale Reaktionen des Interviewers, so dass der Befragte z.B. sozial erwünschte Antworten gibt oder verunsichert wird und seine Meinung nicht äußern mag (vgl. Friebertshäuser, 1997). Um dem vorzubeugen und auch um das Auftreten von Missverständnissen bei der Formulierung der Fragen zu vermeiden, wurde vor der Hauptuntersuchung ein ausführliches Interviewtraining mit Studenten durchgeführt (vgl. Flick, 1995).
Es besteht außerdem die Möglichkeit einer Differenz zwischen dem Gesagten und dem tatsächlichen Verhalten des Befragten. Dies lässt sich im Rahmen dieser Untersuchung durch einen Vergleich mit den Unterrichtsbeobachtungen überprüfen. Es kann aber beispielsweise bei der Begründung der Aufgabenauswahl durch diesen Vergleich nicht entschieden werden, ob die im Interview genannten Argumente tatsächlich zur Auswahl der Aufgaben beigetragen haben oder ob sie im Nachhinein konstruiert wurden. Es ist lediglich möglich zu überprüfen, ob die genannten Begründungen konsistent zur Unterrichtsvorbereitung und zum durchgeführten Unterricht sind.
Sowohl Gläser und Laudel (2006) als auch Meuser und Nagel (1997) halten ein offenes, leitfadengestütztes Interview für eine geeignete Erhebungsmethode des Expertenwissens. Eine Standardisierung erscheint ungeeignet, da das Wissen der Lehrerinnen und Lehrer zunächst unbekannt ist und erst in der Auswertung herausgearbeitet wird. Durch die relativ offene Gestaltung können vor allem die subjektiven Sichtweisen der Befragten besser herausgearbeitet werden als in standardisierten Verfahren (Flick, 1995). Es wird durch die Verwendung

[11] Als ‚Experte' bezeichnen Gläser und Laudel Menschen, die ein besonderes Wissen über soziale Sachverhalte besitzen. In diesem Sinne sind Lehrerinnen und Lehrer als Experten für ihren Mathematikunterricht anzusehen.

eines Leitfadens sichergestellt, dass alle für die Untersuchung wichtigen Aspekte im Laufe des Interviews angesprochen werden. Dabei sind die Reihenfolge, in der die vorab festgelegten Themen angesprochen werden, und die genaue Formulierung der Fragen nicht festgelegt. Dies ermöglicht einen möglichst flüssigen und natürlichen Gesprächsverlauf.

Bei der Rekonstruktion sozialer Situationen eignet sich das Leitfadeninterview in besonderer Weise, da hier häufig nur lose miteinander verbundene Themengebiete angesprochen werden müssen (Gläser & Laudel, 2006). Auch im Rahmen dieser Arbeit wurden im Interview verschiedene Themen, die miteinander in Verbindung stehen, angesprochen, nämlich die verschiedenen Aspekte des fachdidaktischen Wissens. Durch den konsequenten Einsatz eines Leitfadens kann das Datenmaterial an Struktur gewinnen, so dass die Vergleichbarkeit der Daten erhöht werden kann (Flick, 1995). Außerdem wird durch den Leitfaden sichergestellt, dass keine entscheidenden Themen vergessen werden.

Bei Leitfadeninterviews kommt der Erprobung des Leitfadens in einem Interviewtraining eine besondere Bedeutung zu, denn die Nutzung eines Leitfadens zur Steuerung des Interviewverlaufs verlangt vom Interviewer ein hohes Maß an Sensibilität. Es „ist eine permanente Vermittlung zwischen dem Interviewverlauf und dem Leitfaden notwendig“ (Flick, 1995, S. 113), um die nötigen Einzelentscheidungen (Wann stelle ich welche Frage? Wann sollte ich detaillierter nachfragen und wann lieber ausholende Ausführungen des Befragten unterstützen? …) zu treffen. Dazu muss der Interviewer auch immer einen guten Überblick über das bereits Gesagte haben.

Beim Experteninterview besteht zudem die Gefahr, dass der Interviewer vom Gesprächspartner als inkompetent erlebt wird, und somit nur oberflächliche Antworten auf seine Fragen bekommt. Dem kann aber durch die gründliche Ausarbeitung eines Leitfadens entgegengewirkt werden (Meuser & Nagel, 1997).

Erläuterung des Leitfadens

Da mit dem Interview insbesondere das fachdidaktische Wissen der Lehrerinnen und Lehrer erhoben werden sollte, mussten bei der Erarbeitung des Leitfadens vor allem die drei Komponenten des fachdidaktischen Wissens berücksichtigt werden: das schülerbezogene Wissen, das Wissen über das Verständlichmachen und das inhaltsbezogene Wissen (siehe 4.1.5). In Abbildung 7.3 ist der für die reflektierenden Interwies erarbeitete Leitfaden dargestellt.

Die relativ offene Einstiegsfrage sollte den Lehrpersonen zunächst die Möglichkeit geben, in das Interview hineinzufinden. Hiermit sollten einerseits die gedanklichen Schwerpunkte der Befragten festgestellt werden sowie ein gutes, möglichst natürliches Gespräch über die Unterrichtsplanung und -durchführung zustande kommen (Gläser & Laudel, 2006). Bereits in den Pilotierungen hat sich gezeigt, dass sich aus dieser allgemeinen Fragestellung schon viele Antworten auf die Fragen des Leitfadens ableiten lassen. Es reichten oft kurze Erzählanregungen aus, um einen Großteil der Fragen zu klären. Die meisten Unterfragen mussten gar nicht mehr gestellt werden, da die untersuchten Lehrerinnen und Lehrer häufig von selbst z.B. auf die Schülerfehler oder die Ziele der Stunden zu sprechen kamen.

Die Auflistung der Themen im Leitfaden entspricht im Prinzip den Fragen für die Unterrichtsvorbereitung, allerdings kann im Interview zusätzlich zur Planung des Unterrichts und zur Vorhersage von Schülerkognitionen auch der durchgeführte Unterricht reflektiert werden. Im Abschnitt Planung wurde aufgrund der sehr unterschiedlichen Ausführlichkeit der schriftlichen Planung gegebenenfalls nochmals explizit auf die Unterrichtsvorbereitung eingegangen. Dabei wurden insbesondere die von den Lehrerinnen und Lehrer intendierten Ziele thematisiert. Als Ergänzung zu den Fragen zur Planung wurden die Lehrpersonen zu einer

Einschätzung des Stundenverlaufs aufgefordert, wobei insbesondere die Zielerreichung angesprochen wurde. Hierdurch wurde versucht, die eigene Sichtweise der Befragten auf ihren Unterricht zu erfassen.

Einstiegsfrage: Was ist Ihnen an den Stunden besonderes aufgefallen?

Fragen zur **Planung** (je nachdem, wie ausführlich die Planung war)
- Wie sind Sie bei der Planung vorgegangen?
- Begründen Sie bitte die Reihenfolge der Aufgaben?
- Methodische Besonderheiten?
- Was waren Ihre Ziele?
- Haben Sie allgemeine Ziele verfolgt?

Fragen zum **Stundenverlauf**
- Sind Sie mit dem Stundenverlauf zufrieden?
- Sind die gewünschten Ziele erreicht worden?
- Warum sind Sie an … Stelle von der Planung abgewichen?
- An welcher Stelle würden Sie bei einer erneuten Durchführung anders handeln? Warum?

Fragen zu den verwendeten Aufgaben
- **Warum haben Sie diese Aufgaben gewählt?**
  - Warum ist die Aufgabe für diesen Stoff wichtig?
  - Welche Bedeutung hat die Aufgabe im Stundenzusammenhang?
  - Welche Bedeutung hat die Aufgabe in der Unterrichtseinheit?
  - Was lernen die Schüler über den Stoff hinaus (prozessbezogene Kompetenzen der Bildungsstandards)?
- Begründen Sie bitte die **Reihenfolge der Aufgaben**?
- Wie hängen die Aufgaben zusammen?
- Haben Sie versucht, **Verbindungen zwischen den Aufgaben** herzustellen? Wenn ja, wie?

Vorgegebene Aufgabe
- Was fällt Ihnen zu der vorgegebenen Aufgabe ein? Wodurch lässt sie sich charakterisieren?
- Ist dies ein gewohnter Aufgabentyp für die Schüler?
- Warum (nicht)?

Fragen zum Schülerdenken

1. Schwierigkeiten
- Hatten die Schüler Schwierigkeiten? Wo?
- Welcher Art waren die Schwierigkeiten?
- Waren die Schwierigkeiten größer / kleiner als erwartet?
- Warum traten die Schwierigkeiten auf? Welche Aufgaben waren z.B. anspruchsvoller?

2. Lernfortschritt
- Was haben die Schüler gelernt? Alternativ: Haben die Schüler irgendwo besser reagiert als erwartet?
- War der Lernfortschritt größer / kleiner als erwartet?

Traten Aspekte im Schülerdenken auf, mit denen Sie nicht gerechnet haben?

Allgemein:
War die Stunde heute wie immer oder ist Ihnen etwas Besonderes aufgefallen?
Waren die Schülerinnen und Schüler während der Kamerastunden anders?

Gibt es noch etwas, dass Sie gerne erzählen würden, einen Punkt unseres Gespräches, den Sie vertiefen oder noch einmal aufgreifen möchten?

Abbildung 7.3: Leitfaden für das reflektierende Interview

Einen wichtigen Bereich des Leitfadens stellen die Fragen zur Begründung der Aufgabenauswahl, zur Reihenfolge der Aufgaben und zu den Verbindungen zwischen den Aufgaben dar, da Aufgaben ein entscheidendes Mittel zur Gestaltung von Unterricht sind (siehe 6.1.1) und die Auswahl von Aufgaben einen zentralen Bestandteil des fachdidaktischen Wissens darstellt (siehe 4.1). Die schon in der Unterrichtsplanung thematisierten Begründungen konnten im Interview vertieft werden, da hier auch Nachfragen möglich waren. Diese konnten unter anderem sicherstellen, dass diese Begründungen thematisiert werden, auch wenn sie in der Unterrichtsvorbereitung nicht festgehalten wurden. Des Weiteren konnten die Lehrerinnen und Lehrer alternative Vorgehensweisen beschreiben und einschätzen, ob sich die Wahl der Aufgaben aus ihrer Sicht bewährt hat.

Bei den im Rahmen der Untersuchung vorgegebenen Aufgaben wurde anders als bei den von den Lehrerinnen und Lehrern selbst gewählten Aufgaben zusätzlich erfragt, ob es sich um einen für die Lernenden gewohnten Aufgabentyp handelt. Außerdem wurde versucht, die Lehrpersonen dazu anzuregen, die vorgegebenen Aufgaben zu charakterisieren, um Rückschlüsse ziehen zu können, ob die Lehrerinnen und Lehrer das erhöhte kognitive Aktivierungspotenzial der Aufgaben erkennen.

Das Einschätzen möglicher Schülerkognitionen stellt ebenfalls einen zentralen Bestandteil des fachdidaktischen Wissens dar, weshalb auch die Fragen aus der Unterrichtsplanung zum Schülerdenken wieder aufgegriffen werden. Allerdings kommt im Interview die reflektive Komponente hinzu, indem Fragen nach den aufgetretenen Schülerfehlern und sichtbar gewordenen Fehlkonzepten gestellt wurden. Es wurde aber auch der positive Lernfortschritt sowie die Entwicklung guter Strategien bei den Schülerinnen und Schülern thematisiert. Hier kann im Vergleich mit den tatsächlichen Unterrichtsbeobachtungen eine Einschätzung möglich werden, inwieweit die Lehrerinnen und Lehrer das Denken der Schülerinnen und Schüler einschätzen konnten.

Zum Abschluss wurde den Lehrpersonen noch die Möglichkeit gegeben, weitere Aspekte des Themas zu nennen, die ihrer Meinung nach im Interview zu wenig oder gar keine Berücksichtigung gefunden haben. Hierdurch könnten Aspekte von Unterricht aufgedeckt werden, die für die Untersuchung eine wichtige Rolle spielen, die aber bei der Ausarbeitung des Leitfadens übersehen wurden (vgl. Gläser & Laudel, 2006).

Da der Leitfaden ähnlich wie der Fragenkatalog zur Unterrichtsplanung aufgebaut ist, tritt auch hier wieder das Problem der geringen Berücksichtigung des Wissens über das Verständlichmachen auf, was aber erst bei der Auswertung aufgefallen ist. Im Vorfeld wurde vermutet, dass sich Aussagen zu dieser Subfacette aus den Beantwortungen der Fragen ableiten lassen. Dies hat sich allerdings nicht in der Ausführlichkeit bestätigt, in der es erwartet wurde. Deshalb sollten bei einer Überarbeitung des Leitfadens insbesondere Leitfragen zu dieser Subfacette integriert werden, beispielsweise Fragen zur Begründung der gewählten Repräsentationsformen und Beispiele. Außerdem kann nicht ausgeschlossen werden, dass die Begründungen der Lehrerinnen und Lehrer im Nachhinein konstruiert wurden oder Aufgrund ‚sozialer Erwünschtheit' zustande kamen. Um einen möglichst engen Bezug zum eigenen Unterricht herzustellen wurde deshalb innerhalb des Leitfadens die Methode des ‚stimulated recall' verwendet.

Stimulated recall

Da die Lehrerinnen und Lehrer im Interview ihr eigenes Denken und Handeln bei der Unterrichtsplanung und -durchführung erläutern sollen, ist es wichtig, den zeitlichen Abstand möglichst gering zu halten. Außerdem kann die Erinnerung der Lehrpersonen durch einen sogenannten ‚stimulated recall‘ unterstützt werden, der sie verstärkt dazu angeregt, über ihren Unterricht zu sprechen und diesen zu reflektieren, was für sie eine ungewohnte Situation darstellt.

Es hat sich in der bisherigen Forschung vor allem die Verwendung von Videoszenen des eigenen Unterrichts der Lehrkräfte als ‚stimulated recall‘ bewährt (siehe z.B. Clarke et al., 2006; Fischler, 2001; Leuchter, 2009). Da der Video-Recall aber technisch sehr aufwändig ist und nur die Thematisierung weniger ausgewählter Szenen innerhalb eines Interviews erlaubt (siehe Leuchter, 2009), scheint diese Methode im Rahmen dieser Untersuchung, in der der gesamte Prozess der didaktischen Strukturierung betrachtet werden soll, eher ungeeignet. Stattdessen wurden den Lehrerinnen und Lehrern zum Wachrufen der Erinnerung die im Unterricht eingesetzten Aufgaben und auch die Tafelanschriebe in der Reihenfolge vorgelegt, in der sie im Unterricht auftraten. So konnte während des Interviews der Verlauf des Unterrichts durch Forscher und Lehrperson gemeinsam nachgezeichnet werden. Die verschiedenen Aspekte des Leitfadens, insbesondere die Fragen zur Aufgabenbegründung und zum Schülerdenken, wurden nach Möglichkeit für jede Aufgabe einzeln besprochen.

Dieses Vorgehen hat sich im Rahmen dieser Untersuchung bewährt. Nach einer relativ offenen Einstiegsphase erhielt das Interview durch die Reihenfolge der Aufgaben eine gewisse Struktur und die Lehrerinnen und Lehrer wurden durch die vorliegenden Aufgaben zu umfangreichen Erläuterungen ihrer eigenen Vorgehensweise angeregt. Insbesondere konnte auf diese Weise sichergestellt werden, dass alle Aufgaben thematisiert wurden. Allerdings war es trotz des ausführlichen Interviewtrainings nicht einfach, den Überblick über die schon angesprochenen Aspekte zu behalten, so das teilweise nicht alle Themen des Leitfadens zu allen Aufgaben angesprochen wurden. Dies wurde erst bei der Auswertung deutlich, weshalb bei einer erneuten Durchführung der Untersuchung die Beantwortung aller aufgabenbezogenen Leitfragen zu allen Aufgaben stärker berücksichtigt werden sollte. Auch sollte der Leitfaden etwas anders strukturiert werden, indem eine explizite Trennung vorgenommen wird zwischen Leitfragen, die schon im Vorfeld des stimulated recall thematisiert werden (Planung und Stundenverlauf) und Leitfragen, die mit Hilfe des stimulated recall gestellt werden (Aufgaben und Schülerdenken). Allerdings hat die ‚sparsame‘ Verwendung des Leitfadens den Vorteil, dass die Reflexion der Lehrerinnen und Lehrer möglichst wenig durch die Vorgabe der Fragen beeinflusst wurde, so dass in dem so entstanden Gesprächsverlauf vor allem die eigenen Reflexionskapazitäten der Lehrpersonen aktiviert wurden. Bei Lehrer 4 ergab sich zusätzlich das Problem, dass während des Interviews nicht alle im Unterricht eingesetzten Aufgaben vorlagen, da der Lehrer zu diesem Zeitpunkt noch nicht alle Aufgaben schriftlich weitergegeben hatte. Dies führte in diesem einen Fall dazu, dass nicht alle Aufgaben im Interview besprochen werden konnten.

Das Interview wurde ebenso wie der Unterricht auf Video aufgezeichnet, wobei die Kamera auf die vorliegenden Aufgabenblätter und Tafelanschriebe gerichtet war. So konnten nicht nur die Äußerungen der Lehrerinnen und Lehrer, sondern auch teilweise deren Gesten, z.B. wenn sie etwas auf einem Aufgabenblatt zeigten oder zusätzliche Skizzen anfertigten, erfasst wurden. Die Dauer der Interviews belief sich auf 36 bis 65 Minuten. Zusätzlich zu den qualitativen Erhebungen bearbeiteten die Lehrpersonen den COACTIV-Test.

7.3.6 Der COACTIV-Test

In Kapitel 2 wurde dargestellt, dass in bisherigen Studien das fachdidaktische Wissen und das mathematische Fachwissen größtenteils in Tests, unabhängig vom Unterricht der Lehrerinnen und Lehrer, erfasst wurden. Es stellt sich dabei die Frage, inwieweit diese Testergebnisse Aussagen über den tatsächlichen Unterricht der Lehrkräfte zulassen. Diese Arbeit hat sich daher zum Ziel gesetzt, das fachdidaktische Wissen direkt über Unterrichtsbeobachtungen und Befragungen der Lehrerinnen und Lehrer zu ihrem eigenen Unterricht zu erheben. Um die qualitativen Analysen mit den quantitativen Testergebnissen vergleichen zu können, wurden die an dieser Untersuchung teilnehmenden Lehrkräfte gebeten, auch den im Rahmen der COACTIV-Studie entwickelten Wissenstest zum fachdidaktischen Wissen und zum mathematischen Fachwissen zu bearbeiten. Dies kann insbesondere eine qualitative Validierung des COACTIV-Wissenstests darstellen.
Der COACTIV-Test wurde hier gewählt, da er im Gegensatz zum TEDS-M-Test für die Erhebung des professionellen Wissens praktizierender Lehrerinnen und Lehrer entwickelt wurde und im Gegensatz zu den Tests der Michigan-Group das professionelle Wissen von Sekundarstufenlehrerinnen und -lehrern erhebt (vgl. Kapitel 2).

Testkonstruktion

Der COACTIV-Wissenstest wurde auf Basis der theoretischen Konzeptualisierung von fachdidaktischem Wissen und mathematischem Fachwissen konstruiert (siehe 4.1.2 und 4.2.2). Alle Items dieses Tests besitzen ein offenes Antwortformat und wurden einerseits durch Literaturrecherche, andererseits durch mathematikdidaktische Diskussionen, beispielsweise in Itemkonstruktionssitzungen, entwickelt. Die Items wurden in Pilotierungsuntersuchungen umfassend getestet, um Items auszuwählen, die prinzipiell von Lehrkräften aller Schulformen gelöst werden können und die auch aus Sicht der Lehrerinnen und Lehrer berufsrelevantes Fachwissen, bzw. fachdidaktisches Wissen erfassen (Krauss et al., 2008).
Das fachdidaktische Wissen wird mit 23 Items getestet, die jeweils die drei Subfacetten Wissen über mathematikbezogene Schülerkognitionen, Wissen über das Verständlichmachen von mathematischen Inhalten und Wissen über das Potenzial von Mathematikaufgaben abbilden sollen (Krauss et al., 2011). Abbildung 7.4 zeigt für jede dieser Facetten eine Beispielaufgabe (siehe auch Abbildung 2.2).

Mathematikbezogene Schülerkognitionen	Verständlichmachen mathematischer Inhalte	Potenzial von Mathematikaufgaben
„Trapez“ Die folgenden Formeln liefern alle den Flächeninhalt eines Trapezes. $\left(g_1+g_2\right)\cdot\frac{h}{2}$ $\quad \frac{g_1\cdot h}{2}+\frac{g_2\cdot h}{2}$ $\frac{\left(g_1+g_2\right)\cdot h}{2}$ $\quad \frac{\left(g_1+g_2\right)}{2}\cdot h$ Welchen didaktischen Nutzen kann die Betrachtung dieser einzelnen Formeln haben? Begründen Sie Ihre Antwort.	**„Gleichung“** Bitte stellen Sie sich folgende Situation vor: Eine Schülerin berechnet für die Gleichung $\left(x-3\right)\left(x-4\right)=2$ die Lösungen $x=5$ oder $x=6$ Was hat diese Schülerin vermutlich gerechnet?	**„Nachbarzahlen“** Luca behauptet: „Das Quadrat eine natürlichen Zahl ist immer um 1 größer als das Produkt ihrer beiden Nachbarzahlen.“ Stimmt Lucas Behauptung? Bitte schreiben Sie möglichst viele verschiedene Lösungsmöglichkeiten zu dieser Aufgabe kurz auf.

Abbildung 7.4: Beispielitems zum fachdidaktischen Wissen (nach Krauss et al., 2011, S. 140)

In 12 Items der ersten Subfacette werden die Lehrerinnen und Lehrer zum Erkennen, bzw. zur Analyse von Schülerfehlern in konstruierten Unterrichtssituationen aufgefordert. Nur ein Item erfordert die Beschäftigung mit möglichen ‚richtigen' Schülerkognitionen beim Lösen einer Aufgabe, obwohl in der theoretischen Konstruktion dieser Facette des fachdidaktischen Wissens auch mögliche Strategien der Schülerinnen und Schüler einbezogen werden (siehe Abbildung 7.4). Die 7 Items der zweiten Subfacette erfordern das Erklären verschiedener mathematischer Sachverhalte auch auf unterschiedlichen Wegen, wobei der Schwerpunkt auf dem Wissen über verschiedene Repräsentationsformen liegt, da sich aus den verschiedenen Repräsentationsformen auch unterschiedliche Erklärungsmöglichkeiten ergeben. In den 4 Items der dritten Subfacette werden die Lehrerinnen und Lehrer zum Aufschreiben möglichst vieler substanziell verschiedener Lösungswege zu vier Mathematikaufgaben, die auch für Schülerinnen und Schüler geeignet sind, aufgefordert (Krauss et al., 2011). Das bloße Aufschreiben verschiedener Lösungswege lässt aber noch keinen Rückschluss zu, ob die Lehrkraft auch die strukturellen Unterschiede in den verschiedenen Lösungswegen oder das Potenzial der Aufgaben zur kognitiven Aktivierung erkennt. Außerdem werden weitere Aspekte dieser Wissensfacette, beispielsweise das Wissen über die didaktische Sequenzierung von Aufgaben und die curriculare Anordnung von Stoffen, nicht mit diesem Test erhoben. Dies wurde teilweise in anderen Instrumenten der COACTIV-Studie berücksichtigt, deren Auswertung sich allerdings als schwierig erweist (für erste Ergebnisse siehe Bruckmaier et al., 2012).

Neben dem fachdidaktischen Wissen wurde im COACTIV-Test auch das mathematische Fachwissen der Lehrerinnen und Lehrer erhoben. Die Items zum mathematischen Fachwissen beziehen sich auf die dritte Ebene des Fachwissens, ein tiefes Verständnis der Fachinhalte des Curriculums der Sekundarstufe (siehe 4.2.2). Abbildung 7.5 zeigt ein Beispiel für eine Aufgabe aus dem Fachwissenstest. Die Inhalte gehen nicht über den Schulstoff des Gymnasiums hinaus und können im Prinzip auch von sehr guten Schülerinnen und Schülern gelöst werden. Außerdem sollten diese Inhalte in den Fachvorlesungen aller Lehramtsstudiengänge thematisiert werden (Krauss et al., 2011). Der Fachwissenstest enthält 13 Items, die „von Aufgaben zum Mittelstufenstoff (z.B. einfache Beweise aus der Elementargeometrie oder der elementaren Algebra) bis zu Aufgaben, die ein inhaltliches Verständnis von infinitesimalen Begriffen erfordern" (Krauss et al., 2011, S. 143), reichen.

„Unendlicher Dezimalbruch"

Gilt 0,999999… = 1?

Bitte begründen Sie!

Abbildung 7.5: Beispielitem zum mathematischen Fachwissen

Der hier vorgestellte Test wurde in der dieser Arbeit zugrundeliegenden Untersuchung ohne Veränderungen übernommen, um einen Vergleich mit den Ergebnissen der COACTIV-Studie zu ermöglichen.

Testdurchführung und Auswertung

Die fünf Lehrkräfte führten den Test unter Bedingungen durch, die den Bedingungen in der COACTIV-Studie sehr ähnlich waren. Sie durften die Aufgaben ohne Zeitlimit bearbeiten, die Benutzung eines Taschenrechners war nicht erlaubt. In vier Fällen war eine in der Testdurchführung geschulte und erfahrene studentische Hilfskraft der Universität Regensburg anwesend. Dabei wurden die Testbearbeitungen im Gegensatz zu COACTIV nicht in Einzelsitzungen durchgeführt. Stattdessen lösten ähnlich wie bei einer Klassenarbeit mehrere Lehrkräfte die Testaufgaben parallel. Nur in einem Fall wurde der Test in Einzelarbeit und ohne die ge-

schulte Hilfskraft durchgeführt. Die grundsätzlichen Regeln der Testbearbeitung wurden dennoch eingehalten.
Für die Auswertung des Tests wurde im Rahmen der COACTIV-Studie ein ausführliches Kodierschema entwickelt und mehrfach überarbeitet. Während beim Fachwissenstest zwischen richtig und falsch entschieden werden konnte, waren bei mehreren Aufgaben des Fachdidaktiktests verschiedene richtige Antworten möglich oder sogar erwünscht (z.B. Aufgabe ‚Quadrat', siehe Abbildung 7.4), sodass hier auch keine theoretische maximale Punktzahl festgelegt werden konnte. Im Rahmen der COACTIV-Studie beträgt die höchste erreichte Punktzahl im Fachdidaktiktest 37 Punkte, d.h. diese Lehrkraft hat alle Aufgaben richtig gelöst und bei den Aufgaben mit multiplen Lösungsmöglichkeiten zwei bis drei alternative Antworten gegeben (Krauss et al., 2011; Krauss et al., 2008). Dabei wurden nur substanziell unterschiedliche Antworten als alternative Lösungen gewertet. Die höchste erreichte Punktzahl kann als empirisches Maximum angesehen werden.
In der COACTIV-Studie wurden mehrere Mathematik-Lehramtsstudenten mit hervorragenden Studienleistungen mit dem Kodierschema geschult. Die Testergebnisse wurden anschließend unabhängig von zwei Kodierern beurteilt (Krauss et al., 2011). Im Rahmen dieser Untersuchung wurden die Tests ebenfalls von zwei geschulten Kodierern ausgewertet, die im Zeitraum der Erhebung (Mai 2011) an der Universität Regensburg für eine Studie im COACTIV-Forschungsprogramm beschäftigt waren und schon Erfahrungen im Auswerten der COACTIV-Tests hatten. Dagegen wurden die qualitativen Daten mit verschiedenen im Rahmen dieser Untersuchung entwickelten Auswertungsverfahren analysiert, welche im Folgenden erläutert werden.

7.4 Erläuterung der methodischen Schritte der Auswertung

Den Hauptteil der Auswertung stellte eine qualitative Inhaltsanalyse der Unterrichtsplanung, des videografierten Unterrichts und des reflektierenden Interviews dar. Zusätzlich wurden auch die eingesetzten Aufgaben unabhängig vom Unterricht analysiert und die Ergebnisse dieser Aufgabenklassifikation mit den Resultaten der qualitativen Inhaltsanalyse in Beziehung gesetzt. Außerdem wurden die Ergebnisse dieser qualitativen Auswertungen mit den Ergebnissen der Lehrerinnen und Lehrer im COACTIV-Test verglichen. Im Folgenden werden die einzelnen Schritte der Auswertung erläutert.

7.4.1 Aufgabenklassifikation

Auf der Basis bestehender Aufgabenklassifikationssysteme wurde ein Kategoriensystem für die Aufgabenanalyse entwickelt, welches eine Einschätzung des Potenzials der Aufgaben unabhängig von deren Einsatz im Unterricht ermöglicht. Es enthält aber auch Kategorien für die Implementation der Aufgaben in den Unterricht (siehe 6.1). Mithilfe der objektiven Kennzeichen der im Unterricht eingesetzten Aufgaben (siehe 6.1.2) können Aussagen beispielsweise über die Entwicklung des kognitiven Anforderungsniveaus und die inhaltliche Vernetzung des Unterrichts getroffen werden. Außerdem lassen sich aus dem Vergleich der objektiven Kennzeichen der eingesetzten Aufgaben mit dem von den Lehrerinnen und Lehrern in der Planung und im Interview benannten und im Unterricht umgesetzten Potenzial der Aufgaben Rückschlüsse auf das fachdidaktische Wissen der Lehrpersonen ziehen. Hierzu wurde der Unterricht auch innerhalb des Aufgabenklassifikationsschemas überblicksartig dargestellt (siehe 6.1.3).
Die Kategorien des Klassifikationssystems sind in Kapitel 6.1 ausführlich dargestellt. Für die Auswertung wurde anhand dieser Kategorien ein Kodierschema erstellt, welches in Anleh-

nung an die Kodierschemata von Jordan et al. (2006) und J. Neubrand (2002) für jede Kategorie verschiedene mögliche Codes und für die objektiven Kennzeichen der Aufgaben auch jeweils eine ausführliche Beschreibungen der verschiedenen Codes sowie gegebenenfalls auch Aufgabenbeispiele enthält. Exemplarisch für die objektiven Kennzeichen zeigt Abbildung 7.6 einen Auszug aus dem Kodierschema für die Unterkategorie ‚mathematisches Argumentieren' der Kategorie ‚mathematische Tätigkeiten' (nach Jordan et al., 2006; Beispiele im Anhang). Für die Kategorien zum Einsatz der Aufgaben im Unterricht ist in Abbildung 7.6 als Beispiel die Unterkategorie ‚Verständnisbetont' der Kategorie ‚Bearbeitung der Aufgabe' dargestellt.

Kategorie	Unterkategorie	Mögliche Codes	Codebeschreibung
Mathematische Tätigkeiten	mathematisches Argumentieren	Nicht notwendig	
		Auf niedrigem Niveau notwendig	Bloße Wiedergabe von Standardargumentationen; Argumentationen durchführen, für die Alltagswissen genügt; einschrittige oder rein rechnerische Argumente entwickeln.
		Auf mittlerem Niveau notwendig	Überschaubare mehrschrittige, auch begrifflich geprägte mathematische Argumente entwickeln und schriftlich darlegen oder gegebenenfalls solche nachvollziehen.
		Auf hohem Niveau notwendig	Komplexe mathematische Argumente (Begründungen, Beweise, Strategien, Verallgemeinerungen) entwickeln und schriftlich darlegen oder gegebenenfalls solche nachvollziehen; verschiedene Arten von mathematischen Argumentationen oder deren Effizienz vergleichen oder bewerten.
Bearbeitung der Aufgabe	Verständnisbetont	Metakognition, Reflexion	
		Anwenden von Prozeduren in Verbindung mit Konzepten, Bedeutungen oder Verstehen	
		Probierverfahren, die mathematisches Verständnis erfordern	
		Keine verständnisbetonte Bearbeitung	

Abbildung 7.6: Auszug aus dem Kodierschema der Aufgabenklassifikation (übernommen aus Jordan et al., 2006, S. 40; J. Neubrand, 2002, S. 391)

Das Klassifikationssystem wurde in einer Tabelle entlang der horizontalen Achse aufgetragen, entlang der vertikalen Achse wurden die von den Lehrpersonen verwendeten Aufgaben in der Reihenfolge des Unterrichtseinsatzes aufgelistet (siehe Abbildung 7.7). In diese Auflistung wurden (zumindest bei Lehrer 3) auch Unterrichtsphasen integriert, in denen mathematischer Inhalt auch ohne den Einsatz von Aufgaben erarbeitet oder besprochen wird.

Innerhalb der Tabelle wurden nun die Aufgaben kodiert. Da die Ergebnisse dieser Aufgabenklassifikation qualitativ ausgewertet wurden, wurde bei der Kodierung oft der bloße Code des Kodierschemas durch eine Erläuterung oder Begründung der Kodierung ergänzt. Die Ka-

tegorien zum Unterrichtseinsatz wurden erst nach der Kodierung des Unterrichts im Rahmen der qualitativen Inhaltsanalyse (siehe 7.4.2) ausgefüllt. Hier findet eine starke Überschneidung der Auswertung mithilfe der qualitativen Inhaltsanalyse und mithilfe des Aufgabenklassifikationssystems statt. Dies wurde jedoch beibehalten, da die Kurzform der Kodierung im Aufgabenklassifikationssystem vor allem die Vernetzungen und Strukturen des Unterrichts verdeutlichen kann.
Die Tabelle ermöglicht einen strukturellen Überblick über die Unterrichtsstunden (siehe Abbildung 7.7). In der horizontalen Ebene wird das Potenzial der einzelnen Aufgaben und dessen Umsetzung im Unterricht deutlich, während in der vertikalen Ebene Vernetzungen und Entwicklungen des Unterricht innerhalb der einzelnen Aspekte, beispielsweise im inhaltlichen Zusammenhang, in den verwendeten mathematischen Tätigkeiten oder in der Verständnisbetonung, analysiert werden können. Dies kann zu den qualitativ-inhaltlichen Analysen in Beziehung gesetzt werden.

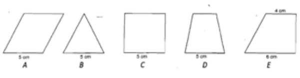
Ablauf der Stunde/ Reihenfolge der Aufgaben	Mathematische Stoffgebiete				Kontext		Mathematische Tätigkeiten
	Arithmetik	Algebra	Geometrie	Stochastik	Außermath. Kontext	Innermathematischer Kontext	außermathematisc Modellieren
Hier siehst du 5 verschiedene Figuren (Zeichnung nicht maßstabsgetreu). Benenne die Figuren und füge die Formel zur Berechnung der Fläche hinzu. - Welche Figuren haben den gleichen Flächeninhalt? - Welche Figur hat den kleinsten Flächeninhalt? - Welche Figur hat den größten Flächeninhalt? Nimm die Buchstaben zur Abkürzung und begründe deine Antworten!  Formeln zur Flächenberechnung: Begründung:	Arbeiten mit Größen	Variablen/Terme	· Länge als Größe ·Flächeninhalt verschiedener Figuren (Parallelogramm, Dreieck, Rechteck, Trapez)			Anknüpfen an früher behandelte, bereits automatisierte Stoffe	
In der folgenden Aufgabe findest du bestimmte Flächen wieder. Benenne sie. Erstelle dann einen Arbeitsplan und berechne. (Die weiße Fläche wird verkleidet) Ein Teil des Dachgeschosses soll für den älteren Sohn eingerichtet werden. Es wird eine Wand aus Gipskarton eingesetzt und von beiden Seiten mit Paneelen verkleidet.  	· Arbeiten mit Größen ·Rechnen mit Dezimalzahlen	Zahlen in Formel einsetzen	·Länge als Größe · Berechnung Flächeninhalt Rechteck und Trapez)		scheinbar real world	verschiedene Stoffgebiete werden aufeinander bezogen	auf niedrigem Nive notwendig (Übersetzungen können unmittelba ausgeführt werden da Modell explizit gegeben ist, bzw. nahe liegt)
Planung der Bepflanzung einer Gartenanlage Plane die Bepflanzung und Einzäunung und berechne die Kosten. Überlege genau, wie du die Anlage gestalten willst. Erstelle einen Arbeitsplan und berechne.	Rechnen mit Dezimalzahlen, Arbeiten mit Größen (Maßstabsumrechnun gen)	Termwertberechnung en	Länge als Größe, Flächeninhalts- und Umfangsberechnung verschiedener Figuren (Trapez, Kreis		scheinbar real world	lokal: innerhalb eines Stoffgebiets aus verschiedenen Teilgebieten	auf niedrigem Nive notwendig (Übersetzungen können unmittelba ausgeführt werden

Abbildung 7.7: Ausschnitt aus der Aufgabenklassifikation der Lehrerin 2

7.4.2 Qualitative Inhaltsanalyse

Ziel dieser Arbeit ist vor allem, die Nutzung des fachdidaktischen Wissens der Lehrerinnen und Lehrer bei der didaktischen Strukturierung zu untersuchen. Es liegen bereits vielfache Konzeptualisierungen und Kategorisierungen zum fachdidaktischen Wissen vor (siehe 4.1), weshalb sich für die Auswertung der erhobenen Daten die qualitative Inhaltsanalyse anbietet (Flick, 1995). Diese stellt nach Mayring (2010) eine „Methodik systematischer Interpretation“ (Mayring, 2010, S. 48) dar, die es ermöglicht, nach fest vorgegebenen Regeln zu einer begründeten Reduktion des Materials zu gelangen. Dabei gibt es viele unterschiedliche mögliche Vorgehensweisen. Im Rahmen dieser Arbeit wurde die Technik der inhaltlichen Strukturierung adaptiert, mit der sich bestimmte Strukturen, hier die Ausprägung des fachdidaktischen Wissens, bzw. der kognitiven Aktivierung, aus dem Material herausfiltern lassen (vgl. Mayring, 2010). Eine Übersicht über den Prozess der Inhaltsanalyse im Rahmen dieser Arbeit bietet Abbildung 7.8, wobei das Verfahren von Mayring in der Ergebnisaufbereitung etwas abgewandelt wurde. Das von Mayring vorgeschlagene Verfahren beschränkt sich auf die

Analyse von Häufigkeiten des Auftretens der einzelnen Kategorien, während im Rahmen dieser Untersuchung vor allem die kausalen Zusammenhänge im Mittelpunkt des Erkenntnisinteresses stehen (vgl. Gläser & Laudel, 2009). Im Folgenden werden einzelne Schritte dieses Verfahrens näher erläutert.

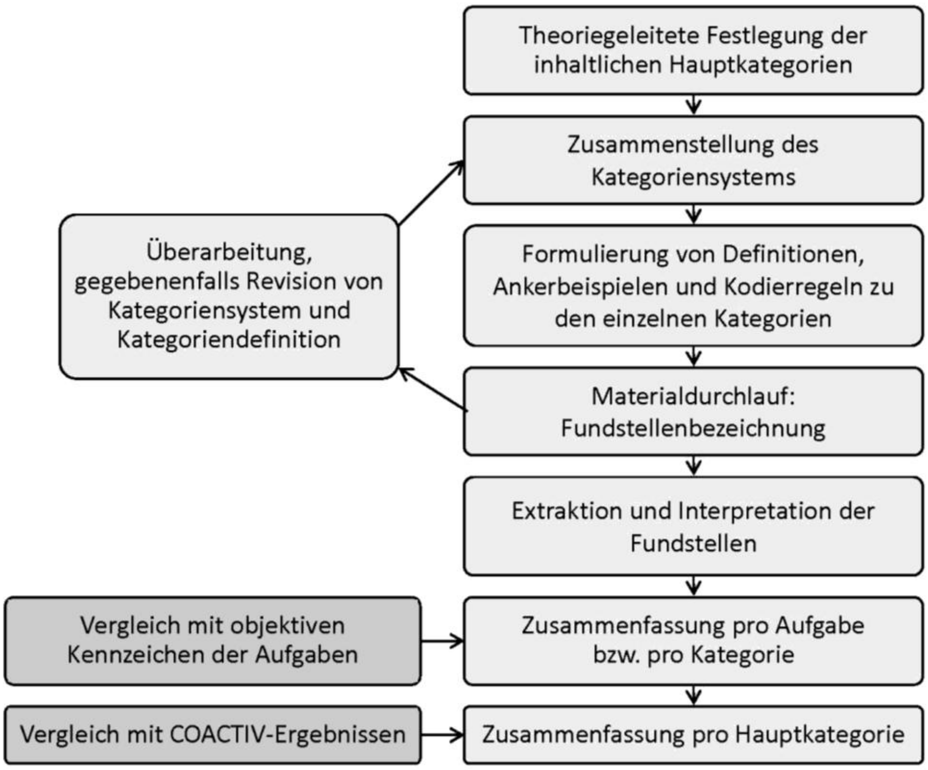


Abbildung 7.8: Vorgehen bei der qualitativen Inhaltsanalyse
(in Anlehnung an Gläser & Laudel, 2009, S. 203; Mayring, 2010, S. 93, 99)

Transkription der Videodokumente

Da sich die qualitative Inhaltsanalyse am ehesten anhand von Texten realisieren lässt, wurden die Unterrichtsvideos und die reflektierenden Interviews von einer studentischen Hilfskraft transkribiert. Dabei wurden in Anlehnung an TIMSS-Video und das Pythagoras-Projekt möglichst einfache, aber dem Gegenstand der Untersuchung angepasste Transkriptionsregeln zugrundegelegt, die in Abbildung 7.9 dargestellt sind (vgl. Kuckartz, 2010; Pauli, 2006). Im Prozess der Analyse konnte zusätzlich jederzeit auf die Videos zurückgegriffen werden, wenn das Textmaterial keine eindeutige Kodierung zuließ oder unverständlich war.

(?)	unverständliche Silbe
(???)	unverständliches Wort
(? ...)	längerer unverständlicher Teil
(zeigt auf)	Beschreibung der Handlung der Personen, wenn z.B. nur (Aufgabe 1), (links oben) steht, dann zeigt die gerade redende Person auf die entsprechenden Stellen.
//gleichzeitig//	Es wird gleichzeitig gesprochen
{fragend}	Wird etwas besonders betont, wird dies so kenntlich gemacht
…	ca. 1-2 Sekunden Pause
…………..	längere Pause

- Ständige Ähs, die nur kurze Lückenfüller sind, brauchen nicht transkribiert werden. Zeigen die Ähs usw. aber an, dass überlegt wird o.ä., werden sie mit transkribiert.
- Organisatorische oder disziplinarische Einschübe im Unterricht, bei denen es in keiner Weise um Mathematik geht, werden nicht wortwörtlich transkribiert. Hier reicht ein Hinweis im Transkript, z.B. ‚Der Lehrer ermahnt Schüler zur Ordnung' o.ä.
- Nach Möglichkeit wird jedem Lernenden ein eigener Buchstabe zugewiesen, der im Verlauf der Unterrichtsstunden beibehalten wird. Die Buchstaben X, Y und Z werden verwendet, wenn nicht eindeutig ist, welcher Schüler bzw. welche Schülerin gerade spricht.

Abbildung 7.9: Transkriptionsregeln

Entwicklung Kategoriensystem/Kodierleitfaden

Zunächst wurden die drei aus der Literatur herausgearbeiteten Dimensionen des fachdidaktischen Wissens sowie die kognitive Aktivierung als inhaltliche Hauptkategorien festgelegt. Zu diesen wurden dann in Anlehnung an die vorhandenen Theorien deduktive Unterkategorien erarbeitet (siehe 6.2) und zu einem Kodierleitfaden zusammengestellt. Dabei wurde eine möglichst genaue Beschreibung der einzelnen Kategorien vorgenommen, anhand derer entschieden werden kann, wann eine Kategorie im Material zu kodieren ist. Es handelt sich bei den hier entwickelten Analyseinstrumenten größtenteils um hoch-inferente Verfahren, die während der Kodierung bereits ein hohes Maß an interpretativen Prozessen erfordern, die über das rein beobachtbare Verhalten hinausgehen. Hierdurch wird der subjektive Einfluss der kodierenden Person zwar erhöht, allerdings lassen sich durch hoch-inferente Beurteilungen eher Zusammenhänge zu schulischen Erfolgskriterien aufweisen (Clausen et al., 2003).

Nach einem ersten Materialdurchlauf anhand eines Teils der Transkripte der Lehrerin 2 wurden dem Kodierleitfaden erste Ankerbeispiele hinzugefügt. Das vorläufige Kategoriensystem wurde im Doktorandenkolloquium Bremen-Oldenburg (April 2011) zur Diskussion gestellt und anschließend überarbeitet. Es wurden beispielsweise Kategorien zusammengefasst oder neue Kategorien induktiv ergänzt (siehe 6.2). Außerdem wurden die ursprünglich etwas unterschiedlichen Kategoriensysteme für die Auswertung des Unterrichts und die Auswertung der Lehreraussagen in Planung und Interview aufgrund der recht großen Überschneidungen zu einem Kategoriensystem zusammengefasst.

Anschließend wurde mit dem überarbeiteten Kategoriensystem ein Teil des Materials der Lehrerin 2 sowohl von mir als auch von einem zweiten Kodierer bearbeitet, um zu überprüfen, ob die Kategorien verständlich sind und ob beide Kodierer dieselben Stellen mit den gleichen Codes versehen. Größtenteils waren die Übereinstimmungen sehr gut, es wurde aber festgestellt, dass beide Kodierer einige Stellen übersehen haben, was auf die hohe

Komplexität des Kategoriensystems zurückgeführt werden kann. Bei der weiteren Kodierung wurde auf genaueres Arbeiten geachtet. An Stellen, an denen die Kodierer unterschiedlich kodierten, konnten sie sich schnell auf einen Konsens einigen. Meistens hatten die Unstimmigkeiten eine ungenaue Definition der Kategorien zu Ursache. Deshalb wurde das Kategoriensystem nochmals überarbeitet und das Material der Lehrerin 2 nochmals mit dem überarbeiteten Kategoriensystem kodiert (vgl. Kuckartz, 2010; Mayring, 2010).
Prinzipiell kann auch während des Kodierprozesses deutlich werden, dass dem Kategoriensystem noch einige Kategorien hinzugefügt werden müssen oder dass einige Kategorien, beispielsweise in ihrer Beschreibung, verändert werden müssen (vgl. Gläser & Laudel, 2009). Dies wurde beim Kodieren berücksichtigt und in einem Fall auch durchgeführt. Allerdings ist es in diesem Fall nötig, dass auch das bereits kodierte Material nochmals auf die neue Kategorie hin überprüft wird.
In Abschnitt 6.2 sind die einzelnen Kategorien inhaltlich ausführlich beschrieben und begründet worden. Abbildung 7.10 zeigt für jede der Hauptkategorien einen Ausschnitt aus dem Kodierleitfaden inklusive der Ankerbeispiele. Der vollständige Kodierleitfaden ist im Anhang zu finden.

Kategorie	**Unterkategorie**	**Beschreibung der Kategorie**	**Beispiel**
Fehler	Reaktion auf Fehler	Im Unterricht nennt ein Schüler eine mathematisch falsche Lösung/ein falsches Konzept. Die Schüleraussage und die Reaktion des Lehrers werden gemeinsam kodiert. Gegebenenfalls wird auch die vorangehende Frage des Lehrers mit kodiert. Wird der Schüler zur weiteren Erläuterung aufgefordert, so wird dies auch direkt mit kodiert. Im Interview sagt der Lehrer etwas zum Umgang mit Fehlern.	Lehrer: Bei wem hast du denn, wo hast du denn wirklich 32m, bei welchem Umfang? Schüler E: Bei b und a. Lehrer: Bei b auch? Bist du dir sicher? Schüler I: Ja ähm ich hätte jetzt geschrieben: A zu B äh AB zu ZA steht wie ähm ZA' zu A'B'. Lehrer: Genau anders rum. So wie K. das auch gerade meinte, ne.
Darstellungen	Verwendung	Im Unterricht wird eine Darstellung (Tabelle, Graph, Diagramm, Bild) verwendet. Im Interview wird etwas zur Verwendung von Darstellungen gesagt.	Lehrer: Beim Umfang fängst du irgendwo an zu laufen. Setzt dich an die Ecke (zeigt an Figur rechts unten (Rechteck)) von da, nach da, nach da, nach da.
Aufgaben	Aufgaben Begründung	Es werden Begründungen für die Aufgabenauswahl genannt	Lehrer (Planung): Die Aufgabe zur Flächenberechnung ist gut geeignet, noch einmal die Grundlagen zu wiederholen und anzuwenden.
Argumentationen	Begründung der Antwort	Es wird etwas zu Argumentationen gesagt, im Unterricht wird argumentiert, begründet, die Schüler werden zu Argumentationen/Begründungen angeregt, hierzu zählen auch Erklärung eigener Ideen, Konzepte, Lösungen.	Lehrer: Wie bist du denn drauf gekommen, dass das auch 32 m sind?

Abbildung 7.10: Ausschnitte aus dem Kodierleitfaden zur qualitativen Inhaltsanalyse

Fundstellenbezeichnung mithilfe des Programms MAXQDA 2007 [12]

Die schriftliche Unterrichtsplanung sowie der transkribierte Unterricht und das durchgeführte Interview wurden mithilfe des Programms MAXQDA 2007 kodiert (siehe Kuckartz, 2010). Abbildung 7.11 zeigt einen Ausschnitt aus dem Programm. MAXQDA eignet sich unter anderem gut für die strukturierende Inhaltsanalyse, da sich im linken Fenster das im Vorfeld der Kodierung erarbeitete Kategoriensystem inklusive der Beschreibungen der Kategorien in Form von sogenannten Memos einfügen lässt (vgl. Kuckartz, 2010; Mayring, 2010). Die Textdokumente selbst können im rechten oberen Fenster angezeigt werden. Durch Markieren einzelner Worte oder längerer Textstellen können diesen die entsprechenden Codes zugeordnet werden. Dabei stand im Rahmen dieser Arbeit zu jedem Zeitpunkt im Kodierprozess auch das Unterrichtsvideo zur Verfügung, so dass in unklaren Situationen immer der gesamte Kontext, in dem das zu analysierende Transkript entstanden ist, berücksichtigt werden konnte. Am linken Rand des Textfensters werden die vergebenen Codes in den vorher zugewiesenen Farben durch einen vertikalen Balken visualisiert.

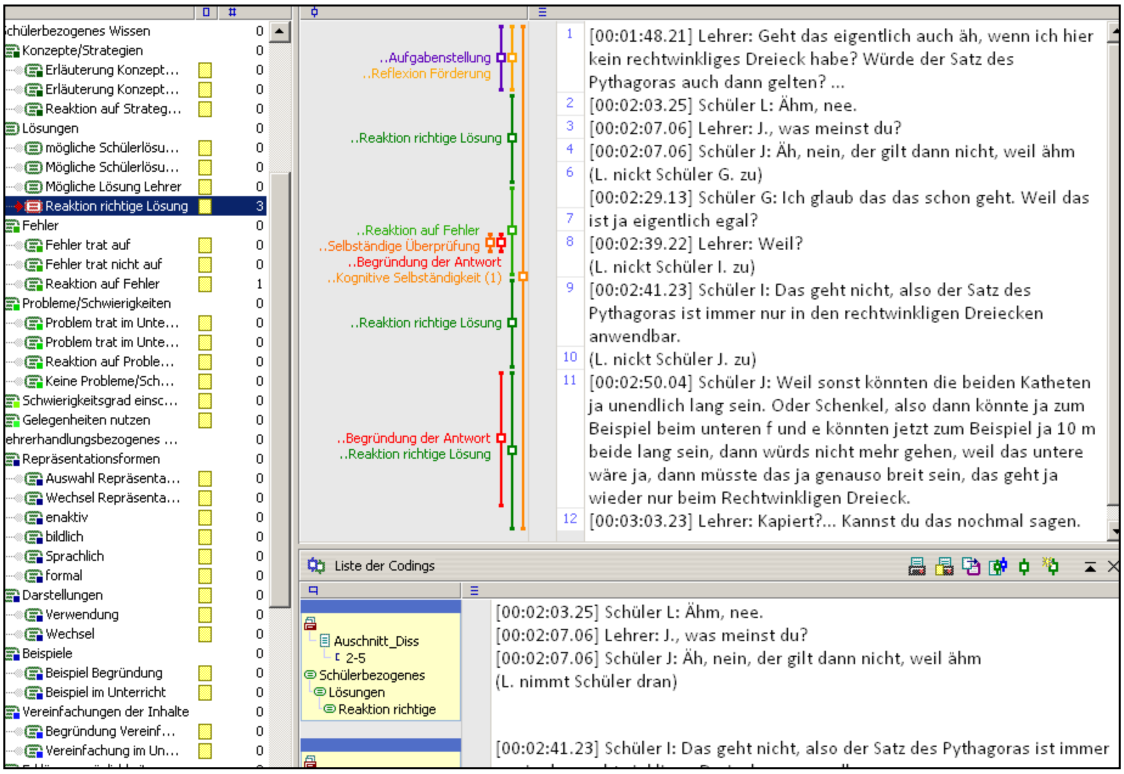


Abbildung 7.11: Auszug aus den Kodierungen mithilfe des Programms MAXQDA 2007

MAXQDA ermöglicht es, die Dokumente einer Lehrperson, also die schriftliche Planung, den durchgeführten Unterricht und das reflektierende Interview, innerhalb einer Datei auszuwerten, wobei zur Analyse nach der Kodierung entweder jedes Dokument einzeln betrachtet werden kann. Es können aber auch zwei oder mehr Dokumente gleichzeitig analysiert werden (vgl. Kuckartz, 2010; Mayring, 2010). Im rechten unteren Fenster im Programm MAXQDA (Abbildung 7.11) lassen sich für die Auswertung des Materials alle markierten Textstellen zu einem oder mehreren ausgewählten Codes darstellen. Dabei kann jederzeit durch einen Klick die entsprechende Textstelle auch im oberen rechten Feld in ihrem Ge-

[12] MAXQDA, Software für qualitative Datenanalyse, 1989 - 2013, VERBI Software. Consult. Sozialforschung GmbH, Berlin, Deutschland.

samtzusammenhang und inklusive aller sonstigen Kodierungen an dieser Stelle betrachtet werden. Da einer Textstelle beliebig viele Codes zugeordnet werden können, lassen sich mithilfe des Programms MAXQDA insbesondere das gleichzeitige Auftreten verschiedener Komponenten des fachdidaktischen Wissens und deren Zusammenhang untereinander, aber auch der Zusammenhang mit Aspekten der kognitiven Aktivierung untersuchen. Dadurch wird die Einschätzung der Qualität des fachdidaktischen Wissens mithilfe der Kategorien der kognitiven Aktivierung möglich, wie sie im Rahmen dieser Arbeit vorgesehen ist. Dies erfordert allerdings schon bei der Extraktion und Strukturierung der Daten ein gewisses Maß an Interpretation (vgl. Gläser & Laudel, 2009).

Interpretation und Zusammenfassung der Daten im Vergleich mit den Ergebnissen der Aufgabenklassifikation anhand der Aufgaben bzw. Kategorien

Das Material wird zunächst anhand der eingesetzten Aufgaben strukturiert. Die einzelnen Aufgabenbearbeitungen im Unterricht werden detailliert dargestellt und mit den Aussagen der Lehrerinnen und Lehrer in Planung und Interview in Beziehung gesetzt. Diese Ergebnisse der qualitativen Inhaltsanalyse bezüglich der Aufgaben werden mit den objektiven Kennzeichen der Aufgaben als Resultate der Aufgabenklassifikation verglichen. Hieraus lassen sich Rückschlüsse auf das inhaltsbezogene Wissen der Lehrerinnen und Lehrer ziehen. Andererseits können in Zusammenhang mit der Beschreibung der Aufgabenbearbeitung auch Belege für die schülerbezogene Komponente des fachdidaktischen Wissens gefunden werden, indem Schülerlösungen, Schülerfehler und Probleme der Schülerinnen und Schüler bei der Bearbeitung der einzelnen Aufgaben erläutert und mit Interviewaussagen der Lehrkräfte verglichen werden. Auch Aspekte des Wissens über das Verständlichmachen mathematischer Inhalte können hier anhand des Gebrauchs von Beispielen, Erklärungsmöglichkeiten, Vereinfachungen sowie der Verwendung verschiedener Repräsentationsformen deutlich werden. Zur Einschätzung der Qualität des fachdidaktischen Wissens werden insbesondere die Zusammenhänge mit der kognitiven Aktivierung bei der Strukturierung berücksichtigt.
Nicht alle Unterkategorien des fachdidaktischen Wissens lassen sich so explizit anhand einzelner Aufgaben darstellen. Deshalb wird in einem zweiten Schritt das Material anhand einiger ausgewählter Aspekte strukturiert, die eher aufgabenübergreifend zu beobachten sind. Um nach Mustern der Reaktionen der Lehrpersonen auf Schüleräußerungen zu suchen (siehe Tenorth in 4.4), werden mithilfe von MAXQDA jeweils alle Textstellen mit Reaktionen auf Strategien, richtige Lösungen, Fehler und Probleme der Schülerinnen und Schüler extrahiert, stark paraphrasiert und interpretiert. Dabei werden vor allem auch die Aspekte der kognitiven Aktivierung berücksichtigt. Anhand dieser starken Reduktion des Materials werden nun zumindest für die beobachteten Stunden Muster und eher typische, aber auch eher untypische Reaktionen der Lehrkräfte herausgearbeitet.
Der Gebrauch verschiedener Repräsentationsformen und der Umgang mit Begriffen werden ausschließlich durch die Darstellung aller hierzu kodierten Textstellen eingeschätzt. Für das Herstellen von Verbindungen wird dagegen zusätzlich zu den kodierten Textstellen auch die Tabelle aus der Aufgabenklassifikation hinzugezogen. Hier sind die Verbindungen zwischen den Aufgaben, aber auch Brüche im Gedankengang des Unterrichts, zu sehen. Für die Analyse der Ziele des Unterrichts werden die kodierten Aussagen der Lehrpersonen mit der interpretierten Zielerreichung im Unterricht verglichen, so dass sowohl Rückschlüsse auf die Fähigkeiten der Zielerreichung, als auch auf die Reflexionsfähigkeit der Lehrerinnen und Lehrer möglich werden.

Als Ergebnis dieser qualitativen Auswertungen liegt eine detaillierte Beschreibung der didaktischen Strukturierung der Lehrerinnen und Lehrer anhand der eingesetzten Aufgaben vor, die es insbesondere ermöglich, Rückschlüsse auf das fachdidaktische Wissen der Lehrerinnen und Lehrer zu ziehen. Diese Beschreibung wird ergänzt durch eine Einschätzung der Unterrichtsqualität anhand der kognitiven Aktivierung und einer groben Beurteilung des mathematischen Fachwissens der Lehrerinnen und Lehrer, soweit es sich anhand der erhobenen Materialien einschätzen lässt.

Zusammenfassung anhand der Hauptkategorien und Vergleich mit COACTIV-Ergebnissen

In einem letzten Auswertungsschritt wird das fachdidaktische Wissen der Lehrpersonen anhand der drei festgelegten Hauptkategorien, schülerbezogenes Wissen, Wissen über das Verständlichmachen mathematischer Inhalte und inhaltsbezogenes Wissen, zusammenfassend beurteilt und mit den Ergebnissen des COACTIV-Tests verglichen. Hierzu werden zunächst die Gesamtscores der Lehrerinnen und Lehrer im fachdidaktischen Wissenstest und im Test des mathematischen Fachwissens herangezogen und mit den Ergebnissen der Lehrpersonen, die an der COACTIV-Studie teilgenommen haben, verglichen. Zusätzlich werden die Testbearbeitungen der fünf Lehrer auch qualitativ ausgewertet, indem die Aufgabenbearbeitungen und die Codezuweisungen der Kodierer mit dem der quantitativen COACITV-Studie zugrundeliegenden Codebuch auf einer beschreibenden Ebene, ohne weitere zugrundeliegende Kategorien, verglichen werden. Dabei werden insbesondere die drei Testabschnitte zu den einzelnen Komponenten des fachdidaktischen Wissens und die Bearbeitung des Fachwissensteils einzeln beschrieben. Es kann nicht zu allen Aufgaben die genaue Aufgabenbearbeitung der Lehrerinnen und Lehrer erläutert werden, da die meisten Aufgaben nicht zur Veröffentlichung freigegeben sind. Diese soweit möglichen Beschreibungen der Aufgabenbearbeitungen in den einzelnen Testteilen werden abschließend mit den anhand der qualitativen Analysen im Rahmen dieser Arbeit vorgenommenen Einschätzungen der drei Komponenten des fachdidaktischen Wissens verglichen.

7.5 Hinweise zur Darstellung der Ergebnisse

In den folgenden Kapiteln 8 bis 12 werden für jede der fünf teilnehmenden Lehrpersonen (siehe 7.1.1) die Analysen der Unterrichtsplanung, des durchgeführten Unterrichts und des reflektierenden Interviews sowie des COACTIV-Tests einzeln dargestellt. Die Struktur der Darstellung ist bei allen Lehrpersonen dieselbe: Zunächst wird ein kurzer Überblick über den Verlauf der Unterrichtsstunden gegeben, wobei auch die unterrichtete Klasse kurz charakterisiert wird. Anschließend werden einige Aspekte des Unterrichts vorgestellt, die sich nicht anhand einzelner Aufgaben darstellen lassen, da sie im Unterricht bei mehreren Aufgaben auftreten. Diese aufgabenübergreifenden Aspekte ergeben sich aus den spezifischen Unterrichtsgestaltungen und Interviewaussagen, sie sind daher für jede der Lehrpersonen sehr verschieden. Es handelt sich beispielsweise um methodische Besonderheiten oder ausführliche Begründungen einer längeren Unterrichtsphase.
Ursprünglich war geplant, die einzelnen Komponenten des fachdidaktischen Wissens getrennt darzustellen. Es hat sich aber während der Analysen gezeigt, dass die einzelnen Komponenten bei der Aufgabenbearbeitung stark miteinander wechselwirken, so dass eine Trennung nicht sinnvoll wäre. Es wird stattdessen eine Strukturierung anhand der Aufgaben vorgenommen, da sich diese in vorherigen Studien als gute Indikatoren für das Aufzeigen von Strukturen im Unterricht gezeigt haben (siehe 6.1.1). Die Aufgabennamen wurden dabei größtenteils im Rahmen der Analysen festgelegt, teilweise aber auch von den Lehrerinnen

und Lehrern selbst gewählt. Es wird jede im Unterricht eingesetzte Aufgabe einzeln dargestellt, indem zunächst Aussagen der Lehrperson zur Begründung der Aufgabenauswahl erläutert werden. Anschließend wird das Potenzial der Aufgaben anhand der objektiven Kennzeichen (siehe 6.1.2) eingeschätzt. Darauf folgt eine ausführliche Beschreibung des Unterrichtseinsatzes der Aufgabe anhand von Transkriptausschnitten, welche mit der schriftlichen Unterrichtsplanung und den Aussagen der Lehrerinnen und Lehrer im Interview verglichen wird (siehe 7.4.2). Diese Beschreibungen werden im Anschluss an die Transkriptausschnitte jeweils durch Interpretationen ergänzt, die Rückschlüsse auf verschiedene Aspekte des fachdidaktischen Wissens ermöglichen. Hierzu gehören zum Beispiel das Umgehen mit Schülerantworten und das Erkennen von Schülerfehlern, die Nutzung von Beispielen, verschiedenen Repräsentationsformen und Erklärungsmöglichkeiten sowie das Erkennen und die Nutzung des Potenzials der einzelnen Aufgaben (vgl. 6.2.1). Außerdem werden in Zusammenhang mit den einzelnen Aufgaben Aspekte der kognitiven Aktivierung der Schülerinnen und Schüler analysiert, beispielsweise der Grad der kognitiven Selbstständigkeit oder der Lehrerlenkung, Der Anteil prozeduralen und begrifflichen Denkens und das Vorkommen multipler Lösungswege (vgl. 6.2.2). Bei den angegebenen Transkriptausschnitten wird durch den vorgestellten Buchstaben angegeben, ob der Ausschnitt aus dem videografierten Unterricht (U) oder dem Interview (I) stammt.
Es gibt einzelne Komponenten des fachdidaktischen Wissens, die sich nicht anhand einzelner Aufgabenbearbeitungen, sondern erst im Gesamtzusammenhang des Unterrichts zeigen. Hierzu gehören Muster in Reaktionen auf Schülerantworten sowie im Gebrauch von Begriffen und Repräsentationsformen, das Herstellen von Verbindungen sowie die Ziele der Unterrichtsstunden. Diese Komponenten werden im Anschluss an die Analyse der Aufgabenbearbeitungen erläutert und durch einen Überblick über die im Unterricht zu erkennenden Elemente der kognitiven Aktivierung ergänzt. Außerdem wird soweit möglich eine grobe Einschätzung des mathematischen Fachwissens anhand der qualitativen Daten vorgenommen (siehe 6.2.3).
Zusammenfassend wird für jede der drei Komponenten des fachdidaktischen Wissens (siehe 4.1.5) eine Einschätzung des bei der Lehrperson vorhandenen Wissens im Vergleich mit dem im Unterricht umgesetzten Wissen vorgenommen. Hierzu dienen vor allem auch die Kategorien der kognitiven Aktivierung als Qualitätsmerkmal (siehe Kapitel 5). Diese Einschätzungen werden abschließend mit den Ergebnissen des COACTIV-Tests der Lehrkräfte verglichen (siehe 7.3.6).
In Kapitel 13 werden nun die Ergebnisse der einzelnen Lehrerinnen und Lehrer miteinander verglichen, wobei einerseits die qualitativen Analysen der Lehrkräfte einander gegenüber gestellt werden. Andererseits werden für jede einzelne Lehrperson die Ergebnisse der qualitativen Analysen mit den Ergebnissen des COACTIV-Tests verglichen. Es werden aber auch die COACTIV-Testergebnisse der Lehrerinnen und Lehrer untereinander in Beziehung gesetzt. Aus diesen Vergleichen werden Antworten auf die in Abschnitt 2.7 entwickelten Forschungsfragen abgeleitet.

8 Darstellung der Analysen von Lehrer 1

8.1 Überblick über die Unterrichtsstunden

Es wurden drei an einem Tag direkt aufeinander folgende Unterrichtsstunden des Lehrers 1 videografiert. Die vom Lehrer unterrichtete Klasse ist eine Projektklasse im achten Schuljahr. Es handelt sich nach Einschätzung des Lehrers um eine sehr leistungsschwache Klasse. Die bisherigen Mathematiknoten der Lernenden sind je zur Hälfte Vieren und Fünfen, ein Schüler hatte eine Sechs als Vornote. Keiner der Schülerinnen und Schüler erreichte damit im bisherigen Mathematikunterricht befriedigende Leistungen.
In den vergangenen Stunden haben die Schülerinnen und Schüler bereits die Formeln für den Umfang und den Flächeninhalt eines Kreises erarbeitet und angewendet. Zu Beginn der drei videografierten Unterrichtsstunden wiederholt der Lehrer mithilfe von Kopfübungen die Berechnung des Umfangs und des Flächeninhaltes eines Kreises bei gegebenem Durchmesser, bzw. Radius (siehe 8.3.1). Anschließend bearbeiten die Schülerinnen und Schüler in drei vom Lehrer nach Leistungsvermögen eingeteilten Gruppen je ein Arbeitsblatt zur Berechnung von Umfang und Flächeninhalt eines Kreises im Kontext des Berliner Fernsehturms. Die Aufgaben auf den drei Arbeitsblättern sind zwar teilweise sehr ähnlich, aber jeweils von unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad. Die Lösungen zu den Aufgaben können die Lernenden anhand von Lösungsblättern, die an der Tafel aufgehängt sind, selbstständig kontrollieren. Im Anschluss an die Gruppenarbeit bearbeiten die Schülerinnen und Schüler in Einzelarbeit verschiedene Arbeitsblätter im Rahmen einer Stationsarbeit (siehe 8.3.10 bis 8.3.17). Diese dient der Zusammenfassung und Wiederholung des Themas Umfang und Flächeninhalt eines Kreises. Die Reihenfolge der Stationen können die Lernenden beliebig wählen, die Lösungen sind wiederum an der Tafel ausgehängt. Die Aufgabe 2 der Station 5 (siehe 8.3.15) sowie die gesamte Station 7 (siehe 8.3.17) sind dabei als Zusatzaufgaben gedacht. Die Stunden enden mit einer kurzen Besprechung der Aufgabe 2 der Station 5 sowie einer Reflexion der Stationsarbeit unter pädagogischen Gesichtspunkten.

8.2 Darstellung aufgabenübergreifender Aspekte des Unterrichts

Selbstständigkeit

Der Lehrer betont über alle Aufgaben hinweg immer wieder die Bedeutung der Selbstständigkeit der Lernenden.

I [00:05:35.27]

Lehrer: […] haben vorher im Wochenplan gearbeitet und da waren halt viele Lösungen überall zu finden und sie haben viel abgeschrieben. So und das war nicht selbstständiges Lernen.

Unter anderem an diesem Transkriptausschnitt zeigt sich, dass der Lehrer am liebsten Wochenplanarbeit mit den Schülerinnen und Schüler durchführen würde. Aufgrund von Disziplinproblemen wurde die Wochenplanarbeit aber vor einigen Wochen abgebrochen. Er betont im Zusammenhang mit der Wochenplanarbeit auch die Selbstständigkeit er Lernenden.
Während der Schülerarbeitsphasen sitzt der Lehrer lange Zeit an seinem Pult, während die Lernenden völlig selbstständig arbeiten und nur gelegentlich für eine Frage zum Pult kommen oder den Lehrer zu sich rufen. Die Analysen der einzelnen Aufgabenbearbeitungen im Folgenden Abschnitt zeigen, dass der Lehrer schon in die Aufgabenstellung viele Hilfestellungen in die Aufgabenblätter integriert hat, so dass die Schülerinnen und Schüler zwar selbstständig, aber nicht kognitiv selbstständig arbeiten (siehe 8.3). Dies erkennt der Lehrer nicht.

Für die Aufgaben der Gruppenarbeit und auch bei der Stationsarbeit hängt der Lehrer jeweils die Lösungen an die Tafel. Die Lösungen bestehen aus vergrößerten Kopien der Arbeitsblätter, in die die Lösungen mit Rotstift eingetragen wurden. Allerdings sind nur die zu stellenden Fragen sowie die Ergebnisse festgehalten, nicht die Lösungswege.

> I [00:07:13.10] Lehrer: Ja das ist, für mich geht es dadrum also auch in der Mathematik und so ist für mich halt nicht das Ziel das wichtigste, halt eben die Lösungen oder halt irgendetwas da am Ende zu haben, sondern es geht mir dadrum, dass sie sich selber kontrollieren können […]. Für den Lehrer ist eine große Herausforderung, dann sozusagen zu sagen: Ok, wie helfe ich ihnen bezüglich der Selbstständigkeit und wo setze ich an, dass halt dass sie ja selbstständig arbeiten.

Durch das Aushängen der Lösungen möchte der Lehrer scheinbar die Selbstständigkeit der Lernenden fördern. Er erkennt aber nicht, dass hierdurch zwar die von den Schülerinnen und Schülern benötigten Hilfestellungen durch den Lehrer reduziert werden, dass dies aber nicht automatisch zu kognitiv selbstständigem Arbeiten führt. Das schon im Zusammenhang mit der Wochenplanarbeit erwähnte Problem des Abschreibens der Lösungen taucht auch in den beobachteten Unterrichtsstunden wieder auf.

Binnendifferenzierung

Der Lehrer erläutert im Zusammenhang mit mehreren Aufgaben die Bedeutung von Binnendifferenzierung.

> I [00:17:56.24]
>
> Lehrer: […] wenn ich halt so Aufgaben stelle differenzierte Aufgaben, ist so da bemühe ich mich halt die leistungsstark stärkeren Schüler, dass sie halt den Transfer leisten, wenn sie einen Sachverhalt haben, den auf andere Situationen zu übertragen und auch dann zu erkennen, welche Probleme eventuell in der Situation dargestellt sind und diese dann formulieren müssen. So das ist dann ja also für mich schon sehr viel dann gewonnen. Wohingegen halt die Leistungsschwächeren, wenn sie den Sachverhalt überhaupt begreifen, äh wenn sie motorisch was zu diesem Sachverhalt sag ich mal basteln können und eventuell dann auch noch äh Dinge dazu ausrechnen wie zum Beispiel jetzt den Flächeninhalt oder den Umfang, wenn sie dann halt mit dem Faden da ein bisschen drum herum legen und dann sagen aha ausmessen so und so und ach ja und dann kann man, da gibt es noch eine Formel und das kann man dann ausrechnen und das ist dann schon das Minimum […]dann erreicht so.

Der Lehrer beschreibt hier die verschiedenen Anforderungsniveaus, die er in binnendifferenzierten Arbeitsphasen durch die Auswahl der Aufgaben herstellt. Die Aufgabenblätter der Gruppenarbeit passen zu den hier beschriebenen Anforderungsbereichen (siehe 8.3.2 bis 0)

> I [00:09:45.26]
>
> Ich hatte vorab ja äh man macht sich ja ein Bild bezüglich der Binnendifferenzierung und Leistung der Schülerinnen und Schüler, wie weit sie gekommen. […] hab ich ja schon dann die Zuteilung ganz richtig gemacht. So empfand ich. Also es war dann halt die leistungsschwachen Schüler, die da zusammen saßen, waren tatsächlich auch die leistungsschwachen. […] So war für mich so überraschend festzustellen. Die Leistungsstarken und die Leistungsschwachen haben mehr untereinander kommuniziert als die mittlere Gruppe. […] Die Leistungsschwachen haben sehr viel Hilfe gebraucht und dann halt, da war ich manchmal ein bisschen etwas überrascht, wie weit man nochmal zurückgehen muss, um Unterstützung zu geben oder halt zu erklären.

Die Einteilung der Gruppen nach Leistungsstand der Schülerinnen und Schüler scheint dem Lehrer nach eigener Einschätzung gut gelungen zu sein. Allerdings hat der Lehrer das Schülerdenken mehrfach im Vorfeld falsch eingeschätzt, da er wiederholt äußert, überrascht gewesen zu sein über das Leistungsvermögen der Lernenden.

8.3 Darstellung des Unterrichts und Analysen von Aspekten des fachdidaktischen Wissens anhand der eingesetzten Aufgaben

8.3.1 Aufgabe 1 ‚vermischte Kopfübungen'

- Also, ich möchte jetzt ausrechnen... den Umfang, Ok. Ich hab... gegeben Radius von... 5.
- Ich habe jetzt den Durchmesser gegeben von 4 cm. Durchmesser 4 cm. Wie groß ist der Umfang?
- Jetzt hab ich den Durchmesser, den Durchmesser {betonend} von 5 cm […] wie groß ist der Umfang?
- Also gesucht Umfang. Durchmesser hab ich jetzt 7 cm.
- Ich habe jetzt... den […] Radius von 10 cm. Gesucht ist der Umfang.
- Wir haben jetzt den Radius gegeben von 3 cm. Gesucht ist der Flächeninhalt.
- Wir haben jetzt mal... Radius von 5 cm gegeben.

Abbildung 8.1: Aufgabe 1 ‚vermischte Kopfübungen'

Diese Aufgabe plant der Lehrer im Vorfeld mit ein, die genauen Zahlenwerte überlegt er sich aber erst spontan während des Unterrichts.

> Planung:
> Kopfrechnen, L. stellt den Sch. verschieden Aufgaben, wie r= 5 cm, Wie groß ist der Umfang oder die Fläche? Die Sch. sollen nochmals die Begriffe, Durchmesser, Radius, Fläche, Umfang, π sich vergegenwärtigen und den Zusammenhang in Erinnerung rufen.

Hier stellt der Lehrer explizit Verbindungen zum Vorwissen her und benennt auch Verbindungen zwischen den einzelnen Begriffen.
Der Lehrer stellt diese Aufgabe als Kopfrechenaufgabe, in der die Schülerinnen und Schüler überschlagsmäßig das Ergebnis berechnen sollen. Er begründet dies im Interview so:

> I [00:34:08.23]
> Lehrer: […] viele Fehler geschehen, weil sie einfach sich nichts vorstellen können unter dem was sie rechnen. […] Sie haben keinen abstrakten Größenbezug oder sie haben keinen abstrakten Bezug, was für ein Ergebnis da stehen muss. […] deswegen versuch ich, also überall wo es nur geht, verkürzt oder so abgespeckt immer so diese Kopfrechnen zu machen, damit sie halt abstrahieren lernen und auch ein bisschen Sicherheit bekommen für Größen, Zahlenbeziehungen.

Der Lehrer betont hier insbesondere die Förderung des Verständnisses der Schülerinnen und Schüler.

Objektive Kennzeichen der Aufgabe 1 ‚vermischte Kopfübungen'

Es handelt sich hier um eine technische Aufgabe, die vor allem Fertigkeiten der Termwertberechnung erfordert. Da den Schülerinnen und Schülern sowohl die Formel für den Umfang, als auch den Flächeninhalt eines Kreises bekannt ist, können sie die vom Lehrer angegebenen Werte in die bekannten Formeln einsetzen und den Wert des Terms im Kopf berechnen. Es gilt dabei darauf zu achten, dass je nach Aufgabenstellung die Formel zur Berechnung des Umfangs eines Kreises mithilfe des Radius oder des Durchmessers verwendet wird.

Analyse des Unterrichtseinsatzes der Aufgabe 1 ‚vermischte Kopfübungen'

Die Aufgaben in Abbildung 8.1 stellt der Lehrer nacheinander mündlich, die Schülerinnen und Schüler sollen die Aufgaben unter Verwendung der groben Näherung 3 für die Zahl π im Kopf berechnen. Für den Umfang des Kreises bei einem Radius von 5 ruft der Lehrer kommentarlos nacheinander mehrere Schüler auf, welche die Werte 70, 75 und 45 als mögliche Lösungen nennen. Daraufhin lässt der Lehrer nochmals die Formel für den Umfang wiederholen, was den Lernenden sehr schwer fällt:

U [00:00:01.27][13]

Lehrer: […] Wie rechnen wir nochmal den Umfang aus? (L. nimmt einen Schüler durch Handzeichen dran.)

Schüler B: r mal r mal. Ach ne.

Lehrer: Nicht ganz. (L. nimmt einen Schüler durch Handzeichen dran.)

Schüler D: U geteilt durch 2 mal π.

Lehrer: Nein. Oh, ganz durcheinander.

Schüler B: Wir wollen den Umfang doch.

Schüler E: //U mal// d.

Lehrer: Nein, nicht U, sondern? […] d war schon gut, aber da fehlt noch was...... Das π, genau. Das π. Also würden wir jetzt Überschlag folgendes machen. Ich hatte gesagt Radius 5. Wie viel ist das dann als Durchmesser? […]

Schüler G: 10.

Lehrer: 10 cm. Und jetzt muss ich was machen? Ich hab jetzt Durchmesser, π hab ich auch. Also was mache ich? (L. nimmt einen Schüler durch Handzeichen dran.)

Schüler G: Mal drei. […]

Lehrer: 10 mal 3 ist dann?

Schüler G: 30.

Lehrer: Überschlagsmäßig sind das 30 cm Umfang.

Der Lehrer leitet die Schülerinnen und Schüler in einem stark gelenkten Unterrichtsgespräch zur Benennung der einzelnen Bestandteile der Formel für den Umfang eines Kreises an. Die vollständige Formel wird nicht genannt. Die falschen Schülerantworten werden dabei nicht begründet, so dass die Formel nicht reflektiert wird. Es wird lediglich Faktenwissen abgerufen, woraufhin auf einer prozeduralen Eben der Umfang berechnet wird. Es fällt auf, dass der Lehrer mehrfach den Schülerantworten die Einheit cm hinzufügt, diese wurde aber in der Aufgabenstellung von ihm nicht genannt.

Der Lehrer stellt in der Folge zunächst drei Aufgaben, die die Berechnung des Umfangs mithilfe des Durchmessers erfordern. Eine mögliche Erklärung hierfür sind die beobachteten Probleme der Schülerinnen und Schüler, da die Berechnung anhand des Durchmessers einen Schritt weniger erfordert als die Berechnung mithilfe des Radius. Allerdings wurde im Vorfeld erklärt, wie die Berechnung anhand des gegebenen Radius funktioniert, woraus die im Folgenden beobachteten Fehler resultieren könnten.

U [00:01:36.27]

Lehrer: […] Ich habe jetzt den Durchmesser gegeben von 4 cm. Durchmesser 4 cm. Wie groß ist der Umfang?

Schüler C: 36. […]

Schüler H: 24.

Lehrer: Durchmesser 4 cm. (L. nimmt einen Schüler durch Handzeichen dran.)

Schüler A: 12.

Lehrer: Ich muss nicht mehr mal 2 nehmen.

[13] In den Transkriptausschnitten wurde im Gegensatz zu den Beschreibungen und Interpretationen auf die Unterscheidung zwischen männlichen und weiblichen Schülern verzichtet.

Schüler A: Ist doch schon Durchmesser.

Lehrer: Ist doch, sag ich doch, Durchmesser 4 cm... Und dann müssen wir nur noch mal 3 überschlagsmäßig, kommt ungefähr Umfang

Schüler A: 12.

Der Lehrer lenkt hier stark, indem er den Begriff des Durchmessers betont. Es fällt auf, dass der Schüler A. durchaus seinen Rechenweg begründen will, allerdings führt der Lehrer die Begründung größtenteils selbstständig aus, wobei aber nur prozedurales Wissen aktiviert wird.

In der Planung erläuterte der Lehrer hierzu:

Planung:

Sch. rechnen im Kopf, dabei wird π abgerundet auf 3, Sie erklären ihre Vorgehensweise beim Kopfrechnen, damit sollen alle Sch. die Rechenweise nachvollziehen können und die richtigen Verknüpfungen erstellen können.

Hier zeigt sich ein Widerspruch zwischen der Planung des Lehrers und dem Handeln im Unterricht, da die Erklärung von Lösungswegen durch die Schülerinnen und Schüler explizit eingeplant, im Unterricht aber nicht zugelassen wird.

Die folgende Aufgabe zur Umfangsberechnung mit Durchmesser 7 cm kann ein Schüler problemlos lösen. Der Lehrer weist lediglich auf die vergessene Einheit hin und geht zur nächsten Aufgabe über:

U [00:03:36.22]

Lehrer: Radius von 10 cm. Gesucht ist der Umfang...... G?

Schüler G: Ungefähr 60 cm.

Lehrer: Ja genau. Wie hast du das gerechnet nochmal?

Schüler G: Ähm, ich hab einfach also, ähm... das Doppelte vom Radius genommen, halt den Durchmesser, und dann mal 3... Also 20 mal 3.

Nachdem eine Aufgabe scheinbar problemlos gelöst wurde, erhöht der Lehrer nun scheinbar den Schwierigkeitsgrad (s.o.). Hier fordert der Lehrer konform zur Planung die Erklärung des Rechenweges durch den Schüler ein. Dieser wird auf einer rein prozeduralen Ebene erläutert. Dies ist allerdings die einzige Teilaufgabe, in der der Rechenweg erläutert wird.

Nun geht der Lehrer zu Aufgaben über, die die Berechnung des Flächeninhaltes erfordern und lässt zunächst die Formel zur Berechnung des Flächeninhalts eines Kreises wiederholen.

U [00:04:27.19]

Lehrer: Ja? Flächeninhalt eines Kreises. Wie berechnen wir den nochmal?

Schüler B: r mal r mal 3. […]

Lehrer: Genau und die 3 steht für welchen Buchstaben?

Schüler I: π.

Lehrer: Genau, sehr gut, Ok. Also das im Überschlag, ne.

Hier wird Faktenwissen benötigt. Der Lehrer betont wiederum, dass es sich um eine überschlagsmäßige Berechnung handelt.

Anschließend stellt er die nächste Teilaufgabe:

U [00:04:55.28]

Lehrer: Wir haben jetzt den Radius gegeben von 3 cm. Gesucht ist der Flächeninhalt.

Schüler M: Ungefähr 27 cm.

Lehrer: Äh und dann muss noch etwas kommen. cm und

Schüler M: Quadratzentimeter.

Lehrer: Ah, gut. Danke. Äh so weiter, nächste Aufgabe. Wir haben jetzt mal... Radius von 5 cm gegeben...... B?

Schüler B: 75 cm^2.

Lehrer: Gut Ok, alles klar. Ich will auch das nicht weiter strapazieren.

Es fällt auf, dass der Lehrer zu keiner der Flächeninhaltsberechnungsaufgaben den Rechenweg erläutern lässt. Auch vergewissert er sich nicht, dass auch die anderen Schülerinnen und Schüler die Verwendung der Formeln für den Flächeninhalt verstanden haben. Es wird nur prozedurales Wissen aktiviert. Der Lehrer nutzt daher das von ihm benannte Potenzial dieser Aufgaben zur verständnisbetonten Bearbeitung nicht aus. Die meisten Aufgaben werden verfahrensbetont bearbeitet, da die in der Planung benannten Zusammenhänge zwischen Flächeninhalt und Umfang nicht hergestellt werden.

8.3.2 Aufgabe 2 ‚Fernsehturm Einstieg'

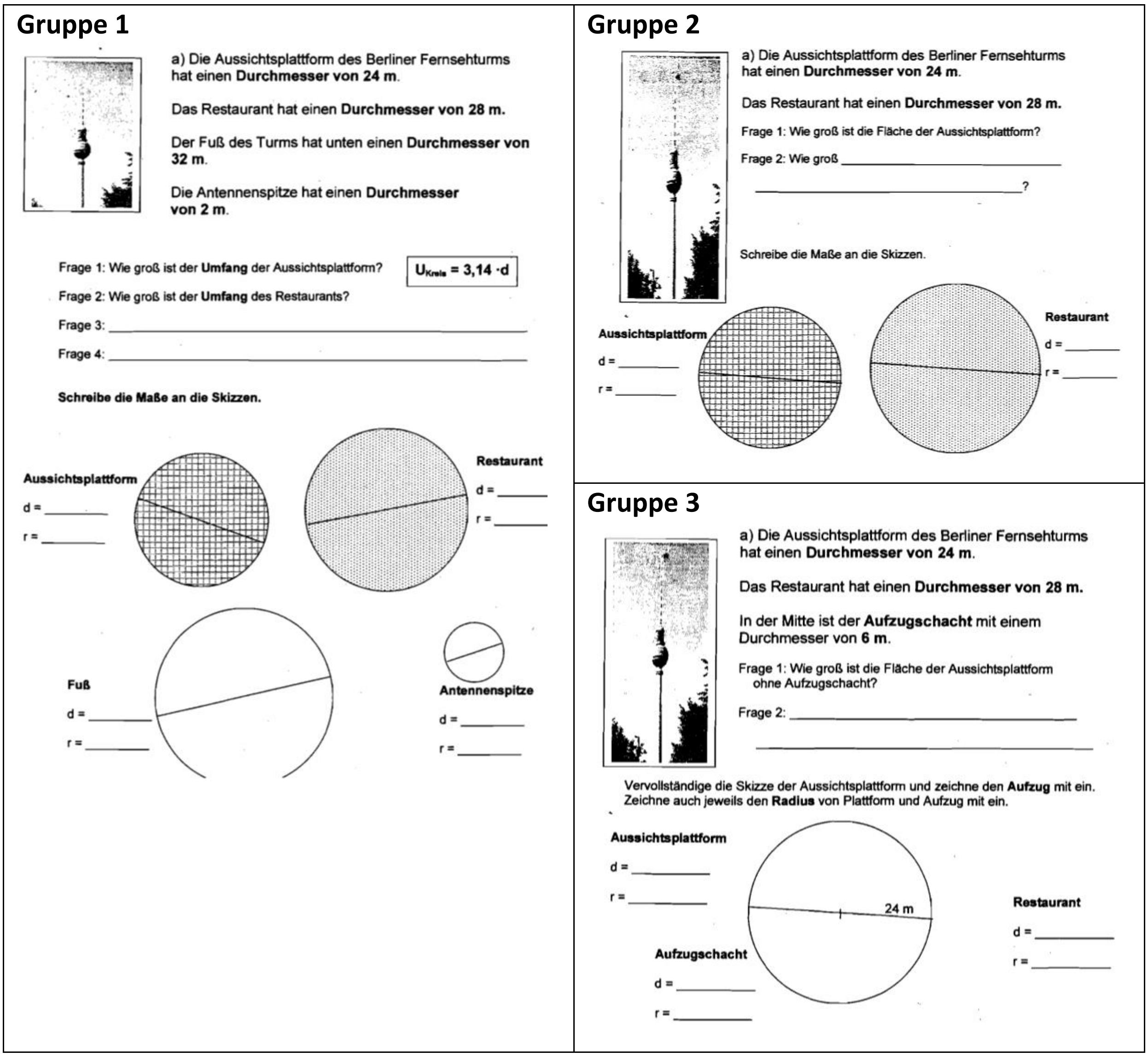


Abbildung 8.2: Aufgabe 2 ‚Fernsehturm Einstieg'

Diese Aufgaben (siehe Abbildung 8.2) sind jeweils Teil eines Arbeitsblattes[14], welches der Lehrer in drei von ihm eingeteilten Leistungsgruppen bearbeiten lässt.

I [00:09:45.26]

Lehrer: Ich hatte vorab ja äh man macht sich ja ein Bild bezüglich der Binnendifferenzierung und Leistung der Schülerinnen und Schüler, wie weit sie gekommen. […] In der ersten Stunde hatte ich ja die drei Differenzierungsgruppen und mir ging's einfach darum, halt tatsächlich nochmal

[14] Die drei Arbeitsblätter als Ganzes befinden sich im Anhang.

> sie auseinander zu bringen und einzeln, quasi einzeln zu betrachten, was können sie. […] Und der zweite Anspruch, der stärker pädagogisch ausgeprägt war, ob sie es hinkriegen, trotz ihrer Unterschiedlichkeit ähm an einem Thema gemeinsam zu arbeiten.

Der Lehrer umschreibt hier als Ziel dieser Arbeitsblätter die Binnendifferenzierung und die Förderung des mathematischen Kommunizierens (siehe auch 8.2).

Objektive Kennzeichen der Aufgabe 2 ‚Fernsehturm Einstieg'

Die Aufgabe 2 war mit gleichem außermathematischen Kontext, dem Berliner Fernsehturm, aber unterschiedlichem mathematischen Inhalt auf den Arbeitsblättern aller Gruppen vertreten. In allen drei Fällen handelt es sich um rechnerische Modellierungs- und problembezogene Aufgaben. Die Aufgaben erfordern außermathematisches Modellieren auf niedrigem Niveau, da jeweils das mathematische Modell vorgegeben ist, bzw. sehr nahe liegt. Außerdem sind die wichtigsten Informationen im Aufgabentext jeweils fett gedruckt.
Die Aufgabe der Gruppe 1 erfordert die Berechnung verschiedener Kreisumfänge bei unterschiedlichen Durchmessern. Dabei sind als Hilfestellung die benötigte Formel und auch Skizzen zur Veranschaulichung der Situation vorgegeben. Neben den Skizzen sind Felder zum Eintragen der entsprechenden Radien und Durchmesser abgedruckt, wobei die Radien für die Lösung der Aufgabe der Gruppe 1 nicht benötigt werden. Zwei der in der Aufgabe zu beantwortenden Fragen sind vorgegeben, zwei weitere Fragen sollen von den Schülerinnen und Schülern selbst gestellt werden. Die zu stellenden Fragen sind naheliegend. Die gegebenen Werte können viermal in die gegebene Formel eingesetzt und die Werte der Terme berechnet werden. Dabei müssen auch die Einheiten berücksichtigt werden.
Im Gegensatz zur Aufgabe der Gruppe 1 erfordern die Aufgaben der Gruppe 2 und 3 die Berechnung von Flächeninhalten von Kreisen bei unterschiedlichem Durchmesser. Die benötigte Formel ist hier nicht angegeben. Die Gruppe 2 hat zwei Skizzen für die beiden zu berechnenden Flächen vorgegeben. Dagegen wird die Gruppe 3 aufgefordert, eine gegebene Skizze entsprechend zu vervollständigen, sodass anhand einer Skizze die drei zu berechnenden Flächeninhalte deutlich werden. In beiden Fällen sind wie schon bei Gruppe 1 neben den Skizzen Felder zum Eintragen der Entsprechenden Durchmesser und Radien abgedruckt. Diese dienen hier im Gegensatz zur Aufgabe von Gruppe 1 als Hilfestellung, da jeweils aus den gegebenen Durchmessern die Radien für die Berechnung des Flächeninhaltes ermittelt werden müssen. Dies erfordert zumindest auf niedrigem Niveau innermathematisches Modellieren. Darüber hinaus müssen die Lernenden der Gruppe 3 den Aufzugsschacht in das mathematische Modell integrieren, aber auch diese Modellierung ist anhand der Skizze relativ einfach möglich. Auch die Formulierung der zweiten Frage zu jeder Aufgabenstellung ist naheliegend. Die Schülerinnen und Schüler können nun zweimal den entsprechenden Radius in die bekannte Formel für den Flächeninhalt eines Kreises einsetzen. Die Gruppe 3 muss zusätzlich noch den Flächeninhalt des Aufzugsschachtes berechnen und jeweils subtrahieren. Beide Gruppen müssen dabei die entsprechenden Einheiten berücksichtigen.

Analyse des Unterrichtseinsatzes der Aufgabe 2 ‚Fernsehturm Einstieg'

Diese Aufgaben werden jeweils in annähernd ‚leistungshomogenen' Gruppen bearbeitet, wobei nach Aussage des Lehrers die Gruppe 1 die leistungsschwächste und Gruppe 3 die leistungsstärkste Gruppe war. Aufgrund der geringen Lehrer-Schüler-Interaktion sind kaum Szenen der Bearbeitung dieser Aufgabe zu beobachten.

Gruppe 2

Bei Gruppe 2 kann der Schüler G. die Formel für den Flächeninhalt eines Kreises ohne Probleme benennen, allerdings ist er sich unsicher, wie er die Berechnung des Radius aufschreiben soll:

U [00:15:05.26]

Schüler G: Ja, aber ich meine, wie soll ich das jetzt aufschreiben? Muss ich jetzt d geteilt durch 2 dann... oder einfach

Lehrer: Wenn du schon, ja du kannst ja hinschreiben jetzt r zum Beispiel. Hier bei Gegeben. Kannst du hinter d, hinter d schreibst du r gleich... (L. wendet sich Schüler B. zu.) Hast du das schon im Kopf überschlagen? Darf ich, gleich. (L. wendet sich wieder Schüler G. zu.) So prima und jetzt kannst du die Formel normal schreiben. […]

Schüler B: 452,3 m^2.

Lehrer: Ne drei nicht. (? ...) acht neun die dritte Stelle hinter dem Komma.

Schüler B: //Ja,// Komma drei neun. […]

Der Lehrer gibt dem Schüler G. vor, wie er die Rechnung aufschreiben kann und weist Schülerin B. darauf hin, dass sie falsch gerundet hat, woraufhin sie ihr Ergebnis mit Hilfe des Lehrers korrigiert. Der Lehrer lenkt hier kurzzeitig stark, wobei der Fokus auf den auszuführenden Prozeduren liegt. Größtenteils bearbeitet diese Gruppe die Aufgabe aber problemlos.

Gruppe 3

In der Gruppe 3 sind sich die Schüler nicht einig, ob sie für die Rechnung den Radius benötigen:

U [00:18:04.02]

Schüler D: Braucht man hier den Radius?

Schüler A: Den braucht man nicht, ne. […]

Lehrer: Wie groß ist die Fläche ohne Aufzugschacht? Ne.

Schüler D: Ja, das habe ich schon abgezogen.

Lehrer: Genau. […] der Aufzugschacht musst du dir das so vorstellen. Das ist also die Plattform (L. deutet mit seinen Händen eine Kreisfläche an.) und dann hat man (???) einen Aufzugschacht (L. deutet mit einer Hand eine kleinere Kreisfläche an.). Also sind das dann wie viele Kreise?

Schüler M: Zwei. […]

Lehrer: Genau und dann muss man jetzt den kleinen abziehen von

Schüler M: //Von dem// großen abziehen. […] Ja haben wir ja.

Lehrer: Und für beides brauch man, für die Fläche brauch man nur was?

Schüler M: Radius.

Lehrer: Genau.

Schüler M: Habe ich doch Recht gehabt, ne.

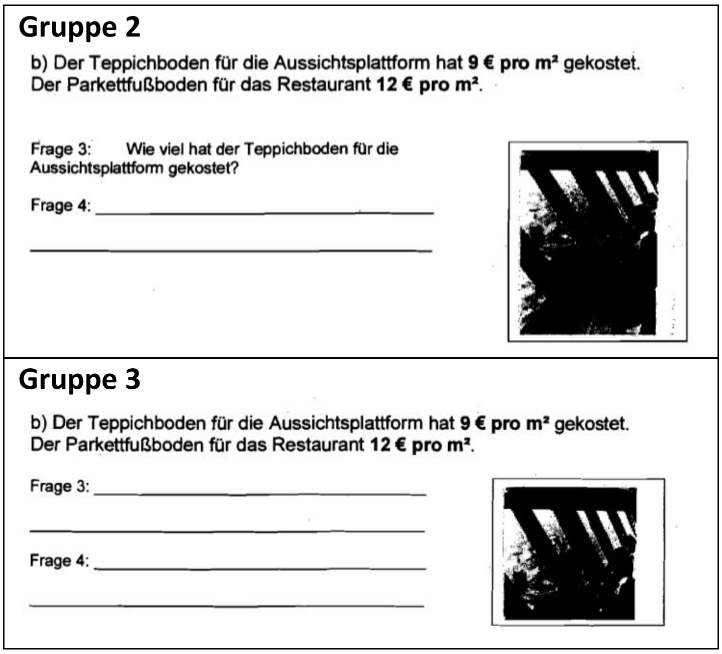
Lehrer: Na ja ist ja gut, ist ja egal wer Recht gehabt hat. Soweit geklärt, oder?

Schüler D: Ja.

Der Lehrer visualisiert die Situation mit dem Aufzugschacht mithilfe seiner Hände, obwohl die Schüler signalisieren, dass sie die Fläche des Aufzugschachtes bereits abgezogen haben. Der Lehrer erläutert dabei umfassend, dass man die kleine Fläche von der großen Fläche abziehen muss. Dies stellt wiederum eine starke Lehrerlenkung dar. Allerdings haben die Schüler das Subtrahieren der Flächen bereits selbstständig durchgeführt und haben sich nur vergewissern wollen, ob die Berechnung des Flächeninhalts mithilfe des Radius richtig gewesen ist. Der Lehrer hat den derzeitigen Stand der Bearbeitung nicht erkannt und auch nicht erfragt. Es steht hier vor allem prozedurales Denken im Vordergrund.

Die Bearbeitung der Aufgabe ist in allen drei Gruppen als verfahrensbetont einzuschätzen, da die Prozeduren ohne Verbindungen mit Konzepten ausgeführt werden. Es wird jeweils sowohl prozedurales Wissen als auch Faktenwissen aktiviert. Die Lehrerlenkung ist zwar kurzzeitig sehr stark, größtenteils arbeiten die Schülerinnen und Schüler aber kognitiv selbstständig an der Aufgabe.

8.3.3 Aufgabe 3 ‚Fernsehturm Bodenbelag'



Gruppe 2

b) Der Teppichboden für die Aussichtsplattform hat **9 € pro m²** gekostet.
Der Parkettfußboden für das Restaurant **12 € pro m²**.

Frage 3: Wie viel hat der Teppichboden für die Aussichtsplattform gekostet?

Frage 4: ____________________

Gruppe 3

b) Der Teppichboden für die Aussichtsplattform hat **9 € pro m²** gekostet.
Der Parkettfußboden für das Restaurant **12 € pro m²**.

Frage 3: ____________________

Frage 4: ____________________

Abbildung 8.3: Aufgabe 3 ‚Fernsehturm Bodenbelag'

Für diese Aufgaben gilt dieselbe Begründung zur Auswahl wie für die Aufgabe 2, da der Lehrer im Interview über die Arbeitsblätter als Ganzes spricht (siehe auch Abschnitt 8.2).

Objektive Kennzeichen der Aufgabe 3 ‚Fernsehturm Bodenbelag'

Die beiden Aufgaben sind als rechnerische Modellierungs- und problembezogene Aufgaben einzuschätzen. Sie sind aus mathematischer Sicht identisch und unterscheiden sich lediglich darin, dass die Gruppe 3 beide in der Aufgabe zu beantwortenden Fragen selbst stellen muss, während die Gruppe 2 eine der beiden Fragen vorgegeben hat. Die Fragen sind aber im Kontext des Fernsehturms naheliegend, weshalb das außermathematische Modellierungsniveau für beide Aufgaben als niedrig einzuschätzen ist. Die in der Aufgabe gegebenen Materialkosten müssen jeweils mit dem entsprechenden Flächeninhalt, der in der vorherigen Aufgabe berechnet wurde, multipliziert werden. Die benötigten Angaben sind dabei im Text deutlich hervorgehoben.

Analyse des Unterrichtseinsatzes der Aufgabe 3 ‚Fernsehturm Bodenbelag'

Diese Aufgaben werden jeweils in annähernd ‚leistungshomogenen' Gruppen bearbeitet. Es konnten aber aufgrund fehlender Lehrer-Schüler-Interaktion bezüglich dieser Aufgaben keine Bearbeitungen im Unterricht beobachtet werden.

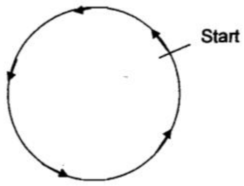
8.3.4 Aufgabe 4 ‚Fernsehturm Rundlauf‘

Gruppe 2

c) Ein Besucher läuft genau **drei Runden** auf der Aussichtsplattform ganz dicht am Fenster entlang.

Frage 5: Wie groß ist der Umfang der Plattform?

Frage 6: Welche Strecke legt er insgesamt zurück?



Gruppe 3

c) Ein Besucher läuft genau **drei Runden** auf der Aussichtsplattform ganz dicht am Fenster entlang.

Frage 5: ____

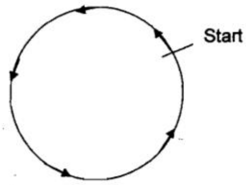


Abbildung 8.4: Aufgabe 4 ‚Fernsehturm Rundlauf‘

Für diese Aufgaben gelten dieselben Begründungen wie für Aufgabe 2, da der Lehrer im Interview über die Arbeitsblätter als Ganzes spricht (siehe auch Abschnitt 8.2).

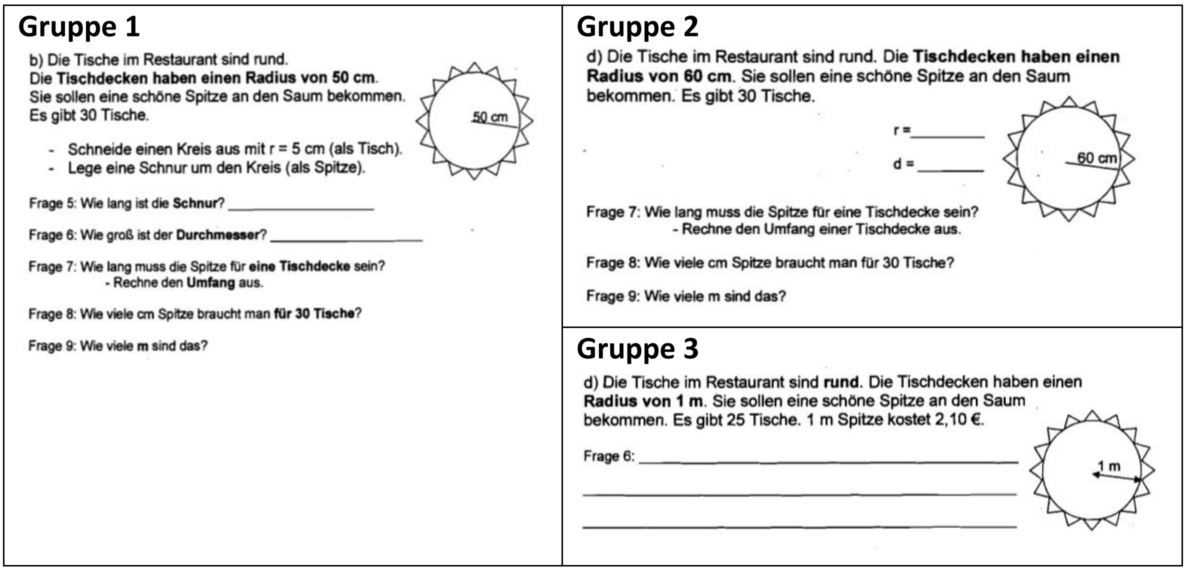
Objektive Kennzeichen der Aufgabe 4 ‚Fernsehturm Rundlauf‘

Die beiden Aufgaben sind jeweils als rechnerische Modellierungs- und problembezogene Aufgaben einzuschätzen. Sie sind aus mathematischer Sicht identisch und unterscheiden sich lediglich darin, dass die Gruppe 3 die in der Aufgabe zu beantwortende Frage selbst stellen muss, während die Gruppe 2 durch die Unterteilung der Aufgabenstellung in zwei gegebene Fragen sogar eine große Hilfestellung für die Erarbeitung des Lösungsweges vorgegeben hat. Die Gruppe 2 benötigt daher nur außermathematisches Modellieren auf niedrigem Niveau, während die Gruppe drei zunächst die Situation durchblicken muss, um eine geeignete Frage zu stellen und anschließend selbstständig ein mathematisches Modell zu entwickeln. Die Gruppe 3 führt daher außermathematische Modellierungen auf mittlerem Niveau durch. Dabei können die Lernenden entweder, wie bei der Aufgabe der Gruppe 2 vorgegeben, den Umfang der Aussichtsplattform berechnen und mit dem Faktor 3 multiplizieren. Se können aber auch argumentieren, dass der Besucher nicht genau auf dem Rand läuft und den Durchmesser der Aussichtsplattform um einen geeigneten Wert verkleinern.

Analyse des Unterrichtseinsatzes der Aufgabe 4 ‚Fernsehturm Rundlauf‘

Diese Aufgaben werden jeweils in annähernd ‚leistungshomogenen‘ Gruppen bearbeitet. Es sind aber aufgrund der geringen Lehrer-Schüler-Interaktion kaum Unterrichtsszenen zu diesen Aufgaben aufgezeichnet worden. Der Lehrer beobachtet lediglich kurz die Gruppe 3 bei der Bearbeitung ihrer Aufgabe, greift aber in keiner Weise ein.
Die Schüler scheinen bei der Bearbeitung dieser Aufgabe keine Probleme zu haben.

8.3.5 Aufgabe 5 ‚Tischdeckensaum'



Gruppe 1

b) Die Tische im Restaurant sind rund.
Die **Tischdecken haben einen Radius von 50 cm**.
Sie sollen eine schöne Spitze an den Saum bekommen.
Es gibt 30 Tische.

- Schneide einen Kreis aus mit r = 5 cm (als Tisch).
- Lege eine Schnur um den Kreis (als Spitze).

Frage 5: Wie lang ist die **Schnur**? ________________

Frage 6: Wie groß ist der **Durchmesser**? ________________

Frage 7: Wie lang muss die Spitze für **eine Tischdecke** sein?
- Rechne den **Umfang** aus.

Frage 8: Wie viele cm Spitze braucht man **für 30 Tische**?

Frage 9: Wie viele **m** sind das?

Gruppe 2

d) Die Tische im Restaurant sind rund. Die **Tischdecken haben einen Radius von 60 cm**. Sie sollen eine schöne Spitze an den Saum bekommen. Es gibt 30 Tische.

r = ________

d = ________

Frage 7: Wie lang muss die Spitze für eine Tischdecke sein?
- Rechne den Umfang einer Tischdecke aus.

Frage 8: Wie viele cm Spitze braucht man für 30 Tische?

Frage 9: Wie viele m sind das?

Gruppe 3

d) Die Tische im Restaurant sind **rund**. Die Tischdecken haben einen **Radius von 1 m**. Sie sollen eine schöne Spitze an den Saum bekommen. Es gibt 25 Tische. 1 m Spitze kostet 2,10 €.

Frage 6: ________________________________

Abbildung 8.5: Aufgabe 5 ‚Tischdeckensaum'

Für diese Aufgaben gelten dieselben Begründungen wie für Aufgabe 2, da der Lehrer im Interview über die Arbeitsblätter als Ganzes spricht (siehe auch Abschnitt 8.2).

Objektive Kennzeichen der Aufgabe 5 ‚Tischdeckensaum'

Aus mathematischer Sicht sind die drei Aufgaben sehr ähnlich, es handelt sich jeweils um rechnerische Modellierungs- und problembezogene Aufgaben. Die Schülerinnen und Schüler müssen zunächst mithilfe des angegebenen Radius den Umfang der Tischdecken berechnen und diesen Wert mit der Anzahl der Tische multiplizieren. Bei den Gruppen 1 und 2 ist der Radius in Zentimetern angegeben. Sie werden aufgefordert, diesen Wert jeweils in die Einheit Meter umzurechnen. Dagegen müssen die Schülerinnen und Schüler der Gruppe 3 ihren bereits in der Einheit Meter berechneten Wert jeweils mit dem Preis der Spitze je Meter multiplizieren. Vor Beginn dieser Rechnungen müssen zunächst alle Gruppen den außermathematischen Kontext der Spitze um die Tischdeckensäume verstehen, die Aufgaben unterscheiden sich aber im Niveau der notwendigen außermathematischen Modellierung: Die Gruppe 1 wird durch die Aufforderung zum Basteln eines Modells zu einem handlungsorientierten Verstehen der Situation angeleitet. Außerdem ist den Gruppen 1 und 2 der Lösungsweg durch entsprechende Fragen kleinschrittig vorgezeichnet. Es wird durch den Hinweis auf das Ausrechnen des Umfangs auch explizit das mathematische Modell vorgegeben, sodass die Schülerinnen und Schüler nur auf niedrigem Niveau außermathematisch modellieren müssen. Es ist anzumerken, dass die Frage 6 bei der Aufgabe von Gruppe 1 nicht ganz eindeutig gestellt ist, denn es wird nicht klar, ob der Durchmesser des Modellkreises (10 cm) oder der Durchmesser der Tischdecke (100 cm) eingetragen werden soll.
Die Gruppe 3 muss dagegen das mehrschrittige Modell völlig selbstständig entwickeln und dabei verschiedene mathematische Gegenstände miteinander in Beziehung setzen. Daher werden für die Gruppe 3 außermathematische Modellierungen auf mittlerem Niveau durchgeführt. Es sind in allen Gruppen nach der Übersetzung in das mathematische Modell nur noch einfache Fertigkeiten nötig, so dass keine innermathematischen Modellierungen benötigt werden. Des Weiteren werden in allen Gruppen einige, aber nicht alle der benötigten Begriffe und Zahlen im Aufgabentext hervorgehoben.

Analyse des Unterrichtseinsatzes der Aufgabe 5 ‚Tischdeckensaum'

Auch diese Aufgaben bearbeiten die Schülerinnen und Schüler in vom Lehrer eingeteilten, möglichst ‚leistungshomogenen' Gruppen.

Gruppe 1

Die Gruppe 1 wird während der Bearbeitung dieser Aufgabe intensiv vom Lehrer betreut. Die Schüler haben zunächst Probleme, den außermathematischen Kontext zu verstehen und erhalten vom Lehrer eine ausführliche Erklärung mithilfe der Schnur. Die Schüler haben aber auch bei der weiteren Bearbeitung der Aufgabe Probleme:

U [00:27:21.25]

Lehrer: […] Ähh, wie lang ist dann die Schnur? ...... (L. richtet sich an Schüler E.) Wenn du, wenn du hier hast, hast du die [Schnur] da einmal drum gelegt? (zeigt auf ausgeschnittenen Papierkreis mit dem Radius 5 cm) […] Ja und, wie viel war das? […] Habt ihr langes Lineal? Braucht ihr gleich zum Messen. […]

(Schüler E., N. und F. versuchen gemeinsam, einen Saum um den ausgeschnittenen Kreis mithilfe der Schnur zu legen.)

Lehrer: […] Ja schneide ruhig... Genau, das ist jetzt euer Umfang. Jetzt?

Schüler N: Erstmal Lineal und dann messen.

(Schüler F. versucht, das abgeschnittene Stück Schnur um einen weiteren ausgeschnittenen Kreis zu legen.)

Lehrer: F., F., das ist doch schon drum herum. Das ist doch der gleiche.

Schüler N: Hier musst messen. (Schüler N. reicht Schüler F. ein Lineal und Schüler F. misst das Stück Schnur.) […]

Schüler F: //Ungefähr// 30.

Der Lehrer lenkt zu Beginn dieses Ausschnitts sehr stark, indem er das Verfahren zum Messen mit der Schnur vorgibt. Den zwischenzeitlich von Schüler F. eingeschlagenen Fehlversuch unterbindet der Lehrer. Hier wird vor allem die enaktive Darstellung des Inhaltes deutlich.
Im Anschluss reflektiert der Lehrer gemeinsam mit den Schülern das bisherige Vorgehen:

U [00:29:25.27]

Lehrer: […] Kommt euch jetzt irgendwie etwas mh... bekannt vor? […] Überlegt mal. Wie viel Durchmesser haben wir bei dem Kreis, den ihr gerade

Schüler N: //10.// […]

Schüler E: Also mal 3.

Lehrer: Mal drei. Also habt ihr ungefähr

Schüler F: //30.//

Lehrer: Hast du ausgemessen 30, ne. Also der Umfang ist wie groß also?

Schüler E: 30 cm.

Lehrer: Genau und das ist ja eigentlich so überschlagsmäßig, was, welche Zahl ist das? Haben wir da einen Buchstaben? Haben wir gelernt...... π, ne.

Schüler N: Ach ja.

Der Lehrer versucht in einem stark gelenkten Unterrichtsgespräch Verbindungen zur Formel für den Umkreis eines Kreises herzustellen. Die Schüler scheinen den Ausführungen des Lehrers nicht folgen zu können, da fraglich ist, wie der Lehrer den Übergang zwischen dem Umfang 30cm und der Zahl π herstellt. Der Lehrer nennt im Endeffekt die Lösung selbst.
In der folgenden Szene leitet der Lehrer den Transfer von der enaktiven Repräsentationsform auf die formale Darstellung an:

U [00:30:35.19]

Lehrer: […] Ihr habt ja jetzt hier vorne ... 5 cm festgemacht, ne. (zeigt auf den Radius des ausgeschnittenen Kreises)[…] Jetzt geht es wieder praktisch zurück zu der Tischdecke (L. zeigt auf den Aufgabentext zu b).). Da ist es nicht 5, sondern 50. Und wie groß und dann der Durchmesser... von der Tischdecke?

Schüler N: Äh 100.

Lehrer: Zentimeter.

Schüler N: Ja Zentimeter.

Lehrer: Und in Meter umgerechnet ist das?

Schüler F: 1 m.

Lehrer: Gut... Und jetzt, wie lang muss die Spitze für dann die Tischdecke sein? Was müsst ihr jetzt ausrechnen?

Schüler N: //100// mal 3.

Lehrer: Mhh, mit... mit π bitte. Ihr habt ja den Taschenrechner. Jetzt könnt ihr den ja benutzen. Also? […]

Schüler N: 314,1. […] 3 Meter 14.

Lehrer: Ja... genau, 3 Meter 14. (L. wendet sich an Schüler F.) Weißt du was, wie, wie du es machen sollst?

Schüler F: Ne. Ich weiß nicht, was ich eingeben soll. […]

Schüler N: Also, du gibst 100 ein. Wir, also wir haben ja ausgerechnet, dass das 100 ist. […] Und dann haben wir das ja umgerechnet auf 1 m und dann müssen wir eigentlich nur die π-Taste drücken, Die ist hier (Schüler N. zeigt auf die π-Taste seines Taschenrechners.)... Mal π.

Hier findet wieder ein stark gelenktes Unterrichtsgespräch statt, indem nur prozedurales Denken aktiviert wird, obwohl der Lehrer Verbindungen zwischen dem Papiermodell und der Berechnung der Aufgabe herstellt. Gegen Ende des Ausschnittes zeigt sich aber, dass sich die Lernenden gegenseitig bei Problemen mit der Eingabe in den Taschenrechner unterstützen.

Der Lehrer leitet anschließend zur nächsten Frage, der Ausweitung auf 30 Tische, über:

U [00:33:04.15]

Lehrer: Soo... jetzt wird es interessant.

Schüler N: Wie viele cm Spitze braucht man für 30 Tische.

Schüler F: //Muss man das// nicht mal 30 rechnen? 314 mal

Lehrer: (nickt zustimmend) Jeder Tisch hat 314 cm. 30 Tische

Schüler N: Hat man dann 9420 raus?

Lehrer: Mh. Lassen wir das Ergebnis erstmal noch stehen. […] (L. wendet sich an Schüler E.) Wie viel, was hast du raus?

Schüler E: (? ...).

Lehrer: Warum 30 mal 30? ... 30 Tische und denn

Schüler N: //Du musst// 314 mal 30.

Du möchtest alle deine Tische mit einer Spitze ausstatten... Und du brauchst 314,16 mal... Komma 1 6... mal....

Zwei Schüler der Gruppe haben keine Probleme, den eben errechneten Wert mit der Anzahl der Tische zu multiplizieren, während der Schüler E. zunächst die Anzahl der Tische quadrieren möchte. Der Lehrer fragt nach einer Begründung, dem Schüler E. wird aber keine Zeit für eine Antwort gelassen, da der Schüler N. und der Lehrer das richtige Vorgehen erläutern.

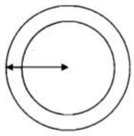
Die Bearbeitung dieser Gruppe scheint trotz der Handlungsorientierung, die eher der Veranschaulichung der realen Situation dient, sehr durch prozedurales Denken geprägt. Die Bearbeitung der Aufgabe ist als verfahrensbetont einzuschätzen. Es fällt vor allem die durchgängig starke Lehrerlenkung auf, die der Betonung der Selbstständigkeit durch den Lehrer (siehe 8.2) widerspricht.

Die Gruppen 2 und 3 konnten nicht bei der Bearbeitung dieser Aufgabe beobachtet werden. Scheinbar konnten sie die Aufgabe ohne größere Probleme lösen.

8.3.6 Aufgabe 6 ‚Größere Tischdecken'

Gruppe 1

c) Der Restaurantbesitzer will **neue Tischdecken**, die größer sind. Er will, dass der Radius **10 cm größer** ist als bei den alten.



Frage 10: Wie groß ist der **Radius** der neuen Tischdecken?

r = ___________

d = ___________

Frage 11: Wie viele cm Spitze braucht man dann für **einen Tisch**?
- Probiere mit einem neuen Kreis und einer neuen Schnur.
- Rechne aus.

Frage 12: Wie viele **m** sind das?

Frage 13: Wie viele cm Spitze sind das für **alle Tische** des Restaurants?

Frage 14: Wie viele **m** sind das?

Frage 15: **Ein m Spitze kostet 3 €.**
Wie viel kostet die Spitze für **einen Tisch**?

Frage 15: Wie viel für **alle Tische**?

Gruppe 2

e) Der Restaurantbesitzer will **neue Tischdecken**, die größer sind. Er will, dass der Radius 40 cm größer ist als bei den alten.

Frage 8: Wie groß ist der Radius der neuen Tischdecken?

r = ________cm = _______ m

Frage 9: Wie viele m² Stoff muss man für 1 Tisch kaufen?

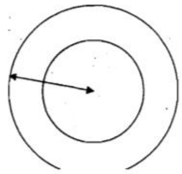


Abbildung 8.6: Aufgabe 6 ‚Größere Tischdecken'

Für diese Aufgaben gelten dieselben Begründungen wie für Aufgabe 2, da der Lehrer im Interview über die Arbeitsblätter als Ganzes spricht (siehe auch Abschnitt 8.2).

Objektive Kennzeichen der Aufgabe 6 ‚Größere Tischdecken'

Beide Aufgaben sind als rechnerische Modellierungs- und problembezogene Aufgaben einzuordnen. Sie sind zwar in denselben außermathematischen Kontext eingebunden, allerdings sind sie aus mathematischer Sicht völlig verschieden. Die Gruppe 1 soll für die Tischdecken mit vergrößertem Radius das in Aufgabe 5 bereits angewandte Verfahren wiederholen, die Berechnung des Kreisumfangs steht also im Mittelpunkt dieser Aufgabe. Die einzelnen Arbeitsschritte, inklusive der entsprechenden Umrechnungen der Maßeinheiten, sind dabei kleinschrittig vorgegeben. Ergänzend zu den schon in Aufgabe 5 erläuterten Anforderungen sollen nun von der Gruppe 1 auch die Kosten für die Spitze für einen Tisch und die Spitze für alle Tische im Restaurant berechnet werden. Dazu müssen die vorher errechneten Werte mit dem Preis der Spitze pro Meter multipliziert werden. Aufgrund der vorgegebenen Arbeitsschritte ist bei dieser Aufgabe außermathematisches Modellieren nur auf niedrigem Niveau notwendig.
Im Gegensatz dazu soll die Gruppe 2 den Flächeninhalt der Tischdecken mit dem neuen Radius berechnen. Als Hilfestellung sind Felder für die Umrechnung des Radius von der Einheit Zentimeter in die Einheit Meter vorgegeben, weshalb das außermathematische Modellierungsniveau als niedrig einzustufen ist. Der hier berechnete Radius muss lediglich in die Formel für den Flächeninhalt des Kreises eingesetzt und der Wert des Terms berechnet werden.

Analyse des Unterrichtseinsatzes der Aufgabe 6 ‚Größere Tischdecken'

Auch diese Aufgabe bearbeiten die Schülerinnen und Schüler in vom Lehrer eingeteilten, möglichst ‚leistungshomogenen' Gruppen. Es sind wieder mehr Szenen zur Aufgabenbearbeitung der Gruppe 1 zu beobachten als zur Gruppe 2, da sich der Lehrer länger bei dieser Gruppe aufhält.

Gruppe 1

U [00:40:04.28]

Schüler N: Das ist jetzt 380 also Meter haben wir ausgerechnet. So die Schnur für die neue Tischdecke... In Me, in Meter umgerechnet sind das ja ungefähr 3 Meter 80. […] Wie viele cm Spitze sind das für alle Tische des Restaurants? […] Also 3,80 m mal 30. Da sind ja 30 Tische (Lehrer nickt zustimmend). […] Ich hab jetzt eine Frage. Wir haben das jetzt ausgerechnet. 3,80 also das mal 30 sind 114. Sind das dann Spitze?

Lehrer: Also guck mal, wir sind jetzt bei Aufgabe 13. […] das solltest du in cm hinschreiben und Aufgabe 14, da musst du das nur in Meter umrechnen. Also hast du jetzt (???) 13 oder 14 ausgerechnet?

Schüler N: 13. Also 380 mal 30.

Lehrer: Ja und welche ist das dann? Wo gehört dann diese Antwort hin 114 m? […]

Schüler N: Bei Meter.

Lehrer: Aha genau siehste. Bei 14.

Die Schüler der Gruppe 1 scheinen das Verfahren aus der vorangegangenen Aufgabe gut auf diese Aufgabe übertragen zu können. Der Lehrer lenkt durch die Hinweise auf die einzelnen Fragen der Aufgabenstellung kurzzeitig sehr stark. Hier wäre auch eine Reflexion der Aufgabenstellung möglich gewesen, so dass der Schüler N. selbstständig das richtige Aufschreiben erkennt. Das prozedurale Denken steht stark im Vordergrund. Die Bearbeitung ist als verfahrensbetont einzuschätzen.

Gruppe 2

Die Gruppe 2 arbeitet völlig selbstständig an dieser Aufgabe. Es ist anzumerken, dass die Aufgabe von Gruppe 2 einfacher zu sein scheint als die Aufgabe der ‚leistungsschwächeren' Gruppe 1. Die Aufgabe der Gruppe 2 wäre gegebenenfalls auch für Gruppe 1 geeignet gewesen, um die Flächeninhaltsberechnung auf dem Arbeitsblatt der Gruppe 1 einzubauen, welches in der vorliegenden Form (siehe Anhang) lediglich den Kreisumfang thematisiert.
Der Lehrer erläutert dazu im Interview:

I [00:25:38.14]

Interviewer: Das ist nur Umfang. Und bei den anderen ist es gemischt.

Lehrer: Ja das ist richtig. Ja das ist, ich ähm... ja muss ich ganz ehrlich hab ich nichts mir bei gedacht. […] Irgendwann war das Blatt voll und äh ja da war ich für mich auch zufrieden damit, wenn sie das hinkriegen.

Hier zeigt sich, dass der Lehrer die Beschränkung des Arbeitsblattes der Gruppe 1 auf Umfangsberechnungen nicht bewusst vorgenommen hat. Er begründet dies stattdessen mit außerfachlichen Argumenten. Daraus lässt sich schließen, dass der Lehrer für die Gruppe 1 nicht die Verknüpfung von Wissen über Flächeninhalt und Umfang eines Kreises zum Ziel hatte.

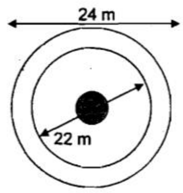
8.3.7 Aufgabe 7 ‚Streifen Teppichboden'

Gruppe 3

e) Der Teppichboden der Aussichtsplattform muss entlang der Fenster ausgebessert werden. Der Verwalter des Turms meint, dass ein **Streifen von 1 m** genügen muss.
Der Teppich kostet jetzt **11 € pro m²**.

Frage7: ______________________________

____



ganze Fläche alter Teppich

r = ______ d = ______

A = ______

bleibender Teppich

r = ______ d = ______

A =

Abbildung 8.7: Aufgabe 7 ‚Streifen Teppichboden'

Für diese Aufgabe gelten dieselben Begründungen wie für Aufgabe 2, da der Lehrer im Interview über die Arbeitsblätter als Ganzes spricht (siehe auch Abschnitt 8.2).

Objektive Kennzeichen der Aufgabe 7 ‚Streifen Teppichboden'

Diese Aufgabe ist als rechnerische Modellierungs- und problembezogene Aufgabe einzuordnen und ist in den außermathematischen Kontext des Berliner Fernsehturms eingebettet. Die in der Aufgabe zu beantwortende Frage, die naheliegend ist, müssen die Schülerinnen und Schüler selbst herleiten. Zur Berechnung der Kosten für die Erneuerung des Teppichstreifens müssen die Lernenden zunächst ein geeignetes mathematisches Modell aufstellen. Sie können den in Aufgabe 2 errechneten Wert für den gesamten Teppichboden der Aussichtsplattform verwenden, dann müssen sie aber auch den davon zu subtrahierenden Teppichboden ohne die Fläche des Aufzugschachtes berechnen. Die als Hilfestellung gegebene Zeichnung unterstützt aufgrund des eingezeichneten schwarzen Kreises in der Mitte diesen Lösungsansatz. Alternativ können die Schülerinnen und Schüler zur Bestimmung des Flächeninhaltes des zu erneuernden Streifens auch die Gesamtfläche der Plattform ohne Subtraktion des Aufzugschachtes ermitteln und hiervon den Flächeninhalt eines Kreises mit einem um einen Meter kleineren Radius abziehen. Dieser Lösungsweg wird durch die nebenstehenden Felder zum Eintragen des Radius und des Durchmessers des gesamten alten und des bleibenden Teppichs unterstützt. Es ist dabei etwas verwunderlich, dass zunächst der Radius und danach der Durchmesser in die Felder eingetragen werden soll, da jeweils der Durchmesser gegeben ist und der Radius hieraus ermittelt werden muss. Dieser muss anschließend in die Formel für den Flächeninhalt eines Kreises eingesetzt und der Wert des Terms berechnet werden. Nach der Subtraktion der entsprechenden Flächen muss der ermittelte Flächeninhalt des Teppichstreifens noch mit den Kosten für den Teppich multipliziert werden.
Trotz der durch die Hilfestellungen der Aufgaben vorgegebenen Lösungswege erfordert die Aufgabe außermathematisches Modellieren auf mittlerem Niveau, da beim Mathematisieren mehrere Schritte ausgeführt werden müssen. Innermathematisch müssen lediglich Basisfertigkeiten angewendet werden, so dass die Bestimmung des Radius aus dem Durchmesser den einzigen innermathematischen Modellierungsschritt darstellt.

Analyse des Unterrichtseinsatzes der Aufgabe 7 ‚Streifen Teppichboden'

Diese Aufgabe wird in Gruppenarbeit von der leistungsstärksten Gruppe (Gruppe 3) bearbeitet. Es konnten dabei aufgrund fehlender Lehrer-Schüler-Interaktion keine Szenen zur inhaltlichen Bearbeitung dieser Aufgabe beobachtet werden.

8.3.8 Reflexion der Gruppenarbeit

Die Bearbeitung der Arbeitsblätter in der Gruppenarbeit war ursprünglich nur für die erste der drei Unterrichtsstunden geplant. Der Lehrer verlängert aber auf Wunsch der Schülerinnen und Schüler die Bearbeitungszeit in die folgende Unterrichtsstunde hinein, da er die Gruppenarbeit nicht abbrechen wollte.

Im Anschluss an die Gruppenarbeit reflektiert der Lehrer gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern die Arbeit in den Gruppen:

U [00:48:22.18]

Lehrer: OK. Mh. Aber am Anfang so letzte Stunde da habt ihr auch am Anfang stark so euch unterhalten.

Schüler M: //Ja//... Wegen Dings äh, manche hatten einen anderen Rechenweg und andere hatten einen anderen.

Lehrer: Achso und dann habt ihr euch versucht gegenseitig zu überzeugen, welcher sinnvoller ist. Ok... Aber was ist mit Gruppe 2? […] Ward ihr euch gleich immer einig?

(Allgemeine Zustimmung der Gruppe.)

Lehrer: Hat bei euch vielleicht eine ähm Arbeitsteilung oder ähnliches stattgefunden? Oder hat jeder vor sich so hingerechnet?

Schüler G: Ne, wir haben das zusammen gemacht. […]

Lehrer: Achso, habt ihr zuerst besprochen und dann gerechnet?

Schüler G: Ja.

Lehrer: Gut Ok. (L. wendet sich Gruppe 1 zu.) Wie ist es mit euch?

Schüler N: Also wir haben auch erst besprochen, wie wir das rechnen und haben alles in den Taschenrechner eingegeben und haben ausgerechnet. […] also wir haben auch alles zusammen gemacht.

Hier zeigt sich, dass der Lehrer das Ziel des mathematischen Kommunizierens in allen Gruppen gut erreicht zu haben scheint.

Außerdem fragt der Lehrer die Schülerinnen und Schüler, ob sie sich in ihrer Leistungsgruppe richtig zugehörig gefühlt haben:

U [00:49:35.25]

Lehrer: […] Hat jemand sich äh... nicht sozusagen angemessen beurteilt gefühlt? In welcher Gruppe er sitzt... Also war jemand unzufrieden in seiner Gruppe, weil

(Allgemeine Ablehnung der Klasse.)

Lehrer: Ne? War das Ok so?

(Allgemeine Zustimmung der Klasse.) […]

Schüler G: Das war viel zu leicht für mich. […]

Lehrer: //Ja gut,// das wollte ich nur wissen. Ok alles klar. Dann kann ich nächstes Mal äh... entsprechend in eine andere Gruppe oder die Aufgabe etwas anders gestalten.

Der Lehrer scheint den Leistungsstand der Lernenden und den Schwierigkeitsgrad der Aufgaben größtenteils gut eingeschätzt zu haben und reflektiert sein Handeln kritisch mit Bezug zu späteren Unterrichtsplanungen. Auch die objektiven Kennzeichen der Aufgaben weisen auf die verschiedenen Anforderungen der Aufgaben für die verschiedenen Leistungsgruppen hin.

8.3.9 Geplante, aber nicht durchgeführte Unterrichtsphase

In der schriftlichen Unterrichtsplanung des Lehrers beschreibt er im Anschluss an die Gruppenarbeit ein von ihm sogenanntes Puzzle. Er wollte Karten mit verschiedenen Formelvariablen (A, π, d, r, x, …) und Operationszeichen an die Schülerinnen und Schüler verteilen. Die Lernenden sollten sich dann durch den Raum bewegen und versuchen, möglichst schnell eine Formel im Zusammenhang mit dem Kreis (Flächeninhalt, Umfang, Radius, Durchmesser) zu bilden. Dieses Puzzle wird im Unterricht aber nicht durchgeführt, stattdessen leitet der Lehrer direkt von der Gruppenarbeit zur Stationsarbeit über.

8.3.10 Station 0 ‚Einführung/Kontrollzettel'

Station 0

Einführung/Kontrollzettel

U-Fach: Mathematik
U-Einheit: Kreise und Dreiecke
U-Stunde: Übungsstunde/Zusammenfassung: Kreise

Name:

Pflichtstationen		alleine	mit Hilfe	gar nicht
Station 1	Begriffe	☐	☐	☐
Station 2	Kreismuster fortsetzen	☐	☐	☐
Station 3	Kreisumfang	☐	☐	☐
Station 4	Kreisfläche	☐	☐	☐
Station 5	Zuordnung (Aufgabe 1)	☐	☐	☐
Station 6	Richtig oder Falsch	☐	☐	☐
Zusatzstationen				
Station 5	Zuordnung (Aufgabe2) **auch Partner möglich**	☐	☐	☐
Station 7	Zusatz bunt gemischt	☐	☐	☐

Abbildung 8.8: Station 0 ‚Einführung/Kontrollzettel'

Die Stationsarbeit besteht aus sieben verschiedenen Stationen mit je ein oder zwei Aufgaben zum Themengebiet des Kreises. Für jede Station liegt ein Arbeitsblatt in mehrfacher Ausführung auf der Fensterbank bereit, welches die Schülerinnen und Schüler in beliebiger Reihenfolge an ihrem Einzelarbeitsplatz bearbeiten. Zu Beginn der Stationsarbeit wird ein Kontrollzettel (siehe Abbildung 8.8) ausgeteilt, auf dem alle Stationen, teilweise sogar in die einzelnen Aufgaben unterteilt, aufgelistet sind. Der Kontrollzettel wird auch ausführlich im Plenum besprochen. Auf dem Kontrollzettel ist unter anderem ersichtlich, welche Stationen von allen Schülerinnen und Schülern bearbeitet werden sollen und welche Stationen bzw. Aufgaben zusätzlich bearbeitet werden können (Aufgabe 2 von Station 5 und Station 7). Außerdem enthält der Kontrollzettel einen Hinweis, dass die Aufgabe 2 der Station 5 im Gegensatz zu allen anderen Aufgaben gemeinsam mit einem Partner bearbeitet werden darf.
Der Lehrer begründet die Stationsarbeit insgesamt wie folgt:

I [00:27:22.24]

Lehrer: Also die Aufgaben sind so ausgewählt gewesen, dass wir ähm also die haben halt einfach eine Zusammenfassung aller Inhalte, die wir halt hatten. Also das ist der eigentliche Abschluss gewesen.

Hier zeigt sich, dass der Lehrer zumindest implizit das bisher Gelernte vernetzen und strukturieren möchte.
Dies zeigt sich auch in folgendem Abschnitt aus dem Unterricht:

U [00:52:39.08]

Lehrer: So, haben alle bekommen? ... also, ich hab praktisch, so in der Art Zusammenfassung des Themas gemacht, zusammengestellt, was wir bis jetzt gemacht haben, ihr, wo, ich hab verzichtet darauf, eine Lernzielkontrolle oder einen Test zu schreiben, sondern hoffe, dass wir dann damit zurechtkommen.

Darüber hinaus zeigt sich hier, dass die Stationsarbeit als Lernzielkontrolle anstelle einer Klassenarbeit dient.
Die Lösungen der Aufgaben werden wieder an der Tafel ausgehängt. Dies erscheint aber dem Ziel der Lernzielkontrolle zu widersprechen, denn der Lehrer kann bei der Durchsicht der Mappen nicht entscheiden, ob die Lernenden die Lösungen abgeschrieben oder selbstständig erarbeitet haben. Hier zeigt sich daher eine fehlende Verknüpfung von Methodenentscheidungen und fachdidaktischem Wissen.

8.3.11 Station 1 ‚Begriffe'

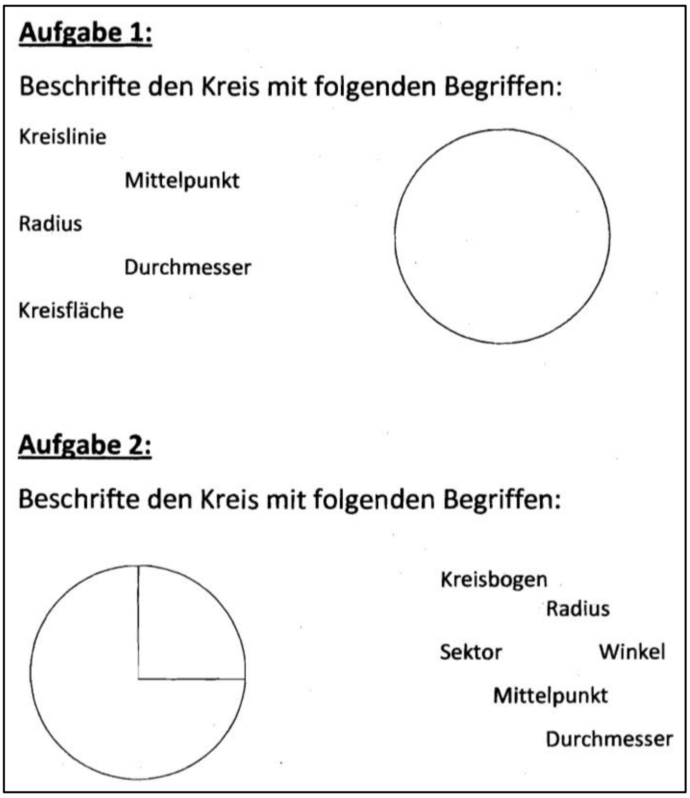


Abbildung 8.9: Station 1 ‚Begriffe'

Die Auswahl dieser Aufgaben begründet der Lehrer wie folgt:

I [00:27:22.24]

Lehrer: […] die sollten einfach wissen, Begriffe zuordnen. […] Dem Schüler muss einfach immer bewusst werden, es gibt halt bestimmte Begriffe, die beschreiben etwas, und es gibt einen bestimmten Zusammenhang zwischen diesen Begriffen oder die gehören irgendwo hin. So und das ist wie in Englisch und deswegen ist das so auch aufgebaut gewesen. So Aufgabe 1 einfach Zuordnung von Vokabeln, mathematischen Vokabeln.

Der Lehrer spricht hier ganz deutlich das Faktenwissen an, welches in dieser Aufgabe vor allem aktiviert wird (siehe objektive Kennzeichen). Er kann scheinbar den Anspruchsgehalt dieser Aufgabe gut einschätzen. Er spricht aber auch das begriffliche Denken an (Zusammenhang zwischen Begriffen). Dies wird in dieser Aufgabe aber nicht direkt gefordert (siehe objektive Kennzeichen).

Objektive Kennzeichen der Station 1 ‚Begriffe'

Diese Aufgabe ist als technische Aufgabe mit Fokus auf Faktenwissen einzuordnen, da sie lediglich die Aktivierung von Faktenwissen erfordert. Die Schülerinnen und Schüler müssen die entsprechenden geometrischen Begriffe, die alle aus der Wisseneinheit des Kreises stammen, der jeweiligen Darstellung des Kreises zuordnen. Teilweise müssen sie dafür zunächst die gegebene Darstellung erweitern, indem sie den Durchmesser und den Radius einzeichnen. Es müssen jedoch keine Verbindungen zwischen den einzelnen Begriffen hergestellt werden.

Analyse des Unterrichtseinsatzes der Station 1 ‚Begriffe'

Die Lernenden bearbeiten diese Aufgabe in Einzelarbeit (siehe 8.3.10). Den Schülerinnen und Schülern ist teilweise nicht ganz klar, wie sie die Lösung dieser Aufgabe aufschreiben sollen. Des Weiteren fragen zwei verschiedene Schüler nach der Bedeutung des Begriffes ‚Kreisbogen':

Schüler K: //Ja.// Aber was ist ein Kreisbogen?

Lehrer: Ein ein, ich schlage einen Bogen. […] Das ist dann immer für, wie groß ist dann immer der Anteil des Kreises? Ein Bruchteil, ne. Ein Kreisbogen. Oder Flitzebogen kennst du. […] Oder Bogen zum Schießen. Das ist immer ein Teil des Kreises.

Der Lehrer nennt beiden Schülern wie hier einmal gezeigt mehrere Alltagsbegriffe, in denen das Wort Bogen vorkommt und auch weist darauf hin, dass der Kreisbogen ein Teil des Kreises ist. Es werden dadurch aber nicht die mathematischen Eigenschaften eines Kreisbogens angesprochen.
Zwei Schüler können mit dem Begriffen Sektor nichts anfangen, wie an folgendem Transkriptausschnitt einmal beispielhaft gezeigt wird:
U [01:31:19.12]

Schüler A: Was ist ein Sektor?
Lehrer: Ähm ein Teil.
Schüler A: So ein Viertel so?
(Lehrer macht eine zustimmende Handbewegung.)
Schüler A: Und ein Kreisbogen? Das ist der, die Rundform. […] So wie der Umfang.
Lehrer: Genau, aber nur ein Teil des Umfangs.
Schüler A: So vom Winkel jetzt her. […] Vom Sektor.

Der Lehrer übersetzt den Begriff Sektor direkt als Teil des Ganzen. Der Schüler A. stellt anschließend selbstständig und ohne Aufforderung durch den Lehrer Verbindungen zwischen den Begriffen ‚Sektor' und ‚Kreisbogen' her und aktiviert daher neben dem Faktenwissen auch begriffliches Denken. Insbesondere argumentiert der Schüler A. im Gegensatz zum Lehrer anhand mathematischer Argumente. Die Bearbeitung der Aufgabe ist bei diesem Schüler als verständnisbetont einzuschätzen, für die anderen Schülerinnen und Schüler ist aufgrund der geringen Beobachtungen zu dieser Aufgabe keine Aussage zur Art der Bearbeitung möglich. Es wird beim Schüler A. das vom Lehrer im Interview benannte Denken in Zusammenhängen zwischen den Begriffen sichtbar, welches in der Aufgabenstellung nicht direkt gefordert ist.

8.3.12 Station 2 ‚Kreismuster fortsetzen'

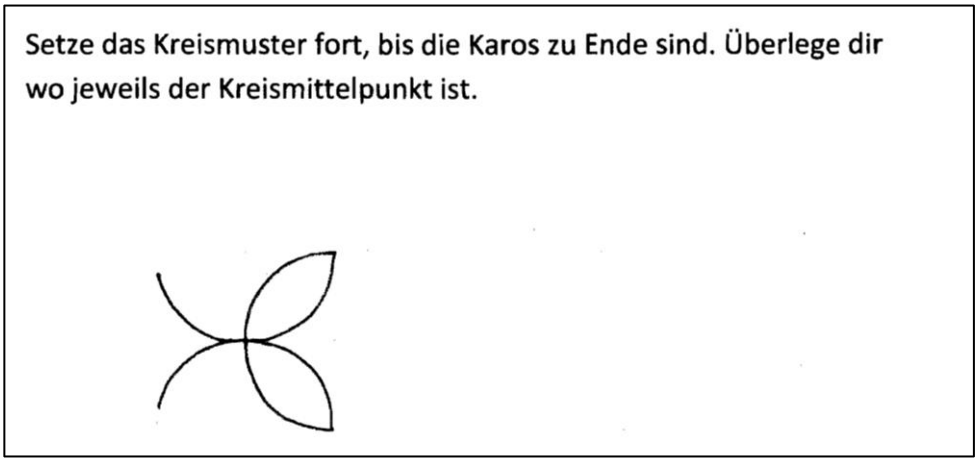


Abbildung 8.10: Station ‚Kreismuster fortsetzen'

Der Lehrer begründet den Einsatz dieser Aufgabe wie folgt:

> I [00:30:29.12] Lehrer: Äh weil hier halt bestimmte mathematische Eigenschaften halt zu Tage treten, halt nämlich beispielsweise die Spiegelung. […] sie müssen ja eine Transferleistung, wie geht's weiter. So, wo setzten sie den Mittelpunkt an. Sie müssen ja eine geometrische Abstraktion müssen sie ja halt und ich finde das ungemein wichtig halt irgendwie diese Abstraktion, die Fortsetzung und auch gedanklich.

Der Lehrer spricht hier explizit nicht nur das Anwenden von Prozeduren des Zeichnens, sondern auch die Reflexion der Eigenschaften der Figur und damit begriffliches Denken an. Er erkennt also das Potenzial der Aufgabe zum begrifflichen Denken (vgl. objektive Kennzeichen)

Ursprünglich hat der Lehrer einen karierten Hintergrund für die Zeichnung gewählt, dieser wurde allerdings aufgrund technischer Probleme auf dem Arbeitsblatt für die Schülerinnen und Schüler nicht mit kopiert.

Objektive Kennzeichen der Station 2 ‚Kreismuster fortsetzen'

Die Station 2 ist als begriffliche Modellierungs- und problembezogene Aufgabe einzuschätzen. Zum Lösen dieser Aufgabe müssen die Schülerinnen und Schüler zunächst die Eigenschaften des vorgegebenen Musters analysieren. Den Hilfestellungen des Lehrers im Unterricht ist zu entnehmen, dass es sich hier jeweils um Halbkreise handeln soll. Allerdings sind zwei der in der Aufgabenstellung gegebenen Kreisbögen keine Halbkreise. Hierdurch wird die Schwierigkeit des Fortsetzens des Musters deutlich erhöht, falls ein Schüler/eine Schülerin die Aufgabenstellung genau nimmt und nicht mit Halbkreisen zeichnet. Nehmen die Schülerinnen und Schüler an, dass es sich jeweils um Halbkreise mit demselben Radius handelt, können sie zunächst die Lage der jeweiligen Mittelpunkte bestimmen sowie die Lage der Kreise zueinander reflektieren. Da durch die fehlenden Karos keine Richtung der Fortsetzung des Musters vorgegeben ist, können Sie das Muster entweder zu Seite, nach unten oder ‚flächig', also sowohl horizontal als auch vertikal, fortsetzen. Dazu benötigen sie einerseits händische Fähigkeiten im Umgang mit einem Zirkel, aber auch Wissen über Symmetrien und Spiegelungen. Dies erfordert innermathematisches Modellieren auf mittlerem Niveau. Außerdem werden durch den reflektiven Umgang mit den Eigenschaften des Kreismusters mathematische Darstellungen auf hohem Niveau verwendet.

Analyse des Unterrichtseinsatzes der Station 2 ‚Kreismuster fortsetzen'

Der Lehrer weist zu Beginn der Stationsarbeit auf die fehlenden Karos hin und überlegt gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern mögliche Lösungen dieses Problems. Die Lernenden schlagen das Unterlegen eines karrierten Blattes vor, der Lehrer gibt den Hinweis, parallele Hilfslinien einzuzeichnen. Die Lernenden bearbeiten diese Aufgabe in Einzelarbeit (siehe 8.3.10). Der Schüler D. weiß nicht genau, wie er bei dieser Aufgabe anfangen soll und geht zum Lehrer, der am Pult sitzt. Dieser erläutert dem Schüler D. das Einzeichnen dreier paralleler Hilfslinien und deutet mit einem Bleistift die Fortsetzung des Kreismusters an, ohne die Linien tatsächlich zu zeichnen (vgl. Abbildung 8.11).

U [01:02:14.26]

Lehrer: Ja ja so weitermachen. Du hast jetzt äh... Jetzt machen wir eine Hilfslinie...... Du machst jetzt folgendes. (? ...) auf diesem Kreis, dann zeichnest du den. Dann hier den nächsten so und den nächsten so und dann so und so (L. deutet an, wie das Muster bei Station 2, Aufgabe 1 fortgeführt wird.).

Schüler D: Also immer so weiter.

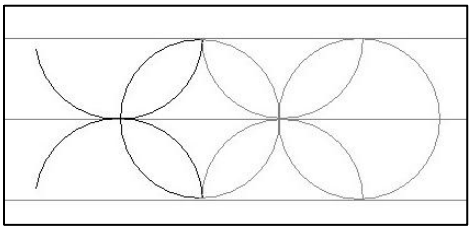


Abbildung 8.11: vom Lehrer vorgeschlagene Lösung der Station 2

Der Lehrer lenkt hier sehr stark und gibt dem Schüler die Lösung vor. Insbesondere wird an dieser Stelle deutlich, welche Lösung der Lehrer von den Schülerinnen und Schülern erwartet. Die Eigenschaften des Kreismusters werden kaum reflektiert, es wird scheinbar nur prozedurales Denken initiiert. Dies widerspricht der oben genannten Aufgabenbegründung des Lehrers.
Kurze Zeit später beobachtet der Lehrer den Schüler D bei der Lösung dieser Aufgabe. Abgesehen von einigen technischen Problemen aufgrund eines defekten Zirkels kann der Schüler D. den vom Lehrer vorgegebenen Lösungsweg nachzeichnen (vgl. Abbildung 8.11).
Der Schüler M. versucht die vorgegebene Figur zu kopieren. Dabei hat er einige Zeichnungen erstellt, die mit der gegebenen Figur nur schwer zu vergleichen sind (siehe Abbildung 8.12 unten), aber auch eine Darstellung, die eine kleine Erweiterung der vorgegebenen Figur enthält (siehe Abbildung 8.12 oben rechts).

I [01:12:38.26]

Lehrer: Dann machst du hier. Das musst du (? ...) (deutet mit dem Zirkel die Fortsetzung des Musters an)

Schüler M: Achso, ich dachte, wir sollen das neu machen.

Lehrer: Setze fort.

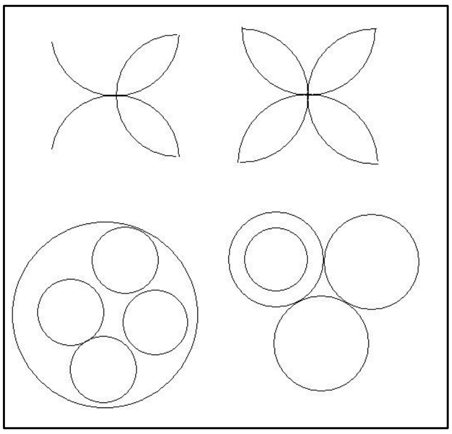


Abbildung 8.12: Schülerlösung zu Station 2

Der Lehrer geht auf die Fehlversuche des Schülers in keiner Weise ein, sondern gibt den Lösungsweg ähnlich wie bei Schüler D. vor. Er lenkt auch hier wieder stark und reflektiert in keiner Weise die Schülerlösung.
Ein weiterer Schüler zeichnet ebenfalls die Figur separat nach, anstatt das Kreismuster fortzusetzen. Er hat dreimal die Figur oben rechts in Abbildung 8.12 gezeichnet.

U [01:25:39.25]

Lehrer: Ja du mach einfach weiter. Ist nicht so wild.

Im Gegensatz zum Schüler M. weist der Lehrer diesen Schüler nicht auf das falsche Vorgehen hin, sondern fordert ihn zum Weitermachen auf.
Auch ein weiterer Schüler hat die Aufgabenstellung nicht im Sinne des Lehrers verstanden, er hat lediglich einen Halbkreis in die vorgegebene Figur eingezeichnet, so dass eine Figur wie in Abbildung 8.12 oben rechts entsteht und glaubt, damit die Aufgabe vollständig gelöst

zu haben. Die Schülerinnen und Schüler kamen offensichtlich verbreitet nicht mit der Aufgabe zurecht. Es ist aber fraglich, ob sie die Aufgabe mit vorgegebenen Karos besser hätten lösen können, da die beobachteten Schwierigkeiten zum Großteil auch bei den vorgegebenen Karos hätten auftreten können.
Im Interview erläutert der Lehrer, dass diese Aufgabe überhaupt nicht in seinem Sinne funktioniert hat:

I [00:28:51.13]

Lehrer: Das hier Aufgabe äh Aufgabe Station 2 ist halt voll in die Hose gegangen. […] Ein oder zwei die haben tatsächlich auch in dieser Art und Weise in einem bestimmten Abstand das auch fortgesetzt, aber nicht parkettiert. Also so eigentlich sollte das. […] Und da ist mir dann hier jetzt bewusst geworden, dass sie das noch nicht gut genug können. Also so jetzt in der Stationsarbeit.

Interviewer: Was noch nicht gut können?

Lehrer: //Dieses// Parkettieren halt praktisch von Kreisflächen zeichnen und etc. Das das also ich habs massivst unterschätzt, also dass die das nicht können. Es ist auch so aufgegriffen worden, wir haben das gemacht und zum Beispiel heute haben wir auch ein Arbeitsblatt dazu gemacht, zum Zeichnen, Umgang mit dem Zirkel und nochmal diese ganzen Basics quasi.

Der Lehrer erkennt selbst, dass er die Fähigkeiten der Lernenden falsch eingeschätzt hat, er reflektiert sein Handeln und die Leistungen der Lernenden kritisch und nutzt diese Erkenntnisse für weitere Unterrichtsplanungen. Er scheint im Nachhinein die Probleme der Schülerinnen und Schüler gut nachzeichnen zu können. Allerdings verwendet er den Begriff des Parkettierens an dieser Stelle falsch.
Da die Schülerinnen und Schüler größtenteils den vom Lehrer vorgegebenen Lösungsweg nachahmen und in keiner Weise die Eigenschaften der Figuren angesprochen und reflektiert werden, ist die Bearbeitung der Aufgabe als verfahrensbetont einzuschätzen. Das Potenzial der Aufgabe zum begrifflichen Denken wird nicht genutzt, obwohl der Lehrer in der Begründung der Aufgabenauswahl zeigt, dass er das Potenzial der Aufgabe zum Denken in Zusammenhängen erkennt.

8.3.13 Station 3 ‚Kreisumfang‘

Berechne den Umfang mit Hilfe der Formel. Schreibe die Rechnung <u>mit der Formel</u> auf. Kontrolliere dich anschließend mit dem Lösungsblatt!

a) $r = 12$ cm

b) $d = 13$ cm

Hilfe:

$U = 2 \cdot r \cdot \pi$

$U = d \cdot \pi$

Lösungshinweise:

40,82 cm
75,36 cm

Abbildung 8.13: Station 3 ‚Kreisumfang‘

Diese Aufgabe stellte der Lehrer, ebenso wie die Station 4, aus folgenden Gründen:

I [00:31:23.13]

Lehrer: […] Haben sie sogar Lösungshinweise auf dem Zettel gehabt und mir gings dadrum eigentlich tatsächlich, dass sie ähm... nicht damit Zeit verschwenden, also so Angst haben: Oh ich weiß nicht, ob ich das richtig oder falsch gerechnet hab. Mir ging es da darum tatsächlich um das reine Rechenverfahren, nämlich dieses ähm äh A gleich und dann die Variablen hinschreiben, später für die Variablen einsetzen, das mit dem gegeben, gesucht. Also dieses quasi Kochrezept, Mathematik nach Kochrezept, darum ging es mir einfach.

Der Lehrer betont ganz deutlich das prozedurale Denken für die Bearbeitung dieser Aufgabe.

Objektive Kennzeichen der Station 3 ‚Kreisumfang'

Die Station 3 ist als technische Aufgabe mit dem Fokus auf Fertigkeiten einzuordnen. Die Schülerinnen und Schüler müssen in beiden Teilaufgaben zunächst die passende der vorgegebenen Formeln auswählen, den entsprechenden Wert einsetzten und den Wert des Terms berechnen. Die Lernenden werden explizit dazu aufgefordert, den Lösungsweg zu dokumentieren. Es sind keinerlei Modellierungen oder Argumentationen nötig. Der Hinweis auf das Lösungsblatt ist in der Aufgabenstellung überflüssig, da die Lösungen schon auf dem Aufgabenblatt angegeben sind.

Analyse des Unterrichtseinsatzes der Station 3 ‚Kreisumfang'

Diese Aufgabe wird von den Lernenden in Einzelarbeit bearbeitet (siehe 8.3.10).

U [01:03:48.20]

Schüler M: Herr L., wie war noch mal die Formel für Umfang? […] Der Radius ist ja nur die Hälfte... vom ganzen Kreis. […] Ja und, also der Umfang, das ist ja komplett der ganze Kreis.

Lehrer: Mhmh. Guck mal, was da steht (L. zeigt auf die "Hilfe" auf dem Aufgabenzettel zu Station 3.).

Die Äußerungen des Schülers deuten darauf hin, dass er die Begriffe Umfang und Radius noch nicht richtig konzeptualisiert hat. Der Lehrer geht aber nicht auf die begrifflichen Probleme des Schülers ein, sondern weist lediglich auf die vorgegebenen Formeln für den Umfang eines Kreises hin. Dadurch wird vor allem Faktenwissen aktiviert.

Der Schüler N. konnte die Aufgabe ohne Probleme lösen, hat aber den Rechenweg nicht ausführlich aufgeschrieben:

U [01:06:31.16]

Lehrer: […] Ähm wichtig ist für mich, dass du auch die Rechnung aufschreibst. […] Dann verstehst du, was du gemacht hast, und ich versteh das dann auch, ja.

Hier fördert der Lehrer indirekt die Erläuterung und auch die Reflexion des Lösungsweges durch den Schüler N.

Auch der Schüler A. wird darauf hingewiesen, zumindest eine der beiden Aufgaben ausführlich und mit den entsprechenden Einheiten aufzuschreiben. Diese Beobachtungen sind konform zu dem vom Lehrer geäußerten Fokus auf den Lösungsweg.

Der Schüler G. kann die Aufgaben ebenfalls ohne Probleme lösen, allerdings hat er andere Werte als in den Lösungshinweisen angegeben als Ergebnis. Der Lehrer vollzieht gemeinsam mit dem Schüler die Rechnung nach und erkennt, dass er die Lösungshinweise mit dem angenäherten Wert von π als 3,14 berechnet hat, da er bei der Vorbereitung noch nicht wusste, dass den Schülerinnen und Schüler zum Zeitpunkt der videografierten Stunden bereits der Taschenrechner zur Verfügung steht. Er weist die Klasse darauf hin, dass die Lösungen auf den Lösungsblättern an der Tafel in den Nachkommastellen vom tatsächlichen Ergebnis abweichen können, da er die Lösungen nicht mit dem Taschenrechner berechnet hat. Zu-

sätzlich berechnet er im Laufe des Unterrichts die Lösungen neu und korrigiert die Lösungsblätter.
Es fällt auf, dass der Schüler N. zuvor keine Abweichung von den Lösungen des Lehrers hatte. Dieser Schüler hat scheinbar ebenfalls mit einer Annäherung von π gerechnet. Da er auch keinen Lösungsweg aufgeschrieben hat (s.o.), ist es auch möglich, dass der Schüler N. die Lösungshinweise ohne Rechnung übernommen hat.
Bei dieser Aufgabe lenkt der Lehrer zwar teilweise stark, vor allem durch den Hinweis auf die vorher schon vorgegebenen Hilfestellungen, größtenteils arbeiten die Schülerinnen und Schüler aber sehr selbstständig an dieser Aufgabe. Allerdings ist durch die starken Vorgaben auf dem Lösungsblatt fast keine kognitive Selbstständigkeit nötig/möglich. Die Bearbeitung der Aufgabe ist sehr verfahrensbetont. Der Lehrer erkennt dies selbst und erläutert den prozeduralen Charakter der Aufgabe ausführlich im Interview (siehe Seite 147).

8.3.14 Station 4 ‚Kreisfläche'

Flächeninhalt des Kreises

Berechne den Flächeninhalt mit Hilfe der Formel. Schreibe die Rechnung mit der Formel auf. Runde auf zwei Stellen nach dem Komma. Kontrolliere dich anschließend mit dem Lösungsblatt!

a) r = 3 cm

b) d = 7,4 cm

c) d = 9,2 cm

Hilfe:

$A = r \cdot r \cdot \pi$

$r = d : 2$

Lösungshinweise:

$A = 42{,}99\ cm^2$

$A = 66{,}44\ cm^2$

$A = 28{,}26\ cm^2$

Abbildung 8.14: Station 4 ‚Kreisfläche'

Für die Begründung der Aufgabenauswahl gelten dieselben Argumente des Lehrers wie für Station 3, da der Lehrer im Interview über beide Aufgaben gemeinsam spricht.

Objektive Kennzeichen der Station 4 ‚Kreisfläche'

Die Station 4 ist als technische Aufgabe mit dem Fokus auf Fertigkeiten einzuordnen. Bei Teilaufgabe a) ist dabei nur ein Bearbeitungsschritt nötig, während bei den Teilaufgaben b) und c) zunächst der Radius berechnet werden muss. Die Formel hierfür ist vorgegeben, so dass der Wert für den Durchmesser in die Formel eingesetzt und der Radius berechnet werden kann. In allen drei Teilaufgaben muss nun der Wert für den Radius in die gegebene Formel für den Flächeninhalt eingesetzt werden. Da die Faktoren in der Formel einzeln aufgeführt sind ($r \cdot r$ anstelle von r^2), ist den Lernenden eine Hilfestellung gegeben: Es wird direkt deutlich, dass der Radius zweimal als Faktor auftaucht. Damit wird einem gängigen Schülerfehler, der Multiplikation mit 2 anstelle des Quadrierens, entgegengewirkt. Die Schülerinnen und Schüler werden explizit dazu aufgefordert, den Lösungsweg zu dokumentieren und das Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma zu runden. Es sind keinerlei Modellierungen oder Argumentationen nötig. Der Hinweis auf das Lösungsblatt ist in der Aufgabenstellung überflüssig, da die Lösungen schon auf dem Aufgabenblatt angegeben sind.

Analyse des Unterrichtseinsatzes der Station 4 ‚Kreisfläche'

Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten diese Aufgabe in Einzelarbeit (siehe 8.3.10). Der Schüler G. hat dabei Probleme, aus dem gegebenen Durchmesser den Radius zu bestimmen.

Schüler G: Ich weiß jetzt nicht mehr, wie man die Formel löst.
Lehrer: […] Guck mal (L. zeigt auf Formel für Radius.), d durch 2 hast du ja r und dann kannst du das da oben doch einsetzen... Also musst du
Schüler G: Also ich muss jetzt das (S. zeigt auf Aufgabenteil b).) geteilt durch 2 und dann ist
Lehrer: //Ja,// ist doch der Durchmesser.

Der Lehrer lenkt hier stark und gibt zusätzlich zum Hinweis auf die vorgegebene Formel noch weitere Hinweise zum Einsetzten der Werte. Der Fokus liegt auf prozeduralem Denken.
Ansonsten haben die Schülerinnen und Schüler mit der Bearbeitung dieser Aufgabe kaum Probleme. Der Lehrer beobachtet die Lernenden teilweise bei der Bearbeitung ohne einzugreifen. Er fordert aber wie bei Station 3 mehrfach die Schülerinnen und Schüler dazu auf, zumindest für eine Teilaufgabe den Lösungsweg ausführlich aufzuschreiben:

U [01:20:35.25]
Lehrer: […] Ich würde mich freuen, wenn du zumindest bei einer Aufgabe äh mal so den kompletten Rechenweg aufschreibst, weißt du. So wie wir das eigentlich gelernt haben. Wenigstens eine Aufgabe. Das wär schon toll.

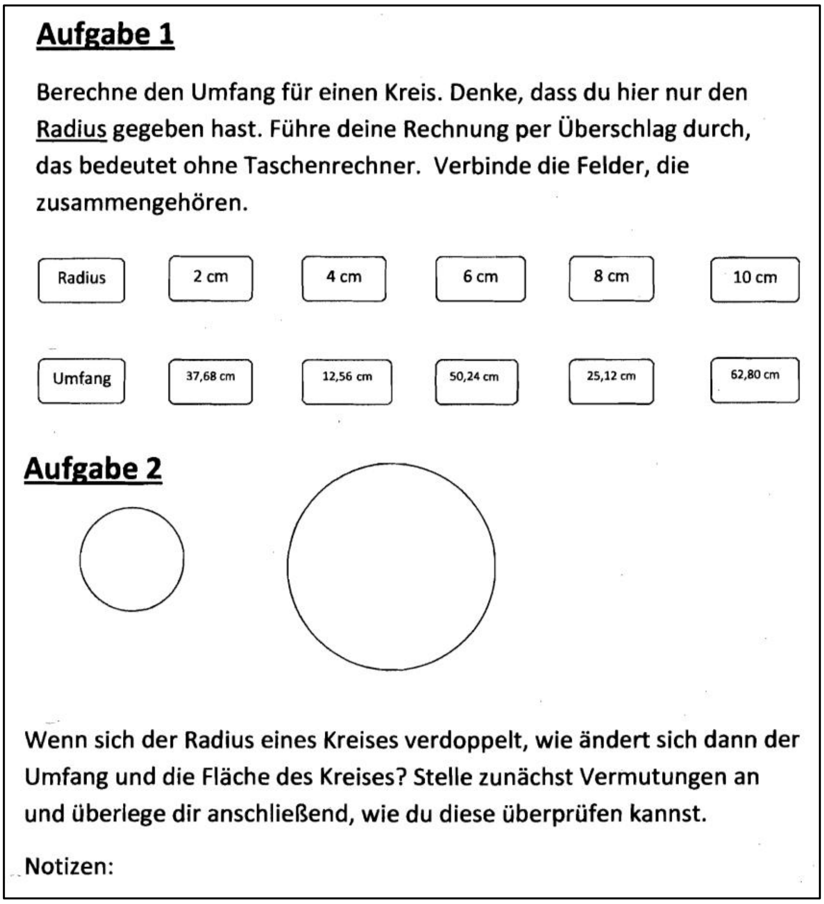
Hier zeigt sich explizit, dass die Lernenden bereits bekannte Verfahren wiederholen sollen, es werden also Verbindungen zum Vorwissen hergestellt. Außerdem fördert der Lehrer hier konsistent zu dem von ihm benannten Fokus auf den Rechenweg (siehe Seite 147) das genaue Formulieren des Lösungsweges.
Die Lernenden unterstützen sich auch gegenseitig bei der Bearbeitung. Der Schüler M. erklärt beispielsweise dem Schüler N. den Rechenweg:

U [01:29:14.22]
Schüler M: (Schüler M. steht am Tisch von Schüler N.) Dann rechnest du 3,5 mal 3,5 mal π.
Schüler N: Achso. Gleich 3,5 mal 3,5
Schüler M: Mal π.
Schüler N: Mal π gleich
Schüler M: Das ist das Ergebnis. Und da machst du das genauso.

Hier arbeiten die Schüler selbstständig, wobei die Prozeduren im Vordergrund stehen.
Insgesamt lenkt der Lehrer bei dieser Aufgabe teilweise stark, vor allem durch den Hinweis auf die vorher schon vorgegebenen Hilfestellungen. Größtenteils arbeiten die Schülerinnen

und Schüler aber sehr selbstständig an dieser Aufgabe. Da der Lehrer den Lösungsweg durch die Vorgabe der Formeln auf dem Arbeitsblatt schon stark vorstrukturiert hat, arbeiten die Lernenden aber nicht kognitiv selbstständig an der Aufgabe. Durch den Fokus auf die anzuwendenden Prozeduren ist die Bearbeitung sehr verfahrensbetont. Der Lehrer erkennt dies selbst und erläutert den prozeduralen Charakter der Aufgabe ausführlich im Interview (siehe Seite 147).

8.3.15 Station 5 ‚Zuordnung'



Aufgabe 1

Berechne den Umfang für einen Kreis. Denke, dass du hier nur den Radius gegeben hast. Führe deine Rechnung per Überschlag durch, das bedeutet ohne Taschenrechner. Verbinde die Felder, die zusammengehören.

Radius	2 cm	4 cm	6 cm	8 cm	10 cm
Umfang	37,68 cm	12,56 cm	50,24 cm	25,12 cm	62,80 cm

Aufgabe 2

Wenn sich der Radius eines Kreises verdoppelt, wie ändert sich dann der Umfang und die Fläche des Kreises? Stelle zunächst Vermutungen an und überlege dir anschließend, wie du diese überprüfen kannst.

Notizen:

Abbildung 8.15: Station 5 ‚Zuordnung'

Die Aufgabe 2 der Station 5 wählte der Lehrer aus einem Pool von im Rahmen dieser Untersuchung vorgegeben Aufgaben aus (siehe 7.3.1).

I [00:32:31.07] Lehrer: […] ich hab mit Absicht die Aufgaben so gewählt, äh, das im im Grunde genommen, die Aufgabe 1 war meine indirekte Hilfestellung um halt äh, einen Bezug zu der Aufgabe 2 herzustellen. Weil ich hatte Befürchtungen, dass sie das nicht hinkriegen, also so, also ich hätte, also ich denke mal die Leistungsstarken, hätten das hingekriegt, aber die Leistungsschwächeren hätten da Probleme gehabt, und deshalb hab ich halt diese Aufgabe vorgeschaltet.

Hier wird, ähnlich wie schon bei der Erläuterung der Gruppenarbeit, deutlich, dass sich der Lehrer bei der Unterrichtsplanung ausführliche Gedanken über den Schwierigkeitsgrad der Aufgaben macht und dementsprechend Hilfestellungen auswählt.

Objektive Kennzeichen der Station 5 ‚Zuordnung'

Je nach Art der Bearbeitung ist die Aufgabe 1 als technische Aufgabe mit dem Fokus auf Fertigkeiten oder Faktenwissen oder auch als begriffliche Modellierungs- und problembezogene Aufgabe einzuordnen. Die Schülerinnen und Schüler werden aufgefordert, ohne Taschenrechner überschlagsmäßig den Umfang der Kreise mit angegebenem Radius zu berechnen und dem entsprechenden vorgegebenen Werten für den Umfang eines Kreises zuzuordnen. Sie benötigen hierzu die Formel für den Umfang eines Kreises bei vorgegebenem Radius und eine entsprechende Annäherung für die Zahl π. In dieser Bearbeitungsform liegt der Fokus auf den Fertigkeiten. Die Schülerinnen und Schüler können aber auch argumentieren, dass sich der Umfang eines Kreises vergrößert, wenn sich der Radius vergrößert und mithilfe dieser Argumentation die Radien und Umfänge ohne Rechnung ihrer Größe nach sortieren und zuordnen. Bei dieser Bearbeitungsmöglichkeit wird eher begriffliches Denken angesprochen. Es ist aber insbesondere denkbar, dass die Vergrößerung des Umfangs bei größerem Radius als Faktenwissen aktiviert oder intuitiv vorausgesetzt wird, so dass die Aufgabe auch mit einem Fokus auf Faktenwissen bearbeitet werden kann.

Bei der Aufgabe 2 handelt es sich immer um eine begriffliche Modellierungs- und problembezogene Aufgabe. Die mathematischen Gegenstände Kreisumfang und Flächeninhalt eines Kreises werden gleichzeitig thematisiert. Da den Schülerinnen und Schülern die Formeln für den Umfang und den Flächeninhalt eines Kreises bereits bekannt sind, können sie beispielsweise durch Einsetzen des doppelten Radius und anschließenden algebraischen Umformungen allgemein die Verdoppelung des Umfangs und die Vervierfachung des Flächeninhaltes begründen (siehe Abbildung 8.16). Dies erfordert sowohl innermathematisches Modellieren als auch Argumentieren auf niedrigem Niveau. Es ist aber denkbar, auf vielfältige andere Art und Weise zu begründeten Vermutungen zu gelangen, wobei je nach gewählter Strategie innermathematisches Modellieren und Argumentieren auch auf mittlerem bis hohem Niveau möglich ist.

$$\boxed{\begin{aligned} U_2 &= 2\pi\cdot(2r) = 2\cdot(2\pi r) = 2U_1 \\ A_2 &= \pi\cdot(2r)^2 = 4\cdot(\pi r^2) = 4A_1 \end{aligned}}$$

Abbildung 8.16: Algebraische Lösung der Aufgabe 2 von Station 5

So können die Schülerinnen und Schüler anhand mehrerer Beispiele, die sie berechnen, zu der Erkenntnis gelangen, dass sich der Umfang des Kreises verdoppelt, der Flächeninhalt allerdings vervierfacht. Zwei Beispiele sind schon in Aufgabe 1 der Station 5 vorgegeben. Es ist allerdings hervorzuheben, dass in der Mathematik ein Beweis anhand vieler Beispiele nicht ausreicht, so dass zu einer vollständigen Lösung der Aufgabe mindestens anhand der Beispiele begründet werden muss, warum die Vermutungen allgemeingültig sind.

Die Lernenden können auch mithilfe der abgebildeten Kreise argumentieren, dass der kleine Kreis ungefähr viermal in den großen Kreis hineinpasst und so auf eine Vermutung über die Änderung des Flächeninhaltes stoßen, die sie anschließend noch beweisen müssen. Die Aufgabe kann also auf vielfältige Art und Weise und auf unterschiedlichen Schwierigkeitsniveaus gelöst werden.

Analyse des Unterrichtseinsatzes der Station 5 ‚Zuordnung'

Aufgabe 1

Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten diese Aufgabe in Einzelarbeit (siehe 8.3.10). Der Schüler S. bittet den Lehrer um Hilfe, da er die Formel für den Umfang eines Kreises nicht mehr weiß:

U [01:14:35.16]

Lehrer: […] Ok, weißt du, wie die Formel für den Umfang geht?

Schüler S: Nee.

Lehrer: […] Gut, dann geb ich dir eine Hilfestellung, schreib hier hin (auf Aufgabenblatt) die Formel, das ist dann U gleich äh, weil ja der Radius hier gegeben ist, machst du 2 mal r mal was fehlt noch?

Schüler S: r

Lehrer: Neeneeneenee π...So, das ist ja, was wir zum Beispiel vorhin im Kopfrechnen gemacht haben, ne. […] Das könnten wir ja im Kopf überschlagen auch. Was müssten wir jetzt also zwei mal (zeigt auf Kästen mit 2cm Radius) r ist ja dann zwei also müssen wir jetzt 2 mal

Schüler: 2 […] Drei komma eins vier.

Lehrer: Ja, oder mal drei erstmal im Überschlag, dann ist das wie viel? Ungefähr zusammen?

Schüler S: 12.

Lehrer: Genau, zwölf komma dann gucken wir, wo ist ungefähr Umfang 12? (Schüler zeigt auf 12,56cm) Ja und dann verbindest du die zusammen. (Schüler verbindet 2 cm und 12,56 cm).

Der Lehrer versucht scheinbar zu Beginn des Transkriptausschnittes den Schüler mit einzubeziehen, dies gelingt jedoch nicht, sodass der Lehrer die gesamte Formel vorgibt und anschließend den Schüler zur Lösung der Aufgabe anleitet. Er lenkt hier stark, wobei seine Formulierungen sich teilweise gegenseitig widersprechen: Er betont zunächst die Berechnung im Überschlag, weist dann aber auf eine Dezimalzahl als Ergebnis hin, ohne diese Verbindungen zu erläutern. Es wird kein begriffliches Wissen aktiviert, das Denken bleibt auf einer prozeduralen Eben. Der Lehrer erinnert aber auch an die Kopfübungen zu Beginn der Stunde, in denen dasselbe Verfahren angewendet wurde. Dies stelle eine Verbindung zu Vorwissen dar.

Der Schüler G. verwendet anstelle der Formel für den Kreisumfang die Formel für den Flächeninhalt eines Kreises. Er hat bereits die Felder 2 cm und 12,56 cm^2 sowie 4 cm und 50,24 cm^2 verbunden. Der von ihm errechnete Wert 108 für einen Radius von 6 cm steht nicht zur Auswahl:

U [01:22:31.19]

Lehrer: Guck mal, was du da ausrechnen sollst (zeigt auf Umfang) […] Aber muss man beim U, wenn das der Radius 6 cm ist. Überleg mal, bevor du, du hast gesagt gerade 6 mal 6 […] Mal π. […] Das ist für eine Fläche.

Schüler G: Ach ja!

Lehrer: Das ist schon wieder kommst du damit durcheinander. Irgendwie kriegst du Radius und Durchmesser ein bisschen durcheinander ne, also muss man hier nicht mal sich selbst sondern

Schüler G.: Also 6 mal 3

Lehrer: Nee, das ist ja der das ist ja der Radius ist das ja, also.

Schüler G: Muss ich 2 mal 6 mal 3. […] Dann ist das ja auch falsch, oah. (zeigt auf 2cm)

Lehrer: Ähm, das ist bei dieser Zahl da ist es ein bisschen was besonderes.

Schüler G: Ach ja, genau 2 mal 2

Lehrer: Und hier (bei 4 cm) wird wahrscheinlich falsch sein.

Schüler G: Ja. 2 mal 4

Der Lehrer versucht zunächst, den Schüler G. zur selbstständigen Überprüfung anzuregen, weist dann aber direkt auf den Fehler hin. Der Schüler G. kann die Rechnung zwar eigenständig korrigieren, insgesamt lenkt der Lehrer aber wieder sehr stark. Insbesondere wird hier auch die Ursache des Fehlers durch die Aktivierung von Faktenwissen geklärt. Der Lehrer erläutert in diesem Transkriptausschnitt und auch im Interview, dass der Schüler G. mit dem Durchmesser und dem Radius durcheinander kommt. Als Konsequenz soll der Schüler G. in den folgenden Stunden nochmal eine spezielle Förderung erhalten. Allerdings hat der

Schüler G. an dieser Stelle vor allem Flächeninhalt und Umfang verwechselt und nicht Radius und Durchmesser. Es ist fraglich, ob der Lehrer dies auch erkannt hat.
Der Schüler A. kann die erste Teilaufgabe (Radius 2 cm) selbstständig lösen und dem Lehrer seinen Rechenweg erläutern:
U [01:23:43.12]

Schüler A: Hier 2 mal 2 mal π ne?

Lehrer: […] Ja, jetzt bei der 2. möcht ich mal hören was du da rechnest.

Schüler A: 4 mal 4 sind.

Lehrer: Hahaha. 4 mal 4 mal π wo rechnen wir das denn? Radius mal Radius mal π, wo rechnen wir das? […] Guck mal, wir haben, was ist hier gesucht?

Schüler A: Der Umfang.

Lehrer: Genau, und wie lautet die Formel für den Umfang?

Schüler A: U, ach π mal d.

Lehrer: Genau, π mal d und wenn wir d nicht haben, dann müssen wir was?

Schüler A: π mal r mal r.

Lehrer: […] Du hast, welche Aufgabe hast du schon gemacht? […] Was du die jetzt grade sagst die ganze Zeit, ist nämlich das hier (zeigt auf Formel bei Station 4)

Schüler A: den Flächeninhalt.

Lehrer: Genau. Wir wollen aber den Umfang. […] Also musst du was machen mit dem Radius? Nur? Nicht 4 mal 4 sondern?

Schüler A: (unverständlich) mal 2

Lehrer: Ja genau.

Schüler A: Ach so!... Und dann mal π.

Der Lehrer erkennt hier, dass sich die falsche Rechnung erst bei der zweiten Teilaufgabe zeigt und lässt sich auch diese erklären. Er kann also den möglichen Schülerfehler voraussehen. Er leitet den Schüler A. in einem fragend-entwickelnden Unterrichtsgespräch zur Korrektur des Fehlers an, wobei er auch auf das bereits bearbeitete Arbeitsblatt zum Flächeninhalt hinweist. Dabei lenkt der Lehrer teilweise wieder sehr stark. Es steht das prozedurale Denken im Vordergrund, da die einzelnen Formeln nicht auf einer begrifflichen Ebene begründet und miteinander in Beziehung gesetzt werden.
Auch der Schüler K. hat große Probleme bei der Bearbeitung der Aufgabe und benötigt viel Hilfe vom Lehrer:

U [01:34:43.11]

Lehrer: Hmm, guck mal, du hast von dem, du möchtest ausrechnen Umfang, Kennst du die Formel für die Umfangsberechnung?

Schüler K: Hmmm, U gleich π mal 2, U gleich π mal

Lehrer: Also es gibt zwei Formeln, du kannst ja gerne dir die mal hierhin schreiben. Damit, wir schreiben sie zusammen hin. U gleich

Schüler K: U gleich π […] Mal d?

Lehrer: Genau. Richtig, gut. So und jetzt nochmal U gleich da drunter. π bleibt ja. […] Und wenn ich d nicht habe, sondern zum Beispiel r, wie oft passt r in d rein?

Schüler K: 4 mal? […] drei mal.

Lehrer: wenn das hier der Kreis jetzt ist (zeichnet Radius ein) So, da hab ich, was hab ich jetzt? Was ist das? Den?

Schüler K: Radius.

Lehrer: Genau. Hab ich damit schon den Durchmesser?

Schüler K: Nein.

Lehrer: So, und wenn ich zu dieser Seite zeichne nochmal, wie oft hab ich dann den Radius?

Schüler K: 2 mal.

Lehrer: Ja, genau. So, 2 mal also.

Schüler K: π mal 2. […] mal drei oder?

Lehrer: Nein, was ist, du hast ja jetzt zwei mal, guck mal das (zeigt auf den Radius) nehmen wir 2 mal und was ist das, das ist der

Schüler K: Radius. (Schüler schreibt r bei der zweiten Formel)

Lehrer: Jetzt hast du siehst du, du hast jetzt hier den Radius gegeben und hier ist der Umfang gegeben, jetzt könntest du dieses hier (zeigt auf die obere Reihe Zahlen) einsetzen und ausrechnen, im Kopf.

Auch hier leitet der Lehrer in einem fragend-entwickelndem Unterrichtsgespräch die Korrektur des Fehlers an. Dabei visualisiert der Lehrer den Zusammenhang zwischen Durchmesser und Radius mithilfe einer Skizze. Hier wird zur Erklärung des Fehlers in Ansätzen auf begriffliches Wissen zurückgegriffen. Der Lehrer lenkt aber im Anschluss mit den Hinweisen auf das Einsetzen der Werte stark und weist vor allem auf prozedurales Denken hin.

Der Schüler K. hat trotz der jetzt vorgegebenen Formel weiterhin Probleme:

U [01:36:55.00]

Schüler K: 37 […] 2 mal (guckt auf Formel) hä? […] mal r

Lehrer: mal π...Ist? 2 mal 2 ist wie viel?

Schüler K: 4.

Lehrer: 4 mal 3?

Schüler K: 4 mal 3 ist 12.

Lehrer: Genau. Und jetzt, wo passt, kommt das son bisschen hin?

Schüler K: Hier (12,56cm)

Lehrer: Genau, das verbindest du jetzt miteinander. So, bei der nächsten bleib ich noch dabei, also jetzt?

Schüler K: Wieder 4 mal 4

Lehrer: Mhmh (verneinend) […] Versuch mal einfach, das (4cm) in diese Formel einzusetzen.

Schüler K: […] U gleich π mal 2 mal ne mal 4 mal

Lehrer: Nein, K., ich glaub ich hab ne letzte Idee, wo du dadran hängst. Du hast das Gefühl, das diese Zahl hier (2 in der Formel) nämlich diese hier (2 bei Radiuswerten in der Aufgabenstellung) stimmt aber nicht. Diese 2 (in Formel) ist einfach, dass dieser Radius 2 mal da ist. Also denn, die 2 bleibt immer. Also müsstest du wo jetzt die 4 ein, die 4 einsetzen? Da ja nicht (bei der 2 in der Formel)

Schüler K: Mal r, also bei r.

Lehrer: Genau, das r ist ja die Variable. Also ist das jetzt hier jetzt, also nochmal

Schüler K: Also U gleich π mal 2 mal 4.

Lehrer: […] Genau. Und jetzt nur einmal noch die dritte sagen.

Schüler K: (unverständlich) mal 2 mal 6.

Der Lehrer leitet hier wieder sehr stark die Lösung der Aufgabe an. Dabei wechselt er ohne Hinweis auf die Überschlagrechnung zwischen den Werten 3 und π. Dadurch wird dem Schüler das Nachvollziehen der einzelnen, vom Lehrer vorgegebenen Schritte erschwert, da die Zusammenhänge der einzelnen Schritte nicht deutlich werden. Dies führt dazu, dass der Schüler auch in der zweiten Teilaufgabe die Formel nicht selbstständig anwenden kann, da der Lösungsweg nicht reflektiert wird. Die Lösung des Schülers beschränkt sich auf das Ausführen der vom Lehrer genannten Prozeduren. Darüber hinaus zeigt sich hier wieder, dass der Lehrer verschiedene Erklärungsansätze verfolgt und auch die typischen Fehlermöglichkeiten mit berücksichtigt. Dies wird daran deutlich, dass er auch die Lösung der zweiten Teilaufgabe verfolgen möchte.

Auch im Interview benennt der Lehrer mehrere Schwierigkeiten bei dieser Aufgabe aufgetreten sind:

I [00:33:07.00]

Lehrer: So, aber ich ähm, denke, dass da trotzdem Schwierigkeiten bei waren. Also manche haben zum Beispiel auch gar nicht so, äh, verstanden, was sie hier machen sollen (zeigt auf Station 5, Aufgabe 1), also das war für mich irgendwie so überraschend, […] sie haben es natürlich halt versucht, ähm, dann haben sie die Formeln falsch benutzt und.. obwohl obwohl muss man ja sagen sie die Station 3 und 4 ja vorgeschaltet haben oder hatten, nun muss man dazu sagen, ich hatte in der Arbeitsanweisung gesagt, sie müssen nicht in einer bestimmten, also sie müssen nicht mit 1 anfangen.

Der Lehrer konnte zwar im Vorfeld die Schülerleistung nicht richtig einschätzen, im Nachhinein kann er die aufgetretenen Probleme aber reflektieren. Außerdem zeigt sich hier, dass die Stationen gegenseitig als Hilfestellung vom Lehrer geplant wurden. Dem spricht allerdings entgegen, dass die Schülerinnen und Schüler die Stationen nicht in einer bestimmten Reihenfolge bearbeiten sollten. Hier hat der Lehrer im Vorfeld keine geeignete Verknüpfung seines Wissens über die Unterrichtsmethoden und seines fachdidaktischen Wissens zur Auswahl von Hilfestellungen hergestellt. Der Lehrer erkennt diese Problematik aber auch selbst.

Bei allen Schülerbearbeitungen und auch bei den Hilfestellungen des Lehrers überwiegt das prozedurale Denken, da die Schülerinnen und Schüler größtenteils dazu angeleitet werden, die Formeln aufzuschreiben und die entsprechenden Werte einzusetzen. Die Bearbeitung der Aufgabe ist als sehr verfahrensbetont einzuschätzen. Außerdem lenkt der Lehrer größtenteils sehr stark, was seinem Anspruch auf Selbstständigkeit der Lernenden (siehe 8.2) widerspricht. Er kann also sein Wissen über die Bedeutung der Selbstständigkeit nicht in Unterrichtshandlungen umsetzen.

Aufgabe 2

Diese Aufgabe dürfen die Schülerinnen und Schüler in Partnerarbeit bearbeiten, sie dürfen aber auch alleine an dieser Aufgabe arbeiten. Der Lehrer weist zu Beginn der Stationsarbeit darauf hin, dass es sich bei dieser Aufgabe um eine Zusatzaufgabe handelt. Dies ist auch auf der Übersicht über die Stationen (siehe Abbildung 8.8) beschrieben.

Während der Arbeitsphase konnte keine Schülerbearbeitung der Aufgabe 2 der Station 5 beobachtet werden, da keiner der Lernenden zu dieser Aufgabe Hilfestellung vom Lehrer bekommen hat. Die Lehreräußerungen zum Schwierigkeitsgrad dieser Aufgabe widersprechen sich allerdings:

U [00:54:19.02]

Lehrer: […] Also ist nicht besonders eigentlich schwer. (Aussage im Vorfeld der Aufgabenbearbeitung)

[01:52:51.20] Lehrer: Ok. Es gab eine Aufgabe, […] weil die war eigentlich ziemlich schwer. (Aussage im Anschluss an die Aufgabenbearbeitung)

Die objektiven Kennzeichen der Aufgaben der Stationsarbeit zeigen, dass die Aufgabe 2 der Station 5 einen höheren Anforderungsgrad hat, als die restlichen Aufgaben. Die zweite vom Lehrer genannte Einschätzung kann daher als zutreffend bezeichnet werden. Vermutlich hat der Lehrer im Vorfeld betont, dass die Aufgabe nicht schwer ist, um die Schülerinnen und Schüler zu motivieren. Im Endeffekt kann er den Schwierigkeitsgrad dieser Aufgabe aber gut einschätzen.

Im Anschluss an die Stationsarbeit bespricht der Lehrer im Gegensatz zu allen anderen Aufgaben die Lösung dieser Aufgabe im Plenum.

Planung:

[die Schülerinnen und Schüler] erklären wie sie die Aufgabe 2 der Station 5 gelöst hatten

I [00:38:15.25]

Lehrer: Ja, mir gings einfach da drum tatsächlich halt in dem Fall einmal kurz drüber sprechen, also so in Anführungsstrichen um Ihnen zu gefallen, weil da ja, weil das ja Ihre Aufgabe war. […] Und einfach sie zu thematisieren ansonsten hätte ich noch ganz viele andere Dinge, also ich hätte normalerweise wenns Realität wäre, hätte man gar nicht mehr großartig besprechen können, […] da waren ein paar pädagogische Sachen wie zum Beispiel dieses Abschreiben und sowas alles, das hätte ich nämlich thematisiert, dann hätte ich thematisiert dass hier halt irgendwie mit den Zirkeln nicht irgendwie alle dabei hatten, so ein paar Dinge also, die sind mir dann persönlich erstmal wichtiger.

Der Lehrer betont hier, dass er die Besprechung dieser Aufgaben nur durchgeführt hat, da diese Aufgabe im Rahmen dieser Untersuchung vorgegeben war. Er hat sich an dieser Stelle stark von den Rahmenbedingungen dieser Erhebung beeinflussen lassen. Außerdem betont er, dass ihm die Besprechung pädagogischer Aspekte der Aufgabenbearbeitung in den beobachteten Unterrichtsstunden wichtiger ist als die Besprechung der Lösungswege.

Anhand der folgenden Erklärungen der Schülerinnen und Schüler wird deutlich, dass trotz der explizit gegebenen Möglichkeit des Zusammenarbeitens keiner der Schülerinnen und Schüler wirklich zusammengearbeitet hat. Es kam aber vor, dass die Lernenden, die die Aufgabe bereits gelöst haben, anderen Schülerinnen und Schülern die Lösung erklärt haben.

U [01:53:35.24]

Schüler K: Ich hab das ausgemessen, und dann hab ich die beiden Umfang, also den Umfang von beiden darauf geschrieben und dann in den Taschenrechner eingegeben also das größere war 13 Komma noch was und dann durch zwei und das war dann das gleiche wie der Umfang von dem Kleinen. […] Dann wusst ich, also, dass sich das nur hal, ver, halbiert so.

Lehrer: Halbiert oder verdoppelt […].

Schüler C: Also ich hab das, der E. hat mir das erklärt und so

Schüler E: […] Ich hätts eigentlich genauso wie K. das gemacht hat.

Nur zwei Lernende haben eigenständig, also ohne Nachschauen auf den ausgehängten Lösungsblättern, eine Lösung erarbeitet, welche sie ausführlich erläutern können. Der Lehrer fordert aber keine Begründungen des Vorgehens ein und weist nicht darauf hin, dass anhand eines einzigen Beispiels noch keine Verallgemeinerung möglich ist.

Im Interview erläutert der Lehrer hierzu:

I[00:36:23.21]

Lehrer: Er hätte Aufgabe 1 einfach übernehmen können und hätte aber dann für mich wär‘s dann wichtig gewesen, dass er dann die Begründungen dazu liefert. Und mathematisch hätte er, also für mich so zwei drei Aufgaben rechnen müssen, […] hätte das dreimal gemacht und hätte dann eine Übereinstimmung hätte man bezüglich der Häufigkeit gesehen, dass da ja irgendwie ein Zusammenhang zwischen den Ergebnissen und so weiter gibt.

Hier macht der Lehrer nochmal explizit die Verbindungen zwischen den Aufgaben 1 und 2 der Station 5 deutlich. Außerdem betont er die Bedeutung der Begründungen und die Berechnung mehrerer Beispiele. Dies widerspricht seinem Verhalten im Unterricht.

Der Lehrer erläutert im Interview aber ausführlich, dass das Vorgehen in den beobachteten Stunden nicht seiner Planung entsprach:

I [00:35:35.06]

Lehrer: […] also vorgestellt hatte ich mir, dass wir die Aufgabe halt nochmal an der Tafel gemeinsam machen und die Schüler halt, sagen wir ein Leistungsstarker Schüler, der das halt sagen wir mal in meinem Sinne in Anführungsstrichen beantwortet und bearbeitet hat, dass er das halt nochmal erklärt den anderen. So in seiner Sprache. […] da hätte man dran arbeiten können, da hätte man dann auch nochmal mit den leistungsschwachen Schülern sagen können, […] "Fällt dir ein Beispiel dazu ein?" So, das wär jetzt dann der Aufforderungscharakter gewesen wo man die schwachen Schüler halt mitnimmt.

Hier wird sehr deutlich, dass sich der Lehrer um eine Differenzierung im Unterricht bemüht und versucht, die Lernenden auf allen Schwierigkeitsebenen zu erreichen. Außerdem betont er hier das Erklären von Lösungswegen durch die Schülerinnen und Schüler. Es wird aber auch deutlich, dass er nicht geplant hat, sich bei der Lösung der Aufgabe von den Beispielen

zu lösen, was im mathematischen Sinn noch keinen ausreichenden Beweis darstellt, für eine leistungsschwache Hauptschulklasse aber gegebenenfalls ein adäquates Vorgehen ist.
Darüber hinaus erläutert der Lehrer im Interview:

I [00:39:47.15]

Lehrer: […] Ne, die Proportionalität die da ja zusammenhängt ist schon wichtig. […] Weil das ist ja genau diese geometrischen Zusammenhänge, die Abstraktion, […] wenn halt solche Verknüpfungen die Schüler hinkriegen, diese zu abstrahieren und halt zu sagen, ja wir haben das jetzt mehrmals ausprobiert sei es rechnerisch, mathematisch, experimentell, und das trifft immer zu, in allen Fällen trifft diese Regel, so dann haben sie etwas elementare gelernt. Für sich. Und das können sie überall anwenden, darum geht es halt irgendwie, wenn man geschafft hat, halst irgendwie aus einem Beispiel ein Modell zu entwickeln und aus diesem Modell heraus halt das wiederum zurückzubringen in den Alltag und an verschiedenen Situationen anwenden das ist eigentlich so der herore Anspruch sag ich mal in Ansätzen meiner Mathematik und das ist so das Wichtigste.

Hier zeigt sich, dass der Lehrer das Potenzial der Aufgabe zum begrifflichen Denken durchaus erkennt, aber nicht im Unterricht umsetzt. Er benennt zumindest implizit das Herstellen von Verbindungen zwischen den Begriffen und den Transfer von Wissen.
Der Lehrer spricht weder im Unterricht noch im Interview die Lösung der Aufgabe anhand algebraischer Umformungen (siehe Abbildung 8.16) an. Er benennt also selbst keine aus fachlicher Sicht ausreichende Lösung der Aufgabe. Da aber im Rahmen der Untersuchung nicht direkt nach einer Lösung der Aufgabe durch den Lehrer gefragt wurde, kann hier nicht auf fehlendes Fachwissen geschlossen werden. Der Lehrer betont allerdings im Unterricht, dass die Schülerinnen und Schüler eine rechnerische Lösung gewählt haben und erläutert auf Nachfrage eines Schülers, dass es auch eine zeichnerische Lösung gegeben hätte. Diese wurde im Unterricht aber nicht näher thematisiert, da dies nach Aussage des Lehrers zu aufwendig sei. Auf Nachfrage im Interview kann der Lehrer aber keine genaue zeichnerische Lösung erläutern.

I [00:41:28.26]

Lehrer: Boah, das wär ziemlich schwer gewesen. […] mich persönlich hätte es jetzt auch mal interessiert so, weil ich's noch nicht gemacht hab, […] hätte vielleicht noch ein paar Schüler dazu geholt, die Interesse gehabt hätten und hätte das mit denen experimentell gemacht. […] Wäre mal eine interessante Herausforderung, das ist, irgendwie das zu beweisen, geht bestimmt alles. […] Wenn's mathematisch geht, muss es auch anders gehen. Zeichnerisch.

Auch wenn der Lehrer die Lösung nicht explizit benennen kann, zeigt er hier die Bereitschaft, auch herausfordernde Aufgaben mit den Schülerinnen und Schüler zu thematisieren. Dies steht allerdings im Gegensatz zu der hier dargestellten Bearbeitung der Aufgabe 2 der Station 5.
Des Weiteren fällt auf, dass in der Bearbeitung der Aufgabe 2 der Station 5 und auch in der als Hilfestellung gedachten Aufgabe 1 der Station 5 nur die Verdoppelung des Umfangs thematisiert wird, obwohl in der Aufgabe 2 auch die Veränderung des Flächeninhaltes bearbeitet werden soll. Der Lehrer erläutert dazu im Interview:

I [00:37:38.16]

Interviewer: […] Sie haben jetzt hier vorne (zeigt auf Station 5 Aufgabe 1) Umfang und nicht Fläche und auch im Unterricht selber war Fläche auch bei Aufgabe 2 gar kein Thema.

Lehrer: (verwundert) ach so, ja. […] Das ist richtig, das ist richtig, aber wahrscheinlich im Rahmen von zu wenig Zeit.

Hier zeigt sich, dass dem Lehrer die fehlende Thematisierung des Flächeninhaltes nicht bewusst war. Er begründet sein Vorgehen auch nicht mit fachlichen oder fachdidaktischen Aspekten. Es kann aber vermutet werden, dass durch die Aufgabenstellung von Aufgabe 1 schon der Fokus auf den Umfang gelegt wurde. Es wäre in Aufgabe 1 einfach möglich gewesen, eine weitere Zeile mit den entsprechenden Flächeninhalten hinzuzufügen. So hätten auch hier Umfang und Flächeninhalt miteinander in Beziehung gesetzt werden können, um zu erkennen, dass sie sich nicht in gleichem Maße verändern. Hier hat der Lehrer das Potenzial der Aufgabe zum Verbinden dieser Konzepte nicht genutzt. Auch das Potenzial der Aufgabe zum Abstrahieren, welches der Lehrer zwar erkennt hat, bleibt im Unterricht ungenutzt, da sich die Schülerinnen und Schüler auf je ein Beispiel beschränkt haben. Das Denken bleibt auf einer prozeduralen Ebene, begriffliches Denken wird nicht angesprochen. Deshalb ist die Bearbeitung der Aufgabe als verfahrensbetont einzuschätzen.

8.3.16 Station 6 ‚Richtig oder Falsch'

Richtig oder falsch? Kreuze richtige Aussagen an. Du kannst die Aussagen auch durch eine Rechnung überprüfen. Korrigiere falsche Aussagen. Kontrolliere dich anschließend mit dem Lösungsblatt!

☐ Je größer der Durchmesser eines Kreises, desto größer ist auch sein Umfang.
☐ Der Durchmesser ist halb so lang wie der Radius.
☐ π ist die Kreiszahl.
☐ Aus den Teilen einer Kreisfläche kann man annähernd ein Rechteck zusammensetzen.
☐ Für die Kreiszahl 3,14 ... verwendet man folgendes Symbol: α
☐ Wenn der Durchmesser verdoppelt wird, so verdoppelt sich auch der Umfang.
☐ Die Kreislinie hat keinen Anfangs- und Endpunkt.
☐ Die Hälfte eines Durchmessers ist r.
☐ Pi mal Radius plus Durchmesser, ergibt den Flächeninhalt eines Kreises.
☐ Doppelter Radius, vierfacher Umfang eines Kreises.
☐ Doppelter Radius, vierfacher Flächeninhalt eines Kreises.

Abbildung 8.17: Station 6 ‚Richtig oder Falsch'

Der Lehrer begründet die Auswahl dieser Aufgabe wie folgt:

I [00:44:37.11]

Lehrer: Ja das hier ist einfach ein bisschen ja Blödsinn hab ich da rumgeschrieben und da sollten die Schüler halt gucken äh was davon stimmt oder nicht. […] verschriftlicht einfach irgendwelche Grundsätze.

Hier zeigt sich im letzten Satz, dass der Lehrer bewusst auch allgemeine Aussagen mit aufgenommen hat.

Objektive Kennzeichen der Station 6 ‚Richtig oder Falsch'

Die einzelnen Teilaufgaben dieser Station sind zum Teil als begriffliche Modellierungs- und problembezogene Aufgaben einzuordnen, teilweise handelt es sich aber auch um technische Aufgaben mit dem Fokus auf Faktenwissen. Die Schülerinnen und Schüler sollen verschiedene Aussagen rund um den Umfang und den Flächeninhalt eines Kreises, aber auch allgemein zu Grundbegriffen des Kreises, auf ihre Richtigkeit untersuchen und gegebenenfalls korrigieren. Sie müssen dazu umfangreiches Wissen aus der Wissenseinheit des Kreises aktivieren und miteinander in Beziehung setzten. Es wird dabei darauf hingewiesen, die Aussagen anhand von Rechnungen zu überprüfen. Dies leitet einerseits zum Beweis durch Gegenbeispiel an, deutet aber auch darauf hin, dass durch mehrere positive Beispielrechnungen eine Aussage bestätigt werden kann, was in der Mathematik aber noch keinen Beweis darstellt. Die Lernenden werden nicht aufgefordert, die Aussagen zu beweisen oder zu begründen, weshalb keine Argumentationen notwendig sind. Für die richtige Einschätzung und gegebenenfalls Korrektur der Aussagen sind teilweise ganz unterschiedliche Anforderungen zu bewältigen.

Bei den Aussagen 1, 4, 6, 10 und 11 müssen die Schülerinnen und Schüler zunächst ein innermathematisches Modell entwickeln um die Aussage begründet bewerten zu können, wobei auch Argumentationen auf mittlerem Niveau möglich sind. Außerdem können die Schülerinnen und Schüler die Aussagen 2, 7 und 8 anhand einfacher Darstellungen beurteilen. Hierzu ist vor allem begriffliches Denken notwendig. Die Aussagen 3, 5 und 9 erfordern dagegen die Aktivierung von Faktenwissen.

Analyse des Unterrichtseinsatzes der Station 6 ‚Richtig oder Falsch‘

Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten die Aufgabe in Einzelarbeit (siehe 8.3.10). Es ist nur eine Schülerbearbeitung beobachtet worden:

> U [01:27:20.03]
> Schüler N: […] Kann ich das jetzt umändern auf π?
> Lehrer: […] Korrigieren und falsche ja genau. Wenn du jetzt halt das änderst, dann kannst du das natürlich ankreuzen.

Hier zeigt sich, dass die Aufgabenformulierung nicht präzise ist. Nach dieser Äußerung des Lehrers müssten am Ende, nach der Korrektur, alle Aussagen angekreuzt sein. Dies erscheint etwas unübersichtlich. Es ist keine Aussage über die Art der Bearbeitung dieser Aufgabe möglich.

8.3.17 Station 7 ‚Zusatz bunt gemischt‘

Diese Station war als Zusatzaufgabe gedacht:

> I [00:50:30.16]
> Lehrer: […] bei den Schülern ist jetzt, da ist ja die große Schwierigkeit, geht‘s dadrum, dass sie ähm ja die Operatoren halt umkehren müssen. […] das ist eine ganz große Schwierigkeit. Die haben nicht in der Intensität das gehabt. Also Gleichungen haben sie schon gehabt klar, aber ja das ist immer so Gleichungen und so sind an der Schule immer, bei uns hier, also im Projekt gerade, sind das immer so schwierig. Also das ist unheimlich viel verlangt von den Abstraktionen her Terme zu lösen und etc. […] das war dann so Zusatz einfach. […] da ist ja ein Term, den sie halt umwandeln müssen nach einer gesuchten Variable und das ist dann schon ein bisschen schwieriger. […] Und das ist nur so, ich sage ja halt irgendwie man muss auch mal sagen wir mal ein bisschen Futter geben vielleicht für diejenigen, die halt über das Mittelmaß hinaus gehen.

Der Lehrer schätzt hier insbesondere die 4. Zeile der Aufgabe als schwierig ein. Dies hat er aber bewusst so gestellt, um Binnendifferenzierung anzubieten (vgl. 8.2).

Zusatzaufgabe

Berechne die fehlenden Werte auf zwei Dezimalstellen genau! Kontrolliere dich durch die angegebenen Lösungen. Findest du das Lösungswort?

	r	d	U	A
1.		3,6 cm		
2.	2,5 cm			
3.			58,09 cm	
4.				12,56 cm^2

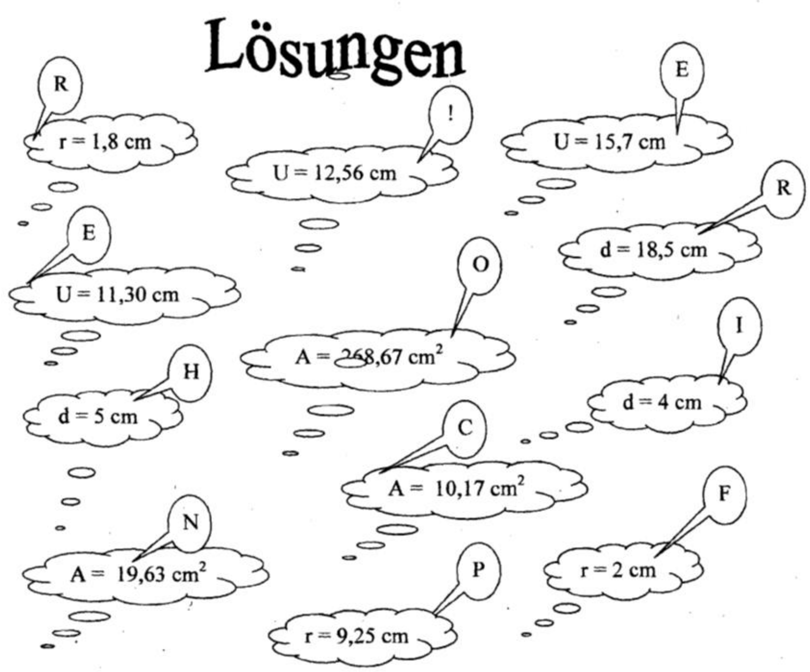


Abbildung 8.18; Station 7 ‚Zusatz bunt gemischt'

Objektive Kennzeichen der Station 7 ‚Zusatz bunt gemischt'

Allgemein betrachtet ist diese Aufgaben als technische Aufgabe mit Fokus auf Fertigkeiten einzuordnen. In den ersten beiden Zeilen können die Lernenden durch Einsetzen in die bekannten Formeln den Radius, bzw. den Durchmesser sowie den Umfang und den Flächeninhalt eines Kreises berechnen. In den Zeilen 3 und 4 müssen die Lernenden dagegen zunächst durch algebraische Umformungen die bekannten Formeln nach der gesuchten Größe, dem Radius oder dem Durchmesser, umformen. Dies können sie vor oder nach dem Einsetzen des gegebenen Wertes durchführen. Hierzu sind Standardumformungen nötig, die im Sinne eines Algorithmus angewendet werden können, wobei in Zeile 4 auch das Wurzelziehen benötigt wird. Allerdings scheint das Umformen von Gleichungen in dieser Klasse nicht standardmäßig verwendet zu werden (s.o.), weshalb für die Schülerinnen und Schüler dieser Klasse in Zeile 3 und 4 innermathematische Modellierungen zum Lösen der Aufgabe nötig sind. Es handelt sich damit für diese Klasse um eine rechnerische Modellierungs- und problembezogene Aufgabe.

Analyse des Unterrichtseinsatzes der Station 7 ‚Zusatz bunt gemischt'

Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten diese Aufgabe in Einzelarbeit. Der Schüler I. wird vom Lehrer kurz bei der Bearbeitung beobachtet, der Lehrer greift aber nicht in die Bearbeitung ein. Der Schüler N. scheint die Aufgabe ohne Hilfe gelöst zu haben, da er das Lösungswort am Ende der Stunde benennen kann. Der Schüler G. benötigt dagegen umfangreiche Hilfestellung vom Lehrer, was sich gleich zu Beginn der Aufgabenbearbeitung äußert.

U [01:32:06.21]

Schüler G: Wie soll ich das jetzt ausrechnen? Womit ich die

Lehrer: d geteilt durch 2 ist der Radius.

Der Lehrer lenkt hier kurzzeitig sehr stark durch die Vorgabe der Formel.

Der Schüler arbeitet anschließend zunächst selbstständig an der Aufgabe und kann die Aufgaben bis Zeile 3 richtig lösen, allerdings hat er bei Zeile 4 große Probleme.

U [01:41:53.02]

Schüler G: Ich weiß jetzt nicht wie ich das, also die Sachen (S. zeigt auf Zeile 4 der Zusatzaufgabe von Station 7.) hier da so drauf kommen soll.

Lehrer: […] Weißt du, dieser Aufgabenzettel ähm den wir am Montag gekriegt haben mit den ganz vielen Aufgaben. […] Da war zum Beispiel eine Formel, die du hier benutzen kannst. […] Hast du so eine Idee, welche davon du jetzt anwenden könntest?

Schüler G: […] (überlegt) Ne, keinen Plan.

Lehrer: […] Ich will dir jetzt nicht die gesamte Umstellung aller Formeln erklären. Das wäre zu kompliziert. Aber wir könnten uns ja überlegen, vielleicht kommen wir mit Überlegungen so weiter... Das (L. zeigt auf Eintrag in Zeile 4.) ist ja noch eine kleine Zahl nicht wahr. 12,56 ist der gesamte Kreis, ne. Wenn wir r haben müssen, was müssen wir denn davon noch abziehen? Wenn wir uns das hier mal angucken.(zeigt auf Formel) Also wenn wir r alleine haben wollen, […] Durch π beispielsweise oder […].

Schüler G: Ja hab ich auch schon im Rechner vorhin eingegeben. […]

Lehrer: Ja genau. So, nun musst dir vorstellen, schau mal ganz kurz, schau mal. Ich hab ja das hier jetzt schon mal weggenommen, also hab ich ja schon ausgerechnet (verdeckt π in der Formel). […] Ok jetzt hab ich hier noch 2 r stehen. Ich will aber nur eines haben... Also ist ja doppelt, das ist ja ist ja doppelt. Was könnt ich denn jetzt dann, was müsste ich jetzt noch machen, wenn ich nur eins haben will.

Schüler G: Durch 2. […]

Lehrer: Richtig... Hast du das jetzt verstanden? So ne, also du musst mal, die Fläche kannst du das selber nochmal näher erklären? […]

Schüler G: Ja also die Zahl halt durch π und dann nochmal durch 2 und dann hab ich das ja.

Lehrer: Gut. Guck mal und dann hast du ja das r und dann kannst du die beiden anderen auch ausrechnen...Jo schön.

Der Lehrer verweist zunächst als Hilfestellung auf die bereits umgestellten Formeln auf einem anderen Arbeitsblatt, er stellt also Verbindungen zum Vorwissen her. Dies hilft dem Schüler aber nicht weiter. Daraufhin schlägt der Lehrer einen anderen Weg der Hilfestellung ein. Er lenkt dabei sehr stark, visualisiert seine Erklärungen aber auch anhand der Zeichnung eines Kreises und anhand der auf dem Arbeitsblatt vom Vortag vorgegebenen Formel für den Flächeninhalt eines Kreises. Er benutzt aber auch einige ungünstige Formulierungen. So spricht er davon, etwas abzuziehen, was auf eine Subtraktion hindeutet, dabei ist eine Division nötig. Außerdem erscheint der Umgang mit der Division durch 2 am Ende der Rechnung problematisch. In diesem Spezialfall ist die Division durch 2 korrekt, da der gesuchte Radius 2 cm entspricht. Allerdings ist davon auszugehen, dass dem Schüler der allgemeine Zusammenhang mit dem Wurzelziehen nicht klar geworden ist. Es ist nicht zu entscheiden, ob dem Lehrer der Zusammenhang zum Wurzelziehen bewusst ist. In diesem Fall könnte er auf versucht haben, dem Schüler zu einem Erfolgserlebnis zu verhelfen, indem er auf die ‚umständlichere' Verallgemeinerung verzichtet hat. Es ist aber auch denkbar, dass der Lehrer den Begründungsfehler des Schülers nicht erkannt.

Auch anhand der Interviewaussagen des Lehrers lässt sich dies nicht entscheiden. Der Lehrer beschreibt ausführlich die Schwierigkeiten des Schülers G.:

> I [00:49:25.27]
>
> Lehrer: […] Da hab ich ihm gesagt, er sollte ja in der Mappe nachgucken […] Hat aber nicht verstanden, was da stand. Und dann hab ich ja mich da nochmal mit ihm abgegeben, […] und hab ihm das halt nochmal erklärt. Aber halt in der Kürze konnte ich nicht, also nicht für mich befriedigend Zeit nehmen, um ihm das zu erklären nochmal. Also ich glaube nicht, dass er sich das tatsächlich verinnerlicht hat sag ich mal.

Der Lehrer kann die Schwierigkeiten der Schülerinnen und Schüler hier ausführlich reflektieren und hat auch erkannt, dass seine Erklärungen unzureichend waren, womit er sein eigenes Verhalten kritisch reflektiert.

Insgesamt liegt der Fokus bei dieser Aufgabenbearbeitung auf prozeduralem Denken. Die Bearbeitung ist als verfahrensbetont einzuschätzen, da keine Verbindungen zu Konzepten hergestellt werden. Durch die starke Lehrerlenkung wird wieder ein Widerspruch zum Anspruch des Lehrers auf Selbstständigkeit der Lernenden deutlich.

8.4 Analysen von Aspekten des fachdidaktischen Wissens, die sich in der Gesamtbetrachtung des Unterrichts zeigen

8.4.1 Umgang mit den Schülerinnen und Schülern

Reagieren auf richtige Lösungen

Der Lehrer fordert die Schülerinnen und Schüler nur sehr selten zur selbstständigen Überprüfung ihrer Antworten auf, fast immer bestätigt er selbst die Richtigkeit der Antwort. Mehrfach lobt er die Lernenden auch für ihre richtigen Antworten. Häufig wiederholt der Lehrer die Schülerantworten, stellt anschließend weiterführende Fragen und leitet so den weiteren Lösungsweg an. Dabei lenkt er die Lösungswege teilweise sehr stark. Oft fügt der Lehrer der Schülerantwort auch neue Aspekte hinzu oder erläutert selbst Teile des Lösungsweges. Auch begründet er teilweise selbst die Antwort ohne vorherige Frage an die Schülerinnen und Schüler. Die Lernenden werden kaum zur Begründung ihrer Antworten aufgefordert. Allerdings fordert der Lehrer die Schülerinnen und Schüler wiederholt zur näheren Erläuterung oder Ergänzung ihrer Antwort, beispielsweise um fehlende Einheiten oder ausführlichere Rechenwege, auf. Teilweise werden die Lernenden auch zur Reflexion des Lösungsweges angeregt. Der Lehrer vergewissert sich während der Plenums- und Gruppenphasen mehrfach, ob die anderen Schüler die Antwort ebenfalls verstanden haben. Zweimal beobachtet er Lernende bei der richtigen Lösung einer Antwort, greift aber in keiner Weise ein und fördert so die kognitive Selbstständigkeit. Beim Ergebnisvergleich zu Aufgabe 2 der Station 5 fragt er zum einzigen Mal nach weiteren Lösungswegen.

Reagieren auf Fehler

Der Lehrer zeigt in der Reaktion auf Fehler zwei gegensätzliche Grundtendenzen: Einerseits lenkt er stark, andererseits fördert er die selbstständige Überprüfung durch die Schülerinnen und Schüler. In den Fällen starker Lehrerlenkung weist er die Lernenden zunächst auf den Fehler hin und leitet anschließend kleinschrittig die Korrektur des Fehlers durch weiterführende Fragen und Hinweise an. Teilweise erläutert der Lehrer die Fehler der Schülerinnen und Schüler ausführlich, obwohl sich an einer Stelle zeigt, dass dies auch ein Schüler vornehmen könnte. Die selbstständige Überprüfung der Fehler fördert der Lehrer, indem er ohne Kommentar zur Falschheit der Schülerantwort entscheidende Aspekte der Aufgabenstellung wiederholt oder indem er den nächsten Lerner aufruft. Mehrfach fördert der Lehrer die Reflexion des Lösungsweges und damit die selbstständige Überprüfung direkt, indem er beispielsweise nachfragt, ob der Schüler sich sicher ist. Allerdings erkennen die Schülerinnen und Schüler so zwar selbst, dass sie einen Fehler gemacht haben, bzw. andere Lernende weisen darauf hin, es wird aber nicht thematisiert, wie dieser Fehler zustande gekommen ist (vgl. 5.3.3). Einmal visualisiert der Lehrer einen Sachverhalt, um den Schüler auf seinen Fehler aufmerksam zu machen. Außerdem fordert er die Schülerinnen und Schüler innerhalb der Gruppenarbeit zur gegenseitigen Diskussion der Lösungswege auf. Als Reaktion auf von ihm beobachtete typische Schülerfehler führt der Lehrer zu Beginn des Unterrichts die Kopfübungen durch.

Reagieren auf Probleme und Schwierigkeiten

Häufig leitet der Lehrer die Schülerinnen und Schüler bei auftretenden Problemen zur Überwindung der Schwierigkeiten an. Dabei lenkt er teilweise leicht, indem er weiterführende Fragen stellt, weiterführende Hinweise gibt, den Kontext erläutert oder auf die Aufgabenstellung verweist. Oft lenkt der Lehrer aber sehr stark und gibt teilweise den kompletten Lösungsweg vor. Die starke Lehrerlenkung zeigt sich auch in den häufigen direkten Hinweisen des Lehrers auf die auf den Arbeitsblättern vorgegebenen Formeln. Diese stellen eine Reaktion auf erwartete Probleme dar. Zweimal nutzt der Lehrer Visualisierungen, um den Lernenden bei der Überwindung ihrer Probleme zu helfen, zweimal werden die Schülerinnen und Schüler zur Reflexion des bisherigen Lösungsweges aufgefordert. Mehrfach wird sichtbar, dass sich die Lernenden vor allem während der Gruppenarbeit, aber auch bei der Stationsarbeit gegenseitig unterstützen. Die gegenseitige Unterstützung wird aber meistens nicht vom Lehrer initiiert. Nur einmal ermutigt der Lehrer explizit einen Schüler, der einem anderen Schüler etwas erklären möchte. Im Interview reflektiert der Lehrer auch die Aufgabenstellung und erläutert mehrfach Konsequenzen für den weiteren Unterricht.

8.4.2 Gebrauch verschiedener Repräsentationsformen

Der Lehrer gebraucht unterschiedliche Repräsentationsformen, wobei die formale Repräsentation durch die vielen Hinweise auf die Formeln häufig überwiegt. Er setzt aber auch enaktive Repräsentationen, beispielsweise die Schnur bei Aufgabe 5, oder Visualisierungen anhand kleiner Skizzen oder mithilfe seiner Hände als Hilfestellungen bei Problemen ein. Es treten aber kaum Wechsel zwischen verschiedenen Repräsentationsformen auf. Deshalb werden die Inhalte häufig nur anhand einer Repräsentationsform, meistens der formalen oder der sprachlichen, erarbeitet, ohne das zusätzliche Visualisierungen angeboten werden. Dies fällt vor allem während der Gruppenarbeit auf.
Allerdings erläutert der Lehrer im Zusammenhang mit der Begründung der Stationsarbeit:

> I [00:45:04.28]
>
> Lehrer: […] die ganzen Fachbegriffe fehlen mir jetzt, ist schon lange her das Studium. Ähm ich habs ja jetzt mal als Zahl stehen, also wo man das sieht. Dann hab ich halt eventuell als ähm Text […] Also sachlich dargestellt. Dann habe ich halt die Zahlenbeziehungen dargestellt und natürlich wär jetzt so nochmal schön als Piktogramm oder wie nennt man das so so so zeichnerisch, wenn man das noch hingekriegt hätte. Und die habens auch rechnerisch also so auf vielen Ebenen sich mit dem Gebiet auseinandersetzen.

Hier zeigt sich, dass der Lehrer verschiedene Repräsentationsebenen umschreiben und auch den Wechsel zwischen diesen Repräsentationsformen als wichtig herausstellen kann. Dabei führt er aber die enaktive Repräsentationsform nicht auf, obwohl er diese teilweise speziell gefördert hat. Insgesamt zeigt sich, dass der Lehrer durchaus über das Wissen über verschiedene Repräsentationsformen verfügt, dass er dieses Wissen aber nicht umfassend in Unterrichtshandlungen umsetzen kann.

8.4.3 Gebrauch von Begriffen

Der Lehrer bemüht sich selbst um die korrekte Verwendung von Fachsprache und fördert auch die Verwendung von Fachsprache bei den Schülerinnen und Schülern. So dient beispielsweise die Station 1 explizit der Einübung von Fachbegriffen. Der Lehrer erläutert im Interview ausführlich die Bedeutung der Begriffe und auch des Zusammenhangs zwischen den Begriffen (siehe 8.3.11). Allerdings werden die vom Lehrer genannten Zusammenhänge zwischen den Begriffen und auch die Eigenschaften der Begriffe im Unterricht kaum herausgestellt.

Im Unterricht werden auch bei der sprachlichen Repräsentation nicht die Begriffe selbst, sondern stattdessen die entsprechenden Formelzeichen verwendet. Bei der Erklärung von Rechnungen verwendet der Lehrer beispielsweise den Buchstaben r anstelle von Radius oder U anstelle von Umfang. Umgangssprachliche Begriffe, anstelle von mathematischen Fachbegriffen, werden sowohl von den Schülerinnen und Schülern als auch vom Lehrer nur selten verwendet. Deutlich wird der Bezug zur Alltagssprache lediglich bei der Hilfestellung zu Station 1, in der der Lehrer den Begriff des Sektors anhand mehrerer Beispiele aus Alltagskontexten erläutert. Im Interview merkt der Lehrer hierzu an:

I [00:13:08.18]

Lehrer: […] Also wenn ich jetzt halt mathematisch denen das alles erklären würde, würden sie das überhaupt nicht verstehen. […] ich erkläre es ihnen irgendwie mit Alltagswörtern zusammenhängen und versuche dann praktisch zu äh sagen, dafür haben wir in der Mathematik bestimmte Begriffe, die decken jetzt die zwei, drei Sätze, die ich jetzt benutzt habe, ab.

Hier zeigt sich, dass der Lehrer durch die Verwendung von Alltagsbegriffen das Verständnis der Lernenden fördern möchte.

Die Schülerinnen und Schüler benutzten die Fachbegriffe größtenteils korrekt, allerdings verwendet der Lehrer selbst an einer Stelle im Unterricht den Begriff ‚Abziehen', anstelle des ‚Dividierens', wobei mit dem Begriff ‚Abziehen' üblicherweise die Subtraktion gemeint ist. Im Interview verwendet der Lehrer einen mathematischen Fachbegriff fehlerhaft, da er in Zusammenhang mit Station 2 vom „Parkettieren" spricht. Allerdings geht es in der Aufgabe um die Fortführung von Kreismustern, was aus mathematischer Sicht einen völlig anderen Inhalt darstellt als das Parkettieren (siehe 8.3.12).

8.4.4 Herstellen von Verbindungen

Verbindungen zum Vorwissen

Insgesamt stellen alle in den beobachteten Unterrichtsstunden betrachteten Inhalte Wiederholungen von bereits Gelerntem dar, so dass die Lernenden jederzeit auf bisher gelerntes Wissen zurückgreifen können.

I [00:52:50.28]

Lehrer: […] Und das ist ja im Grunde genommen ist das ja auch als Übungsstunde gedacht gewesen und in der Übungsstunde, also so oder Wiederholung- oder Übungsstunde Vorbereitungsarbeit, da gehört für mich auch das hin, also so wo man jetzt das gesammelte und erarbeitete Wissen verknüpft und in verschiedenen Variationen.

Hier zeigt sich, dass der Lehrer beim Rückgriff auf das früher Gelernte vor allem die Zusammenhänge zwischen den einzelnen Inhalten erarbeiten möchte. Diese Zusammenhänge werden aber im beobachteten Unterricht aufgrund des kaum vorhandenen begrifflichen Denkens nur wenig hergestellt (siehe 8.3).
Der Lehrer stellt durch die Aufgabenstellungen explizit Verbindungen zum Vorwissen her und benennt diese Verknüpfungen auch im Interview:

> I [00:34:08.23]
> Lehrer: […] hier steht ja auch Überschlag, […] hab ich ja zurückgegriffen eigentlich, darum hab ich am Anfang der dritten Stunde ja dieses Kopfrechnen nochmal gemacht, das war, das diente also eigentlich zu Erinnerung.

Hier zeigt sich, dass der Lehrer diese Verbindungen bewusst hergestellt hat. Er verweist auch im Unterricht direkt auf diese Verbindung hin (siehe 8.3.15). Darüber hinaus weist er im Unterricht mehrfach auf bereits gelernte Formeln hin.

Inhaltliche Verbindungen

<u>Innerhalb eines Stoffgebietes</u>

Der Lehrer weist im Interview darauf hin, dass die drei beobachteten Unterrichtsstunden zur Verknüpfung des bereits Gelernten zum Themenbereich Umfang und Flächeninhalt eines Kreises dienen (s.o.). Alle Aufgaben, sowohl in den Kopfübungen, als auch in der Gruppenarbeit und bei der Stationsarbeit, haben insgesamt betrachtet die verschiedenen Eigenschaften eines Kreises zum Thema und sind daher inhaltlich miteinander verknüpft. In den meisten Aufgaben wird auch der Kreisumfang oder der Flächeninhalt thematisiert. Allerdings wird häufig innerhalb der einzelnen Aufgaben nur einer dieser mathematischen Gegenstände angesprochen. Lediglich in der Aufgabe 2 der Station 5 und in der Station 7 werden Umfang und Flächeninhalt, zumindest laut Aufgabenstellung, gleichzeitig thematisiert. Außerdem ist anzumerken, dass das Arbeitsblatt der Gruppe 1 nur den Umfang thematisiert, während die Gruppen 2 und 3 die beiden Themengebiete miteinander verknüpfen müssen, da in hintereinandergeschalteten Aufgaben für denselben Kreis der Flächeninhalt und der Umfang berechnet werden müssen. Dem Lehrer ist nicht bewusst, dass die Gruppe 1 keine Flächeninhalte berechnen muss, er begründet die Aufgabenauswahl damit, dass das Arbeitsblatt bereits voll war (siehe 8.3.8). Es ist demnach zu vermuten, dass der Lehrer auch die inhaltlichen Verbindungen auf den Arbeitsblättern der Gruppen 2 und 3 nicht bewusst hergestellt hat. Dies wird dadurch unterstützt, dass der Lehrer die Verbindungen in der Gruppenarbeit auf der Kontextebene betont.
Im Interview erläutert der Lehrer im Zusammenhang mit der Stationsarbeit vielfältige Verbindungen innerhalb der Geometrie. Die Stationen sollen zwar nicht in einer bestimmten Reihenfolge bearbeitet werden, die Stationen 3 und 4 können aber beispielsweise als Hilfestellung für die Stationen 5 und 7 dienen. Auch die Aufgabe 1 der Station 5 wurde vom Lehrer bewusst als Hilfestellung der Aufgabe 2 der Station 5 vorangestellt. Die Aufgabe 2 der Station 5 wird auch in der Station 6 wieder aufgegriffen. Diese vom Lehrer beschriebenen Verbindungen werden anhand der Analysen der objektiven Kennzeichen der Aufgaben nur zum Teil deutlich, da die betrachteten mathematischen Gegenstände in den einzelnen Aufgaben der Stationsarbeit teilweise sehr unterschiedlich sind.
Auf direkte Nachfrage nach weiteren Verbindungen zwischen den Aufgaben antwortet der Lehrer:

> I [00:45:55.12]
> Lehrer: Hmm joa bewusst nicht […]. Aber ich habe halt schon versucht, die Dinge ähm nicht isoliert ähm ähm darzustellen. […] Ja und ich versuche halt […] immer sozusagen einen roten Fa-

> den zu haben und dann halt rechts und links entsprechend so viel da reinzupacken, ich sage mal wie eine Karre. Die ziehe ich halt einen Weg lang und das ist halt jetzt gehts um Flächen und Umfang in diesem auf diesem Weg ne. Und das alles, was ich so finde, was ich gut gebrauchen kann, das pack ich schmeiß ich alles rein

Hier zeigt sich, dass der Lehrer auf stoffliche Verbindungen viel Wert zu legen scheint. Dies widerspricht aber dem Eindruck der qualitativen Analysen, da die einzelnen mathematischen Gegenstände eher unverbunden nebeneinander stehen und aufgrund fehlenden begrifflichen Denkens nicht miteinander in Beziehung gesetzt werden.

Zwischen verschiedenen Stoffgebieten

In vielen Aufgaben können die Schülerinnen und Schüler durch Einsetzen von Werten in vorgegebene Formeln die entsprechenden Termwerte berechnen, sodass vielfältig Verbindungen zur Algebra hergestellt werden. Diese Verbindungen zur Algebra werden besonders in Station 7 deutlich, in der teilweise auch Terme umgeformt werden müssen. Zusätzlich müssen die Lernenden in Aufgabe 3 und Aufgabe 5, teilweise auch in Aufgabe 6 und 7 der Gruppenarbeit die Materialkosten berechnen, wodurch gezielte Verbindungen zur Arithmetik hergestellt werden.

Weitere Verbindungen

Der Lehrer hat die einzelnen Aufgaben der Gruppenarbeit alle in den Kontext des Berliner Fernsehturms eingebaut, um der Gruppenarbeit einen thematischen Rahmen zu geben.

> I [00:17:56.24]
> Lehrer: […] Also ich finde es immer wichtig, dass halt die ganze Klasse an einem Themenbereich oder an einer Aufgabe also nem... Grobziel sag ich mal, an einem Grobziel arbeitet und hier ging es halt um den Fernsehturm.

Hier betont der Lehrer Verbindungen auf der Kontextebene.

8.4.5 Ziele

Inhaltsbezogene Ziele

Der Lehrer benennt in der Unterrichtsplanung die Wiederholung und Vertiefung der Begriffe Durchmesser, Radius, Umfang und Flächeninhalt als Ziele der Unterrichtsstunden. Die von ihm gewählten Aufgaben sind zu dieser Zielformulierung passend. Er begründet die Themenwahl mit dem vorkommen im schuleigenen Lehrplan und im Schulbuch, nicht aber mit dem Kerncurriculum.

Alle vom Lehrer 1 eingesetzten Aufgaben dienen der Einübung bereits gelernter Inhalte, was durch die vielen Verbindungen zum Vorwissen auch deutlich umgesetzt wird (vgl. 8.4.4). Im Interview zeigt der Sprachstil des Lehrers, mit vielen Brüchen, Wiederholungen und unklaren Formulierungen, dass er in der Beschreibung der inhaltlichen Aspekte, insbesondere der Ziele, unsicher ist und diese nicht klar formulieren kann. Er erläutert im Interview:

> I [00:02:17.05]
> Lehrer: […] Also wenn man sich dann fragt, was hab ich denn dann drei Wochen lang gemacht... Das ist das eine, was mich da so ein bisschen selber... so überrascht und auch geärgert hat so eigentlich. Also nicht nur also nicht das Unvermögen der Schüler, sondern dass ich es vielleicht nicht hingekriegt habe, ihnen das zu vermitteln.

Der Lehrer benennt selbst, dass er die inhaltlichen Ziele der vorangegangenen Stunden nicht ausreichend erreicht hat. Er reflektiert also sein eigenes Vorgehen kritisch.

Des Weiteren betont der Lehrer mehrfach, dass vor allem das Herstellen von Zusammenhängen und Verknüpfungen ein wichtiges Ziel seines gesamten Unterrichts darstellt:

I [00:39:58.19]

Lehrer: […] wenn halt solche Verknüpfungen die Schüler hinkriegen, diese zu abstrahieren und halt zu sagen, ja wir haben das jetzt mehrmals ausprobiert sei es rechnerisch, mathematisch, experimentell, und das trifft immer zu, in allen Fällen trifft diese Regel, so dann haben sie etwas elementare gelernt. Für sich.

Im Unterricht wird aber wenig auf Zusammenhänge eingegangen, was sich an den wenigen Kodierungen des begrifflichen Wissens zeigt, so dass die hier genannten Ziele nicht erreicht scheinen. Stattdessen liegt der Fokus größtenteils auf den Prozeduren, was der Lehrer aber auch als eines seiner Ziele benennt.

I [00:31:23.13]

Lehrer: […] Mir ging es da darum tatsächlich um das reine Rechenverfahren, […] Mathematik nach Kochrezept.

Dieses Ziel scheint durch den vom Lehrer durchgeführten Unterricht umfangreich verfolgt worden zu sein, die teilweise noch großen Probleme der Schülerinnen und Schüler und die starke Lehrerlenkung lassen aber darauf schließen, dass dieses Ziel nicht bei allen Lernenden erreicht wurde.

Prozessbezogene Ziele

Als prozessbezogenes Ziel nennt der Lehrer vor allem das mathematische Kommunizieren, welches er explizit mit der Gruppenarbeit gefördert hat:

I [00:10:47.26]

Lehrer: […] Und der zweite Anspruch, der stärker pädagogisch ausgeprägt war, ob sie es hinkriegen, trotz ihrer Unterschiedlichkeit ähm an einem Thema gemeinsam zu arbeiten. Und ähm da hat mir da, da war ich sehr zufrieden mit dieser ersten Stunde, weil das hat tatsächlich da auch geklappt. Also wenn man so überlegt halt, die leistungsstarke Gruppe, die hinten gesessen hat, die haben ja sehr laut so äh über die verschiedenen Lösungsansätze diskutiert. […] So wohingegen halt so die die mittlere Leistungsgruppe, da war ein bisschen diffus. So da hat jeder viel für sich gemacht eigentlich und da war Kommunikation Interaktion sehr klein. Wohingegen halt zum Beispiel bei den Leistungsschwachen, […] da war schon die Kommunikation größer sogar als bei den mittleren.

Vor allem für die leistungsstarke, aber auch für die vom Lehrer festgelegte leistungsschwache Gruppe, scheint das Ziel des mathematischen Kommunizierens größtenteils erreicht zu sein.

Auch das mathematische Modellieren spricht der Lehrer als ein übergeordnetes Ziel seines Unterrichts an:

I [00:39:58.19]

Lehrer: […] Und das können sie überall anwenden, darum geht es halt irgendwie, wenn man geschafft hat, halst irgendwie aus einem Beispiel ein Modell zu entwickeln und aus diesem Modell heraus halt das wiederum zurückzubringen in den Alltag und an verschiedenen Situationen anwenden das ist eigentlich so der heroe Anspruch sag ich mal in Ansätzen meiner Mathematik und das ist so das Wichtigste.

Dieses Ziel wird anhand der in der Gruppenarbeit verwendeten Aufgaben auch umgesetzt, wenn auch nur auf niedrigem Niveau.

Allgemeine Ziele

Der Lehrer betont mehrfach die Binnendifferenzierung als eines seiner Ziele, wobei er für die Leistungsstarken insbesondere Transferleistungen als Ziele benennt, während er von den Leistungsschwächeren eher Reproduktion erwartet (siehe 8.2). Außerdem möchte er die Schülerinnen und Schüler zum selbstständigen Arbeiten befähigen (siehe 8.2) und insbeson-

dere auch die Motivation der Lernenden durch positive Erfahrungen mit ihrer eigenen Kompetenz in Mathematik fördern.
Des Weiteren spricht der Lehrer als ein allgemeines Ziel die Vorbereitung für den Beruf an:

I [00:08:22.22]

Lehrer: […] wir wollen ja die für die Berufsfähigkeit fit machen und sie müssen ja selbstständig arbeiten, sie müssen ja halt irgendwie wissen, wo gibt es Möglichkeiten, […] Da gibt es dann halt ein Formelbuch, da gibt es dann halt irgendwie Rechenbeispiele und so und da kann ich mal nachschauen und dann muss ich halt Transferleistung erbringen und da hoffe ich halt äh... dass das dann die Schüler hier lernen.

Hier sind die Aussagen des Lehrers untereinander konsistent und auch die gewählten Aufgaben, beispielsweise zum Fernsehturm, passen zu diesem genannten Ziel.

8.5 Aspekte kognitiver Aktivierung

Aus den bisher dargestellten Ausschnitten wird in Zusammenhang mit den einzelnen Aufgaben vor allem die starke Lehrerlenkung bei Hilfestellungen deutlich.

I [00:55:05.01]

Lehrer: […] Und äh das war halt so in beiden Stunden war verhältnismäßig viel Hilfe da. […] Also in der Stationsarbeit war ja durch die Struktur und Organisation war ja viel Hilfe da. Also einmal hat es die Organisationsstruktur des der Stationsarbeit halt viel Hilfe geboten und Halt geboten und in der ersten Stunde, also in der Gruppenarbeit, war ja die Gruppe da halt.

Der Lehrer merkt hier selbst an, dass er relativ viele Hilfestellungen schon im Vorfeld gegeben hat und auch im Unterricht mehr helfen musste, als von ihm erwartet.
Laut eigener Aussage legt der Lehrer großen Wert auf kognitive Selbstständigkeit der Schülerinnen und Schüler, was im Unterricht vor allem dadurch sichtbar wird, dass der Lehrer viel am Pult sitzt und die Schülerinnen und Schüler eigenständig arbeiten lässt. Auch beobachtet er teilweise nur beim Gang durch die Klasse. Der Lehrer betont auch selbst im Unterricht, dass ihm die eigenständige Arbeit der Schülerinnen und Schüler besonders gut gefallen hat. Allerdings arbeiten die Lernenden durch die vielen schon auf den Arbeitsblättern vorgegebenen Hilfen zwar selbstständig, aber nicht unbedingt kognitiv selbstständig an den Aufgaben. Der Lehrer erkennt nicht, dass die oben benannten starken Hilfestellungen seinem direkt geäußerten Anspruch auf Selbstständigkeit der Lernenden widersprechen.
Als Reaktion auf Fehler und richtige Lösungen versucht der Lehrer zum Teil die selbständige Überprüfung durch die Schülerinnen und Schüler zu fördern, wobei aber die Falschheit der Antworten meistens nicht reflektiert wird. Häufig behindert er die selbstständige Überprüfung, indem er direkt auf einen Fehler hinweist oder eine Lösung als richtig bestätigt, ohne nach einer Begründung für die Lösung zu fragen. Insgesamt betrachtet fragt der Lehrer nur selten nach Begründungen, teilweise begründet er Lösungswege selbst, vereinzelt begründen auch die Schülerinnen und Schüler ihre Lösungen. Nur einmal regt der Lehrer einen Vergleich verschiedener Lösungswege an, der aber aufgrund fehlender Lösungen nicht zustande kommt. Allerdings diskutieren die Schülerinnen und Schüler selbständig innerhalb der Gruppen über verschiedene Lösungsmöglichkeiten. Vereinzelt fördert der Lehrer auch die Reflexion des bisherigen Lösungsweges.
Obwohl der Lehrer im Interview immer wieder die Bedeutung begrifflichen Denkens betont, konnten im Unterricht fast keine Szenen mit begrifflichem Denken identifiziert werden. Im Fokus stehen vor allem prozedurales Wissen und Faktenwissen. Die möglichen Verknüpfungen der gelernten Inhalte untereinander werden im Unterricht nicht deutlich, weswegen das strukturiere Denken eher nicht gefördert wird, obwohl die Unterrichtsstunden zur Zusam-

menfassung und Verknüpfung des bereits Gelrenten dienen sollten und explizit Strukturen im Denken hergestellt werden sollten.

8.6 Einschätzung des mathematischen Fachwissens anhand der Unterrichtsbeobachtungen

Eine Einschätzung des mathematischen Fachwissens anhand der Beobachtungen ist hier sehr schwer, da der Lehrer wenig Fachwissen zeigt. Daraus kann aber nicht darauf geschlossen werden kann, dass er nicht über Fachwissen verfügt. Der Lehrer macht im Unterricht keine fachlichen Fehler und verwendet mathematische Begriffe fast immer korrekt (siehe 8.4.3). Die Ergebnisse auf den Lösungsblättern an der Tafel müssen von ihm zwar korrigiert werden, aber nur weil er mit einem gerundeten Wert von π gerechnet hat, da er bei der Vorbereitung nicht berücksichtigt hat, das kürzlich der Taschenrechner in der Klasse eingeführt wurde.
Die Aufgaben passen thematisch zueinander und insbesondere in der Stationsarbeit wird der Themenbereich des Kreises aus verschiedenen Blickwinkeln beleuchtet, so dass darauf geschlossen werden kann, dass der Lehrer selbst über vielfältig verknüpftes Wissen zu diesem Themenbereich verfügt. Allerdings kann er beispielsweise für die im Rahmen dieser Untersuchung vorgegebene Aufgabe (siehe Station 5) auch auf direkte Nachfrage hin keine verschiedenen Lösungswege nennen. Der einzige von ihm ausgeführte Lösungsweg stellt eine Begründung der Aussage anhand mehrerer Beispiele dar, was im mathematischen Sinne noch keinen ausreichenden Beweis ergibt. Dies wird vom Lehrer aber nicht angesprochen. Den naheliegenden Beweis mithilfe algebraischer Umformungen spricht der Lehrer nicht an. Er erläutert aber, dass in der Mathematik Beweise auf mehreren Repräsentationsebenen möglich sind und vermutet, dass es eine zeichnerische Lösung für die Aufgabe geben muss, die er aber nicht einmal in Ansätzen benennen kann.

8.7 Zusammenfassende Interpretation und Einschätzung des fachdidaktischen Wissens

Die drei direkt aufeinanderfolgenden Unterrichtstunden des Lehrers 1 dienen der Wiederholung und Vertiefung des Wissens zu Umfang und Flächeninhalt eines Kreises. Zu Beginn werden mithilfe von Kopfübungen die Berechnung des Umfangs und des Flächeninhaltes eines Kreises bei gegebenem Durchmesser, bzw. Radius, wiederholt (siehe 8.3.1). Anschließend bearbeiten die Schülerinnen und Schüler in drei vom Lehrer nach Leistungsvermögen eingeteilten Gruppen je ein Arbeitsblatt zur Berechnung von Umfang und Flächeninhalt eines Kreises im Kontext des Berliner Fernsehturms (siehe 8.3.2 bis 8.3.8). In der folgenden Stationsarbeit lösen die Schülerinnen und Schüler in Einzelarbeit verschiedene Arbeitsblätter, die der Zusammenfassung und Wiederholung des Themas Umfang und Flächeninhalt eines Kreises dienen, aber auch weitere Aspekte im Themenfeld des Kreises ansprechen (siehe 8.3.10 bis 8.3.17). Die Stunden enden mit einer kurzen Besprechung einer der Aufgaben aus der Stationsarbeit sowie einer Reflexion der Stationsarbeit unter pädagogischen Gesichtspunkten.

Schülerbezogenes Wissen

Der Lehrer 1 scheint viel Wert auf die kognitive Selbstständigkeit der Lernenden zu legen. Während der Arbeitsphasen verbringt er viel Zeit am Lehrerpult oder beobachtet die Lernenden beim Gang durch die Klasse ohne einzugreifen. Bei auftretenden Fehlern versucht er mehrfach, die selbstständige Überprüfung durch die Lernenden zu fördern, indem er auf Aspekte in der Aufgabenstellung hinweist oder kommentarlos den nächsten Lerner zum Reden auffordert. Allerdings wird durch dieses Vorgehen den Schülerinnen und Schülern nicht deutlich, wie ihre Fehler zustande kommen. Außerdem bestätigt der Lehrer meistens selbst die Richtigkeit der Schülerantworten und weist oft direkt auf Fehler hin, was der kognitiven Selbstständigkeit widerspricht. Durch die vielen vom Lehrer vorgegebenen Hilfestellungen auf den Arbeitsblättern arbeiten die Lernenden nicht unbedingt *kognitiv* selbstständig. Sobald der Lehrer in Interaktion mit den Schülerinnen und Schülern tritt, lenkt er häufig sehr stark. Dies lässt darauf schließen, dass der Lehrer sein vorhandenes Wissen zur Bedeutung der kognitiven Selbstständigkeit nicht umsetzten kann. Dies ist ihm nur teilweise bewusst, da er zwar die starken Hilfestellungen während des Unterrichts kritisch reflektiert, nicht aber die vielen Hilfestellungen auf den Arbeitsblättern. Es wird aber zumindest vereinzelt deutlich, dass sich die Lernenden vor allem im Rahmen der Gruppenarbeit gegenseitig unterstützen.

Ein zweiter Aspekt, auf den der Lehrer nach eigener Aussage viel Wert legt, ist die Binnendifferenzierung. Dies führt dazu, dass er die Aufgabenauswahl und auch die Gestaltung der Aufgaben sowie den Umfang der Hilfestellungen an das von ihm eingeschätzte Leistungsniveau der Lernenden anpasst. Dabei scheint er den Leistungsstand der einzelnen Schülerinnen und Schüler größtenteils gut beurteilen zu können, da die Lernenden nach eigener Aussage während der Gruppenarbeit überwiegend leistungsmäßig in ihrer Gruppe gut zurecht kamen. Nur zwei Lernende fühlten sich unterfordert. Hieraus lässt sich schließen, dass auch der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben gut gewählt ist. Dies zeigt sich auch daran, dass die Gruppen, bis auf die Leistungsschwächste, kaum Hilfestellungen in der Arbeitsphase der Gruppenarbeit benötigten. Dies lässt darauf schließen, dass der Lehrer durch seine Überlegungen im Vorfeld des Unterrichts, in denen er sich schon umfassend Gedanken zu möglichen Schwierigkeiten und Fehlern der Schülerinnen und Schüler gemacht, das Auftreten von Fehlern und Problemen in der Gruppenarbeitsphase vermeiden konnte. Dies hat er einer-

seits durch die vorgeschalteten Kopfübungen, die er speziell zur Vermeidung von Fehlern im folgenden Unterricht stellt, und andererseits durch die vielfältigen Hilfestellungen, die schon auf den Arbeitsblättern integriert sind, erreicht.
Bei der Stationsarbeit zeigt sich dagegen ein ganz anderes Bild. Im Interview merkt der Lehrer relativ oft an, dass er überrascht war, wie viel Hilfestellung die einzelnen Schülerinnen und Schüler benötigten. Die hier auftretenden Fehler hat der Lehrer offensichtlich nicht erwartet. Er kann aber die aufgetretenen Schwierigkeiten und Fehler im Nachhinein gut beschreiben und reflektieren und auch Maßnahmen für die folgenden Unterrichtsstunden nennen. Im Unterricht zeigt er Wissen über typische Schülerfehler, indem er beispielsweise bei der Aufgabe 1 der Station 5 (8.3.15) mehrfach nach korrekter Lösung der ersten Teilaufgabe auch die zweite Teilaufgabe beobachtet, in der sich erst die Verwendung der falschen Formel zeigt. Die von den Schülerinnen und Schülern benötigten Hilfestellen beziehen sich in der Stationsarbeit, teilweise auch in der Gruppenarbeit, häufig auf die Aufgabenstellung, die die Schülerinnen und Schüler aufgrund etwas undeutlicher Formulierungen nicht immer verstehen. Hier zeigen sich Mängel in der Verknüpfung von schülerbezogenem und inhaltsbezogenem Wissen. Es scheinen aber auch Mängel in der Verknüpfung des schülerbezogenen Wissens mit dem Wissen über das Verständlichmachen zu bestehen, da die Lernenden den Erläuterungen des Lehrers nicht immer folgen können. Vereinzelt geht der Lehrer auf Probleme, die in den Schüleräußerungen genannt werden, gar nicht ein. Der Lehrer reflektiert sein eigenes Verhalten aber kritisch und ist zum Teil mit seinen Erläuterungen selbst unzufrieden. Hieran zeigt sich, dass er durchaus über das nötige fachdidaktische Wissen verfügt, dieses aber nicht immer umsetzen kann.

Wissen über das Verständlichmachen mathematischer Inhalte

Der Lehrer legt viel Wert auf die Wiederholung der Inhalte mithilfe verschiedener Repräsentationsformen, da er explizit erläutert, dass in den Aufgaben der Stationsarbeit dieselben mathematischen Inhalte auf verschiedenen Repräsentationsebenen bearbeitet werden. Er scheint also über Wissen über die Bedeutung der verschiedenen Repräsentationsformen beim Wissensaufbau zu verfügen (vgl. 5.2.3). Die Analysen der objektiven Kennzeichen zeigen aber, dass in der Stationsarbeit zwar die mathematischen Gegenstände Umfang und Flächeninhalt eines Kreises in unterschiedlichen Aufgabenformaten vorkommen, dass sie aber jeweils formal repräsentiert werden. Auch im Unterricht überwiegt die formale Repräsentationsform stark. Der Lehrer verweist in seinen Hilfestellungen immer wieder auf die vorgegebenen Formeln hin, wobei sowohl der Lehrer als auch die Lernenden in ihren Erklärungen meistens nicht die Fachbegriffe, sondern nur die entsprechenden Formelzeichen (r anstelle von Radius, U anstelle von Umfang, usw.) verwenden. Die sprachliche Repräsentation der Inhalte ist daher teilweise etwas schwach ausgeprägt. Der Lehrer setzt vereinzelt auch enaktive Repräsentationen ein, da er beispielsweise der leistungsschwächsten Gruppe in der Gruppenarbeit eine Schnur als Hilfe zur Bearbeitung einer kontextorientierten Umfangsberechnung vorgibt. Dies dient zur Unterstützung der Vorstellung der Lernenden (siehe 8.3.5). Visualisierungen werden vom Lehrer teilweise in den Aufgabenstellungen vorgegeben, zusätzlich dazu werden aber nur vereinzelt Visualisierungen als Hilfestellung angeboten. Hier wird deutlich, dass der Lehrer sein vorhandenes Wissen über verschiedene Repräsentationsformen nicht immer in Unterrichtshandlungen umsetzt.
Der Lehrer zeigt durch die Betonung der kognitiven Selbstständigkeit der Lernenden zwar Wissen über konstruktivistische Lerntheorien (siehe 5.1.1), dieses Wissen scheint sich aber nicht in Unterrichtshandlungen niederzuschlagen. Dies äußert sich darin, dass der Lehrer die

Schülerinnen und Schüler zwar größtenteils selbstständig arbeiten lässt, sie erhalten aber auch in den selbsttätigen Schülerarbeitsphasen viel Hilfestellung vom Lehrer. Er gibt mehrfach die benötigten Formeln auf den Arbeitsblättern mit an und teilweise wird durch kleinschrittige Fragen auf dem Arbeitsblatt der Lösungsweg vorgegeben. Bei auftretenden Problemen oder Fehlern, aber auch im Anschluss an richtige Lösungen, steuert der Lehrer oft durch kleinschrittige, weiterführende Fragen den Lösungsweg der Lernenden. Er fügt den Schülerantworten mehrfach weitere Erläuterungen hinzu und gibt teilweise sogar komplette Lösungswege vor, wenn die Schülerinnen und Schüler seinen Hinführungen nicht folgen können. Der Lehrer kann diese starke Lenkung aber nicht umfassend reflektieren, da er seinen Unterricht als sehr schülerzentriert wahrnimmt.
Bei schwerwiegenden Problemen ändert der Lehrer zum Teil seine Erklärungsstrategie. Die Schülerinnen und Schüler werden dagegen kaum zur Erläuterung oder zum Vergleich ihrer Lösungswege angeregt. Stattdessen hängt der Lehrer die Lösungen für die Aufgaben der Gruppenarbeit und die Aufgaben der Stationsarbeit jeweils an der Tafel aus, damit sich die Schülerinnen und Schüler selbstständig korrigieren können. Dies führt aber auch dazu, dass die Lernenden die Lösungen abschreiben, ohne vorher die Aufgabe komplett gelöst zu haben. Nur die Lösung einer Aufgabe, die der Lehrer als sehr schwer ansieht, wird im Anschluss an die Stationsarbeit kurz besprochen. Der Lehrer hatte eine ausführliche Besprechung der Aufgabe geplant, in der vor allem die Präsentation verschiedener Lösungen durch die Schülerinnen und Schüler vorgesehen war, dies konnte aber aufgrund von zu wenig Zeit nicht durchgeführt werden. Hier zeigt sich, dass der Lehrer durchaus über Wissen über die Bedeutung der Erklärung von Lösungswegen verfügt, auch wenn er es in den beobachteten Unterrichtsstunden nicht umsetzt.
Lehrer und Lernende verwenden größtenteils korrekte Fachsprache, insbesondere betont der Lehrer, dass die Schülerinnen und Schüler die Fachbegriffe wie Vokabeln einer Fremdsprache üben müssen und auch Beziehungen zwischen den verschiedenen mathematischen Begriffen herstellen sollen. Außerdem fördert er durch eine spezielle Aufgabe im Rahmen der Stationsarbeit die Verwendung von Fachsprache. Hier zeigt sich das Wissen des Lehrers über die Bedeutung von Fachsprache im Unterricht. Zur Erläuterung mathematischer Begriffe greift der Lehrer aber auch bewusst auf Alltagskontexte zurück, welche er mit den mathematischen Fachbegriffen verbindet.
Des Weiteren zeigt der Unterricht des Lehrers nur vereinzelt Elemente kognitiver Aktivierung, was auf Lücken im fachdidaktischen Wissen oder fehlende Umsetzung dieses Wissens schließen lässt. Dies führt dazu, dass der Lehrer zwar manchmal die Reflexion des Lösungsweges initiiert, ein Vergleich verschiedener Lösungswege findet aber kaum statt. Auch werden die Lernenden kaum zur Erläuterung und Begründung ihrer Ergebnisse und Lösungswege aufgefordert. Auch der Lehrer selbst führt kaum Argumentationen in seinen Erläuterungen aus. Da die Aufgaben der Gruppenarbeit alle in den gemeinsamen Kontext des Berliner Fernsehturms eingebunden sind, fördert der Lehrer zwar bewusst das außermathematische Modellieren und die Anwendung bereits gelernter Inhalte auf Alltagsituationen. Allerdings ist das Modellierungsniveau der Aufgaben sehr niedrig.

Inhaltsbezogenes Wissen

Die vom Lehrer gewählten Aufgaben erfordern sehr unterschiedliche Typen mathematischen Arbeitens. Auf die technischen Kopfübungen folgen in der Gruppenarbeitsphase ausschließlich rechnerische Modellierungs- und problembezogene Aufgaben, in der Stationsarbeit sind dagegen vor allem begriffliche Modellierungs- und problembezogene Aufgaben

sowie technische Aufgaben mit dem Fokus auf Fertigkeiten integriert. Allerdings erfordern fast alle vom Lehrer gewählten Aufgaben insgesamt sehr wenige außermathematische Modellierungen, fast keine innermathematischen Modellierungen, kein mathematisches Argumentieren und kaum die Verwendung von Darstellungen. Eine Ausnahme stellt die Aufgabe zur Fortführung des Kreismusters dar, die vor allem innermathematisches Modellieren und die Verwendung von Darstellungen auf hohem Niveau erfordert. Außerdem werden die Aufgaben fast ausschließlich verfahrensbetont bearbeitet. Das prozedurale Denken und die Aktivierung von Faktenwissen stehen stark im Vordergrund. Begriffliches Denken wird im Unterricht fast gar nicht angesprochen, obwohl der Lehrer im Interview die Bedeutung des Denkens in Zusammenhängen betont. Demzufolge nutzt der Lehrer das Potenzial der begrifflich geprägten Aufgaben nicht aus, obwohl die Interviewaussagen teilweise darauf hindeuten, dass er das Potenzial der Aufgaben durchaus erkennt. Dies lässt wiederum auf Mängel in der Umsetzung es vorhandenen fachdidaktischen Wissens schließen, was dazu führt, dass das vom Lehrer selbst genannte Ziel des Herstellens von Zusammenhängen nicht erreicht wird.
Das Potenzial der im Rahmen dieser Untersuchung vorgegebenen Aufgabe zur Verbindung der Konzepte Umfang und Flächeninhalt erkennt der Lehrer nicht. Er beschränkt die Aufgabe im Unterricht sogar unbewusst auf die Betrachtung des Umfangs, was auch durch die von ihm als Hilfestellung vorangestellte Aufgabe hervorgerufen worden sein kein. Er kann zwar die in dieser Aufgabe angesprochenen Proportionalitäten beschreiben, beschränkt sich aber bei der Beschreibung der Aufgabenlösung auf das Verallgemeinern anhand mehrerer Beispiele (siehe 8.3.15). Auch hier zeigen sich wieder deutliche Mängel des Lehrers im inhaltsbezogenen Wissen, aber auch im mathematischen Fachwissen.
Der Sprachstil des Lehrers, mit vielen Brüchen, Wiederholungen und unklaren Formulierungen, zeigt, dass er sich gerade in der Beschreibung der inhaltlichen Aspekte unsicher ist und diese nicht immer klar formulieren kann. Dies lässt darauf schließen, dass sein Wissen vor allem implizit vorliegt. Die Unterrichtsstunden sollten der Übung und Wiederholung des bereits gelernten Stoffes dienen. Der Lehrer reflektiert aber kritisch, dass das Leistungsvermögen einiger Schülerinnen und Schüler in diesem Themengebiet noch nicht ausreichend ist, so dass die inhaltlichen Ziele noch nicht erreicht sind. Außerdem benennt er die prozessbezogene Kompetenz des Kommunizierens als ein Unterrichtsziel, welches vor allem in der Gruppenarbeit größtenteils als erreicht scheint. Diese klare Benennung lässt wiederum auf Wissen über die Bildungsstandards schließen, welches auch im Unterricht umgesetzt wird.
Ebenso zeigt der Lehrer theoretisches Wissen über die Bedeutung der Vernetzung beim Wissenserwerb, was dazu führt, dass er viele Verbindungen im Unterricht herstellt: Durch das gemeinsame Themengebiet des Kreises sind die Aufgaben inhaltlich stark miteinander verbunden, was der Lehrer mit dem schuleigenen Lehrplan und dem Schulbuch, nicht aber mit dem Kerncurriculum begründet. Die Schülerinnen und Schüler können vielfältige Verbindungen zum Vorwissen herstellen, der Lehrer weist hierauf auch mehrfach im Unterricht hin. Die Kopfübungen zu Beginn der Stunde und einige Aufgaben der Stationsarbeit dienen als Hilfestellungen für andere Aufgaben. Dabei ist allerdings problematisch, dass die Lernenden die Reihenfolge der Aufgaben selbst bestimmen können. Darüber hinaus werden in vielen Aufgaben durch die erforderlichen Termwertberechnungen Verbindungen zur Algebra und teilweise durch die Aufforderung zur Materialkostenberechnung Verbindungen zur Arithmetik hergestellt. Außerdem stellt der Lehrer in der Gruppenarbeit bewusst Verbindungen auf der Kontexteben her. Allerdings wird in den Aufgaben bis auf wenige Ausnahmen entweder der Flächeninhalt oder der Umfang eines Kreises angesprochen, so dass die beiden Konzepte

eher unverbunden nebeneinander angewendet werden müssen. Dies erkennt der Lehrer nicht und zeigt damit teilweise Mängel in der Umsetzung des inhaltsbezogenen Wissens.

8.8 Vergleich mit den Ergebnissen des COACTIV-Tests

Im COACTIV-Testteil zum mathematikdidaktischen Wissen erzielt der Lehrer 7 von empirisch zu erreichenden 37 Punkten. Er liegt damit deutlich unter dem Durchschnitt der nicht-gymnasialen Lehrkräfte, die an der COACTIV-Studie teilgenommen haben (vgl. Abbildung 2.3). Es ist dabei aber zu berücksichtigen, dass der COACTIV-Test nicht für Hauptschullehrerinnen und -lehrer entwickelt wurde. Allerdings ist der Lehrer zumindest an der Universität gemeinsam mit Realschullehrern ausgebildet worden und hat sich berufsbegleitend in mathematikdidaktischen Veranstaltungen an einer Universität engagiert, so dass dieses Ergebnis etwas überraschend ist.

Im Testabschnitt zum schülerbezogenen Wissen kann der Lehrer teilweise die Schülerfehler erkennen und beschreiben, teilweise gelingt ihm dies jedoch auch bei hauptschulrelevanten Inhalten nicht. Fehlerursachen und Interventionsmöglichkeiten kann der Lehrer nicht benennen. Allerdings begründet er die Auswahl der von ihm präferierten Trapezformel (siehe Abbildung 7.4) überzeugend, auch wenn er im Sinne der COACTIV-Kodierungen die falsche Formel gewählt hat und deshalb keine Punkte für die Begründung erhält. Im Gegensatz zum Testergebnis zeigen die qualitativen Analysen aber, dass der Lehrer im Unterricht sehr wohl mögliche Schülerfehler erkennt, teilweise aber nicht immer geeignet darauf reagieren kann.

Die Aufgaben zum Verständlichmachen mathematischer Inhalte kann der Lehrer größtenteils nicht lösen. Er versucht zwar in Ansätzen, Erklärungen zu benennen, diese bleiben aber sehr vage. Die Aufgabe ‚Minus 1 mal minus 1‘ (vgl. Abbildung 2.2) bearbeitet er gar nicht, obwohl es sich hier explizit um eine Fragestellung handelt, die auch in der Hauptschule relevant ist. Hier bestätigt sich der Eindruck aus den qualitativen Analysen, dass der Lehrer zwar über grundsätzliches Wissen verfügt, dieses kann aber kaum in Unterrichtshandlungen umgesetzt werden.

Im Testabschnitt zum inhaltsbezogenen Wissen kann der Lehrer nur für eine Aufgabe verschiedene adäquate Lösungen benennen. Eine Aufgabe versteht er falsch und einen einfachen algebraischen Beweis führt er nur anhand von zwei Zahlenbeispielen aus. Selbst die Aufgabe ‚Quadrat‘ (siehe Abbildung 2.2), die inhaltlich durchaus für die Hauptschule relevante ist, kann der Lehrer nicht lösen. Er nennt lediglich ein Zahlenbeispiel. Dies bestätigt den Eindruck des Lehrers, der anhand der qualitativen Analysen gewonnen wurde.

Die Aufgaben zum mathematischen Fachwissen hat der Lehrer alle nicht bearbeitet, nur bei einer Aufgabe wird anhand eines Skizzenansatzes deutlich, dass er sich zumindest Gedanken über die Aufgabe gemacht hat. Der Lehrer hat daher 0 von 13 zu erreichenden Punkten erzielt.

9 Darstellung der Analysen von Lehrerin 2

9.1 Überblick über die Unterrichtsstunden

Für die Lehrerin 2 wurden zwei einzelne Unterrichtsstunden videografiert, die dritte geplante Stunde konnte aufgrund eines Schulausfalls und anschließender Weihnachtsferien nicht stattfinden. In den beobachteten Stunden unterrichtet die Lehrerin einen A Kurs, der sich aus den Schülerinnen und Schülern dreier neunter Klassen zusammensetzt, die in Mathematik am Ende der 8. Klasse mindestens die Note ‚3' hatten. Die Leistungen der Schülerinnen und Schüler variieren nach Aussage der Lehrerin stark.
Die beiden Unterrichtsstunden gehören zu einer Unterrichtseinheit, die der Wiederholung und Vertiefung der Begriffe ‚Flächeninhalt' und ‚Umfang' verschiedener Figuren dient. Hierzu hat die Lehrerin einen Stationenzirkel zum Thema ‚Rund um den Hausbau' vorbereitet. Die Schülerinnen und Schüler arbeiten jeweils zu zweit an einem von fünf Arbeitsblättern (siehe 9.3.1 bis 9.3.6), wobei je zwei Schülerpaare, die weit auseinandersitzen, an denselben Aufgaben arbeiten. In den zwei beobachteten Stunden wird entgegen der Planung nur je ein Arbeitsblatt pro Schülerpaar bearbeitet. Während der Bearbeitung der Aufgaben geht die Lehrerin von Gruppe zu Gruppe, beantwortet Fragen, kontrolliert die Lösungsprozesse und hilft bei Problemen weiter. Die Besprechung der Aufgaben ist nach der Bearbeitung aller Aufgaben durch alle Schülerpaare geplant. Aufgrund des Schulausfalls findet jedoch keine Vorstellung der Ergebnisse statt.

9.2 Darstellung aufgabenübergreifender Aspekte des Unterrichts

Der Arbeitsplan

Der Fokus der Stunden liegt auf der Einübung eines in vorangegangenen Stunden erarbeiteten, von der Lehrerin sogenannten ‚Arbeitsplans', der für jede Aufgabe in der in Abbildung 9.1 dargestellten Form abgearbeitet werden soll. Dies wird an folgenden Aussagen der Lehrerin deutlich:

Planung:
Der Fokus liegt auf der Erstellung eines Arbeitsplans (Lösungswegs) und dessen Abarbeitung.
I [00:08:03.22]
Lehrer: Ja dann eben halt die Formeln und wenn sie die Formeln haben, dann brauchen sie die Maße, und dann, und das hab ich, bei einigen hat's ja schon gefasst, […], ich hab die Fläche, ich hab die Formel, ich hab die Maße, ich brauch die Zahlen nur noch in die Formel einzusetzen und dann hab ich ja meine Lösung. Und dann, ja, Maße und dann eben halt berechnen und als fünften und sechsten Punkt dann eben halt die Umsetzung der einzelnen.

Arbeitsplan

1. Flächen
2. Formeln
3. Maße
4. Rechnung
5. Kosten

Abbildung 9.1: Von der Lehrerin vorgegebener Arbeitsplan

In diesem Transkriptausschnitt betont die Lehrerin stark das prozedurale Denken, andererseits spricht sie in Zusammenhang mit dem ‚Arbeitsplan' aber auch das begriffliche Denken an, wie der folgende Transkriptausschnitt zeigt:

I [00:14:58.07]
Lehrer: […] zu abstrahieren und weiterzuentwickeln, also zu transferieren auf andere Aufgaben, das fällt denen schon schwerer, und dazu sollte eben aber dieser Arbeitsplan dienen.
I [00:36:15.24]
Lehrer: Und wichtig war mir eben die Erstellung des Arbeitsplanes, dass sie eben halt eine bestimmte Struktur in die Aufgaben reinkriegen und nicht davor sitzen und sagen, oh, ist das kompliziert, das mach ich gar nicht erst.

Am zweiten Transkriptausschnitt zeigt sich, dass die Lehrerin den ‚Arbeitsplan' als Hilfestellung für die Schülerinnen und Schüler ansieht. In den Analysen der einzelnen Aufgabenbearbeitungen wird allerdings deutlich, dass die Lehrerin den ‚Arbeitsplan' immer in der vorgegebenen Form Abbildung 9.1) vorgibt. Dabei zeigen die Analysen der objektiven Kennzeichen der einzelnen Aufgaben, dass diese starre Form des Arbeitsplanes (siehe Abbildung 9.1) nicht für alle Aufgabenbearbeitungen geeignet ist (z.B. Station 3, Aufgabe 1 ‚Zimmermann original'). Trotzdem fordert die Lehrerin auch bei diesen Aufgaben die Erstellung des Arbeitsplanes und fördert so eine prozedurale Bearbeitung der Aufgaben. Außerdem werden teilweise die Lösungsprozesse der Schülerinnen und Schüler behindert (siehe z.B. 0). So haben die Lernenden beispielsweise mehrfach Schwierigkeiten zu erkennen, dass bei einigen Aufgaben Umfangsberechnungen nötig sind, was durch den ersten Punkt ‚Flächen' im sogenannten Arbeitsplan verursacht oder verstärkt worden sein kann.

I [00:01:57.23]

Lehrer: […] Wir haben das Flächen genannt, das war auch, da muss ich also auch nochmal hinterhaken, das ist mir auch aufgefallen, weil die benutzen Flächen dann immer Flächenberechnung, ne die kommen dann gar nicht auf den Umfang, wie bei der einen Aufgabe so ne, und eigentlich hätte ich sagen müssen, was sind das für Figuren.

Die Lehrerin kann hier den Einsatz des Arbeitsplanes in seiner starren Form teilweise kritisch reflektieren. Sie erwähnt aber in keiner Weise, dass die Abfolge der Schritte bei einzelnen Aufgaben nicht zum Lösungsprozess passt. Damit stellt der Arbeitsplan entgegen den Äußerungen der Lehrerin nicht immer eine Hilfestellung dar. Außerdem gibt die Lehrerin durch die Vorgabe des Arbeitsplanes einen möglichen allgemeinen Lösungsweg vor. Dies widerspricht aber folgendem Ausschnitt aus der Planung:

Planung:

Die Erarbeitung eines Lösungs-/Arbeitsplans und dessen Abarbeitung ist extrem wichtig bei der selbständigen Lösung eines Problems/einer Aufgabe. […] Schüler haben verlernt, selbständig etwas zu erarbeiten bzw. selbständig zu denken. Ihnen wird häufig vorgegeben, was zu tun ist.

Hier zeigt sich indirekt, dass die Lehrerin über Wissen über die Bedeutung kognitiver Selbstständigkeit verfügt. Die Lehrerin reflektiert aber nicht, dass die Schülerinnen und Schüler durch die ‚Hilfestellung' des starren Arbeitsplanes zwar ohne Hilfe der Lehrperson arbeiten können, dass sie aber aufgrund des vorgegebenen Lösungsweges nicht *kognitiv* selbstständig sind.

9.3 Darstellung des Unterrichts und Analysen von Aspekten des fachdidaktischen Wissens anhand der eingesetzten Aufgaben

Alle von der Lehrerin gestellten Aufgaben werden im Rahmen einer Stationsarbeit in Partnerarbeit bearbeitet. Die Paare bleiben an ihren jeweiligen Plätzen sitzen und holen sich je ein Aufgabenblatt an ihren Arbeitsplatz. Dabei rotieren die Aufgaben, so dass benachbarte Paare zur selben Zeit jeweils verschiedene Aufgaben bearbeiten.

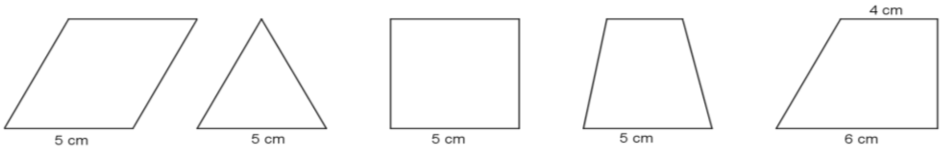
9.3.1 Station 1 - Aufgabe 1 ‚Flächen vergleichen'

Hier siehst du 5 verschiedene Figuren (Zeichnung nicht maßstabsgetreu).

Benenne die Figuren und füge die Formel zur Berechnung der Fläche hinzu.

- Welche Figuren haben den gleichen Flächeninhalt?
- Welche Figur hat den kleinsten Flächeninhalt?
- Welche Figur hat den größten Flächeninhalt?

Nimm die Buchstaben zur Abkürzung und <u>begründe</u> deine Antworten!



__________ __________ __________ __________ __________

Formeln zur Flächenberechnung:

__________ __________ __________ __________ __________

Begründung:

Abbildung 9.2: Station 1 – Aufgabe 1 ‚Flächen vergleichen'

Diese Aufgabe stellt eine Abwandlung einer im Rahmen der Untersuchung vorgegebenen Aufgabe dar (siehe 7.3.1). Die nach Kriterien zur Förderung kognitiver Aktivierung in Anlehnung an Jordan et al. (2006) erstellte ursprüngliche Aufgabe ist in Abbildung 9.3 dargestellt.

Hier siehst du 5 verschiedene Figuren (Zeichnung nicht maßstabsgetreu).

- Welche Figuren haben den gleichen Flächeninhalt?
- Welche Figur hat den kleinsten Flächeninhalt?
- Welche Figur hat den größten Flächeninhalt?

Nimm die Buchstaben zur Abkürzung und <u>begründe</u> deine Antworten!

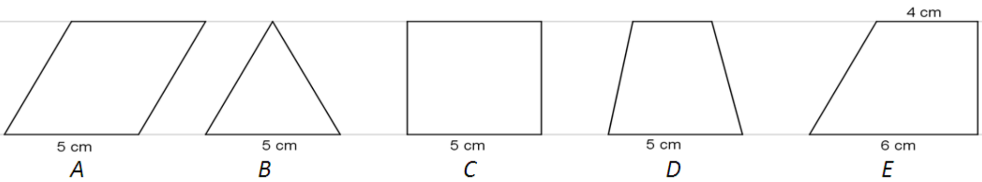


Abbildung 9.3: Ursprünglich vorgegebene Version der Aufgabe ‚Flächen vergleichen'

Die Lehrerin reduziert das Potenzial der Aufgabe zur kognitiven Aktivierung deutlich durch die Aufforderung zum Benennen der Figuren und zum Aufschreiben der Formeln zur Flächenberechnung sowie die Zeile, in der die Formeln zur Berechnung der Flächen eingetragen werden sollen (siehe objektive Kennzeichen dieser Aufgabe). Die Lehrerin erkennt die Reduktion des Potenzials nicht, sie spricht im Gegensatz dazu von einer Erweiterung der Aufgabe:

I [00:08:03.22]

Lehrer: […]ich hab natürlich die Aufgabenstellung so ein bisschen noch erweitert, also sie sollen erstmal die Flächen benennen und dann die Formeln zur Flächenberechnung aufschreiben.

Die Lehrerin scheint hier unter Erweiterung das Hinzufügen von einzelnen Arbeitsaufträgen zu verstehen. Dadurch wird das mathematische Denken aber eher eingeschränkt (vgl. objektive Kennzeichen dieser Aufgabe).
Durch die Abwandlung der Aufgabe unterstützt die Lehrerin das in der Aufgabe mögliche Argumentieren, indem sie die Zeile, in der die Schülerinnen und Schüler die Begründung der Lösung aufschreiben sollen, anfügt. Außerdem wandelt sie die Aufgabe ab, indem sie die in der vorgegebenen Aufgabe enthaltenen horizontalen, parallelen Linien im Abstand der Höhe der Figuren, die auf die gemeinsame Höhe schließen lassen, entfernt. Hierzu benennt die Lehrerin keine Gründe. Die Auswahl der Aufgabe wird von der Lehrerin wie folgt begründet:

I [00:01:29.25]

Lehrer: Das ist ja ne Aufgabenstellung , ein Aufgabenzyklus gewesen, der sowieso vorkam, ich hab deine Aufgaben ja einfach nur da so eingebaut, und der also auch sowohl vom hauseigenen Stoffplan als auch vom Schulbuch her also drankam, und der auch vorbereitet ja auf die Prüfungen. Weil in der Prüfung kommen ja solche Aufgaben (zeigt auf Station 1, zwischen Aufgabe 1 und 2) und ähnliche ja en masse vor.

Die Lehrerin erkennt hier nicht, dass es sich bei dieser Aufgabe eben nicht um eine Standardaufgabe handelt, da sie davon spricht, dass dies eine gängige Aufgabe in den Abschlussprüfungen sei. Der Vergleich der objektiven Kennzeichen der Aufgaben zeigt insbesondere, dass diese Aufgabe stark von den sonstigen von der Lehrerin aus dem Schulbuch ausgewählten Aufgaben abweicht. Die Lehrerin scheint daher nicht in der Lage zu sein, das Potenzial der Aufgaben umfassend zu beurteilen. Sie erkennt aber die möglichen inhaltlichen Vernetzungen innerhalb dieser Aufgabe:

I [00:08:03.22]

Lehrer: […] deswegen fand ich diese Aufgaben hier (zeigt auf Station 1 Aufgabe 1) auch so gut, weil da eben alle Flächen drin waren.

Desweiteren fügt die Lehrerin dieser Aufgabe innerhalb derselben Station eine weitere Aufgabe hinzu (siehe Anhang). Die Aufgaben sind aber kaum miteinander verbunden und werden deshalb separat dargestellt (siehe objektive Kennzeichen Aufgabe 1 und 2).

Objektive Kennzeichen der Station 1 - Aufgabe 1 ‚Flächen vergleichen'

Die Aufgabe ist als begriffliche Modellierungs- und problembezogene Aufgabe einzuschätzen. Der inhaltliche Fokus der Aufgabe liegt im Bereich Geometrie, hier müssen die Schülerinnen und Schüler die Flächeninhalte verschiedener ebener Figuren vergleichen. Hierzu benötigen sie gleichzeitig Wissen über die mathematischen Gegenstände Parallelogramm, Dreieck, Rechteck und Trapez. Es sind verschiedene Lösungswege denkbar. Die Schülerinnen und Schüler können einerseits die vorgegebenen Figuren mithilfe von Zerlegungen, wie sie auch bei der Herleitung der Formeln zur Flächenberechnung benutzt werden, vergleichen. Andererseits können sie die Formeln für die verschiedenen Figuren bestimmen und diese gegenüberstellen. Problematisch ist bei dieser Lösung, dass die Höhe nicht als konkreter Zahlenwert gegeben ist. Die Schülerinnen und Schüler müssen also entweder erkennen, dass die Höhe für den Vergleich der Flächen allgemein weggelassen werden kann, da diese in allen Formeln als Faktor auftaucht, oder sie denken sich einen Wert für die Höhe aus. Alle Lösungswege erfordern innermathematisches Modellieren auf mittlerem Niveau und auch mathematisches Argumentieren ist in dieser Aufgabe auf mittlerem Niveau notwendig, da der Vergleich der verschiedenen Figuren eine mehrschrittige Argumentation erfordert, die durch die nicht bekannte Höhe auch über Standardargumentionen hinausgeht. Der erste Lösungsweg erfordert darüber hinaus die Verwendung von Darstellungen auf mittlerem Niveau, da

die gegebenen Figuren miteinander in Beziehung gesetzt werden müssen, beim zweiten Lösungsweg werden dagegen nur Informationen aus den Darstellungen entnommen.
Durch die Aufforderung zum Benennen der Figuren und zum Aufschreiben der Formeln zur Flächenberechnung sowie durch das Hinzufügen der Zeile zum Eintragen der Formeln wird den Schülerinnen und Schüler einerseits eine Hilfestellung zur Findung eines Lösungsweges gegeben, andererseits wird eine starke Fokussierung auf den Lösungsweg mithilfe der Formeln vorgenommen. Dadurch wird das Potenzial der Aufgabe zur kognitiven Aktivierung verringert, da der Fokus der Aufgabe weg vom begrifflichen Denken, hin zum prozeduralen Denken verlagert wird. Es ist jedoch keine konkrete Höhe gegeben, so dass trotzdem noch begriffliches Denken erforderlich ist.

Analyse des Unterrichtseinsatzes der Station 1 - Aufgabe 1 ‚Flächen vergleichen'

Die Aufgabe wird während der beobachteten Unterrichtsstunden von insgesamt drei Schülerpaaren bearbeitet.

Schülerpaar AB

Für das Schülerpaar AB konnte die Bearbeitung dieser Aufgabe und das Handeln der Lehrerin ausführlich beobachtet werden. Die Schüler haben zunächst einige Schwierigkeiten, die Figuren zu benennen und die richtigen Formeln herauszufinden:

U [00:07:15.18]
Schüler A: Beim Parallelogramm, wie macht man da, ähm das hier (zeigt die Höhe)
Lehrer: Ja, du hast doch ne Formelsammlung. […]
Schüler A: Ja g mal h. […] Aber die Höhe ist dann auch 5 oder was? (zeigt Höhe im Parallelogramm von Aufgabe 1)
Lehrer: Überleg doch mal.
Schüler B: Die Grundlinie, ist doch alles gleich lang (zeigt einmal umzu)
Schüler A: //ja, ist doch // alles gleich lang.
Lehrer: Musst du unbedingt einen Wert für die Höhe haben?
Schüler A: Aber das könnte doch auch ne Raute sein, wenn man die so nimmt (dreht das Blatt) […] weil das ist alles gleich lang. Hier, ne Raute (misst Diagonale).
Lehrer: Ja wo ist denn die Höhe, wo ist die Höhe? Ja, das kann auch ne Raute sein, (unverständlich)
Schüler A: Machen wir ne Raute oder ein Parallelogramm?
Lehrer: Das ist mir egal, macht mal ein Parallel
Schüler A: Ist das denn beides die gleiche Formel?
Lehrer: Nein, macht mal ein Parallelogramm, ist einfacher von der Formel her. […] Mach dir nen Arbeitsplan.

In dieser Unterrichtsszene findet ein fragend-entwickelndes Unterrichtsgespräch statt. Die Lehrerin weist zunächst auf die Formelsammlung hin. Die Lernenden werden so daran gehindert, die Formel für den Flächeninhalt eines Parallelogramms selbstständig zu erinnern, bzw. herzuleiten. Anschließend regt die Lehrerin die Schüler mit dem Hinweis zum Überlegen kurz zum selbstständigen Denken an, sie versucht aber sofort im Anschluss auf die Allgemeinheit der Höhe zu lenken. Die Schüler sind dagegen in Gedanken wahrscheinlich noch bei der Frage, ob es sich bei der Figur um ein Parallelogramm oder eine Raute handelt. Die Lehrerin lenkt sehr stark, indem sie entscheidet, dass die Schüler ein Parallelogramm machen sollen. Hier wird das Vorgehen der Schüler in keiner Weise reflektiert, insbesondere wird hier das Potenzial zum begrifflichen Denken über die Eigenschaften und Zusammenhänge der Begriffe Parallelogramm und Raute verschenkt. Außerdem macht die Lehrerin hier einen fachlichen Fehler, da sie behauptet für die Berechnung des Flächeninhalts des Parallelogramms und der Raute werde die gleiche Formel verwendet. Es wird deutlich der von der Lehrerin durch die Ergänzung der Aufgabenstellung vorgezeichnete Lösungsweg mithilfe der Formeln verfolgt, wobei die Formeln sogar aus der Formelsammlung entnommen werden sollen. Trotz der bestehenden Vorstrukturierung innerhalb der Aufgabenstellung verweist die Lehrerin gegen Ende der dargestellten Szene und auch mehrfach an anderen Stellen im Zusammenhang mit der Aufgabenbearbeitung dieser Gruppe auf den Arbeitsplan. Der vorgegebene Arbeitsplan ist in der Aufgabenstellung nicht gefordert und für die Bearbeitung dieser Aufgabe nur bedingt einsetzbar, da z.B. nicht alle Maße gegeben sind und keine Materialkosten berechnet werden sollen. Dies lässt darauf schließen, dass die Lehrerin bei der Erstellung der Aufgaben (eventuell unbewusst) erkannt hat, dass der Arbeitsplan bei dieser Aufgabe unpassend ist. Im Unterricht ist sie aber so auf den Arbeitsplan (das von ihr genannte Hauptziel des Unterrichts, siehe 9.2) fokussiert, dass sie ihre Hilfestellungen scheinbar nicht reflektiert.

Im weiteren Verlauf zeigt sich die Einschränkung der Allgemeinheit durch den vorstrukturierten Lösungsweg ganz deutlich. Die Schüler finden keinen geeigneten Ansatz bei Figur E, sie haben die Höhe eingezeichnet und wollen mit Pythagoras die schräge Seite des Trapezes ausrechnen. Die Lehrerin lenkt die Schüler zunächst zu einem Vergleich der Formeln:

U [00:23:17.27] Lehrer: (lacht) so guckt mal, ihr habt doch da die Formeln. Was taucht denn da fast überall auf?

Schüler A: Die Höhe ist sowieso überall gleich, weil die alle gleich groß sind.

Lehrer: So (macht Geste: Da habt ihrs doch)

Schüler A: Wie kommen wir denn auf die Höhe? Also man macht hier

Lehrer: Wenn die Höhe überall gleich ist

Schüler B: Was haben wir denn hier (Figur A) gehabt, 5 ne?

Lehrer: Wenn die Höhe überall gleich ist,

Schüler B: Hab ich doch gesagt, dann ist hier (bei Figur E) auch 5 oder nicht?

Lehrer: Genau.

Schüler B: Hab ich doch gesagt.

Schüler A: Also ist einmal 5 und überall 5.

Lehrer: Richtig, ist doch so einfach, hast du doch wunderbar gesagt, wenn die Höhe überall gleich ist.

Schüler B: Dann hab ich das ja, dann ist das hier unten (Grundseite Figur C) dann ist das doch ein Quadrat und kein Rechteck.

Lehrer: Die muss doch nicht 5 sein, das ist doch nicht maßstabsgetreu.

Schüler B: Können wir uns dann was ausdenken?

Lehrer: Die Höhe ist, ja nein, die Höhe ist überall gleich, ist doch wunderbar, dann denkt euch doch

Schüler B: Sollen wir jetzt 4 nehmen?

Lehrer: Ja, dann denkt euch doch was aus.

Hier wird die Problemstellung deutlich reduziert, die Lehrerin bricht den Versuch zur allgemeinen Betrachtung der Höhe scheinbar ab und gibt sich mit der Lösung anhand eines Beispielswertes für die Höhe zufrieden. Das Potenzial der Aufgabe zum allgemeinen Denken wird hier verschenkt, obwohl die Lehrerin das Potenzial durchaus erkannt hat. Es wird sogar durch das Ausdenken eines Wertes für die Höhe das allgemeine Denken behindert. Außerdem müssen nun nur noch rein rechnerische Argumente entwickelt werden, so dass das Argumentationsniveau deutlich niedriger ist als möglich.

Diese Unterrichtsszene beschreibt die Lehrerin auch im Interview:

I [00:12:25.13]

Lehrer: […] da sind ja zum Teil auch wirklich schöne Ansätze gekommen, dass sie gesagt haben, ja Mensch, die Höhe ist ja überall gleich, da musste man sie ja auch mal so ein bisschen hinbringen, […] dass sie dann diesen Schritt weiterdenken, so ein bisschen, ähm abstrakter zu sagen, Mensch die Höhe ist überall gleich, also kann ich sie auch was weiß ich, ähm, kann ich einen Wert da von mir aus einsetzten, muss ja keine Variable nehmen, sondern ich setze einfach was weiß ich, setz da eine Zahl ein, was sie dann ja auch gemacht haben, also das war schon ein Schritt, fand ich ganz ganz toll für diese Klasse.

Hier zeigt sich, dass die Lehrerin nicht erkennt, dass das Potenzial der Aufgabe zum allgemeinen Denken nicht genutzt wird. Sie kann also das Schülerdenken im Nachhinein nicht reflektieren. Dies könnte damit erklärt werden, dass die Lehrerin kein verinnerlichtes Konzept vom allgemeinen Denken hat, sondern dieses selbst nur oberflächlich betrachtet. Dies wird auch beim folgenden Schülerpaar sichtbar.

Schülerpaar MN

Beim Schülerpaar MN kann nur eine kurze Szene beobachtet werden, in der die Schüler der Lehrerin ihre Strategie erklären:

U [00:22:18.09]

Schüler N: Wir haben jetzt erst mal die Fläche. Und was das ist, Parallelogramm, Dreieck, und die Formeln (unverständlich). Jetzt rechnen wir die aus.

Lehrer: Hmhm.

Schüler M: Dann müssen wir zu (unverständlich) 5 hinschreiben.

Lehrer: Hmhm. (geht zur nächsten Gruppe)

Das Unterrichtsvideo war hier leider teilweise unverständlich. Die Schüler scheinen für die Höhe den Wert 5 anzunehmen, was sich an einem späteren Transkriptausschnitt (s.u.) aus der nächsten Stunde zeigt, in dem die Schüler MN der dritten Schülergruppe KL, die an dieser Aufgabe arbeitet, erklären, dass Figur C ein Quadrat ist. Die Lehrerin greift hier nicht in die Bearbeitung der Lernenden ein, sondern lässt sie selbstständig weiterarbeiten. Sie fördert aber in keiner Weise das allgemeine Denken sondern akzeptiert die Reduktion auf den Spezialfall der Höhe 5.

Schülerpaar KL

Auch zum Schülerpaar KL gibt es nur einen kurzen Ausschnitt, hier zeigen sich aber einige Aspekte kognitiver Aktivierung:

U [00:44:00.24]

Schüler K: Ja, sie (zeigt auf MN) sagen auch, das ist ein Quadrat. Das ist aber ein Rechteck, haben wir ausgemessen.

Lehrer: Was spricht denn für ein Quadrat, was spricht denn für ein Rechteck. ... So das

Schüler K: Das ist aber ein Rechteck.

Lehrer: Warum ist das ein Rechteck?

Schüler M: Das kann eine optische Täuschung sein.

Schüler N: Ja, vielleicht.

Schüler K: Wir haben doch grad nachgemessen und das ist 1,9 und das hier ist 2,3 oder so.

Die Lehrerin regt hier gezielt die Reflexion und die Begründung des Vorgehens an und lässt die Schülerinnen selbstständig weiterarbeiten.

Zusammenfassung

Die Aufgabenbearbeitungen zeigen, dass vor allem das prozedurale Denken ohne Verbindung mit Konzepten im Vordergrund steht, so dass die Aufgabe verfahrensbetont im Unterricht bearbeitet wird. Besonders durch den Fokus auf den Arbeitsplan und die Äußerungen der Schülerinnen und Schüler, die auf Berechnung hinweisen, wird die Anwendung von Prozeduren ohne Verbindung mit Konzepten deutlich. Dies steht im Gegensatz zu den Äußerungen der Lehrerin im Interview zu dieser Aufgabe:

I [00:14:25.22]

Lehrer: […] Aber ich fand das so mal ganz schön nicht nur eben dieses stumpfe rechnen, sondern auch mal überlegen, mal ein bisschen nachdenken, ein bisschen um die Ecke denken.

Hier wird deutlich, dass sie das Potenzial der Aufgabe zur Förderung begrifflichen Denkens durchaus erkennt. Sie erkennt aber nicht, dass die Bearbeitung dieser Aufgabe in ihrem Unterricht überwiegend prozedural war. Dagegen kann die Lehrerin schon in der Planung die fehlenden Maße der Höhe zur Berechnung der Flächen und die Formulierung der Begründung als mögliche Schwierigkeiten benennen. Sie zeigt damit, dass sie die Schülerinnen und Schüler schon im Vorfeld gut einschätzen kann.

9.3.2 Station 1 - Aufgabe 2 ‚Dachgeschoss'

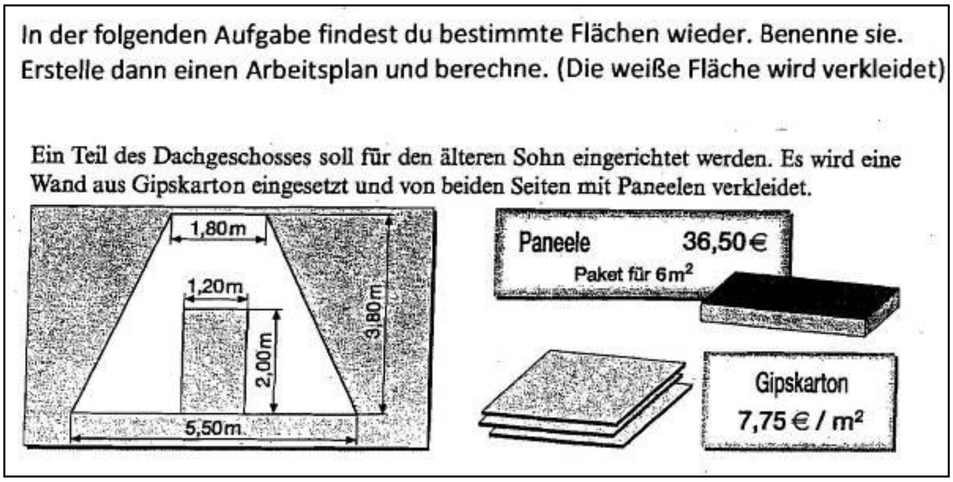


Abbildung 9.4: Station 1 - Aufgabe 2 ‚Dachgeschoss' (nach Golenia & Neubert, 2008, Westermann © Bildungshaus Schulbuchverlage GmbH, Braunschweig)

Diese Aufgabe wurde von der Lehrerin aus dem Schulbuch der Klasse ausgewählt. Die ersten beiden Zeilen fügte die Lehrerin selbst hinzu:

I [00:26:31.26]

Interviewer: Ja, jetzt hast du grad schon gesagt, du hast die Aufgabenstellung aus dem Buch ein bisschen geändert.

Lehrer: Hmhm, ich glaub bei der, ja auf alle Fälle immer das (zeigt auf den ersten Abschnitt der Aufgabenstellung) da vorgenommen, also erstelle einen Arbeitsplan ähm, äh, ja, erstelle einen Arbeitsplan ne, das war wichtig […]

Die Lehrerin fügt diese Aufgabe der Aufgabe 1 der Station 1 ‚Flächen vergleichen' auf einem Arbeitsblatt hinzu, denn:

I [00:14:19.07]

Lehrer: Ich hab dann unten die Aufgabe noch drangehängt, damit sie so in diesen Zyklus reinpasst, damit sie auch so ein bisschen…

Interviewer: Hausbau.

Lehrer: Genau, damit sie, da haben sie auch wieder Trapez und Rechtecke und die konnten sie dann berechnen.

Hier wird indirekt wieder der von der Lehrerin hergestellte Fokus der Aufgabe 1 deutlich, da die Aufgabe 1 nach Aussage der Lehrerin über die Berechnung der Flächeninhalte der verschiedenen Figuren mit dieser Aufgabe verbunden ist. Es wäre aber möglich gewesen, die erste Aufgabe ohne Berechnungen zu lösen, diesen Lösungsweg scheint die Lehrerin in keiner Weise zu beachten. Die beiden Aufgaben weisen keine weiteren Verbindungen zueinander auf und werden deshalb separat dargestellt (siehe objektive Kennzeichen Aufgabe 1 und 2).

Objektive Kennzeichen der Station 1 - Aufgabe 2 ‚Dachgeschoss‘

Die Aufgabe ist als rechnerische Modellierungs- und problembezogene Aufgabe einzuordnen, da überwiegend prozedurales Denken gefordert ist. Sie ist in den außermathematischen Kontext ‚Errichtung und Verkleidung einer Wand im Dachgeschoss‘ eingekleidet. Der inhaltliche Fokus der Aufgabe liegt einerseits im Bereich Geometrie. Die Schülerinnen und Schüler müssen in einem ersten Schritt beispielsweise die Fläche des weißen Trapezes (siehe Abbildung 9.4) berechnen und die Fläche des innen liegenden grauen Rechtecks hiervon subtrahieren. Sie können aber auch verschiedene andere Zerlegungen der weißen Fläche wählen, so dass innermathematische Modellierungen auf niedrigem Niveau nötig sind. Außerdem spielen auch Termwertberechnungen aus dem Bereich Algebra eine Rolle, indem die entsprechenden Maße in die Formeln für den Flächeninhalt der verschiedenen Figuren eingesetzt werden.
Anschließend müssen die Schülerinnen und Schüler die Materialkosten für die Errichtung und Verkleidung der Wand berechnen. Hier geht der inhaltliche Fokus in den Bereich Arithmetik über, da jetzt vor allem Arbeiten mit Größen und Rechnen mit Dezimalzahlen benötigt werden. Auch spielt jetzt der außermathematische Kontext eine große Rolle: Die Schülerinnen und Schüler müssen verstehen, dass eine Gipskartonwand aus einem Ständerwerk besteht, welches von zwei Seiten mit Gipskartonplatten verkleidet wird und dass anschließend diese Gipskartonplatten mit Paneelen verkleidet werden. Hier ist die Aufgabenstellung nicht wirklich realistisch, denn es fehlen die Kosten für das Ständerwerk. Eine Gipskartonwand ohne Ständerwerk einzubauen ist nicht möglich. Auch erscheint es unrealistisch, dass das Ständerwerk zunächst mit Gipskartonplatten und anschließend mit Paneelen verkleidet wird, die Gipskartonplatten sind eigentlich überflüssig und werden in der Praxis nur für tapezierte oder verputzte Wände benötigt.
Die Schülerinnen und Schüler müssen bei der Berechnung der Preise für die Gipskartonwand einerseits den Preis für den Gipskarton mit der Fläche multiplizieren. Dabei wird in dieser Aufgabe nicht berücksichtigt, dass die Gipskartonplatten nur in bestimmten Größen vorhanden sind und dass Verschnitt anfällt. Andererseits müssen die Lernenden bei der Berechnung des Preises für die Paneele darauf achten, dass die Pakete jeweils für sechs Quadratmeter reichen. Sie könnten die berechnete Fläche durch sechs dividieren und diesen Wert dann aufrunden oder sie addieren die Zahl sechs, bis der Wert größer als die berechnete Fläche ist. Dieser erhaltene Wert muss nun mit dem Preis für ein Paket Paneele multipliziert werden.
Trotz des starken außermathematischen Kontextes ist außermathematisches Modellieren nur auf geringem Niveau notwendig, da das Modell durch die Skizze der Wand und die Vorgabe der Verkleidung mit Paneele von beiden Seiten schon stark vorgegeben ist. Lediglich die Frage nach der Anzahl der Gipskartonwände muss von den Lernenden beantwortet werden. Die Schülerinnen und Schüler müssen nicht mathematisch argumentieren und Darstellungen nur auf niedrigem Niveau verwenden.
Mit der Betonung des Arbeitsplanes ist ein spezieller Lösungsweg von den Schülerinnen und Schüler gefordert. Es werden zwei Punkte des Arbeitsplanes nochmals einzeln aufgeführt: ‚Flächen benennen‘ sowie ‚Berechnen‘ (siehe Abbildung 9.4), wobei hier nicht deutlich wird, dass es sich um Unterpunkte des Arbeitsplanes handelt. Dies könnte die Schülerinnen und Schüler verwirren. Es wird des Weiteren noch deutlich darauf hingewiesen, dass die weiße Fläche verkleidet wird.

Analyse des Unterrichtseinsatzes der Station 1 – Aufgabe 2 ‚Dachgeschoss‘

<u>Schülerpaar KL</u>

Es konnte nur das Schülerpaar KL bei der Bearbeitung der Aufgabe beobachtet werden. Hier zeigt sich, dass die Schülerinnen keine Schwierigkeiten mit der Berechnung der weißen Fläche haben, der außermathematische Kontext bereitet ihnen aber große Probleme. Dies könnte durch die unklare und unrealistische Aufgabenstellung verursacht sein.

U [01:12:40.28]

Schüler K: Ja, hier steht nur eine Wand, welche Wand sollen wir denn nehmen?

Lehrer: Ja das, (zeigt auf Aufgabenstellung) die weiße Fläche wird verkleidet. Wer lesen kann ist klar im Vorteil.

Schüler K: Ja, aber da gibt‘s ja vier Wände.

Schüler L: Die weiße Fläche.

Lehrer: Die weiße Fläche wird verkleidet. […] Das ist die Fläche die verkleidet wird, also quasi tapeziert werden soll.

Schüler K: Ach so.

Schüler L: Mit dieser Paneele? (zeigt auf Aufgabenblatt, Paneele)

Lehrer: Mit dieser Platte.

Schüler K: Und einmal davon oder? (zeigt auf Gipskarton)

Lehrer: Gipskarton, ne, oder?

Schüler K: Einmal davon (zeigt auf Gipskarton), zweimal davon (zeigt auf Paneele).... Hier steht, aus Gipskarton eingesetzt.

Lehrer: Ach so, ja.

Schüler K: Und von beiden Seiten mit Paneele verkleidet.

Lehrer: Ja. das weiße Gipskarton und das Braune außen rum sind Paneele. […]

Schüler K: Hab ich jetzt von beiden Seiten?

Lehrer: Ach so, von ja beiden Seiten, ja natürlich dann von hinten und von vorne...Ja muss man sich vorstellen, man nimmt von beiden Seiten heißt von hinten und von vorne....(lacht) Ich stell mir auch grade vor, wie das aussieht, bisschen blöd,...

Schüler K: Ja, und jetzt? ...

Lehrer: Von beiden Seiten, das heißt einfach nur rechts und links.

Die Lehrerin betont mehrfach, dass die weiße Fläche verkleidet werden soll, auf die Vorstellung der Schülerinnen geht sie nicht ein. Die Schülerin K. macht den Vorschlag, einmal Gipskarton und zweimal Paneele zu berechnen. Dieser Vorschlag wird zunächst von der Lehrerin unterstützt. Ohne erkennbaren Grund wechselt die Lehrerin ihre Erklärung und weist die Schülerinnen darauf hin, von beiden Seiten hieße rechts und links von der Tür. Dies ist so gar nicht im Sinne der Aufgabenstellung. Die Lehrerin bringt die Schülerinnen hier vom richtigen Weg ab, die Aufgabenstellung scheint von der Lehrerin zu diesem Zeitpunkt selbst nicht verstanden zu werden. Die Bearbeitung der Aufgabe ist als verfahrensbetont einzuschätzen.

9.3.3 Station 2 ‚Gartenanlage'

Plane die Bepflanzung und Einzäunung und berechne die Kosten.
Überlege genau, wie du die Anlage gestalten willst.
Erstelle einen Arbeitsplan und berechne.

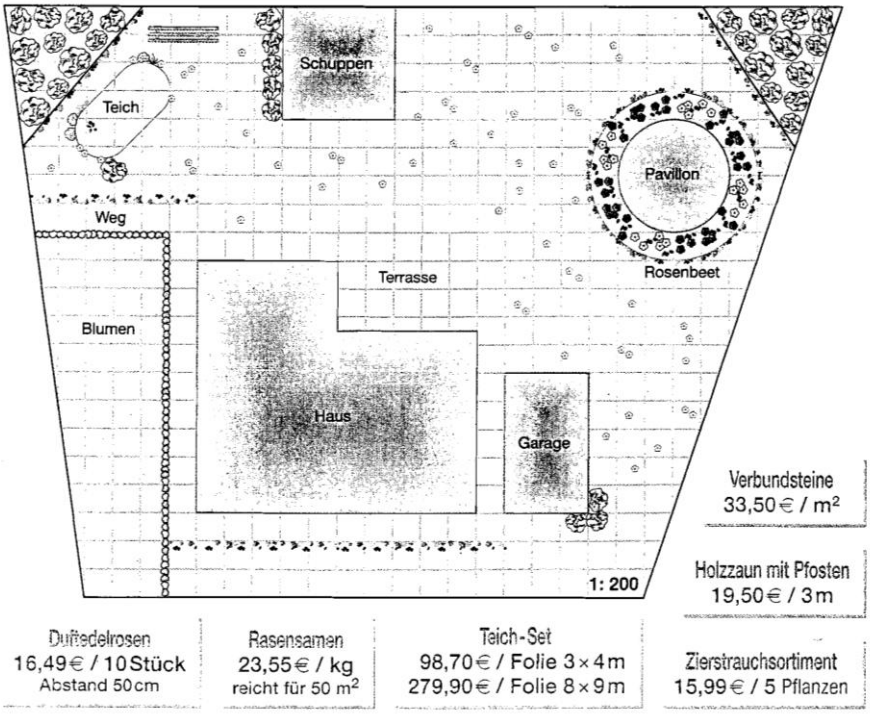


Abbildung 9.5: Station 2 ‚Gartenanlage' (nach Golenia & Neubert, 2008, Westermann © Bildungshaus Schulbuchverlage GmbH, Braunschweig)

Diese Station besteht nur aus einer Aufgabe, die von der Lehrerin aus dem Schulbuch der Klasse ausgewählt wurde. Den instruierenden Text fügte die Lehrerin selbst hinzu, da ihr die Betonung des Arbeitsplanes wichtig ist (siehe Seite 184).

Objektive Kennzeichen der Station 2 ‚Gartenanlage'

Die Aufgabe ist als rechnerische Modellierungs- und problembezogene Aufgabe einzuordnen, deren inhaltlicher Fokus im Bereich Geometrie liegt. Die Schülerinnen und Schüler müssen in dieser Aufgabe Flächeninhalt und Umfang verschiedener, auch zusammengesetzter, Figuren berechnen. Dabei müssen sie selbst geeignete Zerlegungen der Flächen vornehmen. Dies können sie auf unterschiedliche Art und Weise tun, wozu sie innermathematisch auf niedrigem Niveau Modellieren. Des Weiteren müssen sie die benötigten Maße zunächst durch Maßstabsumrechnungen ermitteln. Hier wird ein erster Bezug zum Bereich Arithmetik deutlich. Auch der Bereich Algebra wird mit den nötigen Termwertberechnungen gefordert.
Es bleibt den Schülerinnen und Schülern offen, auch geeignete Abschätzungen vorzunehmen. Sie können z.B. den Teich durch ein Rechteck annähern. Dies ist aufgrund der als rechteckig vorgegebenen Teich-Sets sogar sinnvoll, wobei auch die Tiefe des Teiches berücksichtigt werden sollte. Eine Berechnung der genauen Teichfläche ist nicht nötig. Insgesamt bietet die Aufgabe viele verschiedene Lösungswege. Allen Lösungswegen ist aber gemein, dass im Anschluss an die Berechnung der Fläche oder des Umfangs der verschiedenen Figuren die Preisen für das Material/die Pflanzen berechnet werden müssen. Hier wechselt der inhaltliche Fokus der Aufgabe in den Bereich Arithmetik, da es nun vor allem auf das Rechnen mit Dezimalzahlen sowie das Arbeiten mit Größen, ankommt. Hier müssen die unter-

schiedlichen Angaben bei den Preisen, z.B. ‚Rasensamen reicht für 50 Quadratmeter', bei der Berechnung berücksichtigt werden. So müssen die Schülerinnen und Schüler z.B. überlegen, wie viele Pflanzen des Zierstrauchsortimentes sie für eine bestimmte Fläche benötigen oder welches Teich-Set für den abgebildeten Teich in Frage kommt. Hierzu müssen sie verschiedenste Rechnungen ausführen, wozu sie auch außermathematische Modellierungen durchführen müssen, für die das Modell jedoch mit der Zeichnung und den vorgegebenen Preisen sehr nahe liegt. Dabei sind wieder aufgrund der freien Wahl der Bepflanzung verschiedene Lösungen möglich.
Durch die Aufforderung zur Erstellung eines Arbeitsplanes wird eine Strukturierung des Vorgehens vorgenommen und eine Lösungsstrategie vorgegeben. Der zusätzliche Hinweis auf das Berechnen, welches auch ein Unterpunkt des Arbeitsplanes ist, könnte die Lernenden verwirren.

Analyse des Unterrichtseinsatzes der Station 2 ‚Gartenanlage'

In den beobachteten Stunden arbeiten vier Schülerpaare an der Aufgabe, wobei das Schülerpaar MN größtenteils selbstständig arbeitet, so dass hier keine näheren Beobachtungen zur Bearbeitung der Aufgabe vorliegen. Die anderen drei Schülerpaare arbeiten alle in ähnlicher Weise an der Aufgabe.

Schülerpaare AB, CD und OP

Die Hilfestellungen der Lehrerin sind in den drei Gruppen teilweise ähnlich. Zunächst benötigen die Gruppen Hilfe bei der Erstellung des Arbeitsplanes:

U [00:05:16.05]
Lehrer: Also als erstes müsst ihr wissen
Schüler P: Kreis
Lehrer: Genau. Was hab ich für Flächen, so das ist euer Arbeitsplan, das schreibt ihr als erstes auf. Wenn ihr die Flächen habt, müsst ihr natürlich auch was dazu wissen?
Schüler P: Die Formeln.
Lehrer: Genau. Dann?
Schüler P: Äh, die Werte.
Lehrer: Genau, und dann?
Schüler P: Die Rechnung.
Lehrer: Und dann?
Schüler P: Ja, und dann?
Lehrer: Dann könnt ihr in die Feinheiten gehen (zeigt auf die Felder mit den Kosten) Ja super, also schreibt euch den Arbeitsplan auf

Die Lehrerin lenkt leicht bei der Wiederholung der einzelnen Schritte und strukturiert so den Lösungsprozess der Aufgabe. Es wird hier einerseits deutlich, dass der vorgegebene Arbeitsplan den Schülerinnen und Schüler bereits bekannt ist, andererseits zeigt sich hier der starre, schematische Umgang mit dem Arbeitsplan.
Alle drei Schülergruppen arbeiten den Plan nach und nach ab. Die Gruppen OP und CD haben Schwierigkeiten bei der außermathematischen Modellierung, sie können nicht erkennen, was die verschiedenen Beete und Schuppen sind oder wissen nicht, wie sie anfangen sollen. Die Lehrerin macht hier Vorschläge für die Bepflanzung und gibt den Hinweis auf den Arbeitsplan. Bei der Umrechnung des Maßstabes muss die Lehrerin den Gruppen OP und CD ebenfalls helfen:

U [00:16:53.01]
Lehrer: Also wir haben gesagt, zwei Kästchen ein Zentimeter. Maßstab eins zu 200. Also ein Zentimeter auf der Karte, sind in Wahrheit 200 Zentimeter. Und ein Zentimeter 200 Zentimeter, 1

Zentimeter, 2 Meter. So ein Zentimeter (zeigt auf Karte) sind also 2 Meter. Muss man ein bisschen umrechnen.

Schüler D: Also ein Meter sind zwei Kästchen. Äh, ... ein Zentimeter sind zwei Meter,

Lehrer: Zwei Kästchen, zwei Meter, Ein Kästchen?

Schüler D: Ja, mein ich doch.

Lehrer: Ein Meter. Gut.

Hier wiederholt sie die bereits in vorherigen Stunden erarbeiteten Maßstabsumrechnungen ohne Schülerbeteiligung und lenkt damit stark. Das prozedurale Denken wird dabei sehr betont.

Schülerpaar OP

Das Schülerpaar OP möchte zunächst die Terrasse berechnen, hat aber Probleme mit den Maßen:

U [00:21:00.01]

Schüler P: Ja, wenn wir hier die Terrasse machen.

Lehrer: Ja?

Schüler K: Dann müssten wir ja zwei Rechtecke ausrechnen.

Lehrer: Hmhm. Beziehungsweise musst du das? Das wird ja nicht.

Schüler P: Ja das wären hier oben dreihundert (?) Zentimeter (zeigt auf lange Seite Terrasse/Rasen) und dann hier unten mal 700 weil das ja halb ist. Aber das sind zu viele Maße.

Lehrer: Ja denn, mach das doch, Trapez, mach das doch erstmals fürs Trapez, was brauchst du fürs Trapez. Die Formel?

Die Lehrerin kann den richtigen Erklärungen der Schülerinnen nicht folgen und versucht nicht, durch Nachfragen das Schülerdenken zu verstehen. Sie weist das Schülerpaar an, zunächst das große Trapez auszurechnen und lenkt damit kurzzeitig stark. Dabei wird die Verwendung der Formel für den Flächeninhalt betont.

Zu einem späteren Zeitpunkt sind die Schülerinnen OP wieder/immer noch dabei, die Fläche der Terrasse auszurechnen:

U [00:30:02.15]

Schüler P: Hier der hier (bei Terrasse) ist doch dann ein halber ne? […] Also Hundert dann.

Lehrer: Wobei was, ja.... Musst du die Terrasse denn extra oder kannst du nicht das Gesamte (Terrasse mit Haus) abziehen? […]

Schüler P: Nur die Terrasse bei hier.

Lehrer: Warum?

Schüler P: Ne, erst das Ganze und dann nochmal nur die Terrasse.

Lehrer: Brauchst du die Terrasse denn? (Ton suggeriert, dass man die Terrasse nicht braucht)

Schüler O:...Für die, für die Verbundsteine.

Lehrer: Sehr gut. Alles klar.

Hier wird wiederum deutlich, dass die Lehrerin den Kontext ihrer selbst ausgewählten Aufgaben nicht immer in diesem Fall nicht ganz durchblickt, da sie im Gegensatz zu den Schülerinnen nicht erkennt, dass auch die Fläche der Terrasse separat benötigt wird. Außerdem lässt sich aus dieser Szene schließen, dass die Lehrerin einen bestimmten Lösungsweg favorisiert, was dazu führt, dass sie die Schülerinnen in ihre gedankliche Richtung zu drängen scheint.

Schülerpaar CD

Das Schülerpaar CD hat große Probleme, die einzelnen Flächen zu berechnen:

U [00:25:58.00]

Lehrer: (zu D) So, jetzt hast du die Fläche von dem Trapez. […] So, was ist, was wird denn nicht mit meinetwegen begrast.

Schüler D: (zeigt auf Haus und Schuppen) Da, da und da.

Lehrer: So, dass musst du also auch alles ausrechnen und dann, was musst du dann damit machen.

Schüler C: Kreis, ein Kreis, Quadrat, Rechteck. […] und noch ein Quadrat. […]

Lehrer: Ja, wunderbar. Also das musst du doch alles aufschreiben. Du hast also hier deinen Schuppen, du hast deine Garage, du hast das Haus, das wird alles nicht mit Rasen.

Schüler D: Das muss weg, auf jeden

Lehrer: Das muss weg, das heißt, wenn es weg muss, was musst du denn damit machen?

Schüler D: Keine Ahnung, erstmals gucken, und dann das (Ergebnis im Heft) minus das (Zeichnung) nehmen.

Lehrer: Ja, das (Zeichnung) minus das (Ergebnis im Heft.)

Die Lehrerin gibt den Schülern nach der gemeinsamen Erstellung des Arbeitsplanes den Lösungsweg vor und lenkt somit stark. Dabei werden hier der sehr schematische Umgang mit dem Arbeitsplan und der Fokus auf prozedurales Denken wieder sehr deutlich. Auf den Fehler des Schülers gegen Ende des Transkriptausschnittes reagiert die Lehrerin an dieser Stelle nicht.

Zu einem späteren Zeitpunkt versuchen die Schüler CD die Fläche des Teiches zu berechnen:

U [00:36:09.13] Schüler D: Äh, Frau L. Wir wollen jetzt den Teich ausrechnen, […] Mh, kann ich nicht.

Lehrer: (unverständlich) darf ich mal eben (nimmt den Stift und zeichnet zwei parallele Linien, die an beiden Enden mit Halbkreisen verbunden werden, siehe Abbildung 9.6)

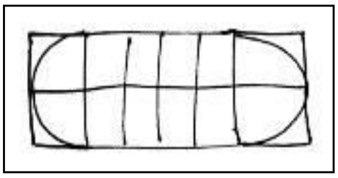


Abbildung 9.6: Skizze der Lehrerin als Hilfestellung zu Station 2

Schüler D: Ach so.

Lehrer: (zeichnet noch fehlende Seiten des Rechtecks ein) Ne. […]

Schüler D: Hä, aber.....(guckt sich intensiv die Zeichnung an) hä? […]

Lehrer: Ja, das passt nicht ganz, kriegst keine zwei Halbkreise hin. […] Ja, aber macht das doch, macht ein Rechteck (zeigt die Länge und die Breite des Teiches) Will euch nicht grad überfordern, macht daraus ein Rechteck. Zack, zack (zeigt die Länge und die Breite des Teiches)

Schüler D: Hä? […]

Lehrer: Macht einfach einen rechteckigen Teich, macht einen Swimmingpool. (???, Lehrerin will gehen)

Schüler D: Aber das ist doch hier unten auch abgeschnitten oder nicht?

Lehrer: (geht wieder hin) Was denn?

Schüler D: Das ist doch hier unten auch abgeschnitten, das geht doch gar nicht...Das ist doch auch nur ein halber (zeigt auf die untere Rundung)

Lehrer: Was hast du denn jetzt fürs Problem?

Schüler D: Ja, wie soll ich denn da jetzt ein Rechteck draus machen?

Lehrer: Du kannst genau so vorgehen (zeigt auf die eben erstellte Skizze) aber du kannst es auch als Rechteck sehen. Du brauchst doch beim Rechteck nur zwei Seiten. Welche beiden Seiten brauchst du? Wie kriegst du die raus auch wenn das so ist? Was nimmst du dann? Gib mal dein Geodreieck. Wie kriegst du Länge und Breite, wenn du das jetzt als Rechteck siehst?

Schüler D: Weiß ich nicht.

Die Lehrerin versucht mithilfe einer Visualisierung (siehe Abbildung 9.6) das Problem zu verdeutlichen und anschließend durch die Beschränkung auf ein Rechteck zu vereinfachen. Die Lehrerin lenkt hierbei stark. Dies scheint die Schüler jedoch zusätzlich zu verwirren, anstatt ihnen zu helfen. An den häufigen fragenden Äußerungen „Hä“ des Schülers D. wird deutlich, dass er den Erläuterungen der Lehrerin nicht folgen kann. Die Lehrerin erkennt die Verständnisprobleme der Schüler anscheinend nicht und geht beispielsweise nicht darauf ein, dass aufgrund der vorgegebenen Set-Preise für den Teich die genaue Fläche nicht notwendig ist, so dass den Schülern keine Begründung für die Vereinfachung gegeben wird. Stattdessen fährt die Lehrerin fort, die Annäherung des Teiches durch ein Rechteck zu erläutern:

U [00:38:38.17]

Lehrer: So, du kannst auch so und so (zeigt die Länge und die Breite des Teiches) Die Diagonalen sind doch genauso (???) So und so (legt das Geodreieck an die Länge und die Breite des Teiches) dann hast du doch auch Länge und Breite (???)...So wenn du das jetzt als Rechteck, wenn du do einmal die Ecken nimmst (zeichnet um Skizze von eben ein Rechteck) So, zack, zack.

Schüler C: Ja.

Lehrer: So, du brauchst die Seite (beschriftet kurze Seite mit a) und du brauchst diese Seite (beschriftet lange Seite mit b) und die musst du doch nicht unbedingt da (lange Seite) und da (kurze Seite) sondern die kannst du doch da, da, da (zeichnet Parallelen zur kurzen Seite in das Rechteck) oder da (zeichnet parallele zur langen Seite) messen. M. (Schüler D.) wach auf.

Auf dem Video zeigt sich, dass der Schüler D. die Erklärungen der Lehrerin nicht nachvollziehen kann. Er starrt regungslos auf sein Heft und fährt auch nach den Ausführungen der Lehrerin nicht mit der Lösung der Aufgabe fort. Die Lehrerin geht nicht auf das Denken der Schüler ein und versucht in keiner Weise bei den Erklärungen die Schüler mit einzubeziehen. Sie lenkt daher sehr stark und gibt einen kompletten Lösungsweg im Detail vor. Die Bearbeitung der Aufgabe wird an dieser Stelle durch das Ende der Stunde unterbrochen.

Im Interview hat die Lehrerin nochmal beschrieben, wie sie die Aufgabe vereinfacht hat:

I [00:33:36.16]

Lehrer: Ja genau, und dann war ja natürlich da das Problem zu messen, und dann hab ich auch irgendwie glaub ich gesagt, die sollen das nicht so kompliziert machen, sollen sie da ein Rechteck draus machen.

Interviewer: Haben sie das dann hingekriegt?

Lehrer: Ja.

Es wird deutlich, dass die Lehrerin nicht erkannt hat, dass die Schüler ihr nicht folgen konnten. Hier zeigt sich, dass die Lehrerin die Schülerlösung nicht gut reflektieren kann und an dieser Stelle nicht in der Lage ist, das Schülerdenken passend einzuschätzen.

Schülerpaar AB

Das Schülerpaar AB arbeitet weitgehend selbstständig an der Aufgabe. Sie berechnen zunächst die einzelnen Flächen von Schuppen, Garagen, usw. Für die Teichfläche wählen sie selbstständig ein Rechteck mit anliegenden Halbkreisen. Sie haben lediglich Probleme bei der Bestimmung des Radius der Halbkreise:

U [01:03:07.22]

Schüler A: Ich hab das hier drinne (Teich), das sind vier Quadratmeter. Und von da bis da sind 0,4 und die beiden zusammen sind 0,8. Dann hat der eine, äh, Durchmesser von 0,8.

Lehrer: Du brauchst ja den Radius, 0,4.

Schüler B: Also A ist gleich r mal r oder nicht mal π.

Lehrer: A ist gleich r Quadrat mal π. […]

Schüler A: Wie komm ich denn auf r?

Schüler B: Radius.

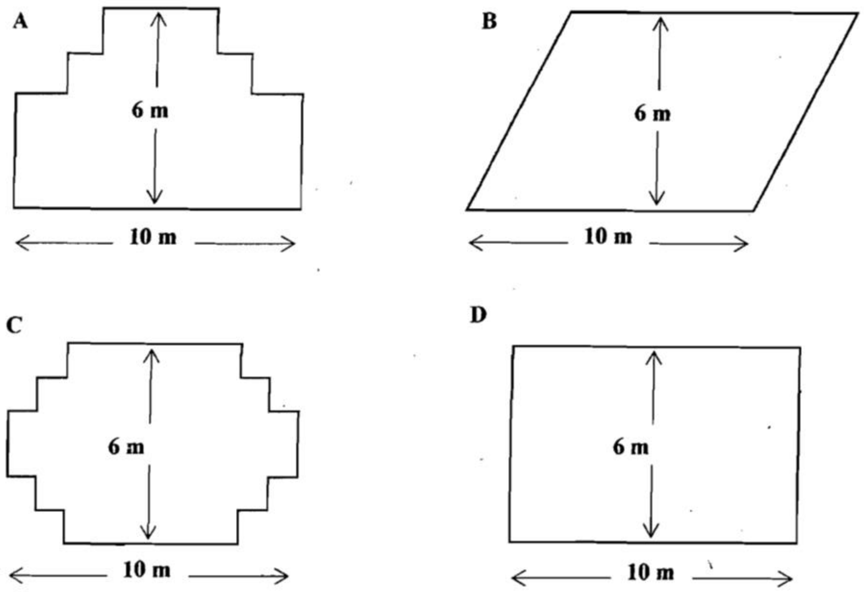
Lehrer: Radius, hast du doch grade eben gesagt. 0,4... Zweimal r ist d. Also zweimal Radius Durchmesser.

Obwohl der Schüler die richtige Formel für den Flächeninhalt eines Kreises nennt, wiederholt die Lehrerin die Formel in etwas anderer Formulierung. Die Bestimmung des Radius gibt sie vor, verbindet dies aber mit vorherigen Aussagen des Schülers. Hier zeigt sich auch der prozedurale Charakter der Aufgabenbearbeitung.

Insgesamt sind die Aufgabenbearbeitungen aller Schülerpaare und auch die Hilfestellungen der Lehrerin sehr verfahrensbetont, da vor allem die Anwendung von Prozeduren ohne Verbindung mit Konzepten im Vordergrund steht.

9.3.4 Station 3 ‚Zimmermann ‘

Ein Zimmermann hat 32 laufende Meter Holz und will damit ein Gartenbeet umranden. Er überlegt sich die folgenden Entwürfe für das Gartenbeet.



Erstelle zuerst einen Arbeitsplan und löse dann folgende Aufgaben:

a) Können die Entwürfe mit 32 laufenden Metern Holz hergestellt werden? Kreise jeweils entweder „Ja" oder „Nein" ein.

Gartenbeet-Entwurf	Ist es mit diesem Entwurf möglich, das Gartenbeet mit 32 laufenden Metern Holz herzustellen?
Entwurf A	Ja / Nein
Entwurf B	Ja / Nein
Entwurf C	Ja / Nein
Entwurf D	Ja / Nein

b) 1 m laufender m Holz kostet 22.-€. Bei Barzahlung bekommt er 3% Skonto (Preisnachlass).

c) Der Zimmermann lässt anschließend von einem Gärtner Rollrasen verlegen. 1 m^2Rollrasen kostet 12,50€.

d) Vergleiche die Preise der Gesamtkosten pro Beet.

Abbildung 9.7: Station 3 ‚Zimmermann‘ (teilweise nach OECD, 2004)

Der Aufgabeteil a) der Station 3 ‚Zimmermann‘ stammt aus der PISA-Studie (2000). Diese Aufgabe (siehe Abbildung 9.8) wurde nach Aspekten kognitiver Aktivierung ausgewählt und als eine von mehreren Aufgaben der Lehrerin vorgeschlagen (siehe 7.3.1). Die Lehrerin entschied sich dazu, diese Aufgabe im Unterricht einzusetzen, sie fügte allerdings die Aufforderung zur Erstellung eines Arbeitsplanes hinzu (vgl. Abbildung 9.8). Außerdem ergänzte die Lehrerin die vorgegebene Aufgabe durch drei selbst ausgedachte Teilaufgaben, damit die Aufgabe zu den anderen Stationsaufgaben passt (siehe Abbildung 9.7).

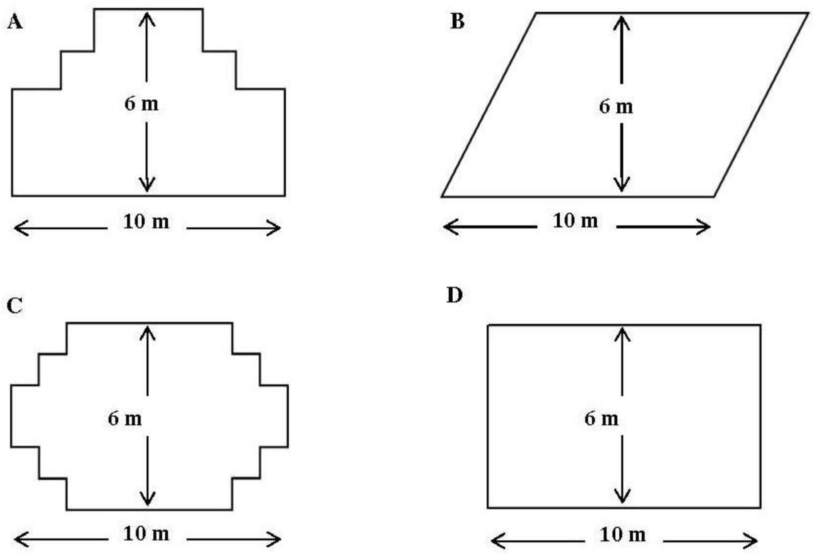
I [00:18:21.09]

Lehrer: […] Ich hab sie dann auch ein bisschen erweitert, das Holz kostet soundso viel, auf die anderen Arbeits- auf die anderen Aufgaben abgestimmt, ja.

Hier zeigt sich, dass die Lehrerin die Aufgaben bewusst auf der Kontextebene verbindet.

Ein Zimmermann hat 32 laufende Meter Holz und will damit ein Gartenbeet umranden. Er überlegt sich die folgenden Entwürfe für das Gartenbeet.

Können die Entwürfe mit 32 laufenden Metern Holz hergestellt werden? Kreise jeweils entweder „Ja“ oder „Nein“ ein.



Gartenbeet-Entwurf	Ist es mit diesem Entwurf möglich, das Gartenbeet mit 32 laufenden Metern Holz herzustellen?
Entwurf A	Ja / Nein
Entwurf B	Ja / Nein
Entwurf C	Ja / Nein
Entwurf D	Ja / Nein

Abbildung 9.8: Aufgabe ‚Zimmermann‘ aus dem internationalen PISA-Test 2000 (OECD, 2004)

Objektive Kennzeichen der Station 3 ‚Zimmermann‘

Die vier Aufgaben der Station 3 ‚Zimmermann‘ sind alle in den außermathematischen Kontext der Gestaltung eines Blumenbeetes eingebunden, allerdings ist das außermathematische Modellierungsniveau jeweils als niedrig einzuschätzen, da das Modell durch die vorhandenen Zeichnungen vorgegeben ist.

Im Aufgabenteil a) handelt es sich um eine begriffliche oder eine rechnerische Modellierungs- und problembezogene Aufgabe, je nachdem, welchen Lösungsweg die Schüler wählen (s.u.). Der inhaltliche Fokus liegt im Bereich der Geometrie, wobei die Schülerinnen und Schüler zunächst aus dem Kontext entnehmen müssen, dass aus mathematischer Sicht der Umfang der Figuren betrachtet werden muss. Dieser kann außer bei Figur D, in der die Formel für den Umfang eines Rechtecks angewendet werden kann, nicht direkt berechnet werden. Die Figuren A und C stellen für viele Schülerinnen und Schüler unbekannte Figuren dar. Hier haben die Lernenden einerseits die Möglichkeit, den Umfang der Figuren mit dem Rechteck (Figur D) zu vergleichen, indem sie erkennen, dass durch ‚Rausziehen‘ (diesen Wortlaut benutzt die Lehrerin später) der Ecken der Umfang unverändert bleibt und schließlich der gleiche Umfang wie bei Figur D entsteht. Hierbei wird vor allem begriffliches Denken gefördert. Andererseits können die Schülerinnen und Schüler die einzelnen Teilstücke mit selbst ausgedachten Werten benennen (Strategie ‚Stückelung‘), die insgesamt wieder 6 bzw. 10 m ergeben und durch Addition der ausgedachten Werte den Umfang der Treppenfiguren A und C bestimmen. Dieser Weg entspricht eher prozeduralem Denken. Bei Figur B können

die Schülerinnen und Schüler die Formel für den Umfang eines Parallelogramms nicht anwenden, da hier nur die Höhe, nicht aber die benötigte Seite gegeben ist. Die Lernenden müssen erkennen, dass die schräge Seite länger ist als die Höhe, und dass damit der Umfang der Figur B größer ist als 32 m. Hierzu können sie z.B. begründen, dass die kürzeste Verbindung zwischen einem Punkt und einer Geraden immer im rechten Winkel auf der Geraden steht (begriffliches Denken) oder sie messen die Strecken aus und sehen so, dass die schräge Seite länger ist als die Höhe (prozedurales Denken). Insgesamt ist die Aufgabe auf vielen verschiedenen Wegen zu lösen. Für weitere Ausführungen zu möglichen Schülerlösungen siehe Ulfig (in Vorbereitung). Alle Lösungen erfordern aber innermathematisches Modellieren auf mittlerem Niveau, da verschiedene mathematische Gegenstände miteinander verglichen werden und die Lösungsmethode nicht direkt abrufbar ist. Mathematisches Argumentieren ist in dieser Aufgabenstellung nicht gefordert. Zwar können z.B. bei der Lösungsmöglichkeit ‚Rausziehen' und auch bei Figur B überschaubare mehrschrittige, auch begrifflich geprägte Argumente entwickelt werden, aber laut Aufgabenstellung müssen diese Begründungen nicht dargelegt werden. Die Verwendung von Darstellungen ist auf mittlerem Niveau nötig, da die verschiedenen Darstellungen miteinander verglichen werden müssen.
Der Aufgabenteil b) ist als rechnerische Modellierungs- und problembezogene Aufgabe einzuordnen. Hier liegt der inhaltliche Fokus in der Arithmetik, speziell in der Prozentrechnung. Außerdem ist hier Arbeiten mit Größen erforderlich. Die Schülerinnen und Schüler müssen entweder zuerst den Preis mit der Menge an Holz (32 m) multiplizieren und anschließend 3% Skonto abziehen, oder sie berechnen zunächst den ermäßigten Preis pro Meter und multiplizieren dann das Ergebnis mit der benötigten Menge Holz. Zum Abziehen des Preisnachlasses können sie zunächst 3% des Gesamtpreises berechnen und diesen Wert dann vom Gesamtpreis abziehen, oder sie berechnen direkt 97% des Gesamtpreises. Hierzu können sie die Formeln für Prozentrechnung oder den Dreisatz benutzen. Innermathematisches Modellieren wird hierfür nicht benötigt, da nach dem Übersetzen in die Mathematik nur noch einfache Fertigkeiten ausgeführt werden müssen. Es muss weder mathematisch argumentiert werden, noch müssen visuelle Darstellungen verwendet werden, da die gesamte Holzmenge bereits in der Aufgabe gegeben ist.
Beim Aufgabenteil c) handelt es sich um eine rechnerische Modellierungs- und problembezogene Aufgabe. Diese fokussiert inhaltlich wieder die Geometrie, allerdings sind jetzt Flächenberechnungen an den vorgegebenen Figuren durchzuführen. Dabei spielen auch das Arbeiten mit Größen aus der Arithmetik und die Termwertberechnungen aus dem Bereich der Algebra eine Rolle. Für die Berechnung der Fläche des Rechtecks und des Parallelogramms können die Schülerinnen und Schüler die jeweiligen Formeln für den Flächeninhalt verwenden. Bei den Treppenfiguren (Figur A und C) müssen sie die Figuren geeignet in bekannte Figuren zerlegen. Hierzu gibt es verschiedene Möglichkeiten, z.B. die Zerlegung in horizontale oder vertikale Rechtecke oder die Berechnung des großen Rechtecks (wie Figur D) und anschließend Subtrahieren der fehlenden Ecken. Dabei ist aber zu beachten, dass die benötigten Maße für die Berechnung der Flächeninhalte der Treppenfiguren nicht gegeben sind. Hier müssen sich die Schüler geeignete Werte überlegen. Dies erfordert innermathematisches Modellieren auf mittlerem Niveau. Im Anschluss an die Berechnung der Fläche muss das Ergebnis mit dem Preis pro Quadratmeter multipliziert werden. Mathematisches Argumentieren ist nicht notwendig, da keine Darstellung des Lösungsweges gefordert ist. Mathematische Darstellungen müssen dagegen auf mittlerem Niveau verwendet werden, da zur Bestimmung der Maße Beziehungen zwischen den einzelnen Teilstücken hergestellt werden müssen. Ansonsten ist die Verwendung der Darstellungen eher auf niedrigem Niveau notwendig, da die Zerlegung der Treppenfiguren nahe liegt.

Der Aufgabenteil d) ist als rechnerische Modellierungs- und problembezogene Aufgabe einzuschätzen. Hier liegt der inhaltliche Fokus wieder im Bereich Arithmetik. Die Schülerinnen und Schüler sollen für die einzelnen Gartenbeetentwürfe die Ergebnisse aus den beiden vorangegangenen Aufgaben addieren und untereinander vergleichen. Hierzu werden nur Grundkenntnisse, wie sie bereits aus der Grundschule bekannt sind, benötigt, sodass innermathematisches Modellieren nicht erforderlich ist. Der Größenvergleich erfordert dagegen mathematisches Argumentieren auf niedrigem Niveau, mit mathematischen Darstellungen müssen die Schülerinnen und Schüler bei dieser Aufgabe nicht umgehen.
Die Aufforderung zur Erstellung eines Arbeitsplanes bezieht sich auf alle Aufgabenteile. Sie deutet auf einen explizit geforderten Lösungsweg hin und dient als Lösungs-und Strukturierungshilfe. Allerdings scheint diese starre Form der Hilfe hier größtenteils ungeeignet zu sein. Im Aufgabenteil a) kennen die Schülerinnen und Schüler vermutlich keinen Begriff für die Treppenfiguren, weshalb der erste Punkt des Arbeitsplanes, ‚Flächen benennen' (siehe Abbildung 9.1), schwierig ist. Auch kann außer bei Figur D nicht mit Formeln gearbeitet werden. Dies wird aber im Punkt zwei des Arbeitsplanes gefordert. Die im Punkt drei geforderte Bestimmung der Maße ist nicht direkt möglich, da nicht alle zur Berechnung des Umfangs benötigten Werte gegeben sind. Für die von begrifflichem Denken geprägten möglichen Lösungen wären die Maße und auch die Formeln sowie die im vierten Punkt des Arbeitsplanes geforderte Berechnung nicht nötig. Auch im Aufgabenteil b) kann der Arbeitsplan nicht angewendet werden, da keine Flächen benannt und keine Maße bestimmt werden können, ebenso wenig kann der Arbeitsplan in Aufgabenteil d) angewendet werden. Lediglich bei Aufgabenteil c) kann der Arbeitsplan als sinnvolle Lösungs- und Strukturierungshilfe dienen.
Die von der Lehrerin hinzugefügten Aufgabenteile b)-d) erfordern vor allem prozedurales Denken, wohingegen die vorgegebene Aufgabe vor allem begriffliches Denken ermöglicht. Durch die ergänzenden Aufgaben werden aber vielfältige Wissensvernetzungen innerhalb der Geometrie (zwischen Umfang und Flächeninhalt) aber auch zu anderen Stoffgebieten (Arithmetik und Algebra) hergestellt.

Analyse des Unterrichtseinsatzes der Station 3 ‚Zimmermann'

Die Aufgabe ‚Zimmermann' wird innerhalb der Partnerarbeitsphase von insgesamt drei Schülerpaaren bearbeitet.

<u>Aufgabenteil a) - allgemein</u>

Zwei der drei Schülerpaare haben Probleme zu erkennen, dass es sich beim Aufgabenteil a) im Gegensatz zu fast allen anderen Aufgaben der Stationsarbeit um Umfangsberechnungen statt Flächenberechnungen handelt. Dies kann durch den ersten Punkt ‚Flächen benennen' im Arbeitsplan verursacht sein (siehe Abbildung 9.1), was die Lehrerin im Interview auch selbst als Problem benennt (siehe 9.2). Als Reaktion auf diese Probleme gibt die Lehrerin den Schülerinnen und Schülern eine ‚Faustregel' vor, anhand derer man in außermathematischen Kontexten erkennen kann, dass Umfangsberechnungen nötig sind:

U [00:34:22.00]
Lehrer: Ja hier das, umrande, umrande merkt ihr immer: Umfang.

Allerdings wird diese Regel bei keinem Schülerpaar begründet oder reflektiert. Außerdem haben die Lernenden teilweise Probleme, den Umfang der Figuren zu bestimmen (insbesondere Figur A und C). Die Lehrerin gibt einerseits Hinweise auf den Arbeitsplan, andererseits gibt sie die Faustregel ‚Herumlaufen' für allgemeine Umfangsberechnungen vor:

U [00:14:19.02]
Lehrer: OK. Zweitens?

Schüler E: Formel für den Umfang.

Lehrer: Ja, ja genau.

Schüler E: (guckt in alten Aufzeichnungen) Zweitens Maße.

Lehrer: Hmhm. Joa.

Schüler E: Aber das sind ja nur die Höhe und die Grundseite.

Lehrer: Hmhm. Genau. bzw. beim Umfang? ... Beim Umfang fängst du irgendwo an zu laufen. Setzt dich an die Ecke (zeigt an Figur D (Rechteck)) von da, nach da, nach da, nach da.

Hier wird durch die Lehrerin das prozedurale Denken stark in den Vordergrund gestellt, wodurch auch die prozeduralen Lösungsmöglichkeiten anstelle der durch begriffliches Denken geprägten Lösungswege dieser Aufgabe fokussiert werden. Dies zeigt sich auch an der starren Einhaltung des Arbeitsplanes:

U [00:45:58.19]

Lehrer: Genau. Super. (zeigt auf das Heft) Du hast noch einen hier vergessen, die Maße, ne. Also wenn ihr da Formeln, dann kommen noch die Maße dazwischen. Ok.

Hier zeigt sich, dass die Lehrerin auch bei dieser Aufgabe auf der Anwendung des Arbeitsplanes besteht, obwohl das erarbeitete Schema für die Lösung dieser Aufgabe eher hinderlich ist (siehe objektive Kennzeichen dieser Aufgabe).

Im Interview erläutert die Lehrerin entgegen ihrem Handeln im Unterricht im Zusammenhang mit dem Aufgabenteil a) eine etwas abgewandelte Form des Arbeitsplanes:

I [00:27:19.01]

Lehrer: Ja auch, was hab ich, also da war es ein bisschen schwierig, was hab ich für eine Fläche, also was hab ich für eine Figur, das ging ja da nicht, aber hier geht es dann drauf, oh Gott, ich hab jetzt kein Viereck, brauch ich die Fläche überhaupt? Also da mal zu, ne ich brauch hier den Umfang. Und da hab ich halt das Parallelogramm und ich hab das Rechteck, so.

Interviewer: Das sollte dann im Arbeitsplan passieren?

Lehrer: Genau, hier hab ich eben halt so ein eingeknicktes Rechteck (Figur A) und da auch (Figur C) und dann eben halt Umfang und über den Umfang, das geht hier einmal drum rum, (Figur D) hier (Figur C) auch zu gucken, wie komm ich dahin…

In dieser Beschreibung kommen die Bestimmung der Maße und der Formeln nicht vor, stattdessen sieht die Lehrerin bei dieser Aufgabe den Wert des Arbeitsplanes darin, dass die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass es um Umfang geht und sich Strategien für die ihnen unbekannten Figuren (A und C) überlegen. Dies steht aber im Widerspruch dazu, dass der erste Punkt ‚Flächen' des Arbeitsplanes gerade vom Umfang der Figuren ablenkt (siehe 9.2). Es wird hier aber ähnlich wie schon bei Station 1 Aufgabe 1 deutlich, dass die Lehrerin (zumindest unterbewusst) erkennt, dass der Arbeitsplan für diese Aufgabe nicht passend ist. Im Unterricht ist sie aber auf das zentrale Ziel der Förderung des Arbeitsplanes (siehe 9.2) fokussiert, so dass sie ihre Hilfestellungen nicht ausreichend reflektiert.

Aufgabenteil a) – Treppenfiguren - Schülerpaar IJ

Sehr deutlich wird der prozedurale Charakter der Bearbeitungen auch beim Schülerpaar IJ, welches bei den Treppenfiguren (Figur A) zunächst eine falsche Strategie zur Umfangsberechnung anwendet. Die Lernenden haben die Treppenfigur gedanklich in drei Rechtecke unterteilt und wollen den Umfang der einzelnen Rechtecke berechnen und addieren. Dazu haben sie sich teilweise Maße für die einzelnen Teilstücke überlegt, wobei sie erkannt haben, dass die Teilstücke insgesamt wieder 6 m ergeben müssen (siehe Abbildung 9.9).

U [00:59:45.11]

Schüler I: Also, das erste Rechteck ist ja dieses hier oben (rechnet von dem oberen Teilrechteck von Figur A den Umfang aus, zeigt dabei auch auf die untere Seite (gestrichelte Linie) a=4cm, b= 2cm, U= 12cm)). Wir teilen das erst so auf und dann zählen wir, das Ergebnis hier vom Umfang, zusammen. Und dann haben wir ja den Umfang.

Lehrer: […] das ist ein guter Ansatz aber jetzt nochmal Umfang. Umfang was machst du, du fängst hier an zu laufen (rechter unterer vertikaler Strich von Figur A) so und dann gehst du das Stück (untere Seite) ab, das Stück ab (linker unterer vertikaler Strich) Das Stück ab (1. horizontales Stück links, fährt ohne Worte mit dem Finger weiter) das heißt, 12 m ist ein bisschen wenig […].

Schüler J: Nee, wir haben ja erst dieses erste hier (oberes Teilrechteck von Figur A) das erste und dann machen wir das, aber das ist ja irgendwie falsch, weil man läuft ja nicht so (gestrichelte Linie dieses Rechtecks, siehe Abbildung 9.9)

Lehrer: Du kannst ja, wollt ich grad sagen, nee du gehst ja das Stück (gestichelte Linie) nicht. Du kannst ja wirklich so, das ist ja total schön, was ihr hier gemacht habt. Also sehr clever. Jetzt fangen wir einfach mal da an zu laufen (rechte untere Ecke von Figur A) Dann zählst du zusammen. Also die erste Strecke ist?

Schüler J: 10.

Lehrer: Dann kommt?

Schüler I: 3.

Lehrer: Und dann kommt (erstes horizontales Stück, hat noch keinen Wert)

Schüler I: Äh?

Lehrer: Das müsst ihr natürlich auch stückeln […] Gut, ihr habt das hier ja wunderbar gestückelt, das ist total toll. Tolle Idee. So, jetzt fangt ihr aber an, guck mal da, ihr habt drei Meter (vertikales Stück unten rechts) jetzt müsst ihr die Seiten, die Stückelchen (die horizontalen) natürlich auch stückeln. ihr habt ja jetzt erstmals nur die Senkrechten gestückelt. Nicht die waagerechten.

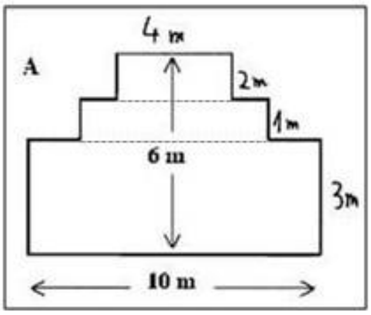


Abbildung 9.9: Schülererweiterung der Aufgabenskizze der Aufgabe 1 der Station 3

Die Lehrerin lobt zwar den Ansatz der Schülerinnen und Schüler, gibt dann aber die Strategie zum Berechnen des Umfangs durch herumlaufen anhand dieser Stückelung vor. Auf die zu Beginn des Transkriptausschnittes erläuterte Strategie der Schülerinnen und Schüler und den ursprünglich anderen Zweck der Stückelung der Seiten geht sie nicht ein, obwohl die Lernenden zeigen, dass Sie ihren Lösungsweg reflektieren können. Dies zeigt sich daran, dass die Lernenden selbst erkennen, dass ihre Strategie nicht funktioniert, da hier Strecken vorkommen, die nicht zum Umfang der Figur gehören. Die Lehrerin gibt den Lösungsweg vor, der sehr prozedural geprägt ist, und lenkt damit stark. Hier zeigt sich wieder, dass die Lehrerin einen Lösungsweg im Kopf hat und den Gedankengang der Schülerinnen und Schüler in diese Richtung lenkt, ohne das Schülerdenken zu reflektieren.

Anhand der vorgegebenen Lösungsstrategie kann die Schülerin I die Aufgabe lösen, der Schüler J kann der Lösung aber nicht folgen:

U [01:05:35.14]

Schüler J: Ich versteh das nicht.

Schüler I: Guck mal, das sind 10, 16

Lehrer: Ja, deshalb sag ich ja I. soll dir das erklären.

Hier fördert die Lehrerin das gegenseitige Erklären und damit die kognitive Selbstständigkeit der Lernenden. Es fällt auf, dass die Lehrerin immer wieder die „tolle" Strategie der Schülerinnen und Schüler lobt, dies betont sie auch im Interview:.

I [00:18:21.09]

Lehrer: […] wobei einige ja wirklich gute Ansätze hatten, die gesagt haben, wir nennen das einfach (zeigt auf die kleinen Stücke bei Figur C) und dann haben sie das durchgerechnet, und haben einfach die Stücke, haben gesagt, das sind 6m, also die haben gar nicht so gedacht, das man das, wenn man so rauszieht, dann hat man ja wieder sein Rechteck, sondern sie haben gesagt, dass müssen wieder 6m geben, also die haben sehr kompliziert gedacht, aber sie haben richtig gedacht.

Die Lehrerin scheint in keiner Weise zu reflektieren, dass die eigentliche Lösungsstrategie der Schülerinnen und Schüler von ihr vorgegeben wurde, da sie den gescheiterten Lösungsversuch des Schülerpaares nicht erwähnt.

<u>Aufgabenteil a) – Treppenfiguren - Schülerpaar EF</u>

Das Schülerpaar EF scheint zunächst die Strategie der ‚Stückelung' der Treppenfiguren selbstständig zu verfolgen:

U [00:17:37.19]

Schüler E: Ja wie macht man das denn jetzt hier? Wenn man dieses komische, da rumlaufen (zeigt auf Figur A) Also man geht ja von da (zeigt auf linke untere Ecke von Figur A, zeigt entlang der Grundseite) hat man ja schon mal 10m. Und das (zeigt auf das 1. Stück nach oben) sind ja wahrscheinlich 3m. Und dann muss man ja da lang laufen (zeigt auf die Stufen)

Lehrer: Hmhm. (zustimmend) […] Er hat 32 laufende Meter Holz. Hmhm. Guckt mal, ob ihr da (Figur A) […] ob du die Umfänge vergleichen kannst. Vielleicht kannst du die anders zusammensetzen? ... Benenn doch einfach mal die einzelnen Teilstücke. (Figur C) und da und da (Figur B) die einzelnen Seiten.

Der Schüler E kann seine Lösung nicht selbst erklären, scheint aber die prozedural geprägte Lösungsstrategie des Herumlaufens zu verfolgen. Die Lehrerin, die ansonsten häufig diese Strategie zur Umfangsberechnung vorgibt (siehe z.B. 0), versucht hier begriffliches Denken zu initiieren, indem sie dem Schüler die Strategie ‚Rausziehen' erklärt. Im Widerspruch zu dem Fokus auf die begriffliche Lösung steht aber die Frage der Lehrerin nach dem Ausrechnen. Es ist fraglich, ob das Schülerpaar der Lösung der Lehrerin folgen kann, vor allem, da die Lernenden vorher selbstständig die Strategie ‚Stückelung' zu verfolgen scheinen. Dies bezieht die Lehrerin bei ihrer Erklärung nicht mit ein. Sie passt ihre Hilfestellungen nicht an das Schülerdenken an, da sie scheinbar die Strategie ‚Rausziehen' im Kopf hat und versucht den Gedankengang des Schülers entsprechend zu lenken. Sie ändert aber gegen Ende des Transkriptes plötzlich ihre Erklärungsstrategie und lenkt mit der Aufforderung zur Benennung der Teilstücke zur Strategie Stückelung über.

Auch mithilfe dieser Vorgaben der Lehrerin gelingt es dem Schüler E. nicht, sein Vorgehen bei der Lösung der Aufgabe zu beschreiben:

U [00:27:20.27]

Lehrer: Hmhm. Genau. Wie bist du denn drauf gekommen, dass das auch 32 m sind (zeigt auf Figur A)? Wie hast du das denn ausgerechnet?

Schüler E: Keine Ahnung.

Lehrer: Hast geschätzt? Wenn du das hast (zeigt auf Figur D) das Rechteck. Ne.

Schüler E: Ja, Das ist ja klar.

Lehrer: Genau. Das ist klar. Wenn du mal diese (zeigt auf Seite des Rechtecks) wenn du hier die ganzen Einzelstücke betrachtest. (Figur C, rechte Seite, vertikale striche) und da auch die ganzen Einzelstücke (Figur C, linke Seite, vertikale Striche) und da die ganzen einzelnen Stücke (Figur C, rechte Seite, horizontale Striche) Wenn du die quasi so, an die andere Seite (langes Stück oben und unten bei Figur C) mit dran machst. ...Überleg mal. Wir brauchen ja den Umfang.

Schüler E: (Unverständlich)

Lehrer: Genau, dann haben wir auch wieder ein Rechteck und zwar welches?

Schüler E: Wie bei dem (zeigt auf Figur D).

Die Lehrerin lenkt hier wiederum stark, indem sie den kompletten Lösungsweg vorgibt. Dabei verfolgt sie allerdings wieder die Strategie ‚Rausziehen'. Insgesamt werden die Strategien ‚Stückelung' und ‚Rausziehen' von der Lehrerin hier nicht klar voneinander abgegrenzt.

Aufgabenteil a) – Treppenfiguren - Schülerpaar CD

Auch bei der Schülergruppe CD gibt die Lehrerin die Lösungsstrategie vor:

U [00:57:17.18] Lehrer: Gut kannst du denn, die kannst du ja raus stücken.

Schüler C: Ja, die Ecken, die zwei Stück.

Schüler D: Ne da (Figur A), da ist das glaub ich mehr. […] Ja weil da Ecken fehlen.

Lehrer: Denk doch mal, wenn du drum herum rennst, du musst also 6 Meter haben, wenn du das Stück hier nehmen musst (Figur A, langes Seitenstück senkrecht) und das Stück hier (mittleres senkrechtes Stück) und das Stück hier (oberes senkrechtes Stück).[…]

Schüler D: 32.

Lehrer: Ja, dann hast du wieder 6 Meter (zeigt auf vertikale Seite bei Figur A). genau. So und so und so und so (zeigt auf die Stufen bei Figur A). Jetzt guck mal beim Parallelogramm. Fängst also hier (untere rechte Ecke) an zu laufen, hast du 10 m und dieses Stück (Schräge Seite links)?

Zunächst spricht sie die Strategie ‚Rausziehen' an, wechselt dann aber auf die Strategie ‚Stückelung', die sie fast ohne Schülerbeteiligung erläutert. Die Lehrerin lenkt hier wieder sehr stark, auf die falsche Schülerlösung geht sie nicht ein. Die Verbindungen zwischen den Figuren A und D bleiben sehr oberflächlich und es steht das prozedurale Denken im Vordergrund.

Aufgabenteil a) - Parallelogramm

Bei der Bearbeitung der Figur B erhalten alle drei Schülergruppen zunächst das Ergebnis, dass der Zimmermann auch hier mit dem Holz auskommt. Dies hat die Lehrerin vorausgesehen:

Planung:

Mögliche Schülerlösungen: Zimmermann: A,C weniger; B = D

I [00:18:21.09]

Lehrer: Und was ich auch gedacht habe, die haben sich hier (Figur B) von der Höhe ablenken lassen, haben gedacht, naja gut, Fläche ist gleich, ist der Umfang auch gleich. Ist ja auch die gleiche Formel, 2 mal a 2 mal b, plus 2 mal b also muss es, die haben nicht weiter gedacht

Die Lehrerin zeigt hier im Interview zwar, dass sie diesen Fehler erwartet hat, es ist aber fraglich, ob den Schülerinnen und Schülern wirklich klar war, dass die Flächen der beiden Figuren gleich sind, da die Schüleräußerungen keine Hinweise hierauf liefern. Es sind dagegen viele verschiedene Ursachen für diesen Fehler denkbar (vgl. Ulfig, in Vorbereitung).

Die Lehrerin gibt allen drei Schülerpaaren den Hinweis auf Umfangsberechnung durch ‚Herumlaufen'. Die Schülerinnen und Schüler erkennen anschließend mit starker Hilfestellung durch die Lehrerin, die bei den drei Paaren ähnlich ist, dass die schräge Seite länger ist als die Höhe und dass damit der Umfang größer ist als 32 m:

U [00:58:23.05]

Lehrer: Ja, aber ist diese Strecke denn 6m lang?

Schüler D: Nö.

Lehrer: Länger oder Kürzer?

Schüler D: Kürzer.

Lehrer: Ja?

Schüler B: Länger.

Schüler C: Länger.

Schüler D: Hä?

Schüler B: Miss doch einfach nach.

Lehrer: Ja, miss doch nach. Genau

Die Lehrerin lenkt hier wieder sehr stark und es wird nur von einer Schülergruppe durch Ausmessen begründet, dass die schräge Seite länger ist.

Im Interview erläutert die Lehrerin, dass die Schülerinnen und Schüler hier mit Pythagoras argumentieren könnten, allerdings bleibt unklar, wie sie dies genau meint:

I [00:18:21.09]

Lehrer: […] Und die haben nicht weitegedacht, das (Seite vom Parallelogramm) ist ja ein bisschen länger als das (Höhe). Hätten sie einfach Pythagoras nehmen können und wären sie schon so, müssen ja keine Maße haben.

Hier zeigt sich, dass das Potenzial der Aufgabe zum Argumentieren von der Lehrerin durchaus erkannt wurde, allerdings werden die Begründungen kaum im Unterricht eingefordert.

Zusammenfassung Aufgabenteil a)

Insgesamt wird in den hier dargestellten Schülerbearbeitungen deutlich, dass die Aufgabe verfahrensbetont im Unterricht eingesetzt wird, da das Anwenden von Prozeduren ohne Verbindung mit Bedeutungen und Konzepten bei der Bearbeitung der Aufgabe stark im Vordergrund steht. Dies zeigt sich auch daran, dass sowohl die Lehrerin als auch die Schülerinnen und Schüler immer wieder betonen, dass sie ausrechnen müssen.

Auffällig ist, dass die Lehrerin das Potenzial der Aufgabe zum begrifflichen Denken nicht nutzt, obwohl sie es in Ansätzen erkennt:

Planung: Bei den Aufgaben [‚Flächen vergleichen‘ und ‚Zimmermann‘, Aufgabenteil a)] muss man nicht nur die Berechnung einzelner Größen nach bestimmten Formeln können, sondern man muss im wahrsten Sinne des Wortes ‚um die Ecke denken‘ (Zimmermann) oder sein bisher erlangtes Wissen auf ein etwas abstrakteres Problem transferieren. Das fällt meinen Schülern sehr schwer, da sie es nie gelernt haben.

Die Lehrerin kann zwar das Potenzial nicht genau benennen, aber die Äußerungen ‚um die Ecke denken‘ und ‚abstrakteres Problem‘ lassend darauf schließen, dass sie zumindest unterbewusst das Potenzial der Aufgabe zum begrifflichen Denken erkennt.

Im Interview kann die Lehrerin außerdem benennen, dass die Aufgabe anders ist als die sonstigen von ihr gestellten Aufgaben:

I [00:22:50.20]

Lehrer: […] mal zu gucken, wie gehen sie mit so einer Aufgabe um, die ja wirklich so ein bisschen abweicht von den anderen Aufgaben. Die wich ja ab, also erst mal ging‘s da ja in erster Linie nicht um Fläche sondern um Umfang.

Die Lehrerin benennt hier lediglich inhaltliche Unterschiede in den Aufgaben, die sie selbst durch die Zusammenstellung der Aufgaben hergestellt hat. Die Unterschiede in der Art des Denkens, die in den Aufgaben gefordert ist, erkennt die Lehrerin nicht. Hierdurch könnte der starke Fokus auf das prozedurale Denken auch bei dieser Aufgabe erklärt werden.

Aufgabenteil b) und d)

Für die Aufgabenteile b) und d) konnten keine Bearbeitungen im Unterricht beobachtet werden.

Aufgabenteil c)

Es ist nur eine kurze Unterrichtsszene zur Bearbeitung von Aufgabenteil c) zu beobachten:

U [00:34:57.23]

Schüler E: Jetzt braucht man die Fläche, ne...

Lehrer: Bei der Fläche dürft ihr ein bisschen schummeln. Da könnt ihr hier, was weiß ich, das (zeigt auf Figur C, rechte Seite) sind 6, dann sind das hier immer 6 ein Meter. Da die kleinen Rechtecke. Ihr müsst ja die kleinen Abschnitte ausschneiden, und dann könnt ihr eben halt, nehmt ihr das als ein Meter (zeigt auf die kleinen Teilstücke bei Figur C) und das (zeigt auf Figur A) weiß nicht, könnt ihr euch aber auch selber überlegen.

Die Lehrerin gibt dem Schüler die Berechnungsmethode vor und nimmt teilweise auch schon die Einteilung der Maße vor, sie übernimmt damit die innermathematische Modellierung und lenkt stark. Der Schüler muss jetzt nur noch die vorgegebene Prozedur ausführen, wodurch das Potenzial der Aufgabe stark verringert wird. Es wird lediglich prozedurales Denken vom Schüler gefordert, aber ohne Verbindung mit Konzepten, so dass die Aufgabe verfahrensbetont bearbeitet wird.

9.3.5 Station 4 ‚Bodenbeläge'

Erstelle einen Arbeitsplan und berechne.
Überlege dir dabei, welche Fläche du wie belegen würdest.
War es clever, einen Durchschnittspreis auszumachen?

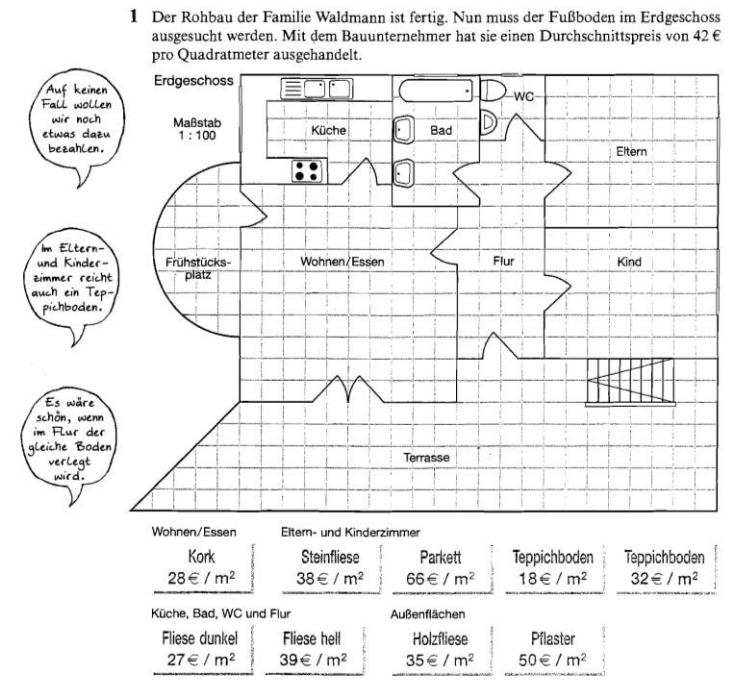


Abbildung 9.10: Station 4 ‚Bodenbeläge' (nach Golenia & Neubert, 2008, Westermann © Bildungshaus Schulbuchverlage GmbH, Braunschweig)

Diese Aufgabe wurde von der Lehrerin aus dem Schulbuch der Klasse ausgewählt, um die Flächenberechnung zu wiederholen:

I [00:25:25.13]

Lehrer: […] da ging es eigentlich mehr darum, einmal wieder die Flächenberechnung […] das ist so eine typische Aufgabe, die sie lösen können müssen. Nicht nur in der Schule, sondern später auch.

An der Begründung der Aufgabenauswahl zeigt sich hier beispielsweise das allgemeine Ziel der Lehrerin, die Schülerinnen und Schüler auf den Beruf vorzubereiten.
Den instruierenden Text (die ersten drei Zeilen) fügte die Lehrerin selbst hinzu, da ihr die Betonung des Arbeitsplanes wichtig ist (siehe Seite 184).

Objektive Kennzeichen der Station 4 ‚Bodenbeläge'

Diese Aufgabe ist als rechnerische Modellierungs- und problembezogene Aufgabe einzuschätzen. Zum Lösen müssen die Schülerinnen und Schüler zunächst den außermathematischen Kontext der Bodenbeläge in ein mathematisches Modell übersetzen. Dabei sind außermathematische Modellierungen auf niedrigem Niveau notwendig, da durch die Zeichnung das Modell größtenteils vorgegeben ist. Die Lernenden müssen jedoch noch erkennen, dass die Flächeninhalte der verschiedenen, auch zusammengesetzten, Figuren berechnet

werden müssen. Dazu müssen sie selbst geeignete Zerlegungen der Flächen vornehmen, was auf unterschiedliche Art und Weise möglich ist, so dass die Aufgabe verschiedene Lösungswege ermöglicht, welche alle innermathematisches Modellieren auf niedrigem Niveau erfordern. Außerdem müssen die benötigten Maße zunächst durch Maßstabsumrechnungen berechnet werden. Hier wird ein erster Bezug zum Bereich Arithmetik deutlich. Verbindungen zur Algebra werden durch die nötigen Termwertberechnungen hergestellt.
Allen Lösungswegen zur Berechnung der Flächen ist gemein, dass die Schülerinnen und Schüler im Anschluss die Materialkosten berechnen müssen. Hier wechselt der inhaltliche Fokus der Aufgabe in den Bereich der Arithmetik. Aufgrund der Wahlmöglichkeiten der einzelnen Materialien gibt es auch hier unterschiedliche Lösungswege und Lösungen. Nach der Multiplikation der berechneten Flächen mit den Preisen der selbstgewählten Bodenbeläge müssen die Lernenden noch den Durchschnittspreis der von Ihnen gewählten Materialien pro Quadratmeter berechnen und diesen mit dem in der Aufgabe angegebenen Durchschnittspreis vergleichen. Hierzu ist auch mathematisches Argumentieren auf niedrigem Niveau notwendig. Dabei können Standardargumente verwendet werden, indem die Kosten für die einzelnen Räume addiert und durch die Gesamtzahl der Quadratmeter dividiert werden. Der gesamte Lösungsweg erfordert auch die Verwendung mathematischer Darstellungen auf niedrigem Niveau, da immer wieder Informationen aus der Darstellung entnommen werden müssen und die Darstellungen mit Standardmethoden geeignet unterteilt werden müssen.
Durch das Hinzufügen der ersten drei Zeilen mit der Aufforderung zur Erstellung eines Arbeitsplanes werden dem ursprünglichen Aufgabentext Lösungs- und Strukturierungshilfen vorangestellt. Dabei wird insbesondere der Unterpunkt ‚Rechnung' des vorgegebenen Arbeitsplanes (siehe Abbildung 9.1) durch den Hinweis auf das Berechnen gesondert betont. Außerdem enthält die Aufgabenstellung den Hinweis darauf, dass die Schülerinnen und Schüler selbst überlegen müssen, wie sie die Flächen belegen würden. Hier wird einerseits ein starker Fokus auf die Berechnung und damit das prozedurale Denken deutlich, andererseits wird hier auch auf die Flächenberechnung hingewiesen, wodurch das Potenzial der Aufgabe zum Außermathematischen Modellieren noch etwas verringert wird.

Analyse des Unterrichtseinsatzes der Station 4 ‚Bodenbeläge'

Diese Aufgabe ist im Rahmen der Partnerarbeitsphase eine eigene Station, ein eigenes Arbeitsblatt für sich. Es liegen nur bei zwei Schülergruppen eher kurze Beobachtungen zu dieser Aufgabenbearbeitung vor. Daher können keine Einzelheiten zu möglichen Schülerlösungen dargestellt werden. Beiden Schülergruppen muss die Lehrerin die Maßstabsumrechnung nochmals erklären. Dabei betont sie, dass durch Kästchenzählen der Maßstab umgerechnet werden kann (analog zur Bearbeitung von Station 2 ‚Gartenanlage', siehe 9.3.3). Diese Schwierigkeit benennt sie auch im Interview:

> I [00:28:36.26]
> Lehrer: […] natürlich immer diese Maßstabsumrechnung, das fällt natürlich schwer.

Hier zeigt sich, dass die Lehrerin zumindest im Interview einige der aufgetretenen Probleme und Schwierigkeiten der Schülerinnen und Schüler benennen kann, obwohl sie sich in der Unterrichtsplanung zu dieser Aufgabe keine Gedanken über mögliche Probleme und Schwierigkeiten der Lernenden gemacht hat.
Ein Schülerpaar hat Probleme mit den Formeln für die Flächenberechnung:

> U [00:24:36.14]
> Schüler G: Und, müssen wir das dann hoch zwei nehmen?
> Lehrer: Hm? Sind wir bei Pythagoras? Wie war die Fläche vom Rechteck?
> Schüler G: Ja wo mussten wir denn ganz am Anfang hoch zwei nehmen?

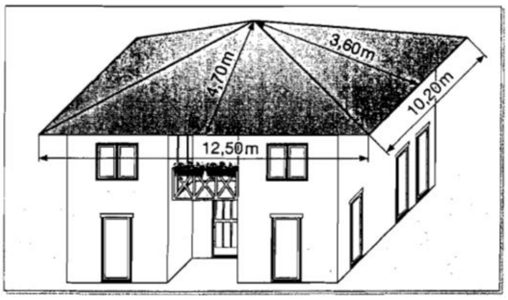
Lehrer: Müsst ihr überhaupt irgendwo hoch zwei nehmen?
Schüler G: Das war…
Lehrer: Wir sind nicht mehr bei Pythagoras. M. (Schüler G. löscht hoch 2 im Heft.)...Fläche vom Rechteck ist a mal b.

Die Lehrerin reflektiert den Schülerfehler hier nicht gemeinsam mit den Schülerinnen. Es ist nicht eindeutig zu beurteilen, ob die Probleme der Schülerin wie von der Lehrerin angesprochen mit dem Satz des Pythagoras zusammenhängen, sie könnten beispielsweise auch von der Berechnung der Kreisfläche herrühren. Die Lehrerin gibt die benötigte Formel ohne weitere Erläuterungen zur Begründung der Formel vor und lenkt damit stark. Außerdem steht durch die Betonung der Formeln das prozedurale Denken im Vordergrund. Die Bearbeitung der Aufgabe ist als verfahrensbetont einzuschätzen.

9.3.6 Station 5 ‚Bedachung'

Erstelle einen Arbeitsplan und berechne. Wenn du die Zahlen nicht richtig lesen kannst, findest du die Aufgabe in deinem Buch auf Seite 75.

Familie Schulz will das Dach ihres Hauses neu eindecken lassen.
a) Wie viele Dachziegel müssen bestellt werden? Plane einen Verschnitt von 15% ein.
b) Auch die Dachrinnen müssen erneuert werden. Ein Meter kostet 14,80 €. Für die beiden Fallrohre (je 8 m) kommen einschließlich Montage noch 484 € dazu.



Auf 1 m^2 kommen ca. 32 Dachziegel.

Ein lasierter Ziegel kostet 3,70 €.

Abbildung 9.11: Station 5 ‚Bedachung' (nach Golenia & Neubert, 2008, Westermann © Bildungshaus Schulbuchverlage GmbH, Braunschweig)

Diese Aufgabe wurde von der Lehrerin aus dem Schulbuch der Klasse ausgewählt. Den instruierenden Text (die ersten beiden Zeilen) fügte die Lehrerin selbst hinzu, da ihr die Betonung des Arbeitsplanes wichtig ist (siehe Seite 184).

Objektive Kennzeichen der Station 5 ‚Bedachung'

Beide Teilaufgaben sind als rechnerische Modellierungs- und problembezogene Aufgaben einzuschätzen. Sie sind in den außermathematischen Kontext der Bedachung eingebunden und erfordern außermathematisches Modellieren auf niedrigem Niveau, da durch die Skizze das Modell bereits vorgegeben ist.

Im Aufgabenteil a) müssen die Schülerinnen und Schüler zunächst erkennen, dass die Dachfläche aus vier Dreiecken besteht, von denen jeweils zwei den gleichen Flächeninhalt haben. Diese Flächeninhalte müssen berechnet werden. Anschließend verlagert sich der inhaltliche Fokus der Aufgabe vom Bereich der Geometrie hin zur Arithmetik. Die Lernenden können nun zunächst die Gesamtfläche des Daches und anschließend die Anzahl der benötigten Dachziegel ausrechnen, oder sie berechnen zunächst die Anzahl der benötigten Dachziegel für die unterschiedlichen Teildreiecke und addieren dann diese Werte, um auf die Gesamtzahl zu kommen. Außerdem müssen sie noch den Verschnitt berücksichtigen, wozu insbesondere Kenntnisse der Prozentrechnung benötigt werden. Mathematisch ist es egal, an welcher Stelle im Lösungsprozess die Schülerinnen und Schüler den Verschnitt berücksichti-

gen. Vom außermathematischen Kontext her macht es Sinn, die 15% Verschnitt nach der Berechnung der Anzahl der Ziegel hinzuzurechnen, da man dann auch eine Aussage über die benötigte Anzahl an Ziegeln und nicht nur über die Kosten machen kann.
In der Teilaufgabe b.) wechselt der inhaltliche Fokus ebenfalls aus dem Bereich Geometrie in den Bereich der Arithmetik. Die Schülerinnen und Schüler müssen zunächst erkennen, dass die Dachrinnen in einem Rechteck angeordnet sind und den Umfang dieses Rechteckes bestimmen. Anschließend müssen sie die Kosten für die benötigte Länge der Dachrinnen berechnen und den Pauschalpreis für die beiden Fallrohre addieren.
In keiner der beiden Aufgabenstellungen ist innermathematisches Modellieren und mathematisches Argumentieren erforderlich. Darstellungen müssen nur auf niedrigem Niveau verwendet werden, da lediglich Informationen aus der Darstellung entnommen werden müssen. Durch den Hinweis auf die Erstellung eines Arbeitsplanes ist eine Lösungs- und Strukturierungshilfe gegeben, wobei wiederum der Unterpunkt ‚Rechnung' des bereits erarbeiteten Plans (siehe Abbildung 9.1) gesondert aufgeführt wird. Hier wird der prozedurale Charakter der Aufgabe deutlich.

Analyse des Unterrichtseinsatzes der Station 5 ‚Bedachung'

Diese Aufgabe ist im Rahmen der Partnerarbeitsphase eine eigene Station, ein eigenes Arbeitsblatt für sich. Es können zwei Schülergruppen bei der Bearbeitung dieser Aufgabe beobachtet werden. Beiden Schülergruppen erhalten zu Aufgabenteil a.) eine ähnliche Hilfestellung von der Lehrerin:

U[00:47:03.17]

Lehrer: Das ist so eine Art, weiß nicht wie das heißt, Walmdach. Keine Ahnung, ne. Oder ein Spitzdach. So das ist, besteht aus vier Dreiecken. Die beiden seitlichen sind immer gleich und das Vordere und Hintere ist immer gleich, ne? Ud die Maße, aller die du brauchst, wenn da das jetzt chronologisch abarbeitest, dann hast du es.

Die Lehrerin gibt hier den Lösungsweg direkt vor und lenkt damit stark. Die Lernenden müssen nur noch die vorgegebene Prozedur abarbeiten.

<u>Schülerpaar KL</u>

Die Schülergruppe KL hat nach dieser Erläuterung durch die Lehrerin keine weiteren Schwierigkeiten, die Lehrerin fordert die Schülerinnen und Schüler aber zur Erläuterung ihres Lösungsweges auf:

U[00:31:31.05]

Schüler K: Das war's schon?

Lehrer: Was hast du denn jetzt gemacht? Ja nicht einfach, das war's.

<u>Schülerpaar GH</u>

Die Schülerinnen arbeiten zunächst nicht zusammen. Die Lehrerin fordert die Schülerin G. auf, ihr Vorgehen zu erläutern:

U [01:06:32.23]

Lehrer: (zu G) So, dann erklär mir mal jetzt die Aufgabe 1.

Schüler G: Erst mal rechne ich aus wie viel 15 Prozent sind. […]

Lehrer: Warum?

Schüler G: Weil ich das eben so machen will.

Lehrer: Wovon 15 Prozent?

Schüler G: Ich muss das erstmals so ausrechnen.

Lehrer: Ja, ich möchte wissen warum, wovon rechnest du jetzt 15 Prozent, du sollt einen Arbeitsplan machen und ich möchte wissen, warum du mit 15 Prozent anfängst, wovon die 15 Prozent? (Schüler G. tippt im Taschenrechner, reagiert nicht auf L.)

Lehrer: Wovon hast du denn jetzt 15 Prozent

Schüler G: Ich möchte jetzt nicht reden.

Die Lehrerin versucht die Schülerin zur Erklärung ihres Lösungsweges anzuregen, weist auf den Arbeitsplan hin und fragt nach Begründungen. Die Schülerin blockt aber ab, woraufhin die Lehrerin sich anderen Schülern zuwendet:

U [01:06:18.05] Schüler H: Müssen wir die (zeigt auf Berechnung der Flächen der verschiedenen Dreiecke im Heft) mal oder plus nehmen?

Lehrer: Was meinst du denn?

Schüler H: Also, die 2 (zeigt an der Zeichnung zwei gegenüberliegende Dachflächen) und die zwei, also einfach nur plus zusammen. (fängt an im Heft zu schreiben)

Die Lehrerin gibt hier keine konkrete Hilfestellung, sondern regt die Schülerin zur Reflexion an.

Zu einem späteren Zeitpunkt diskutieren die Schülerinnen G. und H. über den Lösungsweg, während sie von der Lehrerin beobachtet werden:

U [01:10:24.14]

Schüler G: Ja, aber das hier ist ja die Hälfte (zeigt auf das Dach, Höhe vorderes Dreieck)

Schüler H: Vom Dreieck.

Schüler G: Ja und das, das ist doch die Höhe.

Schüler H: Du rechnest einfach das hier mal das hier und dann durch zwei.

Schüler G: Das ist dann ja dieses Dreieck (Teildreieck, durch Höhe entstanden).

Schüler H: Nein. das Ganze. Das ist die Höhe. Warte mal (fängt an zu schreiben) […]Ok, du machst, ich weiß nicht, wie ich das erklären soll.

Lehrer: Erklär ihr doch mal wie du vorgegangen bist. Vielleicht kommt sie dann da hin. Was du gemacht hast, Schritt für Schritt.

Schüler H: Ja, g mal h, aber

Lehrer: Was hast du denn zuerst gemacht?

Schüler H: Die Fläche.

Lehrer: Was haben wir denn für Flächen?

Schüler H: Der Dreiecke.

Lehrer: Genau. Wie viel?

Schüler H: Vier Stück.

Lehrer: Erklär ihr das, sie weiß doch gar nicht worum‘s geht. […]

Schüler H: Ja, also das besteht aus vier Dreiecke. Und äh, zwei Dreiecke (zeigt auf gegenüberliegende) das sind die zwei, und das sind die zwei. Und du musst auf jeden Fall zweimal das (vorderes Dreieck) ausrechnen. Also einfach g mal h Dreieck ausrechnen. Und dass dann mal zwei. Und dann rechnest du das Dreieck (rechte Seite) aus, machst du das auch mal 2. Und dann rechnest du das Ergebnis mal zusammen.

Lehrer: ...Und dann hat sie was?

Schüler H: Ähm, die Fläche.

Lehrer: Vom?

Schüler H: Dach.

Lehrer: M. (Schüler G) hast du das mitgekriegt jetzt. Ja? Ok.

Die Lehrerin fördert hier das gegenseitige Erklären des Lösungsweges, sie strukturiert die Schülererklärung aber stark vor. Die Schülerin kann aber anschließend den Lösungsweg selbstständig erläutern.

Im weiteren Verlauf des Lösungsweges hat die Schülerin H. Probleme, die 15% Verschnitt zu berechnen:

U [01:16:51.22]

Schüler H: Ich weiß nicht, wie ich das hier so 15 Prozent ausrechnen soll.

Lehrer: Ach so. Ah, Prozentrechnung, lang, lang ist‘s her, ne. Wir haben bei Prozentrechnung immer einen Prozentwert, Grundwert und Prozentsatz. Prozentsatz ist immer das wo Prozent dran steht, so. Was, Grundwert hast du, das sind alle, also (mehrere unverständliche Worte, zeigt auf letztes Ergebnis im Heft). Also brauchst du den Prozentwert, ne. Dann nimmst du groß P, schreib auf, Formel P ist gleich (Schülerin schreibt) Grundwert geteilt durch hundert. Also Groß G, geteilt durch hundert, mal p Prozent. So, Ok, das rechnest du jetzt aus.

Die Lehrerin gibt hier die Formel zur Prozentrechnung direkt vor und lenkt damit stark. Die einzelnen Begriffe und insbesondere der Zusammenhang zur Aufgabe, werden aber nicht erläutert. Es wird insbesondere der prozedurale Charakter der Aufgabenbearbeitung deutlich.

Im Interview kann die Lehrerin die hier gezeigten Schwierigkeiten der Schülerinnen benennen:

I [00:30:28.25]

Lehrer: […]die Schwierigkeit war eben halt die können einfach nicht räumlich denken, ne, also das man da (beim Dach) das Dreieck, das gleiche Dreieck vorne und hinten hat und rechts und links. Als sie es dann gewusst haben, konnten sie es auch rechnen. […] aber ansonsten war das, also das wieder, das hat mich wirklich erstaunt, wie gut sie das beherrscht haben, also wenn sie die Fläche mal hatten, diese Umrechnen, Dachziegel, soundso viel Dachziegel, da kam ja noch die Schwierigkeit 15 Prozent Verschnitt, was ist Verschnitt, aber das konnte man ja gut erklären, […]

Interviewer: Ähm, ja, trat da irgendwas auf, wo du nicht mit gerechnet hattest.

Lehrer: Ja, hatte ich ja schon erzählt, ne, wie gesagt das mit den 15 Prozent.

Hier zeigt sich, dass die Lehrerin den Schwierigkeitsgrad dieser Aufgabe und den Leistungsstand der Schülerinnen und Schüler im Vorfeld größtenteils gut aufeinander abgestimmt hat, da die Schülerinnen und Schüler größtenteils sehr gut mit der Aufgabe zurechtkamen. Allerdings reflektiert die Lehrerin dabei nicht, dass sie zum Teil relativ konkrete Hilfestellungen geben musste. Beispielsweise hat sie die Formel für die Prozentrechnung direkt vorgegeben. Im Zusammenhang mit der Prozentrechnung konnte die Lehrerin auch die möglichen Probleme nicht richtig einschätzen.

Auffällig ist, dass sich die Lehrererin bei dieser Aufgabe bei beiden Gruppen nicht auf die Erstellung eines Arbeitsplanes drängt, obwohl dies in der Aufgabenstellung gefordert ist. Bei dieser Aufgabe hätte das starre Muster des vorgegebenen Arbeitsplanes (siehe Abbildung 9.1) sogar gut als Hilfe dienen können, da es zu den nötigen Bearbeitungsschritten dieser Aufgabe passt. Hieran wird deutlich, dass die Lösungsmethode dieser Aufgabe den Schülern gut bekannt zu sein scheint, sie benötigen keine weiteren Strukturierungshilfen.

Während der Bearbeitung ist vor allem prozedurales Denken erforderlich, da keine Begründungen von den Schülerinnen und Schüler verlangt werden. Die Aufgabenbearbeitung ist als verfahrensbetont einzuschätzen.

9.4 Analysen von Aspekten des fachdidaktischen Wissens, die sich in der Gesamtbetrachtung des Unterrichts zeigen

9.4.1 Umgang mit den Schülerinnen und Schüler

Reagieren auf richtige Lösungen

Fast immer bestätigt die Lehrerin die Richtigkeit der Lösung (z.B. durch Ja, Genau, hmhm), nur selten erfolgt nach einer richtigen Lösung kein Kommentar zur Richtigkeit. Die Lehrerin stellt häufig nach der Bestätigung der Richtigkeit der Lösung eine weiterführende Frage, die aber oft in eine bestimmte Richtung lenkt, z.B. zum nächsten Schritt im Lösungsprozess, manchmal sind die folgenden Fragen suggestiv. Oft formuliert die Lehrerin die Schülerlösung nochmals in eigenen Worten und fügt teilweise noch eigene Erklärungen hinzu. Hierdurch zeigt sich eine starke Lehrerlenkung. Manchmal fragt die Lehrerin nach Begründungen der Schülerantworten, häufig wird jedoch ohne Begründung der Antwort zum nächsten Schritt im Lösungsprozess übergegangen. Manchmal werden die Schülerinnen und Schüler zur selbstständigen Überprüfung der Antwort oder zur Reflexion bzw. Erläuterung des Lösungsweges angeregt. Insbesondere betont die Lehrerin an zwei Stellen, dass die Schüler sich den Lösungsweg gegenseitig erklären sollen.

Reagieren auf Fehler

Meistens berichtigt die Lehrerin die Schülerfehler selber, indem sie das Ergebnis nennt oder ganze Lösungswege vorstellt. Teilweise benennt sie im Vorfeld der Berichtigung, dass das Ergebnis falsch ist. Durch diese starke Lehrerlenkung wird die selbstständige Überprüfung der Ergebnisse durch die Schülerinnen und Schüler fast immer behindert. Des Weiteren baut die Lehrerin in die Erklärung der richtigen Lösung häufig Fragen ein, die eine Beteiligung der Schüler an der Berichtigung des Fehlers suggerieren. Auf Fehler reagiert die Lehrerin auch häufig direkt mit Suggestivfragen. Die Lehrerin fragt zwar manchmal nach Begründungen, sie lässt aber teilweise gar keine Zeit zum Antworten, sondern stellt direkt im Anschluss eine Suggestivfrage. Manchmal berichtigt sie den Fehler nicht direkt, sondern wiederholt noch mal das Verfahren, mit dem man zur Lösung kommen kann.

Reagieren auf Probleme und Schwierigkeiten

Es fällt auf, dass es sehr von der Schülergruppe abhängt, ob die Lehrerin mit starker Lehrerlenkung oder mit kognitiver Selbstständigkeit auf Probleme reagiert. Sie fordert die Schülerinnen und Schüler mehrfach auf, die Aufgabenstellung nochmal zu lesen. Häufig weist die Lehrerin auch auf den Arbeitsplan hin. Mehrmals lässt sich die Lehrerin beim Auftauchen von Problemen das bisherige Vorgehen erklären und regt die Schülerinnen und Schüler damit zum reflektierenden Denken an. Sehr oft reagiert die Lehrerin auf Probleme, indem sie Hinweise zum weiteren Lösungsweg gibt. Diese sind teilweise nur weiterführende Hinweise, die die Schülerinnen und Schüler leicht in die richtige Richtung lenken, also noch viel kognitive Eigenleistung von den Lernenden erfordern. Größtenteils handelt es sich bei den Hinweisen aber um direkte Vorgaben, was als nächstes zu tun ist. Die Lehrerin erklärt häufig die nächsten Schritte des Lösungsweges oder die komplette Lösung und baut lediglich einige Suggestivfragen ein. Besonders auffällig ist dies bei der Berechnung der Teichfläche (Station 3 ‚Gartenanlage‘, Schülergruppe CD, siehe 9.3.3). Manchmal verweist die Lehrerin als Reaktion auf Probleme der Schülerinnen und Schüler auf früher Gelerntes, z.B. Formeln. An einigen Stellen werden die Lernenden zunächst zum Nachdenken angeregt oder dazu aufgefordert, sich gegenseitig die Lösung zu erklären. Einmal wird nach der Begründung des Vorgehens gefragt.

9.4.2 Gebrauch verschiedener Repräsentationsformen

Nur selten greift die Lehrerin auf enaktive Repräsentationsformen zurück (z.B. beim Messen mit dem Geodreieck beim Parallelogramm). Es treten vor allem bildliche, sprachliche und formale Repräsentationsformen auf. Hier werden durch die Betonung des Arbeitsplanes auch häufig Wechsel zwischen den verschiedenen Repräsentationsformen vorgenommen, da die Schülerinnen und Schüler sich zunächst mit den bildlichen Darstellungen der Flächen auseinandersetzen müssen und diese dann durch das Benennen sprachlich repräsentieren (Unterpunkt ‚Flächen'), anschließend wechseln sie in die formale Repräsentation (Unterpunkt ‚Formeln'). Diese Wechsel treten bei fast allen Aufgabenbearbeitungen auf und werden von der Lehrerin gezielt unterstützt. Ob sich die Lehrerin dieser Tatsache bewusst ist, ist anhand der Beobachtung nicht festzustellen, da sie im Interview keinerlei Aussagen zu Darstellungswechseln macht.

9.4.3 Gebrauch von Begriffen

Die Lehrerin und die Schülerinnen und Schüler verwenden häufig mathematische Begriffe, wenn mathematische Gegenstände (z.B. die verschiedenen Figuren Rechteck, Trapez, …, aber auch Prozentrechnung) beschrieben werden. Insbesondere die Begriffe Umfang und Fläche werden sehr häufig benutzt. Hierbei ist anzumerken, dass der erste Punkt ‚Flächen' im vorgegebenen Arbeitsplan die Schülerinnen und Schüler häufig dazu verleitet, zunächst immer auf die Flächenberechnung der einzelnen Figuren einzugehen, auch wenn in den entsprechenden Aufgaben (z.B. ‚Zimmermann' Aufgabenteil a)) Betrachtungen des Umfangs im Vordergrund stehen. Die Lehrerin merkt im Interview an, dass hier der Begriff ‚Figuren' besser geeignet gewesen wäre (siehe 9.2). Sie zeigt hier, dass sie durchaus den Gebrauch der Begriffe reflektiert.
Auffällig ist aber, dass sowohl die Schülerinnen und Schüler als auch die Lehrerin mehrfach Alltagsbegriffe anstelle von mathematischen Begriffen benutzten. Vor allem wenn mathematische Tätigkeiten (z.B. addieren, subtrahieren, quadrieren) angewendet werden sollen, werden entweder einfache mathematische Begriffe (plus rechnen, hoch 2 nehmen) verwendet oder die Tätigkeiten werden mit Alltagsbegriffen umschrieben.

U [00:45:47.12]
Lehrer: Hmhm. Umfang, wie geht man da nochmal vor, wenn man Umfang hat?
Schüler J: Die Seiten zusammenzählen.
Lehrer: Hmhm. Genau.
Schüler J: Einmal umzugehen.
U [01:00:16.18]
Lehrer: Jetzt fangen wir einfach mal da an zu laufen (rechte untere Ecke Figur A, Zimmermann) Dann zählst du zusammen.

An diesen beiden Ausschnitten wird außerdem deutlich, dass die Strategie ‚Herumlaufen' zur Umfangsberechnung ebenfalls immer mit Alltagsbegriffen beschrieben wird.

9.4.4 Herstellen von Verbindungen

Verbindungen zum Vorwissen

Wie die Analysen der Aufgabenbearbeitungen und die Aussagen der Lehrerin in der Planung und im Interview zeigen, dienen alle von der Lehrerin eingesetzten Aufgaben der Anwendung bereits gelernten Wissens.

> Planung:
> Fachlich wird in der 9. Klasse der Stoff der vorangegangenen Klassen aufgearbeitet und vertieft. […] Es wurde ein Übungszirkel zu Flächenberechnung durchgeführt, bei dem der Fokus auf dem Erarbeiten eines Lösungsplans lag.

Insbesondere die Lösungsmethode des vorgegebenen Arbeitsplans (siehe Abbildung 9.1) ist den Schülerinnen und Schüler bereits bekannt. Auch die Flächenberechnungen, die Maßstabsumrechnungen sowie die Bezüge zur Prozentrechnung stellten Verbindungen zu bereits Gelerntem dar:

> I [00:28:46.04] Lehrer: […] und natürlich immer diese Maßstabsumrechnung, […] das kann man in jedem Jahr nochmal wieder aufnehmen.
> I [00:31:14.16] Lehrer: […] Prozentrechnung haben wir noch nicht wiederholt in diesem Schuljahr, haben sie aber auch schon gehabt. Auch schon in 7 und auch schon in 8, und äh, aber nichts desto trotz, also die Formel hab ich denn nochmal vorgegeben, weil ich hab mit denen, ich weiß nicht, ob du das mitgekriegt hast, die haben eine Formelsammlung, die führen bei mir so eine Kladde, da kommt zu jeder Unterrichtseinheit müssen sie die wichtigen Sachen dazu aufschreiben. Die dürfen sie auch benutzen, weil ich finde man muss nicht alles im Kopf haben, man muss nur wissen wo es steht.

Hier wird die Einstellung der Lehrerin zu früher Gelerntem deutlich: Mithilfe der eigens angefertigten Kladde dürfen die Schülerinnen und Schüler bereits gelernte Inhalte immer wieder nachschlagen. Dies betont sie auch im Unterricht an mehreren Stellen. Das Vorwissen wird steht hier als reines Faktenwissen zur Verfügung.

Inhaltliche Verbindungen

Innerhalb eines Stoffgebietes

In fast allen Aufgaben (außer Station 3, Aufgabenteil b) und d)) geht es um Flächen- und Umfangsberechnungen verschiedener Ebener Figuren. Die Lehrerin erläutert hierzu im Interview:

> I [00:23:47.13]
> Lehrer: […] deswegen hab ich die Aufgaben ja mit reingenommen […] es ging ja in jeder Aufgabe irgendwie um Umfang und Fläche. Einmal eben Fläche Dachziegel, Umfang Dachrinne…

Es ist aber zu beachten, dass die Flächenberechnung überwiegt (Station 1 komplett, Station 2 komplett, Station 3 Aufgabenteil c), Station 4 komplett, Station 5, Aufgabenteil a)), während die Umfangsberechnung nur in 3 Aufgaben zu finden ist (Station 2 eine Teilaufgabe, Station 3 Aufgabenteil a) und Station 5 Aufgabenteil b)). Dies hat die Lehrerin auch selbst erkannt:

> I [00:22:50.20]
> Lehrer: […] Die wich ja ab, also erstmals ging es da ja in erster Linie nicht um Fläche sondern um Umfang.

Größtenteils werden Umfangs- und Flächenberechnung nebeneinander, d.h. ohne gegenseitige Verknüpfung, thematisiert. Allerdings stellt die Lehrerin in Station 3 bewusst eine Verbindung zwischen Umfangs- und Flächenberechnung her, indem sie die originale PISA-Aufgabe ‚Zimmermann' mit dem Aufgabenteil c) ergänzt. Auch in den Stationen 2 und 5

werden Umfangs- und Flächenberechnungen gefordert, allerdings nicht von den gleichen Figuren (z.B. Fläche Dreiecke, Umfang Rechteck in Station 5). Ob die Kombination von Umfang und Flächeninhalt, die von der Aufgabenstellung im Buch her vorgesehen ist, bei der Auswahl der Aufgaben bewusst berücksichtigt wurde oder ob die Lehrerin im Nachhinein den Zusammenhang erkennt und benennt kann anhand der vorliegenden Materialien nicht entschieden werden.
Wie die Analysen der objektiven Kennzeichen der eingesetzten Aufgaben zeigen, werden auch in den einzelnen Aufgaben Verbindungen innerhalb der Umfangs- bzw. Flächenberechnungen hergestellt, indem Umfänge bzw., Flächeninhalte verschiedener mathematischer Gegenstände innerhalb einer Aufgabe betrachtet werden. So werden beispielsweise in der Station 2 die Flächeninhalte verschiedener ebener Figuren berechnet. Dies erkennt auch die Lehrerin:

I [00:25:25.13]

Lehrer: […] Man hat Trapeze, man hat einen Halbkreis, ähm, ganz viele Rechtecke, und so weiter und da ging es eigentlich mehr darum, einmal wieder die Flächenberechnung…

Zwischen verschiedenen Stoffgebieten

Die Aufgabenanalysen zeigen, dass in allen Stationen durch die Berechnung anfallender Kosten inhaltliche Verbindungen zu anderen Stoffgebieten, insbesondere der Arithmetik, bestehen. Die beiden Aufgaben, die keine solche Verbindung erfordern (dies sind gerade die vorgegebenen Aufgaben ‚Flächen vergleichen' und ‚Zimmermann' Aufgabenteil a), siehe Abbildung 9.2 und Abbildung 9.7) wurden von der Lehrerin durch entsprechende Aufgaben ergänzt. Hierdurch sind auch die Aufgaben miteinander vernetzt.

I [00:18:21.09]

Lehrer: Ich hab sie dann auch ein bisschen erweitert, das Holz kostet soundso viel, […] auf die anderen Aufgaben abgestimmt, ja.

Außerdem wird in zwei Aufgaben (Station 3, Aufgabenteil b) und Station 5, Aufgabenteil a)) eine Verbindung zur Prozentrechnung hergestellt. Ebenfalls in zwei Aufgaben (Station 2 und 4) werden Verbindungen zur Maßstabsumrechnung hergestellt. In allen Aufgaben können Formeln zur Berechnung des Umfangs oder Flächeninhaltes benutzt werden, sodass durch diese Termwertberechnungen eine Verbindung zur Algebra entsteht.

Weitere Verbindungen

Die Lehrerin hat die Aufgaben ganz bewusst entsprechend eines gemeinsamen außermathematischen Kontextes ausgewählt, wodurch die Aufgaben miteinander vernetzt werden.

Planung:

Sie gehören alle zum Übungszirkel ‚Rund um den Hausbau'.

Nur die Aufgabe ‚Flächen vergleichen' hat keinen außermathematischen Kontext, wurde aber durch eine Aufgabe mit passendem außermathematischen Kontext ergänzt. Die übrigen Aufgaben erfordern alle außermathematisches Modellieren auf niedrigem Niveau, da in allen Aufgaben das Modell nahe liegt. Im innermathematischen Modellierungsniveau unterscheiden sich die Aufgaben stark voneinander. Allerdings müssen die Schülerinnen und Schüler in fast allen Aufgaben (außer ‚Zimmermann' Aufgabenteil b)) mathematische Darstellungen verwenden. Das Niveau ist dabei meist niedrig (außer ‚Zimmermann' Aufgabenteil a)).
In allen Aufgaben wird von den Schülerinnen und Schülern die Erstellung eines Arbeitsplanes gefordert. Durch diesen Fokus auf den teilweise unpassenden Arbeitsplan sind die Aufgaben ebenfalls miteinander Verbunden. Es scheint hierdurch ein Fokus auf Prozeduren zu entste-

hen. Diese werden allerdings ohne Verbindungen mit Konzepten angewendet, so dass die Bearbeitung aller Aufgaben als verfahrensbetont einzuschätzen ist.

9.4.5 Ziele

Inhaltsbezogene Ziele

In der Planung hat die Lehrerin unter dem Punkt inhaltliche Kompetenzen nach eigener Aussage per „copy&paste“ die Unterpunkte ‚Größen und Messen‘ und ‚Raum und Form‘ aus den Bildungsstandards genannt. Hier wird insbesondere die Umfangs- und Flächenberechnung verschiedener ebener Figuren so wie die Maßstabsumrechnung genannt. Die stofflichen Verbindungen zu anderen Teilgebieten werden von ihr in der Planung nicht gesondert erwähnt. Die Lehrerin betont in der Planung und auch im Interview, dass es sich bei den hier vorkommenden Themen um reine Wiederholung handelt, hier zählt sie nun auch explizit die Prozentrechnung mit auf. Die Analysen der Aufgabenbearbeitungen (siehe 9.3) zeigen, dass die Lehrerin die hier genannten inhaltsbezogenen Ziele in ihrem Unterricht erreicht zu haben scheint.

Prozessbezogene Ziele

Die Lehrerin macht an mehreren Stellen in der Planung und im Interview deutlich, dass die Einübung des Arbeitsplanes das oberste Ziel der beobachteten Stunden war, um den Schülerinnen und Schüler beizubringen, komplexe Aufgaben vernünftig anzugehen (siehe 9.2). Dieses Ziel scheint nur bedingt gelungen, da die Schülerinnen und Schüler größtenteils den Arbeitsplan nicht selbstständig anwenden können oder ohne die Hilfe des Arbeitsplanes die Aufgabe lösen.
In der Planung hat die Lehrerin ebenfalls per „copy&paste“ die prozessbezogenen Kompetenzen ‚Problemlösen‘, ‚Kommunizieren‘ und ‚Symbolische, formale und technische Elemente‘ aus den Bildungsstandards aufgelistet. Hier werden teilweise Aspekte genannt, die in keiner der Aufgaben relevant sind (z.B. die Schülerinnen und Schüler stellen Sachzusammenhänge durch Funktionen dar). Die Lehrerin hat scheinbar die einzelnen genannten Kompetenzen nicht bewusst mit ihrem geplanten Unterricht in Beziehung gesetzt.
Die Lehrerin spricht an einer Stelle des Interviews selbst die Kompetenzen an, die sie fördern möchte, welche genau dies sind, kann sie aber nicht in eigenen Worten beschreiben.

> I [00:16:47.09]
> Interviewer: Ok, welche Kompetenzen hätte man da jetzt mit fördern können?
> Lehrer: Ach Gottchen, sollte ich mir hier jetzt die Rahmenrichtlinien.
> Interviewer: Ne nur was du... nicht die Formulierung der Rahmenrichtlinien. Was du glaubst, was man jetzt damit hätte fördern können, über das Rechnen hinaus. Hast du ja selbst angesprochen.
> Lehrer: Natürlich, ja, bestimmte Fachkompetenzen natürlich und Kommunikation, dass sie eben ein bisschen weiter drüber hinausgehen und Erkenntnisgewinnung gehört doch alles da rein und jetzt eben diese Richtung. Mensch ich könnt mir das jetzt rausholen und das…

Im Zusammenhang mit der Aufgabe ‚Flächen vergleichen‘ erkennt sie aber, dass die Aufgabe mehr als bloßes Ausrechnen erfordern kann und beschreibt in Ansätzen das Problemlösen.

> I [00:14:25.22]
> Lehrer: […] Aber ich fand das so mal ganz schön (zeigt auf Aufgabe 1) nicht nur eben dieses stumpfe rechnen, sondern auch mal überlegen, mal ein bisschen nachdenken, ein bisschen um die Ecke denken.

Da die Lehrerin aber fast immer die ‚problemhaltigen' Schritte im Lösungsprozess vorgibt, scheint dieses Ziel im Unterricht nicht erreicht zu sein. Dagegen arbeiten die Schülerinnen und Schüler größtenteils gemeinsam an den Aufgaben und werden von der Lehrerin zum Teil auch zum Erläutern der Lösungswege angeregt, so dass das Ziel des Kommunizierens erreicht wurde. Ebenso sind die Schülerinnen und Schüler durchweg mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik, insbesondere den bereits bekannten Formeln umgegangen.

Allgemeine Ziele

Die Lehrerin betont immer wieder, dass sie die Schülerinnen und Schüler auf den Beruf vorbereiten möchte und dass die Lernenden die in diesen Aufgaben geforderten Kompetenzen auch später immer wieder brauchen.

I [00:04:09.25]

Lehrer: […] und das ist ja letztendlich […] unsere Aufgabe als Hauptschullehrer, sie auf ihren Beruf vorzubereiten. Und wenn die da irgendwo rangehen und als Tischler, die meisten wollen ja in einen handwerklichen Beruf, dann irgendwo rangehen und stehen da planlos vor so einer Aufgabe, dann haben wir sie nicht vernünftig vorbereitet, muss man wirklich einfach so sagen.

Da die Kontexte teilweise sehr künstlich wirkten, ist es fraglich, ob dieses Ziel hier erreicht wurde.

9.5 Aspekte kognitiver Aktivierung

In der Analyse der Aufgabenbearbeitungen fällt vor allem die überwiegend starke Lehrerlenkung auf, die häufig auch über sehr lange Abschnitte andauert. Dagegen sind nur wenige kurze Szenen beobachtbar, in denen die Schülerinnen und Schüler zu kognitiver Selbstständigkeit oder zur selbstständigen Überprüfung der Ergebnisse angeregt werden, obwohl die Lehrerin in der Planung betont, dass die Lernenden selbstständig arbeiten sollen (siehe 9.2). Prozedurales Denken tritt deutlich häufiger und in viel längeren Phasen auf als die Aktivierung von Faktenwissen und begriffliches Denken. Außerdem ist wenig allgemeines Denken zu sehen, es ist dagegen sogar dreimal eine Behinderung allgemeinen Denkens feststellbar (z.B. Wahl eines konkreten Wertes für die Höhe in Station 1, siehe 9.3.1). Die Lehrerin verwendet häufig Darstellungen, es finden auch durch die Abarbeitung des Arbeitsplanes viele Wechsel zwischen verschiedenen Repräsentationsformen statt. Es wird aber deutlich, dass die Lehrerin eher selten nach Begründungen fragt und dass kein Vergleich mehrerer Lösungswege stattfindet. Auch werden die Schülerinnen und Schüler kaum zur Reflexion angeregt. Lediglich das strukturierte Denken wird durch den Arbeitsplan häufig von der Lehrerin gefördert.

9.6 Einschätzung des mathematischen Fachwissens anhand der Unterrichtsbeobachtungen

Eine Einschätzung des mathematischen Fachwissens ist für diese Lehrerin anhand der Unterrichtsbeobachtungen nicht möglich, da sich in ihren Äußerungen zwar kaum Fachwissen zeigt, es sind dagegen aber auch keine fachlichen Fehler erkennbar. Die Aufgaben sind aber zumindest inhaltlich gut aufeinander abgestimmt (siehe 0).

9.7 Zusammenfassende Interpretation und Einschätzung des fachdidaktischen Wissens

Die Lehrerin 2 gestaltet zwei Unterrichtsstunden „rund um den Hausbau“, in der die Schülerinnen und Schüler in Partnerarbeit an insgesamt fünf Arbeitsblättern arbeiteten, die eine oder mehrere thematisch zusammengehörende Aufgaben enthalten (siehe 9.3.1 bis 9.3.6). Die Aufgabenbearbeitung wird dabei von der Lehrerin für fast alle Aufgaben durch einen in der vorangegangenen Unterrichtsstunde erarbeiteten und von der Lehrerin sogenannten Arbeitsplan (Flächen, Formeln, Maße, Rechnung, Kosten, siehe Abbildung 9.1 vorstrukturiert, der bei fast allen Aufgaben angewendet werden soll.

Schülerbezogenes Wissen

Bei dieser Lehrerin zeigt sich mehrfach, dass sie eine bestimmte Strategie zum Lösen der Aufgaben im Kopf hat. Dies führt dazu, dass sie die Schülerinnen und Schüler in diese Richtung lenkt, ohne zu erkennen, dass die Lernenden andere Strategien verfolgen. Dies zeigt sich beispielsweise bei der Berechnung der Terrasse in der Aufgabe ‚Gartenanlage‘ (siehe 9.3.3). Dadurch werden die Lernenden insgesamt kaum zur kognitiven Selbstständigkeit angeregt. Die Lehrerin besteht bei fast allen Aufgaben auf der Einhaltung des vorgegebenen Arbeitsplanens und erkennt teilweise nicht, dass die Schülerinnen und Schüler ohne Hilfe des Arbeitsplanes einen guten Lösungsweg entwickeln. Sie behindert so teilweise die kognitive Selbstständigkeit der Lösungsprozesse. Größtenteils scheint die Lehrerin auch gar nicht zu versuchen, die Gedanken der Schülerinnen und Schüler zu verstehen, da sie die Lernenden nur selten zur Erklärung der Vorgehensweisen auffordert. Als Konsequenz wird an mehreren Stellen deutlich, dass die Lehrerin das Schülerdenken falsch einschätzt: Sie erkennt beispielsweise nicht, dass die Schüler die Vereinfachung der Teichfläche zu einem Rechteck bei der Aufgabe ‚Gartenanlage‘ (siehe9.3.3) nicht nachvollziehen können. Im reflektierenden Interview kann die Lehrerin zwar größtenteils die Lösungswege, die die Schülerinnen und Schüler zum Lösen der Aufgaben gewählt haben, nachzeichnen. Sie beschreibt beispielsweise sehr ausführlich, wie die Lernenden mit den Treppenfiguren beim Aufgabenteil a) der Aufgabe ‚Zimmermann‘ (siehe 9.3.4) umgegangen sind. Ihr fällt aber nicht auf, dass sie selbst die entscheidenden Hinweise zur Entwicklung dieser Idee gegeben hat, so dass die Idee nicht von den Lernenden entwickelt wurde. Dieses Verhalten der Lehrerin widerspricht der von ihr in der Planung geäußerten Forderung nach der Selbstständigkeit der Lernenden. Hieraus kann nicht nur auf mangelnde Umsetzung des vorhandenen Wissens, sondern auch auf fehlende verinnerlichte Kenntnisse zu konstruktivistischen Lerntheorien (siehe 5.1.1) geschlossen werden. Dies bedeutet nicht, dass die Lehrerin nicht auf Nachfrage aktuelle Lerntheorien benennen kann. Diese Kenntnisse liegen aber vermutlich nur auf der Oberfläche vor und haben keine Verknüpfung mit den Überzeugungen der Lehrerin erfahren.

In der Planung benennt die Lehrerin schon einige mögliche Schwierigkeiten und Fehler der Schülerinnen und Schüler, die im Unterricht auch tatsächlich so eintraten. Beispielsweise haben die Schülerinnen und Schüler Probleme mit den ungewohnten Aufgabentypen der im Rahmen dieser Untersuchung vorgegebenen Aufgaben (siehe 9.3.1 und 9.3.4). Bei den meisten Aufgaben hat sich die Lehrerin allerdings im Vorfeld keine Gedanken zu möglichen Problemen der Lernenden gemacht. Sie kann aber im Interview nach dem Unterricht einige Stellen benennen, an denen die Schülerinnen und Schüler Schwierigkeiten hatten, z.B. die Maßstabsumrechnungen (siehe 9.3.3). Außerdem benennt die Lehrerin einige aufgetretene Schwierigkeiten, die sie nicht erwartet hätte. Teilweise gibt die Lehrerin auch an, wodurch diese Probleme entstanden sein könnten und wie sie hätten vermieden werden können: Die

Schülerinnen und Schüler verwechseln z.B. oft Umfang und Flächeninhalt, da der erste Punkt im Arbeitsplan ‚Flächen' auf Flächenberechnung hinweist. Hier wäre nach Aussage der Lehrerin ‚Figuren' der bessere Begriff gewesen, woraus geschlossen werden kann, dass sie ihr eigenes Handeln zumindest teilweise kritisch reflektiert. Allerdings sind ihre Erklärungen zur Ursache der Schülerfehler zum Teil nicht passend oder unzureichend (z.B. der Hinweis auf Pythagoras, als eine Schülerin bei der Berechnung des Flächeninhaltes eines Rechtecks quadrieren möchte, siehe 9.3.5). Hieraus kann wiederum auf mangelnde Umsetzung des vorhandenen fachdidaktischen Wissens geschlossen werden.

Wissen über das Verständlichmachen mathematischer Inhalte

Die häufige starke Lehrerlenkung zeigt neben fehlendem schülerbezogenen Wissen auch Mängel im Wissen über das Verständlichmachen mathematischer Inhalte. Die Lehrerin wiederholt oft richtige Schülerantworten nochmals in eigenen Worten, wobei sie häufig eigene Erklärungen hinzufügt. Außerdem gibt sie mehrfach bei Fehlern und Problemen die richtige Lösung bzw. den richtigen Lösungsweg komplett vor (z.B. die Strategie zur Umfangsberechnung beim Aufgabenteil a) der Aufgabe ‚Zimmermann', siehe 9.3.4) oder sie entwickelt mithilfe von Suggestivfragen ‚gemeinsam' mit den Lernenden eine Lösung. Die bei einigen Aufgaben erforderlichen innermathematischen Modellierungen nimmt die Lehrerin in ihren Hilfestellungen mehrfach selbst vor, sodass die Schülerinnen und Schüler nur noch die erläuterten Lösungswege abarbeiten müssen. Dies führt dazu, dass an keiner Stelle im Unterricht verschiedene Lösungswege verglichen werden, obwohl die Aufgaben vielfältige Lösungsmöglichkeiten bieten. Außerdem werden die Schülerinnen und Schüler kaum zur Begründung ihrer Vorgehensweisen aufgefordert, so dass wichtige Elemente kognitiver Aktivierung keine Berücksichtigung im Unterricht finden. Es kann aber aufgrund der Unterrichtsbeobachtungen nicht entschieden werden, ob das fachdidaktische Wissen zum Verständlichmachen der Inhalte bei dieser Lehrerin nicht vorhanden ist, oder ob es nur nicht in Handlungen umgesetzt wird, da sich die Lehrerin kaum zu Aspekten dieser Wissensfacette äußert.
Es kann aus den genannten Gründen auch nicht entschieden werden, ob die Anregung zu häufigen Wechselns zwischen Repräsentationsformen, die durch die Abarbeitung des Arbeitsplanes ermöglicht werden, von der Lehrerin bewusst gestaltet wurden. Sie scheinen aber eher unbewusst initiiert zu werden. Dagegen zeigt sich am Gebrauch von Begriffen wieder mangelndes Wissen über das Verständlichmachen, da nicht nur die Schülerinnen und Schüler, sondern auch die Lehrerin mathematische Tätigkeiten (z.B. addieren, Umfang berechnen) meistens mit schwachen mathematischen Begriffen (plus rechnen, hoch 2 nehmen) oder sogar mit Alltagsbegriffen (siehe 6.2.1) umschreibt (z.B. hinzuzählen, herumlaufen). Mathematische Fachbegriffe werden fast ausschließlich zur Bezeichnung mathematischer Gegenstände (Trapez, Rechteck, Umfang) benutzt.

Inhaltsbezogenes Wissen

Der Unterricht dieser Lehrerin fokussiert ganz deutlich das prozedurale Denken. Die Lehrerin erkennt zwar teilweise das Potenzial der vorgegebenen Aufgaben (siehe 9.3.1 und 9.3.4), die im Gegensatz zu den von der Lehrerin selbst ausgewählten Aufgaben vor allem begriffliches Denken ermöglichen, sie kann es aber nicht genau beschreiben. Das Potenzial der Aufgaben zur kognitiven Aktivierung wird im Unterricht nicht genutzt, da die Lehrerin auch in diesen beiden Aufgaben die prozeduralen Aspekte (z.B. Formeln aufschreiben bei ‚Flächen vergleichen', Strategie ‚Stückelung' bei ‚Zimmermann' Aufgabenteil a)) betont, so dass die Aufgaben verfahrensbetont bearbeitet werden. An zwei Stellen versucht die Lehrerin zwar eine

begrifflich geprägte Erklärung, indem sie die Strategie ‚Rausziehen' bei den Treppenfiguren der Aufgabe ‚Zimmermann' Aufgabenteil a) anspricht (siehe 9.3.4). Diese Erklärungen werden aber von den Lernenden nicht verstanden bzw. die Lehrerin wechselt selbst in die prozedural geprägte Strategie ‚Stückelung'. Dies lässt auf Mängel in der Umsetzung des in Ansätzen vorhandenen inhaltsbezogenen Wissens schließen. Auch weitere Aspekte kognitiver Aktivierung, die in den vorgegebenen Aufgaben stecken, erkennt die Lehrerin zwar teilweise, fördert diese aber nicht im Unterricht. So wird das allgemeine Denken bei der Aufgabe ‚Flächen vergleichen' verhindert, indem die Schüler sich eine feste Zahl für die Höhe ausdenken (siehe 9.3.1) und bei der Aufgabe ‚Zimmermann' müssen aufgrund der prozeduralen Bearbeitung nur noch rein rechnerische Argumente entwickelt werden, wodurch das Argumentationsniveau sinkt (9.3.4).
Das prozedurale Denken wird in Zusammenhang mit allen Aufgaben auch dadurch betont, dass die Lehrerin ausdrücklich auf der Anwendung des Arbeitsplanes besteht. Dieser fokussiert durch die Unterpunkte ‚Formeln' und ‚Berechnung' (siehe Abbildung 9.1) prozedurales Denken. Die Lehrerin erkennt nicht, dass der Plan nicht passend zu einigen Aufgaben ist, was auf Mängel im inhaltsbezogenen Wissen schließen lässt. Insbesondere fokussieren die von der Lehrerin aus dem Schulbuch ausgewählten Aufgaben, die sie selbst als ‚typische Aufgaben' bezeichnet, prozedurales Denken. Hier ist das kognitive Aktivierungsniveau eher niedrig, da beispielsweise kaum außer- oder innermathematische Modellierungen nötig sind. Es müssen keine mathematischen Argumentationen durchgeführt werden, Darstellungen müssen nur auf niedrigem Niveau verwendet werden. Es handelt sich bei diesen Aufgaben immer um rechnerische Modellierungs- und problembezogene Aufgaben. Auch die Bearbeitung der Aufgaben im Unterricht ist verfahrensbetont, ohne Verbindung mit Konzepten. Die Aufgaben dienen alle der Anwendung bereits gelernten Wissens und sollen die Schülerinnen und Schüler sowohl auf die Abschlussarbeiten als auch auf ihr späteres Berufsleben vorbereiten. Die inhalts- und prozessbezogenen Kompetenzen, die die Lehrerin im Unterricht fördern möchte, hat sie größtenteils passend aus den Bildungsstandards kopiert, im Interview kann sie die Kompetenzen aber nicht in eigenen Worten beschreiben. Dies lässt darauf schließen, dass das Wissen über die Bildungsstandards nur oberflächlich vorliegt und nicht von der Lehrerin verinnerlicht wurde. Dies wird auch daran deutlich, dass die genannten prozessbezogenen Kompetenzen im Unterricht nicht deutlich gefördert werden.
Die Lehrerin zeigt dagegen inhaltsbezogenes Wissens, indem sie größtenteils bewusst vielfältige Verbindungen zwischen den Aufgaben, aber auch zwischen verschiedenen Stoffgebieten, herstellt. So sind die von der Lehrerin ausgewählten Aufgaben fast ausschließlich in den außermathematischen Kontext „Rund um den Hausbau" eingebunden. Ebenso werden in allen Aufgaben Umfangs- und/oder Flächeninhaltsberechnungen thematisiert und durch die Berechnung von Materialkosten ergänzt. Dadurch sind die Aufgaben sowohl auf der außermathematischen als auch auf der innermathematischen Kontextebene vernetzt, da einerseits verschiedene Bereiche innerhalb des Teilgebietes Geometrie aber auch unterschiedliche mathematische Stoffgebiete (vor allem Geometrie und Arithmetik) angesprochen werden. Allerdings werden die Konzepte Flächeninhalt und Umfang der Figuren in keiner der Aufgaben miteinander in Beziehung gesetzt, so dass die Vernetzungen auf einer oberflächlichen Ebene vorgenommen werden.

9.8 Vergleich mit den Ergebnissen des COACTIV-Tests

Im COACTIV-Testteil zum mathematikdidaktischen Wissen erzielte die Lehrerin 20 von empirisch zu erreichenden 37 Punkten. Sie liegt damit leicht über dem Durchschnitt der nicht-gymnasialen Lehrkräfte, die an der COACTIV-Studie teilgenommen haben (vgl. Abbildung 2.3). Es ist dabei zu berücksichtigen, dass der Test nicht für Hauptschullehrerinnen und –lehrer entwickelt wurde, ebenso muss bei der Interpretation aber auch bedacht werden, dass sich die Lehrerin in der Physikdidaktik engagiert und daher theoretisch über umfangreicheres allgemeindidaktisches Wissen verfügt als ein durchschnittlicher Lehrer.
Den Großteil der Aufgaben zum schülerbezogenen Wissen kann die Lehrerin lösen, auch wenn sie bei den Antwortformaten mit mehreren möglichen Lösungen häufig nur eine mögliche Lösung benennen kann. Die Lehrerin kann insbesondere mögliche Schülerfehler aufzählen und teilweise auch begründen, die Beschreibung von Fehlerinterventionen und die Begründung von zum Schülerdenken passenden Erklärungsmöglichkeiten im Unterricht gelingt der Lehrerin dagegen nicht. Diese Ergebnisse passen zu der Einschätzung des schülerbezogenen Wissens anhand der Unterrichtsbeobachtungen, in denen herausgestellt wurde, dass die Lehrerin zwar zum Teil über Wissen über Schülerfehler verfügt, dass sie dieses Wissen aber nicht in Unterrichtshandlungen umsetzten kann.
Die Aufgaben zum Verständlichmachen mathematischer Inhalte kann die Lehrerin größtenteils nicht adäquat lösen, obwohl sie sich bei allen Aufgaben bemüht, die Inhalte zu verdeutlichen. Beispielsweise kann sie für die Aufgabe ‚Minus 1 mal minus 1‘ (siehe Abbildung 2.2), die auch in der Hauptschule relevant ist, mehrere Erklärungsansätze aufzählt, es scheint aber keiner dieser Ansätze für die Erläuterung dieses Sachverhaltes geeignet. Auch dieses Ergebnis stimmt mit den Einschätzungen anhand der Unterrichtsbeobachtungen überein, da sich auch hier Mängel im Wissen über das Verständlichmachen mathematischer Inhalte zeigen.
Die Lehrerin kann dagegen relativ gut verschiedene Lösungswege der einzelnen Aufgaben beschreiben, und zeigt somit inhaltsbezogenes fachdidaktisches Wissen. Dabei benennt die Lehrerin mehrfach für eine Aufgabe Lösungswege, die Wissen verschiedener Stoffgebiete enthalten, beispielsweise algebraische und/oder geometrische Lösungen bei der Aufgabe ‚Quadrat‘ (siehe Abbildung 2.2). Auch dieses Ergebnis ist konsistent zu den Einschätzungen anhand der Interviewaussagen, die zeigen, dass die Lehrerin zwar die wichtigsten Aspekte der Aufgaben erkennt, diese aber nicht in den Unterricht umsetzen kann.
Teilweise weisen die Lösungen der Lehrerin im fachdidaktischen Teil des COACTIV-Tests fachliche Fehler auf, die sogar sehr elementar sind. Dies deutet schon auf sehr niedriges Fachwissen hin. Im Testteil zum mathematischen Fachwissen erreichte die Lehrerin 0 von 13 zu erreichenden Punkten. Dies ist aufgrund ihrer fehlenden mathematischen Ausbildung und des Fokusses des COACTIV-Tests auf vertieftes Wissen über die Inhalte der Sekundarstufe, wie es auch an der Universität gelehrt wird (siehe 4.2.2), nicht überraschend, auch mindestens 6 nicht-gymnasiale Lehrkräfte der COACTIV-Studie erzielten im Fachwissenstest 0 Punkte. Die Lehrerin konnte größtenteils nicht einmal die Lösungsansätze der Aufgaben beschreiben, mehrfach versucht sie, eine Lösung zu erraten. Selbst elementare geometrische Beweise kann die Lehrerin nicht lösen.

10 Darstellung der Analysen von Lehrer 3

10.1 Überblick über die Unterrichtsstunden

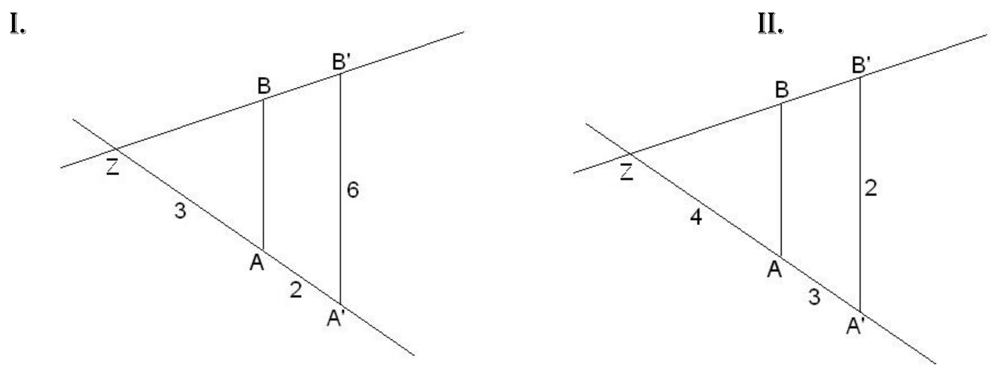
Es wurden drei aufeinanderfolgende Stunden des Lehrers 3 videografiert, eine Doppelstunde und eine Einzelstunde. Der Lehrer unterrichtet eine neunte Klasse, die nach Auffassung des Lehrers je zur Hälfte aus sehr leistungsstarken und sehr leistungsschwachen Schülerinnen und Schülern zusammengesetzt ist.
In den vorangegangenen Stunden wurden zentrische Streckung und insbesondere der Strahlensatz thematisiert. Diese Themen greift der Lehrer zu Beginn der Doppelstunde und auch zu Beginn der Einzelstunde mit je einer kurzen Wiederholungsaufgabe wieder auf (siehe 10.3.1 und 10.3.5). In der Doppelstunde wird anschließend die Hausaufgabe (siehe 10.3.2) verglichen, das Zeichnen und Strecken eines regelmäßigen Sechsecks mit dem Faktor 2. Anschließend sollen die Schülerinnen und Schüler zu zweit oder zu dritt überlegen, wie sich der Flächeninhalt des Sechsecks bei der Streckung verändert (siehe 10.3.3), wozu sie sich vielfältige Strategien zur Berechnung der Sechseckfläche überlegen. Im Anschluss an den Vergleich der Strategien bearbeiten die Lernenden in Gruppen die Änderung der Kreisfläche bei Verdoppelung des Radius (siehe 10.3.4). Dabei ist den Schülerinnen und Schülern die Formel für den Flächeninhalt eines Kreises bislang nicht bekannt. Diese beginnt der Lehrer in der folgenden Einzelstunde gemeinsam mit den Lernenden an der Tafel herzuleiten. Dazu werden die größtenteils gegen Ende der Doppelstunde ausführlich von den Lernenden präsentierten Strategien vom Lehrer zusammengeführt und mit zwei Seiten im Schulbuch, auf denen die Formel für den Flächeninhalt einer Kreisfläche und insbesondere die Zahl π hergeleitet werden, in Verbindung gebracht.

10.2 Darstellung aufgabenübergreifender Aspekte des Unterrichts

Im Gegensatz zu den anderen untersuchten Lehrpersonen sind bei diesem Lehrer keine Aspekte im Unterricht beobachtet worden, die über mehrere Aufgaben hinweg auftreten und vom Lehrer umfassend gemeinsam begründet werden.

10.3 Darstellung des Unterrichts und Analysen von Aspekten des fachdidaktischen Wissens anhand der eingesetzten Aufgaben

10.3.1 Aufgabe 1 ‚Strahlensatz‘



Mündlich: Ich habe die drei Seiten gegeben. Welche anderen Seiten kann ich bestimmen? Wie groß sind die?

Abbildung 10.1: Aufgabe 1 ‚Strahlensatz‘

Diese Aufgabe dachte sich der Lehrer selbst aus.

I [00:07:17.15]

Lehrer: […] Jedes Mal, wenn ich Geometrie mache, versuche ich, da irgendwie Kopfrechnen einzubauen.[…] Weil ich denke, dass... die meisten Schüler in der neunten Klasse mittlerweile so weit sind, dass sie sogar den Taschenrechner benutzen, wenn die 1 durch 2 rechnen müssen […]. Gerade in Äquivalenzumformungen haben die massive Probleme. […] Und deswegen versucht man oder versuch ich, alle geometrischen Probleme so ein bisschen zu verallgemeinern, dass man ab und zu mal eine Variable benutzen muss. Und der wesentliche Punkt sollte da dann einfach nur noch die Dreisatzrechnung sein. Das heißt, ich muss mit diesem (L. zeigt auf gegebene Streckenlängen) irgendwie umgehen können.

Der Lehrer betont hier vor allem die Bedeutung des Kopfrechnens, aber auch das Ziel des Übens von Äquivalenzumformungen. Er verwendet in diesem Zusammenhang mehrfach den Begriff Dreisatz, der aber scheinbar fehl am Platz ist.

Objektive Kennzeichen der Aufgabe 1 ‚Strahlensatz'

Die Aufgabenteile I. und II. zum Strahlensatz sind als technische Aufgaben mit Fokus auf Fertigkeiten einzuordnen. Sie sind von der Struktur her gleich, da sich lediglich die Zahlenwerte ändern, aber nicht die zu berechnende Strecke. Sie erfordern weder außer- noch innermathematische Modellierungen. Die Schülerinnen und Schüler benötigen zur Lösung Kenntnisse aus der Wissenseinheit des Strahlensatzes, den sie zunächst auf die gegebenen Figuren anwenden müssen. Hierzu ist kurzzeitig begriffliches Denken nötig, da die gegebene Figur auf ihre Eigenschaften hin überprüft werden muss, um die zu berechnende Seite zu bestimmen. Dieses Wissen kann aber auch in Form von Faktenwissen abgerufen werden. Daraufhin können die Schülerinnen und Schüler durch Termumformungen und das Lösen einer Gleichung die fehlende Seite berechnen. Mathematisches Argumentieren ist nicht notwendig, es muss aber auf niedrigem Niveau mit mathematischen Darstellungen umgegangen werden, da Informationen aus den Skizzen entnommen werden müssen.

Analyse des Unterrichtseinsatzes der Aufgabe 1 ‚Strahlensatz'

1. Teilaufgabe

Der Lehrer zeichnet zu Beginn der Stunde die linke Skizze in Abbildung 10.1 an die Tafel und stellt die in der Abbildung angegebene Aufgabe mündlich.

U [00:00:46.28]

Schüler J: Also man kann doch die Strecke AB ausrechnen.

Lehrer: Die hier (L. zeigt auf Strecke AB im Tafelbild.) ja. Wie groß ist die?

Schüler J: //Weil die ja// ähnlich oder kongruent mit Strecke A'B' ist.

Lehrer: Ja und? Wie, was können wir jetzt dazu sagen. Also das kann man bestimmen. Da hast du Recht. Wie groß ist die?

Schüler J: Vier.

Lehrer: Vier. Wie kommst du auf vier?

Schüler J: Ähm...... ähm weiß ich nicht.

(Lehrer lacht.)

Lehrer: Ok also Vermutung schreib ich mal hin 4 (siehe Abbildung 10.2).

Der Lehrer fragt nach der Berechnungsmöglichkeit dieses Wertes und fokussiert so prozedurales Denken. Der Schüler begründet seine Antwort aber noch, wobei er versucht, begriffliches Wissen zu aktivieren. Dabei scheinen die Begriffe ähnlich und kongruent aber nicht geeignet um die Möglichkeit der Berechnung zu begründen. Der Lehrer geht auf den Begriffsgebrauch aber nicht ein. Es wird nicht thematisiert, warum hier der Strahlensatz gilt, sodass die Möglichkeit zum begrifflichen Denken nicht genutzt wird. Der Lehrer fordert den Schüler J. aber zur Begründung seiner Antwort auf, was dem Schüler allerdings nicht gelingt. Der Lehrer visualisiert den Lösungsvorschlag dennoch an der Tafel.

Daraufhin erläutert die Schülerin S. ihren Lösungsvorschlag:

U [00:01:35.07]

Schüler S: Ja. Also man hat ja die Strecke AA'. […] Und das ist ja die Verlängerung sozusagen von der Strecke Z, ist das Z? Ja Z zu A und das ist ja zwei. Also muss man dann die Strecke B'A' einfach minus zwei rechnen. Das ist sechs also ist es dann vier.

Lehrer: Also du sagst (L. notiert gleichzeitig Gesagtes an der Tafel neben der Strahlensatzfigur.) B'A' minus AA' ist gleich BA. Das ist das, was du sagst. Stimmt das? […] Andere Vermutungen? ...... M.?

Schüler M: Man kann doch einfach 3 plus 2 durch 3 ist doch gleich 6 und dann durch die Unbekannte

Lehrer: Also welche, welche, wenn du jetzt die Strecken anguckst, welche durch welche Teilst du?

Schüler M: Man rechnet die Strecke ZA plus die Strecke AA'. […] Und dann rechnet man das ähm durch die Strecke ZA und dann ist das gleich der Strecke A'B' durch ähm AB.

(Lehrer notiert genannte Gleichung parallel an der Tafel, siehe Abbildung 10.2)

Lehrer: So jetzt haben wir hier zwei Varianten stehen. Wer ist für welche? […]

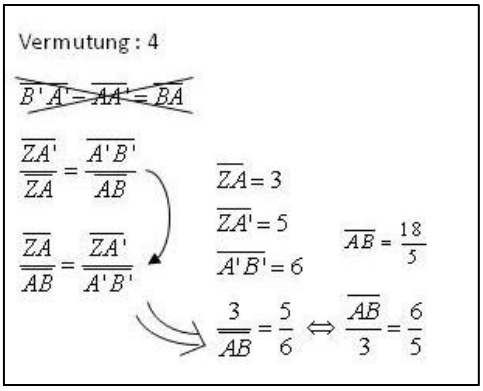


Abbildung 10.2: Tafelanschrieb zur ersten Teilaufgabe der Aufgabe 1

Die Lernenden äußern die Lösungsvorschläge hier kognitiv selbstständig, wobei vor allem prozedurales Denken aktiviert wird. Der Lehrer visualisiert auch diese Lösungsvorschläge an die Tafel (siehe Abbildung 10.2) und ermöglicht so einen Vergleich der Lösungsvorschläge und die Selbstständige Überprüfung durch die Lernenden.

Schüler K: Also ich wäre für die untere. Aber man könnte doch auch ähm ZA' ähm durch B'A' und dann ZA durch BA oder? […]

Lehrer: Genau. Wie könnte man das hieraus (L. zeigt auf untere Gleichung an Tafel.) machen? […]

Schüler K: Ja weil man das so umformen kann. […]

Schüler I: Ja ähm ich hätte jetzt geschrieben: A zu B äh AB zu ZA steht wie ähm ZA' zu A'B'.

Lehrer: Genau anders rum. So wie K. das auch gerade meinte, ne. […] Aber auf jeden Fall es geht um Verhältnisse. Strahlensatz Verhältnisse können wir schon mal sagen, das hier ist auf jeden Fall falsch (L. streicht obere Gleichung durch). Das ist nämlich kein Verhältnis. […] Wie kommen wir von da nach da (L. zeigt auf die beiden Strahlensatzgleichungen)? Irgendeine Idee? ...... Also umformen war von K. schon mal eine gute Idee. Man muss was multiplizieren, man muss was dividieren. Nämlich was? M.

Schüler M: Vielleicht muss noch mal die Strecke AB drin?

Lehrer: Dieses hier (L. zeigt auf rechte Seite der oberen Gleichung.) mal AB? […] AB steht hier auch im Nenner, ne.

Schüler M: Ne dann muss man... mal ZA.

Lehrer: Mal ZA genau und?

Schüler M: Durch ähm A'B'.

Hier zeigt sich, dass kein wirklicher Vergleich der Lösungsvorschläge stattfindet. Der Lehrer lenkt den Gedankengang nur auf den ‚richtigen' Lösungsvorschlag. Den Lernenden wird nicht deutlich gemacht, warum ihre Vermutungen falsch sind, da der Lehrer lediglich darauf hinweist, dass beim Strahlensatz Verhältnisse benötigt werden. Er hätte auch anhand der Skizze aufzeigen können, warum die Vermutungen falsch sind. Hier findet kein konstruktiver Umgang mit Fehlern statt. Auch auf den Fehler der Schülerin I. geht der Lehrer nicht ein. Er weist darauf hin, dass sich die beiden richtigen geäußerten Lösungswege ineinander überführen lassen und leitet diese Umformung kleinschrittig an, er lenkt also stark. Außerdem steht hier das prozedurale Denken sehr im Vordergrund, was sich an den Fragen des Lehrers nach direkten Berechnungsschritten zeigt.

Anschließend fordert der Lehrer die Schülerinnen und Schüler auf, mithilfe einer der beiden Gleichungen die Länge der Strecke AB zu berechnen:

U [00:05:48.08]

Lehrer: […] Jetzt wollen wir aber noch wissen, was da für eine Zahl rauskommt.....welches von den Verhältnissen ihr auch immer benutzen wollt. Beides richtig haben wir gerade festgestellt. Was kommt da jetzt für eine Zahl raus für AB? … Keine Ahnung? ... Ich helf euch ein bisschen. Also ich kann nochmal die Strecken daneben schreiben für die, die es nicht sehen (siehe Mitte Abbildung 10.2). […]

Schüler K: Man muss die Zahlen einfach einsetzen und hat dann bei ZA ist 3 und dann durch AB und dann ZA' ist gleich 5 durch 6. […]

Lehrer: Ja und nu? I.

Schüler I: Ähm mit dem Kehrwert mal nehmen und dann mal 3.

Lehrer: Was willst du mit dem Kehrwert mal nehmen?

Schüler I: Alles einmal. […]

Lehrer: AB durch 3 ist 6 durch 5 (L. schreibt gleichzeitig an die Tafel.). Kommt also raus? ... Sollte jetzt jeder rechnen können. […]

Schüler I: 3,6.

Lehrer: Ja nämlich 6 mal 3 durch 5 sind achtzehn Fünftel sind 3,6.

Der Lehrer lenkt hier durch die Visualisierung der Zahlenwerte stark. An der Aussage der Schülerin K. zeigt sich deutlich der kognitive Anspruch dieser Aufgabenstellung: „Zahlen einfach einsetzen“, es steht wiederum stark das prozedurale Denken im Vordergrund. Der Lehrer geht hier nicht näher auf die missverständliche Verwendung des Begriffes ‚Kehrwert‘ ein, sondern schreibt die äquivalente Gleichung (siehe Abbildung 10.2) an die Tafel. Die Schülerin I. nennt die korrekte Lösung in Dezimalschreibweise, woraufhin der Lehrer nochmals die Berechnung des Wertes in Bruchschreibweise erläutert und wieder stark lenkt. Die Dezimalschreibweise deutet auf die Verwendung des Taschenrechners hin, dies widerspricht allerdings dem genannten Ziel des Lehrers, mit dieser Aufgabe das Kopfrechnen zu üben (siehe Seite 218). An seinen Äußerungen zur Begründung der Aufgabe (siehe Seite 218) zeigt sich zwar, dass der Lehrer die hier beobachteten Schwierigkeiten der Schülerinnen und Schüler mit dem Aufstellen und Umformen von Bruchgleichungen, die Variablen enthalten, erkennt und auch vorhersieht. Im Unterricht geht er aber nicht auf die Schwierigkeiten der Lernenden ein.

<u>2. Teilaufgabe</u>

Der Lehrer ändert nun in der Zeichnung die Zahlen ab (siehe Abbildung 10.1) und wischt die Zahlen in der Rechnung an der Tafel weg.

U [00:08:35.24]

Lehrer: Ok. So dann wollen wir mal gucken, ob ihr das jetzt gelernt habt. Nächste Variante. Wir müssen wieder AB berechnen anscheinend. […] Ich kann ja hier mal alles wegwischen (entfernt Zahlenwerte in der Mitte von Abbildung 10.2). So welche Zahlen müssen dahin? […] Gut. Was steht dann hier unten?

Schüler A: Ähm 4 durch A durch B äh 4 durch AB und dann 7 durch 2.

Lehrer: AB ist also gleich was? ... Hier müssen wir wieder den Kehrwert nehmen. Schreib ich mal hin (L. ergänzt Gleichung rechts des Äquivalenzzeichens.). Kommt also was raus für AB? […]

Schüler N: Acht Siebtel.

Der Lehrer greift die missverständliche Formulierung mithilfe des Kehrwertes, die an dieser Stelle nicht passend ist, selbst wieder auf. Außerdem lenkt er auch hier wieder sehr stark. Es wird insbesondere die prozedurale Bearbeitung der Aufgabe deutlich, die sich schon im ersten Aufgabenteil gezeigt hat. Außerdem bietet der zweite Aufgabenteil durch das reine Austauschen der Zahlen keine neuerlichen Erfahrungen mit dem Aufstellen und Umformen von Gleichungen. Auch die erste Teilaufgabe scheint das Verständnis für Bruchgleichungen bei den Lernenden nicht verbessert zu haben, da der Lehrer die entscheidenden Schritte selbst vorgegeben hat und auf die Fehler der Schülerinnen und Schüler nicht eingegangen ist. Da der Lehrer direkt auf dieselbe Strecke hinweist und das Einsetzen der Zahlen direkt anleitet, scheint dem Lehrer durchaus bewusst zu sein, dass sich die Aufgaben sehr ähneln. Das Potenzial der Aufgabe zum Wiederholen wichtiger, vom Lehrer intendierter Aspekte, wird nicht ausgeschöpft und es ist keine verständnisbetonte Bearbeitung erkennbar.

10.3.2 Aufgabe 2 ‚Streckung eines regelmäßigen Sechsecks'

Zeichne ein gleichseitiges, regelmäßiges Sechseck und strecke es mit dem Faktor 2.

Abbildung 10.3: Aufgabe 2 ‚Streckung eines regelmäßigen Sechsecks'

Diese Aufgabe ist die Hausaufgabe vor der Doppelstunde. Der Lehrer hat in der vergangenen Stunde mit den Schülerinnen und Schülern erarbeitet, wie sich die Fläche eines Dreiecks bei Streckung mit dem Faktor zwei verändert. Diese Aufgabe dient nun darauf aufbauend zur Vorbereitung der nächsten Aufgabe (siehe 10.3.4), die wiederum zur Annäherung an den Kreis hinleiten soll.

I [00:11:48.15]

Lehrer: […] Wir haben vorher ein Dreieck, jetzt machen wir mal eine andere Figur, die man auch noch berechnen kann, indem man sie in Dreiecke zerlegt. […] Und man sieht eben auch schon, ich wollte die Überleitung zum Kreis schaffen. Das heißt, ich habe ein gleichseitiges regelmäßiges Sechseck genommen, also regelmäßig hätte ja gereicht... äh das schließt das gleichseitig mit ein. […] das habe ich denen nochmal gesagt, damit sie auch wissen, was unter einem regelmäßigen zu verstehen ist. […] wir haben das mit den Schülern nochmal erarbeitet, wie man ein regelmäßiges Sechseck konstruiert, indem man nämlich immer den Zirkel Radius wieder am äußeren Kreis dann... ähm abmisst.

Der Lehrer betont hier einerseits die Eigenschaft der gleich langen Seiten eines regelmäßigen Sechsecks und spricht damit begriffliches Denken an. Dieses wird auch in den bewusst hergestellten Zusammenhängen zwischen den Aufgaben deutlich. Andererseits wird aber die Konstruktion eines regelmäßigen Sechsecks auf einer sehr prozeduralen Ebene beschrieben.

Objektive Kennzeichen der Aufgabe 2 ‚Streckung eines regelmäßigen Sechsecks'

Die Aufgabe besteht aus zwei Teilaufgaben, dem Zeichnen und dem Strecken des Sechsecks. Es wird hier also die geometrische Figur des Sechsecks im lokalen innermathematischen Kontext der zentrischen Streckung näher betrachtet. Die beiden Teilaufgaben sind je nach gewähltem Lösungsweg und nach dem Umfang der Begründungen des Vorgehens, welche auch stark vom Vorwissen abhängen, als technische Aufgaben mit dem Fokus auf Fertigkeiten oder als begriffliche Modellierungs- und problembezogene Aufgaben einzuordnen.

Beim Zeichnen stehen den Schülerinnen und Schülern ganz unterschiedliche Methoden zur Verfügung, die jeweils unterschiedliche Anforderungen an die Lernenden stellen. Beispielsweise kann man ein regelmäßiges Sechseck zeichnen, indem man einen Kreis mit einem beliebigen, aber festen Radius zeichnet, einen beliebigen Punkt auf dem Kreis wählt und ausgehend von diesem einen kleinen Kreisbogen mit gleichem Radius um diesen Punkt schlägt, der den Ursprungskreis schneidet. Im Schnittpunkt schlägt man wiederum einen Kreisbogen mit gleichem Radius, der den Ursprungskreis schneidet und wiederholt dies, bis man den zuerst gewählten Punkt erreicht (Kreismethode). Bei dieser Methode wird vor allem die Eigenschaft der gleich langen Seiten des regelmäßigen Sechsecks ausgenutzt. Es sollte insbesondere argumentiert werden, warum der letzte Kreis wieder genau den gewählten Punkt trifft und warum mit dieser Methode die Ecken eines regelmäßigen Sechsecks konstruiert werden. Dies kann zum Beispiel über die Zerlegung in gleichseitige Dreiecke begründet werden. Für diesen letzten Schritt ist vor allem begriffliches Denken nötig, es ist aber auch denkbar diese Aufgabe ohne diese Argumentationen zu lösen, wenn die Konstruktionsmethode bekannt ist.

Eine andere Methode ist das Zeichnen des regelmäßigen Sechsecks über die Bestimmung der Innenwinkel (Winkelmethode). Entweder wissen die Schülerinnen und Schüler, dass die Summe der Innenwinkel im Sechseck allgemein 720° beträgt und dass in einem regelmäßigen Sechseck alle Winkel gleich groß sind (also je 120°), oder sie zerlegen das Sechseck in gleichseitige Dreiecke und schließen aus den je 60° großen Innenwinkeln der Dreiecke auf die Innenwinkel des regelmäßigen Sechsecks. Hier sind Ansätze einer innermathematischen Modellierung oder die Aktivierung vorhandenen Faktenwissens nötig. Es sind aber auch noch weitere, teilweise sehr ähnliche Methoden denkbar (z.B. je zwei Kreisbögen um den ersten gewählten Punkt und dann von zwei Seiten ‚um den Kreis wandern'').

Für die Streckung des gezeichneten Sechsecks können die Schülerinnen und Schüler nach Festlegung eines Streckzentrums alle Punkte des Sechsecks einzeln mit dem Faktor zwei strecken. Sie können aber auch, falls sie die ‚Kreismethode' zur Zeichnung verwendet haben, den Mittelpunkt des Kreises strecken, einen Kreis mit doppeltem Radius um diesen Punkt schlagen und erneut mit der ‚Kreismethode' ein Sechseck zeichnen. Die Verdoppelung des Radius sollte dabei begründet werden, wozu vor allem begriffliches Wissen aktiviert werden muss. Außerdem muss noch ein Punkt des ursprünglichen Sechsecks gestreckt werden, um einen geeigneten Startpunkt für das Zeichnen des gestreckten Sechsecks zu erhalten.

Die Aufgabe ist also auf vielen, unterschiedlichen Wegen lösbar, wobei allerdings nur einige Lösungswege mathematisches Argumentieren oder innermathematisches Modellieren erfordern. Alle Lösungswege erfordern dagegen das Verwenden von Darstellungen auf mittlerem Niveau, da sie von den Schülerinnen und Schülern selbst angefertigt werden.

Analyse des Unterrichtseinsatzes der Aufgabe 2 ‚Streckung eines regelmäßigen Sechsecks'

Der Lehrer hat in der vorangegangenen Stunde, die noch nicht Teil der Unterrichtsbeobachtung war, mit den Schülerinnen und Schüler erarbeitet, wie man mithilfe der ‚Kreismethode' (siehe objektive Kennzeichen dieser Aufgabe) ein regelmäßiges Sechseck zeichnet. Damit wurde den Lernenden ein Teil der Lösungsmethode der Aufgabe bereitgestellt. Allerdings ist aufgrund des erhobenen Materials keine Einschätzung darüber möglich, inwieweit die ‚Kreismethode' zum Zeichnen eines regelmäßigen Sechsecks in der vorherigen Stunde begründet wurde.

Kontrolle der Hausaufgaben und Probleme der Schülerinnen und Schüler

Beim Rundgang des Lehrers durch die Klasse zur Kontrolle der Hausaufgabelässt sich der Lehrer mehrfach die Lösungsmethode erläutern. Dabei wird deutlich, dass ein Großteil der Schülerinnen und Schüler die Kreismethode in der Hausaufgabe richtig anwenden kann. Zwei Schüler haben ein unregelmäßiges Sechseck gezeichnet, die Streckung haben die Schüler aber korrekt durchgeführt. Ein anderer Schüler hat zwar ein regelmäßiges Sechseck gezeichnet, beim Strecken ist dieses aber verzerrt worden. Auf die Gründe für die Fehler geht der Lehrer beim Rundgang nicht ein. In der Planung nannte der Lehrer als mögliche Schwierigkeiten bei dieser Aufgabe die falsche Anwendung der zentrischen Streckung, indem die verdoppelte Strecke vom Punkt und nicht vom Streckzentrum aus gemessen wird, so dass im Endeffekt eine Verdreifachung stattfindet. Diese Schwierigkeiten konnten aber nicht beobachtet werden.

Einige wenige Schülerinnen und Schüler haben das regelmäßige Sechseck unter Ausnutzung der gleich großen Winkel gezeichnet (siehe objektive Kennzeichen dieser Aufgabe). Der Lehrer betont im Interview, dass er diese Lösung begrüßte:

I [00:12:47.25]

Lehrer: […] ich fand's ganz gut, dass es sogar mehrere Lösungen gab, ganz ehrlich gesagt. Also manche haben's ja mit dem Geodreieck gezeichnet, haben dann erläutert, wieso sie auf diese Winkel gekommen sind. Das hat ja auch noch mitgeholfen, dass man nachher dann leichter erklären konnte, dass das gleichseitige Dreiecke sind und weil das gleichseitige Dreiecke sind, sind alle sechs Dreiecke gleich. Das heißt, ich muss nur ein Dreieck berechnen nachher und so. Also das war, das war schon ganz gut, dass das kam. Ich find's nur immer so ein bisschen schade, dass man denen eigentlich eine Lösungsmöglichkeit vorgibt... die einfach ist und dann kommen trotzdem Leute und sagen, sie wissen nicht wie es gemacht wurde und andere Leute haben's eben ganz anders gemacht, was eben darauf schließen lässt, dass sie die Lösung des Lehrers nicht ganz ernst nehmen.

Der Lehrer erkennt hier, dass die für die Zeichnung des Sechsecks über die Winkel nötigen Argumente für die Bearbeitung der folgenden Aufgabe hilfreich sind. Im zweiten Teil dieses Transkriptausschnittes äußert der Lehrer dagegen seinen Unmut über die Verwendung dieser Methode, da die Schülerinnen und Schüler nicht den von ihm vorgegebenen Lösungsweg gewählt haben. Dies steht im Widerspruch zu der sonst vom Lehrer betonten Selbstständigkeit der Schülerinnen und Schüler.

Allerdings erläutert der Lehrer im weiteren Verlauf des Interviews im Zusammenhang mit der nächsten Aufgabe (siehe 10.3.4), warum er die Kreismethode favorisierte:

I [00:13:48.19]

Lehrer: […] Das ist ja genau sozusagen die Überleitungsaufgabe. Wie komme ich von den Dreiecken jetzt eigentlich zum Kreis? […] Deswegen wollte ich ja auch, dass sie das mit dem Kreis zeichnen und nicht mit dem Geodreieck.

Hier löst sich der im vorherigen Absatz genannte Widerspruch auf. Der Lehrer favorisiert die ‚Kreismethode' aus inhaltlichen Gründen der Vernetzung, er erkennt aber auch den Beitrag der ‚Winkelmethode' zur Vernetzung des Unterrichts. Er beschränkt sich deshalb im Unterricht nicht auf die von ihm vorgegebene ‚Kreismethode'. Dies zeigt sich im weiteren Verlauf des Unterrichts daran, dass er beide Methoden erläutern lässt.

<u>*Vorstellung zweier Schülerlösungen*</u>

Die Schülerin C. führt die Kreismethode an der Tafel vor. Die Methode wird allerdings nicht erläutert oder begründet, also schematisch, aber selbstständig von der Schülerin benutzt. Die Schülerin K. erklärt daraufhin ihre Zeichnung mithilfe der Winkelsumme:

U [00:16:54.21]

Schüler K: Also ähm (? ...) von dem Sechseck, teilt man durch 6. Und dann ist das also ein ich glaub die Innensumme ist 700 Grad.

Lehrer: Warum?

Schüler K: Weil das immer also 360 und 360 Grad sind immer dann zusammen.

Lehrer: Genau. […]

Schüler C: Ja also man kann es mir der Winkelsumme machen. Weil im Sechseck ist die Winkelsumme 700 Grad.

Lehrer: Ungefähr.

Schüler C: 720. […] also das kommt weil bei einem ist es 120 Grad und dann für jede Ecke sozusagen noch 120 Grad dazu und dann durch 6 sind 720 und das ist es (? ...).

Lehrer: Dann weiß man, wie dieser Winkel ist (L. markiert oberen Winkel im Sechseck an der Tafel) und wie groß muss der sein?

Schüler C: 120?

Der Lehrer fordert explizit Begründungen ein, lenkt den Gedankengang sonst aber nicht, so dass die Schülerinnen und Schüler kognitiv selbstständig sind. Nur gegen Ende des Transkriptausschnittes lenkt der Lehrer leicht, indem er auch die Schüleraussagen an der Tafel visualisiert und nochmals nachfragt. Allerdings geht der Lehrer nicht darauf ein, dass die Schülerin C. in die falsche Richtung begründet, denn das Ziel ist ja gerade die Begründung der 120° großen Innenwinkel. Ebenso hinterfragt er nicht die obige Begründung der Schülerin K. (zwei mal 360°). Er geht aber offenbar bewusst auf beide verschiedenen Lösungswege ein, denn die Interviewaussagen (s.o.) lassen vermuten, dass er mit der Vorstellung der zweiten Lösung den Schülerinnen und Schülern eine Hilfestellung für die folgende Aufgabe geben wollte.

Vorstellung der Lösung durch den Lehrer

Anschließend legt der Lehrer eine Folie auf (siehe Abbildung 10.4), auf der er selbst ein mit der ‚Kreismethode' gezeichnetes Sechseck gestreckt hat. Er weist darauf hin, dass die Schülerinnen und Schüler dies größtenteils ebenso gemacht haben und fordert sie zur Erklärung des Vorgehens auf.

U [00:19:05.20]

Schüler M: Also man hat ja dann den Radius also wenn man das so macht, wir haben den Radius einfach so gemessen, also wie viel der dann war, und das dann davon das doppelte dann einfach genommen und das gleiche dann nochmal gemacht. Also.

Lehrer: Ne nicht ganz. […] Ich hab nur die Hilfslinien nicht eingezeichnet, aber was habe ich eigentlich gemacht? (L. zeigt auf den Punkt Z.). […]

Schüler T: Ja und dann muss man ja einfach strecken also.

Lehrer: Genau. Wie macht man das?

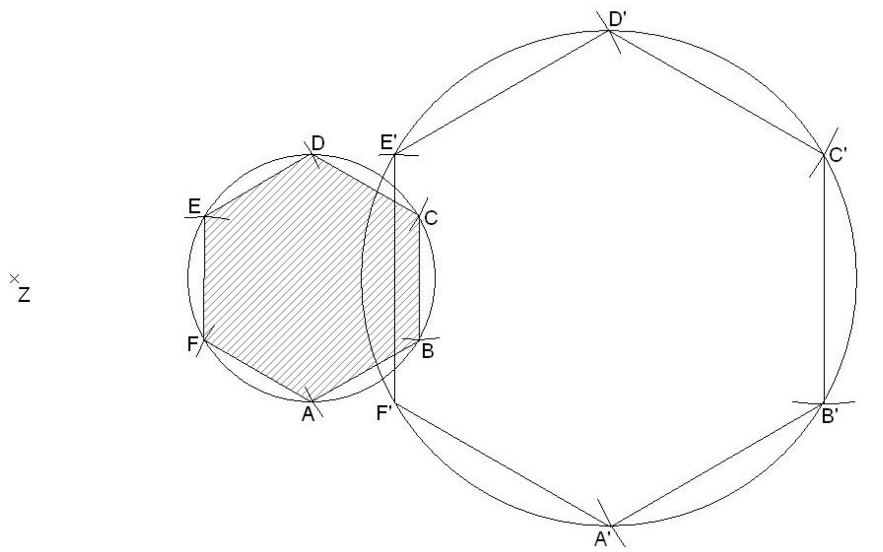
Schüler T: Jede Seite, also den Abstand vom Streckpunkt zur zum Beispiel jetzt zu Seite b äh e nehmen und das dann mal 2 und die dann lang ziehen, vom Streckpunkt aus aber.

Lehrer: Ja. Also ich verbinde den Punkt Z mit E und verdoppele die Strecke einfach. Das mache ich mit jedem Punkt und dann kann ich mein Sechseck strecken.

Der Lehrer fördert hier insbesondere die Reflexion des Lösungsprozesses. Er hier aber nicht darauf ein, dass auch durch die von Schüler M. vorgeschlagene Methode ein mit dem Faktor zwei gestrecktes Sechseck entsteht, nur dass bei dieser Methode das Streckzentrum nicht deutlich wird. Es wird das allgemeine Prinzip der Verdoppelung aller Strecken bei der Streckung benutzt, was der Lehrer nicht erkennt. Der Schüler T. wiederum beschreibt das Strecken der Seiten. Vermutlich meint er die Punkte, da er die Namen b und e verwendet und in der vom Lehrer vorgegebenen Zeichnung sind diese Namen nur für die Eckpunkte verwendet worden. Der Lehrer geht aber auch auf diesen unsauberen Begriffsgebrauch nicht ein, sondern erläutert das Strecken in seinen eigenen Worten, ohne Bezug zu den Schülerlösungen. Er lenkt damit stark. Es wird ein Wechselspiel zwischen kognitiver Selbstständigkeit und dann starker Lehrerlenkung an entscheidenden Stellen deutlich. Außerdem zeigt sich hier, dass der Lehrer die Schülerantworten nicht immer ganz durchdringt und so auf fehlerhafte Begründungen, aber auch auf gute Ideen in den Schülerantworten, nicht immer eingeht.

In der Besprechung der Aufgabe steht das prozedurale Denken im Vordergrund, die Bearbeitung der Aufgabe ist als verfahrensbetont einzuschätzen.

10.3.3 Aufgabe 3 ‚Änderung des Flächeninhaltes beim Sechsecks‘



Analysiere den Flächeninhalt der Originalfigur und der gestreckten Figur aus der Hausaufgabe und ermittle beide Flächeninhalte. Wie verändert sich der Flächeninhalt?

Abbildung 10.4: Aufgabe 3 ‚Änderung des Flächeninhaltes beim Sechsecks‘

Diese Aufgabe stellt der Lehrer im Anschluss an die Hausaufgabenbesprechung (siehe 10.3.2). Die von ihm selbst gezeichnete Abbildung ähnlich der Abbildung 10.4 legt er schon während der Hausaufgabenbesprechung auf den OHP auf, wobei die Fragestellung unten nicht abgedeckt ist.

I [00:13:48.19]

Lehrer: […] Das ist ja genau sozusagen die Überleitungsaufgabe. Wie komme ich von den Dreiecken jetzt eigentlich zum Kreis? […] Also darum hab ich diese Aufgabe gewählt, weil man eben direkt den Kreis normalerweise drin haben sollte. […] und das man dann eben schon den ersten Ansatz hat zur Lösung.

Hier zeigt sich, dass der Lehrer über einen langen Zeitraum hinweg den Gedankengang der Stunde entwickeln kann und vielfältige Verbindungen zwischen den Aufgaben bewusst in der Planung herstellt. Außerdem dient diese Aufgabe als Hilfestellung für die folgende Aufgabe (siehe 10.3.4).

Objektive Kennzeichen der Aufgabe 3 ‚Änderung des Flächeninhaltes beim Sechsecks‘

Der Hauptteil der Aufgabe besteht in der Entwicklung einer Strategie zur Berechnung des Flächeninhaltes eines regelmäßigen Sechsecks. Dieser Aufgabenteil ist als rechnerische Modellierungs- und problembezogene Aufgabe einzustufen. Die Schülerinnen und Schüler müssen zunächst mithilfe innermathematischer Modellierungen auf mittlerem Niveau die Sechseckfläche in ihnen bekannte Figuren zerlegen. Hierbei sind viele verschiedene Möglichkeiten der Zerlegung denkbar. Sehr gängig und leicht zu berechnen ist die Zerlegung in sechs gleichseitige Dreiecke, aber auch die Zerlegungen in zwei Dreiecke und ein Rechteck in der Mitte, zwei Trapeze, drei Parallelogramme, vier Dreiecke und weitere Zerlegungen sind möglich (siehe hierzu auch Abbildung 10.5). Hierbei verwenden die Lernenden Darstellungen auf mittlerem Niveau, da sie geeignete Zerlegungen auswählen und die gegebene Darstellung fortsetzen. Je nach gewähltem Lösungsansatz müssen nun die benötigten Strecken gemes-

sen und in die entsprechenden Formeln eingesetzt werden. Hier treten zusätzlich zum Bereich Geometrie einfache Termwertberechnungen aus dem Bereich Algebra auf.
Der zweite Teil der Aufgabe kann je nach gewähltem Lösungsweg als rechnerische oder begriffliche Modellierungs- und problembezogene Aufgabe eingeordnet werden. Durch die Einbettung der Berechnung der Sechseckfläche in den innermathematischen Kontext der zentrischen Streckung, erarbeiten die Schülerinnen und Schüler in diesem Aufgabenteil neben verschiedenen Strategien zur Bestimmung der Sechseckfläche ebenfalls die Vervierfachung des Flächeninhaltes bei der Streckung um den Faktor 2. Hierzu können sie die Strategie zur Berechnung der Sechseckfläche auf das zweite Rechteck übertragen und dort wiederholen, sodass die Werte für die Flächeninhalte, z.B. mithilfe der Division der Ergebnisse, verglichen werden können. Es sind dabei rein rechnerische Argumente ausreichend, so dass auf niedrigem Niveau mathematisch argumentiert wird. Es ist aber auch möglich, begriffliche Argumente in die Bearbeitung der Aufgabe zu integrieren, indem die Fläche des gestreckten Rechtecks nicht separat ermittelt wird, sondern mit der Begründung über die Verdoppelung aller Strecken oder der Vervierfachung von Dreiecksflächen aus der Fläche des kleinen Sechsecks hergeleitet wird. Hierzu müssen die Schülerinnen und Schüler auf mittlerem Niveau argumentieren.

Analyse des Unterrichtseinsatzes der Aufgabe 3 ‚Änderung des Flächeninhaltes beim Sechsecks‘

<u>*Erarbeitung von Lösungsstrategien*</u>

Die Schülerinnen und Schüler arbeiten zu zweit oder zu dritt an der Aufgabe, die beobachteten Zerlegungen der Sechseckfläche sind in Abbildung 10.5 dargestellt.

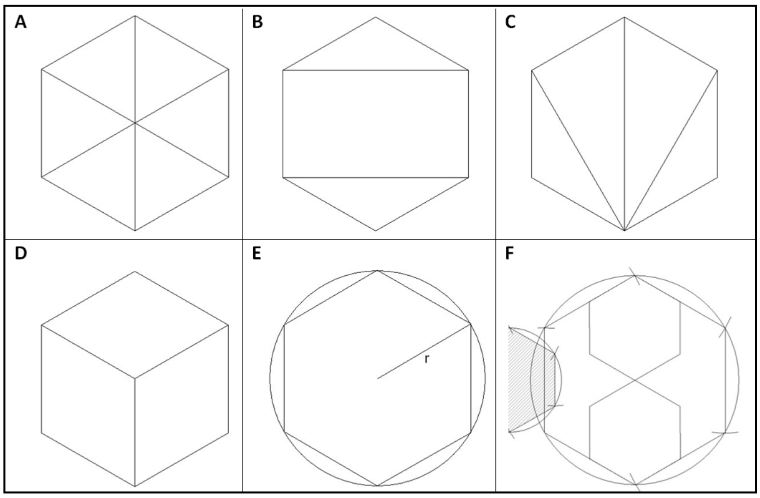


Abbildung 10.5: Beobachtete Zerlegungen des Sechsecks in Aufgabe 3 ‚Änderung des Flächeninhaltes beim Sechsecks‘

Der Lehrer geht während der Bearbeitungsphase durch die Klasse und gibt Hilfestellung. Ein Schüler vermutet ganz zu Anfang, dass sich der Flächeninhalt vervierfacht, der Lehrer ignoriert diese Äußerung aber:

U [00:21:18.00]
Schüler X: Ich glaube das ist viermal so groß.
Schüler Y: Wie rechnet man denn den Flächeninhalt eines Sechsecks aus?
Lehrer: Das ist eine gute Frage, überleg doch mal.

Hier zeigt sich, dass der Lehrer nur auf die Schülerantworten weiter eingeht, die zielführend für seine Unterrichtsziele sind. Außerdem fördert er hier deutlich die kognitive Selbstständigkeit der Lernenden. Dies zeigt sich bei der Bearbeitung dieser Aufgabe auch an vielen weiteren Stellen:

U [00:26:01.04]

Lehrer: Habt ihr schon eine Idee hier? […] Nein? ... Gut, dann überlasse ich euch nochmal euren Ideen.

U [00:34:58.14]

Lehrer: Hast du denn das mal versucht, das Große auszurechnen?

Schüler Y: Ne ich hab ja immer noch auf Ihre Antwort gewartet.

Lehrer: […] Aber am besten wäre, wenn du selber versuchst herauszufinden.

Schüler Y: Sie können doch einfach eben sagen ja oder nein.

Hier zeigt sich, dass die Schülerinnen und Schüler sich zum Teil mehr Hilfestellung wünschen würden. Einerseits kann vermutet werden, dass der Schüler Y. ‚zu faul' ist, die Aufgabe selbst zu lösen und dass der Lehrer dies hier gerade nicht unterstützen will. Es kann andererseits aber auch sein, dass der Schüler kognitiv nicht zu einer Lösung in der Lage ist und die Offenheit der Entdeckung für ihn an dieser Stelle zu groß ist (vgl. Mayer, 2004). Dann wäre eine konkrete Hilfestellung des Lehrers angebracht.

Auch beim Auftreten von Schwierigkeiten bemüht sich der Lehrer, die Schülerinnen und Schüler zu einer selbstständigen Lösung herauszufordern. Dies zeigt sich zum Beispiel bei Schüler Z., der den in Abbildung 10.5, Figur B skizzierten Ansatz verfolgt:

U [00:24:48.23]

Schüler Z: Sind die beiden Dreiecke gleichschenklig (???) auf den beiden Seiten? (siehe Abbildung 10.5, Figur B)

Lehrer: Müsst ihr mal gucken. […] Was meinst du denn?

Schüler Z: Ob die vom Flächeninhalt gleich groß sind. […] Rein theoretisch eigentlich schon.

Lehrer: Warum?

Schüler Z: Weil die Seiten ja eigentlich gleich sein müssen (S. zeigt auf die Seiten des regelmäßigen Sechsecks in seinem Heft).

Der Lehrer regt die Reflexion des Lösungsweges an und fragt nach Begründungen.

Mehrfach haben die Lernenden Probleme, die Grundseite und die Höhe in den Dreiecken und Parallelogrammen zu bestimmen. Der Lehrer fragt meistens nur nach den Eigenschaften der Höhe, wie folgende Szene beispielhaft zeigt:

U [00:27:17.05]

Schüler J: Muss man da unbedingt das nehmen oder geht auch ein so ein Schenkel (S. zeigt auf eine Seite des Sechsecks) als Höhe?

Lehrer: Was hat die Höhe für eine Eigenschaft?

Schüler J: Ach ne, die steht senkrecht, ne?

Der Lehrer fördert durch den Hinweis die Reflexion der Eigenschaften der Höhe und regt begriffliches Denken an. Dabei lenkt er nur kurzzeitig leicht. So kommen die Schülerinnen und Schüler größtenteils selbstständig darauf, wie sie die Lage der Höhe bestimmen können.

Ein Schüler, der die Strategie in Abbildung 10.5, Figur F entwickelt hat, versucht das große Sechseck mit dem kleinen Sechseck auszulegen, kommt aber nicht weiter:

U [00:26:19.29]

Schüler Y: Ja ich weiß auch nicht, was ich mache. (S. lacht.). Wollt gucken, ob das da wie oft das da reinpasst.

Lehrer: Ja das ist doch auch einen gute Idee.

Der Lehrer fordert den Schüler hier zum Weiterdenken auf, ohne konkrete Hinweise zu geben. Eventuell wäre hier ein kurze Hilfestellung angebracht gewesen (vgl. Mayer, 2004).

Der Lehrer lässt sich mehrfach die Strategien der einzelnen Schülergruppen erklären und fragt dabei auch nach Begründungen. Die Schülergruppe mit dem nicht regelmäßigen Sechseck fordert er auf, mit ihrem schiefen Sechseck zu rechnen. Eine Schülerin merkt gleich zu Beginn an, dass bei jedem der Schülerinnen und Schüler eine andere Lösung für den Flächeninhalt herauskommt. Dies greift der Lehrer gegen Ende der Gruppenarbeitsphase auf:

U [00:34:16.18]

Lehrer: Aber gilt das allgemein? Oder ist das jetzt nur für dein Sechseck so?

Schüler X: Ich würde sagen, dass das allgemein gilt.

Lehrer: Warum?

Schüler X: //Weil// es kommt ja eigentlich darauf an... Y. zum Beispiel hat andere Werte rausbekommen, weil sie hat ja einen anderen Radius eingestellt.

U [00:32:55.10]

Lehrer: Das ist ja nur ein Beispiel. Geht das immer?

Schüler Y: Ja weil man das ja in Dreiecke aufteilt und Dreiecke (? ...).

Hier fördert der Lehrer gezielt das allgemeine Denken und fordert die Schülerinnen und Schüler auch jeweils zur Begründung ihrer Vermutung auf. Dabei werden zwei verschiedene Argumentationen bei den Schülerinnen und Schüler sichtbar: Einmal wird anhand der verschiedenen Maße begründet, während die zweite Begründung auf die Vervierfachung der Dreiecke zurückgreift. Hier wird vor allem begriffliches Denken angesprochen.

Ein anderes Schülerpaar hat die Flächeninhalte mithilfe der Division der errechneten Ergebnisse verglichen:

U [00:31:47.03]

Schüler X: […] und dann den Flächeninhalt ermittelt und hab dann die beiden Flächeninhalte hab dann den großen Flächeninhalt durch den kleinen Flächeninhalt geteilt.

Diese Schülerlösung erfordert vor allem prozedurales Denken. Es zeigt sich, dass beide in den objektiven Kennzeichen genannten Strategien zur Ermittlung des Flächeninhaltes des großen Sechsecks, sowohl die begriffliche Begründung als auch die prozedurale Argumentation, zumindest von einigen Schülerpaaren selbstständig erarbeitet wurden.

<u>Beobachtete Probleme und Fehler der Lernenden</u>

Bei der Bearbeitung der Aufgabe treten einige Probleme und Fehler auf. Der Schüler Y. verfolgt den in Abbildung 10.5, Figur A skizzierten Ansatz:

U [00:24:06.10]

Schüler Y: Ja und die sind ja alle gleichseitig. Also alle Seiten gleich lang sind, also hat jedes Dreieck 47 Grad Winkel und dann muss man ähm...

Lehrer: Überlegt da erstmals weiter.

Schüler Y: Nein, das kann ja gar nicht, Moment... 60 Grad.

Lehrer: Genau.

Schüler Y: 60 ja (???) und dann ähm muss man ja den Flächeninhalt von jedem einzelnen dieser Dreieck ausrechnen, oder? Das ist ja 2 mal g mal h.

Der Lehrer geht hier auf den Fehler nicht ein, sondern fördert stattdessen das selbstständige Weiterdenken. Der Fehler wird von der Schülerin Y. eigenständig korrigiert. Hier entsteht der Eindruck, dass der Lehrer den Fehler selbst nicht bemerkt hat, er scheint die genannte Schülerantwort nicht umfassend zu reflektieren.

Der Schüler M. verfolgt den in Abbildung 10.5, Figur D skizzierten Ansatz der Zerlegung:

U [00:30:40.03]

Schüler M: […] Dass man die Seite mal die Seite rechnet und das dann mal 3?

Lehrer: Die Seite mal die Seite nicht. Sondern wie rechnet man den Flächeninhalt von einem Parallelogramm?

Schüler M: […] Auch G mal h?

Der Lehrer weist hier auf den Fehler hin, dieser wird aber selbstständig vom Schüler korrigiert. Der Hinweis des Lehrers fördert dabei stark das prozedurale Denken.
Ein weiterer Schüler möchte den Flächeninhalt des gestreckten Sechsecks berechnen, indem er den Flächeninhalt des kleinen Sechsecks verdoppelt:

U [00:28:20.20]
Schüler X: Also kann man doch den dann einfach mal 2 nehmen, oder nicht?
Lehrer: Musst mal überlegen, ob das geht.

Auch dieser Schüler wird zum eigenständigen Nachdenken aufgefordert, kommt aber zu keinem Ergebnis.
Im Interview erläutert der Lehrer keine der beobachteten Schwierigkeiten und Fehler, so dass nicht bewertet werden kann, ob er die Probleme der Schülerinnen und Schüler reflektieren kann.

<u>Besprechung der Aufgabe im Plenum</u>

Kurz vor Ende der ersten videografierten Stunde beendet der Lehrer die Gruppenarbeit und bespricht im Plenum verschiedene Lösungsmöglichkeiten an der Tafel:

U [00:37:02.25]
Lehrer: […] Ok also ich hab ja ein paar Taktiken gerade gesehen, wie man das machen kann. Ähm fangen wir doch mal mit der grundsätzlichen Taktik an, die fast alle angewendet haben. Da kann ich ja fast jeden dran nehmen, B.
Schüler B: Ja also das kleine und das große in 6 Dreiecke teilen. Indem man von jeder Ecke zur gegenüberliegenden eine Linie zieht (Der Lehrer führt dies an einem Sechseck an der Tafel aus, vgl. Abbildung 10.5, Figur A).
Lehrer: […] Und wenn ihr genau gezeichnet habt, dann solltet ihr feststellen, dass die Dreiecke sich alle hier im Mittelpunkt treffen […] Wie krieg ich denn jetzt die Fläche raus? ...... P.
Schüler P: Von einem Dreieck, also die sind ja eigentlich alle gleich groß, also von einem Dreieck halt den Flächeninhalt ausrechnen und dann das ganze mal... mal sechs.
Lehrer: Warum sind die alle gleich groß?
Schüler P: Weil äh... die Seiten ja alle gleich lang sind. Also ist der Abstand immer genau gleich groß und damit auch die Winkel.
Lehrer: Richtig. Ok. Ich nenn jetzt mal eine Seite G. Wie krieg ich dann die Fläche raus? ...... D.?
Schüler D: G mal h durch 2.
Lehrer: Und was ist h?
Schüler D: Die Höhe.
Lehrer: Und wie kriege ich die da hin?
Schüler D: Ähm... Ja einzeichnen, also zu der anderen Seite so eine Linie zeichnen. […]
Schüler H: Im rechten Winkel zur Grundseite.
Lehrer: Und wo muss die noch durchgehen?
Schüler H: Durch die den Punkt gegenüber.
Lehrer: Genau... Durch den gegenüberliegenden Eckpunkt...... Ich mess jetzt mal bei mir hier. 23... joa 27. (Lehrer setzt Werte in die Formel für Flächeninhalt an der Tafel ein.) […] Dann sind das also 310,5. […] Ok. Jetzt weiß ich ein Sechseck, äh ein Dreieck. Wie krieg ich das Sechseck raus? Ja J.?
Schüler J: Ja sechs, da es ein Sechseck ist, muss man einfach mal sechs machen.

Der Lehrer visualisiert die Schüleräußerungen selbst an der Tafel. Dabei leitet er die Lernenden in einem fragend-entwickelndem Unterrichtsgespräch zur genauen Erläuterung des Vorgehens an. Er lenkt also leicht, gegen Ende des Transkriptes auch stark. Dabei werden auch die Eigenschaften der Begriffe reflektiert. Außerdem fordert der Lehrer teilweise Begründungen ein. Hier wird der insgesamt eher prozedurale Charakter der Aufgabenbearbeitung zumindest teilweise durch begriffliches Denken ergänzt. Es zeigt sich, dass der Lehrer auf mathematische Exaktheit Wert zu legen scheint.

Anschließend bespricht der Lehrer noch eine zweite Strategie, die auch von mehreren Schülerinnen und Schülern verfolgt wurde (siehe Abbildung 10.5, Figur B):

U [00:40:10.08]

Schüler O: Man kann ja daraus aus dem Rechteck, äh aus dem Sechseck zwei Dreiecke und ein Rechteck machen.

Lehrer: Genau. Wie macht man das? […] (L. zeichnet Linien ein.) Eine andere Variante wäre sozusagen? ...... Also das ich einmal dieses Rechteck habe und dann hier ein Dreieck und hier ein Dreieck. Haben auch relativ viele von euch gemacht. Wie macht man das dann? P.?

Schüler P: Ja dann zeichnet man einfach in eins von den beiden Dreiecken wieder G ein. […] auch h und rechnet dann ganz normal wie das auch, rechnet das mal 2, weil man oben ja das gleiche nochmal hat. Und dann rechnet man einfach den Flächeninhalt von dem Rechteck aus und das ist a mal b (vgl., Figur B).

Der Lehrer visualisiert dabei wieder die Schüleräußerungen an der Tafel. Der Schüler P. erläutert selbstständig diesen Lösungsweg, wobei prozedurales Denken aktiviert wird. Hier zeigt sich, dass der Lehrer ähnlich wie bei Aufgabe 2 mehrere Lösungswege vorgestellt werden, allerdings werden hier keine Beziehungen zwischen den Lösungswegen hergestellt. Es findet also kein Vergleich statt. Insbesondere werden keine weiteren Strategien besprochen, obwohl noch mehrere Varianten bei der Bearbeitung im Unterricht beobachtet werden konnten (siehe Abbildung 10.5). Auch im Interview benennt der Lehrer nur diese beiden Schülerstrategien:

I [00:14:09.13]

Lehrer: […] Ja, und selbst da gab es verschiedene Lösungen, was ich ja auch mehr oder weniger antizipiert habe, dass man hier also sowohl ein Viereck als Lösung betrachten kann mit zwei Dreiecken oder aber man nimmt eben sechs gleichseitige Dreiecke. Und das fand ich gut, dass es eben diese verschiedenen Lösungsarten auch gab. Dass also Leute wirklich darüber nachgedacht haben, wie kann man das machen. […] weil man sieht, dass eben Mathematik nicht so ist, es gibt eine Lösung und genauso muss man das machen. Sondern es gibt viele verschiedene Ideen um zur Lösung zu kommen und manchmal gibt es sogar Lösungen, an die der Lehrer nicht gedacht hat.

Der Lehrer begründet die Bedeutung verschiedener Lösungswege hier vor allem mit dem Wesen der Mathematik. Er erwähnt aber nicht, dass durch den Vergleich verschiedener Lösungswege vor allem Vernetzungen im Denken hergestellt werden. Dies ist konsistent mit der Beobachtung, dass keine Verbindungen zwischen den verschiedenen Lösungswegen hergestellt werden. Des Weiteren äußert der Lehrer hier indirekt, dass die Lernenden Ideen entwickelt haben, an die er im Vorfeld nicht gedacht hat.

Die bisherige Besprechung thematisierte zunächst die Bestimmung des Flächeninhaltes eines Sechsecks. Im Anschluss leitet der Lehrer die Besprechung des zweiten Aufgabenteils ein:

U [00:41:23.14]

Lehrer: Genau. So jetzt hab ich festgestellt, was kriegen die meisten für einen Faktor raus, der größere zum kleineren, wie ist der Unterschied? ... Hab ich mehrfach gesehen. K.?

Schüler K: Also der Faktor ist dann 4.

Der Lehrer gibt hier durch den Begriff Faktor schon die notwendige Rechnung vor, es wird aber nicht weiter erläutert, wie der Faktor 4 ermittelt werden kann, obwohl sich in der Gruppenarbeitsphase gezeigt hat, dass nicht alle Lernenden wissen, wie sie die Flächen vergleichen sollen (siehe Seite 229). Durch die fehlende Besprechung des Lösungsweges wird die Chance vertan, diese in der Mathematik recht gängige Methode des Verhältnisvergleichs nochmals zu festigen. Bis zu diesem Punkt ist die Bearbeitung der Aufgabe eher verfahrensbetont, da die Schülerinnen und Schüler größtenteils Prozeduren ohne Verbindung mit Konzepten anwenden. Allerdings sind die angewendeten Strategien in der nächsten Aufgabe von

Nutzen, so dass das Ziel des Lehrers, den Schülerinnen und Schüler mit dieser Aufgabe Ansatzmöglichkeiten für die nächste Aufgabe zu bieten, erreicht scheint.
Anstelle der Besprechung des Lösungsweges zur Bestimmung der Vervierfachung des Flächeninhaltes fordert der Lehrer die Schülerinnen und Schüler auf, diesen Zusammenhang zu verallgemeinern.

Lehrer: Genau, der Faktor ist 4... So jetzt haben wir das bei den Dreiecken ja auch schon rausgekriegt, dass der Faktor 4 ist. Warum ist der denn 4? Kann man das irgendwie beweisen allgemein? […] bei Schüler X. und Schüler Y. hab ich vorhin gesehen, die haben noch nicht einmal ein regelmäßiges Sechseck gezeichnet, sondern ein anderes Sechseck, und auch da kommt das hin mit dem vervierfachen. Wieso ist denn das so? Hat da jemand eine Idee? ...... N.

Schüler N: Weil wenn man das mit dem Zirkel vorzeichnet, dann ähm sind das ja verschiedene sagen wir Zirkel, also sagen wir Radien eingestellt und wenn man das dann ja verzweifacht, dann wird das ja aber trotzdem konstant größer und das ist halt dann egal, welchen Radius man eingestellt hat, weil sich das bei jedem dann vervierfacht. Also wenn das

Lehrer: Jaaa, also erstmals du sagst, die Vergrößerung sozusagen, die Abbildung, ist genau die gleiche. Deswegen ist ver äh vervierfacht sich auch immer der Flächeninhalt. Aber das müssen wir noch ein bisschen allgemeiner formulieren.

Hier scheinen Schüler und Lehrer aneinander vorbeizureden, bzw. der Lehrer bringt Aspekte mit ein, die der Schüler gar nicht meinte, denn der Schüler scheint nur über das Sechseck zu argumentieren, während der Lehrer die Beziehung zum Dreieck herstellt, indem er auf dieselbe Abbildung beim Dreieck und beim Sechseck verweist. Er erkennt aber, dass diese Antwort nicht ausreichend ist.
Die Schülerin K. begründet die Vervierfachung so:

U [00:43:06.16]

Schüler K: Der Flächeninhalt vervierfacht sich halt, weil ähm man das ja in 6 Dreiecke teilt bei der einen Figur und dann zwei Dreiecke vervierfachen sich ja auch, und deswegen vervierfacht sich das dann auch. […]

Schüler E: Also wenn man bei ähm irgendeiner geometrischen Figur mit dem Streckfaktor 2 streckt, dann verdoppeln sich ja alle Seiten und alle Strecken, Höhen und so weiter. Und um den Flächeninhalt auszurechnen, muss man ja zwei Seiten immer miteinander mal nehmen und wenn man hier zwei Seiten, die schon miteinander äh die schon verdoppelt wurden, miteinander mal nimmt, vervierfacht die sich.

Die Schülerin K. argumentiert allgemein, indem sie die schon bekannte Vervierfachung der Dreiecke heranzieht und auf die Zerlegung des Sechsecks in Dreiecke hinweist. Der Schüler E. präzisiert die Antwort der Schülerin K. und gibt schon eine sehr ausführliche, allgemeine Begründung.
Der Lehrer erläutert die Begründung des Schülers E. daraufhin in eigenen Worten:

U [00:44:12.23]

$$
\begin{aligned}
&\mathit{Fläche} = g \cdot h : 2\\
\triangle\ &\mathit{gestreckte\ Fläche} = 2g \cdot 2h : 2 = 4 \cdot \mathit{Fläche}\\
⬡\ \ \ &\text{"} \qquad = 6 \cdot 2g \cdot 2h : 2 = 6 \cdot 4 \cdot \mathit{Fläche}\\
&\qquad = 4 \cdot \mathit{Fläche}\ ⬡
\end{aligned}
$$

Abbildung 10.6: Tafelanschrieb zur Aufgabe 3

Lehrer: Genau. Und das haben wir nämlich beim Dreieck ja auch schon festgestellt. Beim Dreieck hatten wir festgestellt, wenn wir ein Grunddreieck haben, das die Fläche hat G mal h durch 2 (schreibt parallel die Formel an die Tafel, siehe Abbildung 10.6), dann ist das gestreckte Dreieck die Fläche davon […], dann ist das hier 2G, das ist 2h und das durch 2 und dann kriegen wir raus: Das ist viermal die Fläche, die ursprüngliche (schreibt parallel die Formel an die Tafel, siehe Abbildung 10.6)... So jetzt haben wir ja schon festgestellt, das hat nämlich gerade K. gesagt, dass das Ganze ja aus 6 Dreiecken besteht. Was muss ich also nur mit dieser Formel machen, damit daraus ein Sechseck wird? A.

Schüler A: Ja das ganze mal 6, also in Klammern setzen die eine Formel und dann mal 6.

Lehrer: […] Gestreckte Fläche ist dann 6 mal 2 mal G mal 2 mal h durch 2... ist dann auch ähm 6 mal 4 mal die Dreiecksfläche beziehungsweise 4 mal Fläche vom Sechseck...(schreibt parallel die Formel an die Tafel, siehe Abbildung 10.6) I.

Schüler I: Müssten da nicht Klammern hin, damit ich das mal 6 nehmen kann?

Lehrer: Warum müssen da keine Klammern hin? ... Welches Gesetz gilt da? ...... K.

Schüler K: Erst mal, weil man nur mal nimmt, das Kommutativgesetz oder so.

Lehrer: Kommutativgesetz ja. Ok. Deswegen muss das nicht.

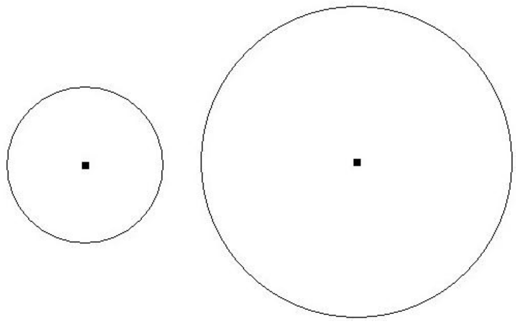
Der Lehrer stellt hier gezielt Verbindungen zum Vorwissen aus der vorangegangenen Stunde her, wobei er insbesondere auf die Vervierfachung der Dreiecksfläche aus der letzten Stunde zurückgreift. Er verdeutlicht die Vervierfachung mithilfe von Formeln an der Tafel (siehe Abbildung 10.6), wodurch die Repräsentationsform gewechselt wird. Dabei sind die Lernenden größtenteils unbeteiligt. Der Lehrer lenkt hier also sehr stark. Das prozedurale Denken steht stark im Vordergrund. Die vom Schüler A. genannten Klammern ignoriert der Lehrer zunächst. Erst als auch die Schülerin I. auf die fehlenden Klammern hinweist, fragt der Lehrer die Schülerinnen und Schüler, warum an dieser Stelle keine Klammern nötig sind und fragt direkt nach dem entsprechenden Gesetz. Der Lehrer erkennt hier scheinbar nicht, dass das Kommutativgesetz die falsche Antwort war, da das Assoziativgesetz das Weglassen von Klammern bei reiner Multiplikation ermöglicht. Es wäre gegebenenfalls auch sinnvoller gewesen, auf die in der Formel zugrundeliegenden Strukturen (reine Multiplikation und Division) einzugehen, die von der Schülerin K. ansatzweise genannt werden, anstelle des bloßen Benennens des Gesetzes.

Im Interview erläutert der Lehrer hierzu:

I [00:17:27.08] Lehrer: […] ich wollte zusammenfassen, was wir bis dahin gelernt hatten, und dass man eigentlich, wenn man irgendetwas in Dreiecke zerlegen kann, […] wenn wir die Fläche wissen, dann müssen wir eben das, was wir vom Dreieck wissen, nur noch mit einer Zahl multiplizieren und dann wissen wir das. […] und dann funktioniert das immer, weil da ja nur ein Faktor vor ist. Das heißt, die Streckung ist genau die gleiche, weil der Faktor vorher und nachher auftaucht.

Die Verallgemeinerung wird auch vom Lehrer auf einer prozeduralen Eben begründet. Die Bearbeitung der Aufgabe ist dennoch im zweiten Abschnitt als verständnisbetont anzusehen, da die Prozeduren in Verbindung mit Konzepten des Verallgemeinerns angewendet werden. Begriffliches Denken wird nur kurzzeitig angeregt. Das Potenzial der Aufgabe in Bezug auf das allgemeine Denken wird dabei gut genutzt. Außerdem sind alle Phasen eines innermathematischen Modellierungsprozesse (siehe 5.2.3) zu erkennen: Die Schülerinnen und Schüler stellen zunächst ein mathematisches Modell für den Flächeninhalt eines Sechsecks auf und berechnen mit diesem Model die Flächeninhalte der beiden Sechsecke. Anschließend interpretieren sie die Ergebnisse, indem sie die Flächen vergleichen. Die Diskussion über die Allgemeingültigkeit der Verfahren kann als Validierungsprozess angesehen werden.

10.3.4 Aufgabe 4 ‚Änderung des Flächeninhalts beim Kreis‘



Wenn sich der Radius eines Kreises verdoppelt, wie ändert sich dann die Fläche des Kreises?
Stelle zunächst Vermutungen an und überlege dir anschließend, wie du diese überprüfen kannst.

Abbildung 10.7: Aufgabe 4 ‚Änderung des Flächeninhalts beim Kreis‘

Diese Aufgabe wählte der Lehrer aus den im Rahmen dieser Untersuchung vorgegebenen Aufgaben (siehe 7.3.1) aus und wandelte sie leicht ab. In der ursprünglich vorgegebenen Aufgabe wird zusätzlich nach der Veränderung des Umfangs gefragt (siehe Abbildung 8.15: Station 5 ‚Zuordnung‘ Abbildung 8.15, Aufgabe 2). Der Lehrer begründet dies so:

I [00:18:58.26]

Lehrer: […] Weil wir über Umfang eigentlich nie geredet haben. […] Also deswegen habe ich den Umfang rausgenommen. […] Ich fand das eine gute Einstiegsaufgabe, um eben den Kreis zu berechnen, wenn man aus dem Thema Ähnlichkeit kommt. Weil die erste Aufgabe, nämlich eine Vermutung anzustellen, ist ja nach dem, was wir vorher gemacht haben, super einfach. Alle Flächen vervierfachen sich, also muss das beim Kreis auch so sein. Gut das heißt, der Schwerpunkt für die Schüler liegt in dem Moment nicht mehr darauf rauszufinden, was ist die Lösung, sondern der Schwerpunkt liegt darin zu beweisen, dass es so ist.

Der Lehrer bettet die Aufgabe hier in einen größeren Kontext (die Vervierfachung des Flächeninhalts) ein. Er benennt die kognitiven Anforderungen der Aufgabe, verknüpft dies auch mit seinem Wissen über das Vorwissen der Schülerinnen und Schüler und benennt den inhaltlichen Schwerpunkt der Aufgabe.

Objektive Kennzeichen der Aufgabe 4 ‚Änderung des Flächeninhalts beim Kreis‘

Die objektiven Kennzeichen dieser Aufgabe wurden schon in Abschnitt 8.3.15 analysiert, allerdings unter der Voraussetzung, dass den Schülerinnen und Schülern die Formel für den Flächeninhalt eines Kreises bereits bekannt ist. Im hier vorliegenden Fall ist den Lernenden jedoch diese Formel noch nicht bekannt, so dass sich die objektiven Kennzeichen der Aufgabe stark ändern. Die Aufgabe ist weiterhin als begriffliche Modellierungs- und problembezogene Aufgabe einzuordnen. Den Schülerinnen und Schülern stehen viele verschiedene Möglichkeiten zur Verfügung, die Fläche des Kreises mit bekannten Figuren zu zerlegen, beispielsweise in Dreiecke und Vierecke oder aber in ein regelmäßiges 6-, 8, oder n-Eck. Sie können sich der Kreisfläche dabei von außen oder auch von innen annähern und so ihre aufgestellte Vermutung überprüfen (siehe hierzu auch Abbildung 10.12). Dazu müssen sie zuerst eine geeignete Strategie entwerfen, wozu insbesondere ein hohes Maß an innermathematischer Modellierung erforderlich ist. Die Schülerinnen und Schüler gehen dabei mit mathematischen Darstellungen mindestens auf mittlerem Niveau um, da sie diese geeignet erweitern und Zusammenhänge zwischen den eckigen Flächen und der Kreisfläche herstellen müssen. Alle den Lernenden ohne Formel für den Flächeninhalt eines Kreises möglichen Zugänge erfordern eine ausführliche Begründung, wie sich die bekannten eckigen Flächen an die runde Kreisfläche anpassen lassen. Hier sind mathematische Argumentationen auf hohem Niveau nötig, die insbesondere eine Verallgemeinerung und die Grundidee der Näherungsverfahren enthalten. Hierbei ist vor allem die Annäherung von außen und von innen im Sinne der Intervallschachtelung eine geeignete Strategie.

Analyse des Unterrichtseinsatzes der Aufgabe 4 ‚Änderung des Flächeninhalts beim Kreis'

Der Lehrer präsentierte diese Aufgabe auf einer Folie auf dem OHP. Die Schülerinnen und Schüler arbeiten in fünf Gruppen á sechs Personen, wobei die Gruppeneinteilung schon im Vorfeld der Unterrichtsstunde vom Lehrer vorgenommen wurde. Je einer leistungsstarken Schülerin, bzw. einem leistungsstarken Schüler, werden fünf weitere Lernende zugeordnet. Schon vor der Darbietung der Aufgabenstellung weist der Lehrer darauf hin, dass die Gruppen später ihre Ergebnisse präsentieren sollen, wobei er vorgibt, dass keiner der leistungsstarken Gruppenleiter die Präsentation übernehmen soll. Er begründet dies im Interview so:

I [00:15:24.06]

Lehrer: Alle Gruppen haben eigentlich gleichberechtigt miteinander geredet, was glaub ich ein bisschen daher kam, dass ich es dieses Mal so gemacht habe: Die Guten waren sozusagen die Gruppenleiter, standen als erstes. Und ich hab gleich gesagt, dass die nicht präsentieren dürfen. […] Und deswegen haben auch ganz viele, eben bis auf diese eine Gruppe, darüber nachgedacht, wie man dieses Problem lösen kann. Äh ja und sind ja auch auf ganz unterschiedliche Lösungen gekommen.

Hier zeigt sich, dass der Lehrer bewusst die Kommunikation, aber auch die kognitive Selbstständigkeit aller Lernenden gefördert hat.

Im Folgenden werden zur besseren Lesbarkeit die Erarbeitungsphasen und Präsentationen der verschiedenen Gruppen nacheinander erläutert, bevor auf die abschließende Besprechung der Aufgabe eingegangen wird.

<u>*Gruppe 1*</u>

In der Gruppe 1 fehlt der leistungsstarke Gruppenleiter. Dies führt dazu, dass die Gruppe insgesamt sehr lustlos an die Aufgabe herangeht. Der Lehrer versucht die Schülerinnen und Schüler zu motivieren und fordert sie auf, sich an einen Gruppentisch anstatt in eine Reihe zu setzen, damit sie besser über die Aufgabe sprechen können. Anschließend leitet er die Gruppe zum Beginn der Erarbeitung an:

U [00:54:46.06]

Lehrer: Du hast schon mal zwei Kreise gemalt mit doppeltem Radius. […] So und jetzt geht's um die Fläche. Wie könnte man die Fläche denn rauskriegen? Oder zumindest Unterschiede sehen. Was würdet ihr denn erwarten, wie sich die Fläche verändert. […]

Schüler R: Vier mal.

Lehrer: Ja warum würdest du das vermuten?

Schüler R: Weil das bei allen so ist. […]

Lehrer: R. vermutet vierfach, weil das bei allen so ist. […] So jetzt könnt ihr schon mal diskutieren. Er sagt vierfach und du sagst zweifach. Da habt ihr ja schon mal eine Startmöglichkeit, um überhaupt irgendetwas zu diskutieren. Warum, könnt ihr euch ja mal austauschen.

Trotz des relativ großen Redeumfangs lenkt der Lehrer hier nur leicht, da er keine Lösungsschritte vorgibt, sondern lediglich den Gedankengang auf den Flächeninhalt lenkt. Er fragt nach Begründungen und fordert die Lernenden zur kognitiven Selbstständigkeit auf.

Die Schülerinnen und Schüler der Gruppe 1 haben keine eigenen Ideen, sie haben sich aber von einer anderen Gruppe sagen lassen, dass man ein Viereck in den Kreis einzeichnen sollte (siehe Abbildung 10.8):

U [01:03:47.03]

Lehrer: Also ihr habt jetzt keine zusätzliche Idee jetzt zusätzlich da rein geworfen?

Schüler Z: Ne.

Schüler R: Ja aber uns ist keins eingefallen und dann hat sie (zeigt auf Mitglied einer anderen Gruppe) uns das gesagt.

Lehrer: Ok. Könnt ihr aber nochmal nachdenken, also das Problem bei M. war ja auch schon hier oben die Fläche, die im Kreis ist, und wo kein Eck ist, da wisst ihr ja nicht, dass sie sich vervierfacht. Wie kommt man darauf, wie könnte man darauf kommen, wie groß die Fläche ist... Ja zeichne doch mal diese Dreiecke ein […]

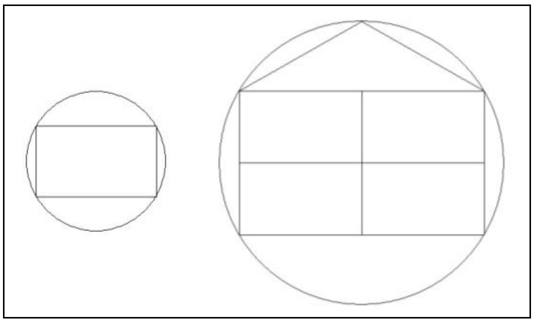


Abbildung 10.8: Skizzen der Gruppe 1 zur Bearbeitung von Aufgabe 4

Schüler Z: Mit den Dreiecken, das versteh ich nicht. […] das bringt einen ja nicht weiter.

Lehrer: Ja, dann müsst ihr mal diskutieren, ob einen das nicht vielleicht doch weiter bringt...... Vielleicht auch nicht, man könnte es ja auch anders machen, was weiß ich.

Hier lenkt der Lehrer einerseits sehr stark, indem er die Gruppe auf das Problem mit den fehlenden Ecken hinweist. Allerdings fördert er direkt im Anschluss die kognitive Selbstständigkeit der Lernenden. Er gibt ihnen sozusagen einen Teil des Ansatzes vor, damit sie damit weiterarbeiten können (vgl. Mayer, 2004), was den Schülerinnen und Schülern an dieser Stelle aber nicht gelingt.

Die Gruppe 1 verweigert die Präsentation ihres Ansatzes, da sie der Meinung sind, nichts geschafft zu haben.

Gruppe 2

Die Gruppe 2 schaut im Schulbuch zunächst nach Formeln für den Flächeninhalt eines Kreises. Dies wird jedoch vom Lehrer unterbunden. Ein Schüler schlägt vor, in den Kreis ein Viereck einzuzeichnen:

U [01:00:45.03]

Schüler Y: Mit einem Viereck kann man das auch berechnen dann. […] Wenn man da eines reinzeichnet.

Lehrer: Und dann ist das Viereck viermal so groß ja. Und was ist dann mit dem Rest vom Kreis? Ist der auch viermal so groß? Woher weiß ich das?

Schüler Y: Na ja nicht unbedingt.

Der Lehrer gibt hier wiederum einen kurzen starken Impuls, indem er die Schülerinnen und Schüler hier auf das entscheidende Problem in dieser Aufgabe hinweist, er fragt aber nach der Begründung und fördert so die kognitive Selbstständigkeit in der Erarbeitung einer Strategie.

Die Lernenden arbeiten anschließend völlig selbstständig an der Aufgabe.

In der Präsentation stellt die Schülerin C. den Annäherungsversuch der Gruppe über ein einbeschriebenes Sechseck vor (siehe Abbildung 10.9):

U [01:11:15.28]

Schüler C: Also wir haben in den Kreis haben wir ein Sechseck gemalt. Das ist sozusagen der Annäherungsversuch, den Kreis auszufüllen. […] und dann sind sechs ähm sechs Dreiecke entstanden. Und dann haben wir die Grundseite mal die Höhe durch 2, dadurch kann man dann den Flächeninhalt von dem Dreieck äh... herausfinden. Und das haben wir dann mal drei genommen... äh mal sechs, weil es ja sechs Dreiecke sind...... Ja […] Also man könnte, wenn man das ganz genau haben möchte, auch noch die Dreiecke hier (S. zeigt auf Zwischenraum von Sechseckseite und Kreisbogen.) ausmessen. Aber das wäre dann ziemlich klein geworden. […]

Schüler T: (gehört nicht zur Gruppe 2) Also ich meine, man wird's auch nie genau haben, weil wenn man immer Dreiecke rein zeichnet […] da kommst du immer nur annähernd, aber nie richtig genau.

Schüler A: Ja wir haben das auch nur Annäherungsverfahren so wie das Heron-Verfahren. Da kommt man ja auch nie richtig dran. Aber man kann immer mehr äh... näher annähern. Und wir haben halt mit einem Sechseck angefangen. […] Man hätte ja auch mit einem Achteck oder so anfangen können. […]

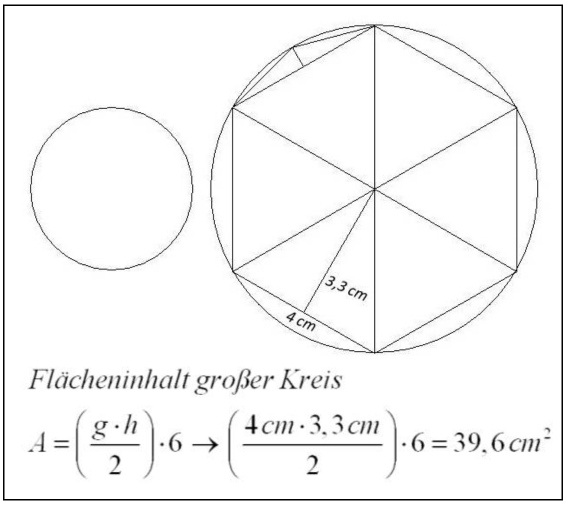


Abbildung 10.9: Folie zur Präsentation der Ergebnisse von Gruppe 2 zur Aufgabe 4

Schüler I: Ich wollte sagen, dass wir das auch so gedacht haben mit der Annäherung, halt auch dann, dass man das so sagen kann, dass man in den Kreis eigentlich jede Art von (? ...).

Lehrer: Ja, das ist ein bisschen was anderes. Könnt ihr gleich mal erzählen. Ihr habt nicht genau die gleiche Idee...

Die Schülerinnen und Schüler haben hier eine Idee aus der vorangegangenen Aufgabe aufgegriffen und weiterentwickelt, ähnlich wie es vom Lehrer gedacht war (siehe Seite 225). Die Lernenden erläutern ihre Strategie selbstständig und diskutieren die Strategie auch gemeinsam mit Mitschülern aus anderen Gruppen, ohne dass der Lehrer eingreift. Dabei entwickeln die Schülerinnen und Schüler ausführliche Argumentationen, die vor allem begriffliches Denken erfordern und die entscheidenden Probleme, aber auch mögliche Lösungsvorschläge, für die Annäherung an den Flächeninhalt eines Kreises umfassen.

Gruppe 3

In der Gruppenarbeitsphase ist vor allem die Schülerin Y. in ein Gespräch mit dem Lehrer verwickelt. Die anderen Gruppenmitglieder halten sich in der Entwicklung der Idee (siehe Abbildung 10.10), zumindest in den beobachteten Phasen, sehr zurück. Allerdings erläutert die Schülerin Y. die Ideen jeweils in der Mehrzahl.

U [00:57:58.04]

Schüler Y: Also hier hat man ja den, also wir haben den Radius einmal 2 und einmal 4 genommen, und dann haben wir hier immer ein Rechteck jeweils eingezeichnet (in die Kreise). Immer genau bei der Hälfte der Strecke vom Radius bis zur Linie. […] Und dann haben wir die Seiten (des Rechtecks) gemessen und das gleiche haben wir auch hier oben (im großen Kreis) gemacht. Und das Drei, das Rechteck hier oben nochmal in vier Teile geteilt, weil der Flächeninhalt ja angeblich viermal so groß sein soll. […] Und dann stellt man fest, dass dieses Rechteck (im kleinen Kreis) viermal da reinpasst (in den großen Kreis). […] Und damit haben wir dann festgestellt, dass der viermal so groß ist der Flächeninhalt.

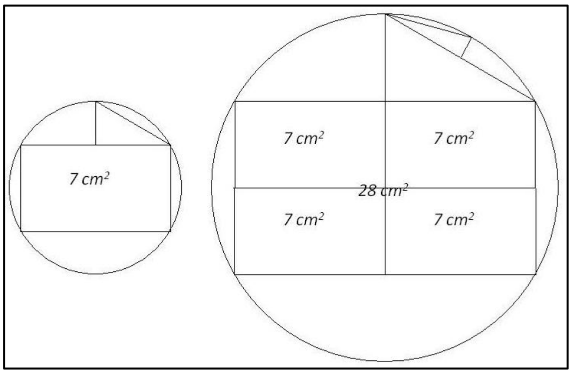


Abbildung 10.10: Folie zur Präsentation der Ergebnisse von Gruppe 3 zur Aufgabe 4

Lehrer: Vom Rechteck. Und vom Kreis?

Schüler Y: Weil äh also weil das passt ja genau in den Kreis und das ist ja jeweils an der gleichen Stelle immer halbiert, also es ist ja immer gleich und deswegen, weil das ja sozusagen immer, […] ist ja kongruent zueinander und deswegen kann man das dann somit belegen, weil man hier den gleichen Abstand hat.

Lehrer: Also du behauptest, dass auch dieses Teil hier (L. zeigt auf Kreisabschnitt über Rechteck im kleinen Kreis.) kongruent zu diesem hier (L. zeigt auf Kreisabschnitt über Rechteck im großen Kreis.) sein muss, weil... ja warum? […] Warum denn? Woran liegt denn das?

Schüler Y: //Ja,// also das sieht man halt daran, dass ähm, wenn man jetzt, also hier sind ja wieder 2 cm und hier einer und hier sind das ja dann irgendwie ähm 1,75 cm und hier sind's ja dann

Lehrer: //Das heißt,// du hast dir eigentlich hier ein Dreieck rein gedacht zum Beispiel […] Ok... das verstehe ich schon mal. Jetzt ist ja wieder diese Ecke über. Was ist denn mit dieser Ecke? Ist die auch vervierfacht wie die da?

Schüler Y: Ja die vervierfacht sich auch.

Lehrer: Warum?

Schüler Y: Wenn man hier dann auf der Mitte die Höhe einzeichnen kann, dann

Lehrer: //Ja,// dann mach das doch mal. […]

Schüler Y: Herr L., also ich hab das jetzt noch soweit gezeichnet, weil wenn man das jetzt noch weiter zeichnet, dann erkennt man das nicht mehr.

Lehrer: Ja, aber die Taktik ist ja schon die entschiedene.

Schüler Y: Ja, dass man halt immer weiter, halt dass man das immer weiter machen kann.

Lehrer: Das hört wahrscheinlich nie auf genau.

Der Lehrer fordert die Schülerin Y. mehrfach zur Begründung ihres Vorgehens auf. Auf die falsche Verwendung des Begriffs ‚kongruent' (die Schülerin meint vermutlich den Begriff ‚ähnlich'), geht der Lehrer nicht ein. Er verwendet stattdessen selbst bei der Wiederholung der Schülerantwort den Begriff ‚kongruent'. Auch die Argumentation der Schülerin zum Ausfüllen der ‚Ecken' scheint der Lehrer hier nicht nachvollziehen zu können, da die Äußerungen der Schülerin nicht auf das Reindenken eines Dreiecks in die Ecken hinweisen. Der Lehrer lenkt an dieser Stelle den Gedankengang in eine andere Richtung, da seine Erläuterungen von der Schülerin aufgegriffen werden. Der Lehrer gibt also auch in dieser Gruppe den entscheidenden Hinweis auf die fehlenden Ecken und lenkt damit kurzzeitig stark. Die Schülerin kann anschließend relativ selbstständig die Strategie der unendlichen Annäherung beschreiben und erkennt damit einen entscheidenden Schritt der Näherungsverfahren.

Die Präsentation der Gruppenergebnisse wird nach Aufforderung durch den Lehrer vom Schüler E. übernommen:

U [01:13:46.06]

Schüler E: Wir haben das eigentlich genauso gemacht. Auch versucht, das anzunähern. Aber wir haben halt mit einem Rechteck angefangen, wie man da sieht. Und wir sind zum gleichen Ergebnis gekommen, dass hier... das Rechteck halt in den rechten Kreis, in den größeren viermal reinpasst und dann kann man noch oben rechts, oder ja oben rechts halt sehen, dass das mit Dreiecken hier noch mehr versucht hat anzunähern. Jo.

Lehrer: Also wo genau habt ihr jetzt die gleiche Idee gehabt wie C.

Schüler E: Also wir wollten das auch genauso hier, indem wir da eine Form reinzeichnen, uns möglichst da anzunähern hier an den Kreis... Und dann... ja. […]

Lehrer: Also was hat er jetzt anders gemacht als C.? (? ...) N.

Schüler N: Also die haben halt erst ein Rechteck […] gezeichnet, und wir haben erst ein Sechseck gezeichnet.

Lehrer: Und sonst aber alles gleich? Gut.

Die Lernenden präsentieren ihre Ergebnisse wiederum sehr eigenständig und gehen auch selbstständig auf die Präsentation der Gruppe 2 ein. Der Lehrer versucht trotzdem nochmals die Gemeinsamkeiten und Unterschiede in den Verfahren zu betonen und regt so einen weiteren Vergleich der unterschiedlichen Lösungswege an. Insbesondere gehen die Schülerinnen und Schüler in der Präsentation auf die allgemeine Annäherung ein, wobei wiederum eher begriffliches Denken genutzt wird.

Gruppe 4

Die Schülerinnen und Schüler der Gruppe 4 vermuten ebenfalls die Vervierfachung des Flächeninhaltes des Kreises und haben zum Beweis ihrer Vermutung zunächst um die beiden Kreise herum je ein Quadrat gezeichnet (siehe Abbildung 10.11):

U [00:56:27.24]

Schüler X: Also wir haben da ein Quadrat drum gezeichnet und der Radius ist ja jetzt so ein Viertel äh eine halbe Seite von dem Quadrat. Und dann haben wir das ja verdoppelt und dann ist das ja immer noch eine viertel Seite, aber ein Quadrat vervierfacht sich ja auch und deswegen

Lehrer: Also du behauptest, oder ihr behauptet, weil sich dieses Quadrat vervierfacht, vervierfacht sich sowohl der Kreis wie auch diese Ecken hier in der Mitte. […] Wie kommt ihr darauf? […]

Schüler X: Radius bleibt ja immer so im Verhältnis gleich groß zu dem Viereck und wenn sich das Quadrat vervierfacht, vervierfacht sich auch der Kreis. […]

Lehrer: Ja das Quadrat, dass sehe ich sofort, dass es vierfach ist.

Schüler X: Er meint, ob sich die Ecken, woher wir wissen, dass die Ecken sich auch vervierfachen.

Lehrer: //Ja.// […] Weil das wäre ja der Punkt zu beweisen, dass sich auch der Kreis vervierfacht...... Könnt ihr ja nochmal überlegen.

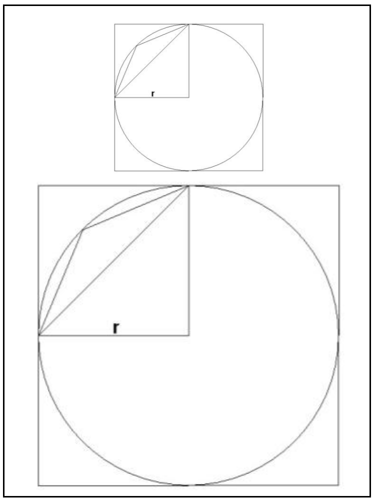


Abbildung 10.11: Skizzen der Gruppe 4 zur Aufgabe 4 in der Erarbeitungsphase

Der Lehrer fragt nach einer Begründung der Schülerantwort, er weist aber wiederum auf die entscheidenden Flächenstücke zwischen dem Kreis und dem Quadrat hin und lenkt damit kurzzeitig stark. Die Lösung dieses Problems überlässt er aber wieder den Schülerinnen und Schüler, so dass wieder die kognitive Selbstständigkeit der Lernenden gefördert wird.

Als der Lehrer das zweite Mal zu der Gruppe kommt und nach weiteren Ideen fragt, haben die Schülerinnen und Schüler eine andere Strategie als die ursprüngliche Idee (Quadrat von außen) weiterverfolgt. Sie haben in beide Kreise je ein Dreieck eingezeichnet (siehe Abbildung 10.11) und begründen die Vervierfachung der kleinen Kreisausschnitte nun über die Vervierfachung der Dreiecke:

U [01:01:47.23]

Schüler W: Also ähm ja das sind ja zwei, wenn man dies ausrechnet (S. zeigt auf eingezeichnetes Dreieck im großen Kreis.) und das viermal so groß ist wie das (S. zeigt auf eingezeichnetes Dreieck im kleinen Kreis.), müsste ja das hier (S. zeigt auf Kreisabschnitt oberhalb des Dreiecks im großen Kreis.) dann, das (S. zeigt auf Kreisabschnitt oberhalb des Dreiecks im kleinen Kreis.) ist ja dann theoretisch auch viermal so groß und dann weiß man doch eigentlich, dass das hier (Kreisabschnitt) dann auch vervierfacht worden ist dieser Teil. Und dann müsste ja auch dieser vervierfacht worden sein. Weil ja

Lehrer: Ne weiß man ja nicht. Man weiß bisher nur, dass das Viereck vervierfacht wurde und das Dreieck. Es kommt jetzt auf diesen Teil an (L. zeigt auf Kreisabschnitt oberhalb des Dreiecks im großen Kreis.). […] Wo könnte man denn noch ein Dreieck einzeichnen?

Schüler W: Vielleicht wenn man...... hier eines einzeichnet? […] keine Ahnung, was bringt einem das, weil dann hat man die Seite (gemeint ist wieder Kreisabschnitt oberhalb des neu eingezeichneten Dreiecks.) hier wieder. […]

Lehrer: //Aber// man kommt vielleicht mal näher ran. […]

Schüler W: Dann machen wir hier wieder ein Dreieck und dann machen wir da wieder ein Dreieck.

Der Lehrer lenkt hier teilweise sehr stark, indem beispielsweise nach dem Einzeichnen weiterer Dreiecke fragt und damit den entscheidenden Hinweis auf die Fortführung der Strategie gibt.

In der Präsentation der Ergebnisse erläutert der Schüler L. zunächst die zweite verfolgte Strategie, wobei er wiederrum auf die vorherigen Präsentationen der Gruppen 2 und 3 Bezug nimmt. Zu Beginn der Präsentation sind auf der Folie zwei identische Skizzen (siehe Abbildung 10.12, obere Skizze) zu sehen. In die untere Skizze zeichnet der Schüler L. während der Präsentation zunächst das Quadrat und anschließend das Dreieck über einer Seite des Quadrates ein (siehe Abbildung 10.12, untere Skizze):

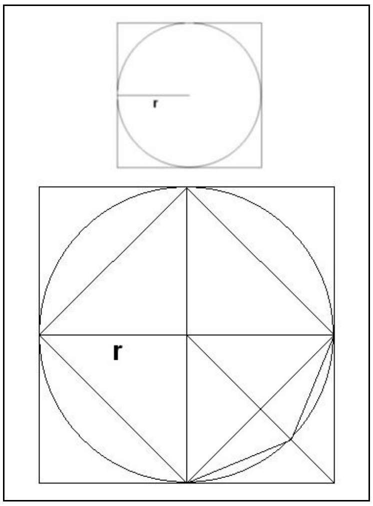


Abbildung 10.12: Folie zur Präsentation der Ergebnisse von Gruppe 4 zur Aufgabe 4

U [01:15:26.04]

Schüler L: Wir haben auch das Annäherungsverfahren genutzt. Wir haben jetzt da […] ein Quadrat. […] Äh dann hab ich erstmals von hier (Kreismittelpunkt) bis da (rechte untere Ecke des Quadrates) eine Linie gezeichnet, so dass man hier (unten rechts) auf ein Dreieck kommen kann. […] Dann hat man nachher ein Achteck und dann kann man das hier noch weiter führen. Dann kommt man immer näher ran. […]

Schüler K: Vorher hatten wir aber noch die Idee, dass man darum ein Viereck, also ein Quadrat zeichnet und dann ähm ist der Radius bei beiden ja gleich im Verhältnis zu dem Quadrat und dadurch sieht man ja... also das Quadrat hat sich vervierfacht und deswegen halt glaub ich, dass sich der Kreis auch vervierfacht hat. Bloß das Problem war, dass wir nicht beweisen konnten, dass die übrigen Ecken sich auch vervierfacht haben.

Lehrer: Genau. Aber hier ist ein kleiner Unterschied. […] Hier ist außen rum auch ein Quadrat. […] und wenn man sich jetzt mal überlegt: Man hat die Fläche hier drin mit einem Quadrat ausgelegt und die Fläche außen mit einem Quadrat ausgelegt. Was könnte man denn dann vermuten. Dann kommen wir nämlich noch viel näher an das Heron-Verfahren dran... A.

Schüler A: Da könnte man einfach mal den Mittelwert nehmen oder den Durchschnitt von denen […] und man könnte sagen, das ist ziemlich genau.

Lehrer: Die Fläche muss also irgendwo zwischen den beiden Quadraten liegen. Also das wäre noch eine neue Methode...

Der Lehrer lässt die Schülerinnen und Schüler zunächst völlig selbstständig präsentieren. Auffällig ist, dass die Lernenden ohne Aufforderung durch den Lehrer beide Lösungsansätze vorstellen. Anschließend weist der Lehrer auf die Unterschiede zwischen den beiden Lösungswegen hin und betont insbesondere die Annäherung von Innen und Außen. Hier bringt er explizit einen neuen Gedanken in die Diskussion ein, da die Lernenden bisher den Kreis entweder von innen *oder* von außen angenähert haben. Er lenkt hier also kurzzeitig stark. Auf die hier unpassende Verwendung des Begriffes Durchschnitt geht der Lehrer nicht direkt ein, er formuliert die Schülerantwort aber etwas um.

Nach der Präsentation der Gruppe 4 endet die Doppelstunde.

Gruppe 5

Die Gruppe 5 hat in der Erarbeitungsphase außerhalb des Klassenraums gearbeitet. Der Lehrer ist zweimal zur Gruppe 5 gegangen, konnte aber mit der Kamera nicht begleitet werden, so dass keine Aufzeichnungen zur Bearbeitungsphase der Gruppe 5 existieren.

Die Gruppe 5 stellt aufgrund des Stundenendes ihre Ergebnisse in der folgenden Einzelstunde vor, nachdem die Schülerinnen und Schüler bereits eine Aufgabe zur Wiederholung (siehe

10.3.5) bearbeitet haben. Außerdem hat der Lehrer im Vorfeld schon die Ergebnisse der Gruppenpräsentationen der vergangenen Doppelstunde an die Tafel geschrieben (siehe Abbildung 10.13). Die Schüler X. und T. präsentieren die Ergebnisse gemeinsam, wobei der Schüler X. erklärt und der Schüler T. die Erläuterungen an der Tafel durch eine Zeichnung (ein Kreis mit einem einbeschriebenen regelmäßigen Sechseck) verdeutlicht.

U [01:28:43.19]

Schüler X: Also wir haben uns gedacht, in einen Kreis können wir jede beliebige geometrische Form einbauen. Also ein Dreieck, ein Viereck, ein Sechseck, ein Achteck, ein Zwölfeck. Und dann heißt das ja im Prinzip... überhaupt nicht anderes als... ein Unendlich-Eck. Also es ist ja einfach so viele Ecken, dass man die nicht sehen kann... Und deswegen verhält es sich wie jede andere geometrische Form auch. […] Und umso mehr Ecken man nimmt, umso besser wird dann der Wert. […] Nach dem Prinzip haben wir das aufgebaut und sind halt auch darauf gekommen, dass man sich das vervierfacht.

Lehrer: […] Sonst können wir das ja nochmal zusammenfassen hier... Das wäre sozusagen unsere nächste Zeile. Die Gruppe hat sozusagen […] rausgefunden, wir können erstmals aus Dreieck, Viereck, Fünfeck Punkt Punkt Punkt können wir sozusagen ein N-Eck machen […] N-Eck will hier heißen, dass ich für dieses N alles einsetzen kann. Das heißt, die Zahl kann immer größer werden und... die machen das immer nur von innen im Kreis... und dieses N... geht bis unendlich...

Die Gruppe erläutert hier nicht, dass es sich um ein regelmäßiges N-Eck handelt, das an der Tafel eingezeichnete Sechseck ist allerdings regelmäßig. Der Lehrer wiederholt nochmals das Verfahren und ergänzt die vorher erstellte Zusammenfassung (siehe Abbildung 10.13) um die Ergebnisse der Gruppe 5. Die Gruppe 5 bringt hier einen neuen Gedankengang, das Ausfüllen des Kreises mit einem N-Eck, anstelle des weiteren Ausfüllens der restlichen Flächenstücke mithilfe von Dreiecken, in die Diskussion ein. Der Lehrer betont nochmals das Neue dieses Aspektes und weist auf die Annäherung von innen hin, er bringt aber keine zusätzlichen Aspekte in die Präsentation ein, so dass die Idee völlig selbstständig von den Schülerinnen und Schüler vorgestellt wurde. In den Ausführungen der Schüler sind vor allem begriffliche Argumente enthalten.

<u>Zusammenfassung der Gruppenergebnisse</u>

In der Einzelstunde, die mit etwas zeitlichem Abstand stattfindet, bearbeitet der Lehrer mit den Schülerinnen und Schülern zunächst die Aufgabe 5 (siehe 10.3.5). Anschließend fasst er die Ergebnisse der Gruppenarbeit aus der vergangenen Doppelstunde ohne Schülerbeteiligung zusammen und hält sie stichpunktartig an der Tafel fest (siehe Abbildung 10.13), wobei die Gruppe 5 ihre Ergebnisse erst nach der Zusammenfassung der Gruppen 1 bis 4 vorstellt (s.o.).

Gruppe 2:	Kreis durch Sechseck annähern, Ecken durch Dreiecke ausfüllen
Gruppe 3:	Viereck, durch Rechtecke ausfüllen. Heronverfahren – ähnlich
Gruppe 4:	Viereck innen, Viereck außen, Fläche liegt dazwischen
Gruppe 5:	Dreieck, Viereck, Fünfeck, …, N-Eck von innen, N geht bis unendlich

Abbildung 10.13: Tafelanschrieb zur Zusammenfassung der Gruppenergebnisse

Der Lehrer lenkt hier stark, da er die Schülerinnen und Schüler nicht an der Zusammenfassung beteiligt. Im Interview erläutert er hierzu:

I [00:01:03.03]

Lehrer: […] Der Punkt ist, wenn ich dann zwischendurch zusammenfassen will für die, in sogar deren Worten... dann sträubt sich vieles in den Schülern allein schon dagegen, dass der Lehrer irgendetwas erzählt. Das heißt diese Zusammenfassung. Das ist meistens der Punkt, an dem ich am meisten scheitere. Und das war auch diesmal wieder so.

Der Lehrer erkennt zwar, dass die Schülerinnen und Schüler der Zusammenfassung nicht folgen können, er reflektiert sein eigenes Verhalten aber nicht, da er die starke Lehrerlenkung zwar benennt, aber nicht als mögliche Ursache des Problems erkennt. Es ist aber anzumerken, dass durch die Zusammenfassung das strukturierte Denken gefördert wird.

Der Lehrer kann schon in der Planung zwei der tatsächlich vorgekommenen Lösungswege, das Ausfüllen der Flächenstücke zwischen Kreis und Sechseck mit Dreiecken und die Erweiterung des Sechsecks auf höhere N-Ecke, benennen:

Planung:

Standardlösung: Alle Flächen vervierfachen sich, also auch die des Kreises. Beweis durch Ausfüllen der Reststücke zwischen Kreis und regelmäßigem Sechseck durch weitere Dreiecke.

Alternativlösung: Aus Sechseck noch höhere n-Ecke machen.

Auch im Interview beschreibt der Lehrer sehr ausführlich die Bearbeitungen der Schülerinnen und Schüler, wobei er insbesondere die Probleme der Schülerinnen und Schüler mit den Flächenstücken zwischen Viereck und Kreis anspricht:

I [00:19:09.16]

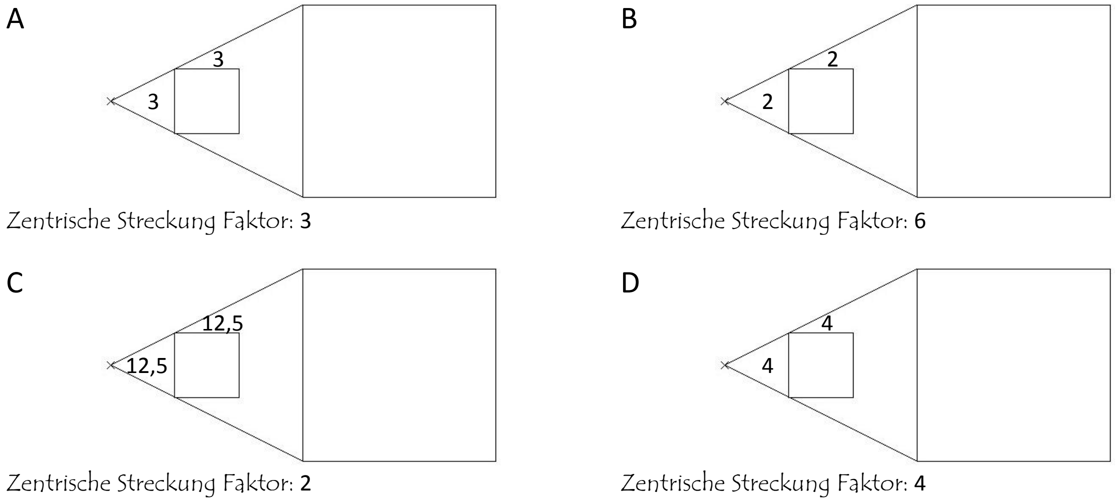
Lehrer: […] Und erst, als ich die Nachfrage gestellt hab: Wieso denn diese Ecken? Ist dann bei drei Gruppen, ist es so gewesen, dass sie darüber überhaupt nachgedacht haben, warum denn diese Ecken? Warum vervierfachen die sich auch? Aber sie sind dann ja selber auf die Idee gekommen: Da kann ich ja noch ein Dreieck reinzeichnen oder irgendwelche anderen Figuren. Und das fand ich total gut. […] also eine Gruppe ist auf die Idee gekommen, dass es ja ein Näherungsverfahren wird, weil: Da passen ja immer mehr rein. […] Dann ist ja einer auf die Idee gekommen: Ach, das ist ja wie beim Heron-Verfahren […] Aber dann ist noch die nächste Gruppe auf die Idee gekommen, das war ja praktisch, kann man sich ja nur wünschen, dass das aber einen wesentlichen Unterschied zum Heron-Verfahren nämlich gibt, […] dass man auch von außen noch irgendwie da ran muss. […]. Die kennen ja noch gar nicht so etwas wie Grenzwert. […] Vor allem sind die auf die Idee gekommen, bevor ich sie auf irgendetwas hingewiesen habe. […] die letzte Gruppe, die wirklich gesagt hat: Ich hör nicht beim Achteck oder so auf, sondern ich mach ein N-Eck […] Das kam dann in der nächsten Stunde glaub ich ein bisschen kurz.

Der Lehrer kann hier einerseits die kurzen, starken Impulse bezüglich der Flächenstücke zwischen der einbeschriebenen Figur und dem Kreis benennen, andererseits merkt er aber auch an, dass die Schülerinnen und Schüler ansonsten selbstständig gearbeitet haben. Dies stimmt mit den qualitativen Analysen überein, sodass der Lehrer hier seinen Unterricht gut reflektiert. Außerdem kann er die einzelnen Schülerlösungen im Detail wiedergeben.

Die eigentliche Aufgabenstellung, die Vervierfachung des Flächeninhaltes, wird nur am Rande thematisiert, nur die Gruppe 5 bindet in ihre Präsentation überhaupt Erläuterungen zur Vervierfachung der Fläche mit ein. Der Fokus der Bearbeitung liegt auf der Annäherung an den Flächeninhalt eines Kreises. Dies ist vom Lehrer auch so vorgesehen (siehe Seite 233). Die Schülerinnen und Schüler führen die ersten Schritte eines innermathematischen Modellierungsprozesses durch, das Aufstellen eines mathematischen Modells für die Annäherung an den Flächeninhalt eines Kreises. Dieser Modellierungsprozess wird im weiteren Verlauf der Unterrichtsstunde fortgeführt.

Insgesamt betrachtet arbeiten die Schülerinnen und Schüler an dieser Aufgabe größtenteils sehr selbstständig, teilweise gibt der Lehrer zwar starke Impulse, fördert danach aber das selbstständige Weiterarbeiten der Lernenden. Das Potenzial der Aufgabe zum selbstständigen Erarbeiten der verschiedenen Methoden, die zur Annäherung der Kreisfläche dienen, wird gut ausgenutzt, da die Schülerinnen und Schüler die entsprechenden Methoden selbst entwickeln. Der Lehrer führt diese Methoden in der Herleitung der Kreisfläche (siehe 10.3.6) zusammen. Die Bearbeitung fokussiert in allen Gruppen zunächst das prozedurale Denken (Zerlegung der Kreisfläche in bekannte Flächen), es wird aber zunehmend begriffliches Denken mit hinzugenommen, wenn es um die Annäherung an den Kreis geht. Insbesondere in den einzelnen Präsentationen liegt der Fokus auf begrifflichem Denken. Die Bearbeitung der Aufgabe ist verständnisbetont, da Prozeduren in Verbindung mit Konzepten angewandt werden.

10.3.5 Aufgabe 5 ‚Flächeninhalt gestreckte Quadrate'



Aufgabenstellung (mündlich): Fangen wir mal wieder an über zentrische Streckung. Ihr könnt dabei gleich wieder ein bisschen Kopfrechnen üben. Nämlich überlegt mal, wir haben hier einen Punkt, hier ist ein Quadrat... ja... Das Quadrat hat eine Seite... mit 3, andere Seite auch 3. Und jetzt, was mach ich... ich strecke das so...... um den Faktor 3 zentrische Streckung. Wie groß ist diese Fläche (L. zeigt auf das gestreckte Quadrat)?

Abbildung 10.14: Aufgabe 5 ‚Flächeninhalt gestreckte Quadrate'

Der Lehrer zeichnet die Figur einmal an die Tafel, wobei er parallel die Aufgabenstellung nennt, und ersetzt nach jeder bearbeiteten Teilaufgabe die Zahlen durch neue Werte. Der Lehrer begründet die im Interview wie folgt:

> I [00:29:21.05]
> Lehrer: […] sie hatten ja bisher nur Dreiecke und Sechsecke bearbeitet. Also dachte ich mir gut, Viereck. Streck die auch mal und streck die auch mal um beliebige Faktoren. Ob sie das System verstanden haben, wie das mit der Streckung funktioniert. […] und natürlich war das wieder eine Kopfrechenaufgabe, denn ich wollte, dass sie Quadratzahlen können.

Der Lehrer spricht hier explizit Verbindungen zum Vorwissen der Schülerinnen und Schüler an. Allerdings haben die Lernenden bisher die Figuren mit dem Faktor 2 gestreckt, während nun verschiedenste Streckfaktoren gewählt werden.

Objektive Kennzeichen der Aufgabe 5 ‚Flächeninhalt gestreckte Quadrate'

Die vier Aufgabenteile zu gestreckten Quadraten sind von der Struktur her gleich, da sich lediglich die Zahlenwerte ändern, aber nicht die zu berechnende Figur oder die Struktur der Rechnung. Sie sind als technische Aufgaben mit Fokus auf Fertigkeiten einzuordnen, da weder außer- noch innermathematische Modellierungen nötig sind. Durch die immer gleiche Struktur der Rechnung wird das Modellieren sogar verhindert. Die Schülerinnen und Schüler benötigen zur Lösung Kenntnisse aus der Wissenseinheit der zentrischen Streckung, wozu auch Wissen über das Multiplizieren der gegebenen Längen mit dem Streckfaktor gehört, aber auch Wissen über den Flächeninhalt eines Quadrates. Es liegt also ein lokaler innermathematischer Kontext vor. Mathematisches Argumentieren ist nicht notwendig, es muss aber auf niedrigem Niveau mit mathematischen Darstellungen umgegangen werden, da Informationen aus den Skizzen entnommen werden müssen.

Analyse des Unterrichtseinsatzes der Aufgabe 5 ‚Flächeninhalt gestreckte Quadrate'

Diese Aufgabe stellt der Lehrer zu Beginn der Einzelstunde. Drei Lernende äußern zunächst verschiedene Vermutungen:

U [01:21:01.11]

Schüler D: 36.

Schüler E: Also wenn man das mal 3 nimmt, sind die Strecken ja alle 9 cm lang oder was auch immer, gibt ja keine Maßeinheit. […] Und 9 mal 9 sind 81. Also 81 Quadratirgendetwas. […]

Schüler T: Also ich glaub, es ist nicht richtig, aber ich hab da als Ergebnis 144 wegen g mal h und 3... ja egal, 144 dann. […]

Lehrer: Also wir fangen mal an damit, wie lang sind denn die Seiten. Faktor 3 gestreckt hat der E. schon mit angefangen, […] Die wird 9 und die wird auch 9, also ist die Fläche, ganz klar, 9 mal 9, 81.

Nur der Schüler E. begründet seine Vermutung 81, wobei er aufgrund der fehlenden Einheit eine eigene Einheit, ‚Quadratirgendwas', hinzufügt, die insbesondere das Quadrat enthält, ansonsten aber allgemeinen Charakter hat. Der Lehrer wiederholt die Begründung von Schüler E. in eigenen Worten und ändert die Zahlen zu Aufgabenteil B, ohne etwas zu den falschen Vermutungen zu sagen. Dadurch werden die möglichen Ursachen der Fehler nicht geklärt. Die Aufgabenteile B, C und D werden ohne Probleme von verschiedenen Schülerinnen und Schülern gelöst:

U [01:22:49.13]

Schüler C: (???) 144.

Lehrer: Nämlich?

Schüler C: Äh also dann sind das, da ja 12 und 12 mal 12 sind 144 […]

Der Lehrer fordert bei Aufgabenteil B und D auch zur Begründung der Lösung auf, hingegen akzeptiert er die Lösung zu Aufgabenteil C ohne Begründung. Es wird nur prozedurales Wissen aktiviert. Die Bearbeitung der Aufgabe ist verfahrensbetont, da Prozeduren ohne Verbindung mit Konzepten angewendet werden. Das Ziel des Kopfrechnens und des Wiederholens der Quadratzahlen scheint mit der Aufgabe zwar gelungen, es wird aber keinerlei Bezug zu den Flächenänderungen beim Dreieck und Sechseck hergestellt, sodass keine Überprüfung des Verständnisses für die generelle Veränderung des Flächeninhaltes beim Strecken mit verschiedenen Faktoren stattfinden kann. Dieses ist allerdings vom Lehrer intendiert worden.

10.3.6 ‚Herleitung der Kreisfläche'

Der Flächeninhalt A des Kreises in Fig. 1 lässt sich durch $a_i < A < A_a$ einschachteln, wobei a_i der Flächeninhalt des im Kreis liegenden Quadrats und A_a der Flächeninhalt des den Kreis umschließenden Quadrats ist. Die Seitenlänge des umschließenden Quadrats ist $s_a = 2r$, somit gilt $A_a = 4r^2$. Da sich das innere Quadrat in zwei Quadrate mit der Seitenlänge $s_i = r$ zerlegen lässt, erhält man $a_i = 2r^2$. Es gilt also $2r^2 < A < 4r^2$. Man kann daher etwa $A \approx 3r^2$ annehmen, weiß aber nicht, ob dieser Näherungswert zu groß oder zu klein ist.

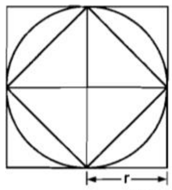
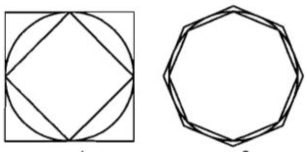


Fig. 1

Bisher sind nur Verfahren zur Berechnung geradlinig begrenzter Flächen behandelt worden. Um den Flächeninhalt eines Kreises zu bestimmen, kann man den Kreis durch eine Folge von einbeschriebenen und umbeschriebenen regelmäßigen n-Ecken einschachteln (Fig. 2).



n = 4 n = 8 usw.

Fig. 2

Der Flächeninhalt des einbeschriebenen n-Ecks ist $a_n = 2n\,d_n$ und der Flächeninhalt des umbeschriebenen n-Ecks ist $A_n = 2n\,D_n$ (siehe Fig. 3).

Die Flächeninhalte d_n und D_n der beiden rechtwinkligen Dreiecke können wie folgt berechnet werden. Es gelten

$\sin\left(\frac{180°}{n}\right) = \frac{y}{r}$ und $\cos\left(\frac{180°}{n}\right) = \frac{x}{r}$.

Mit $y = r \cdot \sin\left(\frac{180°}{n}\right)$ und $x = r \cdot \cos\left(\frac{180°}{n}\right)$ folgt

$d_n = \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}r^2 \cdot \sin\left(\frac{180°}{n}\right) \cdot \cos\left(\frac{180°}{n}\right)$.

Weiterhin gilt $\tan\left(\frac{180°}{n}\right) = \frac{z}{r}$.

Mit $z = r \cdot \tan\left(\frac{180°}{n}\right)$ ergibt sich

$D_n = \frac{1}{2}rz = \frac{1}{2}r^2 \cdot \tan\left(\frac{180°}{n}\right)$.

Es ergeben sich $a_n = n r^2 \cdot \sin\left(\frac{180°}{n}\right) \cdot \cos\left(\frac{180°}{n}\right)$

und

$A_n = n r^2 \cdot \tan\left(\frac{180°}{n}\right)$.

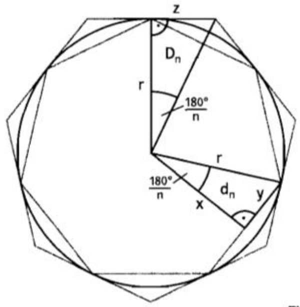


Fig. 3

Abbildung 10.15: Erste Seite aus dem Schulbuch zur Herleitung des Flächeninhaltes eines Kreises (Baum, Dornrieden, Harborth, & Schönbach, 2008, S. 108)

Der Lehrer vollzieht mit den Schülerinnen und Schüler aufbauend auf den Gruppenergebnissen die Seiten im Schulbuch zur Herleitung der Formel für den Flächeninhalt eines Kreises nach. Er erläutert hierzu im Interview:

I [00:27:11.00]

Lehrer: […] So aber ich wollte auf jeden Fall mit denen herleiten, wie ähm... wie man eben zu dieser Zahl π kommt, weil ich eben finde, das ist das entscheidende in diesem Kapitel. Also es ist ja nicht das entscheidende, dass ich nachher weiß, dass ein Kreis π r² hat. Das kann ich in jeder Formelsammlung nachlesen. Sondern das entscheidende ist, dass π so eine Zahl ist, die durch so ein Näherungsverfahren entsteht.

Der Lehrer betont hier, dass ihm nicht die Vermittlung von Faktenwissen, sondern vor allem die Vermittlung von begrifflichem Wissen zur Zahl π wichtig ist.

Für n-Ecke in und um einen Kreis mit $r = 1$ ergibt sich folgende Tabelle.

n	4	8	16	32	64	128
a_n	2	2,8284271	3,0614674	3,1214451	3,1365484	3,1403310
A_n	4	3,3137084	3,1825978	3,1517249	3,1441183	3,1422235

n	256	512	1024	2048	4096	...
a_n	3,1412772	3,1415137	3,1415729	3,1415877	3,1415913	...
A_n	3,1417503	3,1416320	3,1416024	3,1415951	3,1415932	...

Tab.1

Für den Flächeninhalt a_n des einbeschriebenen n-Ecks, den Flächeninhalt A des Kreises und den Flächeninhalt A_n des umbeschriebenen n-Ecks gilt $a_n < A < A_n$. Mit wachsendem n werden die Werte für $A_n - a_n$ beliebig klein, die a_n und A_n bilden eine Intervallschachtelung für A (vgl. Tab. 1).

Bildet man ein Quadrat durch eine zentrische Streckung mit Streckfaktor k und Streckzentrum M ab, so ändern sich die Seitenlängen um den Faktor k und gleichzeitig der Flächeninhalt um den Faktor k^2 (Fig. 1).
Entsprechendes gilt für einen Kreis und seine ein- und umbeschriebenen n-Ecke.
Die zentrische Streckung mit dem Streckfaktor r bildet einen Kreis mit dem Radius 1 auf einen Kreis mit dem Radius r ab. Die Flächeninhalte der n-Ecke und damit der Flächeninhalt des Kreises ändern sich um den Faktor r^2.
Ist A(1) der Flächeninhalt des Kreises mit dem Radius 1 und A(r) der Flächeninhalt des Kreises mit dem Radius r, so gilt daher $A(r) = r^2 A(1)$ und somit $\frac{A(r)}{r^2} = \frac{A(1)}{1^2}$. Der Flächeninhalt A(1) des Kreises mit dem Radius 1 (Einheitskreis) wird Kreiszahl π (sprich pi) genannt.
Daraus ergibt sich der Flächeninhalt des Kreises mit dem Radius r zu $A = \pi r^2$.

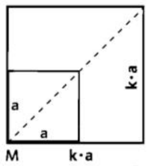


Fig. 1

Ein Kreis mit dem Radius r hat den **Flächeninhalt** $\mathbf{A = \pi r^2}$.

Der Flächeninhalt vom Einheitskreis beträgt π.

Die Kreiszahl π ist **irrational**. Sie lässt sich nicht als Bruch, sondern nur näherungsweise durch einen Bruch angeben.
Hat man den Näherungswert eines Taschenrechners nicht zur Verfügung, so benutzt man als **Näherung** $\pi \approx 3{,}14$ oder $\pi \approx \frac{22}{7}$.
Aus Tab. 1 ergibt sich $\pi \approx 3{,}141\,59$.

Die Irrationalität von π wurde erstmals 1761 von Johann Heinrich Lambert (1728 bis 1777) bewiesen.

Beispiel 1
Berechne den Flächeninhalt eines Kreises mit dem Durchmesser $d = 7{,}20\,m$.
Lösung:
$A = \pi r^2;\ r = \frac{d}{2} = 3{,}60\,m$
$A = \pi \cdot (3{,}6\,m)^2 = \pi \cdot 12{,}96\,m^2 \approx 40{,}8\,m^2$

Für π zeigt der Taschenrechner als Näherung an:
π
3.141592654

Beispiel 2
Berechne den Radius eines Kreises mit dem Flächeninhalt $2{,}5\,cm^2$.
Lösung:
$A = \pi r^2;\ r^2 = \frac{A}{\pi};\ r = \sqrt{\frac{A}{\pi}} = \sqrt{\frac{2{,}5\,cm^2}{\pi}} \approx 0{,}89\,cm$

Abbildung 10.16: Zweite Seite aus dem Schulbuch zur Herleitung des Flächeninhaltes eines Kreises (Baum et al., 2008, S. 109)

Objektive Kennzeichen der ‚Herleitung der Kreisfläche'

Es handelt sich hier nicht direkt um eine Aufgabe, trotzdem können die objektiven Anforderungen der Herleitung der Kreisfläche im Schulbuch analysiert werden. Die Herleitung hat teilweise stark prozeduralen Charakter, enthält aber abschnittsweise auch sehr begrifflich geprägte Argumente. Das Nachvollziehen der Herleitung ist daher als rechnerische und begriffliche Modellierungs- und problembezogene Aufgabe einzuordnen.
Zunächst wird im Schulbuch (Baum et al., 2008) die Annäherung von innen und von außen durch ein Quadrat thematisiert. Insbesondere wird betont, dass der Flächeninhalt des Kreises zwischen den beiden Werten für den Flächeninhalt der Quadrate liegen muss. Anschließend werden die Quadrate zu N-Ecken verallgemeinert. Die Flächeninhalte des inneren und des äußeren N-Ecks werden ausführlich in formaler, allgemeiner Schreibweise hergeleitet. Hierzu sind Termumformungen aus dem Bereich der Algebra, Kenntnisse der Trigonometrie sowie die Formel für den Flächeninhalt eines Dreiecks nötig. Mithilfe von verschiedenen Zeichnungen werden die bisherigen Erläuterungen visualisiert. In einer Tabelle werden ver-

schiedene Flächeninhalte der inneren und äußeren N-Ecke in und um einen Kreis mit dem Radius 1 angegeben, so dass erkennbar wird, dass sich diese an die Zahl π annähern. Es wird nochmals betont, dass mit der Erhöhung von N der Flächeninhalt des Kreises im Sinne der Intervallschachtelung angenähert wird. Über die zentrische Streckung wird nun die Erweiterung auf Kreise mit beliebigem Faktor r vorgenommen. Der Flächeninhalt eines Kreises mit dem Radius 1 wird als Kreiszahl π definiert. Es wird darauf hingewiesen, dass π eine irrationale Zahl ist, die nur näherungsweise bestimmt werden kann.
Das Nachvollziehen dieser Ausführungen erfordert von den Schülerinnen und Schülern innermathematische Modellierungen auf hohem Niveau, da eine umfassende, verallgemeinernde Strategie nachvollzogen werden muss, die auch den Vergleich mehrerer mathematischer Gegenstände (verschiedene N-Ecke) erfordert. Die Lernenden müssen im Verlauf des Nachvollzugs eine Vorstellung über Näherungsverfahren aufbauen. Insbesondere sind auch mathematische Argumentationen auf hohem Niveau nötig. Mathematische Darstellungen werden auf mittlerem Niveau verwendet, da Zusammenhänge zwischen verschiedenen Darstellungen hergestellt werden müssen.

Analyse der Unterrichtsbearbeitung der ‚Herleitung der Kreisfläche'

Als Hausaufgabe zur dritten Stunde sollen die Schülerinnen und Schüler die zwei Seiten im Buch (siehe Abbildung 10.15 und Abbildung 10.16), auf denen der Flächeninhalt eines Kreises hergeleitet wird, lesen und verstehen.

Das Prinzip des Näherungsverfahrens

Im Anschluss an die Präsentation der Gruppe 5 fordert der Lehrer die Lerngruppe zur Erklärung des Vorgehens im Schulbuch auf:

Lehrer: Was für ein Näherungsverfahren wird im Buch vorgeschlagen? ... Und das, wie gesagt, basiert eigentlich genau so auf euren Ideen, wie sie da stehen, nur alle zusammengefasst... K.
Schüler K: Von innen und von außen (? ...). […]
Lehrer: Und dann gilt was, wenn ich von innen und von außen ein N-Eck annähere? ... Was, wie krieg ich dann die Fläche vom Kreis raus? I.
Schüler I: Das ist sozusagen die Mitte zwischen den beiden. Weil N heißt ja unendlich... so... glaub ich... und wenn man den außen und innen hat, ist der Wert fast unendlich genau. […]
Lehrer: Also wenn ich bis unendlich gehe, ist das unendlich genau. Wenn ich nur eine andere Zahl nehme, dann ist es nur?
Schüler X: Einhalb genau.
Lehrer: Genau teilgenau.

Der Lehrer verbindet hier die Herleitung des Flächeninhalts eines Kreises im Schulbuch deutlich mit den Ideen der Schülerinnen und Schüler aus der vorherigen Aufgabe (siehe 10.3.4). Er lenkt das Unterrichtsgespräch dabei leicht. Er stellt auch reflektierende Fragen (andere Zahl für N). Es wird vor allem begriffliches Denken fokussiert, indem das Prinzip des Näherungsverfahrens erläutert wird. Hier steht ganz klar das Verständnis des Verfahrens im Vordergrund. Außerdem ist zu erkennen, dass der Lehrer insbesondere das Potenzial der Aufgabe 4 gut ausnutzt.
Der Lehrer hält diese ersten Schritte des Näherungsverfahrens an der Tafel fest (siehe Abbildung 10.17) und fordert die Lerngruppe zum Abschreiben der Gruppenergebnisse (Abbildung 10.13 und Abbildung 10.17) auf. Er weist dabei nochmals darauf hin, dass das Verfahren genau auf den Ideen der Schülerinnen und Schüler aufbaut.

Näherungsverfahren:	Von innen und außen ein N-Eck annähern, Wird genauer, je größer N ist, Fläche liegt zwischen innerem und äußerem N-Eck

Abbildung 10.17: Tafelanschrieb zur ‚Herleitung der Kreisfläche' - Näherungsverfahren

Die Schülerin K. hat eine Nachfrage zum vom Lehrer formulierten Text:

U [01:37:11.06]

Schüler K. Ja, welche Fläche liegt denn dann dazwischen?

Lehrer: //Die// Fläche vom Kreis. […]

Schüler K: Der Umfang... also die Linie ist ja dazwischen.

Lehrer: Die Linie ist dazwischen und die Fläche von dem Kreis liegt genau zwischen der Fläche von dem inneren und der Fläche von dem äußeren... Verstehst du? Weil das äußere N-Eck ist ja ein bisschen größer als der Kreis, das heißt die Fläche ist ein bisschen größer

Schüler K: Ja schon, aber die Fläche ist ja auch noch so in der Mitte noch.

Lehrer: Ja, ich weiß was du meinst. Was ich aber meine ist die Größe der Fläche.

Schüler K: Achso.

Der Lehrer lenkt hier stark. Es ist nicht zu erkennen, ob die Schülerin K. die Ausführungen des Lehrers verstanden hat, sie äußert sich jedoch positiv.

Allgemeine Berechnung des Flächeninhaltes des N-Ecks

Der Lehrer beginnt nun den ‚quantitativen' Teil der Herleitung der Kreisfläche, die Bestimmung des Flächeninhaltes einzelner Teildreiecke. Er zeichnet dazu einen Kreis mit einem einbeschriebenen Sechseck an die Tafel (siehe Abbildung 10.18):

U [01:34:55.24]

Lehrer: […] Und dann besprechen wir mal den... quantitativen Anteil von dem, was im Buch stand. Denn da, die haben ja genau ausgerechnet, wie groß denn die Fläche vom Kreis ist. […] Und wie haben die denn jetzt... die Fläche von diesem Sechseck ausgerechnet... im Buch? Da ist kein Sechseck glaub ich, da ist ein beliebiges anderes Eck. Aber was haben die gemacht? […] Die haben doch eine andere Technik benutzt, die wir auch schon in diesem Jahr kennen gelernt haben. […]

Schüler A: Also ähm die haben aus dem Sechseck Dreiecke gemacht und dann das den Flächeninhalt mit dem Sinus-, Cosinus- und Tangenssatz ausgerechnet. […]

Lehrer: […] Was muss ich haben, damit einen Sinus Cosinus oder was weiß ich was hab? ..... R.

Schüler R: Rechten Winkel.

Lehrer: So, wie krieg ich da denn einen rechten Winkel in das Dreieck?

Schüler V: Man nimmt die Höhe und […]

Schüler A: Es gab doch auch einen Sinussatz, wo man keinen rechten Winkel brauchte, oder?

Lehrer: Ja aber das läuft dann letztlich genauso. Das ist dann aber nur auf die Höhe zurückgeführt... […] Dann nehmen wir, nehmen wir einfach mal die Höhe... Gut... […] und damit ihr Zeit habt, darüber nachzudenken, was die da machen, lest ihr jetzt einfach nochmal fünf Minuten lang unten links den letzten Abschnitt durch, weil sonst kommen hier wir niemals zu einem Ergebnis, ohne dass ich euch sage, wo es langgeht.

Der Lehrer stellt hier mehrfach Verbindungen zum Vorwissen der Schülerinnen und Schüler her und erarbeitet in einem fragend-entwickelnden Unterrichtsgespräch die Aufteilung des Sechsecks in gleichseitige Dreiecke und das Einzeichnen der Höhe in einem Dreieck, damit die trigonometrischen Funktionen angewendet werden können. Der Lehrer lenkt dabei größtenteils leicht, teilweise übergeht er aber Schülerantworten. Hier zeigt sich wieder, dass der Lehrer nur auf die Schülerantworten näher eingeht, die ‚zielführend' sind. Dadurch wird die Selbständigkeit der Lernenden behindert. Der Lehrer erkennt scheinbar, dass die Schülerinnen und Schüler hier noch starke Probleme haben und fordert sie auf, den Abschnitt mit der theoretischen Herleitung nochmals zu lesen, damit sie selbst erkennen können, wie die Herleitung funktioniert. Hier zeigt sich der Anspruch des Lehrers auf kognitive Selbstständigkeit ganz der Schülerinnen und Schüler. Es zeigt sich aber mehrfach, dass der Lehrer seinem eigenen Anspruch nicht immer gerecht wird.

Während die Schülerinnen und Schüler den Abschnitt links unten (siehe Abbildung 10.15) lesen, geht der Lehrer durchs Klassenzimmer und beantwortet Fragen:

U [01:47:28.10]

Schüler K: (? ...)

Lehrer: Warum? Weil das, dies hier stimmt ja nur für das Sechseck. Die versuchen eine Technik zu entwickeln, dass ich einfach die Anzahl der Ecken erhöhen kann.

Schüler K: Aber das sind ja immer ähm... Dreiecke, oder?

Lehrer: Ja, das sind immer Dreiecke, die du machen musst. Weil du weißt nicht von einem alle Eigenschaften... Weil wenn du hier G mal h durch 2 machst, ne, dann ist ja die Höhe oder die Grundseite ja nicht gegeben. Eines von beiden weiß man nicht. Und mit dem Sinus versuchst du genau das auszurechnen. […]

Schüler X: Wieso haben die das hier zweimal abgebildet (gemeint sind zwei in den Kreis eingezeichnete Dreiecke.)? Braucht man doch nur einmal. Ist doch das gleiche.

Lehrer: Ne ist nicht das gleiche. Warum ist das nicht das gleiche? […]

Schüler Y: (? ...) Das eine ist ein inneres Sechseck und das andere ein äußeres Sechseck.

Der Lehrer erläutert hier das Vorgehen im Buch bei der Schülerin K. direkt und lenkt somit stark. Beim zweiten Schüler fördert er dagegen die Reflexion des Vorgehens durch den Schüler.

Im Folgenden erarbeitet der Lehrer gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern den Flächeninhalt des Teildreiecks des inneren N-Ecks:

U [01:53:31.12]

Schüler K: Also um Alpha auszurechnen, rechnet man 180 durch n, also n ist dann die Anzahl der Ecken, die das N-Eck hat. Und ähm man rechnet 180 durch n, weil man das N-Eck ja nochmal in, also bei Sechs, bei einem Sechseck kann man das in sechs kleine Dreiecke unterteilen und weil man dann nochmal die Hälfte nimmt, dann rechnet man nicht 360 durch n, sondern 180 durch N.

Lehrer: Das (L. zeigt auf angeschriebene Gleichung für Alpha, siehe Abbildung 10.18) ist das, was sie damit sagen will... Also normalerweise hat man hier ja den großen Winkel. Der ist genau ein Sechstel... und das muss ich jetzt nochmal durch 2 teilen, weil ich das Dreieck durch 2 geteilt hab... Und dann kommt da 180 durch N raus. So.

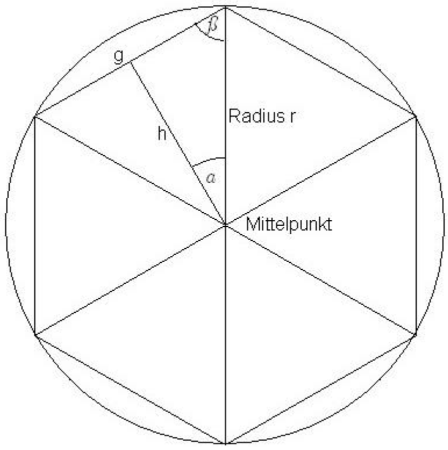
Schüler X: Kann ich auch schreiben... Kann ich nicht auch jetzt schon schreiben in dem Fall... ist es ja ein Sechseck, also 180 durch 6?

Lehrer: Genau... N ist dann gleich 6... Das heißt Alpha ist 30. (L. schreibt Gesagtes gleichzeitig an Tafel.)

Die Schülerin K. erklärt zuerst auf der allgemeinen Ebene, verlässt dann aber in ihren Erläuterungen diese Ebene und erklärt am Beispiel des Sechsecks. Der Lehrer visualisiert Schüleräußerung parallel mit einer Formel für den Winkel α an die Tafel (siehe Abbildung 10.18 rechts oben), was einen Wechsel der Repräsentationsform darstellt. Er erläutert die Schülerantwort in eigenen Worten und ergänzt ebenfalls den konkreten Fall $n=6$. Dies kann zur Unterstützung der Vorstellung des allgemeinen Falls dienen. Der Lehrer im weiteren Unterrichtsverlauf aber nicht auf die Allgemeinheit der Formel hin, so dass die Gefahr besteht, dass die Lernenden sich nicht vom Spezialfall lösen können. Es steht hier vor allem prozedurales Denken im Vordergrund.

sin, cos, tan
S. 108, 109

Fläche = $g \cdot h : 4$



$$\alpha = \frac{180°}{n} = \frac{360°}{n} : 2$$

$$hier \;\; n = 6$$

$$\Rightarrow \alpha = 30°$$

$$\beta = 180° - 90° - \alpha$$

$$\sin\left(\frac{180°}{n}\right) = \frac{\frac{1}{2}g}{r}$$

$$\Rightarrow g = 2 \cdot \sin\left(\frac{180°}{n}\right) \cdot r$$

Abbildung 10.18: Tafelanschrieb zur Berechnung des Flächeninhalts des N-Ecks

Anschließend leitet der Lehrer die Berechnung der Fläche des Teildreiecks an:

U [01:54:44.18]

Lehrer: […] Wie kann ich denn jetzt die Fläche von diesem Dreieck berechnen? Sagen wir mal, das hier ist meine Grundseite und das ist ja meine Höhe.... Und jetzt will ich aber die die von dem halben Dreieck wissen ne, nicht von dem großen......I.

Schüler I: Indem man das mit dem Arkussinus rechnet. Weil man hat ja jetzt Alpha ermittelt und man […] Dann rechnet man auch... ach ne hehe.

Lehrer: T.

Schüler T: […] Ja dann rechnet man doch G mal h durch 2.

Lehrer: Bei dem ganzen ja. Aber wenn ich jetzt nur die Hälfte davon haben will?

Schüler T: Dann... halt durch 2.

Lehrer: Genau. Also die Fläche, da rechne G mal h geteilt durch 4 (L. schreibt Gesagtes gleichzeitig an Tafel, siehe Abbildung 10.18)... So, das muss ich jetzt irgendwie anwenden... Wie krieg ich denn jetzt diese G‘s und h‘s und so weiter raus? ... Und dafür brauch ich jetzt den Sinus...... K.

Schüler K: Erst mal kann man noch den dritten Winkel ausrechnen... dann. […] 180 minus 90 minus Alpha, also 30 dann (Der Lehrer schreibt visualisiert die Schüleräußerung an der Tafel, siehe Abbildung 10.18). […]

Der Lehrer führt hier ein fragend-entwickelndes Unterrichtsgespräch, wobei er teilweise stark lenkt (z.B. mit dem Hinweis auf den Sinus). Es steht das prozedurales Denken im Vordergrund. Auf die fehlerhafte Äußerung der Schülerin I. geht der Lehrer nicht ein, so dass kein konstruktiver Umgang mit Fehlern stattfindet. Da das halbe Dreieck zur Bestimmung der Grundseite mithilfe der Trigonometrischen Funktionen benötigt wird, lässt der Lehrer nur den Flächeninhalt des halben Dreiecks berechnen. Dies wird aber nicht begründet. Im Schulbuch wird dagegen die Fläche des gesamten Dreiecks bestimmt. Gegen Ende des Transkriptausschnittes wird die oben schon angedeutete fehlende Allgemeinheit im Denken der Schülerin K. deutlich. Der Lehrer visualisiert die Schüleräußerung wiederum mit einer Formel an der Tafel, wobei er aber den speziellen Hinweis auf den 30°-Winkel auslässt.

Im Folgenden weist der Lehrer nochmals explizit auf die Verallgemeinerbarkeit des Problems hin:

Lehrer: Ok... und jetzt? ...... […] Warum wollen wir das fürs N-Eck überhaupt haben und nicht einfach fürs Sechseck? Wer versteht das? ... H.

Schüler H: Weil wir das allgemein machen wollen. […] Weil man das ja für ein N-Eck haben muss und das kann beliebig viele Ecken haben. […]

Lehrer: Genau... Kann beliebig viele Ecken haben. Also ich rechne das jetzt nicht fürs Sechseck aus, sondern fürs N-Eck... Das heißt, es muss immer stimmen.

Es wird hier nicht auf einer begrifflichen Ebene argumentiert, warum das N-Eck benötigt wird.
Der leitet nun die Berechnung der entsprechenden Längen, die für die Berechnung des Flächeninhaltes benötigt werden, an.

Schüler S: Also der Sinus von Alpha ist ja […] 180 durch n ist ja genau das gleiche wie wenn wir jetzt ähm […] h durch r (der Lehrer schreibt dies an die Tafel).

Lehrer: Alle einverstanden? ... K.

Schüler K: Ist das nicht einhalb g durch r?

Lehrer: Warum?

Schüler K: Weil's so is. […]

Schüler P: Ist das nicht g durch r?

Lehrer: Warum?

Schüler P: Weil y, also hier (im Schulbuch) ist ja y durch r und y ist halt wie da g.

Lehrer: Ne. Bei einem rechtwinkligen Dreieck haben wir ganz tolle Namen kennen gelernt, wie man Sinus und Cosinus versteht.

Schüler I: Die Hypotenuse.

Lehrer: Nö... Q.

Schüler Q: Die Gegenkathete von Alpha.

Lehrer: Hm. Genau. Da muss die Gegenkathete hin und das ist einhalb g, genau wie K. gesagt hat (korrigiert die Formel an der Tafel, siehe Abbildung 10.18). […] So also kann ich das umstellen und daraus kann ich ja schon mal festlegen, wie groß g ist in Abhängigkeit von r, nämlich wie? ...... Warum will ich g ausrechnen? Ich will g ausrechnen, damit ich es hier (zeigt auf Formel für Fläche des halben Dreiecks) einsetzen kann...... Wie komm ich daraus jetzt auf g? […]

Schüler S: Man muss dann erstmals mal r rechnen, wenn man umstellen will. Dann das ist ja Sinus von Alpha, also Sinus von 180 durch n, mal r und dann steht da ja noch einhalb, also mal 2.

Die Lernenden entwickeln zunächst kognitiv selbstständig die Berechnung der Höhe, wobei sie auch Bezug zu der Darstellung im Schulbuch herstellen. Der Lehrer fordert die Lernenden zur Begründung ihrer Antworten auf und visualisiert auch falsche Schülerantworten an der Tafel. So wird die selbstständige Überprüfung gefördert. Allerdings übernimmt der Lehrer gegen Ende des Transkriptausschnittes direkt selbst die Überprüfung der Fehler der Schülerin I. und des Schülers P. Er lenkt an dieser Stelle auch stark, indem er den Gedankengang auf die Berechnung der Grundseite lenkt. Es wird insbesondere sehr deutlich, dass das prozedurale Wissen im Vordergrund steht.
Es zeigt sich an den vorliegenden Transkriptausschnitten, dass das Vorgehen des Lehrers aus mathematischer Sicht nicht ganz durchdacht ist: Er stellt zunächst eine Formel für den Flächeninhalt des halben Dreiecks auf, obwohl später das gesamte Dreieck benötigt wird, um es am Ende mit dem Faktor n zu multiplizieren. So wird es auch im Schulbuch durchgeführt. Anschließend lässt der Lehrer aber die Seite g vollständig berechnen, obwohl in der Formel auch die halbe Grundseite stehen würde. Mit der Berechnung der halben Grundseite wäre die Berechnung des halben Dreiecks besser nachzuvollziehen. Insgesamt wird der Faktor 2 hier mehrfach unnötig eingebracht. Dies kann dadurch verursacht worden sein, dass der Lehrer sich stark vom Schulbuch löst. Dies erschwert aber den Schülerinnen und Schüler das Nachvollzeihen, so dass die Herleitung im Schulbuch nicht unbedingt als Hilfestellung dient.
Da die dritte beobachtete Unterrichtsstunde nun zu Ende ist, sollen die Schülerinnen und Schüler zu Hause h bestimmen und den Flächeninhalt berechnen.
Insgesamt lenkt der Lehrer die Schülerinnen und Schüler in dieser Phase des Unterrichts leicht bis stark, es ist kaum kognitive Selbstständigkeit erkennbar. Dies könnte aufgrund des nahen Unterrichtsendes am Zeitdruck liegen. Es zeigt sich aber teilweise, dass der Lehrer Wert auf die Begründung der Antworten durch die Lernenden legt. Außerdem versucht er,

das allgemeine Denken zu fördern. Er führt hier den in der Aufgabe 4 begonnen innermathematischen Modellierungsprozess fort, indem er zunächst aus den Schülerideen ein gemeinsames mathematisches Modell entwickelt und anschließend mit dem mathematischen Arbeiten im Modell beginnt. Dabei wird vor allem prozedurales Wissen und Faktenwissen aktiviert, wobei die Prozeduren aber nicht mit Konzepten verbunden werden. Die Bearbeitung in dieser Phase ist daher sehr verfahrensbetont.
Im Interview erläutert der Lehrer herzu:

I [00:23:01.06]

Lehrer: Und dann musste man das ganze ja nur noch in Gleichungen verfassen. Das ist natürlich auch so eine Sache, ist die Frage, muss man das mit denen machen? Kann man das nicht auch einfach gleich denen vorsetzen? Aber ich dachte, wenn die zwei Seiten im Buch lesen, wenn sie selber die Idee hatten, wie man dahin kommt... dann ist das Interesse vielleicht auch da […], das insgesamt selber herzuleiten. Weil man kommt ja relativ zügig dann zur Zahl π... Äh aber dann hat man halt wieder gemerkt, das gleiche Problem wie bei den Strahlensätzen ist wieder aufgetaucht. Wir haben ein abgeschlossenes Gebiet der Trigonometrie, […] das war nicht mehr gut abgespeichert im Gehirn und das musste alles erstmals wieder hergeleitet werden. […] Und deswegen hätte ich eigentlich da wahrscheinlich noch wieder eine Viertelstunde zwischenschalten müssen, wo ich einfach Sinus, Cosinus, Tangens wiederholen lasse. […] Und dann wären die vielleicht auch eher auf die Idee gekommen. Aber dann gehe ich eben von meinem eigentlichen Unterrichtsziel, nämlich die Zahl π, auf die Zahl π zu kommen... ähm komm ich nicht. […] Aber ich habe eben noch auf deren Wissen gehofft und das war aber nicht da...... Ja.

Der Lehrer kann hier Probleme der Lernenden benennen, sein eigenes Verhalten kritisch reflektieren und dabei mit seinen Zielen in Beziehung setzten. Er kann aber auch Handlungsalternativen abwägen. Hier zeigt sich, dass der Lehrer seine Schülerinnen und Schüler im Vorfeld nicht richtig einschätzen konnte, da er davon ausging, dass das Wissen noch vorhanden ist.
Alternativ zur Herleitung des Flächeninhalts eines Kreises aus der Ähnlichkeit, hätte sich der Lehrer auch eine andere Vorgehensweise vorstellen können:

I[00:26:15.07]

Lehrer: […] Ich hätte dann also statt dieser Aufgabe, die hätte ich dann nicht auf die Ähnlichkeit zurückgeführt, sondern ich hätte die wahrscheinlich an die Aufgabe, die wir vorher hatten, angeknüpft. […] Und hätte dann eben aus dem Pythagoras und den trigonometrischen Funktionen einfach mit einem normalen Kreis hergeleitet, wie die Fläche vom Kreis ist.

Auffällig ist hierbei, dass der Lehrer zwei verschiedene Arten der Einbettung der vorgegebenen Aufgabe in den Unterricht erläutert, wobei beide Alternativen jeweils in die Herleitung des Flächeninhaltes eines Kreises und die Annäherung an die Zahl π münden. Eine Bearbeitung der Aufgabe erst nach Einführung der Formel für den Flächeninhalt scheint für ihn nicht nahe zu liegen. Außerdem betont er bei der Beschreibung beider Vorgehensweisen die Anknüpfung an vorher behandelte Aufgaben.

10.4 Analysen von Aspekten des fachdidaktischen Wissens, die sich in der Gesamtbetrachtung des Unterrichts zeigen

10.4.1 Umgang mit den Schülerinnen und Schülern

Reagieren auf Strategien und Konzepte

Der Lehrer fordert die Schülerinnen und Schüler insbesondere in der Gruppenarbeitsphase häufig zur Erläuterung ihrer Strategien auf. Er fragt dabei auch nach Begründungen einzelner Teilschritte und motiviert die Lernenden zum eigenständigen Weiterdenken (siehe z.B. 10.3.4). Teilweise bestätigt er die Richtigkeit der Strategien, insbesondere weist er auf die Gültigkeit der Argumentation nur für einen Teilbereich (beispielsweise die Dreiecke und Vierecke im Kreis, nicht aber die restlichen Kreisabschnitte) hin und fordert die Schülerinnen und Schüler zum weiteren Nachdenken über die Argumentation für die restlichen Kreisabschnitte auf. Mehrfach wiederholt der Lehrer die Strategien der Gruppen in eigenen Worten. Selten gibt der Lehrer auch weiterführende Hinweise, die die Schülerinnen und Schüler direkt in ihrer Strategie weiterbringen. Diese Hinweise sind allerdings entscheidend für das weitere Arbeiten der Schülerinnen und Schüler (z.B. Hinweise auf Ausfüllen der restlichen Kreisstücke mit Dreiecken bei Aufgabe 4). Je einmal fordert er die Lernenden zur Verallgemeinerung und zur Visualisierung ihrer Vorgehensweise auf.

Reagieren auf richtige Lösungen

In den meisten Fällen bestätigt der Lehrer die Richtigkeit der Antwort, wonach er häufig die Schülerinnen und Schüler zur näheren Erläuterung oder Begründung ihrer Antworten auffordert. Teilweise stellt er im Anschluss an die Bestätigung der Richtigkeit auch weiterführende Fragen. Dies kommt vor allem innerhalb der prozeduralen Phasen des Unterrichts vor, in denen das Unterrichtsgespräch manchmal sehr kleinschrittig wird (z.B. Aufgabe 1 und 5). Oft wiederholt er zunächst die Schülerantwort, wobei mehrfach auch neue Aspekte zur Schülerantwort hinzukommen. Es kommt aber auch vor, dass der Lehrer keinen Kommentar zur Richtigkeit der Schülerantwort gibt. In diesen Fällen schreibt er beispielsweise das Ergebnis an die Tafel oder fordert einen anderen Lerner zur Formulierung einer Antwort auf. Dies führt dazu, dass die Lernenden gegenseitig ihre Antworten überprüfen. Der Lehrer lässt teilweise die Schülerinnen und Schüler über die verschiedenen Lösungsvorschläge abstimmen, wobei die Richtigkeit ebenfalls von den Lernenden begründet werden soll. Wiederholt verdeutlicht der Lehrer diese Begründungen der Schülerinnen und Schüler durch Skizzen oder das Aufschreiben von Formeln an der Tafel und wechselt somit die Repräsentationsform (siehe z.B. 10.3.6). Mehrmals werden die Schülerinnen und Schüler zur Verallgemeinerung ihrer Antworten aufgefordert. Außerdem weist der Lehrer manchmal darauf hin, dass die gegebene Schülerantwort nur eine mögliche Lösung darstellt. Er stellt Unterschiede zwischen verschiedenen Schülerlösungen heraus und vergewissert sich, dass alle Schülerinnen und Schüler die Antwort verstanden haben. Gegebenenfalls lässt er die Lernenden ihre Antworten wiederholen oder näher erläutern.

Reagieren auf Fehler

Der Lehrer regt die Schülerinnen und Schüler häufig zur selbstständigen Überprüfung an, indem er beispielsweise zunächst auch falsche Antworten an die Tafel schreibt und erst nach der Erläuterung anderer Lösungswege auf den Fehler hinweist oder die Lernenden zur Begründung ihrer Antworten auffordert. Außerdem wiederholt er teilweise die falschen Antworten ohne Kommentar zum Fehler und fordert andere Schülerinnen und Schüler zu Erläuterungen auf. Oft weist der Lehrer nur darauf hin, dass etwas falsch ist, ohne den Fehler zu korrigieren. Teilweise versucht er durch weiterführende Fragen die Lernenden selbst erkennen zu lassen, dass ein Fehler vorliegt, es wird aber oft nicht geklärt, warum etwas falsch ist. Nur selten korrigiert der Lehrer Fehler direkt selbst. Es kommt aber auch mehrmals vor, dass der Lehrer fehlerhafte Schülerantworten nicht beachtet, missverständliche Begriffsverwendungen ohne genauere Erläuterung übernimmt (z.B. ‚Kehrwert', siehe 10.3.1) oder sogar falsche Antworten als richtig bestätigt (z.B. Kommutativgesetz, siehe 10.3.1).

Reagieren auf Probleme und Schwierigkeiten

Insbesondere in den Schülerarbeitsphasen (Aufgabe 3 und 4) reagiert der Lehrer auf Probleme der Schülerinnen und Schüler, indem er sie zu eigenständigem Nachdenken auffordert. Zum Teil geschieht dies ohne irgendeine Hilfestellung von Seiten des Lehrers, teilweise gibt er aber auch kleine weiterführende Hinweise, indem er z.B. nach den Eigenschaften der Höhe fragt (siehe 10.3.3). Diese sollen anscheinend der Unterstützung der kognitiven Selbstständigkeit der Lernenden dienen, da der Lehrer die Schülerinnen und Schüler meistens nach dem kleinen weiterführenden Hinweis zum selbstständigen Nachdenken auffordert.
In den Phasen des Klassengesprächs dagegen neigt der Lehrer dazu, auf Probleme und Schwierigkeiten mit sehr direkten Hinweisen (siehe z.B. 10.3.1) und ausführlichen Erläuterungen (siehe z.B. 10.3.6) zu reagieren. Dies könnte aber auch auf den eher prozeduralen Charakter dieser Phasen zurückgeführt werden. In diesen Fällen liegt mehrfach starke Lehrerlenkung vor. Der Lehrer fordert die Schülerinnen und Schüler aber manchmal zur Begründung der von ihm gegebenen Hinweise auf. Außerdem helfen sich die Schülerinnen und Schüler mehrfach gegenseitig bei Problemen, ohne dass der Lehrer sie dazu auffordert.

10.4.2 Gebrauch verschiedener Repräsentationsformen

Im Unterricht werden sowohl enaktive, ikonische, sprachliche als auch formale Repräsentationsformen verwendet. Die Inhalte werden durch die häufigen Erläuterungen der Schülerinnen und Schüler vor allem sprachlich repräsentiert. Beim Zeichnen und Strecken der Sechsecke (Aufgabe 2 und 3) und beim Entwerfen der Strategien für die Aufgabe 4 werden vor allem die enaktive und die ikonische Repräsentationsform verwendet. Der Lehrer legt im Unterricht durchgängig Wert auf Visualisierungen der Sachverhalte durch Skizzen. Er fertigt Skizzen selbst an der Tafel an, um sprachlich repräsentierte Schülerantworten zu verdeutlichen (z.B. Besprechung der Aufgabe 3). Er greift aber auch auf formale Repräsentationen an der Tafel zurück, um die Aussagen der Schülerinnen und Schüler zu veranschaulichen (z.B. Formel für den Winkel α in Abbildung 10.18). Hier werden Wechsel zwischen den Repräsentationsformen sehr deutlich.

10.4.3 Gebrauch von Begriffen

Sowohl der Lehrer als auch die Schülerinnen und Schüler bemühen sich um die Verwendung von Fachsprache. Dies zeigt sich vor allem an der insgesamt geringen Anzahl an Kodierungen von Alltagsbegriffen. Allerdings benutzen alle hier Beteiligten vor allem beim Besprechen von Rechnungen eher umgangssprachliche Begriffe wie ‚teilen durch', ‚malnehmen', ‚dazu zählen', anstelle von ‚dividieren', ‚multiplizieren' oder ‚addieren'. Die Schülerinnen und Schüler verwenden Fachbegriffe teilweise falsch. Beispielsweise wenden sie den Begriffe kongruent anstelle des Begriffes ähnlich im Zusammenhang mit der Verdoppelung des Kreisradius

(siehe 10.3.4). Es wird deutlich, dass sie sich im Gebrauch dieser Begriffe nicht sicher fühlen, der Lehrer weist jedoch nicht auf die falsche Verwendung der Begriffe hin, sondern verwendet teilweise in der Folge selbst die falschen Begriffe. Auch im Interview verwendet der Lehrer beispielsweise den Begriff ‚Dreisatz' missverständlich (siehe 10.3.1).
Auf die Eigenschaften und Zusammenhänge zwischen den Begriffen geht der Lehrer kaum ein. Dies zeigt sich vor allem daran, dass selten begriffliches Denken stattfindet. Die einzelnen Figuren werden meistens auf die Formel zur Berechnung ihres Flächeninhaltes reduziert.

10.4.4 Herstellen von Verbindungen

Verbindungen zum Vorwissen

Der Lehrer stellt ganz bewusst an mehreren Stellen Verbindungen zum Vorwissen der Schülerinnen und Schüler her. Im Interview erläutert er:

I [00:01:03.03]

Lehrer: […] ich hab halt versucht, eine Planung zu machen, wie ich mit dem existenten Wissen, dass die jetzt gerade haben... dahin komme... dass sie von selbst auf die Idee kommen... wie man den die Fläche eines Kreises berechnet.

Auch die Aufgaben sind so gewählt, dass die Schülerinnen und Schüler jeweils auf dem Wissen aus den vorherigen Aufgaben aufbauen können. Dies macht der Lehrer im Unterricht auch explizit:

U [00:19:46.27]

Lehrer: […] Letzte Stunde haben wir uns ja schon angeguckt, wie verändert sich eigentlich die Fläche von einem Dreieck... in so einem Streckprozess.

Das hier angesprochene Wissen über die Änderung des Flächeninhaltes von Dreiecken ist in der Argumentation für Aufgabe 3 und 4 sehr hilfreich und wird von den Schülerinnen und Schüler auch häufig genutzt (siehe 10.3.3 und 10.3.4). Außerdem können die Ergebnisse aus Aufgabe 3 für die Strategie in Aufgabe 4 weiterentwickelt werden:

I [00:19:09.16]

Lehrer: […] Es haben eigentlich alle sofort die Vermutung aufgestellt: Das muss ja vierfach sein. Und dann wurde auch gleich bei vielen eben diese alte Aufgabe wieder rausgeholt […]. Da ist ja schon ein Kreis, das Sechseck, das Sechseck versechsfacht sich, also diese Ecken ja bestimmt auch.

Zu Beginn der mit etwas zeitlichem Abstand stattfindenden dritten Stunde wiederholt der Lehrer die in der Doppelstunde erarbeiteten Gruppenergebnisse in einer Zusammenfassung. Er baut die Einzelstunde gezielt auf diesem Vorwissen auf, da er bei der Besprechung der Herleitung der Kreisfläche im Schulbuch mehrfach auf die Ideen der Schülerinnen und Schüler verweist (siehe 10.3.6).
Es wird aber auch weiter zurückliegendes Wissen aktiviert. So erinnern sich die Lernenden selbst an das Heron-Verfahren, ein vor längerer Zeit in der Klasse bearbeitetes Näherungsverfahren zum Berechnen von Wurzeln. In der Gruppenarbeitsphase versucht der Lehrer als Hilfestellung bei Problemen, die Schülerinnen und Schüler an bekanntes Wissen, beispielsweise die Eigenschaften der Höhe, zu erinnern (siehe 10.3.3). Des Weiteren verweist er bei der Herleitung der Kreisfläche auf das früher behandelte Gebiet der Trigonometrie, welches in diesem Zusammenhang wieder angewendet werden muss.
Außerdem stellt der Lehrer die Aufgabe 1 und die Aufgabe 5 jeweils zu Beginn des Unterrichts, um explizit den Umgang mit dem Strahlensatz und die Veränderung von Streckenlängen bei der zentrischen Streckung zu wiederholen.

Inhaltliche Verbindungen

Innerhalb eines Stoffgebietes

Bis auf die Aufgaben 1 und 5 bauen die Aufgaben sehr stark inhaltlich aufeinander auf, da die Ideen aus den vorangegangenen Aufgaben in den folgenden Aufgaben weiterentwickelt werden können. Dies betont der Lehrer auch im Unterricht:

U [00:46:36.05]

Lehrer: […] Wir machen natürlich mit einer ähnlichen Aufgabe weiter.

Die Aufgaben 1 und 5 stehen aber dennoch in Verbindung zu den anderen Aufgaben, da sie wie alle Aufgaben aus dem Stoffgebiet der Geometrie stammen und speziell im Rahmen der Wissenseinheit ‚zentrische Streckung' einzuordnen sind, aus dessen Kontext auch die anderen Aufgaben hergeleitet werden. Über diese Wissenseinheit hinaus erfordern mehrere Aufgaben die Berechnung des Flächeninhalts verschiedener ebener Figuren. Des Weiteren wird auch das Themengebiet der Trigonometrie, als ein weiterer Aspekt des Stoffgebiets der Geometrie, in der Herleitung der Kreisfläche angesprochen (siehe auch Verbindungen zum Vorwissen).

Zwischen verschiedenen Stoffgebieten

Insbesondere die Berechnung der Flächeninhalte, aber auch die Umformungen von Gleichungen, beispielsweise bei Aufgabe 1 und bei der Herleitung der Kreisfläche, erfordern Kenntnisse aus dem Bereich der Algebra und auch der Arithmetik, da die Schülerinnen und Schüler mit reellen Zahlen rechnen müssen und Termwertberechnungen durchführen.

Weitere Verbindungen

Die Aufgaben 2 bis 4 sind über die Verwendung mathematischer Darstellungen verbunden, da die in Aufgabe 2 entwickelte Darstellung für die folgenden Aufgaben verwendet werden kann. Außerdem wird die in Aufgabe 3 durchgeführte innermathematische Modellierung in Aufgabe 4 weiterentwickelt. Allerdings findet hier nur der erste Teil des neuen Modellierungsprozesses statt. Dieser wird in der Herleitung der Kreisfläche fortgesetzt, so dass dieser innermathematische Modellierungsprozess über mehrere Aufgaben hinweg stattfindet. Außerdem werden in den Aufgaben 2 bis 4 ähnliche mathematische Argumente entwickelt, bzw. die Argumentationen werden über die Aufgaben hinweg weiterentwickelt und in der Herleitung der Kreisfläche zusammengeführt, so dass die Idee eines Näherungsverfahrens entsteht.

Des Weiteren stellen die Schülerinnen und Schüler während der Präsentationen zu Aufgabe 3 selbstständig Verbindungen zwischen Ihren Strategien her, während der Lehrer eher auf die Unterschiede in den Vorgehensweisen eingeht. Er fasst aber die bisherigen Erkenntnisse der Schülerinnen und Schüler zusammen und verbindet die einzelnen Gruppenergebnisse zu einem Näherungsverfahren (siehe 10.3.4 und 10.3.5).

10.4.5 Ziele

Inhaltsbezogene Ziele

Der Lehrer benennt folgende inhaltsbezogene Ziele:

I [00:04:16.08]

Lehrer: Ja also Ziel der Stunde war natürlich, dass sie erstens kennen lernen, […] wieso man für die Kreisberechnung, egal ob Fläche oder Umfang, die Zahl π braucht. Ähm dass die Zahl π durch ein Näherungsverfahren entsteht, dass es ähm deswegen auch kein Wunder ist, dass es ähm eine irrationale Zahl ist... Ähm und dass man... eben viele Probleme in der Mathematik durch

Näherungslösungen finden kann.

I [00:21:43.04] Lehrer: Das heißt, in der neunten Klasse müssen sie ja sich selber so einen Grenzwert erarbeiten und dieser Grenzwert eben, dass man von außen auch wieder ran geht. So und dass die auf die Idee gekommen sind fand ich klasse.

Hier zeigt sich, dass das Hauptziel seines Unterrichts die Bestimmung der irrationalen Zahl π. Dabei stehen vor allem die Entwicklung eines Näherungsverfahrens und die Erkenntnis, dass in der Mathematik viele Probleme über Näherungsverfahren gelöst werden, im Vordergrund. Dies soll auch zur Entwicklung eines Grenzwertbegriffes dienen. Die Herleitung der Formel für den Flächeninhalt eines Kreises ist für ihn eher nebensächlich (der Fokus liegt also eher auf prozessbezogenen Kompetenzen, s.u.). Dem genannten Ziel dienen die meisten Aufgaben, die der Lehrer im Unterricht einsetzt. Allerdings ist das Hauptziel in den beobachteten Stunden noch nicht erreicht worden, es wurde aber die Grundlage dafür gelegt. Die Schülerlösungen zeigen, dass auch die Lernenden ein Gefühl für das Näherungsverfahren im Verlauf der Unterrichtsstunden entwickeln, so dass das vom Lehrer benannte Ziel erreicht scheint Die Aufgaben 1 und 5 dienen dagegen der Wiederholung des Strahlensatzes und insbesondere der Übung von algebraischen Umformungen sowie der Übung des Kopfrechnens (siehe 10.3.1 und 10.3.5).

Prozessbezogene Ziele

In der Planung benennt der Lehrer das Analysieren und Bewerten verschiedener mathematischer Modelle durch die Schülerinnen und Schüler, hierdurch wird vor allem die prozessbezogene Kompetenz des mathematischen Modellierens aus den Bildungsstandards angesprochen. Im Interview betont der Lehrer dagegen eher die Kompetenz des Problemlösens, die für ihn einen zentralen Aspekt der Mathematik darstellt:

I [00:03:03.04]

Lehrer: […] Mathematik ist für mich mehr eine Art des Problemlösens als irgendwie einfach Aufgaben zu bearbeiten. […] meines Erachtens ist das Kerncurriculum nur so ausschweifend, auch für das Gymnasium […] Damit man immer wieder was Neues macht, damit man immer wieder das Problemlösen üben kann. […] es gibt ja viele Themengebiete in der Mathematik, die später im Leben eigentlich keine Anwendung mehr haben, vor allem in höheren Jahrgängen.

Das hier beschriebene Ziel des Problemlösens scheint der Lehrer mit der Aufgabenfolge 2 bis 4 erreicht zu haben, da die Schülerinnen und Schüler hier größtenteils selbstständig arbeiten. Allerdings widersprechen die Aufgabenbearbeitungen der Aufgaben 1 und 5 und die Herleitung der Kreisfläche dem Verständnis des Lehrers, nicht nur einfach Aufgaben zu bearbeiten.

Der Lehrer erläutert des Weiteren:

I [00:34:36.13]

Lehrer: [...] Aber zum Beispiel stehen da ja, diese wesentliche Idee, dass da eigentlich π durch ein Näherungsverfahren gewonnen wird, […] das ist im Kerncurriculum gar nicht so gegeben. Das ist natürlich dadurch gegeben, dass das Kerncurriculum so Kompetenzen angibt, dass sie beweisen können sollen, dass sie argumentieren können sollen und so weiter.

Der Lehrer bemängelt hier am Kerncurriculum, dass zwar die inhaltlichen Kompetenzen klar beschrieben werden, dass aber die prozessbezogenen Kompetenzen nur sehr vage formuliert sind, da beispielsweise das Näherungsverfahren zur Bestimmung von π nicht direkt genannt wird. Dies zeigt, für wie wichtig er das Näherungsverfahren für die Zahl π erachtet.

Auch das mathematische Kommunizieren wird vom Lehrer angesprochen:

I [00:04:59.11]

Lehrer: Ja also erstens Problemlösen natürlich die Kompetenz. Zweitens natürlich, dass sie selber präsentieren. Und die dritte Kompetenz, die ich gerne gehabt hätte, ist, dass sie mathematisch argumentieren.

Der Lehrer zeigt hier Wissen über die Bildungsstandards. Die Kompetenz des Kommunizierens hat der Lehrer durch die Gruppenarbeit und das Präsentieren der Lernenden gefördert, so dass dieses Ziel erreicht wurde. Auch das Argumentieren wurde von ihm teilweise durch das Einfordern von Begründungen unterstützt, allerdings wären an mehreren Stellen vertieftere Begründungen möglich gewesen, so dass dieses Ziel nur teilweise erreicht wurde.

Allgemeine Ziele

Ein allgemeines Ziel des Unterrichts ist das selbstständige entwickeln der Ideen durch die Schülerinnen und Schüler:

I [00:01:03.03]

Lehrer: […] Das heißt mal was ganz Neues zu machen, wo sie selber auf die Idee kommen und ich mich möglichst weit raushalte.

Hier zeigt sich der Anspruch der kognitiven Selbstständigkeit des Lehrers. Die Analysen der Aufgabenbearbeitungen zeigen, dass der Lehrer dieses Ziel erreicht hat.

Auch das Kopfrechnen stellt ein Unterrichtsziel dar:

I [00:07:34.13]

Lehrer: Warum Kopfrechnen? Weil ich denke, dass... die meisten Schüler in der neunten Klasse mittlerweile so weit sind, dass sie sogar den Taschenrechner benutzen, wenn die 1 durch 2 rechnen müssen. Und ich finde, das geht nicht. Also man muss eben erkennen können, also die wesentliche Kompetenz beim Taschenrechner finde ich ist nicht mit dem Taschenrechner zu rechnen, auch das ist wichtig, sondern die wesentliche Kompetenz ist zu wissen, wann ich einen Taschenrechner benutze... Und dass manche Rechnungen eben ohne Taschenrechner viel schneller gehen.

I [00:29:21.05]

Lehrer: […] Also das mach ich auch immer gerne, Quadratzahlen von 1 bis 25 soll man eigentlich immer so kennen.

Die Schülerinnen und Schüler berechnen zwar in den Aufgaben 1 und 5 Werte in Kopf, allerdings wird dies in keiner Weise zum Gebrauch des Taschenrechners abgegrenzt, so dass dieses vom Lehrer genannte Ziel in diesen Unterrichtsstunden nicht erreicht wurde.

Außerdem erwähnt der Lehrer im Interview, dass das Erkennen der ‚Schönheit der Mathematik' ein Ziel seine Unterrichts darstellt:

I [00:31:12.21]

Lehrer: […] Bei Bruchzahlen zum Beispiel, da das... ähm ist ja so eine gewisse ähm... ja weiß ich nicht, Schönheit in der Mathematik würd ich mal sagen. Und dass sie versuchen, diese Schönheit zu erkennen.

10.5 Aspekte kognitiver Aktivierung

Der Lehrer betont im Interview mehrfach die Bedeutung der kognitiven Selbstständigkeit und begründet dies auch mit lernpsychologischen Argumenten:

I [00:03:03.04]

Lehrer: Ja also weil ich halt glaube, dass es psychologisch viel besser ist, wenn die selber auf die Idee kommen, weil ähm sie auch in jeder... weiteren Arbeit, also... das ja eben wieder anwenden können.

Hieraus kann auf ein konstruktivistisches Lernverständnis geschlossen werden. Dieses zeigt sich auch in den Unterrichtsanalysen: Größtenteils ermuntert der Lehrer die Lernenden zum selbstständigen Arbeiten. Er fördert das eigenständige Überwinden von Schwierigkeiten und das selbstständige Erkennen von Fehlern teilweise mit kleinen weiterführenden Hinweisen, es gibt aber auch eine Reihe von Situationen, in denen der Lehrer stark lenkt. Dies ist vor

allem in kleinschrittig-entwickelnden Plenumsphasen, in denen formale Rechnungen durchgeführt werden, der Fall (siehe z.B. 10.3.6). Aber auch in den Schülerarbeitsphasen gibt der Lehrer teilweise die entscheidenden Hinweise (z.B. das Ausfüllen der restlichen Kreisstücke mit Dreiecken, siehe 10.3.4). Allerdings fällt auf, dass die Phasen starker Lehrerlenkung meistens sehr kurz sind, da der Lehrer nach direkten weiterführenden Hinweisen häufig wieder die kognitive Selbstständigkeit fördert. Außerdem fordert er die Schülerinnen und Schüler oft zur Begründung oder auch zur weiteren Erläuterung der Antworten auf. Es fällt allerdings auf, dass der Lehrer die Visualisierung der Schülerantworten meistens selbst vornimmt, anstatt die Lernenden selbst an die Tafel zu rufen. Die Schülerinnen und Schüler erklären dem Lehrer aber die durchzuführenden Schritte, sodass hier trotzdem von kognitiver Schüleraktivität ausgegangen werden kann.
Des Weiteren wechseln sich in einem Teil des Unterrichts Phasen des eher prozeduralen Denkens mit Phasen, die eher begriffliches Denken fokussieren ab, teilweise auch innerhalb der einzelnen Aufgaben (siehe z.B. 10.3.3 und 10.3.4). Mehrfach fällt auf, dass zunächst verfahrensbetont gearbeitet wird, woraufhin sich eine verständnisbetonte Phase begrifflichen Denkens anschließt. Es gibt zwar keine Phasen, in denen explizit Faktenwissen im Vordergrund steht, allerdings ist durch die starken Verbindungen zum Vorwissen immer wieder die Aktivierung von Faktenwissen nötig (z.B. Formeln für den Flächeninhalt verschiedener Figuren, Anwendung der trigonometrischen Funktionen). Allerdings steht bei den Wiederholungsaufgaben (siehe 10.3.1 und 10.3.5) und auch bei der Herleitung der Kreisfläche (siehe 10.3.6) vor allem prozedurales Wissen im Vordergrund.
Besonderen Wert scheint der Lehrer auf den Vergleich verschiedener Lösungswege durch die Schülerinnen und Schüler zu legen. Hier werden die Lernenden verstärkt zur Reflexion der Lösungswege angeregt. Außerdem fördert der Lehrer beispielsweise durch die Zusammenfassung der Gruppenergebnisse (siehe 10.3.4) das strukturierte Denken. Durch die Diskussionen über die Verallgemeinerung in den Aufgaben 3 und 4 sowie die Herleitung der Kreisfläche über ein N-Eck, wird das allgemeine Denken begünstigt. Auch Aspekte innermathematischer Modellierung sind in den Aufgabenbearbeitungen zu erkennen. Allerdings sind diese positiven Merkmale kognitiver Aktivierung wieder vor allem bei der Bearbeitung der Aufgaben 2 bis 4 zu beobachten. Bei den Wiederholungsaufgaben und bei der Herleitung der Kreisfläche fragt der Lehrer viel weniger nach Begründungen und lenkt deutlich mehr. Auch werden die verschiedenen Lösungen nicht miteinander verglichen, da der Lehrer nur die von ihm favorisierte Lösung weiterverfolgt (siehe z.B. 10.3.1). Insbesondere sind die Wiederholungsaufgaben durch die wiederholt gleiche Struktur nicht geeignet, vielfältige Reflexionen des bereits vorhandenen Wissens der Schülerinnen und Schüler anzuregen.
Es fällt aber auf, dass bei diesem Lehrer bis auf die teilweise starke Lehrerlenkung kaum ‚Negativ-Kategorien' (z.B. Behinderung allgemeinen Denkens, Behinderung selbstständiger Überprüfung, siehe 6.2.2) kodiert wurden.

10.6 Einschätzung des mathematischen Fachwissens anhand der Unterrichtsbeobachtungen

Die zentralen Aufgaben (1 bis 4 und Herleitung der Kreisfläche) bauen fachlichen gut aufeinander auf. Der Lehrer erkennt die Mathematik als hauptsächlich problemlösende Disziplin, die häufig Näherungsverfahren verwendet und versucht dieses auch seinen Schülerinnen und Schülern zu vermitteln. In der Reaktion auf Schülerantworten zeigt sich teilweise, dass er feine Unterschiede in den einzelnen Schülerlösungen erkennt und auch darauf hinweisen

kann (siehe z.B. 10.3.4). Außerdem zeigt er zum Teil Wissen über Trigonometrische Funktionen (siehe 10.3.6).
Allerdings unterlaufen dem Lehrer mehrfach kleinere fachliche Fehler, die eventuell als Flüchtigkeitsfehler einzuschätzen sind, teilweise aber auch substanziell sind. So erkennt der Lehrer beispielsweise nicht die falsche Benennung des Kommutativgesetzes durch eine Schülerin. Anstelle der Korrektur bestätigt er hier die Lösung als fachlich richtig, obwohl er nach dem Assoziativgesetz gefragt hatte (siehe 10.3.3). An anderer Stelle erkennt er nicht die falsche Richtung in der Begründung einer Schülerin (siehe 10.3.3). Auch im Interview unterlaufen dem Lehrer kleinere fachliche Fehler, beispielsweise setzt er den Bruch ¼ mit dem Verhältnis 1:4 gleich:

I [00:31:12.21]

Lehrer: […] wenn ich eben statt 0,25 da ein Viertel hinschreibe, dass das eben auch gleich... dann so ein Verhältnis ist, was direkt im Strahlensatz wieder auftauchen kann als 1 zu 4 und so.

Es entsteht der Eindruck, dass der Lehrer zwar über gutes Fachwissen verfügt (gut fachliche Struktur des Unterrichts), dass er dieses Wissen aber in spontanen Reaktionen auf Schülerantworten nicht immer ausreichend abrufen kann.

10.7 Zusammenfassende Interpretation und Einschätzung des fachdidaktischen Wissens

Der Lehrer 3 gestaltet drei Unterrichtsstunden, in denen die Schülerinnen und Schüler über drei aufeinander aufbauende Aufgaben die Idee eines Näherungsverfahrens zur Bestimmung des Flächeninhalts eines Kreises und insbesondere zur Bestimmung der Zahl π größtenteils selbstständig erarbeiten. Die Arbeitsergebnisse der Schülerinnen und Schüler führt er mit der Herleitung der Kreisfläche im Schulbuch zusammen. Zu Beginn der Unterrichtsstunden werden jeweils kleine Wiederholungsaufgaben zum Strahlensatz bzw. zur zentrischen Streckung bearbeitet, die den ansonsten gut erkennbaren ‚roten Faden' im Gedankengang kurzzeitig unterbrechen, im Großen und Ganzen aber zur Thematik passen.
Aufgrund der großen Unruhe während des Unterrichts entsteht bei oberflächlicher Betrachtung des Videos dieses Lehrers der Eindruck eines qualitativ eher niedrigen Unterrichts. Dieser Eindruck wird durch die teilweise auftretenden fachlichen Fehler des Lehrers unterstrichen. Die genaue Analyse des Unterrichts aus fachdidaktischer Sicht zeigt aber viele Kennzeichen kognitiver Aktivierung und eine gute fachdidaktische Strukturierung, sodass im Einzelnen auf eine gute Umsetzung des fachdidaktischen Wissens geschlossen werden kann.

Schülerbezogenes Wissen

Der Lehrer fördert ganz bewusst die kognitive Selbstständigkeit der Lernenden und begründet dies im Interview mit lernpsychologischen Argumenten. Dies führt dazu, dass der Lehrer die Lernenden im Unterricht immer wieder zur weiteren Erläuterung und Begründung ihrer Antworten auffordert. Bei Problemen und Fehlern gibt er häufig nur kleine weiterführende Hinweise, sodass die Schülerinnen und Schüler ihre Probleme selber lösen und Fehler eigenständig erkennen können. Nur selten korrigiert er Fehler direkt. Es fällt dagegen auf, dass sich die Schülerinnen und Schüler auch ohne Aufforderung durch den Lehrer gegenseitig korrigieren und bei Problemen weiterhelfen. Außerdem fördert der Lehrer die selbstständige Überprüfung der Ergebnisse, indem er mehrfach falsche und richtige Antworten an die Tafel schreibt und die Lernenden die Richtigkeit der Ergebnisse begründen lässt. Allerdings wird meistens nicht begründet, warum die falschen Ergebnisse nicht richtig sind, so dass trotz der selbstständigen Überprüfung meistens kein konstruktiver Umgang mit Fehlern stattfindet. Es

entsteht dagegen der Eindruck, dass der Lehrer nur die zielführenden Schülerbeiträge aufgreift und auf die anderen Äußerungen der Lernenden nicht weiter eingeht. Dies lässt auf Mängel in der Umsetzung des schülerbezogenen Wissens zum Umgang mit Fehlern oder auf fehlendes Wissen schließen. Der Lehrer achtet aber mehrfach darauf, dass die Schülerantworten von allen Schülerinnen und Schülern verstanden werden und fordert die Lernenden gegebenenfalls zur Wiederholung der Antworten auf. Des Weiteren fördert der Lehrer mit geeigneten Fragen und Zusammenfassungen relativ häufig reflektierendes, allgemeines und strukturiertes Denken bei den Schülerinnen und Schülern. Das vorhandene Wissen über die Bedeutung der kognitiven Selbstständigkeit der Lernenden wird damit auch in Unterrichtshandlungen umgesetzt.
Allerdings gelingt es dem Lehrer nicht immer, die Schülerantworten richtig einzuschätzen. Er wiederholt beispielsweise oft die Schülerantworten in eigenen Worten, fügt aber manchmal Aspekte hinzu, die von den Lernenden nicht genannt werden. Auch gewinnt man den Eindruck, dass er teilweise die von den Schülerinnen und Schülern beschriebenen Strategien anders interpretiert, so dass er die Lernenden auf einen neuen Gedankengang führt. Dies zeigt, dass der Lehrer die Gedankengänge der Schülerinnen und Schüler nur in begrenztem Maße nachvollziehen kann.
Der Lehrer benennt schon in der Planung mögliche Schülerlösungen und Schwierigkeiten, die auch im Unterricht auftreten, was auf vorhandenes schülerbezogenes Wissen hindeutet, allerdings gibt es auch Lösungswege und auftretende Schwierigkeiten, die der Lehrer im Vorfeld nicht benannt hat oder die er sich nicht bewusst gemacht hat (z.B. das fehlende Wissen zur Trigonometrie). Er kann aber die unterschiedlichen Schülerbearbeitungen und Probleme im Interview gut nachzeichnen. Insgesamt scheint er auch die Möglichkeiten der Schülerinnen und Schüler zur eigenständigen Erarbeitung des Näherungsverfahrens für die Zahl π gut eingeschätzt zu haben, da es den Lernenden im Unterricht größtenteils gelingt, durch die Bearbeitung der vorgegebenen Aufgaben selbstständig eine Idee des Näherungsverfahrens zu entwickeln. Der Lehrer konnte also den Schwierigkeitsgrad der Aufgaben und den Leistungsstand der Schülerinnen und Schüler gut einschätzen, und zeigt somit eine gute Umsetzung seines schülerbezogenen Wissens.
Die Vielfältigen Verbindungen zum Vorwissen der Schülerinnen und Schüler lassen auf verinnerlichtes Wissen über konstruktivistische Lerntheorien (vgl. 5.1.1) schließen, welches sich auch in den Handlungen des Lehrers wiederspiegelt. Er verknüpft sein schülerbezogenes Wissen mit dem inhaltsbezogenen Wissen, indem er Aufgaben auswählt, die teilweise stark aufeinander aufbauen, so dass die Lernenden jeweils in der nächsten Aufgabe die Ergebnisse und Verfahren der vorangegangenen Aufgabe weiterentwickeln können. Der Lehrer weist auch explizit auf diese Verbindungen hin. Außerdem baut er die Unterrichtsstunden bewusst auch auf länger zurückliegendem Vorwissen (z.B. Flächeninhaltsberechnung an ebenen Figuren, Trigonometrie) auf. Auch bei Problemen erinnert der Lehrer die Schülerinnen und Schüler mehrfach an vorhandenes Wissen (z.B. Eigenschaften der Höhe). Durch die Wiederholungsaufgaben (siehe 10.3.1 und 10.3.5) versucht er bewusst, elementares Wissen bei den Lernenden wach zu halten.

Wissen über das Verständlichmachen mathematischer Inhalte

Durch die hohe Selbstständigkeit der Schülerinnen und Schüler erklärt der Lehrer relativ wenig. Es zeigt sich aber mehrfach, dass der Lehrer seinem eigenen Anspruch auf kognitive Selbstständigkeit nicht immer gerecht wird, da er teilweise starke strategische Hinweise gibt. Insbesondere in verfahrensbetonten Abschnitten wird der Unterricht sehr kleinschrittig und

durch den Lehrer gelenkt. Dies kann der Lehrer im Interview aber nicht reflektieren. Auch in schülerzentrierten Arbeitsphasen gibt er teilweise deutliche Impulse (z.B. die Hinweise auf die fehlenden Flächenstücke, siehe 10.3.4), auf die wiederum Phasen kognitiver Selbstständigkeit folgen. Dies kann auf zweierlei Weise interpretiert werden: Entweder schlägt sich das Wissen über die Bedeutung der kognitiven Selbstständigkeit nicht immer auch in entsprechenden Handlungen nieder, oder der Lehrer ermöglicht im Sinne von Mayer (2004) (siehe 5.3.1) durch gelegentliche Führung eine ‚produktive' kognitive Selbstständigkeit. Eine Einschätzung ist hier schwierig, da der Lehrer im Interview selbst die zum Teil direkten Hilfen benennt (z.B. Hinweis auf restliche Kreisabschnitte), andererseits oft scheinbar unbewusst stark lenkt.
Auch die Vorstellung verschiedener Lösungswege ist ein zentrales Element des Unterrichts dieses Lehrers, denn bei fast allen Aufgaben werden mehrere Lösungswege erläutert. Der Lehrer wählt teilweise aus, welche Lösungswege vorgestellt werden (siehe 10.3.2 und 10.3.3). Dabei sind die gewählten Lösungswege in besonderer Weise geeignet, Hilfestellung für die folgenden Aufgaben zu geben. Hier zeigt sich insbesondere eine Verknüpfung von Wissen über das Verständlichmachen und inhaltsbezogenem Wissen. Der Lehrer verdeutlicht zumindest bei einer zentralen Aufgabe (siehe 10.3.4) die Zusammenhänge und Unterschiede der verschiedenen Lösungswege. Allerdings werden oftmals die Lösungswege nur präsentiert aber nicht verglichen (siehe z.B. 10.3.3). Der Lehrer schreibt auch falsche Lösungen an die Tafel und lässt die Schülerinnen und Schüler die verschiedenen möglichen Lösungen selbst überprüfen.
Die Schülerinnen und Schüler führen einen kompletten innermathematischen Modellierungsprozess durch (siehe 10.3.3), wobei die Validierung durch den Lehrer angeleitet wird. Anschließend wird ein neuer innermathematischer Modellierungsprozess auf dem vorhergehenden aufgebaut, wobei sich dieser über die beobachtete Unterrichtsstunde hinaus erstreckt. Dies lässt auf Wissen über Aspekte kognitiver Aktivierung schließen, welche auch im Unterricht umgesetzt werden.
Auch Wissen über die Bedeutung des Einsatzes verschiedener Repräsentationsformen zeigt sich im Unterricht dieses Lehrers, da er Schülerantworten oft mithilfe von Skizzen oder Formeln an der Tafel verdeutlicht. Dies führt zu häufigen Wechseln der Repräsentationsformen (von sprachlich zu ikonisch oder formal) und der gleichzeitigen Darstellung eines Inhaltes auf mehreren Repräsentationsebenen. Auch die Lernenden visualisieren ihre Gruppenergebnisse (siehe 10.3.4) auf einer OHP-Folie. Insbesondere verschriftlicht der Lehrer die Ergebnisse der Gruppen und das daraus entwickelte Näherungsverfahren an der Tafel und fordert die Schülerinnen und Schüler zum Abschreiben auf. Es ist allerdings keine Aussage darüber zu treffen, ob diese Wechsel der Repräsentationsformen dem Lehrer bewusst sind, oder ob hier implizites Wissen vorliegt.
Es zeigen sich aber weitere leichte Mängel im Wissen über das Verständlichmachen. Der Lehrer scheint insgesamt keinen großen Wert auf die korrekte Verwendung der Fachsprache zu legen. Als Folge ist der Gebrauch von Begriffen auf Lehrer- und Schülerseite sehr unsicher. Mehrfach verwenden die Lernenden falsche Begriffe, die nicht vom Lehrer korrigiert, sondern teilweise sogar übernommen werden. Außerdem macht der Lehrer die Schülerinnen und Schüler mehrfach nicht auf fehlerhaften Begriffsgebrauch aufmerksam und stellt keine Verbindungen zwischen verschiedenen Begriffen her.

Inhaltsbezogenes Wissen

Auffällig ist vor allem die fachliche Struktur der Unterrichtsstunden, da die Aufgaben größtenteils inhaltlich stark aufeinander aufbauen. Die Äußerungen des Lehrers zeigen, dass er generell die Aufgaben im Unterricht intensiv miteinander zu vernetzen scheint, er verfügt also über umfassendes Wissen über die Bedeutung der Vernetzung von Wissen beim Lernen und setzt dies auch in die Gestaltung des Unterrichts um. Dies führt dazu, dass der Lehrer die zentralen Aufgaben des Unterrichts (Aufgabe 2-4 und ‚Herleitung der Kreisfläche') bewusst miteinander verbindet. Durch das Zeichnen des Sechsecks mit der Kreismethode (siehe 10.3.2) wurde beispielsweise schon die Aufgabe 4 vorbreitet. Die zweite Schülerlösung, das Zeichnen des Sechsecks mithilfe der Winkel (siehe 10.3.2), begrüßt der Lehrer dennoch, da hierdurch Ansatzmöglichkeiten für die Aufgabe 3 entstehen. Die entwickelten Methoden der Aufgabe 3 können in Aufgabe 4 weiterentwickelt werden (siehe 10.3.3 und 10.3.4), woraufhin die einzelnen Ideen in der Herleitung der Kreisfläche zusammengeführt werden (siehe 10.3.6). Dabei stellt der Lehrer auch explizite Verbindungen zu anderen mathematischen Teilgebieten (Algebra und Arithmetik) her. Die Aufgaben 1 und 5 dienen zwar nicht direkt der Herleitung des Näherungsverfahrens, sie stehen aber trotzdem im fachlichen Zusammenhang mit den anderen Aufgaben, da auch sie zur Wissenseinheit der zentrischen Streckung zuzuordnen sind.

Das Potenzial der zentralen Aufgaben nutzt der Lehrer zur eigenständigen Entwicklung eines Näherungsverfahrens gut aus. Im Verlauf der Aufgaben 2-4 wird bei den Schülerinnen und Schülern ein Problemlöseprozess angeregt, der zu einem Näherungsverfahren für die Zahl π führt. Dies kann der Lehrer im Interview sehr ausführlich begründen. Insbesondere kann er in diesem Zusammenhang die prozessbezogenen Kompetenzen des Problemlösens, aber auch des mathematischen Kommunizieren und Argumentierens benennen, die im Fokus dieser Unterrichtsstunden stehen. Die inhaltliche Kompetenz der Herleitung der Formel für den Flächeninhalt eines Kreises beurteilt der Lehrer in diesem Zusammenhang als nebensächlich. Das in der Planung und im Interview sichtbar werdende inhaltsbezogene Wissen über das Potenzial der Aufgaben und die Ziele des Mathematikunterrichts setzt der Lehrer auch umfassend im Unterricht um, indem er die genannten Kompetenzen durch gezielte Aufforderung zur Begründung und näheren Erläuterung sowie zum Präsentieren der Lösungsideen, fördert. Allerdings nutzt der Lehrer bei den beiden Wiederholungsaufgaben jeweils zu Beginn des Unterrichts das von ihm zwar erkannte und im Interview benannte Potenzial der Aufgaben nicht aus (siehe 10.3.1 und 10.3.5). Hier zeigt sich eine deutliche Diskrepanz zwischen dem vorhandenem Wissen und der Umsetzung im Unterricht.

Das Potenzial der Aufgaben zum begrifflichen Denken nutzt der Lehrer dagegen nicht. Es fällt zwar auf, dass sich im Verlauf des Unterrichts verfahrensbetonte Bearbeitungen, die vor allem prozedurales Denken erfordern, abwechseln mit verständnisbetonten Bearbeitungen. Aber auch bei den verständnisbetonten Bearbeitungen steht meistens das prozedurale Denken im Vordergrund. Begriffliches Denken wird im gesamten Unterricht nur wenig aktiviert. Teilweise (siehe 10.3.3 und 10.3.4) steht innerhalb einer Aufgabenbearbeitung zunächst das prozedurale Denken im Vordergrund, wird dann aber durch begriffliches Denken ergänzt. Das Abrufen von Faktenwissen wird in die Phasen prozeduralen und begrifflichen Denkens integriert. Es ist aber aufgrund der Beobachtungen nicht zu entscheiden, ob der Lehrer dieses Wissen bewusst einsetzt, oder ob es eher implizit vorliegt.

Eine Besonderheit stellt die Vorgabe der Herleitung der Kreisfläche im Schulbuch dar. Hier gibt der Lehrer den Schülerinnen und Schülern einen Lösungsweg vor. Allerdings ist diese Herleitung sehr anspruchsvoll, weshalb der Lehrer sie bewusst mit den Ideen der Lernenden aus der Gruppenarbeit verknüpft, um ein besseres Verständnis zu bewirken. Die einzelnen Schritte der Herleitung werden gemeinsam im Plenum nachvollzogen, wobei der Lehrer eine etwas andere Zeichnung als im Buch wählt, so dass die Lernenden die Erläuterungen im Schulbuch transferieren müssen. Hier zeigt sich eine Verknüpfung der drei Komponenten des fachdidaktischen Wissens, da der Lehrer einerseits den Leistungsstand und das Vorwissen der Schülerinnen und Schüler berücksichtig, um die Herleitung in Verbindung mit den Schülerideen zu verdeutlichen und dazu mehrere Aufgaben im Vorfeld geschickt verbindet.

10.8 Vergleich mit den Ergebnissen des COACTIV-Tests

Im COACTIV-Testteil zum mathematikdidaktischen Wissen erzielt der Lehrer 20 von empirisch zu erreichenden 37 Punkten. Er liegt damit leicht unter dem Durchschnitt der gymnasialen Lehrkräfte, die an der COACTIV-Studie teilgenommen haben (vgl. Abbildung 2.3).

Im Testabschnitt zum schülerbezogenen Wissen kann der Lehrer die Schülerfehler und auch deren Ursachen überwiegend richtig einschätzen und teilweise auch geeignete Interventionen benennen. Außerdem kann er in der Aufgabe ‚Trapez' (siehe Abbildung 7.4) den didaktischen Nutzen der einzelnen Formeln erklären. Diese Ergebnisse sind konform zu den Ergebnissen der qualitativen Analysen.

Die Aufgaben zum Wissen über das Verständlichmachen mathematischer Inhalte kann der Lehrer größtenteils nicht richtig lösen, obwohl er sich bei allen Aufgaben bemüht, die Inhalte zu verdeutlichen. Mehrfach sind die Erklärungen aber ungeeignet, um das Verständnis der Schülerinnen und Schüler zu fördern, teilweise gelingen ihm aber sehr guter Veranschaulichungen. Dies ist konform mit den Ergebnissen der qualitativen Analysen, da diese gezeigt haben, dass der Lehrer zwar Visualisierungen zur Erläuterung bei Problemen und Fehlern einsetzt und mehrere Lösungswege vorstellen lässt, oftmals werden die Lösungswege aber nicht verglichen. Auch die Ursachen für Schülerfehler werden nicht ausreichend geklärt.

Im Testabschnitt zum inhaltsbezogenen Wissen kann der Lehrer zu jeder Aufgabe 2-3 strukturell unterschiedliche Lösungen, die insbesondere Wissen aus den verschiedenen Stoffgebieten erfordern, benennen. Allerdings sind die Antworten teilweise sehr kurz, so dass oftmals keine Punkte im Rahmen der quantitativen Analysen vergeben werden konnten. Hier wird bei der qualitativen Betrachtung der Testhefte deutlich, dass der Lehrer über umfangreicheres fachdidaktisches Wissen verfügt, als die Punktezahl ausdrückt. Dieser Eindruck passt auch zu den qualitativen Analysen, da hier festgestellt wurde, dass sich der Lehrer umfangreiche Gedanken zu verschiedenen Lösungsmöglichkeiten macht.

Im Testteil zum mathematischen Fachwissen erreicht der Lehrer 9 von 13 möglichen Punkten und liegt damit genau im Durchschnitt der gymnasialen Lehrer, obwohl er kein Mathematikstudium absolviert hat (siehe 7.1.1). Bei der qualitativen Betrachtung der Aufgabenbearbeitungen fällt insbesondere auf, dass der Lehrer die fachlichen Aufgaben, die sehr typisch für die Schulmathematik sind, meistens ohne größere Probleme bearbeiten kann. Lediglich einige Aufgaben, die kleinere Beweise auf gehobenem Schulniveau, bzw. unterem Universitätsniveau, darstellen und eher untypisch für den Mathematikunterricht sind, kann der Lehrer nicht richtig lösen.

11 Darstellung der Analysen von Lehrer 4

11.1 Überblick über die Unterrichtsstunden

Es wurden drei aufeinanderfolgende Unterrichtsstunden des Lehrers 4 zum Themenbereich ‚Satz des Pythagoras' videografiert, eine Doppelstunde und eine Einzelstunde. Die unterrichtete Klasse ist im achten Schuljahr und wird vom Lehrer als eher leistungsschwach mit einer kleinen Leistungsspitze eingeordnet.
In den vorangehenden Stunden haben die Schülerinnen und Schüler den Satz des Pythagoras bereits kennengelernt. Zu Beginn der Doppelstunde wiederholt der Lehrer die Anwendung des Satzes kurz anhand von zwei Aufgaben (siehe 11.3.1) und begründet gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern die Gültigkeit des Satzes des Pythagoras nur in rechtwinkligen Dreiecken. Im Anschluss erarbeiten die Lernenden in Gruppenarbeit (4-5 Schülerinnen und Schüler pro Gruppe) verschiedene Beweisideen des Satzes von Pythagoras (siehe 11.3.2 bis 11.3.5), die sie sich anschließend im Plenum gegenseitig vorstellen. Daraufhin werden noch zwei weitere Beweise aus dem Schulbuch im Plenum besprochen (siehe 11.3.7 und 0), bevor sich der Fokus der Doppelstunde hin zur Anwendung des Satzes von Pythagoras wendet, indem die Schülerinnen und Schüler Aufgaben aus dem Schulbuch (siehe 11.3.9 und 11.3.10) bearbeiten. In der dritten Stunde wird zunächst eine der Schulbuchaufgaben besprochen, die als Hausaufgabe zu Ende gemacht werden sollte. Anschließend bearbeiten die Schülerinnen und Schüler ein Arbeitsblatt zur außermathematischen Anwendung des Satzes des Pythagoras (siehe 11.3.11). Der Lösungsansatz (das Erstellen des mathematischen Modells, vgl. 5.2.3) wird gemeinsam im Plenum erarbeitet, die Berechnung des Ergebnisses führen die Schüler in Einzelarbeit aus. Anschließend wird die Lösung von einem Schüler an der Tafel präsentiert, woraufhin die Schülerinnen und Schüler bis zum Ende der Stunde in Einzelarbeit die zweite Aufgabe des Arbeitsblattes bearbeiten.

11.2 Darstellung aufgabenübergreifender Aspekte des Unterrichts

Beweise

Der Lehrer 4 erklärte im Vorfeld, eine kurze Unterrichtseinheit zu verschiedenen Beweisen des Satzes des Pythagoras durchführen zu wollen. Da diese zum größten Teil als eher kognitiv aktivierend angesehen werden können, wurde der Lehrer gebeten, verschiedene Beweistypen des Satzes des Pythagoras, darunter einen arithmetischen und einen abbildungsgeometrischen Beweis, im Unterricht zu besprechen. Ihm wurden zwei Beispielbeweise vorgeschlagen (siehe 7.3.1), die der Lehrer aber nicht direkt im Unterricht umsetzt.
Sowohl in der Planung als auch im Interview stellt der Lehrer die zentrale Bedeutung der Beweise im Mathematikunterricht heraus:

I [00:17:15.10]

Lehrer: Ja, also es ist...... Ein Beweis ist ja nun etwas, was in der Mathematik eine zentrale Rolle spielt. Und, äh... die, das Kerncurriculum hat, sieht es unter anderem ja auch vor, dass Beweise durchgeführt werden.

Der Lehrer zeigt hier, dass er über Wissen über die Inhalte des niedersächsischen Kerncurriculums (Niedersächsisches Kultusministerium, 2006) verfügt und dieses Wissen auch bei der Unterrichtsplanung berücksichtigt.
Der Lehrer begründet die Unterrichtsgestaltung bezüglich der Beweise des Satzes des Pythagoras schon in der Planung und auch im anschließenden Interview sehr ausführlich Seine Unterrichtsplanung ist zumindest für das Thema ‚Beweise' deutlich umfangreicher als die schriftliche Unterrichtsplanung der anderen teilnehmenden Lehrpersonen. Der Lehrer erläu-

tert unter Einbeziehung von Fachliteratur sowohl fachdidaktisch als auch fachlich fundiert die Kriterien, nach denen er die Beweise für die Gruppenarbeit ausgewählt hat:

> Planung:
>
> Der Schwerpunkt der Unterrichtsstunde liegt hier auf der Entwicklung von Beweis*verständnis* und der Fähigkeit zur Beweis*darstellung*, nicht aber auf dem Üben von Problemlösestrategien zur Beweis*findung*. Der Lernabschnitt „Satzgruppe des Pythagoras" scheint mir für derartige Beweisaktivitäten besonders geeignet zu sein, da eine Vielzahl von einfachen Beweisen zum Satz des Pythagoras für Schüler anschaulich aufbereitet werden kann. Ferner ermöglichen die unterschiedlichen Beweise aufgrund unterschiedlicher Schwierigkeitsgrade eine binnendifferenzierende Zuordnung der Schüler. […]
>
> Die wichtigsten der zahlreichen Beweise – allein vom Satz des Pythagoras sind heute etwa 400 bekannt – lassen sich nach der Art der herangezogenen Hilfsmittel in Beweistypen untergliedern:
>
> - Zerlegungsbeweise (Additionsbeweise) nutzen das Prinzip der Zerlegungsgleichheit aus;
> - Ergänzungsbeweise (Subtraktionsbeweise) stützen sich auf ergänzungsgleiche Figuren;
> - arithmetische Beweise basieren auf algebraischen Rechnungen anhand geometrischer Figuren;
> - abbildungsgeometrische Beweise nutzen Kongruenzabbildungen und Scherungen aus;
> - Ähnlichkeitsbeweise stützen sich auf ähnliche (rechtwinklige) Dreiecke.
>
> Bei der Auswahl geeigneter Beweise für den Unterricht spielen folgende Kriterien eine Rolle:
>
> 1. Mathematischer Gehalt: Der Beweis sollte verständnisfördernd für den Inhalt des Satzes sein. Sinnvoll sind auch Beweise, die bereits bekannte Lerninhalte neuerlich aufgreifen und damit das Wissen der Schüler vernetzen und strukturieren.
> 2. Relevanz der Beweisidee: Wichtige Beweisgedanken sollten verallgemeinerungsfähig und auf andere Sätze übertragbar sein; der Beweis sollte repräsentative Beweisideen beinhalten sowie typische Schlussweisen und spezifische heuristische Strategien anwenden.
> 3. Schwierigkeitsgrad: Gefordert ist ein „Minimum an verwendeten Voraussetzungen" sowie ein „Maximum an Einfachheit in der mathematischen Sache" (Tietze, Uwe-Peter, Klika, Manfred, Wolpers, Hans: Didaktik des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe II. Braunschweig/Wiesbaden, 1982, S. 76), d.h. alters- und lerngruppengerechte Argumentationsbasis und angemessene Komplexität.
> 4. Eignung des Beweises für Formen der Selbsttätigkeit: Der Beweis sollte einen handlungsorientierten, induktiven oder experimentellen Zugang ermöglichen.
>
> Auf Grund der geringen Beweiserfahrungen der Schüler scheinen mir die Zerlegungs- und Ergänzungsbeweise sowie – für leistungsstärkere Schüler – ein Beweis mithilfe der Ähnlichkeitsbeziehungen geeignet, weil hier die Beweisideen anschaulich zutage treten. Katheten- und Höhensatz können zu einem späteren Zeitpunkt durch Ähnlichkeitsargumente bewiesen werden.
>
> Die Arbeitsaufträge bestehen im Nachvollzug der Beweisidee, der Erarbeitung der Beweisschritte und ihrer schriftlichen Fixierung (Protokoll), der Ausformulierung des Beweises und der Darstellung mit eigenen Worten sowie seiner Bewertung (Beweisanalyse, Beweisvergleich).

Mehrfach zeigt sich in diesem Ausschnitt aus der schriftlichen Unterrichtsplanung, dass der Lehrer einerseits den Schwierigkeitsgrad der Beweise und auch den Leistungsstand der Schülerinnen und Schüler bei der Planung berücksichtigt und bei der Auswahl der Beweise aufeinander bezieht. Dabei berücksichtigt er auch die fachlichen Grundlagen der verschiedenen Beweise und setzt diese mit seinem fachdidaktischen Wissen in Beziehung. Großen Wert scheint er auf die Vernetzungen zum Vorwissen und den strukturierten Wissensaufbau zu legen (Punkt 1). Hier zeigt sich ein konstruktivistisches Lernverständnis dieses Lehrers. Darüber hinaus spricht er insbesondere die Selbsttätigkeit der Schülerinnen und Schüler und enaktive Repräsentationsformen an (Punkt 4).

Im Interview zeigt sich, ebenso wie im Punkt 4 in der Planung, dass der Lehrer den unterschiedlichen Schwierigkeitsgrad und Leistungsstand der Gruppen bei der Verteilung der Beweise miteinander in Beziehung setzt:.

I [00:01:03.02]

Lehrer: […] Gruppen waren teilweise so zusammengestellt, dass ich auch unterschiedliche Schwierigkeitsgrade bei der Beweisführung heranziehen konnte, es gab also einige Gruppen, die sind etwas leistungsstärker, andere schwächer, und das könnte man jetzt auch bei der Zuteilung der verschiedenen Aufgaben ausnutzen.

Darüber hinaus verknüpft der Lehrer auch ganz bewusst den Grad der Exaktheit und den Leistungsstand der Schülerinnen und Schüler miteinander:

I [00:01:03.02]

Lehrer: […] nun muss man sehen so eine 8. Klasse, und da schon die Beweisführung in dieser Art, das ist etwas, was sie sicherlich noch nicht so kennengelernt haben. Normalerweise war es immer in der 9. Klasse, aber ich denke, die Beweise, die ich hier gewählt habe, die haben, hatten in dieser Richtung auch ne gewisse Funktion gehabt. […] Sie genügen sicherlich in der einen oder anderen Weise nicht der innermathematischen Strenge, aber sie sind, intuitiv sind sie gut erschließbar.

I [00:19:04.00]

Lehrer: Also es stellt sich immer die Frage: Wann ist ein Beweis ein Beweis? Aber... ich denke in dem Moment, wo ein Schüler so das Gefühl hat, hier etwas verstanden zu haben, dann ist das für mich ein ganz wichtiger Punkt. […] So wo ich denn auch auf die mathematische Exaktheit ein bisschen verzichte. Die muss man sicherlich langfristig auch im Auge behalten, diese Exaktheit, weil... wir sind da schon bemüht, Jugendliche auch zu einem präzisen Denken und zum präzisen Argumentieren anzuleiten und auch zu... auch zu erziehen. Und in diese Richtung... daran zu arbeiten, das ist etwas, das...... das schwebt sozusagen über dem gesamten Mathematikunterricht.

Planung:

Beweise können nach ihrer Argumentationsbasis, ihrem Formalisierungsgrad sowie ihrer Exaktheit und Ausführlichkeit differenziert werden. Welche Ausprägung dieser Dimensionen für den Unterricht jeweils sinnvoll ist, ist eine wichtige didaktische Entscheidung des Lehrers. Vorrangig sollten sich Beweise im Unterricht dieser Jahrgangsstufe an der inhaltlichen Interpretation der Mathematik und nicht an ihrer formalen Struktur orientieren.

Die hier dargestellten Transskriptausschnitte verdeutlichen, dass der Lehrer im Unterricht bewusst auf detailliertere Begründungen verzichtet. Er verfügt einerseits über Wissen über die Bedeutung der Exaktheit in der Mathematik und sieht dieses als Fernziel des Mathematikunterrichts an. Er passt andererseits seine Anforderungen an den derzeitigen Leistungsstand der Lernenden an und kann dies auch ausführlich anhand fachdidaktischer und fachlicher Kriterien begründen.

In der Planung erläutert der Lehrer auch mögliche Probleme, die auftreten können:

Planung:

Bei der Bearbeitung der Aufgaben könnten folgende Probleme auftauchen, die eine angemessene Reaktion des Lehrers einfordern:

Bestimmte wichtige Fragestellungen werden nicht erkannt. Hier muss der Lehrer geeignete Impulse geben können.

Die Einsicht in die Beweisnotwendigkeit könnte sich als Schwierigkeit erweisen. An dieser Stelle würden Impulse von Seiten des Lehrers zur Beweisnotwendigkeit erforderlich sein (Schüler beweispflichtig machen).

Es gibt Schüler, die keinen Zugang zu den gestellten Aufgaben finden. Für solche Schüler wird die Zusammenarbeit mit dem Lehrer angeboten. Dabei muss sich die Arbeit auf die Aufgabenstellung konzentrieren. Der Lehrer wird versuchen, den Schülern viel Freiraum zu lassen und sie zum Nachdenken über den Beweis anzuregen. Alternativ könnte man verschiedene Karteikarten in der Klasse auslegen: Karten mit Hinweisen zur Lösung, Karten mit Angaben zur Überprüfung der Richtigkeit der Lösung und Karten mit vollständigem Lösungsweg. Von dieser Methode wird allerdings kein Gebrauch gemacht, da die Beweisideen bereits hinreichend vorstrukturiert sind und keine weitere Elementarisierung sinnvoll erscheint.

Hier zeigt sich, dass der Lehrer sich im Vorfeld ausführlich Gedanken über mögliche Probleme und Schwierigkeiten der Schülerinnen und Schüler machen kann. Er beschreibt jeweils mögliche Hilfestellungen, wobei vor allem im dritten Unterpunkt deutlich wird, dass der Lehrer trotz Hilfestellungen die kognitive Selbstständigkeit der Lernenden fördern möchte. Außerdem wägt er gegen Ende des Ausschnittes aus der Planung Handlungsalternativen ab.

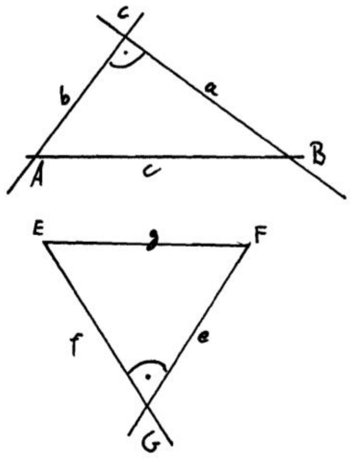
Im Anschluss an die Gruppenarbeit sollen die Schülergruppen ihre Beweise präsentieren, auch dies begründet der Lehrer in der Planung ausführlich:

> Planung:
>
> Nach Abschluss der Erarbeitungsphase sollen einzelne Beweisideen von den Schülern präsentiert werden. Dabei geht es nicht darum, alle Beweistypen vorzustellen (was auch aus zeitlichen Gründen nicht möglich wäre). Nicht behandelte Beweise werden in der nächsten Stunde präsentiert. Das Thema bietet gute Möglichkeiten mehrere – voneinander unabhängige – Zugänge nacheinander zu bearbeiten. Neben dem Vorteil, so verschiedenen Lerntypen gerecht werden zu können, besteht so auch die Möglichkeit, mehrere Beweise zu behandeln und diese miteinander zu vergleichen […].
>
> Ziel ist es, dass die Schüler im Gesprächsverlauf Fragen stellen, einander auf Fehler hinweisen und – da mehrere Schülerpaare den gleichen Beweis bearbeiten – sich gegenseitig ergänzen („mit Fehlern konstruktiv umgehen"). Zu wünschen wäre eine intensive und fruchtbare Diskussion, aus der sich der Lehrer weitgehend heraushalten könnte. Dadurch ließe sich durch die Beweispräsentation eine Interaktion zwischen den Schülern bewirken: Ideen, Zweifel, Fragen und „unfertige Gedanken" werden offener als in lehrerzentrierten Phasen geäußert, die meisten Schüler könnten sich kommunikationsbereiter und kritischer zeigen.

Im ersten Teil dieses Ausschnitts aus der Planung betont der Lehrer vor allem den Vergleich verschiedener Lösungswege und begründet dies mit lernpsychologischen Argumenten. Im zweiten Abschnitt werden vor allem die kognitive Selbstständigkeit der Lernenden und die gegenseitige Erläuterung der Lösungswege angesprochen. Der Lehrer spricht hier selbst das Ziel eines konstruktiven Umgangs mit Fehlern an, was einen wichtigen Aspekt der kognitiven Aktivierung darstellt (vgl. 5.3.3).

11.3 Darstellung des Unterrichts und Analysen von Aspekten des fachdidaktischen Wissens anhand der eingesetzten Aufgaben

11.3.1 Aufgabe 1 ‚Anwendung Pythagoras in rechtwinkligen Dreiecken'



Mündlich:

a) Wie lautet denn der Satz des Pythagoras für das erste Dreieck?
b) Und wie ist das mit dem zweiten Dreieck (zeigt auf unteres Dreieck)?
c) Geht das eigentlich auch, wenn ich hier kein rechtwinkliges Dreieck habe? Würde der Satz des Pythagoras auch dann gelten?

Abbildung 11.1: Aufgabe 1 ‚Anwendung Pythagoras in rechtwinkligen Dreiecken'

Diese Aufgabe hat sich der Lehrer selbst ausgedacht. Leider sagt er weder in der Planung noch im Interview etwas zur Auswahl dieser Aufgabe. Im Unterricht spricht er an, dass er die Aufgabe zur Wiederholung stellt:

U [00:00:05.10]

Lehrer: […] wir hatten uns den Satz des Pythagoras schon mal angesehen. Wir hatten einige Anwendungen dazu gemacht. Äh, vielleicht ganz kurz zur Wiederholung, ich hab uns zwei Dreiecke an die Tafel gezeichnet. Wie sähe denn, oder wie lautet denn der Satz des Pythagoras für das erste Dreieck?

Objektive Kennzeichen der Aufgabe 1 ‚Anwendung Pythagoras in rechtwinkligen Dreiecken'

Die Aufgabenteile a) und b) sind als technische Aufgaben mit Fokus auf Faktenwissen einzuordnen, da weder außer- noch innermathematische Modellierungen zum Lösen nötig sind. Die Schülerinnen und Schüler benötigen zur Lösung lediglich die Kenntnis des Satzes des Pythagoras, wozu auch Wissen über rechtwinklige Dreiecke und der Umgang mit Variablen gehören. Mathematisches Argumentieren ist ebenfalls nicht notwendig, es muss aber auf niedrigem Niveau mit mathematischen Darstellungen umgegangen werden, da Informationen aus den Skizzen entnommen werden müssen. Dabei müssen die Lernenden insbesondere bei Aufgabenteil b) ihr Wissen von der im Unterricht gebräuchlichen Darstellung in Figur a) auf die Figur b) übertragen. Diese ist einerseits nicht mit den häufig verwendeten Variablen *a, b, c* beschriftet und andererseits entgegen der üblichen Darstellung um 180° gedreht. Außerdem stellt dieses Dreieck kein rechtwinkliges Dreieck dar, es ist aber ein Winkel als rechter Winkel gekennzeichnet.

Der Aufgabenteil c) stellt dagegen eine begriffliche Modellierungs- und problembezogene Aufgabe dar, da hier auf hohem Niveau innermathematisch modelliert und argumentiert werden muss. Die Schülerinnen und Schüler müssen zunächst eine geeignete Strategie zur Lösung der Aufgabe entwerfen, wobei sie komplexe, verallgemeinernde Argumente entwickeln müssen. Sie können dabei auf unterschiedliche Weise vorgehen, zum Beispiel über ein

Gegenbeispiel oder anhand ‚allgemeiner' Extremfälle (z.B. zwei ganz lange Seiten und eine kurze) argumentieren. Je nach gewähltem Lösungsweg können sie verschiedene Darstellungen entwickeln und vergleichen. Dabei benötigen sie Kenntnisse aus der Wissenseinheit Satz des Pythagoras, allerdings müssen die Lernenden mit rechtwinkligen Dreiecken und Flächeninhalten von Quadraten auf eine begriffliche, reflektierende Weise umgehen und insbesondere Zusammenhänge bei Veränderungen des Dreiecks herstellen. Dazu wird auch Wissen über nichtrechtwinklige Dreiecke aktiviert.

Analyse des Unterrichtseinsatzes der Aufgabe 1 ‚Anwendung Pythagoras in rechtwinkligen Dreiecken'

Der Lehrer zeichnet zu Beginn der Stunde die Skizzen aus der Aufgabe 1 (siehe Abbildung 11.1) an die Tafel, die nebenstehenden Aufgaben stellt er nacheinander mündlich. Die Aufgaben werden gemeinsam im Plenum bearbeitet.

Die Lernenden zeigen keine Probleme bei der Benennung der richtigen Antworten für die Teilaufgaben a) und b). Während der Lehrer die Lösung des Aufgabenteils a) nicht kommentiert, fordert er bei Teilaufgabe b) den Schüler zur Begründung der Reihenfolge auf:

U [00:00:41.20]
Lehrer: Ja, ähm, warum hast du diese Reihenfolge gewählt?
Schüler S: ....weil das (???)
Lehrer: //Warum sagst du // nicht g Quadrat plus f Quadrat gleich e Quadrat?
Schüler J: Weil man ja den, die Basis ausrechnen soll.....Nee nee nee, man muss, das sind diese beiden Begriffe und das muss man plus das rechnen. […]
Schüler A: Äh, weil e und f am Winkel liegen. ....
Lehrer: Die haben auch einen besonderen Namen, die beiden Seiten.
Schüler B: Schenkel?
Lehrer: Joah. Andere Ausdrücke dafür?
Schüler C: Katheten? […]
Lehrer: Ja, was ist dann die gegenüberliegende Seite von dem rechten Winkel? ....Ja. (nickt in Richtung eine Schülers)
Schüler D: Basis.
Lehrer: Anderer Ausdruck. […]
Schüler F: Hypotenuse oder so.
Lehrer: Ja, genau.

Der Lehrer regt durch die Nachfragen zur Begründung der Antwort eine Reflexion des Satzes des Pythagoras an. Außerdem nutzt er hier die Formulierungsprobleme, um die bereits bekannten Fachbegriffe Katheten und Hypotenuse zu wiederholen. Dadurch werden die Lernenden auch zur Verwendung von Fachsprache angeregt, wobei der Lehrer das Gespräch leitet, ohne zu lenken, denn die Wiederholung der Begriffe gelingt den Schülerinnen und Schüler selbstständig. Hier werden auch Verknüpfungen zum Vorwissen der Lernenden deutlich.

Im Anschluss an die Begriffsklärung stellt der Lehrer die Teilaufgabe c) und lässt zunächst die Schülerinnen und Schüler Vermutungen äußern:

U [00:02:29.13]
Schüler G: Ich glaub, dass das schon geht. […] Weil das ist ja eigentlich egal?
Lehrer: Weil? (L. nimmt anderen Schüler dran)
Schüler I: […] Das geht nicht, also der Satz des Pythagoras ist immer nur in den rechtwinkligen Dreiecken anwendbar. (L. nimmt Schüler dran)

Schüler J: […] Weil wenn halt kein rechter, zum Beispiel halt beim unteren, wenn kein rechter Winkel bei g wäre, dann könnten f und e die beiden Seiten ja unendlich lang sein, zum Beispiel 10 m und wenn g wieder genauso lang wäre, wär's wieder ein rechtschenkliges Dreieck.

Lehrer: Ich mal jetzt etwas übertrieben, was J. meinte. Also jetzt ein Dreieck, das ist an den beiden Seiten 10 m lang. Und diese eine Unterseite nur ein Meter (siehe Abbildung 11.2). Wie wär der Satz des Pythagoras?

Schüler K: Nein, weil, da ist ja gar nicht a Quadrat plus b Quadrat gleich c Quadrat.

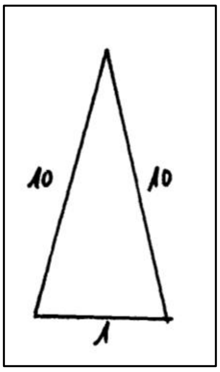


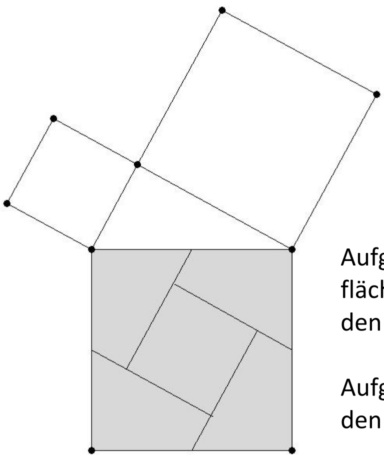
Abbildung 11.2: Verdeutlichung der Teilaufgabe 1c) an der Tafel

Der Lehrer fragt nach Begründungen, er gibt aber keinerlei Hinweise, sondern lässt die Lernenden völlig selbstständig arbeiten. Er verdeutlicht die Erklärung des Schülers mit einer Skizze an der Tafel (siehe Abbildung 11.2) und wechselt somit die Repräsentationsform. Er geht dabei nicht auf die Verwendung des falschen Begriffes (rechtschenklig) ein. Hier wird in Ansätzen die Idee des Gegenbeispiels aufgegriffen, dies hätte aber noch durch ein Zahlenbeispiel verdeutlicht werden können. Außerdem wird die Allgemeingültigkeit anhand der Darstellung des Beispiels nicht deutlich hervorgehoben.

Die Bearbeitung der gesamten Aufgabe ist als verständnisbetont einzuordnen, denn obwohl zur Lösung der ersten beiden Aufgabenteile a) und b) lediglich Faktenwissen benötigt wird, fordert der Lehrer Begründungen ein und fördert das Verständnis der Schülerinnen und Schüler, indem er begriffliches Denken anregt. Die Auswahl der Teilaufgabe b) ist gut geeignet, um den Lernenden flexibles Anwenden von Faktenwissen zu ermöglichen.

11.3.2 Beweise 1, 2 und 4 ‚Zerlegung der Quadrate'

Diese drei Beweise wurden vom Lehrer nach den in Abschnitt 11.2 erläuterten Gesichtspunkten ausgewählt. Da sich die Beweise stark ähneln, werden sie im Folgenden gemeinsam analysiert. Der Lehrer für diese Beweise keine Quelle angegeben. Vermutlich stammen die Beweise aus dem Internet, da sich beim 4. Beweis noch der Hinweis auf Verschiebung mithilfe des Cursors befindet.



Aufgabe 1: Zeige, dass sich mit den kleinen Teilflächen über der Hypotenuse die Quadrate über den Katheten ausfüllen lassen.

Aufgabe 2: Erkläre, warum dies ein Beweis für den Satz des Pythagoras ist.

Abbildung 11.3: Beweis 1 ‚Zerlegung des Hypotenusenquadrates'

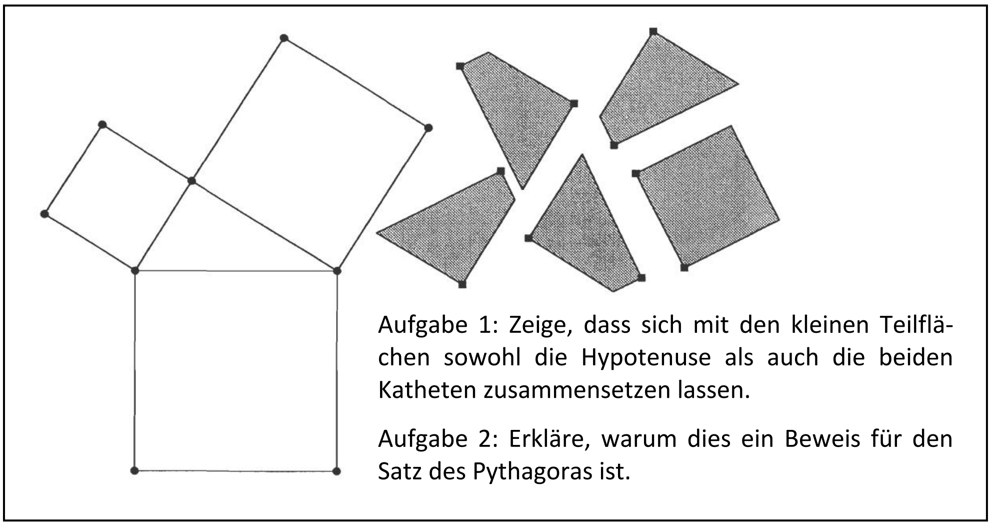


Abbildung 11.4: Beweis 2 ‚beide Richtungen der Zerlegung'

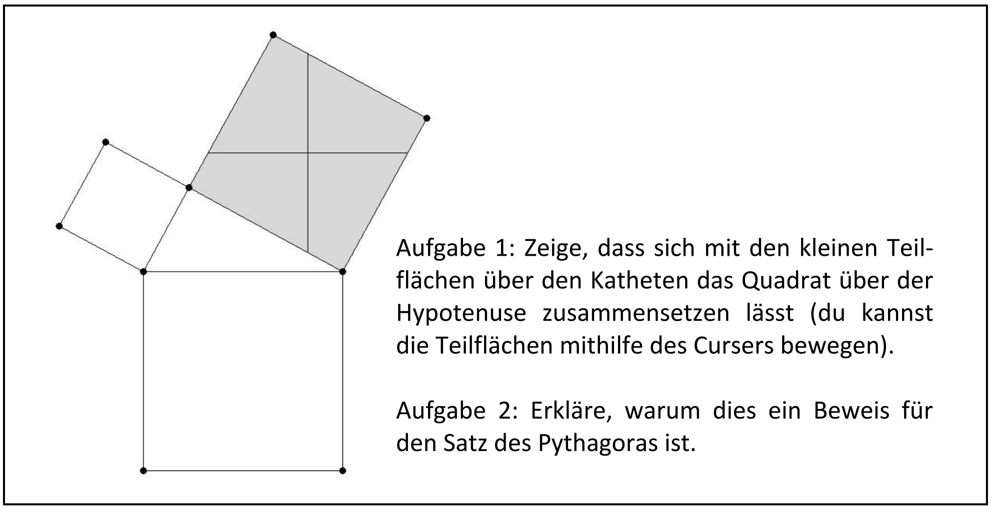


Abbildung 11.5: Beweis 4 ‚Zerlegung der Kathetenquadrate'

Objektive Kennzeichen der Beweise 1, 2 und 4 ‚Zerlegung der Quadrate'

Diese Beweise sind als begriffliche Modellierungs- und problembezogene Aufgaben einzustufen. Hinter diesen Beweisideen steckt folgender mathematischer Beweis, der hier kurz skizziert wird (siehe Abbildung 11.6): Das Quadrat über der größeren Kathete wird in vier kongruente Vierecke unterteilt, wobei die Strecke $x = ½ (a\text{-}b)$ entspricht. Die unterteilenden Strecken haben jeweils die Länge c und halbieren sich im rechten Winkel, was sich über die Betrachtung der Winkel und die Parallelität der einen Teilstrecke zur Seite c begründen lässt. Diese vier kongruenten Vierecke können über Verschiebungen und Drehungen (also Kongruenzabbildungen) in das Quadrat über der Hypotenuse abgebildet werden. Dabei liegen die rechten Winkel der Vierecke, die im Kathetenquadrat innen aneinander lagen, im Hypotenusenquadrat außen in den Ecken des Quadrates. In der Mitte zwischen den Vierecken entsteht ein Quadrat mit der Seitenlänge b, wie sich ebenfalls über Winkel- und Längenbetrachtungen begründen lässt. In ähnlicher Weise kann auch die Rückrichtung der Abbildungen nachvollzogen werden.
In den Aufgabenstellungen des Lehrers wird keine Angaben dazu gemacht, wie die Zerlegung des Katheten- bzw. des Hypotenusenquadrates zustande kommt. So wird das Potenzial dieses Beweises deutlich reduziert. Aus mathematischer Sicht ist mit den gegebenen Angaben kein Beweis möglich, sondern lediglich eine Visualisierung der Beweisidee über Kongru-

enzabbildungen. Aufgrund der fehlenden Angaben zu den Längenverhältnissen der Zerlegungen kann nicht begründet werden, warum die einzelnen, vorgegebenen Vierecke jeweils die Quadrate ergeben. Die Schülerinnen und Schüler können sich lediglich durch Auseinanderschneiden und ‚Puzzeln' die Gleichheit der Flächen überzeugen. Die erfordert das Erkennen der Beweisidee und somit mathematisches Argumentieren auf hohem Niveau. Auch mathematische Darstellungen werden auf hohem Niveau verwendet, da die Abbildungen verändert und verglichen werden. Das innermathematische Modellierungsniveau ist niedrig, da die Vierecke vorgegeben sind. Die Schülerinnen und Schüler wenden hier einerseits Wissen zum Satz des Pythagoras im engeren Sinne an, sie müssen aber ebenfalls Wissen über Verschiebungen als Kongruenzabbildung und Eigenschaften von Vierecken berücksichtigen.

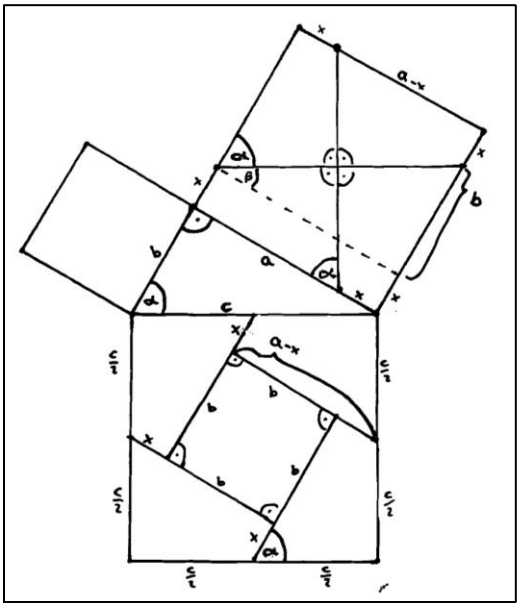


Abbildung 11.6: Den Beweisen 1, 2 und 4 zugrundeliegender mathematischer Beweis

Die Lösungsmethode ist jeweils schon in der Aufgabenstellung vorgegeben, die Aufgaben unterscheiden sich jedoch in der Richtung der Argumentation: Während im Beweis 1 das Hypotenusenquadrat auf die beiden Kathetenquadrate aufgeteilt wird, ist im Beweis 4 die entgegengesetzte Argumentationsrichtung, Zusammensetzen des Hypotenusenquadrates aus den Kathetenquadraten, gefordert. Im Beweis 2 werden dagegen beide Richtungen der Auseinandersetzung herangezogen, allerdings ist hier die Formulierung der Aufgabe fehlerhaft, da sich nicht die Hypotenuse und die Katheten, sondern jeweils die Quadrate über den Dreiecksseiten aus den Teilflächen zusammensetzen lassen.

Analyse des Unterrichtseinsatzes der Beweise 1, 2 und 4 ‚Zerlegung der Quadrate'

Die drei ‚Beweise' werden im Rahmen einer Gruppenarbeit von drei unterschiedlichen, von den Lernenden selbst gewählten, Schülergruppen nachvollzogen und anschließend der ganzen Klasse vorgestellt. Die Schülerinnen und Schüler der drei Gruppen haben jeweils die kongruenten Vierecke und die Quadrate aus dem Arbeitsblatt ausgeschnitten. Alle drei Gruppen konnten nun ohne erkennbare Probleme die jeweiligen Quadrate aus den ‚Papierschnipseln' zusammenlegen. Ihnen steht für die Lösung der Aufgabe entgegen der Anweisung beim ‚Beweis' 4 keine dynamische Geometriesoftware zur Verfügung.

Gruppe 1 (Beweis 1)

Die Schülerinnen und Schüler der Gruppe 1 (Beweis 1) haben Schwierigkeiten zu erkennen, warum dies ein ‚Beweis' für den Satz des Pythagoras ist:

U [00:15:19.20]

Schüler G: Ich weiß nicht, wie wir das beweisen sollen. Wo der Beweis dann ist.

Schüler F: Ich versteh das irgendwie nicht, wie man da nen Beweis draus machen soll.

Lehrer: […] Also überlegt mal, ihr habt diese Figur, (???) Quadrat, diese kleinen (zeigt auf die unregelmäßigen Vierecke), ihr habt hier, die kommen hier unten (großes Quadrat mit eingezeichneten Linien auf einem Arbeitsblatt) raus ne. So, wenn ich jetzt all diese Teile nehme und ich verteile die auf diese beiden hier (zeigt auf die beiden vorgezeichneten Kathetenquadrate)...das habt ihr ja geschafft, ne (zeigt auf die zusammengesetzte Figur der Schüler). […] Was heißt das jetzt? […]

Schüler F: Dass die beiden (zeigt auf Kathetenquadrate) genauso groß sind wie das hier (zeigt auf das Hypotenusenquadrat).

Lehrer: […] Du hast das intuitiv richtig verstanden, aber was, du musst es anders beschreiben. […] Was, was stimmt überein?

Schüler E: Die Größe, die, die Fläche.

Lehrer: Ja, schön, die Fläche. Und warum ist das jetzt ein Beweis des Pythagoras? […]

Schüler E: Weil, das (zeigt auf das Hypotenusenquadrat) ist ja ein Quadrat, und das ist ja von den Seiten genauso lang wie die Hypotenuse und die Katheten sind genauso lang wie einzelne Teile von den, also genauso groß, der Flächeninhalt, wie die Teile von den (zeigt auf das Hypotenusenquadrat) äh, von der Hypotenuse...Ist das richtig.

Der Lehrer lässt die Schülerinnen und Schüler möglichst selbstständig denken, er selbst fasst nur das bisherige Vorgehen der Schüler zusammen und gibt einen kleinen Impuls, der die Überlegungen der Lernenden auf die Betrachtung der Flächeninhalte fokussiert. Dies entspricht seinen Erläuterungen in der Planung, dass er den Lernenden möglichst viel Freiraum zum eigenen Denken geben möchte und nur kleine Impulse setzen möchte (siehe 11.2).

Zwei Schüler der Gruppe 1 stellen ihren Beweis vor, wobei sie die Skizze auf dem Arbeitsblatt an die Tafel zeichnen:

U [00:35:00.19]

Schüler G: […] Also das ist so aufgeteilt, das Quadrat. Diese Teile kann man nehmen und in diese Felder hier (S. zeigt auf Quadrate über den Katheten) grob einsetzen. Zum Beispiel das da (S. zeigt auf eingezeichnetes Quadrat in dem Quadrat unter der Hypotenuse) kommt da (S. zeigt auf kleines Quadrat über Kathete) rein und die vier (S. deutet auf vier Dreiecke in Quadrat unter der Hypotenuse) werden aufgeteilt und denn in das da. Das heißt also, dass die Teile der, ähm, Katheten, also die hier, die haben zusammen den gleichen Flächeninhalt wie die Hypotenuse.

(Klasse klatscht.)

Lehrer: Könnt ihr das auch zeigen?

Die Erklärung gelingt den Schülern völlig selbstständig, der Lehrer fordert sie aber zusätzlich zur Visualisierung des Gesagten auf. Die Lernenden können die Zusammensetzung der Kathetenquadrate anhand der ausgeschnittenen Vierecke am Overhead-Projektor vorführen. Sie haben zwar einige Schwierigkeiten, erhalten aber Unterstützung aus der Klasse. Der Lehrer gibt keine Hilfestellung, so dass die Lernenden kognitiv selbstständig arbeiten. Das Zusammensetzen der Vierecke zu den Quadraten erfordert aufgrund der fehlenden Argumentationen vor allem prozedurales Denken, durch den Vergleich der Flächen wird aber auch begriffliches Denken aktiviert.

<u>Gruppe 2 (Beweis 2)</u>

Die Gruppe 2 benötigt keine Hilfe bei der Erarbeitung. Bei der Vorstellung des ‚Beweises' kann der Schüler Q. zunächst den ‚Beweis' nicht deutlich formulieren:

U [00:40:04.01]

Schüler Q: Ja, also diese Katheten hoch 2, ähm, ergeben halt die Hypotenuse hoch zwei und daran kann man halt feststellen, dass, weil es ja ein rechtwinkliges, ähm, also ein Quadrat ist, sind ja alle Seiten gleich lang und dann müssen halt, muss halt die Fläche von den beiden Katheten, äh, die gleiche sein wie die der Hypotenuse.

Schüler Y: Könnt ihr das nochmal zeigen? […]

Schüler R: Ja wir hatten genau, bei uns kommt genau das gleiche, ist das genau das gleiche wie bei den anderen. […]

Lehrer: Die Reihenfolge ist aber eine andere. Könnt ihr das nochmal zeigen? […]

Schüler R: Ja. Auch gut, dann mach ich das große. […]

Schüler Q: So und das (S. zeigt auf ein aus vier Vierecken zusammengesetztes Kathetenquadrat) sind halt genau die Teile, die um dieses, ähm, kleine Viereck drum sind und dadurch ist dieses beides, die, die Quadrate, die an den Katheten anliegen, genau so groß wie das Quadrat, das an der Hypotenuse anliegt.

Hier fällt insbesondere auf, dass die Schülerinnen und Schüler sich gegenseitig zum Erklären und Visualisieren der ‚Beweise' auffordern und somit kognitiv selbstständig sind. Die Lernenden erkennen, dass sich die ‚Beweise' stark ähneln. Der Lehrer weist zwar auf die unterschiedlichen Richtungen der Auseinandersetzung innerhalb der ‚Beweise' hin, im Unterricht werden diese Unterschiede aber nicht deutlich. Dies reflektiert der Lehrer im Interview:

I [00:13:40.12]

Lehrer: […] die Kathetenquadrate wurden einfach nur geschickt zerlegt, so dass ich, die zusammengelegt das Hypotenusenquadrat ergaben und einmal war das Hypotenusenquadrat gegeben und es konnte durch geeignete Zerlegung in die Kathetenquadrate zerlegt werden. Das waren diese beiden Richtungen, die ich da drin hatte. […] Äh, sie erkannten zumindest auch, dass eine gewisse Ähnlichkeit da war. Äh, das heißt also: Das hatten wir doch schon mal gemacht, nicht. Das heißt, in dem Moment, ähm hätte, sie hatten nicht unbedingt erkannt, dass sich die Kathetenquadrate dann einfach zerlegen lassen als Hypotenusenquadrat und dass das andere genau der entgegen gesetzte Schritt war. […] Das hätte man vielleicht etwas stärker herausstellen müssen.

Hier zeigt sich, dass der Lehrer die Ähnlichkeit der ‚Beweise', aber auch die Unterschiede in der gedanklichen Richtung durchaus erkennt. Da die Analysen des Unterrichts keinen Hinweis auf die Unterscheidung der beiden Argumentationsrichtungen zeigen, kann der Lehrer das Denken der Schülerinnen und Schüler hier gut im Nachhinein einschätzen und das Problem der nicht erkannten Richtung der gedanklichen Auseinandersetzung kritisch reflektieren. Dies zeigt sich auch daran, dass der Lehrer fehlende Argumentationsschritte erkennt, die er offenbar bewusst ausgelassen hat (vgl. 11.2):

I [00:14:55.03]

Lehrer: Wobei jetzt sie sicherlich auch so das Gefühl haben, dass da, äh... ein Beweis vollzogen worden ist. Die Frage ist natürlich auch, hinsichtlich zum Beispiel der Zerlegung, ist das jetzt allgemeingültig, nicht. Gibt es auch andere Formenzerlegungen oder geht das immer, ne. Diese Frage ist da einfach noch nicht geklärt worden. Aber für mich war wichtig zu erkennen: Die Kathetenquadrate ergeben zusammen das Hypotenusenquadrat. Und äh, das zu verstehen, das zu sehen reichte mir in dem Moment.

Der Lehrer erkennt hier, dass die Allgemeingültigkeit des Beweises (vgl. objektive Kennzeichen dieser Aufgabe) anhand der Darstellungen der Schülerinnen und Schüler nicht deutlich wurde. Allerdings reflektiert er in keiner Weise, dass anhand der fehlenden Angaben zur Zerlegung kein allgemeingültiger Beweis möglich wäre. Dies weist darauf hin, dass der Lehrer die inhaltlichen Anforderungen und das Potenzial dieser Aufgabe nicht umfassend erkennt.

<u>Gruppe 4 (Beweis 4)</u>

Die Gruppe 4 hat schon in der Gruppenarbeitsphase eine zufriedenstellende Erklärung des ‚Beweises' abgeben können, wie sich in folgendem Transkriptausschnitt zeigt:

U [00:22:15.04]

Lehrer: Ja dann erklärt mir das mal.

Schüler P: Also... das zum Quadrat und das zum Quadrat ergibt ja... Also wenn man die beiden Katheten sozusagen quadriert, dann ergeben die das Quadrat der Hypotenuse... Und ähm... Das Quadrat soll sozusagen... ähm, vereinfachen ähm... vereinfacht darstellen, wie das Quadrat aussieht. Also wenn man das Quadrat plus das Quadrat (S. zeigt auf die Quadrate über den Katheten) rechnet, ergibt man, äh, kommt man auf das Quadrat der Hypotenuse.

Lehrer: Ja.

Hier zeigt sich insbesondere, dass der Lehrer die Schülerinnen und Schüler auch in der Gruppenarbeitsphase zur Erläuterung ihrer Lösungswege auffordert. Die Erarbeitung des ‚Beweises' gelang dieser Lerngruppe völlig selbstständig, wobei diese Gruppe vor allem begriffliche Argumente verwendet.
Bei der Präsentation verweisen die Schüler zunächst auf die Gruppen 1 und 2 und wiederholen die Erklärungen:

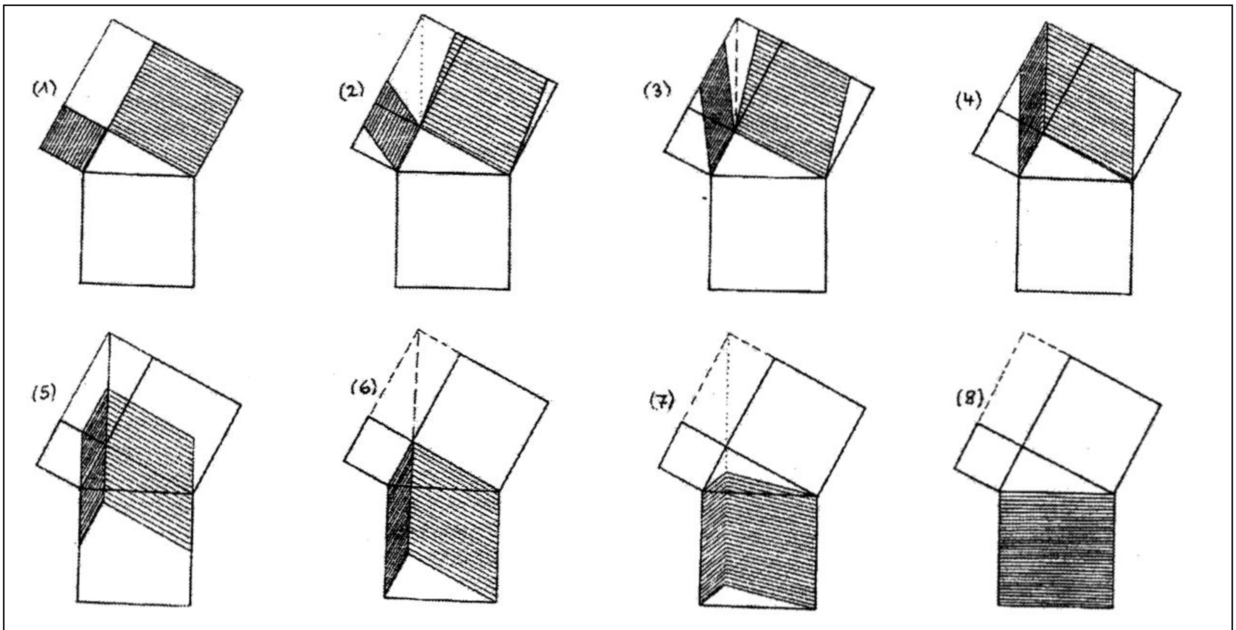
U [00:49:44.20]
Schüler N: Wir haben eigentlich genau das gleiche wie die Gruppe von, also die zweite Gruppe […]
Lehrer: Könnt ihr das mal machen?

Auffällig ist hier die wiederholende Darstellung von Ergebnissen, die auch unterschiedliche Repräsentationsformen (hier vor allem bildlich und enaktiv) mit einbezieht. Allerdings geht der Lehrer auch an dieser Stelle nicht auf die Unterschiede in den einzelnen ‚Beweisen' ein.

Zusammenfassung

Insgesamt kann die Bearbeitung der ‚Beweise' als verständnisbetont eingeschätzt werden, da die Schülerinnen und Schüler Probierverfahren anwenden, die mathematisches Verständnis erfordern. Auch wenn beim Zusammensetzen der Flächen durch die fehlenden Argumentationen vor allem prozedurales Denken im Fokus steht, wird durch den Vergleich der Flächen und die Herstellung des Zusammenhangs mit dem Satz des Pythagoras auch begriffliches Denken erforderlich. Dies wird an den Aufforderungen des Lehrers zur Erklärung und Begründung der Lösungswege deutlich. Das Potenzial der ‚Beweise' wird zwar nicht umfassend genutzt, da die Argumentationsschritte nicht vollständig sind und auch gar nicht vollständig möglich wären. Dies scheint der Lehrer jedoch an dieser Stelle bewusst so gewählt zu haben, um den Schwierigkeitsgrad der ‚Beweise' an die Klassenstufe anzupassen. Sein vorrangiges Ziel der Vermittlung der Beweisideen scheint er erreicht zu haben, da die Schülerinnen und Schüler selbstständig die Beweisideen präsentieren können.

11.3.3 Beweis 3 ‚Scherung der Kathetenquadrate'



Arbeitsauftrag:
Verfolge die Änderung der Kathetenquadrate. Welche Abbildungen werden verwendet?
Warum ist dies ein Beweis für den Satz des Pythagoras?

Abbildung 11.7: Beweis 3 ‚Scherung der Kathetenquadrate' (nach Fraedrich, 1995)

Dieser Beweis wurde vom Lehrer nach in Abschnitt 11.2 erläuterten Gesichtspunkten aus einem mathematikdidaktischen Fachbuch zum Satz des Pythagoras (Fraedrich, 1995) ausgewählt. Er schätzt diesen Beweis im Gegensatz zu den anderen Beweisen als etwas schwieriger ein:

> I [00:08:01.01]
> Lehrer: Denn, äh... schwieriger war dieser Beweis hier.

Der Lehrer begründet aber nicht, warum dieser Beweis schwieriger ist.

Objektive Kennzeichen des Beweises 3 ‚Scherung der Kathetenquadrate'

Dieser Beweis stellt eine begriffliche Modellierungs- und problembezogene Aufgabe dar. Obwohl die einzelnen Schritte bereits vorgegeben sind, müssen die Schülerinnen und Schüler hier innermathematische Modellierungen vornehmen, da der Lösungsansatz nicht unmittelbar aus dem Wissensrepertoire abrufbar ist. Unter Berücksichtigung von Wissen über den Flächeninhalt von Vierecken müssen die Lernenden durch den Vergleich der verschiedenen Figuren (Verwendung von Darstellungen auf hohem Niveau) zunächst die Scherung der Kathetenquadrate nachvollziehen und erarbeiten, dass sich der Flächeninhalt der gescherten Figuren nicht verändert. Dies können sie zum Beispiel über die Formeln für den Flächeninhalt begründen, indem sie auf die gleiche Höhe und dieselbe Grundseite hinweisen, dabei wird vor allem prozedurales Denken fokussiert. Es sind aber auch begriffliche Argumente möglich, wie sie bei der Herleitung der Formel für den Flächeninhalt eines Parallelogramms verwendet werden. Außerdem kann begründet werden, warum sich die beiden gescherten Parallelogramme oben in einem Eckpunkt treffen (siehe Figur 4). Hierbei sollten die Schülerinnen und Schüler begründen, warum die eine Seitenlänge des Parallelogramms gerade der Seitenlänge des Hypotenusenquadrates entspricht (z.B. kann anhand der Winkel- und Längenbetrachtungen argumentiert werden, dass durch die Diagonale im Rechteck zwischen den Katheten genau das Ursprungsdreieck entsteht). Anschließend werden die aus den Kathetenquadraten entstandenen Parallelogramme nach unten verschoben, wobei sich der Flächeninhalt ebenfalls nicht ändert. Danach werden die Parallelogramme wieder geschert, so dass sie gemeinsam den Flächeninhalt des Hypotenusenquadrates ergeben. Alternativ könnte auch das mittlere Dreieck (weißes Dreieck in Figur 6, siehe Abbildung 11.7) nach unten verschoben werden. Dann müsste aber wieder über Winkel- und Längenvergleiche begründet werden, dass das weiße Dreieck in Figur 6 gerade dem Ausgangsdreieck entspricht. Da den Lernenden die Scherung als flächeninvariante Abbildung noch nicht bekannt ist, handelt es sich um innermathematische Modellierungen auf mittlerem Niveau.

Bei der Begründung des Beweises des Satzes des Pythagoras müssen die Lernenden komplexe mathematische Argumente entwickeln, um ihr Vorgehen zu reflektieren, z.B. die Flächeninvarianz der Abbildungen. Dabei sollten die Lernenden auch über die Umkehrbarkeit der verwendeten Abbildungen nachdenken. Insbesondere könnte auch die Notwendigkeit des rechten Winkels im Dreieck für die Durchführung dieses Beweises berücksichtigt werden.

Analyse der Unterrichtseinsatzes des Beweises 3 ‚Scherung der Kathetenquadrate'

Dieser Beweis wird innerhalb der Gruppenarbeit von einer Gruppe mit vier Schülern bearbeitet, wobei sich allerdings nur zwei Schüler intensiv mit dem Nachvollziehen und der Vorstellung des Beweises im Plenum beschäftigen. Der Lehrer scheint den Schwierigkeitsgrad des Beweises gut eingeschätzt zu haben, denn diese Schülergruppe benötigt wesentlich mehr Hilfestellung als die anderen Gruppen, obwohl es sich um eher leistungsstärkere Schüler zu handeln scheint, die sich im weiteren Unterricht verstärkt einbringen.

Bearbeitung des Beweises 3 innerhalb der Gruppenarbeit

Bei der Bearbeitung dieser Gruppe innerhalb der Gruppenarbeit greift der Lehrer viel stärker lenkend ein. Die Schüler wissen zunächst nicht, wie sie an den Beweis herangehen sollen:

U [00:07:19.07]

Lehrer: […] Also ganz genau anschauen, was passiert hier, der Satz des Pythagoras (? ....) (zeigt dabei entlang der einzelnen Schritte) So dass ihr von hier (1. Bild) dahin kommt. […] Was passiert zwischen den (???)? […] das ist ja ein Parallelogramm hier (Bild 2). Ändern sich da denn jetzt die Flächeninhalte? Wenn ich aus diesem Quadrat hier (kleines Quadrat Bild 1) ein Parallelogramm mache (kleines Parallelogramm in Bild 2) verändert sich der Flächeninhalt?

Schüler M: Nein.

Lehrer: Warum nicht?

Schüler M: Weil man, die gleiche Fläche sozusagen, die sind ja nur verschoben.

Lehrer: Wie berechnet man die Fläche denn da?

Schüler M: Wenn wir mal jetzt

Schüler J: // a mal b//

Schüler M: Das Teil da wegnehmen (kleines Parallelogramm, 2. Bild) und da hinsetzen

Lehrer: //schön//

Schüler M: Und dann wär's ja das Gleiche.

Dieser Transkriptausschnitt zeigt beispielhaft, wie der Lehrer die Schülerinnen und Schüler von Figur zu Figur leitet und dabei auf die entscheidenden Punkte (hier der Flächeninhalt des Rechtecks und des Parallelogramms) hinweist. Dabei lenkt er leicht, da er zwar die Richtung der Gedankengänge vorgibt, die einzelnen Argumentationsschritte gelingen den Schülern aber selbstständig. In ähnlicher Weise wird dieses Vorgehen an vielen weiteren Stellen bei dieser Gruppe deutlich. Der Lehrer fragt gezielt nach Begründungen. Es fällt auf, dass er in diesem Transkriptausschnitt nach der Berechnung der Flächeninhalte fragt und somit prozedurales Denken aktiviert. Der Schüler M. argumentiert stattdessen begrifflich über die Zerlegung der Parallelogrammfläche wie bei der Herleitung der Formel für den Flächeninhalt eines Parallelogramms. Dies könnte auf eine ‚begriffliche Argumentationskultur' im Unterricht hindeuten. Allerdings geht der Lehrer hier nicht darauf ein, dass der Schüler M. von einer Verschiebung spricht, obwohl hier eine Scherung vorliegt.

Den Begriff der Scherung kennen die Lernenden noch nicht. Sie beschreiben aber im Prinzip, was bei einer Scherung passiert, allerdings ohne die Fachsprache zu verwenden. Dies erkennt auch der Lehrer, wie aus seinen Interviewaussagen deutlich wird:

I [00:08:01.01]

Lehrer: […] Das Problem war einfach, die wussten gar nicht, was passiert da eigentlich? Die mussten also die einzelnen Schritte jetzt nachvollziehen und äh, hier musst, sieht man zum Beispiel auch die Scherung der beiden Kathetenquadrate. Wobei der Begriff der Scherung nicht klar war […] aber er hat umgangssprachlich intuitiv schon erkannt, was da passierte. Er hat aber diesen fachsprachlichen Begriff der Scherung einfach nicht verwendet, weil er ihn offensichtlich zu dem Zeitpunkt noch gar nicht kannte. […] Aber es wäre eine Möglichkeit gewesen, das einfach auch zu thematisieren oder anzusprechen. Ich habe darauf verzichtet. Ich hab mir gedacht, die sollen einfach, den, der Schwerpunkt liegt hier einfach in der Versprachlichung dieses Sachverhaltes und mit den Begrifflichkeiten, den sie, die sie bisher kennen gelernt haben. Und wenn ich jetzt den Begriff der Scherung in der Gruppe angesprochen hätte, hätte man das vielleicht nochmal in der Gruppe klären müssen und auch nachher im gesamten Plenum und das war mir dann etwas zu abwegig. Hätte man zu einem anderen Zeitpunkt machen können, wäre sinnvoller gewesen.

Der Lehrer kann hier zu Beginn dieses Ausschnittes die Probleme der Lernenden gezielt benennen. Seine Erläuterungen zum Scherungsbegriff zeigen, dass er bewusst Handlungsalter-

nativen abwägen und reflektieren kann. Er verzichtet bewusst auf die Einführung des Scherungsbegriffes, da dies vom eigentlichen Unterrichtsziel ablenken würde.
Die Verschiebung der Parallelogramme in Figur 4 - 6 (siehe Abbildung 11.7) wird nicht näher erläutert, insbesondere wird nicht thematisiert, dass die eine Seite des Parallelogramms jeweils der Länge der Hypotenuse entspricht. Stattdessen beschäftigen die Schüler sich ausführlicher mit der zweiten Scherung (Figur 6 - 8):

U [00:20:21.24]

Schüler J: Die werden ineinander gedrückt. […]

Lehrer: Wobei das ineinander gedrückt klingt noch nicht ganz so gut. Äh, nehmt das Thema, das Stichwort Parallelogramm nochmal auf. Hier (L. zeigt auf helles Parallelogramm in Figur 6) habt ihr ein Parallelogramm. Was passiert jetzt mit diesem Parallelogramm? Wenn ihr das hier (L. zeigt auf Figur 7) betrachtet und das hier (L. zeigt auf Figur 8)?

Schüler M: Das wird zu einem Viereck.

Lehrer: Genau.

Schüler M: //zu einem Quadrat//.

Lehrer: Und was ich hier oben (L. zeigt auf Figur 1) gemacht habe, aus einem Quadrat habe ich ein Parallelogramm konstruiert und hier (L. zeigt auf Figur 6) kommt jetzt der umgekehrte Weg. Aus einem Parallelogramm (???) jetzt wieder ein Quadrat.

Der Lehrer regt die Schülerinnen und Schüler zur detaillierten Erläuterung des Lösungsweges und zur weiteren Reflexion der Veränderungen zwischen den Abbildungen an. Hierdurch wird vor allem begriffliches Denken aktiviert. Insbesondere stellt er durch den Hinweis auf die Umkehrung der Abbildung aus den Figuren 1-4 Verbindungen zu bereits bekannten Schritten im Lösungsprozess her. Er lenkt dabei leicht.
Anschließend thematisiert der Lehrer noch den Zusammenhang mit dem Satz des Pythagoras:

U [00:21:24.15]

Lehrer: Wie lautet der Satz des Pythagoras nochmal?

Schüler J: $a^2 + b^2 = c^2$

Lehrer: Was ist hier (zeigt auf Figur 1) a^2, was ist b^2 und was ist c^2?

Schüler J: Das (zeigt auf kleines Quadrat über Kathete des Dreiecks) ist a^2, das (zeigt auf großes Quadrat über Kathete des Dreiecks) ist b^2 und das (zeigt auf Quadrat unter Hypotenuse des Dreiecks) ist c^2... Achso, das ist der Beweis, dass $a^2 + b^2 = c^2$. Achso

Schüler M: Weil, ja stimmt

Schüler J: //Ja//, weil das schiebt sich ja nach unten... Das ist jetzt eine graphische Veranschaulichung.

An der letzten Aussage des Schülers J. wird deutlich, dass der Schüler die Idee des Beweises und auch den Zusammenhang zum Satz des Pythagoras verstanden hat.

<u>Präsentation des Beweises 3</u>

In der Präsentation des Beweises erläutern die beiden Schüler gemeinsam und selbstständig die einzelnen Schritte:

U [00:45:58.04]

Schüler J: Also, man sieht hier erst einmal, dass aus, wie hast du das genannt, Ok, a^2 wird zu Bild 2 erst einmal ein Parallelogramm aus den beiden. So bleibt der Flächeninhalt gleich und dann, jetzt denkt man natürlich hier, es wäre größer, aber es wird halt nur dünner und größer. […] So, dann sieht man sozusagen hier, dass sie (zeigt auf Figur 3 und 4) sich verbunden haben und dann werden die halt so langsam nach unten geschoben […]

Schüler M: Und das hab ich dann... hier auch, da (zeigt auf Figur 5) und hier (zeigt auf Figur 6) und dann kann man hier auch gut sehen, dass zum Beispiel dieses Dreieck hier ist identisch mit dem hier oben (zeigt auf Dreiecke in Figur 5). […]

Schüler M: Äh, und dann ist jetzt hier unten... hier (S. zeigt auf Figur 7) ist es dann sozusagen an der Endposition und dann wird es sozusagen gedrückt, zusammen gedrückt und dann ergibt es eben diese eine Fläche (zeigt auf Quadrat unter Hypotenuse in Figur 8) und daran kann man dann sehen, dass, wenn man das verschiebt und verzerrt, dass dann sozusagen aus diesen beiden Flächen hier (zeigt auf Quadrate über den Katheten in Figur 1) diese eine Fläche (zeigt auf Quadrat unter Hypotenuse in Figur 8) wird, ja.

(Klasse klatscht.)

Lehrer: Eine, eine Frage habe ich dazu. Ihr habt ja oben die Fläche a^2 und b^2, äh, die werden jetzt, aus den Quadraten werden jetzt Parallelogramme. Warum verändert sich denn da der Flächeninhalt nicht?

Schüler J: Weil die ja so, ähm, wenn man... ein Quadrat hat (zeichnet Quadrat an die Tafel.)...... Stellt euch vor, es ist ein Quadrat und wenn man das jetzt zu einem Parallelogramm macht (S. zeichnet Parallelogramm neben das Quadrat.), dann verschiebt man das halt einfach nur und der Flächeninhalt bleibt halt gleich […] Und wenn man das Parallelogramm sozusagen in der Mitte durchschneiden würde (S. teilt das Parallelogramm mit einer Strecke in zwei Hälften.), könnte man halt diesen Teil wieder hier ran setzen und man würde wieder das (zeigt auf Quadrat.) rauskriegen.

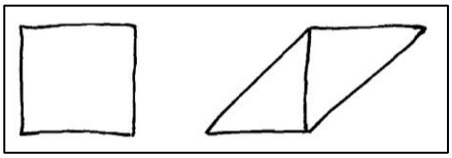
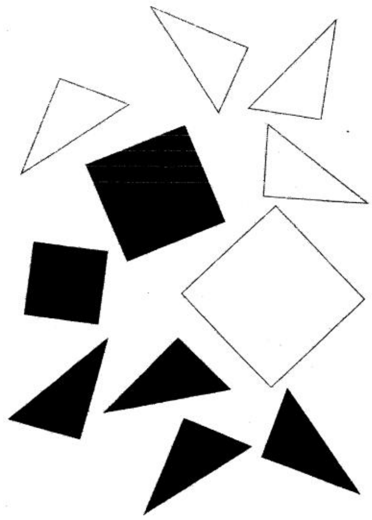


Abbildung 11.8: Schülerzeichnung an der Tafel zur Erklärung des Beweises 3

Die Schüler begründen teilweise selbst die einzelnen Schritte (z.B. der Hinweis auf die kongruenten Dreiecke, auch wenn die Schüler hier den Begriff identisch benutzten). Der Lehrer fordert die Schüler auf, insbesondere zu erklären, warum sich der Flächeninhalt bei der Scherung nicht ändert. Er fordert also weitere Begründungen ein. Der Schüler J. erläutert dies anhand einer Skizze (Abbildung 11.8). Diese erklärt zwar die Flächeninvarianz der Scherung, allerding ist das Beispiel sehr speziell gewählt, da das Quadrat genau so weit geschert wurde, bis die Höhe zwei Eckpunkte verbindet. Der Schüler argumentiert nun auch über das ‚Abschneiden' und ‚Dransetzen', was gerade nicht den Gedankengang der Scherung widerspiegelt. Der Lehrer geht hierauf aber nicht ein.

Die Bearbeitung des Beweises 3 ist verständnisbetont, da hier Prozeduren in Verbindung mit Konzepten und mathematischen Begründungen nachvollzogen werden. Der Lehrer lenkt zwar bei der Erarbeitung deutlich, er befähigt die Schüler aber dazu, den Beweis selbstständig und mit (auf Nachfrage) ausreichenden Begründungen zu präsentieren. Es werden wieder einige Argumentationsschritte ausgelassen (insbesondere bei der Verschiebung, aber auch Argumente, warum das Dreieck rechtwinklig sein muss und warum die Seiten des Parallelogramms gerade der Seitenlänge des Hypotenusenquadrates entsprechen), die Vermittlung der Beweisidee scheint allerdings gelungen, obwohl die Thematisierung der Umkehrbarkeit der Abbildungen noch fehlt.

11.3.4 Beweis 5 ‚ein Legespiel'



Arbeitsauftrag:
Lege die weißen und die schwarzen Puzzleteile jeweils zu Quadraten zusammen. Was fällt dir auf? Beim Legen solltest du dir auch die Frage stellen, warum die Teile zusammenpassen müssen (gleiche Längen und rechte Winkel!).

Abbildung 11.9: Beweis 5 ‚ein Legespiel' (nach Steudel, 1994)

Dieser Beweis wurde vom Lehrer nach in Abschnitt 11.2 erläuterten Gesichtspunkten aus einem Artikel in einer mathematikdidaktischen Fachzeitschrift (Steudel, 1994) ausgewählt.

Objektive Kennzeichen des Beweises 5 ‚ein Legespiel'

Dieser Beweis kann als begriffliche Modellierungs- und problembezogene Aufgabe eingeordnet werden. In der Aufgabenstellung ist explizit gefordert, die einzelnen Puzzleteile zu Quadraten zusammenzulegen. Dabei sollen die Schülerinnen und Schüler argumentieren, warum die Teile jeweils zusammenpassen. Hierzu müssen sie Wissen über die Eigenschaften von Quadraten und rechtwinkligen Dreiecken sowie zu kongruenten Dreiecken aktivieren. Allerdings ist nicht vorgegeben, dass die gegebenen acht Dreiecke kongruent sind und dass die Seitenlängen der Quadrate gerade den drei Dreiecksseiten entsprechen. Deshalb müssen die Lernenden diese Zusammenhänge intuitiv erahnen, um überhaupt die Passung der Seiten zueinander begründen zu können. Durch das Auslassen dieser Vorgabe wird das Potenzial dieses Beweises zum Argumentieren ähnlich wie schon bei den ‚Beweisen' 1, 2 und 4 (siehe 11.3.2) deutlich gesenkt. Die Schülerinnen und Schüler können nur mithilfe von Darstellungen arbeiten (z.B. Abbildung 11.10, Figur C). Sie erhalten beispielsweise Quadrate, wie sie in Abbildung 11.10 (Figur A und B) zu sehen sind.
Die Frage „Was fällt dir auf?" zielt vermutlich auf den Vergleich der Flächeninhalte der beiden Quadrate, wobei sich bei vorgegebenen Längen begründen ließe, dass die beiden dunklen Kathetenquadrate zusammen denselben Flächeninhalt haben wie das weiße Hypotenusenquadrat. Ohne die Angaben ist diese Begründung nur anschaulich möglich. Es wird nicht direkt nach dem Beweis des Satzes des Pythagoras gefragt, weshalb auf diese Frage ganz unterschiedliche Antworten möglich sind. Die Schülerinnen und Schüler könnten die selbst erstellten Darstellungen (Figur A und B) vergleichen und Zusammenhänge herstellen. Die vielen einzelnen Schritte führen dazu, dass hier auf mittlerem Niveau innermathematisch modelliert werden muss.

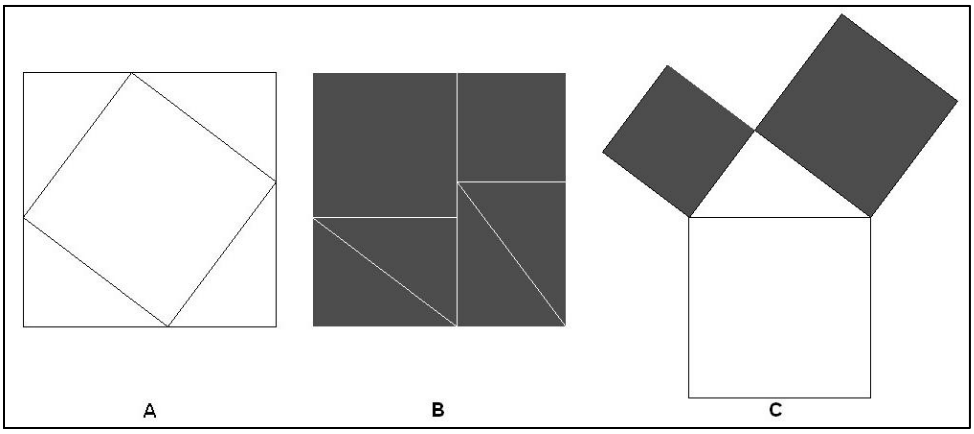


Abbildung 11.10: Mögliche Lösung für Beweis 5

Analyse des Unterrichtseinsatzes des Beweises 5 ‚ein Legespiel'

Dieser Beweis wurde von einer Schülergruppe während der Gruppenarbeitsphase bearbeitet und anschließend im Plenum präsentiert.

Bearbeitung des Beweises 5 während der Gruppenarbeitsphase

Die Schülerinnen und Schüler können die Quadrate (siehe Abbildung 11.9, Figur A und B) eigenständig aus den ausgeschnittenen Dreiecken und Quadraten zusammenlegen.

U [00:12:20.19]

Lehrer: Ja sehr gut.... Jetzt vergleicht mal die Fläche (zeigt auf weiße und schwarze Quadrate) Wenn du jetzt die Flächen vergleichst, was fällt dir auf?

Schüler B: Das (weißes zusammengesetztes Quadrat) ist größer.

Schüler L: Ist gleich groß.

Schüler B: Nein.

Schüler L: Doch, die sind gleich groß... die sind gleich groß […].

Lehrer: Was hat das jetzt für eine Bedeutung? […]

Schüler L: ...Das man aus denen ein...... das man aus denen ein... Quadrat formen kann? […]

Lehrer: Was hat das, was hat das mit dem Satz des Pythagoras....

Schüler A: Das man vielleicht

Schüler L: //Wenn die//..wenn die alle gleich groß sind... und äh, ah, eine Seite (zeigt Dreiecksseite, bei schwarzer zusammengelegter Figur) muss so lang sein wie die eines Quadrats (zeigt Seite des großen schwarzen Quadrats) und eine so lang wie die von einem, des anderen Quadrats (zeigt kleines, schwarzes Quadrat). Das vier gleiche Dreiecke sind,... dann und jedes da einen rechten Winkel hat,... dann stimmt der Satz des Pythagoras?

Lehrer: Warum stimmt der?

Schüler B: Vielleicht weil sie ein rechter Winkel.

Lehrer: Du hast Recht, das hier beide Quadrate, hier (schiebt ein weißes Dreieck vom Quadrat weg und wieder ran) dass die gleich groß ne? ...Darf ich mal diese Figur (nimmt weitere Schnipsel, legt ein weißes Dreieck in die Mitte und ein kleines, schwarzes Quadrat an die entsprechende Dreiecksseite, vgl. Abbildung 11.10, Figur C) So ein Dreieck, das könnte ich hier

Schüler L: Hä, sind die beiden (nimmt ein schwarzes Dreieck in die Hand) gleich groß? (legt es über das weiße Dreieck) die Dreiecke?

Lehrer: Ja. Nimm das mal hier bitte (legt das kleine, schwarze Quadrat wieder an das weiße Dreieck, legt das große weiße Quadrat an die Hypotenuse des weißen Dreiecks) und das hier (legt das große schwarze Quadrat an die andere Kathete) das passt da hin.

Schüler L: Ach so. […] Das sind, das, die Quadrate... das mit den Quadraten, die man an die Seiten tun, äh, die aus der Seitenlänge entstehen.

Der Lehrer lenkt den Gedankengang der Lernenden auf den Satz des Pythagoras, der in dieser Aufgabenstellung nicht erwähnt wird, und fordert sie damit zum Argumentieren auf. Da die Schülerinnen und Schüler nicht eigenständig die Zusammenhänge erschließen können, gibt der Lehrer eine Visualisierung vor (siehe Abbildung 11.10, Figur C) und lenkt damit kurzzeitig stark. Die Erläuterungen des Sachverhaltes überlässt er wieder den Schülerinnen und Schülern. Dies entspricht der vom Lehrer in der Planung geäußerten Strategie, gegebenenfalls kleine Impulse zu setzen, die die Lernenden zum selbstständigen Weiterarbeiten befähigen (vgl. 11.2). Allerdings wird in keiner Weise begründet, warum die einzelnen Teile zusammenpassen, obwohl dies in der Aufgabenstellung explizit gefordert ist. Es wird vor allem begriffliches Denken aktiviert.

Die Schwierigkeiten der Lernenden beim Lösen dieser Aufgabe beschreibt der Lehrer auch im Interview:

I [00:06:15.08] Lehrer:

Die Schwierigkeit bestand einfach darin, dass sie einfach erkennen müssen, dass das hier (die beiden schwarzen Quadrate) die beiden Kathetenquadrate waren, das hier (weißes Quadrat) das Hypotenusenquadrat. […] Da musste ich einfach nochmal hingehen und ein Dreieck (weißes Dreieck) nehmen und an dieses Dreieck hab ich dann die Kathetenquadrate angeheftet und das Hypotenusenquadrat und dann einfach gezeigt, dass diese Flächen inhaltsgleich waren.

Der Lehrer zeigt hier, dass er die Schülerschwierigkeiten während des Unterrichts erkannt hat und seine Hilfestellung auch im Nachhinein gut darstellen kann.

Die Schülerinnen und Schüler haben aber weiterhin Probleme, den Zusammenhang mit dem Satz des Pythagoras zu formulieren:

U [00:27:43.17]

Schüler A: Wir wissen nicht ganz genau, was wir da jetzt präsentieren sollen […].

Lehrer: Und jetzt wissen wir aber, dass diese beiden hier (zeigt auf die großen, zusammengesetzten Quadrate, siehe Figur A und B in Abbildung 11.10), die hier sind gleich groß […]. Wenn ich jetzt zeigen will, dass das plus das (zeigt auf kleine schwarze Quadrate, die ursprünglich über den Katheten lagen) genauso groß ist wie das (zeigt auf weißes Quadrat, das ursprünglich unter der Hypotenuse lag). […]

Schüler L: Weil, ich weiß, weil, ähm.

Lehrer: Ja, erklär mal.

Schüler L: Ja, das sind ja […] vier Dreiecke. Die dann zusammen, ähm... zusammen mit den... den Quadraten[…] die gleiche Fläche ergeben. Also die, nein, die vier und die vier (zeigt auf je vier helle und dunkle Dreiecke). […] Die sind genau gleich groß. (? ...) zusammen. Und deswegen müssen die (S. deutet auf das weiße und dunkle Quadrat) doch auch genau gleich groß sein.

Schüler B: Und was ist jetzt der Satz, und was hat das jetzt mit dem Satz des Pythagoras zu tun?

Lehrer: Das müsst ihr jetzt beantworten. […]

Schüler L: Ah, die beiden zusammen (zeigt auf die beiden dunklen Quadrate) ist der (zeigt auf das helle große Quadrat).

Schüler B: Das ist doch jetzt a^2 und b^2 (zeigt auf die beiden dunklen Quadrate) und das wäre ja dann c^2 (zeigt auf das helle große Quadrat). […] Wenn man das jetzt auf ein Dreieck bezieht.

Hier zeigt sich, dass der Lehrer den Schülerinnen und Schüler in der vorangegangenen Hilfestellung das Ziel nicht klar gemacht hat. Er fasst hier das bisher erkannte kurz zusammen. Insbesondere fördert er die Erläuterung des Lösungsweges durch die Schülerin L. Die Lernenden entwickeln die Beweisidee größtenteils gemeinsam und kognitiv selbstständig, wobei die Schülerin L. den größten Beitrag liefert. Dabei werden vor allem begrifflichen Argumente entwickelt und verschiedene Darstellungen verglichen. Der Lehrer lenkt hier nicht, da er den Gedankengang der Schülerinnen und Schüler in keiner Weise beeinflusst.

Präsentation des Beweises 5

In der Präsentation des Beweises erläutert die Schülerin L. den Beweis selbstständig, während sie am OHP die beiden Quadrate (Figur A und B in Abbildung 11.10) zusammenpuzzelt:

U [00:52:25.10]

Schüler L: So... ähm und aus den beiden kann man ein Quadrat machen... Mal gucken, ob ich das jetzt hinkriege. (S. puzzelt die Teile zusammen.)...... So und...... So. Ähm, und das, also die sind beide ja auch gleich groß und weil, ja, die vier (zeigt auf die vier schwarzen Dreiecke) ähm, Drei, äh, Dreiecke und die vier Dreiecke (S. zeigt auf die vier weißen Dreiecke) insgesamt gleich groß sind, bedeutet das, dass die beiden zusammen (zeigt auf die schwarzen Quadrate) und der (zeigt auf das weiße Quadrat) auch gleich groß sind.

(Klasse klatscht.)

Lehrer: Kannst du da was (? ...) zum Satz des Pythagoras? […] Ja, so... mit dem Dreieck in der Mitte.

Schüler L: Achso. (legt das Dreieck in die Mitte und legt, unter Zurufen aus der Klasse, Quadrate an die Seiten.)

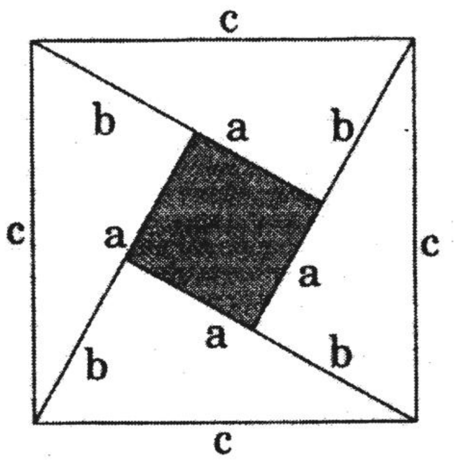
Lehrer: Kannst du eben den letzten Gedankengang nochmal wiederholen?

Schüler L: Ähm...... Das die beiden (zeigt auf die Quadrate über den Katheten) genau so groß sind wie der (zeigt auf Quadrat unter der Hypotenuse).

Die Schülerin L. geht hier wiederum nicht darauf ein, warum die Teile zusammenpassen. Auch der Lehrer spricht dies hier nicht an, er fordert aber weitere Begründungen ein und regt begriffliches Argumentieren an. Außerdem zeigt sich wieder, dass der Lehrer großen Wert auf Wiederholungen und Visualisierungen zu legen scheint.

Die Bearbeitung dieses Beweises ist als verständnisbetont einzustufen, da die Lernenden Probierverfahren anwenden, die mathematisches Verständnis und vor allem auch begriffliches Denken erfordern. Der Lehrer fordert die Schülerinnen und Schüler insbesondere dazu auf, Verbindungen zum Satz des Pythagoras herzustellen, obwohl dies in der Aufgabenstellung nicht direkt gefordert war. Es werden zwar wie auch bei vorherigen Beweisen mögliche Argumentationsschritte ausgelassen, die Vermittlung der Beweisidee scheint aber geglückt.

11.3.5 Beweis 6 ‚Arithmetischer Beweis 1'



Arbeitsauftrag:
Die vier rechtwinkligen Teildreiecke bilden ein Quadrat mit einer kleinen quadratischen Figur (hier dunkel eingezeichnet). Berechne den Flächeninhalt des großen Quadrates mithilfe der Dreiecke und der kleinen quadratischen Figur. Was fällt dir auf?

Abbildung 11.11: Beweis 6 ‚Arithmetischer Beweis 1' (nach Wittmann, 1997b)

Dieser Beweis wurde vom Lehrer nach in Abschnitt 11.2 erläuterten Gesichtspunkten aus einem Artikel in einer mathematikdidaktischen Fachzeitschrift (Wittmann, 1997b) ausgewählt.

I [00:10:50.26]

Lehrer: […] von einer anderen Form waren dann die Schwierigkeitsgrade, die ich hier hatte (L. deutet auf Arbeitsblatt von Beweis 5). Einmal ein arithmetischer Beweis. […] da konnte ich ebenfalls vieles an Kenntnissen, an arithmetischen Kenntnissen auch mit einfordern. […] das war auch ein sehr schöner Beweis. Das war insbesondere auch von Schülern gemacht worden, die nicht unbedingt so leistungsstark waren.

Hier zeigt sich wieder, dass der Lehrer bewusst den Schwierigkeitsgrad der Beweise und den Leistungsstand der Gruppen miteinander in Beziehung setzt.

Objektive Kennzeichen des Beweises 6 ‚Arithmetischer Beweis 1'

Obwohl es sich hier um einen Beweis handelt, ist diese Aufgabe als rechnerische Modellierungs- und problembezogene Aufgabe einzuordnen, da in der Aufgabenstellung das Berechnen betont wird. Es ist die Aufforderung enthalten nach einer bestimmten Methode vorzugehen, wodurch die mögliche innermathematische Modellierung vorweggenommen wird. Die Schülerinnen und Schüler sollen zunächst den Flächeninhalt des großen Quadrates mithilfe der rechtwinkligen Dreiecke und des kleinen Quadrates in der Mitte berechnen. Hierzu benötigen sie Kenntnisse aus der Geometrie (Flächeninhalt von Quadraten und Dreiecken) und aus der Algebra (Aufstellen und Umformen von Termen, binomische Formeln). Es wird insbesondere an früher gelernte Inhalte angeknüpft. Da die Dreiecke bereits in der Aufgabenstellung als rechtwinklig charakterisiert werden, müssen die Lernenden diesen begrifflich geprägten Begründungsschritt nicht mehr durchführen. Aus den Einzelflächen müssen die Schülerinnen und Schüler eine Formel für die Gesamtfläche herleiten, wobei sie die nötigen Informationen meist direkt aus der Darstellung entnehmen können. Lediglich die Seitenlänge des kleinen Quadrates muss von den Lernenden selbst erarbeitet werden. Nach Vereinfachung der Formel für die Gesamtfläche (z.B. mithilfe der binomischen Formel) erhält man einen Term der Form $a^2 + b^2$. Die Frage „Was fällt dir auf?" zielt vermutlich auf das Gleichsetzten dieses Terms für die Gesamtfläche mit der naheliegenden Berechnung der Gesamtfläche als c^2, wobei der Satz des Pythagoras entsteht. Die Schülerinnen und Schüler müssen hier nur rechnerische Standardargumente anbringen, weshalb das Argumentationsniveau als eher niedrig einzuschätzen ist. Es wird nicht explizit nach der Verknüpfung mit dem Beweis des Satzes des Pythagoras gefragt. Der Zusammenhang der Flächeninhalte der Kathetenquadrate und des Hypotenusenquadrates wird in diesem Beweis nicht deutlich.

Analyse des Unterrichtseinsatzes des Beweises 6 ‚Arithmetischer Beweis 1'

Dieser Beweis wurde innerhalb der Gruppenarbeit von einer Schülergruppe bearbeitet und anschließend im Plenum präsentiert.

<u>Bearbeitung des Beweises 6 während der Gruppenarbeitsphase</u>

Die Schülerinnen und Schüler haben zunächst Schwierigkeiten beim Aufstellen der Terme für die Gesamtfläche:

U [00:17:52.29]

Schüler S: […] Dürfen wir dann a mal b rechnen?

Lehrer: Ja. Schau mal, wenn du a mal b rechnest, ne. Das ist ja ein rechtwinkliges Dreieck (zeigt an a und b entlang) dann hast du aber den Flächeninhalt eines Rechtecks ausgerechnet (zeigt die Erweiterung des Dreiecks zum Rechteck mit Seitenlängen a und b) das ja deutlich größer ist.

Schüler X: Ja das ist, also a mal a.

Schüler T: Ne, du musst ja a mal b und dann durch 2 teilen.

Lehrer: Ja.

Schüler Q: a durch 2 mal […]

Lehrer: […] Wie oft kommt das Dreieck vor?
Schüler S: Vier mal.
Lehrer: Ja.
Schüler T: A mal b mal 2, nein, A mal b geteilt durch 2 mal 4.
Lehrer: Ja, und das ist aber noch nicht alles. Da kommt jetzt noch was. Wie groß ist das Stück (zeigt auf das dunkle Quadrat) hier? […] Wie lang ist diese Breite (zeigt auf rechte Seite des dunklen Quadrates) hier? a ist das Ganze. b ist das kleine Stückchen hier.
Schüler S: a minus b.

Durch die Hilfestellungen des Lehrers lenkt dieser hier teilweise sehr stark, da er jeweils die entscheidenden Hinweise gibt, die prozedurales Denken fördern. Es fällt aber auf, dass sich mehrere Schülerinnen und Schüler an der Erarbeitung beteiligen und sich auch gegenseitig korrigieren (z.B. Schüler T.). Dennoch wiederspricht dies der vom Lehrer in der Planung genannten Strategie der kleinen Impulse (siehe 11.2).

Beim Vereinfachen des Terms lenkt der Lehrer ähnlich wie oben wieder sehr stark:

U [00:23:49.22]
Lehrer: […] Guck dir das mal an (zeigt auf Notizen des Schülers U). Da steht a minus b mal a minus b. Darfst du das so schreiben?
Schüler U: Nein, eben nicht.
Schüler X: //Muss man// nicht a minus b in Klammern setzen?
Schüler U: Darf man nicht, weil man sonst erst b mal a rechnet.
Lehrer: […] Wir haben hier (zeigt auf Notizen von Schüler S) stehen a mal b durch 2 mal 4... Machen wir das mal so. (zeigt auf ein weißes Dreieck der Figur). Das ist ja das hier a mal b durch 2 ist ein Dreieck. (? ...) Wenn ihr die vier Dreiecke zusammen habt, wie groß wird das dann? ... Dann könnt ihr das Dreieck (zeigt auf eines der weißen Dreiecke) nehmen und das Dreieck nehmen wir. Das legen wir so daran. Das machen wir unten auch.
Schüler U: Achso. Dann haben wir zwei mal a mal b.

Der Lehrer fordert hier teilweise Begründungen ein, insbesondere fördert er die selbstständige Überprüfung von Lösungen, wenn sich beispielsweise falsche Umformungen ergeben (siehe Anfang des Transkriptausschnittes). In seiner stark lenkenden Hilfestellungen fokussiert er aber nicht die rein technischen Umformungen, sondern erläutert den Schülerinnen und Schüler, dass sie anstelle der vier Dreiecksflächen auch die Fläche zweier Rechtecke mit den Seitenlängen a und b berechnen können. Dadurch wird die Umformung $a \cdot b : 2 \cdot 4 = 2ab$ auf begriffliche Art und Weise begründet. Außerdem visualisiert der Lehrer die Situation anhand der gegebenen Dreiecke.

Auch der Vergleich der beiden Möglichkeiten zur Berechnung des Flächeninhaltes wird durch den Lehrer ohne wirkliche Schülerbeteiligung vorgenommen:

U [00:26:57.05]
Lehrer: Genau. Jetzt habt ihr zwei Möglichkeiten gehabt, die Fläche zu berechnen. Die erste Möglichkeit war, die Fläche ist gleich c mal c, also c^2. Und die zweite Möglichkeit ist, da habt ihr gerechnet, was ihr hier stehen habt, a^2 plus b^2. Was heißt das jetzt? Was hat das mit dem Pythagoras zu tun?
Schüler X: Also a^2 mal b^2 gleich c^2.
Lehrer: Aber nicht mal, sondern plus. (? ...) a^2 plus b^2 ist gleich c^2. Ja, das müsst ihr gleich mal erklären.

Der Zusammenhang mit dem Satz des Pythagoras ist in der Aufgabenstellung nicht direkt gefordert, wird aber hier vom Lehrer zusätzlich eingebracht. Allerdings wird der Zusammenhang nur unzureichend hergestellt, da das rechtwinklige Dreieck und die Bedeutung der Variablen a, b und c nicht thematisiert werden, es wird lediglich über die aufgestellten Formeln argumentiert. Dies wird durch den Lehrer vorgegeben. Die bei dieser Aufgabenbearbeitung

ersichtliche starke Lehrerlenkung könnte damit zusammenhängen, dass es sich hier nach Aussage des Lehrers um eine eher leistungsschwächere Gruppe handelt.
Der Lehrer erläutert die bei dieser Aufgabenbearbeitung ersichtlichen Schwierigkeiten der Lernenden im Interview nicht:

I [00:12:14.08]

Lehrer: […] Also sie hatten, äh sie hatten jetzt nur die Gleichung aufgestellt, aber dann nicht, nicht weiter gerechnet. Aber durch, durch den Impuls sind sie dann auf die Idee gekommen zu sagen: Ok, dann spielen wir das mal weiter durch, ne. Das kann man auch anders schreiben, nicht. Wie sähe das denn aus und rechnet mal weiter, ne. […] aber sie haben das erkannt, ne.

Der Lehrer beschreibt hier, dass die Lernenden die Zusammenhänge selbst erkannt haben, was im Gegensatz zu den Beobachtungen im Unterricht steht. Hier zeigt sich, dass der Lehrer sein eigenes Verhalten (die starke Lehrerlenkung bei dieser Aufgabe) nicht reflektieren, bzw. nicht vollständig erinnern kann. Es scheint dem Lehrer nicht bewusst zu sein, dass die Schülerinnen und Schüler die Zusammenhänge hier nicht selbst erkannt haben.

Präsentation des Beweises 6

Die beiden vortragenden Schülerinnen erkennen, dass es sich um eine ganz andere Art von Beweis handelt.

U [00:55:58.00]

Schüler T: Also, ähm... Wir haben halt etwas ganz anderes jetzt und […] Also das ist unsere halt, unsere Formel ist halt, um die Dreiecke... ja um die Flächeninhalte der Dreiecke zu berechnen, ist halt a mal b. Dann hätten wir aber ein Viereck, deswegen teilen wir das durch zwei, damit wir den Flächeninhalt vom Dreieck haben. So... Danach kommt dann, ähm... halt plus a minus b, […] Also das ist ja, das Ganze hier ist ja […] a. Und der Teil hier ist b (zeigt die Seite b eines Dreiecks) und deshalb rechnet man a minus b, wenn man dann nur halt diesen Teil hat. Habt ihr das verstanden?

$$A = c \cdot c = c^2$$
$$A = a \cdot b : 2 \cdot 4 + (a-b) \cdot (a-b)$$
$$= 2ab + a^2 - 2ab + b^2$$
$$= a^2 + b^2$$

Abbildung 11.12: Tafelanschrieb zur Präsentation des Beweises 6

Schüler S: Also damit man das Quadrat da ausrechnen kann. […]

Lehrer: //Kannst du das nicht// auf dem Overhead-Projektor zeigen? […]

Schüler S: Ok, (? ...) bleibt nur noch die Frage, ähm, was uns dabei auffällt. Und man könnte den Flächeninhalt auch berechnen, wenn c mal c. Das wären dann c hoch 2. Aber wir haben das ja halt mit Hilfe dieser Dreiecke gemacht und da kommt dann am Ende raus, wenn man das alles kürzt und zusammen rechnet, kommt da a hoch 2 plus b hoch 2 raus.

Lehrer: Diesen Rechenschritt würde ich ganz gern nochmal machen. […] Würdest du das bitte machen? Auch kommentieren bitte. […] (Schülerin S. schreibt die Formel an die Tafel, siehe Abbildung 11.12)

Schüler S: Ja...... Also, ähm, wenn man, also ich brauch dazu die Zeichnung, also wenn man jetzt, wenn man das ausrechnet, aber man könnte ja auch das hier ransetzen, dann wäre es ja wieder ein Ganzes und das sollte man halt daran setzen, dann wäre das auch ein Ganzes, also […] könnte man auch dafür schreiben 2 mal a mal b.

Lehrer: […] Was hat das mit jetzt mit dem Satz des Pythagoras zu tun?

Schüler S: […] Also wir haben uns eigentlich, eigentlich ist es das gleiche, bloß halt eine andere Rechnung und das Ergebnis ist halt das gleiche, bloß es ist eigentlich (? ...). Also muss das (zeigt auf die obere Formel) das (zeigt auf die untere Formel) sein.

Die Lernenden stellen die Erarbeitung der Formel für den Flächeninhalt selbstständig vor, wobei der Lehrer nur ein paar unsaubere Formulierungen korrigiert. Sie antworten auch selbstständig auf Nachfragen von Mitschülern und begründen ihr Vorgehen. Der Lehrer fordert die Schülerinnen zur Visualisierung der Erklärungen auf und fördert damit den Wechsel zwischen verschiedenen repräsentationsformen (siehe Abbildung 11.12). Obwohl die Präsentation insgesamt betrachtet eher prozeduralen Charakter aufweist, formt die Schülerin S den Term $a \cdot b : 2 \cdot 4$ nicht algebraisch um, sondern begründet auf begrifflicher Ebene, warum man stattdessen 2ab schreiben kann, wie dies in der Gruppenarbeitsphase vom Lehrer erläutert wurde (siehe Seite 285). Der Lehrer fordert die Schülerinnen auch hier zur wiederholenden Erklärung und ausführlichen Darstellung des Lösungsweges auf. Die Erklärung des Zusammenhangs mit dem Satz des Pythagoras ist aber wieder unzureichend, der Lehrer fordert keine genauere Erklärung ein. Daher ist die Erarbeitung dieses Beweises als verfahrensbetont ohne Verbindung mit Konzepten einzustufen.

11.3.6 Reflexion der Gruppenarbeit

In allen Beweisen sollen die Schülerinnen und Schüler zunächst die Beweisidee nachvollziehen, die einzelnen Beweisschritte erarbeiten und den Beweis anschließend im Plenum mit eigenen Worten darstellen. In der Bearbeitungsphase lenkt der Lehrer einerseits bei der leistungsstärksten Gruppe, die einen nach Einschätzung des Lehrers relativ schwierigen Beweis bearbeitet, und bei der leistungsschwächsten Gruppe, die aber auch einen relativ einfachen Beweis behandelt. Die anderen Gruppen erarbeiten die Beweisideen größtenteils selbstständig. Alle Schülergruppen präsentieren fast völlig selbstständig. Der Lehrer stellt nur kurze Nachfragen, die zur Begründung anregen. Insbesondere stellen auch die Schülerinnen und Schüler Verständnisfragen, die wiederum von den Vortragenden selbstständig beantwortet werden oder fordern die Mitschüler zu einer erneuten Erklärung auf. Der Lehrer erläutert allerdings im Interview:

I [00:01:03.02]

Lehrer: […] wobei man auch an der Stelle feststellen konnte, dass so ne sprachliche Kompetenz noch nicht so da war, weil man sich doch versucht so umgangssprachlich bestimmte Phänomene zu beschreiben wo es eigentlich nahegelegen, wo es eigentlich jetzt sinnvoll gewesen wäre jetzt Fachsprache einzufordern oder auch einzubeziehen.

Hier zeigt sich, dass der Lehrer einerseits Wert auf die Verwendung korrekter Fachsprache auch in Präsentationen der Schülerinnen und Schüler legt, andererseits reflektiert der Lehrer die im Unterricht gezeigte Verwendung der Fachbegriffe durch die Lernenden kritisch.

Im Anschluss an die Präsentationen fordert der Lehrer die Schülerinnen und Schüler zum Vergleich der Beweise auf. Er erläutert allerdings im Interview:

I [00:34:28.07]

Lehrer: […] was sind meine Kriterien, mit denen ich das beurteile. Also solche Sachen, der Beweis ist schön, aber schön ist kein Kriterium. Ein Beweis ist überzeugend, aber warum war das so überzeugend? Das ist ähm... also es hätte einfach gereicht zu sagen: Welchen Beweis habe ich besonders gut verstanden? Welcher Beweis ist besonders gut nachvollziehbar? Wenn man es so formuliert hätte, hätte das schon allemal gereicht.

Der Lehrer kann hier seinen Erwartungshorizont ziemlich genau beschreiben. Außerdem werden die Lernenden durch den Vergleich der Beweise zur Reflexion der unterschiedlichen Beweismöglichkeiten angeregt.

Insgesamt hatten die Schülerinnen und Schüler mit den Beweisen während der Gruppenarbeit weniger Probleme als vom Lehrer erwartet:

I [00:23:17.02]

Lehrer: Ja. Ich hätte eigentlich damit gerechnet, dass da mehr Probleme da auftauchen würden, […] da hab ich auch gemerkt, die kamen damit zurecht, […] schneller als ich erwartet hatte. […] Man hätte jetzt überlegen können, ob man dann vielleicht den Schwierigkeitsgrad der Beweise höher gehängt hätte. […] Also Ähnlichkeitsbeweise, wenn die da mit dabei gewesen wären, dann hätte ich ja... die hätten das sicherlich auch erkannt, dass die Figuren ähnlich sind, aber äh... ich, gut, wäre vielleicht einen Versuch wert gewesen. Aber ich glaube nicht, dass die das so schnell gesehen hätten. Weil da hätte ich auch ein bisschen mehr mathematische Inhalte einfordern müssen. […] Hätte man hier übrigens bei den Beweisen auch machen können. Das man einfach sagt: Woher sehe ich zum Beispiel, dass diese Dreiecke kongruent sind? Äh... da hätte man noch mathematisch mehr Präzision einfordern können. Aber... geschenkt. Es war in diesem Falle für eine achte Klasse, war das eigentlich schon ganz anständig.

Hier kann der Lehrer sein eigenes Verhalten kritisch reflektieren und Handlungsalternativen aufzeigen. Insbesondere erläutert der Lehrer hier, dass er bei den eingesetzten Beweisen noch mehr Begründungen hätte einfordern können. Hier zeigt sich nochmals, dass der Lehrer das Potenzial der Beweise zum Argumentieren durchaus erkannt aber bewusst nicht eingefordert hat (vgl. 11.2).

Im Anschluss an die Gruppenarbeit werden im Plenum noch zwei Beweise mit starker Ähnlichkeit zu den Beweisen 5 und 6 besprochen. Diese beiden Beweise tauchen aber nicht in der Planung auf und scheinen vom Lehrer spontan ausgewählt worden zu sein, da die Bearbeitung der Beweise 1-6 schneller ging, als erwartet.

11.3.7 Beweis 7 ‚Arithmetischer Beweis 2'

Beweis des Satzes des Pythagoras:

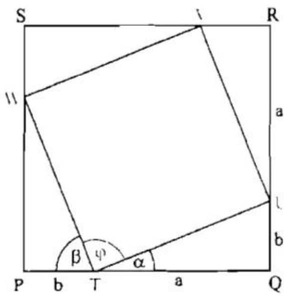
Von einem Quadrat PQRS mit der Seitenlänge a + b werden vier Dreiecke mit den Kathetenlängen a und b abgeschnitten. Die vier abgeschnittenen Dreiecke stimmen in den Kathetenlängen und dem eingeschlossenen rechten Winkel überein. Sie sind nach dem Kongruenzsatz sws zueinander kongruent.

Folglich hat die Restfigur vier gleich lange Seiten, deren Länge wir mit c bezeichnen.

Des weiteren gilt aufgrund des Winkelsummensatzes im Dreieck: $\alpha + \beta + 90° = 180°$, also $\alpha + \beta = 90°$.

Ebenso gilt: $\alpha + \beta + \varphi = 180°$, also $\varphi = 90°$.

Damit ist gezeigt, dass die Restfigur TUVW ein Quadrat mit der Seitenlänge c ist. Das Quadrat TUVW hat den Flächeninhalt $A = c^2$.



Wir berechnen nun diesen Flächeninhalt auf andere Weise:

$$\begin{aligned} c^2 &= \overbrace{(a+b)^2}^{\text{Flächeninhalt von PQRS}} - \overbrace{4 \cdot \tfrac{1}{2}ab}^{\text{Flächeninhalt der vier Dreiecke}} \\ &= a^2 + 2ab + b^2 - 2ab \\ &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

Damit ist bewiesen, dass der oben gefundene Flächensatz (Satz des Pythagoras) allgmein für rechtwinklige Dreiecke gilt.

Abbildung 11.13: Beweis 7 ‚Arithmetischer Beweis 2' (Griesel, 2009, S. 126; Schroedel © Bildungshaus Schulbuchverlage GmbH, Braunschweig)

Der Lehrer fordert die Schülerinnen und Schüler mündlich dazu auf, diesen Beweis aus dem Schulbuch der Klasse (Griesel, 2009, S. 126) durchzulesen und anschließend zu erklären. Die Struktur des Beweises ähnelt der Struktur des Beweises 6 (arithmetischer Beweis 1).

I [00:19:48.14]

Lehrer: […] für mich war es jetzt wichtig, dass dann auch die anderen denn aufgefordert waren, das zu erkennen, dass eine Ähnlichkeit, dass sie sowas gerade schon mal gesehen haben, dass eine Ähnlichkeit da war […] was die Beweisführung angeht. Und dass sie diese beiden Fälle, diese beiden Beweise auch erbringen konnten.

Der Lehrer betont hier, dass das eben erarbeitete nochmals angewendet werden soll, woraus auf eine bewusste Vernetzung zum Vorwissen geschlossen werden kann. Dies erscheint hier insbesondere sinnvoll zu sein, da nicht alle Schülerinnen und Schüler den arithmetischen Beweis in der Gruppenarbeit intensiv bearbeitet haben.

Objektive Kennzeichen des Beweises 7 ‚Arithmetischer Beweis 2'

Diese Aufgabe erfordert im Vergleich zum arithmetischen Beweis 1 (siehe 11.3.5) ganz andere kognitive Strukturen. Das Nachvollziehen dieses Beweises als begriffliche Modellierungs- und problembezogene Aufgabe einzustufen, da vor allem Argumentationen nachvollzogen werden müssen. Zunächst wird ausführlich begründet, dass die Figur in der Mitte ein Quadrat mit der Seitenlänge c ist, wozu vor allem begriffliches Denken erforderlich ist. Die innermathematischen Modellierungen sind zwar schon in der Aufgabe vorgegeben, dennoch sind sie nicht unmittelbar aus dem Wissensrepertoire abrufbar, so dass auch die Schülerinnen und Schüler noch in geringem Maße Modellierungen vornehmen müssen. Insbesondere müssen sie die gegebenen Formeln mit der Zeichnung in Verbindung setzten. Hierbei aktivieren die Schülerinnen und Schüler einerseits Wissen aus verschiedenen Bereichen der Geometrie (kongruente Dreiecke, Winkelsummensatz) und aus dem Bereich Algebra (Aufstellen von Termen, Termumformungen, binomische Formeln). Es wird insbesondere an früher gelernte Inhalte angeknüpft. Die nachzuvollziehenden Argumentationsschritte sind sehr komplex, so dass die Schülerinnen und Schüler bei der Erklärung auf hohem Niveau argumentieren müssen. Sie sollten sich dabei bewusst machen, weshalb die einzelnen Begründungsschritte nötig sind und wie der Beweis insgesamt entsteht.

Analyse des Unterrichtseinsatzes des Beweises 7 ‚Arithmetischer Beweis 2'

Die Schülerinnen und Schüler sollten sich im Anschluss an die Gruppenarbeit zunächst in Einzelarbeit den Beweis anschauen und diesen anschließend im Plenum erläutern. Der Schüler E. beginnt mit der Erklärung der Formeln aufgrund des Winkelsummensatzes. Die Begründung, dass es sich um kongruente Dreiecke handelt und dass deshalb in der Mitte eine Figur mit vier gleich langen Seiten entsteht, wird übersprungen und auch später nicht mehr aufgegriffen.

U [01:10:14.07]

Schüler E: Ja, ähm, also da steht, ähm, alpha plus beta plus 90 Grad sind gleich 180 Grad. Äh... Das heißt, alpha und beta ergeben dann auch 90 Grad, weil alpha plus, also 90 plus 90 plus 90, also drei mal 90 sind 180 Grad.

Schüler F: Äh, nein. Drei mal 90 sind 270.

Schüler E: Ja nein, aber das steht ja hier. (? ...) Also alpha plus beta

Lehrer: Ja.

Schüler E: Und ähm... ja und man kann halt für die 90 Grad auch jedes andere beliebige Zeichen einsetzten, äh hinschreiben. Also das steht da.

Lehrer: Warum ist das so wichtig, dass alpha und beta 90 Grad sind? ... Ja, R.

Schüler R: Vielleicht, weil wenn das nicht so wär, könnte gamma ja auch nicht 90 Grad sein und das muss ja, die drei Winkel zusammen müssen 180 Grad ergeben.

Lehrer: Sonst hätte ich kein rechtwinkliges Dreieck.

Schüler R: Ja eben.

Lehrer: Und dann ließe sich der Flächeninhalt nicht so ohne weiteres berechnen.

Die Erklärung des Schülers ist fehlerhaft, es scheint, dass der Schüler aus dem Beweis herausliest, dass auch alpha und beta je 90 Grad sind. Außerdem erkennt der Schüler nicht, dass es sich bei der zweiten Gleichung ($\alpha+\beta+\varphi = 180°$) um eine neue Gleichung handelt, die aus einem anderen Zusammenhang hergeleitet wird und in die die obere Gleichung eingesetzt wird. Diese Missverständnisse werden auch nicht durch den Lehrer aufgeklärt. Der Lehrer geht lediglich darauf ein, dass α und β zusammen 90° ergeben müssen und fragt einen anderen Schüler nach der Begründung. Dieser argumentiert entgegengesetzt zur eigentlich nötigen Argumentationsrichtung (weil γ 90° sein muss, müssen auch α und β zusammen 90° er-

geben), aber auch dies wird vom Lehrer nicht aufgezeigt. Stattdessen geht er darauf ein, dass man das rechtwinklige Dreieck benötigt, um den Flächeninhalt leichter auszurechnen.
An dieser Stelle wird ein Großteil des Potenzials der Aufgabe verschenkt. Gerade, weil die Beweisidee den Schülerinnen und Schülern schon bekannt ist und weil die ausführlichen Begründungen hier schon ausformuliert sind und nachvollzogen werden sollen, hätte der Lehrer an dieser Stelle auf die argumentativen Feinheiten eingehen können. Insbesondere hätte er die oben erläuterten Missverständnisse aufzeigen sollen. Anzumerken ist aber auch, dass sich die Schülerinnen und Schüler selbstständig gegenseitig korrigieren, was wiederum auf eine Unterrichtskultur hinweisen könnte, in der die Lernenden selbst aktiv sind.
Der Lehrer fordert die Schülerinnen und Schüler auf, sich an die bereits besprochenen Beweise zu erinnern und stellt so die Verbindung zum Beweis 6 her:

U [01:11:36.21]

Lehrer: Einverstanden. Und wie geht die Begründung weiter? ...... Kennt ihr die Figur oder den Beweis? ... Wir haben ja gerade sechs quasi gesehen, war ein Beweis dabei, der Ähnlichkeit mit diesem Beweis hatte?

Schüler X: Der letzte war fast genau so, auch mit einem Viereck in der Mitte und Dreiecken drum herum. […]

Schüler V: Also, dass das Quadrat TUVW halt den Flächeninhalt von A gleich c^2 hat und dass man aber auch so berechnen kann, dass das a^2 plus b^2 ist. (? ...)

Lehrer: War das überzeugend?

(Allgemeine Zustimmung der Klasse.)

Die Formulierungen der Schülerin V. deuten darauf hin, dass sie für Ihre Begründung auch die im Beweis dargestellte Rechnung mit einbezieht. Der Lehrer stellt aber keine Verbindung zur bildlichen Darstellung des Beweises her. Insbesondere geht er hier nicht mehr auf das Aufstellen des Terms und auf die Umformungen ein. Dadurch wird die Besprechung dieses Beweises vor allem durch prozedurales Denken geprägt.
Im Interview erläutert der Lehrer, dass er hier bewusst auf eine erneute schriftliche Darstellung der Rechnung verzichtet:

I [00:20:51.10]

Lehrer: […] wir haben das nicht aufgeschrieben, aber sie haben‘s einfach... argumentativ dargestellt. Und das reichte mir in dem Moment. Weil wir haben das ja vorher schon, ähm... am Overhead-Projektor gezeigt und dann musste man das nicht nochmal wieder zusätzlich aufschreiben. Das wäre mir jetzt ein bisschen zu länglich gewesen.

Dies scheint inkonsistent mit dem sonstigen Verhalten des Lehrers, da er an anderer Stelle sehr großen Wert auf Wiederholungen legt (insbesondere bei den Beweisen 1, 2 und 4) und auch im Interview äußert, dass die Gruppenarbeit zu den Beweisen schneller ging als erwartet (siehe oben). Er hätte hier also durchaus die Zeit gehabt, den Beweis ausführlicher zu besprechen und insbesondere Begründungsaspekte aufzugreifen, die in der Präsentation des Beweises 6 zu kurz kamen. Die Bearbeitung dieses Beweises scheint im Ganzen sehr knapp und nicht im Vorfeld des Unterrichts geplant zu sein. Die Bearbeitung des Beweises fokussiert hauptsächlich auf die prozeduralen Aspekte des Beweises, die begrifflichen Aspekte werden nicht angesprochen. Die Bearbeitung ist dennoch als verständnisbetont einzuordnen, da der Lösungsweg des Beweises reflektiert wird und der Lehrer (wenn auch nicht vollständig) Begründungen einfordert, sodass die Prozeduren in Verbindung mit Konzepten angewendet werden.

11.3.8 Beweis 8 ‚farbige Flächen‘

Die beiden nebenstehenden Figuren zeigen einen weiteren Beweis des Satzes des Pythagoras.
Erläutere den Beweis im Einzelnen.

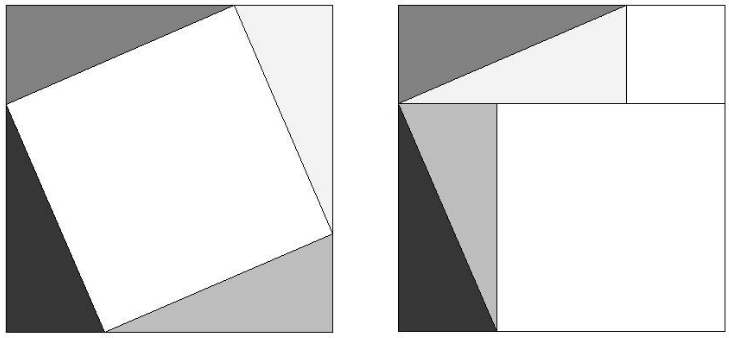


Abbildung 11.14: Beweis 8 ‚farbige Flächen‘ (Griesel, 2009, S. 128; Schroedel © Bildungshaus Schulbuchverlage GmbH, Braunschweig; im Original sind die Grautöne verschiedene Farben)

Der Lehrer fordert die Schülerinnen und Schüler mündlich dazu auf, diesen Beweis aus dem Schulbuch der Klasse (Griesel, 2009) anzuschauen. Der Beweis ähnelt von der Struktur dem Beweis 5 (ein Legespiel) und dient der Wiederholung der Beweisidee (siehe Seite 289).

Objektive Kennzeichen des Beweises 8 ‚farbige Flächen‘

Dieser Beweis stellt eine begriffliche Modellierungs- und problembezogene Aufgabe dar, obwohl der Grad der innermathematischen Modellierung eher niedrig ist, da die Modellierung durch die Aufgabenstellung nahe gelegt wird. Die Schülerinnen und Schüler sollen über den Vergleich der beiden Darstellungen den Satz des Pythagoras begründen. Hierzu müssen sie Wissen zu kongruenten und rechtwinkligen Dreiecken und eine Vorstellung zum Flächeninhalt (nicht unbedingt Berechnung der Flächeninhalte) aktivieren. Die Begründung des Beweises kann auf unterschiedlichsten Niveaus durchgeführt werden. Da aber auch hier nicht die entsprechenden Längen gegeben sind, kann nicht auf einer mathematisch exakten Ebene argumentiert werden (vgl. Beweise 1, 2, 4 und 5). Die verschiedenen Farben deuten die kongruenten Dreiecke an, so dass direkt auf die Kongruenz der Dreiecke geschlossen werden kann, obwohl dies aus mathematischer Sicht einen notwendigen Argumentationsschritt darstellt. Außerdem können sich die Schülerinnen und Schüler Gedanken über die Winkel machen und argumentieren, dass die weißen Figuren Quadrate darstellen. Dies ist allerdings sehr offensichtlich und könnte bei einer anschaulichen Betrachtung weggelassen werden, es handelt sich dann aber im mathematischen Sinn nicht um einen Beweis sondern um eine Veranschaulichung des Satzes. Die Schülerinnen und Schüler müssen aber erkennen, dass die Seitenlängen der Quadrate jeweils der Länge einer Dreiecksseite entsprechen, um einen Bezug zum Satz des Pythagoras herzustellen.

Analyse des Unterrichtseinsatzes des Beweises 8 ‚farbige Flächen‘

Der Lehrer fordert die Schülerinnen und Schüler mündlich dazu auf, sich diesen Beweis im Schulbuch anzuschauen. Er erläutert im Interview:

I [00:19:48.14]

Lehrer: […]Das ist eine ähnliche Situation gewesen wie die, die sie auch gehabt haben, nur anders eingefärbt. […] Sie haben diese Situation wieder erkannt und konnten es auch anschließend erläutern.

Hier zeigt sich, dass der Lehrer ähnlich wie beim Beweis 7 bewusst die Beweisidee wieder aufgreift. Außerdem reflektiert er im Interview, dass die Schülerinnen und Schüler mit der Erläuterung gut zurecht kamen, denn dies zeigt sich auch im Unterricht:

U [01:13:53.06]

Schüler R: Also ich glaube, das ist, die beiden, wenn man den Flächeninhalt von dem kleinen weißen Ding mit dem etwas größeren weißen zusammen(?), ist das der gleiche Flächeninhalt wie, ähm, der von dem, das in der linken Zeichnung ist, und wenn man die Dreiecke da drum herum legt, ist das genau das gleiche.

Lehrer: Bisschen genauer.

Schüler S: Also, ähm, bei den beiden, diese gefärbten Dreiecke sind ja alle gleich groß und ähm, bei den, also bei dem linken ist das ja in der Mitte dieser, dieses große Quadrat und bei dem rechten ist das ja nochmal, sag ich mal, geteilt. Aber weil die gefärbten gleich groß sind, müssen die weißen ja auch gleich groß sein.

Lehrer: Schön. (???) die Begründung...

Der Lehrer fordert genauere Begründungen ein, die Argumentationsschritte bleiben aber wieder unvollständig. Es wird nicht begründet, warum die farbigen Dreiecke gleich groß sind und weshalb die weißen Figuren Quadrate darstellen. Die Gesamtfläche der beiden Figuren wird in beiden Schülererläuterungen nur indirekt berücksichtigt. Auch der Zusammenhang zum Satz des Pythagoras wird hier nicht direkt hergestellt. Insgesamt bleibt die Bearbeitung des Beweises auf einem sehr anschaulichen Niveau, wobei aber die Beweisidee gut deutlich wird. Deshalb ist die Bearbeitung als verständnisbetont einzuschätzen. Dabei arbeiten die Schülerinnen und Schüler kognitiv selbstständig und es wird vor allem begriffliches Denken aktiviert.

Alternative Vorgehensweise

Die Bearbeitung dieses Beweises scheint im Ganzen sehr knapp und nicht im Vorfeld des Unterrichts geplant zu sein, da in der schriftlichen Unterrichtsplanung keine Hinweise hierzu vorliegen. Ebenso scheinen die folgenden Aufgaben 2 und 3 am Ende der Doppelstunde vom Lehrer spontan ausgewählt zu sein. Hier wechselt der Fokus der Stunde vom Beweisen zur Anwendung des Satzes des Pythagoras. Im Interview erläutert der Lehrer eine alternative Vorgehensweise:

I [00:21:33.25]

Lehrer: Äh das, an der Stelle habe ich nichts anderes gemacht als den Satz des Pythagoras angewandt. […] die Beweisebene hat man da verlassen. Das hätte ich jetzt heute auch so nicht mehr gemacht, weil äh... diese Beweisanwendung ist eine eigene Sache. Aber ich hätte vielleicht noch etwas anderes machen müssen. Ich hätte zum Beispiel hier (L. zeigt auf unteren Beweis im Schulbuch) ein Portfolio erstellen können. Das heißt also, man hatte hier Beweise gemacht, die Beweise sind von verschiedenen Gruppen auch präsentiert worden, versprachlicht worden. Man hätte sie jetzt einfach auffordern können, dass man sagt, jetzt... schreibt mal euren Beweis sauber auf. […]Und dann hätte ich das nachher, sozusagen die sechs Beweise, die dagewesen sind, hätt ich dann einfach zusammengefasst, ich hätte es einfach auf, vielleicht auf, äh... auf ein zwei Seiten dann getippt und hätte das dann denen anschließend dann gegeben.

Der Lehrer kann hier seinen Unterricht kritisch reflektieren, indem er erkennt, dass durch den Wechsel zu den Anwendungsaufgaben ein gedanklicher Bruch in der Unterrichtsstunde entsteht. Die von ihm genannte Alternative, die er scheinbar im Nachhinein präferiert, hätte dagegen insbesondere die Vernetzungen des erarbeiteten Wissens gefördert. Durch das Aufschreiben der Beweise wäre auch der Wechsel von Repräsentationsformen unterstützt worden.

11.3.9 Aufgabe 2 ‚Innermathematische Anwendung des Satzes des Pythagoras'

In der Figur findest du mehrere rechtwinklige Dreiecke. Notiere sie und gib jeweils nach dem Satz des Pythagoras den Zusammenhang zwischen den Seitenlängen an.

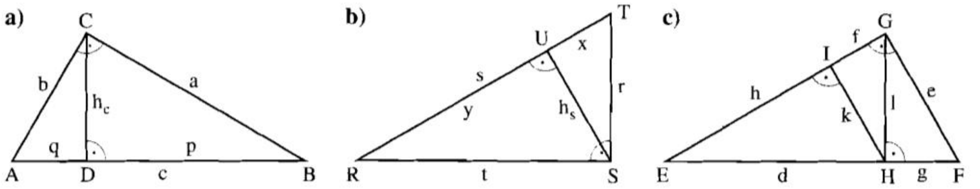


Abbildung 11.15: Aufgabe 2 ‚Innermathematische Anwendung des Satzes des Pythagoras' (Griesel, 2009, S. S. 128; Schroedel © Bildungshaus Schulbuchverlage GmbH, Braunschweig)

Diese Aufgabe wurde vom Lehrer aus dem Schulbuch der Klasse (Griesel, 2009) ausgewählt. Sie stellt eine Wiederholung bereits gelernten Wissens dar, wie sich aus den Lehreräußerungen im Unterricht entnehmen lässt:

U [01:14:34.27]
Lehrer: […] wir wenden den Pythagoras selbst einmal an und äh, eine Figur, wo das verlangt wird, ist die Aufgabe Nummer 8. […] Dürfte euch bekannt vorkommen.

Der Lehrer spricht von einer Anwendungsaufgabe, wobei hier die innermathematische Anwendung des Satzes des Pythagoras gemeint ist.

Objektive Kennzeichen der Aufgabe 2 ‚Innermathematische Anwendung des Satzes des Pythagoras'

Dies ist eine technische Aufgabe mit Fokus auf Faktenwissen. Die Schülerinnen und Schüler müssen hier die unterschiedlichen rechtwinkligen Dreiecke innerhalb der Figuren identifizieren und mit den gegebenen Bezeichnungen den Satz des Pythagoras formulieren. Dabei müssen sie beachten, welche der Seiten die Katheten sind und welche Seite die Hypotenuse darstellt.

Analyse des Unterrichtseinsatzes der Aufgabe 2: Innermathematische Anwendung des Satzes des Pythagoras

Diese Aufgabe wird im Plenum bearbeitet. Die Schülerinnen und Schüler teilen ihre Ergebnisse mündlich mit, wobei sie größtenteils keine Schwierigkeiten haben:

U [01:15:39.23]
Schüler W: hc^2 mal c^2 gleich a^2.
Lehrer: Moment, da war ein Fehler drin.
Schüler Y: //Nein,// das ist ein p.
Schüler W: Ja?
Schüler Y: Das insgesamt ist c.
Schüler W: Achso, achso Ok.
Lehrer: Korrigierst du das noch mal.
Schüler W: hc^2 mal p^2 gleich a^2.
Lehrer: Moment. Eine Rechenoperation ist da noch falsch...... Du sagst hc^2 plus, p, mal p^2
Schüler W: Mal.
(L. nickt Schüler L. zu.)
Schüler L: Plus.
Lehrer: Ja, sagst es jetzt noch einmal ganz. […]
Schüler V: Also in dem Insgesamten, a^2 plus b^2 gleich c^2.
Lehrer: Gut, das ist das große. Aber wie würde... das, die eine Figur war gerade noch nicht ganz

richtig erklärt...... Da war hc, sagst du das noch einmal, W. […]

Schüler W: hc² plus p² gleich a².

Der Lehrer beschränkt sich auf das Drannehmen der Schülerinnen und Schüler sodass sie größtenteils kognitiv selbstständig arbeiten. Allerdings weist der Lehrer an einer Stelle direkt auf einen Fehler hin. Es fällt auf, dass die Lernenden gegenseitig die Fehler korrigieren. Der Lehrer scheint Wert darauf zu legen, dass die korrigierten Lösungen vollständig von den Schülerinnen und Schülern formuliert werden. Es wird hier ausschließlich Faktenwissen bei der Bearbeitung der Aufgabe aktiviert. Die Bearbeitung der Aufgaben ist als verfahrensbetont einzuschätzen, da keine ‚bedeutungshaltigen' mathematischen Tätigkeiten ausgeführt werden (vgl. 6.1.3).

11.3.10 Aufgabe 3 ‚Berechnungen im rechtwinkligen Dreieck'

Berechne die dritte Seite sowie den Umfang und den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

a) $a = 12$ cm $b = 16$ cm $\gamma = 90°$	**c)** $c = 10$ cm $a = 6$ cm $\gamma = 90°$	**e)** $a = 10$ dm $c = 6$ dm $\alpha = 90°$	**g)** $b = 4{,}1$ km $c = 3{,}5$ km $\alpha = 90°$	**i)** $a = 3{,}4$ cm $c = 51$ mm $\beta = 90°$
b) $a = 7$ cm $b = 5$ cm $\gamma = 90°$	**d)** $c = 13$ cm $b = 5$ cm $\gamma = 90°$	**f)** $a = 7$ cm $b = 3$ cm $\alpha = 90°$	**h)** $a = 8$ m $b = 12$ m $\beta = 90°$	**j)** $b = 13{,}4$ dm $c = 95$ cm $\beta = 90°$

Abbildung 11.16: Aufgabe 3 ‚Berechnungen im rechtwinkligen Dreieck'
(Griesel, 2009, S. 128; Schroedel © Bildungshaus Schulbuchverlage GmbH, Braunschweig)

Der Lehrer wählte aus dieser Aufgabe aus dem Schulbuch der Klasse (Griesel, 2009) die Teilaufgaben d) und e) für die Bearbeitung im Unterricht aus.

I [00:21:33.25]

Lehrer: […] wo zwei Größen am rechtwinkligen Dreieck gegeben sind und eine dritte Größe bestimmt werden müsste. Äh das, an der Stelle habe ich nichts anderes gemacht als den Satz des Pythagoras angewandt.

Der Lehrer benennt hier indirekt den prozeduralen Charakter der Aufgabe.

Objektive Kennzeichen der Aufgabe 3: Berechnungen im rechtwinkligen Dreieck

Dies ist eine technische Aufgabe mit Fokus auf Fertigkeiten. Die Schülerinnen und Schüler müssen unter Berücksichtigung der in der Mathematik üblichen Konventionen zur Bezeichnung eines Dreiecks (Winkel α gegenüber Seite a usw.)erkennen, welche Seiten die Katheten und die Hypotenuse darstellen. Sie können dann mithilfe des Satzes des Pythagoras und Termumformungen die fehlende Seite berechnen. Zur Veranschaulichung bietet es sich an, eine Skizze anzufertigen. Bei Teilaufgabe e) tritt die Schwierigkeit auf, dass der rechte Winkel entgegen der üblichen Darstellung der Seite a gegenüberliegt.

Den Flächeninhalt des Dreiecks erhalten die Schülerinnen und Schüler durch Multiplikation der beiden Katheten und Division durch 2, den Umfang erhalten sie durch Addition aller drei Dreiecksseiten. Hierzu wird auch Wissen aus dem Bereich der Arithmetik benötigt. Obwohl in der Aufgabenstellung Größenangaben gegeben sind, ist keinerlei außermathematische Modellierung nötig. Insbesondere müssen in diesen beiden Teilaufgaben keine Größenumrechnungen vorgenommen werden.

Analyse des Unterrichtseinsatzes der Aufgabe 3 ‚Berechnungen im rechtwinkligen Dreieck'

Der Lehrer fordert die Schülerinnen und Schüler auf, diese Aufgabe im Heft selbst zu lösen.

U [01:19:30.27]

Lehrer: […] nehmen wir jetzt die nächste Aufgabe einmal heran, die Aufgabe 9. Da würde ich, äh... äh... Umfang als auch Flächeninhalt noch einmal berechnen und zwar von der Aufgabe d und e. Wenn ihr das jetzt mal bitte im Heft selbst löst.

Obwohl der Lehrer hier insbesondere die Berechnung von Umfang und Flächeninhalt betont, wird in der Besprechung der Aufgaben nicht auf diese beiden Aspekte eingegangen, wie die späteren Transkriptausschnitt zeigen.

Bearbeitung der Aufgabe im Unterricht

Der Lehrer weist die Schülerinnen und Schüler beim Herumgehen während der Schülerarbeitsphase daraufhin, sich eine Skizze zu machen:

U [01:22:10.22]

Lehrer: (? ...) zwei zeichnen und wenn du zwei gezeichnet hast, dann einfach (???) Gegebenheiten (???). Alles andere ergibt sich dann.

Hier fördert der Lehrer wieder explizit den Wechsel der Repräsentationsform.

Bis zum Ende der Stunde bespricht er mit einer Schülerin den Lösungsweg etwas ausführlicher, obwohl die Schülerin zunächst keine Schwierigkeiten mit der Aufgabe gezeigt hat:

U [01:24:08.13]

Lehrer: Genau. Ja und wie berechnest du das dann?

Schüler U: Ähm...... ähm...... Ist ja eigentlich b, a^2 plus b^2 gleich c^2. […] a^2 plus, ähm, b ist ja, muss man dann ja 5 mal 5 rechnen, (???) 25, und dann muss man c, 13 mal 13 rechnen. (notiert die Gleichung nebenbei in ihrem Heft.) […]

Lehrer: Und wie geht es weiter?

Schüler U: Jetzt könnte man das, also 169, minus 25 rechnen.

Lehrer: Mhh.

Schüler U: Dann hätte man a^2. (S. führt die Rechnung in ihrem Heft durch.) […] Dann 144 durch 2, oder?

Lehrer: //So,// jetzt durch 2 teilen?

Schüler U: Oder? Nein...... Muss man da Wurzel ziehen?

Lehrer: Mhh. […] Was würde denn passieren, wenn du durch 2 teilst? Dann kriegst du raus? ... 72, ne.

Schüler U: Oh.

Lehrer: 72 zum Quadrat.

Schüler U: //Nein, das geht ja// gar nicht.

Hier steht vor allem das prozedurale Denken im Vordergrund. Der Lehrer gibt leichte Hilfestellung und weist die Schülerin auf Fehler hin. Er fördert das reflektierende Denken, indem er fragt, was passieren würde, wenn man durch zwei teilen würde. Der Schülerin wird hier nicht nur gezeigt, dass sie einen Fehler gemacht hat, sondern auch warum ihr Vorgehen falsch ist, was einen konstruktiven Umgang mit Fehlern darstellt (vgl. 5.3.3).

Besprechung der Aufgabe im Unterricht

Die Schülerinnen und Schüler sollen diese Aufgaben als Hausaufgabe zu Ende rechnen. Zu Beginn der folgenden Einzelstunde werden die Aufgaben besprochen.

U [01:28:01.02]

Schüler S: […] ich hab auch so 11,9.

Lehrer: 11,9. Hast du das konstruiert? (S. zeigt dem Lehrer sein Heft.) Also, du sollst das ja berechnen, ne...

Hier zeigt sich, dass der Lehrer bei dieser Aufgabe vor allem das prozedurale Denken in den Vordergrund stellt, da er eine Berechnung der Aufgabe fordert.
Die Schülerin P. nennt das richtige Ergebnis a = 12 cm. Es entsteht unruhiges Gemurmel in der Klasse, was darauf hindeutet, dass nicht alle Lernenden mit der Lösung einverstanden sind:

U [01:28:11.13]

Lehrer: […] Wer rechnet die Aufgabe mal vor? ...... Da gibt es noch Klärungsbedarf, seh ich wohl. P., würdest du bitte nach vorne gehen? Und das vorrechnen... Bitte mit kurzer Skizze dazu.

(Schülerin P. kommt an die Tafel und schreibt ihre Rechnung an, siehe Abbildung 11.17)

Lehrer: P, kannst du bitte nochmal eine Konstruktion präsentieren? Eine Skizze des Dreieckes. (Schülerin P. fertigt eine Skizze an und führt die Rechnung kommentarlos fort, siehe Abbildung 11.17)

Lehrer: Ja schön, dass du das nochmal... Seid ihr damit zufrieden? Einverstanden?

(Allgemeine Zustimmung der Klasse.)

Lehrer: Kannst du mal eben angeben, wo bei dir a steht, wo Seite a ist? […]

Schüler Q: Äh, die Beschriftung ist falsch. […] c muss gegenüber vom rechten Winkel sein.

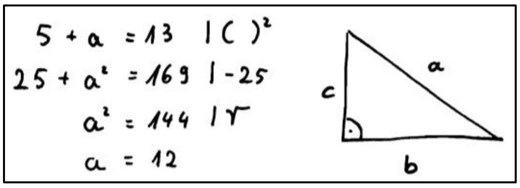


Abbildung 11.17: Tafelanschrieb zur Aufgabe 3, Aufgabenteil d)

(Schülerin P. ändert die Beschriftung an der Tafelskizze, siehe Abbildung 11.18) […]

Lehrer: Ja...... Sagt doch mal, ist denn die Rechnung richtig?

(L. nimmt durch Kopfnicken einen Schüler dran.)

Schüler Y: Weil, wenn a 12 ist, dann steht ja oben 5 plus a gleich 13, aber 5 plus 12 sind ja nicht 13.

Schüler P: Stimmt. […]

Lehrer: Was müsste man an diesem Ansatz denn jetzt ändern? Z.

Schüler Z: Also ich glaube man müsste nicht die, ähm, die (???) Klammer mit der zwei da hinschreiben, sondern einfach 5 hoch zwei plus a hoch 2 ist gleich 13 hoch 2.

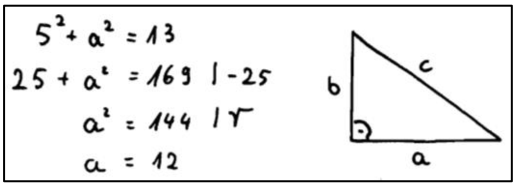


Abbildung 11.18: Korrektur des Tafelanschriebs zur Aufgabe 3, Aufgabenteil d)

Lehrer: Ja...... Könntest du das bitte einmal durchführen, in der ersten Zeile. (Schüler P. führt Änderung durch, siehe Abbildung 11.18)

Hier wird wieder eine Schülerin zur Präsentation des Berechnung an der Tafel aufgefordert, wodurch der Lehrer deutlich das Erläutern der Schülerlösungen fördert. Dabei verlangt er auch eine Visualisierung, wodurch der Wechsel der Repräsentationsform angeregt wird. Der Lehrer fördert hier explizit die selbstständige Überprüfung durch die Lernenden, er lenkt aber die Aufmerksamkeit der Lernenden auf die Rechnung, wodurch er suggeriert, dass die Rechnung fehlerhaft ist. Der Schüler Y. begründet daraufhin selbstständig den Fehler in der Lösung. Es wird dabei vor allem auf der prozeduralen Ebene argumentiert.

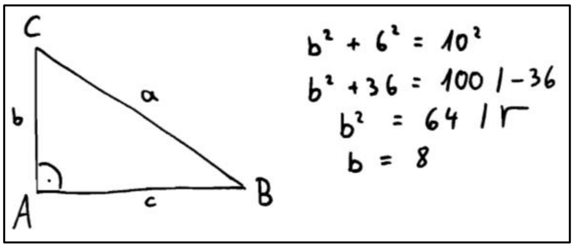


Abbildung 11.19: Tafelanschrieb zur Aufgabe 3, Aufgabenteil e)

Auch bei der Besprechung der zweiten Teilaufgabe entsteht Unruhe in der Klasse, nachdem der Schüler B. das Ergebnis 8 genannt hat:

U [01:32:21.26]

Lehrer: B, kommst du auch bitte nach vorne und rechnest die Aufgabe mal vor. […] wärst du bitte so freundlich und würdest auch eine Planskizze an die Tafel dann schreiben.

(Schüler B. beginnt, eine Skizze an die Tafel zu zeichnen, siehe Abbildung 11.19, zunächst aber A und C sowie a und c vertauscht)

Schüler J: […] Das ist ja, alpha ist ja 90 Grad... Also da wo du jetzt, du hast jetzt gamma als 90 Grad und da müsste aber alpha sein.

Schüler B: Also meinst du A (S. deutet in seiner Skizze auf die Ecke mit dem rechten Winkel.).

Schüler J: Ja.

Schüler B: Aber ist nicht eigentlich immer C beim rechten Winkel? […] Ja, deswegen hab ich das hier ja auch als C gekennzeichnet. Weil wir nämlich letztens noch gesagt haben

(Einige Proteste aus der Klasse. Schüler B. ändert seine Skizze an der Tafel.) […] (Viele Kommentare aus der Klasse; Schüler B. bleibt bei seiner Bezeichnung A für den Eckpunkt am rechten Winkel und schreibt seine Rechnung weiter an, siehe Abbildung 11.19)

Lehrer: Einverstanden? […]

(Allgemeine Zustimmung der Klasse.)

Hier zeigt sich wieder, dass dem Lehrer die Darstellung der Lösungen durch die Schülerinnen und Schüler wichtig zu sein scheint. Außerdem verlangt er auch hier wieder eine Visualisierung der Sachverhalte mithilfe einer Skizze. Außerdem wird hier die kognitive Selbstständigkeit der Lernenden deutlich. Der Lehrer hält sich völlig zurück, die Schülerinnen und Schüler diskutieren selbstständig und geben auch selbstständig Begründungen. Auffällig ist allerdings, dass der Schüler B zwar eine falsche Skizze anfertigt, da er davon ausgeht, dass der Eckpunkt C immer an dem rechten Winkel liegt, dass er aber dennoch die richtige Rechnung präsentiert. Anhand der vorliegenden Videos lässt sich aber das Schülerdenken nicht rekonstruieren.

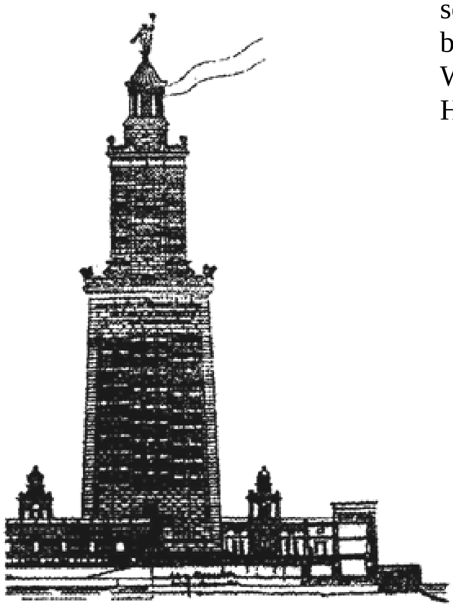
Bei der Besprechung beider Teilaufgaben wird nicht über den Flächeninhalt und den Umfang der Dreiecke gesprochen, obwohl dies im Aufgabentext gefordert ist und auch in der vorangegangenen Stunde vom Lehrer angemerkt wurde (siehe Seite 296). Auch im Interview erwähnt der Lehrer diesen Teil der Aufgabe nicht. Hierdurch werden mögliche Vernetzungsmöglichkeiten nicht wahrgenommen und somit das Potenzial der Aufgabe nicht vollständig genutzt. Auch die Möglichkeit, den Satz des Pythagoras als Hilfsmittel zur Bestimmung fehlender Seiten für die Flächeninhalts- und Umfangsberechnung zu verdeutlichen, wird hier verschenkt. Die Bearbeitung der Aufgabe ist als verfahrensbetont einzuschätzen, da die Lernenden Prozeduren ohne Verbindung mit Konzepten anwenden.

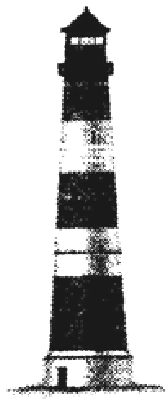
11.3.11 Arbeitsblatt ‚Leuchtturm'

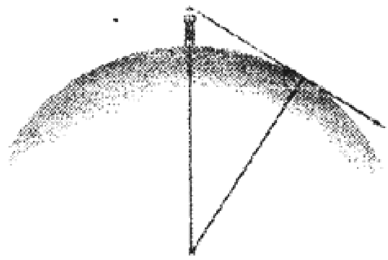
Klasse: 8 Thema: Anwendungen zum Satz des Pythagoras

Wie weit kann man sehen?

Wie weit kann man von einem 45 m hohen Leuchtturm sehen? Stelle dir die Erde als Kugel vor und verwende bei der Berechnung für den Erdradius 6370 km.
Wie weit könnte man sehen, wenn der Leuchtturm die Höhe des Leuchtturms von Alexandria hätte?







Nach der Vermutung und Berechnung von August Thiersch sah der Pharos so aus.

Der Leuchtturm von Alexandria

Im Altertum gab es sieben Bauwerke, die man als »Weltwunder« bezeichnete. Eines dieser sieben Weltwunder war der Leuchtturm von Alexandria. Alexandria ist eine Hafenstadt in Ägypten, sie wurde 331 v. Chr. von Alexander dem Großen gegründet und war eine der bedeutendsten Großstädte der alten Welt. Damals gehörte Ägypten zum griechischen Weltreich, das sich über Persien bis Indien erstreckte. Der berühmte Leuchtturm stand auf einer kleinen Felsinsel vor der Hafeneinfahrt, die Insel nannte sich Pharos. Mit der Zeit hat sich der Name der Insel so mit dem Turm verknüpft, dass man von dem Bauwerk selbst als dem »Pharos von Alexandria« sprach. Das französische Wort »Phare« für Leuchtturm kommt daher. Gebaut wurde der Turm ab 290 v. Chr., 279 wurde er dann feierlich eingeweiht.
Ursprünglich war das Bauwerk allerdings gar nicht als Leuchtturm gedacht, sondern als Wahrzeichen der neuen Stadt, als Künder der Weltmacht des griechisch-morgenländischen Reiches. Seine enorme Höhe deutet das an, er war mehr als 120 m hoch.
Schon im Altertum war bekannt, dass die ideale Höhe eines Leuchtturms bei etwa 40 m liegt. Sein Leuchtfeuer hat nämlich durch die Erdkrümmung nur eine begrenzte Reichweite. Ein Feuer auf der Spitze eines 10 m hohen Turms leuchtet 20 km weit. Baut man ihn doppelt so hoch, leuchtet das Feuer nicht etwa doppelt so weit: Die Sichtweite eines in 20 m Höhe angebrachten Lichts beträgt nur 25 km. Und ein Turm von 110 m Höhe strahlt nicht einmal 1 km weiter als einer von 100 m. Der Bau eines allzu hohen Leuchtturms bedeutet folglich nur Verschwendung von Zeit und Material. Da der riesige Turm aber nun schon mal stand, ging man um das Jahr 150 (also rund 400 Jahre nach seiner Vollendung) dazu über, auf der Turmspitze ein nächtliches Feuer zu schüren und das Bauwerk fortan auch als Leuchtturm zu benutzen.

Aufgaben:

Lies dir zunächst den Text durch. Im Text sind falsche Werte für die Sichtweiten von diversen Türmen angegeben worden. Korrigiere sie!

Abbildung 11.20: Arbeitsblatt ‚Leuchtturm'

Dieses Arbeitsblatt wurde vom Lehrer selbst erstellt.

I [00:28:26.09]

Lehrer: Es ging mir da an der Stelle jetzt nur noch um die Anwendung. Das heißt, der Bereich der Beweise war jetzt abgearbeitet für mich und jetzt ging es mir einfach nur darum, [...] die Stärke dieses Satzes zu zeigen. […] Das ist für mich ganz wichtig und das sie einfach ein Gefühl dafür kriegen, wie beziehungsreich dieser Satz eingesetzt werden kann.

Das Arbeitsblatt beinhaltet drei Aufgaben, ‚Leuchtturm 45m', ‚Leuchtturm von Alexandria' und ‚falsche Werte für die Sichtweiten von Türmen', die jedoch von der mathematischen Struktur und vom mathematischen Anspruchsgehalt ähnlich sind, weshalb diese Aufgaben gemeinsam analysiert werden.

Objektive Kennzeichen der Aufgaben des Arbeitsblattes ‚Leuchtturm'

Alle drei Aufgaben sind rechnerische Modellierungs- und problembezogene Aufgaben, die sich auf den außermathematischen Kontext der Sichtweitenbestimmung von Leuchttürmen beziehen. Allerdings ist der Grad der außermathematischen Modellierung in den ersten beiden Aufgaben relativ niedrig, da das Modell durch die Zeichnung schon vorgegeben ist. Die Schülerinnen und Schüler sollten sich klar machen, dass die Sichtweite des Leuchtturms in dieser Zeichnung durch die Tangente an den Kreis bestimmt wird, so dass ein rechtwinkliges Dreieck entsteht. Im letzten Teil des Arbeitsblattes müssen die Schülerinnen und Schüler zusätzlich zunächst den Text, also die Realsituation, verstehen und die verschiedenen Werte miteinander in Beziehung setzten. Außerdem müssen sie eine Strategie zur Identifizierung der falschen Werte entwerfen, weshalb das außermathematische Modellierungsniveau hier höher ist. Desweiteren treten in der dritten Aufgabe auch innermathematische Modellierungen, z.B. beim Vergleich der Werte, auf.
Der Prozess des mathematischen Arbeitens nach der Übersetzung in die Mathematik kann in allen Aufgabenstellungen gleich ablaufen. Es müssen lediglich andere Werte für die Höhe des Turmes benutzt werden. Anhand der vorgegebenen Skizze können sich die Schülerinnen und Schüler klarmachen, dass hier ein rechtwinkliges Dreieck vorliegt, bei dem die Länge einer Kathete gesucht ist. Die andere Kathete ist durch den Erdradius gegeben, die Hypotenuse lässt sich durch Addition des Erdradius mit der Höhe des entsprechenden Turmes berechnen. Hier sind die verschiedenen Einheiten zu beachten, sodass zunächst eine Größe umgerechnet werden muss. Mithilfe des Satzes des Pythagoras kann nun nach einigen algebraischen Umformungen (auch unter Verwendung binomischer Formeln) die Länge der fehlenden Kathete und damit die Sichtweite berechnet werden. In der dritten Aufgabe ist teilweise auch das entgegengesetzte Vorgehen, die Berechnung der Höhe des Turmes zu einer gegebenen Sichtweite möglich. Dabei kann aber dasselbe Modell benutzt werden. Die Lösung der dritten Teilaufgabe ist also im Gegensatz zu den Lösungen der ersten beiden Aufgaben nicht eindeutig. Die Schülerinnen und Schüler können in der dritten Aufgabe mithilfe von rechnerischen Argumenten begründen, welche Werte falsch sind und diese korrigieren, sodass mathematisches Argumentieren auf niedrigem Niveau notwendig ist. In allen drei Aufgaben ist auch die Verwendung von Darstellungen auf niedrigem Niveau nötig, da jeweils mit der vorgegebenen Darstellung gearbeitet werden kann.

Analyse des Unterrichtseinsatzes der Aufgaben des Arbeitsblattes ‚Leuchtturm'

Leuchtturm 45m

Die Schülerinnen und Schüler sollen sich zunächst nur mit dem ersten Teil des Arbeitsblattes, der Sichtweite eines Turmes von 45 m Höhe, beschäftigen. Der Lehrer hat die auf dem Arbeitsblatt angegebene Planskizze an die Tafel gezeichnet und fordert die Schülerinnen und Schüler auf zu beschreiben, wie die Sichtweite berechnet werden kann:

U [01:38:58.29]

Lehrer: Gehst du mal nach vorne und zeigst das.

Schüler X: Also, man könnte diesen Teil hier nehmen (deutet an der Tafel auf Strecke zwischen Leuchtturmspitze und Berührpunkt mit dem Halbkreis.) und den dann da (deutet auf den eingezeichneten Radius) so ranhalten und gucken wie lang der ist... Wenn das hier 6.370 sind.

Lehrer: […] sein Vorschlag (deutet auf Schüler X). Ist der praktikabel?

Schüler Y: Das wird schon gehen, aber man weiß ja nicht, wie viel denn, wenn der jetzt... da jetzt zum Beispiel da jetzt, wo X gerade die Finger hatte, man kann das ja nicht auf den Meter genau messen, wenn man das jetzt da ransetzt, weil man hat ja gar nicht den richtigen Maßstab […].

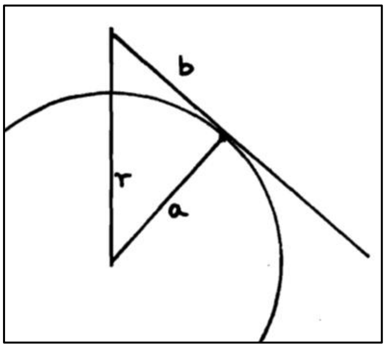


Abbildung 11.21: Skizze an der Tafel zum Arbeitsblatt Leuchtturm

Schüler L: (steht an der Tafel) Also das (deutet auf Radius) ist ja dann auch a, (beschriftet den Radius mit a, siehe Abbildung 11.21). […] 6.370, das ist dann zum Quadrat plus b hoch 2, weil das (deutet auf Kathetenseite) kann man dann als b sagen und dann... c ist halt 6370 plus 45. Das sind dann 6.415 zum Quadrat (schreibt parallel zu den Erklärungen an die Tafel: $6370^2 + b^2 = 6415^2$).

Lehrer: Einverstanden?

(Einige Schüler der Klasse signalisieren Zustimmung, einige Unverständnis.)

Schüler X: Kannst du das nochmal sagen? […]

Schüler Y: Warum Quadrat?

Schüler L: Ähm, weil ja

Schüler Z: a^2 plus b^2 gleich c^2.

Schüler X: Wie kommst du jetzt auf diese, ähm

Schüler L: Das (deutet auf die 6415^2.) ist einfach, das ist ja auch der Radius der Erde und dann plus die... 45 m der, des Leuchtturm. […]

Die Schülerinnen und Schüler erläutern hier kognitiv selbstständig verschiedene Lösungswege, der Lehrer regt die Lernenden lediglich zur Visualisierung des Lösungsweges und zur selbstständigen Überprüfung an. Insbesondere fordern sich die Schülerinnen und Schüler gegenseitig zu weiteren Erklärungen auf. Dabei steht vor allem prozedurales Denken im Vordergrund.

Der Lehrer weist aber direkt darauf hin, dass in der vorgeschlagenen Rechnung noch ein Fehler ist:

U [01:42:40.10]

Lehrer: Da ist noch ein kleiner Fehler drin, ein Rechenfehler. Der Ansatz ist aber richtig.

Schüler Y: Muss man da nicht minus rechnen?

Lehrer: Warum minus?

Schüler Y: Weil, ähm, das ist ja vom Radius aus bis zum Leuchtturm, ja OK egal, nein.

Lehrer: Die Addition ist schon richtig, aber bei der Addition haben wir eines übersehen...... Ja?

Schüler Z: Vielleicht muss da 6.415 hoch vier.

Lehrer: Warum hoch vier?

Schüler Z: Nein.

Lehrer: […] Ein kleiner Fehler ist noch drin auf der rechten Seite. Wie lang ist die Hypotenuse? […]

Schüler Z: Also das sind, die 6.370 sind Kilometer und die 45 sind Meter.

Schüler L: Achso.

[01:44:54.01] Lehrer: Genau. Das müssen wir hier noch berücksichtigen, nicht.

(Schülerin L. korrigiert ihre Rechnung, siehe erste Zeile in Abbildung 11.22)

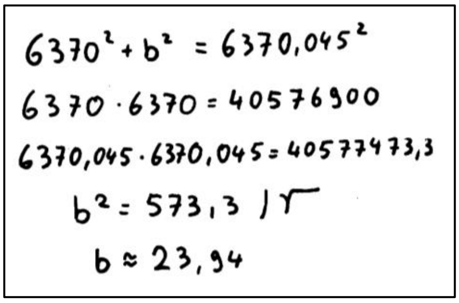


Abbildung 11.22: Tafelanschrieb zur ersten Leuchtturmaufgabe

Der Lehrer fordert die Schülerinnen und Schüler jeweils zur Begründung auf. Er lenkt leicht, da er zwar die Richtung des Gedankengangs (Blick auf die Hypotenuse) vorgibt, die eigentliche Korrektur des Fehlers wird aber durch die Schülerinnen und Schüler vorgenommen. Der Fehler wird im Detail erläutert, weshalb hier ein konstruktiver Umgang mit Fehlern vorliegt.

Es wird aber in der Aufgabenbearbeitung in keiner Weise begründet, dass die Sichtweite durch eine Tangente an die Erdkugel ermittelt werden kann und dass deshalb ein rechtwinkliges Dreieck entsteht. Dies erkennt auch der Lehrer im Interview:

I [00:32:06.21]

Lehrer: Äh... Bei der Leuchtturmaufgabe da war es […] Das heißt zu erkennen, dass das jeweils mein Radius ist, den ich hier habe, und zu dem Radius kommt aber noch die Höhe des Leuchtturmes hinzu und das ich, diese Tangente, die ich hier habe, einen rechten Winkel bildet zum Radius. […] das hätte man auch zum Beispiel auch noch mehr thematisieren sollen, dass das eine Tangente ist. Das habe ich jetzt aber so stillschweigend denn einfach übersprungen.

Der Lehrer zeigt hier, dass er sein eigenes Verhalten kritisch reflektieren kann. Insbesondere kann er die fachlichen Inhalte dieser Aufgabe i Interview im Detail wiedergeben.

Der Lehrer fordert die Schülerinnen und Schüler auf, den Ansatz abzuschreiben, bzw. abzuzeichnen und b zu berechnen. Sie können dazu ein Computer-Algebra-System (CAS) benutzen. Der Lehrer geht während der nun folgenden Schülerarbeitsphase durch die Klasse und beobachtet die Lernenden. Ein Schülerpärchen diskutiert beispielsweise, wie man aus b^2 das b bestimmt:

U [01:47:16.24]

Schüler M: Aber das ist ja jetzt b hoch zwei. Nehm ich das jetzt noch mal, durch sich selbst sozusagen, oder nein.

Schüler J: Nein, das ist nicht b hoch zwei... Doch klar, das muss jetzt nochmal durch, klar muss ja durch zwei nochmal.

Schüler M: Aber das ist ja jetzt b hoch 2. Aber wie krieg ich aus dem b hoch zwei jetzt b?

Schüler J: Wurzel.

Schüler M: Ja.

Die Schüler kommen hier gemeinsam, aber ohne Hilfe des Lehrers zur richtigen Lösung. Sie arbeiten also kognitiv selbstständig.

Die Schülerin L. hat mithilfe der ‚solve-Funktion' des CAS zwei lange Zahlen herausbekommen:

U [01:50:32.12]

Lehrer: Genau, jetzt hast du zwei verschiedene Ergebnisse. Einmal minus und einmal positiv... Und was kommt in Frage?

Schüler L: Positiv.

Lehrer: Kannst das positive Ergebnis übernehmen. […] Wie viele Stellen nach dem Komma wären denn hier sinnvoll?

Schüler L: Nicht so viele. […] Vielleicht zwei Stellen?

Lehrer: Zwei Stellen würden reichen, nicht... Und wenn man das auf den Meter genau haben will, wie viele Stellen müsstest du dann nehmen? […]

Schüler L: Dann 23,944.

Der Lehrer leitet die Schülerin zur Reflexion ihres Ergebnisses an, allerdings lenkt er auch leicht bei der Rundung des Ergebnisses.

Als die ersten Schülerinnen und Schüler Ergebnisse nennen, wendet sich der Lehrer wieder dem Plenum zu:

U [01:55:06.02]

Lehrer: So...... Ich hab schon gesehen, die ersten haben die Ergebnisse raus […] Wer hat denn jetzt noch Schwierigkeiten mit der Aufgabe? (Ein Schüler meldet sich) […] Wo war jetzt noch das Problem bei dir?

Schüler X: Äh... Ich wusste nicht wie man das berechnen sollte. […]

Lehrer: Kann mal einer das erläutern? ...... Ja. […]

Schüler R: (kommt an die Tafel) Also, man muss erst... das und das (deutet in der Rechnung auf 6.370^2 und $6.370,045^2$) ausrechnen. […] Und dann muss man jetzt die Zahl (deutet auf die 40.577.473,3) ähm, minus die Zahl (deutet auf die 40576900) rechnen, und dann kriegt man da raus, ähm, also hat man dann 573,3 raus […] Dann ähm, b^2 gleich 573,3 und das muss man dann halt noch, hier,

Schüler Y: Wurzel.

Schüler R: Was?

Schüler Z: Wurzel.

Schüler R: Ah ja, muss man jetzt halt noch (S. schreibt Rechnung weiter an die Tafel.) So und dann kommt da raus (tippt Rechnung in seinen Taschenrechner ein) ähm... (S. schreibt Ergebnis für b an.)

Lehrer: Musst jetzt aber hinschreiben ungefähr.

Der Lehrer fördert hier erneut das Erläutern von Lösungswegen durch die Schülerinnen und Schüler mithilfe von Visualisierungen an der Tafel. Dabei unterstützen sich die Schülerinnen und Schüler gegenseitig bei der Erklärung und arbeiten kognitiv selbstständig. Außerdem achtet der Lehrer hier auf die mathematisch korrekte Schreibweise mit dem Ungefähr-Zeichen. Die Einheiten tauchen allerdings nicht in der Rechnung auf. Die Vorstellung des Ergebnisses fokussiert wieder prozedurales Denken.

Der Lehrer leitet nun die Phase der Validierung des Ergebnisses (vgl. 5.2.3):

U [01:59:41.01]

Lehrer: So, man kann 24 km weit gucken von einem 45 m hohen Turm schauen. Ist das überraschend?

Schüler X: Eigentlich schon, oder?

Lehrer: Was hättet ihr denn erwartet?

Schüler X: Also, weil wenn man sonst irgendwo steht, kann man, ja weiß ich auch nicht... Ah, obwohl. Wenn man normal auf dem Boden steht, wie kann man dann wie weit gucken?

Lehrer: Gute Frage...... Also wenn ich etwa, […] 1,70 m Augenhöhe? 1,70. Wie weit könnte ich dann schauen? Wäre eine gute Aufgabe. Die gucken wir uns, können wir nochmal, zu einem späteren Zeitpunkt anschauen.

Schüler R: Also, ich finde, dass ist eine realistische Zahl. Weil […] Ja, ich hätte jetzt, vielleicht, ich hätt jetzt vielleicht so dreißig oder so erwartet, aber […]

Schüler Y: Also ich hätte jetzt nicht erwartet, dass man so weit gucken kann... Eher weniger. […]

Schüler R: Aber, vom Leuchtturm muss ja schon weit […] Im Nebel oder so müssen sich die Schiffe da ja nach orientieren und deswegen... Also das... muss schon so weit sein […].

Schüler B: Ich habe gedacht, dass wäre mehr... Also ist das jetzt in Meter oder

Lehrer: Das ist Kilometer. 24 Kilometer.

Die Schülerinnen und Schüler diskutieren größtenteils selbstständig über das Ergebnis und Begründen ihre Erwartungen auch ohne Aufforderung durch den Lehrer. Ein Schüler bringt

an dieser Stelle auch die Einheiten ins Gespräch ein, die vorher nicht thematisiert werden, woraufhin der Lehrer die benötigte Einheit vorgibt und damit kurzzeitig stark lenkt.
Es fällt auf, dass der Lehrer bei der Bearbeitung dieser Aufgabe alle Phasen eines außermathematischen Modellierungskreislaufes (siehe 5.2.3) durchläuft. Die einzelnen Phasen werden dabei in verschiedenen Sozialformen bearbeitet: Das mathematische Modell wird im Plenum gemeinsam durch die Schülerinnen und Schüler und den Lehrer erstellt, wobei allerdings ein Großteil des Modells bereits durch die Skizze vorgegeben ist. Das mathematische Arbeiten führen die Lernenden nun in einer Schülerarbeitsphase durch, woraufhin das Ergebnis im Plenum interpretiert und validiert wird. Die Bearbeitung dieser Phasen ist größtenteils verfahrensbetont, da wichtige Begründungsschritte (z.B. Warum entsteht hier ein rechtwinkliges Dreieck?) nicht thematisiert werden. Allerdings wird das Verständnis der Realsituation durch die Phase der Validierung gefördert. Insgesamt fällt die intensive Beteiligung der Schülerinnen und Schüler am Lösungsprozess und insbesondere bei der Darstellung der Ergebnisse auf.

Sichtweite in Augenhöhe

Der Lehrer hat die von einem Schüler aufgeworfene Frage nach der Sichtweite in Augenhöhe zunächst zurückgestellt, er kommt aber nach der Validierung der Sichtweite eines Leuchtturms mit einer Höhe von 45m darauf zurück.

U [02:01:07.11]

Lehrer: Gut, kommen wir zur nächsten Aufgabe. Äh, eine Überlegung könnten wir ja vielleicht noch etwas vertiefen. X., könntest du einfach mal selber nachrechnen, du hast ja jetzt die Grundlage schon, wie weit würde ich schauen können, wenn ich sozusagen jetzt unter Berücksichtigung der Erdkrümmung meine eigene Augenhöhe berücksichtigen würde mit 1,70 m […]

Schüler X: Ich glaube, dann ist das ja eigentlich wie das, nur das man diese 45 m nicht dazu rechnen muss.

Lehrer: Sondern? […] Die 1,70 m dann aber nur. […] Kannst du das mal ausrechnen?

Der Lehrer lenkt kurz durch die Vorgabe des Wertes für die Augenhöhe.
Der Schüler X. kann die Lösung der Aufgabe schnell berechnen, während die anderen Schüler sich schon mit der nächsten Aufgabenstellung beschäftigen.

U [02:04:13.24]

Schüler Z: Ich hab das mit dem Menschlichen ausgerechnet. Das sind 2, äh, 4,6 km.

Lehrer: 4 km nur? […]

Schüler J: Man muss ja sagen, das muss dann auf einem freien Feld sein. Also es darf ja keine Berge, es darf ja nichts kommen.

Die Schülerinnen und Schüler validieren das Ergebnis hier selbstständig. Ohne Aufforderung durch den Lehrer.
Dieser äußert im Interview, dass er die Idee des Schülers X. sehr gut fand:

I [00:24:39.28]

Lehrer: […] Gut fand ich auch zum Beispiel auch die Frage, von X. […] wie weit kann ich eigentlich gucken, wenn ich... auf dem Meer stehen würde […]. X. […] hat denn auch anschließend gleich das Ergebnis gehabt, wo er dann sagte, so und so viel Kilometer... […] Und diese Frage, die hier an der Stelle kam, die fand ich schon, schon sehr gut, weil ich, das zeigte auch einfach, dass in dem Moment auch Interesse da war. Interesse zu wissen, wie weit kann ich überhaupt gucken.

Hier zeigt sich die Bereitschaft des Lehrers auch aufgeworfene Aufgabenideen der Schülerinnen und Schüler in den Unterricht zu integrieren.

Falsche Werte für die Sichtweiten von Türmen

Der zweite Aufgabenteil, die Sichtweite vom Leuchtturm von Alexandria, wird nicht separat im Unterricht erarbeitet. Stattdessen geht der Lehrer direkt zur dritten Aufgabe des Arbeitsblattes über. Er lässt zunächst den längeren Text über den Leuchtturm von Alexandria und die dazugehörige Aufgabenstellung vorlesen. Anschließend erläutert er die Aufgabenstellung:

U [02:05:02.02]

Lehrer: […] schauen wir uns unten mal die Aufgabe an, da sind einige Daten, die sind fehlerhaft. Jetzt geht es darum, dass ihr diese Daten korrigiert. Ihr könnt das jetzt in der Form machen, dass ihr direkt die Korrekturen in diesem Blatt vornehmt. X.?

Schüler X: Ich glaube nicht, dass man... mit einem 10 m hohen Turm 20 km weit gucken kann.

Lehrer: Warum glaubst du das nicht?

Schüler X: Weil da ist der Turm jetzt 45 m hoch und da kann man nur 3, äh 4 km weiter gucken.

Lehrer: Ja... Schön. Das ist eine Zahl, die wir auf jeden Fall überprüfen müssen. Gibt es noch eine andere Zahl, die äh, überprüft werden sollte? ... Ja?

Schüler J: Dies 110 m und 1 km. Also es kann natürlich sein, dass der Winkel am Ende so steil wird, aber was ich auch nicht glaube.

Lehrer: Genau.... Auch das müsste überprüft werden, nicht.

Der Lehrer fordert hier beim Schüler X. eine Begründung der Vermutung ein, wobei der Schüler versucht eine Beziehung zur ersten Aufgabe herzustellen, allerdings vermischt er hier die Zahlen aus der ersten Aufgabe (45 m) und dem Ergebnis der Sichtweite eines Menschen mit 1,70 m Augenhöhe (4 km). Dem Lehrer scheint dies nicht aufzufallen. Der Schüler J. versucht ohne Aufforderung durch den Lehrer seine Vermutung selbstständig zu begründen, was wiederum auf eine Begründungskultur im Unterricht hinweisen kann.

Der Lehrer fordert die Klasse auf, die Daten nun selbstständig auf ihre Plausibilität zu überprüfen, wobei er selbst durch die Klasse geht, die Schülerinnen und Schüler beobachtet und teilweise Hilfestellung gibt. Eine Schülerin möchte die Sichtweite eines Turmes mit 10 m Höhe, die im Text als 20 km angegeben ist, überprüfen, hat aber Probleme die Rechnung aufzustellen:

U [02:07:57.23]

Schüler Y: Man muss doch, ähm... 20 hoch zwei plus b hoch zwei gleich 6.380 hoch 2.

Lehrer: Das macht keinen Sinn, nicht. […] Was hast du noch gegeben in der Figur?

Schüler Y: Ähm, (? ...)

Lehrer: Ja...... Das weißt du ja auch noch. Das ist ja der Radius der Erde. Also auch noch mal 6.370. […] Das geht ja vom Mittelpunkt der Erde aus zum Rand. Und hier auch vom Mittelpunkt wieder bis zum Rand, nur das hier oben noch mal ein Turm drauf kommt von 10 m...... Ja, jetzt musst du das nur überprüfen, ob das stimmt. Das heißt, du hast ja hier ein rechtwinkliges Dreieck, nicht. Der rechte Winkel ist hier oben. Dann ist das Quadrat der beiden Katheten, also die jetzt (L. deutet auf die beiden Katheten des in die Erdkugel eingezeichneten Dreiecks auf der Skizze auf dem Arbeitsblatt), genauso groß wie die Hypotenuse quadriert.

Der Lehrer gibt dieser Schülerin das Vorgehen detailliert vor und lenkt damit kurzzeitig stark. Wie die Schülerin auf die Erläuterungen des Lehrers reagiert, kann aufgrund des Endes der Videoaufzeichnung nicht mehr dargestellt werden. Direkt im Anschluss an diese Szene ist die Unterrichtsstunde zu Ende, die Schülerinnen und Schüler sollen das Arbeitsblatt als Hausaufgabe beenden. Aufgrund der geringen Daten zur Bearbeitung dieser Aufgabe, ist keine genauere Einschätzung der Aufgabenbearbeitung möglich.

11.4 Analysen von Aspekten des fachdidaktischen Wissens, die sich in der Gesamtbetrachtung des Unterrichts zeigen

11.4.1 Umgang mit den Schülerinnen und Schülern

Reagieren auf richtige Lösungen

Fast immer bestätigt der Lehrer die Richtigkeit der Lösung (meist durch ein einfaches „Ja“). Allerdings lässt sich beim Aufstellen der Vermutungen bei der 3. Teilaufgabe von Aufgabe 1 und auch bei der mündlich im Plenum bearbeiteten Aufgabe 2 mehrfach beobachten, dass der Lehrer kommentarlos den nächsten Lernenden zum Reden auffordert. Oft fordert der Lehrer die Schülerinnen und Schüler zur Begründung ihrer Antworten auf oder stellt Fragen zur Reflexion der Antwort. Häufig fordert der Lehrer die Schülerinnen und Schüler zur erneuten Formulierung der Antwort auf, allerdings aus unterschiedlichen Gründen. Einerseits soll die Lösung nochmals formuliert werden, da nicht alle Lernenden die Antwort verstanden haben, andererseits wird aber auch die erneute Formulierung unter Verwendung von Fachsprache oder mithilfe der Verdeutlichung anhand von Zeichnungen vom Lehrer gefordert. Mehrfach wiederholt der Lehrer die Schülerantwort in eigenen Worten oder unter Verwendung von Fachsprache. Oft gibt der Lehrer im Anschluss an die richtige Schülerantwort einen Hinweis auf das weitere Vorgehen oder stellt eine weiterführende Frage. Manchmal führt er die richtige Antwort aber auch selbst fort und verdeutlicht z.B. die Schülerlösung an der Tafel. Mehrmals werden die Schülerinnen und Schüler gelobt.

Reagieren auf Fehler

Häufig weist der Lehrer darauf hin, dass ein Fehler vorliegt, wobei er meistens nicht den genauen Fehler benennt. Er wiederholt z.B. die falsche Schülerantwort mit fragender Betonung oder weist allgemein auf einen Fehler hin. Hierdurch fördert er die selbstständige Überprüfung. Die Korrektur des Fehlers wird oft durch die Lernenden selbst oder durch Mitschüler vorgenommen. Dies geschieht auch ohne direkte Aufforderung durch den Lehrer. Insbesondere weisen sich die Schülerinnen und Schüler gegenseitig auf Fehler hin. Der Lehrer besteht meistens auf der korrekten Formulierung der Antwort. Manchmal korrigiert der Lehrer den Schülerfehler aber auch direkt selbst oder erläutert, wie die Schülerinnen und Schüler weiter vorgehen sollen. Zuweilen gibt er aber auch nur weiterführende Hinweise, die die Lernenden zum selbstständigen Weiterdenken anregen. Eher selten fragt der Lehrer nach einer Begründung der falschen Antwort.

Reagieren auf Probleme und Schwierigkeiten

Treten im Unterricht Probleme auf, z.B. wenn die Schülerinnen und Schüler nicht weiter wissen oder einen Lösungsschritt nicht verstehen, fordert der Lehrer häufig andere Schülerinnen und Schüler zur Erklärung des Vorgehens auf. Zweimal fordert er dabei explizit Visualisierungen ein. Teilweise wiederholt der Lehrer aber auch selbst das bisherige Vorgehen der Lernenden und regt sie dann zum Weiterdenken an. In zwei Fällen gibt der Lehrer nur Motivationshilfen, wodurch die Schülerinnen und Schüler zur kognitiven Selbstständigkeit angeregt werden. Oft lenkt der Lehrer die Schülerinnen und Schüler aber auch leicht, indem er weiterführende Hinweise gibt. Mehrmals gibt er sogar direkt das weitere Vorgehen an und lenkt damit stark. Nur zweimal werden die Lernenden aufgefordert, zu erklären, warum sie Schwierigkeiten haben.

11.4.2 Gebrauch verschiedener Repräsentationsformen

Der Lehrer wechselt oft die Repräsentationsform, wobei enaktive, ikonische, sprachliche und formale Repräsentationsformen jeweils häufig auftauchen. Der Lehrer ermöglicht den Schülerinnen und Schülern umfassende enaktive Erfahrungen, da die Beweise 1, 2, 4 und 5 das Legen von Puzzleteilen beinhalten. Er fordert die Lernenden auch bei der Präsentation der Beweise auf, diese Zerlegungen zu verdeutlichen. Außerdem scheint der Lehrer sehr viel Wert auf Visualisierungen zu legen, da er selbst Skizzen anfertigt und seine Erklärungen mit Darstellungen unterstützt (siehe z.B. 0), aber auch die Schülerinnen und Schüler immer wieder zur Erklärung anhand einer Skizze auffordert (siehe z.B. 11.3.3). Da die Schülerinnen und Schüler fast immer zur ausführlichen Erläuterung der Lösungen und Strategien aufgefordert werden, werden die Inhalte sprachlich repräsentiert. Auch die formale Repräsentationsform wird mehrfach beim Aufstellen und Umformen von Termen verwendet (siehe z.B. 11.3.5 und 11.3.11).

11.4.3 Gebrauch von Begriffen

Der Lehrer verwendet selbst sowohl im Interview als auch im Unterricht durchgehend Fachsprache. Er scheint auch sehr viel Wert auf die Verwendung von Fachsprache durch die Schülerinnen und Schüler zu legen. Dies äußert er schon in der Planung.

> Planung:
> Ferner wird erwartet, dass die Schüler ihre Überlegungen anderen unter Verwendung der Fachsprache schüleradäquat mitteilen.

Er erkennt allerdings, dass die Schülerinnen und Schüler hierbei noch Schwierigkeiten haben und teilweise auf umgangssprachliche Beschreibungen zurückgreifen. Dies geschieht z.B. beim Beweis 3, da den Schülerinnen und Schülern der Begriff der Scherung noch nicht bekannt war (siehe 11.3.3). Im Unterricht wird deutlich, dass der Lehrer häufig die Verwendung von Fachsprache einfordert und auch auf die Wiederholung von Begriffen Wert legt (siehe z.B. 11.3.1). Die Schülerinnen und Schüler benutzen nach der Wiederholung die Begriffe Katheten und Hypotenuse sicher und verwenden häufig korrekte Fachsprache. Allerdings greifen sie vor allem bei der Beschreibung enaktiver Strategien auf Alltagssprache (z.B. die Teile da einsetzen) zurück (siehe jeweils die Präsentationen der Beweise).
Außerdem verdeutlicht der Lehrer durch die häufige Aufforderung zum Begründen Zusammenhänge zwischen verschiedenen mathematischen Begriffen (z.B. Flächengleichheit beim Quadrat und beim gescherten Parallelogramm).

11.4.4 Herstellen von Verbindungen

Verbindungen zum Vorwissen

Alle Aufgaben innerhalb der drei Unterrichtsstunden greifen den Satz des Pythagoras auf, den die Schülerinnen und Schüler in den vorangegangenen Stunden bereits kennengelernt haben. Der Lehrer äußert im Unterricht deutlich, dass die Aufgabe 1 der Wiederholung dieser Kenntnisse dient (siehe 11.3.1). Er wiederholt in diesem Zusammenhang auch die bereits bekannten Begriffe ‚Kathete' und ‚Hypotenuse'.
Bei der Auswahl der Beweise hat der Lehrer berücksichtigt, dass die Lernenden für die Beweisideen möglichst viele bereits behandelte Unterrichtsinhalte wiederaufgreifen können. Dazu zählen beispielsweise Elemente der Kongruenzgeometrie (Beweise 1, 2, 4, 5, 7 und 8) sowie Termumformungen und binomische Formeln (Beweise 6 und 7). Der Lehrer führt hierbei Argumente der Lernpsychologie an:

I [00:15:46.09]

Lehrer: […] es sollten möglichst viele, Unterrichtsinhalte, die wir vorher schon behandelt hatten, sollten nochmal wieder auftauchen. […] Zum Beispiel hier, das ist […] die Geometrie aus dem letzten Schuljahr, […] die Kongruenzgeometrie […] das die binomischen Formeln da eine Rolle spielen, dass man Gleichungen aufstellt.

Planung:

Dabei soll das Wissen immer wieder in verschiedenen Kontexten neu organisiert werden um das Neue mit Bekanntem gut zu vernetzen.

Hier zeigt der Lehrer Wissen über die Bedeutung der Vernetzung von Wissen beim Lernen, woraus auf ein konstruktivistisches Verständnis vom Lernen geschlossen werden kann.
Auch in den folgenden Anwendungsaufgaben (Aufgabe 3 und Arbeitsblatt Leuchtturm) benötigen die Schülerinnen und Schüler viele Vorkenntnisse, z.B. das Wurzelziehen und Termumformungen, zum Lösen der Aufgaben. Der Lehrer greift aber nicht nur auf weiter zurückliegendes Vorwissen zurück. Die in der Gruppenarbeit erarbeiteten Beweisideen werden in den beiden folgenden Beweisen (Beweise 7 und 8) bewusst vom Lehrer wieder aufgegriffen (siehe 11.3.7).

Inhaltliche Verbindungen

Innerhalb eines Stoffgebietes

In allen Aufgaben und Beweisen steht der Satz des Pythagoras im Vordergrund, sodass hierdurch die Aufgaben inhaltlich vernetzt sind.

I [00:28:42.03]

Lehrer: Und jetzt bin ich dabei, dass ich einfach verschiedene Aufgabentypen heranziehe, die alle mit dem Satz des Pythagoras gelöst werden können.

Hier zeigt sich, dass der Lehrer diese inhaltliche Vernetzung bewusst hergestellt hat.
Insbesondere bei der Erarbeitung der Beweise werden aber auch andere Teilgebiete innerhalb der Geometrie, beispielsweise Kongruenz von Dreiecken (Beweise 1, 2, 4, 5, 7 und 8), Flächenberechnung von Dreiecken (Beweise 6 und 7) sowie geometrische Abbildungen wie z.B. Scherungen und Verschiebungen (Beweis 3) angesprochen. Die mögliche Vernetzung des Satzes des Pythagoras mit Flächeninhalts- und Umfangsberechnungen an Dreiecken, wie sie in Aufgabe 3 gefordert gewesen ist, wird vom Lehrer nicht genutzt.

Zwischen verschiedenen Stoffgebieten

Im Laufe des Unterrichts, dessen thematischer Fokus im Bereich der Geometrie liegt, werden immer wieder auch Aspekte der Arithmetik und Algebra aufgegriffen, da die Schülerinnen und Schüler mehrfach Seitenlängen oder Flächeninhalte berechnen sollen (Beweis 6 und 7, Aufgabe 3, Arbeitsblatt Leuchtturm). Hierzu benötigen sie einerseits Termumformungen und binomische Formeln sowie andererseits das Rechnen mit rationalen Zahlen, quadratischen Potenzen und Wurzeln.

Weitere Verbindungen

In den ersten beiden Unterrichtsstunden steht die Entwicklung von Beweisideen im Vordergrund, insbesondere wird in allen Beweisen die Argumentationsfähigkeit der Lernenden geschult, wenn auch auf unterschiedlichem Niveau. Durch die Erarbeitung in Gruppen und die Präsentation der Ergebnisse wird ebenso die Kommunikationskompetenz bei der Erarbeitung der Beweise gefördert.

> Planung:
>
> Am Beispiel der Behandlung der Satzgruppe des Pythagoras sollen die Kompetenzbereiche ,,kommunizieren" und "mathematisch argumentieren" erweitert werden. Diese Vorgehensweise garantiert eine Verknüpfung beider Kompetenzbereiche, da bisher erworbene inhaltsbezogene Kompetenzen aus der Symbolsprache auf fachspezifische Methoden und Verfahren zur Erkenntnisgewinnung herangezogen werden müssen.

Hier zeigt sich, dass der Lehrer die beiden hier genannten Kompetenzbereiche bewusst miteinander verknüpft.

Da die Beweise 1, 2 und 4, die Beweise 6 und 7 sowie die Beweise 5 und 8 eine ähnliche Beweisidee beinhalten, sind diese Beweise über die gemeinsame Beweisidee miteinander verbunden. Auch die Verbindung des innermathematischen Bereiches des Beweisens mit außermathematischen Anwendungen hat der Lehrer ganz bewusst vorgenommen:

> I [00:29:15.14]
>
> Lehrer: […] dann habe ich einen innermathematischen Bereich, nämlich des Beweisens, mit einem Anwendungsbereich... noch […] das rundet dieses Thema sehr gut ab.

11.4.5 Ziele

Der Lehrer beschreibt in der Planung, dass sich sein Unterricht an den inhalts- und prozessbezogenen Kompetenzen des niedersächsischen Kerncurriculums (Niedersächsisches Kultusministerium, 2006) orientiert. Ihm ist insbesondere die Verknüpfung der inhalts- und prozessbezogenen Kompetenzen wichtig:

> Planung:
>
> Die Unterrichtsreihe wird von den im Kerncurricula ausgewiesenen inhalts-und prozessbezogenen Kompetenzbereichen vorstrukturiert. […] Diese Vorgehensweise garantiert eine Verknüpfung beider Kompetenzbereiche, da bisher erworbene inhaltsbezogene Kompetenzen aus der Symbolsprache auf fachspezifische Methoden und Verfahren zur Erkenntnisgewinnung herangezogen werden müssen.

Inhaltsbezogene Ziele

Der Lehrer nennt als eher inhaltsbezogene Ziele für den ersten Teil des Unterrichts:

> I [00:01:03.02]
>
> Lehrer: […] Und das Ziel war nachher, dass sie verschiedene andere Methoden auch noch kennenlernen

I [00:14:42.26]

Lehrer: […] Ja und das Entscheidende war einfach für mich, dass sie einfach auch das Gefühl dafür bekamen und auch die Einsicht bekamen, dass die beiden Kathetenquadrate zusammen einfach das Hypotenusenquadrat ergaben. Das war so das zentrale Ziel.

Es scheint hier die Entwicklung einer visuellen Vorstellung des Satzes des Pythagoras im Vordergrund zu stehen.

Im zweiten Teil der beobachteten Unterrichtsstunden ist das zentrale Ziel die Anwendung des Satzes des Pythagoras:

I [00:01:03.02]

Lehrer: […] verschiedene Beispiel heranzuziehen, um einfach kennenzulernen, wie stark einfach das Instrumentarium des Satzes des Pythagoras eigentlich ist, was man da alles mit machen kann und welche, welche Berechnungsmöglichkeiten sich da einem erschließen.

Die Analysen der Aufgaben zeigen, dass die Aufgaben passend zu diesen Zielen gewählt wurden. Insbesondere an den Präsentationen der Beweise der Schülerinnen und Schüler wird sichtbar, dass die genannten Ziele auch im Unterricht erreicht wurden.

Prozessbezogene Ziele

Im Fokus der Doppelstunde stehen vor allem die prozessbezogenen Kompetenzen ‚mathematisch Argumentieren' und ‚Kommunizieren':

Planung:

Mit der Präsentation und Reflexion des Beweises des Satzes von Pythagoras liegt der Schwerpunkt der Stunde auf den Kompetenzen ‚mathematisch argumentieren' und ‚kommunizieren'. […] Während der inhaltsbezogene Kompetenzbereich den Satz des Pythagoras auf Anwendungen reduziert, beziehen sich die prozessbezogenen Kompetenzen auf die Kombination mathematischen Wissens für Begründungen und Argumentationsketten, wobei sie formale und symbolische Elemente und Verfahren benutzt. Ferner wird erwartet, dass die Schüler ihre Überlegungen anderen unter Verwendung der Fachsprache schüleradäquat mitteilen.

Der Lehrer wählt bei der Beschreibung dieser Ziele in der Planung ähnliche Formulierungen, wie sie auch im niedersächsischen Kerncurriculum (Niedersächsisches Kultusministerium, 2006) zu finden sind. Die weiteren Erläuterungen des Lehrers zeigen, dass er diese Kompetenzen wirklich umfassend verinnerlicht hat (siehe im Vergleich dazu Lehrerin 2, die die Kompetenzen zwar auch erwähnt, aber nicht erläutern kann).

Die Kommunikationsfähigkeit fördert der Lehrer gezielt und in Anlehnung an das Kerncurriculum (Niedersächsisches Kultusministerium, 2006), indem die Schülerinnen und Schüler ihre Beweise in der Gruppenarbeitsphase und im Plenum erläutern.

Planung:

Das Vorgehen genügt damit den Ansprüchen der prozessbezogenen Kompetenz "kommunizieren", wonach unter Verwendung geeigneter Medien "Überlegungen, Lösungswege und Ergebnisse zu dokumentieren, verständlich darzustellen und zu präsentieren“ sind.

Hier zeigt sich, dass der Lehrer das Ziel, die Kompetenz des Kommunizierens zu fördern, bewusst in der Planung durch geeignete methodische Entscheidungen umsetzen kann.

I [00:19:04.00]

Lehrer: Also es stellt sich immer die Frage: Wann ist ein Beweis ein Beweis? Aber... ich denke in dem Moment, wo ein Schüler so das Gefühl hat, hier etwas verstanden zu haben, dann ist das für mich ein ganz wichtiger Punkt.

Der Lehrer macht hier ganz deutlich, dass die Beweise nicht in ihrer vollen Argumentationstiefe von den Schülerinnen und Schüler durchdacht werden sollten. Ihm ist hier vor allem die Entwicklung des Beweisverständnisses wichtig, woraus darauf geschlossen werden kann, dass der Lehrer bewusst auf tiefergehende Begründungen im Unterricht verzichtet.

Die hier genannten prozessbezogenen Ziele konnte der Lehrer im Unterricht umsetzten, wie die Analysen der Aufgabenbearbeitungen im Detail zeigen.

Allgemeine Ziele

Unabhängig von den inhalts- und prozessbezogenen Zielen erläutert der Lehrer im Interview, dass die Entwicklung der mathematischen Exaktheit ein übergeordnetes Ziel des Mathematikunterrichts ist:

> I [00:19:14.15]
> Lehrer: Die muss man sicherlich langfristig auch im Auge behalten, diese Exaktheit, weil... wir sind da schon bemüht, Jugendliche auch zu einem präzisen Denken und zum präzisen Argumentieren anzuleiten […] das schwebt sozusagen über dem gesamten Mathematikunterricht.

Dieses Ziel hat der Lehrer aber in den beobachteten Unterrichtsstunden nur bedingt verfolgt, wie sich aus seinen Aussagen zur geringen Beweiserfahrung der Lernenden ableiten lässt.

11.5 Aspekte kognitiver Aktivierung

Im Verlauf der drei beobachteten Unterrichtsstunden lassen sich verschiedene Phasen der Art des Denkens feststellen. Zu Beginn wird eher Faktenwissen eingefordert (Aufgabe 1), wobei dies in Verbindung mit begrifflichem Wissen geschieht (3. Teilaufgabe von Aufgabe 1). In der Phase des Beweisens liegt der Fokus meist auf begrifflichem Denken, lediglich die Beweise 6 und 7 erfordern eher prozedurales Denken. Dagegen ist in der Phase der Anwendung des Satzes des Pythagoras (Aufgaben 2 und 3, Arbeitsblatt Leuchtturm) hauptsächlich das prozedurale Denken gefordert. Insgesamt treten also die drei unterschiedlichen Denkarten relativ ausgewogen auf.
Einige Aufgaben und ein Beweis werden verfahrensbetont bearbeitet (Beweis 6 und Aufgabe 2 und 3, teilweise auch das Arbeitsblatt Leuchtturm), es überwiegt aber die verständnisbetonte Bearbeitung. Der Lehrer fragt sehr häufig nach Begründungen. Es ist auch zu beobachten, dass die Schülerinnen und Schüler selbstständig ohne Aufforderung ihre Antworten begründen oder von Ihren Mitschülern Begründungen einfordern. Auffällig sind die meist langen Phasen der kognitiven Selbstständigkeit der Schülerinnen und Schüler, es kommen aber auch häufig Phasen leichter Lehrerlenkung vor. Die Phasen starker Lehrerlenkung sind dagegen seltener und kürzer. Es fällt auf, dass der Grad der kognitiven Selbstständigkeit gerade in der Gruppenarbeitsphase stark von den einzelnen Schülergruppen abhängt. Insgesamt wird die kognitive Selbstständigkeit durch den Lehrer stark gefördert, da er die Schülerinnen und Schüler immer wieder zur selbstständigen Überprüfung der Lösungen und zur Präsentation der Lösungswege auffordert. Auch Fragen der Lernenden gibt er häufig an Mitschüler weiter. Schon bei der Auswahl der Beweise ist die Eignung zur selbstständigen Erarbeitung der Beweisidee durch die Schülerinnen und Schüler ein Kriterium (siehe 11.2). Der Vergleich der unterschiedlichen Beweise ist auch als Vergleich verschiedener Lösungswege anzusehen und steht hier im Fokus der Stunden. Häufig wird auch das reflexive Denken durch den Lehrer gefördert. Den gedanklichen Bruch beim Wechsel zu Anwendungsaufgaben nach den Beweisen reflektiert der Lehrer selbstkritisch (siehe 11.3.6). Es fällt insbesondere auf, dass bei diesem Lehrer bis auf die teilweise starke Lehrerlenkung so gut wie keine ‚Negativ-Kategorien' (z.B. Behinderung allgemeinen Denkens, Behinderung selbstständiger Überprüfung, siehe 6.2.2) kodiert wurden.

11.6 Einschätzung des mathematischen Fachwissens anhand der Unterrichtsbeobachtungen

Dies zeigt sich zum Einen an der durchgängigen Verwendung von Fachsprache (siehe 11.4.3), zum Anderen begründet der Lehrer die Aufgabenauswahl häufig mit fachinhaltlichen Argumenten:

I [00:15:59.13]

Lehrer: […] dieses Zerlegungsbeweises, dass die Kongruenzgeometrie da eine Rolle spielt. Hier zum Beispiel bei den arithmetischen Beweisen, […] dass die binomischen Formeln da eine Rolle spielen, dass man Gleichungen aufstellt, dass Flächen in unterschiedlicher Weise gesehen werden können. Bei der binomischen Formel taucht ja das auch immer wieder auf, dass ich Flächen unterschiedlich darstellen kann und daraus ergeben sich nachher auch diese Formeln.

Der Lehrer kann hier die mathematischen Zusammenhänge gut aufzeigen.

I [00:17:15.10]

Lehrer: Ein Beweis ist ja nun etwas, was in der Mathematik eine zentrale Rolle spielt. […] Und ich finde einfach beim Satz des Pythagoras ist eigentlich eine sehr schöne Schlüsselstelle innerhalb der Mathematik, wo man einfach Beweise gut durchführen kann. Und da kann man exemplarisch nochmal zeigen, wie Beweise funktionieren. Und diese Beweise, die hier sind, die sind äh...... sie genügen sicherlich in der einen oder anderen Weise nicht der innermathematischen Strenge, aber sie sind, intuitiv sind sie gut erschließbar. […] Also es stellt sich immer die Frage: Wann ist ein Beweis ein Beweis?

Der Lehrer erkennt den Satz des Pythagoras als Schlüsselstelle innerhalb der Mathematik, die sich aufgrund der großen Zahl der Beweise auch zur Behandlung des für die Mathematik zentralen Themas des Beweisens im Unterricht anbietet und reflektiert die eingesetzten Beweise aus fachlicher Sicht kritisch.

Außerdem weist der Lehrer auch bei den außer- und innermathematischen Anwendungsaufgaben auf die große Bedeutung des Satzes des Pythagoras hin:

I [00:01:03.02]

Lehrer: […] wie stark einfach das Instrumentarium des Satzes des Pythagoras eigentlich ist, was man da alles mit machen kann und welche, welche Berechnungsmöglichkeiten sich da einem erschließen.

Der Lehrer zeigt an mehreren Stellen, dass er auch im Detail über mathematisches Fachwissen verfügt:

I [00:14:55.03]

Lehrer: Die Frage ist natürlich auch bei, hinsichtlich zum Beispiel der Zerlegung, ist das jetzt allgemeingültig, nicht. Ähm, gibt es auch andere Formenzerlegungen oder geht das immer, ne.

Der Lehrer spricht hier gezielt die Problematik der Allgemeingültigkeit der Beweise 1, 2 und 4 an.

11.7 Zusammenfassende Interpretation und Einschätzung des fachdidaktischen Wissens

Der Lehrer 4 gestaltet eine Doppelstunde mit dem Schwerpunkt des Nachentdeckens und der Präsentation verschiedener Beweisideen zum Satz des Pythagoras, wobei zu Beginn kurz der den Schülerinnen und Schülern bereits bekannte Satz des Pythagoras wiederholt wird. Die Doppelstunde endet mit innermathematischen Berechnungsaufgaben zum Satz des Pythagoras, die zu Hause zu Ende gelöst und zu Beginn der nächsten Stunde besprochen werden. Im Anschluss bearbeiten die Schülerinnen und Schüler ein Arbeitsblatt mit mehreren außermathematischen Anwendungsaufgaben zum Satz des Pythagoras.

Schülerbezogenes Wissen

Das schülerbezogene Wissen dieses Lehrers zeigt sich vor allem an der starken Schülerzentrierung des Unterrichts. Schon bei der Auswahl der Beweise berücksichtigt der Lehrer die Eignung der Beweise zur selbstständigen Erarbeitung der Beweisidee durch die Schülerinnen und Schüler. Im Unterricht setzt er sein Wissen über die Bedeutung der kognitiven Selbstständigkeit der Lernenden um, indem die Lernenden immer wieder zur Erläuterung ihrer Lösungen aufgefordert werden, wobei sie die Lösungen häufig selbst an der Tafel darstellen. Hierdurch wird ebenso die selbstständige Überprüfung von Lösungswegen gefördert. Auch bei Fehlern oder Schwierigkeiten unterstützen sich die Lernenden häufig gegenseitig, mehrfach sogar ohne Aufforderung durch den Lehrer. Manchmal führt dies zu längeren Diskussionen, in denen mehrere Schülerinnen und Schüler gemeinsam und ohne Lehrerbeteiligung die Korrektur eines Fehlers besprechen. Der Lehrer weist die Schülerinnen und Schüler zwar auf Fehler hin, fordert aber fast immer die Lernenden selbst oder deren Mitschüler zur Korrektur des Fehlers auf. Er achtet darauf, dass die korrekte Formulierung der Lösung von allen Schülerinnen und Schülern verstanden wird und fordert die Lernenden gegebenenfalls zur Wiederholung ihrer Erklärung auf.

Der Lehrer hat im Vorfeld des Unterrichts keine möglichen Schülerlösungen genannt und nur vereinzelt Überlegungen zu möglichen Fehlern und Problemen der Schülerinnen und Schüler angestellt, so dass nur teilweise auf sein Wissen über Schülerfehler geschlossen werden kann. Er kann aber die Probleme, die die Lernenden beim Herstellen des Zusammenhangs zwischen den Beweisen und dem Satz des Pythagoras haben, im Vorfeld gut beschreiben. Insgesamt betrachtet zeigt er Wissen über mögliche Schülerlösungen und Schülerfehler, indem er die Schülerlösungen im Interview gut nachzeichnen und dabei größtenteils auch einzelne Probleme der Schülerinnen und Schüler beschreiben kann. Teilweise erkennt der Lehrer aber Schülerfehler nicht, z.B. die fehlerhafte Argumentation bei der Besprechung des Beweises 7 (siehe 11.3.7).

Der Lehrer äußert im Interview, dass die Lernenden im Unterricht vor allem in Bezug auf die Beweise weniger Probleme hatten als erwartet. Er konnte aber zur Einschätzung des Schwierigkeitsgrades im Vorfeld des Unterrichts nicht direkt auf vorhandenes Wissen zurückgreifen, da er den Satz des Pythagoras erstmalig in einer 8. Klassenstufe unterrichtet hat. Er kann aber scheinbar bei der Planung des Unterrichts aus anderen Zusammenhängen vorhandenes Wissen aktivieren und reflektieren, so dass es ihm gelingt, aus der Vielzahl vorhandener Beweise solche auszuwählen, die für diese Klassenstufe, in der die Schülerinnen und Schüler noch keine Beweiserfahrungen sammeln konnten, geeignet scheinen. Denn insgesamt zeigt sich, dass der Lehrer den Leistungsstand der Schülerinnen und Schüler sowie den Schwierigkeitsgrad der Beweise gut einschätzen und miteinander in Beziehung setzen kann. Er hat diese beiden Aspekte nach eigener Aussage auch bei der Verteilung der Beweise an die

Gruppen berücksichtigt und bezeichnet den Beweis 3 (siehe 11.3.3) als schwieriger im Vergleich zu den anderen Beweisen. Die Schülergruppe 3 benötigt auch deutlich mehr Hilfestellung als andere Gruppen, obwohl es sich hier um eher leistungsstärkere Schüler zu handeln scheint. Die Schüler können den Beweis später aber völlig selbstständig und mit ausreichenden Begründungen erklären. Im Gegensatz dazu bezeichnet der Lehrer den Beweis 6 (siehe 11.3.5) als eher leicht, die Schülergruppe 6 aber auch als eher leistungsschwächer. Auch diese Gruppe benötigt deutliche Hilfestellung, wohingegen die Gruppen 1, 2, 4 und 5 weitgehend selbstständig arbeiten.

Wissen über das Verständlichmachen mathematischer Inhalte

Der hohe Anteil der kognitiven Selbstständigkeit der Lernenden lässt auf umfangreiches Wissen über konstruktivistische Lerntheorien schließen (vgl. 5.1.1). Der Lehrer erklärt selbst sehr wenig im Unterricht, selten gibt er direkt Erklärungen der Lösungen vor, denn meistens verhilft er den Schülerinnen und Schülern durch weiterführende Hinweise zu einer eigenen Entwicklung der Lösung. Beispielsweise fragt er beim Beweis 3 (siehe 11.3.3) nach der Berechnung des Flächeninhaltes des Parallelogramms und lenkt den Fokus der Lernenden so auf die Betrachtung der Flächeninhalte. Die Erklärung, warum diese sich nicht verändern, überlässt der Lehrer wieder den Schülern. Er fordert hierbei auch gezielt Begründungen ein.
Dieses Einfordern von Begründungen, welches im Unterricht dieses Lehrers sehr zentral umgesetzt wird, lässt wiederum auf umfangreiches Wissen über die kognitive Aktivierung von Schülerinnen und Schülern schließen. Dem Unterricht dieses Lehrers scheint eine ausgeprägte Begründungskultur zugrunde zu liegen, da der Lehrer oft nach Begründungen fragt, mehrfach geben die Schülerinnen und Schüler Begründungen aber selbstständig oder fordern sich gegenseitig zur Begründung auf. Allerdings werden im beobachteten Unterricht viele Argumentationsschritte ausgelassen, die für einen vollständigen Beweis nötig wären. Beispielsweise begründen die Schülerinnen und Schüler beim Beweis 3 (siehe 11.3.3) nicht, warum die entstehenden Parallelogramme die gleiche Seitenlänge wie die Hypotenuse haben. Teilweise beschreibt der Lehrer diese fehlenden Argumentationen im Interview, so dass davon auszugehen ist, dass er bewusst auf einige Argumentationsschritte verzichtet hat. Dies wird auch daran deutlich, dass der Lehrer aufgrund der geringen Beweiserfahrung der Lernenden die Vermittlung der Beweisideen und nicht die eigenständige Entwicklung der Beweise als Ziel für die Doppelstunde formuliert. Er vereinfacht die Inhalte scheinbar bewusst, was wiederum auf sein fachdidaktisches Wissen hinweist. Teilweise werden aber auch Argumentationsschritte ausgelassen, auf die der Lehrer eigentlich Wert zu legen scheint. Die Schülerinnen und Schüler begründen beispielsweise beim Beweis 5 (siehe 11.3.4) nicht, warum die Einzelteile zusammenpassen, obwohl dies in der Aufgabenstellung explizit gefordert ist. Deshalb gelingt die Umsetzung des Wissens über die Bedeutung von Begründungen nicht immer.
Das fachdidaktische Wissen dieses Lehrers zeigt sich auch daran, dass er sehr viel Wert auf Visualisierungen zu legen scheint. Dies wird in seinem Unterricht auch umgesetzt, denn er benutzt häufig selbst Visualisierungen, z.B. als weiterführende Hinweise bei Problemen der Schülerinnen und Schüler (siehe 11.4.1), er fordert aber auch die Lernenden gezielt auf, ihre Lösungen an der Tafel mithilfe von Skizzen zu visualisieren. Die von ihm ausgewählten Aufgaben erfordern alle den Gebrauch mathematischer Darstellungen, mehrmals auch auf hohem Niveau, da verschiedene Darstellungen miteinander verglichen werden müssen. Mehrere Aufgaben erfordern auch enaktive Repräsentationsformen, wobei die Schülerinnen und Schüler wiederholt bei der Vorstellung ihrer Lösungen die entsprechenden Handlungsschrit-

te vorführen sollen. Da die Lernenden ebenfalls ihre Lösungen erläutern und Rechnungen selbst durchführen sollen, treten auch die sprachliche und die formale Repräsentationsform verstärkt auf.
Bei der Bearbeitung des Aufgabenblattes ‚Leuchtturm' steht vor allem das außermathematische Modellieren im Mittelpunkt, wobei alle Phasen eines Modellierungskreislaufes im Unterricht vorkommen, obwohl beispielsweise das Interpretieren und Validieren der Lösung nicht in der Aufgabenstellung gefordert sind. Dies lässt auf vertieftes Hintergrundwissen zum mathematischen Modellieren und zu mindestens einem Modellierungskreislauf (siehe 5.2.3) schließen, welches vom Lehrer auch im Unterricht umgesetzt wird. Es ist aber denkbar, dass dieses Wissen implizit vorliegt, da der Lehrer sich hierzu in keiner Weise äußert.
Neben diesen zentralen Aspekten zeigt sich auch an mehreren kurzen Ausschnitten, dass der Lehrer über Wissen über das Verständlichmachen und auch die kognitive Aktivierung der Lernenden verfügt: Er stellt häufig Fragen, die die Schülerinnen und Schüler zur Reflexion ihrer Lösungen oder Vermutungen anregen, insbesondere lässt er durch die Präsentation der Beweise zum Satz des Pythagoras verschiedene Lösungswege vergleichen. Außerdem nutzt er ein Beispiel, um zu Beginn der Stunde die Ungültigkeit des Satzes des Pythagoras in nicht rechtwinkligen Dreiecken zu erläutern (siehe 11.3.1). Hier verwendet er einen Gegenbeweis, auch wenn dieser im Unterricht nicht als solcher thematisiert wird. Des Weiteren legt der Lehrer großen Wert auf die Verwendung der Fachsprache. Dies zeigt sich daran, dass er bereits gelernte Begriffe wiederholen lässt und auf Formulierungen der Schülerlösungen in Fachsprache achtet. Dies führt dazu, dass auch die Schülerinnen und Schüler häufig ohne Aufforderung die Fachsprache verwenden. Insgesamt betrachtet zeigt der Lehrer im Interview, dass er seinen Unterricht kritisch reflektieren und Handlungsalternativen aufzeigen kann.

Inhaltsbezogenes Wissen

Der Lehrer begründet die Auswahl der Beweise im Interview, aber auch schon in der Planung, sehr ausführlich, wobei er fachwissenschaftliche sowie fachdidaktische Auswahlkriterien heranzieht, woraus auf umfangreiches inhaltsbezogenes Wissen geschlossen werden kann. Die ausgewählten Beweise verdeutlichen verschiedene Beweisideen (geometrische Zerlegung, arithmetischer Beweis, abbildungsgeometrischer Beweis). Allerdings stellen nicht alle ausgewählten ‚Beweise' auch Beweise im mathematischen Sinn dar, denn einige ‚Beweise' (vor allem die Beweise 1, 2 und 4, siehe 11.3.2) sind eher als Veranschaulichungen des Satzes des Pythagoras zu bezeichnen. Dies scheint dem Lehrer zum Teil bewusst zu sein, da er immer wieder die Förderung der Beweisidee und nicht der Beweisdurchführung betont. Aus der Planung und den Interviewaussagen geht deutlich hervor, dass der Lehrer das Potential der Beweise, beispielsweise zum mathematischen Argumentieren, erkennt, er nutzt dies aber aufgrund der geringen Beweiserfahrung der Schülerinnen und Schüler nicht aus. Mehrfach sind die Aufgabenstellungen aufgrund fehlender Längenangaben auch nicht dazu geeignet detaillierte Argumentationen zu ermöglichen. Die Vermittlung der Beweisideen scheint aber für alle Beweise geglückt. Hier wird das Zusammenspiel des inhaltsbezogenen Wissens und des schülerbezogenen Wissens über den Schwierigkeitsgrad der Beweise deutlich, welches scheinbar zu der bewussten Entscheidung der Vereinfachung der Inhalte (als Teilaspekt des Wissens über das Verständlichmachen) führt.
Schon bei der Auswahl der Beweise begründet der Lehrer schriftlich mithilfe lernpsychologischer Argumente die Bedeutung der Vernetzung des Wissens der Schülerinnen und Schüler. Dieses Wissen setzt er auch in Unterrichtshandlungen um, indem er starke Vernetzungen

zum Vorwissen bewusst herstellt, wobei auch Vernetzungen zwischen verschiedenen Stoffgebieten häufig sichtbar werden. Außerdem fördert der Lehrer die Vernetzung des Wissens dadurch, dass er die beiden Beweisideen der Beweise 5 und 6 als wiederholendes Element bewusst wieder aufgreift, indem er im Plenum die Beweise 7 und 8 bespricht, welche ähnliche Beweisideen erfordern (siehe 11.3.7 und 11.3.8).
Die Beweise 7 und 8 wurden wie die Aufgaben 2 und 3 spontan vom Lehrer ausgewählt. Hier nutzt der Lehrer nicht die Chance, die während der Gruppenarbeit fehlenden Argumentationsschritte nachzuholen, ebenso wird eine mögliche Vernetzung von Flächeninhalts- und Umfangsberechnungen mit dem Satz des Pythagoras nicht genutzt. Der Lehrer reflektiert hier sein eigenes Verhalten aber kritisch und benennt im Interview als Handlungsalternative, dass er im Nachhinein eher den Abschnitt des Beweisens durch eine Zusammenfassung vervollständigt hätte. Deshalb kann vor allem im Vergleich zu der detaillierten Begründung der Beweise darauf geschlossen werden, dass der Lehrer zwar bei ausführlich geplanten Unterrichtssituationen gezielt sein fachdidaktisches Wissen für die Auswahl der Aufgaben und deren Umsetzung im Unterricht einsetzen kann, dies gelingt ihm jedoch weniger in spontanen Planungsprozessen während des Unterrichts.
Der Lehrer fördert aber insgesamt betrachtet durch die Aufgabenauswahl das Lernen über Faktenwissen, prozedurales und begriffliches Denken. So erweitert er beispielsweise die technische Aufgabe 1, deren Fokus auf Faktenwissen lag, durch eine begriffliche Teilaufgabe. Auch beim eher von prozeduralem Wissen geprägten Beweis 6 (siehe 11.3.5) verhilft er den Schülerinnen und Schülern durch seine weiterführenden Hinweise zu einer begrifflichen Erklärung der algebraischen Umformungen. Den insgesamt eher durch begriffliches Denken geprägten Unterrichtsabschnitt des Beweisens verbindet er nach eigener Aussage mit außermathematischen Anwendungen (Arbeitsblatt ‚Leuchtturm'). Allerdings benennt der Lehrer diese verschiedenen Arten des Denkens in keiner Weise, woraus geschlossen werden kann, dass dieses Wissen implizit vorliegt.
Dagegen zeigt der Lehrer in seinen Erläuterungen umfangreiches explizites Wissen über das niedersächsische Kerncurriculum für den mittleren Schulabschluss (Niedersächsisches Kultusministerium, 2006). Die ausgewählten Aufgaben und Beweise fördern insbesondere die vom Lehrer angesprochene Verknüpfung inhaltsbezogener und prozessbezogener Kompetenzen, wobei vor allem die prozessbezogenen Kompetenzen ‚mathematisch Argumentieren' und ‚Kommunizieren' der Planung der Unterrichtsstunden zugrundeliegen. Die Analysen der Unterrichtsstunden zeigen, dass diese vom Lehrer genannten Ziele ebenso wie die benannten inhaltsbezogenen Ziele des Kennenlernens von Beweisideen und des Anwendens des Satzes des Pythagoras erreicht wurden, sodass auf eine geeignete Umsetzung des fachdidaktischen Wissens über die Ziele des Unterrichts geschlossen werden kann.

11.8 Vergleich mit den Ergebnissen des COACTIV-Tests

Der Lehrer erreichte im Testteil zum fachdidaktischen Wissen 22 von empirisch zu erreichenden 37 Punkten und liegt damit genau im Durchschnitt der gymnasialen Lehrerinnen und Lehrer, die an der COACTIV-Studie teilgenommen haben (vgl. Abbildung 2.3). Im Testabschnitt zum schülerbezogenen Wissen kann der Lehrer zu allen Aufgaben mögliche Schülerfehler und eine entsprechende Interventionsmaßnahme aufzeigen. Auch die Ursachen für die Schülerfehler kann er richtig benennen. Allerdings wählt er im Sinne der Vorgaben zur Codierung des COACTIV-Tests die ‚falsche' Formel für den Flächeninhalt eines Trapezes (siehe Abbildung 7.4) aus und erhält hierauf keine Punkte, obwohl die Begründung seiner Auswahl sehr schlüssig erscheint. Die Aufgaben zum Verständlichmachen mathematischer Inhalte kann der Lehrer größtenteils erfolgreich lösen, indem er geeignete Erklärungen für die vorgegebenen Sachverhalte benennt. Im inhaltsbezogenen Abschnitt des fachdidaktischen Wissenstest kann der Lehrer für alle Aufgaben zwei oder drei strukturell unterschiedliche Lösungen nennen, allerdings hat er eine Aufgabenstellung falsch verstanden und Lösungen für eine ähnliche Aufgabe aufgeschrieben. Deren drei vom Lehrer benannte Lösungen sind ebenfalls strukturell ganz verschieden und wären dem Lehrer bei anderer Aufgabenstellung als drei zusätzliche Punkte angerechnet worden. Diese Ergebnisse sind für alle drei Komponenten des fachdidaktischen Wissens konform zu den Einschätzungen anhand der qualitativen Analysen.

Schon bei der Beschreibung der unterschiedlichen Lösungen zeigt der Lehrer umfangreiches Fachwissen, da er beispielsweise eine Aufgabe mit vollständiger Induktion löst. Im Fachwissensteil des COACTIV-Tests erzielte der Lehrer 12 von 13 möglichen Punkten und liegt damit deutlich über dem Durchschnitt der gymnasialen Lehrkräfte, die an der COACTIV-Studie teilgenommen haben. Für die eine Aufgabe, die der Lehrer nicht richtig gelöst hat, hat er aber zumindest den richtigen Ansatz notiert und erläutert, dass für den Beweis ein hoher rechnerischer Aufwand nötig wäre. Der Rechenaufwand wäre allerdings nur hoch gewesen, da der Lehrer einen Trick zur Vereinfachung nicht erkannt hat.

12 Darstellung der Analysen von Lehrer 5

12.1 Überblick über die Unterrichtsstunden

Es wurden drei aufeinanderfolgende Unterrichtsstunden des Lehrers 5 videografiert, eine Einzelstunde und eine Doppelstunde. Die unterrichtete Klasse ist im achten Schuljahr und setzt sich nach Aussage des Lehrers aus einer starken Leistungsspitze, wenigen Lernenden im mittleren Leistungsbereich und einigen sehr schwachen Schülerinnen und Schülern zusammen.
In den vorangegangenen Stunden hat der Lehrer anhand einer anwendungsbezogenen Aufgabe die Konstruktion des Inkreismittelpunktes mithilfe der Winkelhalbierenden mit den Schülerinnen und Schülern erarbeitet. Nach der Besprechung der Hausaufgabe, einer Übungsaufgabe zum Konstruieren des Inkreismittelpunktes (siehe 12.3.1), erarbeitet der Lehrer in der ersten videografierten Unterrichtsstunde gemeinsam mit den Lernenden die Konstruktion des Umkreismittelpunktes mithilfe der Mittelsenkrechten anhand einer ebenfalls anwendungsbezogenen Aufgabe. In dieser Aufgabe soll ein zentraler Treffpunkt mit gleichem Abstand zu den Wohnorten dreier Lernender gefunden werden (siehe 12.3.2). Der Lehrer reduziert das Problem zunächst auf die Bestimmung aller Punkte, die den gleichen Abstand zu zwei Wohnorten haben und erarbeitet so gemeinsam mit den Schülerinnen und Schüler die Eigenschaften der Mittelsenkrechten. Die darauffolgende Doppelstunde findet im Computerraum der Schule statt. Zunächst bearbeiten die Schülerinnen und Schüler in Partnerarbeit mit Hilfe dynamischer Geometriesoftware drei verschiedene Aufgaben, in denen der Lehrer die Überprüfung von Schülerideen aus der vergangenen Stunde fordert. Hierzu zählen das Konstruieren von Mittelsenkrechten und Winkelhalbierenden nur mit Hilfe von Zirkel und Lineal (siehe 12.3.4 und 12.3.5) sowie eine Schüleridee zur Konstruktion des Umkreismittelpunktes (siehe 12.3.6). Im Anschluss fordert der Lehrer die Schülerinnen und Schüler zur Bearbeitung von sogenannten „Forschungsaufgaben zum Um- und Inkreis“ (siehe 12.3.8 und 12.3.9) wiederrum mit Hilfe dynamischer Geometriesoftware auf.

12.2 Darstellung aufgabenübergreifender Aspekte des Unterrichts

Dynamische Geometriesoftware

In der Doppelstunde lösen die Schülerinnen und Schüler alle Aufgaben mithilfe dynamischer Geometriesoftware, welche sie erst in der vorangegangenen Woche kennengelernt haben. Der Lehrer begründet dies so:

I [00:09:58.29]

Lehrer: […] Und wenn man halt so spezielle Aufgaben hat, wo man Sachen untersuchen soll, wo man so allgemeine Schlüsse ziehen soll und so kann man, denk ich, am besten halt so Dynamische Geometriesoftware nehmen, weil man dann ja tatsächlich einmal konstruiert und das dann überprüft, ist es denn tatsächlich für alle Dreiecke so?

Der Lehrer betont hier die Eignung der dynamischen Geometriesoftware vor allem zum Erkennen von allgemeinen Zusammenhängen und spricht damit begriffliches Denken an. Ergeht aber weder im Unterricht noch im Interview auf die Problematik des Begründens anhand vieler Beispiele, die im Allgemeinen aus mathematischer Sicht nicht ausreichend ist, ein.
Des Weiteren erläutert er:

I [00:10:59.27]

Lehrer: Und... ich weiß gar nicht genau, ich glaub das steht auch im Curriculum drin […] dass man da auch irgendwie mit Dynamischer-Geometrie-Software was machen muss.

Hier fällt insbesondere auf, dass sich der Lehrer gar nicht sicher ist, ob die dynamische Geometriesoftware im Kerncurriculum gefordert ist. Er zeigt damit Mängel im inhaltsbezogenen Wissen.
Außerdem betont er die Eignung des dynamischen Geometrieprogramms schon für die unteren Jahrgänge der Sekundarstufe:

I [00:54:24.24]

Lehrer: […] ja wahrscheinlich ist es sinnvoll, den Einstieg mit der Dynamischen-Geometrie-Software schon so früh wie möglich zu machen. Äh... am besten schon in der sechsten Klasse, weil ich glaube die Schüler kennen sich dann auch schon ziemlich gut aus mit dem PC, können mit der Maus hantieren und eigentlich ist es ja auch relativ selbsterklärend.

Der Lehrer begründet dies allerdings nicht mit fachinhaltlichen Argumenten, sondern führt stattdessen an, dass sich die Schülerinnen und Schüler in der sechsten Klasse schon gut mit dem PC auskennen und die dynamische Geometriesoftware sehr selbsterklärend ist. Insgesamt erscheint die Begründung des Einsatzes von dynamischer Geometriesoftware eher unreflektiert und ohne fundierte fachliche, fachdidaktische oder lernpsychologische Argumente.

12.3 Darstellung des Unterrichts und Analysen von Aspekten des fachdidaktischen Wissens anhand der eingesetzten Aufgaben

Nach eigener Aussage arbeitet der Lehrer häufig mit Aufgaben aus dem Schulbuch. Er hat sich aber den größten Teil der im beobachteten Unterricht eingesetzten Aufgaben selbst ausgedacht (siehe 12.3.1 bis 12.3.6).

I [00:51:17.27]

Lehrer: Aber wenn man denn, ja weiß nicht, mit dem Buchaufgaben war ich halt so nicht zufrieden und ich hatte auch so im Kopf, dass es auch mal, dass es auch andere Anwendungsaufgaben gibt. Und ich hab nochmal in anderen Büchern nachgeguckt, aber da waren die dann auch nicht so und äh... dachte ich ja, denkst du dir halt so die Aufgaben aus. […] wenn sich halt irgendwie so die Möglichkeit bietet, dann irgendetwas so in einem konkreten Zusammenhang zu machen, denke ich, ist es auch gut, wenn man den, also die Möglichkeit so ergreift dann.

Der Lehrer erläutert nicht direkt die Gründe für die eigene Erstellung der Aufgaben, er betont aber den Anwendungsbezug und das Lernen in Zusammenhängen. Daraus kann geschlossen werden, dass er über Wissen über die Bedeutung von Vernetzungen verfügt.

12.3.1 Aufgabe 1 ‚Winkelhalbierende und Inkreis'

Hausaufgabe:
1) Bestimme die Koordinaten des Inkreismittelpunktes bei folgendem Dreieck ABC: A(1;0), B(7;2), C(0;5).
2) Bestimme die Koordinaten des Inkreismittelpunktes bei folgendem Dreieck DEF: D(-1;-2); E(5;3); F(1;6)
3) Wochenende genießen ;-)

Abbildung 12.1: Aufgabe 1 ‚Winkelhalbierende und Inkreis'

Diese Aufgabe wurde als Hausaufgabe gestellt:

I [00:11:51.00]

Lehrer: […] Da sollten die halt dann nochmal Konstruktionen üben an zwei Beispielen. Da dachte ich... gibst das einfach mit mit Koordinaten auf, damit die einzelnen Ergebnisse auch besser vergleichen kann.

Die Aussagen des Lehrers im Unterricht und die von ihm akzeptierten Schülerlösungen deuten darauf hin, dass der Lehrer hier den Begriff ‚Konstruktion' im klassischen Sinne, das heißt mit Zirkel und Lineal, sondern auch mithilfe des Geodreiecks und insbesondere des Messens von Winkeln, auffasst. Insbesondere durch den angesprochenen Vergleich der Koordinaten wird der prozedurale Charakter der Aufgabe durch den Lehrer betont.

Objektive Kennzeichen der Aufgabe 1 ‚Winkelhalbierende und Inkreis'

Da den Lernenden die Konstruktion des Inkreismittelpunktes bereits bekannt ist, handelt es sich hier um eine technische Aufgabe mit Fokus auf Fertigkeiten, die nur Wissen aus dem Bereich der Geometrie und hier aus der Wisseneinheit des Inkreises erfordert. Die Schülerinnen und Schüler tragen zunächst die angegebenen Punkte in ein Koordinatensystem ein, verbinden diese zu einem Dreieck und zeichnen mindestens zwei Winkelhalbierende ein. Hierzu können sie entweder den Winkel ausmessen und halbieren, zwei Punkte mit demselben Abstand auf den Schenkel des Winkels einzeichnen und deren Mittelpunkt bestimmen, oder die Winkelhalbierende mithilfe eines Zirkels konstruieren. Anschließend lesen sie die Koordinaten des Schnittpunktes der beiden Winkelhalbierenden ab. Es ist weder Modellieren noch Argumentieren erforderlich und es müssen lediglich Standarddarstellungen angefertigt werden.

Analyse des Unterrichtseinsatzes der Aufgabe 1 ‚Winkelhalbierende und Inkreis'

<u>Besprechung aufgetretener Probleme</u>

Der Lehrer bespricht zunächst mit den Schülerinnen und Schülern Probleme, die bei der Bearbeitung der Hausaufgabe auftraten. Bei der Schülerin M schneiden sich die drei Winkelhalbierenden nicht in einem Punkt:

U [00:00:44.16]

Schüler M: Ähm also bei mir bei dem zweiten Teil, da hab ich irgendwie den Weg nicht gefunden. Also zwei haben sich geschnitten, aber der dritte passt nicht.

Lehrer: Hm... Was musste man da nochmal machen... um den Inkreismittelpunkt bei den beiden Dreiecken zu finden? J.

Schüler J: Ähm auf jeder Seite des Dreiecks, also bei jedem Winkel halt die Winkelhalbierende rausfinden und dann halt den Schnitt machen und dann hat man halt wo dieses Kreuz ist, ist dann halt der Punkt.

Lehrer: Mh. Wo hab es denn da noch Probleme? I.

Auf das Problem der Schülerin M., die das von Schüler J. erläuterte Verfahren zwar angewendet hat aber scheinbar irgendwo einen Fehler gemacht hat, geht der Lehrer nicht weiter ein. Hierdurch wird der mögliche Fehler der Schülerin M. nicht reflektiert. Das von Schüler J. vorgestellte Verfahren enthält keinerlei Begründungen, weshalb lediglich prozedurales Denken aktiviert wird.

Die Schülerin I. hatte Probleme beim Einzeichnen der Winkelhalbierenden:

U [00:01:17.07]

Schüler I: Also man muss die ja immer so in gleichen Abständen Punkte machen und die dann, davon den Mittelpunkt suchen, oder?

Lehrer: Das war eine Variante. Die andere Variante war ja, dass man das mit dem Geodreieck macht, den kompletten Winkel ausmisst... und dann guckt, wenn der komplette Winkel 80 Grad ist, die Hälfte ist 40 Grad, dann kann man bei 40 Grad die Winkelhalbierende zeichnen.

Schüler I: Ja aber ich hab das Problem, dann hab ich mir die Punkte markiert und wenn ich dann aber von der anderen Seite, also ich hab da an... dem einen Punkt angefangen immer einen Zentimeter zu markieren und wenn ich das von der anderen Seite gemacht hatte, war das verschoben.

Lehrer: Was du von der anderen Seite dann gemacht hast? Hast du es denn Mal mit der anderen Methode probiert mit dem Winkel?

Schüler I: Nein.

Lehrer: Können wir das jetzt mal... was du noch machen könntest. N.

Schüler N: Also ich hab halt diese Winkelhalbierende gezeichnet und dann wusste ich ja, da muss irgendwie so ein Innenkreis rein. Hab ich dann auch einfach mal so gemacht wie ich es dachte. Aber bei einem funktionierte das nicht und bei dem anderen schon und dann wusste ich gar nicht mehr weiter.

Lehrer: Woran kann das liegen, wenn das nicht mit dem Innenkreis klappt? ... S.

Schüler S: Das der Punkt da nicht richtig ist... wo der ist.

Lehrer: Vermutlich... hat man sich irgendwo verzeichnet. Ähm... ich hab‘s mir ziemlich einfach gemacht und das mit DynaGeo gezeichnet (siehe Abbildung 12.2).

Die Erläuterungen der Schülerin I. kann der Lehrer scheinbar nicht nachvollziehen. Er weist auf eine andere Methode des Zeichnens der Winkelhalbierenden hin und reflektiert damit auch nicht den Fehler der Schülerin I. Der Lehrer scheint gar nicht zu versuchen, die Gedankengänge der Schülerinnen und Schüler zu verstehen. Stattdessen lenkt er in Richtung der von ihm favorisierten Lösung, indem er andere Schülerinnen und Schüler zur Erläuterung der zweiten Methode, dem Ausmessen und Halbieren des Winkels, auffordert. Er nutzt nicht die Chance, durch die Reflexion der von der Schülerin I. angesprochenen Methode nochmals auf begrifflicher Ebene auf die Eigenschaften der Winkelhalbierenden einzugehen. Allerdings benennt nun die Schülerin N. ein weiteres Problem, anstatt die Frage des Lehrers zu beantworten. Der Lehrer regt daraufhin die Schülerinnen und Schüler zur Reflexion des Vorgehens an, allerdings bleibt die Reflexion über das Problem auf einer sehr oberflächlichen Ebene. Es werden keine Gründe für die falsche Lage des Schnittpunktes genannt. Die zweite Zeichenmethode wird nun nicht mehr erläutert, stattdessen gibt er die Lösung der Aufgabe auf einer vorgefertigten Folie vor (siehe Abbildung 12.2). Insbesondere werden die Ursachen der Fehler nicht reflektiert und es werden keine richtigen Lösungen der Schülerinnen und Schüler vorgestellt.

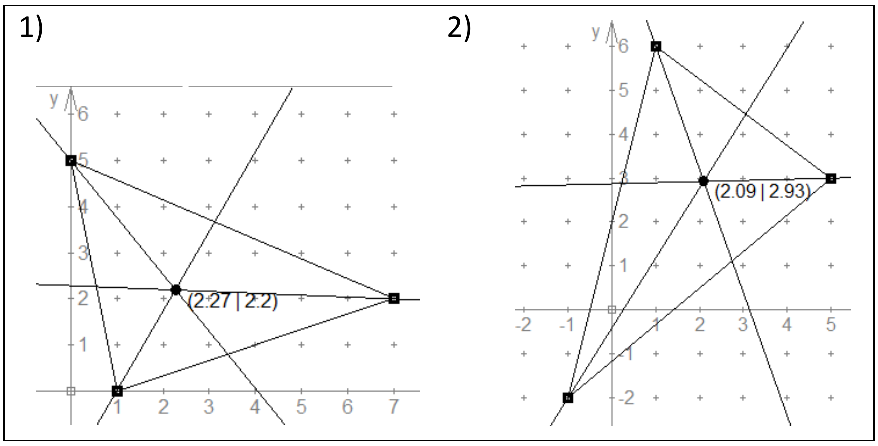


Abbildung 12.2: Präsentation der Lösung zur Aufgabe 1

<u>Vorstellung der Lösung durch den Lehrer und Besprechung der Lösung</u>

Der Lehrer legt die Lösung als Folie auf den Over-Head-Projektor:

U [00:02:36.26]

Lehrer: […] die Koordinaten von dem ersten Innenkreismittelpunkt müssten 2,27 und 2,2 sein. Kann sein, dass ihr da einen Millimeter mehr oder weniger habt... L.?

Schüler L: Also ich hab das jetzt gar nicht so genau hingekriegt zu zeichnen. Ich hab hier jetzt grob 2,5 und 2,5 raus.

Lehrer: Uh, das ist dann doch relativ grob. Und da kann man dann auch schon sehen, wenn das so grob ist, dann ist es schwierig, dass es dann mit dem Innenkreis auch noch so klappt... Was kann man machen, damit man eine möglichst exakte Zeichnung hat? ... D.

Schüler D: Mit einem angespitzten Bleistift machen. […]

Schüler X: Nochmal nachmessen. […]

Schüler R: Man brauch ein gutes Lineal, wo man die Zahlen drauf sehen kann.

Lehrer: […] die jetzt grob abweichende Werte hier haben... die bekommen als Hausaufgabe nochmal auf, die Winkel nochmal nachzumessen. Sind die Winkelhalbierenden tatsächlich äh... so eingezeichnet, dass sie den kompletten Winkel halbieren.

Der Lehrer fordert hier nach Benennung des ungenauen Ergebnisses von Schüler L. zur Reflexion des Lösungsweges auf. Allerdings argumentieren die Schülerinnen und Schüler nicht auf fachlicher Ebene. Der Lehrer gibt sich mit diesen Erläuterungen aber zufrieden. Die Aufforderung zur Korrektur als erneute Hausaufgabe stellt indirekt auch eine Reaktion auf die oben beschriebenen Probleme der Schülerinnen und Schüler dar. Der Lehrer macht diesen Zusammenhang aber nicht deutlich.

Im Folgenden erläutern noch einige Schülerinnen und Schüler Probleme mit der Aufgabe:

U [00:04:25.22]

Schüler I: Wie sollen wir sowas mit 2,09 herausfinden?

Lehrer: Das? Mit DynaGeo... Mit einem Bleistift und Lineal kann man das nicht so genau hinbekommen. Da würde man dann vielleicht 2 rausbekommen 2,1 2,2. […] Aber wenn man dann so 3mm 4mm Abweichung hat, dann ist es schon eine Geschichte, da muss man dann nochmal nachmessen. […]

Schüler M: Also bei dem ersten stimmen meine Koordinaten, aber der Kreis geht an zwei Seiten raus.

Schüler Y: Wir mussten den Kreis doch gar nicht zeichnen.

Schüler M: Ne ja nur zur Überprüfung.

Lehrer: Ähm, das können wir morgen nochmal überprüfen mit DynaGeo, ob denn tatsächlich auch der Kreis alle Schenkel vom Dreieck berührt. Ja?

Der Lehrer geht hier nicht auf das Problem der Schülerin M. ein, vor allem da die angekündigte Überprüfung in der nächsten Stunde nicht stattfindet. Es zeigt sich außerdem, dass die Schülerin M. selbstständig ein Verfahren zur Überprüfung anwendet. Der Lehrer geht aber auch hierauf nicht ein.

Die Besprechung der Hausaufgabe ist als verfahrensbetont einzuordnen, da bei der Besprechung der Probleme lediglich die Verfahren zum Zeichnen von Winkelhalbierenden wiederholt werden, ohne diese inhaltlich zu reflektieren. Es steht also vor allem prozedurales Denken im Vordergrund. Es werden keine weiterreichenden Begründungen von den Schülerinnen und Schülern gefordert, insbesondere das ‚Nichtpassen' des Inkreises wird mehrfach von den Lernenden angesprochen, vom Lehrer jedoch nicht aufgegriffen.

Wiederholung Eigenschaften der Winkelhalbierenden

Während noch einige Schülerinnen und Schüler die Ergebnisse notieren, wiederholt der Lehrer gemeinsam mit den Lernenden die Eigenschaften der Winkelhalbierenden:

U [00:06:34.03]

Lehrer: […] Was war nochmal das Besondere an diesen Winkelhalbierenden? ...... H.

Schüler H: Die haben den gleichen Abstand zu zwei Seiten.

Lehrer: Und was war nochmal das für ein besonderer Punkt, der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden? D.

Schüler D: Das war der Mittelpunkt von dem Innenkreis.

Lehrer: […] Genau... Das heißt also, von diesem Mittelpunkt des Innenkreises ist es wohin immer gleich weit? A.

Schüler A: Bis zu dem Rand.

Hier findet ein kurzes fragend-entwickelndes Unterrichtsgespräch statt, in dem der Lehrer leicht lenkt. Durch diese Zusammenfassung der Eigenschaften wird die vorangegangene Phase des prozeduralen Denkens durch eine Phase ergänzt, in der begriffliches Denken möglich ist, da die Eigenschaften im Zusammenhang genannt werden. Allerdings scheinen die Schülerinnen und Schüler hier lediglich Faktenwissen abzurufen, da die Eigenschaften hier nicht begründet und reflektiert oder miteinander in Beziehung gesetzt werden. Die Zusammenfassung fördert aber das strukturierte Denken und kann den Lernenden als Hilfestellung dienen, das Wissen über die Winkelhalbierende vom in der folgenden Aufgabe entwickelten Wissen über die Mittelsenkrechten abzugrenzen.

12.3.2 Aufgabe 2 ‚Mathe-Referat'

> Melanie, Ralf und Nina wollen sich für ein Mathe-Referat treffen. Da es bei ihnen zu Hause gerade nicht passt suchen sie einen zentralen Treffpunkt, der von den drei Mathe-Fans gleich weit entfernt ist.
>
> Melanie x
>
> x Ralf
>
> x
> Nina

Abbildung 12.3: Aufgabe 2 ‚Mathe-Referat' (Namen geändert)

Diese Aufgabe dachte sich der Lehrer selbst aus, da er mit den Aufgaben im Schulbuch unzufrieden war (siehe Seite 320). Er begründet die Auswahl dieser Aufgabe wie folgt:

I [00:03:55.27]

Lehrer: […] Und ich dachte, das ist ja ziemlich blöde, wenn man das nur auswendig lernt. Deswegen ähm bin ich dann jeweils mit einer Anwendungsaufgabe angefangen. Vorher halt bei den Winkelhalbierenden sollte dann in so einem Blumenbeet ein Springbrunnen platziert werden, der zu allen Beeträndern den gleichen Platz hat. Und da hat man das dann auch so gemacht, dass die Schüler sich dann so zwischen zwei Schenkeln halt hinstellen mussten, damit sie dann zu den Schenkeln den gleichen Abstand haben und ähm wir haben das dann auch nochmal auf dem Papier gemacht, dass sie dann die Punkte so machen, für die der Abstand immer gleich ist, und dann sollten die da die Winkelhalbierende durchziehen. Ja ich dachte, dass... ist dann besser, wenn man nicht nur auswendig lernt, sondern dass denn auch so macht. Und das gleiche Prinzip war halt hier bei den Mittelsenkrechten auch. Dann halt so eine kleine Anwendungsaufgabe.

Der Lehrer betont hier, dass die Lernenden die Eigenschaften der Winkelhalbierenden und der Mittelsenkrechten nicht nur auswendig lernen sollen. Er spricht damit implizit die Förderung des begrifflichen Denkens und des Verständnisses der Schülerinnen und Schüler an.
Den Anwendungsbezug begründet der Lehrer in der Planung:

Planung:

Funktion und Nützlichkeit der Mathematik soll dargestellt werden

Dies ist ein sehr allgemeines Argument, was auf alle Anwendungsaufgaben zutreffen kann. Der Lehrer begründet aber nicht, warum der Anwendungsbezug gerade in diesem Themengebiet sinnvoll ist.

Der Lehrer verwendet für die Aufgabenstellung die Namen der Klassensprecher:

I [00:14:24.21]

Lehrer:[…] Ich dachte, es wäre ganz nett, wenn man sowas dann überträgt und auch auf den Flur geht und das denn mal so nachspielt. Denn dann weiß man gleich: Hier, das ist ja das ist M., das ist R. und versuchen, den gleichen Abstand zu haben. Äh... ist besser, als wenn das dann einfach so äh Buchstaben sind A B C.

Bei der hier angesprochenen Hilfestellung mithilfe eines Seils (siehe Seite 328) dienen die bekannten Schülernamen als Hilfestellung bei der Übersetzung zwischen verschiedenen Repräsentationsformen.

Objektive Kennzeichen der Aufgabe 2 ‚Mathe-Referat'

Da der Begriff der Mittelsenkrechten den Schülerinnen und Schülern noch unbekannt ist, handelt es sich hier um eine begriffliche Modellierungs- und problembezogene Aufgabe. Die Übersetzung der außermathematischen Situation in ein innermathematisches Problem ist hier sehr naheliegend und erfordert nur außermathematisches Modellieren auf niedrigem Niveau. Die Lernenden sollten zunächst die Idee der Mittelsenkrechten als Vereinigung der Punkte mit je demselben Abstand zu zwei vorgegebenen Punkten entwickeln. Hierzu müssen sie Verbindungen herstellen, die über den in der Aufgabe angesprochenen Gegenstand hinausgehen. Die Aufgabe erfordert daher innermathematisches Modellieren auf mindestens mittlerem Niveau. Die gewonnenen Erkenntnisse über die Mittelsenkrechten müssen auf das gesamte Dreieck übertragen werden, so dass die Schülerinnen und Schüler erkennen können, dass sich die Mittelsenkrechten in einem Punkt schneiden, der denselben Abstand von allen Eckpunkten des Dreiecks hat. Hier bietet es sich insbesondere als Validierungsschritt des innermathematischen Modellierungsprozesses an, zu begründen, warum sich die drei Mittelsenkrechten in einem Punkt treffen. Dies stellt eine einfache Form eines Beweises dar und erfordert mathematisches Argumentieren auf hohem Niveau. Aber schon bei der Erarbeitung der Mittelsenkrechten ist mathematisches Argumentieren erforderlich. Der Anwendungsbezug der Aufgabe erfordert einen Rückbezug zur Realität nach der Ausführung des innermathematischen Modellierungskreislaufs. Im außermathematischen Validierungsschritt sollte insbesondere darauf eingegangen werden, dass der mit dieser Methode gefundene Treffpunkt zwar zu allen Wohnorten denselben Abstand hat, dass es aber eventuell einen Treffpunkt gibt, der insgesamt betrachtet näher an allen Wohnorten liegt. Dies ist z.B. bei stumpfwinkligen Dreiecken der Fall.

Analyse des Unterrichtseinsatzes der Aufgabe 2 ‚Mathe-Referat'

Sammeln von Lösungsvorschlägen

Der Lehrer projiziert die Aufgabenstellung mithilfe eines Overhead-Projektors an die Wand, lässt eine Schülerin die Aufgabe vorlesen und fragt die Schülerinnen und Schüler nach möglichen Vorgehensweisen.

U [00:08:51.09]

Schüler P: Man verbindet die Punkte, ähm das es ein Dreieck wird. […]

Lehrer: Oh, magst du das mal eben machen? […]

Der Lehrer fördert hier das Erklären von Lösungswegen und die Visualisierung an der Tafel durch die Schülerinnen und Schüler.

Ab diesem Zeitpunkt arbeiten die Lernenden vorerst nur noch im mathematischen Modell, da sie die nun folgenden Lösungsvorschläge ohne Bezug zur außermathematischen Situation formulieren.

U [00:09:31.26]

Schüler D: Ja jetzt zeichnet man halt von allen Ecken die Winkelhalbierende ein.

Schüler X: Ja dann guckt man, wo der Schnittpunkt ist und das ist dann der zentrale Punkt.

Lehrer: Der von M., N. und R. gleich weit entfernt ist?

Schüler X: Ja.

(L. wartet auf weitere Wortmeldungen.)

Lehrer: O.

Schüler O: Ist der nicht irgendwie nur von den Rändern da gleich weit entfernt? Weil hier ist es ja zum Beispiel auch, hier ist es ja überhaupt nicht gleich weit entfernt (verweist auf Lösung der Aufgabe 1).

Lehrer: Ohh, ich muss mal ganz aufmerksam sein beim Lesen. Wovon muss dieser gesuchte Treffpunkt gleich weit entfernt sein? ... H.

Schüler H: Von den Punkten und nicht von den Linien.

Lehrer: Ahh...... Ok, also der Innenkreis, hier innen drin (L. deutet Innenkreis in Dreieck auf Folie an.), der hilft uns gar nicht weiter.... Also helfen uns die Winkelhalbierenden eigentlich auch nicht weiter.

Der Lehrer fragt nicht nach einer Begründung der Antwort von Schülerin X., sondern wartet schweigend weitere Schülerkommentare ab und fördert so die selbstständige Überprüfung der Antwort durch die Lernenden. Die Schülerin O. begründet anhand der vorherigen Aufgabe (siehe 12.3.1), dass der Vorschlag nicht die gesuchte Lösung sein kann. Der Lehrer greift ihren Gedankengang auf und erläutert direkt, dass die Winkelhalbierenden für die Lösung der Aufgaben nicht geeignet sind. Hier lenkt der Lehrer kurzzeitig sehr stark, es wird den Lernenden aber verdeutlicht, warum der Lösungsversuch nicht zielführend ist.

Den fehlerhaften Lösungsversuch mithilfe der Winkelhalbierenden hat der Lehrer schon in der Planung vorhergesagt:

Planung:

Welche Lösungen erwarten Sie standardmäßig?

Ma-Referats-Aufgabe:

- Mittelpunkt des Inkreises wird herangezogen, da wir vorher den Inkreis behandelt haben.

Hier zeigt sich, dass der Lehrer seine Lerngruppe gut im Vorfeld einschätzen konnte.

Im Folgenden notiert der Lehrer zunächst den Lösungsvorschlag der Schülerin N. (siehe Abbildung 12.4):

U [00:11:00.20]

Schüler N: Vielleicht kann man das ja mit der Methode machen, die ähm F. letztes Mal vorgeschlagen hat. Das war ja einfach nur von einer Ecke zur gegenüberliegenden Ecke der Seite. Vielleicht klappt das ja.

Lehrer: Mh. Das schreiben wir uns mal auf...... Lösungsvorschläge. […] F. Vorschlag mit den Seitenhalbierenden. (L. notiert dies auf Folie.) Wir haben hier noch ein bisschen Platz für weitere Vorschläge... Welche Ideen habt ihr noch? ...... Wir hatten beim letzten Mal beim Innenkreis, ich glaub M. war das, du hattest eine tolle Idee. Mit dem Innenkreis konnte man überprüfen, ob denn der Punkt tatsächlich den gleichen Abstand zu den Rändern hatte, indem man da halt so einen Kreis innen einschreibt. Wie konnte man das hier überprüfen? ... U.

Schüler U: Dann muss der Kreis alle 3 Ecken berühren.

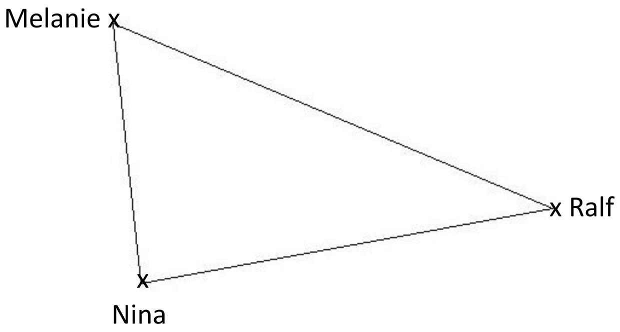
Lehrer: Aha... und so einen Kreis nennt man Umkreis. Das wäre dann hier also, das wäre ein Kontrollmechanismus.

Der Lehrer lässt den Vorschlag der Schülerin N. zunächst unkommentiert stehen und fragt nach weiteren Lösungsideen. Da auch nach längerer Pause keine weiteren Lösungsvorschläge von den Schülerinnen und Schülern genannt werden, lenkt der Lehrer die Lernenden leicht in Richtung des Umkreises. Dabei stellt er explizit Verbindungen zum Vorwissen der

Schülerinnen und Schüler her. Er hält diese Möglichkeit zur Probe auf der Folie fest, wobei er aber noch Platz für weitere Lösungsvorschläge lässt (siehe Abbildung 12.4).

Mittelsenkrechte

Melanie, Ralf und Nina wollen sich für ein Mathe-Referat treffen. Da es bei ihnen zu Hause gerade nicht passt suchen sie einen zentralen Treffpunkt, der von den drei Mathe-Fans gleich weit entfernt ist.



Lösungsvorschläge:

Fynns Vorschlag (Seitenhalbierende)
Seitenhalbierende bilden neues Dreieck + Inkreis
Probe: Berührt der Umkreis alle 3 Ecken?

Abbildung 12.4: Folie zur Besprechung von Aufgabe 2 (Namen geändert)

Es folgt ein Lösungsvorschlag der Schülerin G.:

U [00:13:27.04]

Schüler G: Vielleicht kann man ja auch machen ähm, dass man diese Seitenhalbierende macht und dann hat man ja drei verschiedene Punkte auf der Linie. […] Und dann verbindet man diese wieder zu einem neuen Dreieck und dann sucht man davon den Inkreismittelpunkt und... und dann dieser Kreis, der davon entsteht (? ...).

Lehrer: Boa, das ist schon ziemlich komplex. Ich würde sagen, das wäre auf jeden Fall was, morgen sind wir ja wieder im Computerraum, das können wir da nochmal gut überprüfen. Also äh... wie würdest du das formulieren?

Schüler Y: Ähm keine Ahnung. Seitenhalbierende durch neues Dreieck plus Innenkreis.

Lehrer: Seitenhalbierende bilden neues Dreieck plus Innenkreis (L. notiert dies auf der Folie.)

Das klären wir morgen einfach mal ab, kann man ganz schnell mit DynaGeo überprüfen.

Die Formulierung des Lehrers auf der Folie ist etwas anders als zunächst von der Schülerin G. erläutert, da hier nicht auf die Mittelpunkte der Seiten als Eckpunkte des neuen Dreiecks eingegangen wird (siehe Abbildung 12.4). In der aus dieser Schüleridee resultierenden Aufgabe in der nächsten Stunde benennt der Lehrer dagegen explizit die Mittelpunkte als Eckpunkte des neuentstehenden Dreiecks (siehe 12.3.6). Hier zeigt sich, dass der Lehrer die Schüleridee zwar entsprechend verstanden hat, dass er aber beim Aufschreiben des Lösungsvorschlags nicht auf die Formulierung im Sinne der Schülerantwort geachtet hat.

Es ist anzumerken, dass der Lehrer die Lernenden zwar zur Äußerung von Vermutungen auffordert und somit scheinbar die kognitive Selbstständigkeit fördert, allerdings werden sie nicht zur Begründung der Vermutungen aufgefordert. Insbesondere können die Schülerinnen und Schüler aufgrund des fehlenden Vorwissens keine begründeten Vermutungen äußern, weshalb die selbstständige Entdeckung der Zusammenhänge durch die Lernenden hier gar nicht möglich ist (vgl. 5.3.1). Dies erkennt der Lehrer zwar nicht direkt, er erläutert aber in der Planung:

Planung:

Das Eingangsproblem ist wahrscheinlich so schwierig, dass die S es nicht ohne Hilfe schaffen werden den Umkreismittelpunkt zu konstruieren. Daher brauchen sie dazu noch Hilfe → Seilaufgabe.

Hier zeigt sich, dass der Lehrer die Schwierigkeiten erwartet und eine konkrete Hilfe vorbereitet hat. Er kann scheinbar den Leistungsstand der Schülerinnen und Schüler im Vorfeld gut einschätzen. Er hat aber dennoch die Unterrichtsphase zum Äußern der Vermutungen durchgeführt die von vorneherein als nicht zielführend hätte erkannt werden müssen.

Hilfestellung Seil

Da die Schülerinnen und Schüler auf Nachfrage des Lehrers keine weiteren Lösungsvorschläge äußern, leitet der Lehrer zu einem eigenen Lösungsvorschlag über, ohne auf die bisherigen Schülerideen näher einzugehen und diese zu reflektieren:

U [00:14:30.23]

Lehrer: […] Ja, gibt es noch weitere Ideen? ...... Ich hätte noch eine. Wie war das nochmal, bei einem komplexen Problem, wenn man nicht genau weiß, was man machen soll, wie kommt man da der Lösung näher?

Schüler E: In Einzelschritten.

Lehrer: Ah... das machen wir jetzt mal. […] Das heißt also, das hier (L. hält mitgebrachtes Seil hoch.)... das ist eine Ecke, R.... M. bildet die andere Ecke und das Seil hier ist diese Dreiecksseite (L. zeigt auf Folie auf Verbindungstrecke zwischen R. und M.). […] eure Aufgabe ist es dann, euch so zu postieren, dass ihr den gleichen Abstand zu R. und zu M. habt. Das wollen wir. Wir wollen ja den gleichen Abstand zu den drei Eckpunkten. Wir gucken uns einfach erstmals nur diese beiden Eckpunkte an.

Der Lehrer lenkt hier sehr stark, indem er an das den Lernenden von der Erarbeitung der Winkelhalbierenden bekannte Zerlegungsprinzip erinnert. Dieses stellt ein auch in der Literatur zum Problemlösen bekanntes heuristisches Prinzip dar (siehe z.B. Bruder & Collet, 2011) und reduziert komplexe Probleme zunächst auf die Lösung von Teilproblemen.

Im Interview erläutert der Lehrer hierzu:

I [00:27:53.12] Lehrer: Ähm... also wir haben das bei den Winkelhalbierenden halt vorher schon mal gemacht […] aber ich dachte hier auch, um die Problemlösekompetenz da besser auszuarbeiten, ist es auch ganz gut, sich dann auf einen Teil bloß zu beschränken und dann zu gucken, ja wie kann ich den lösen und das dann zu übertragen... So explizit haben wir das halt noch nicht so oft gemacht.

Der Lehrer zeigt hier, dass er das Zerlegungsprinzip benennen kann und auch explizit zur Förderung der Problemlösekompetenz heranzieht. Hier zeigt sich inhaltsbezogenes Wissen des Lehrers. Außerdem wird hier deutlich, dass der Lehrer bewusst Verbindungen zum Vorwissen der Schülerinnen und Schüler herstellt.

Die Reduktion auf das Teilproblem des gleichen Abstandes zu zwei Punkten hat der Lehrer schon im Vorfeld geplant:

Planung:

Seilaufgabe: Damit die Schüler die Idee vertiefen, dass die Mittelsenkrechte eine Ansammlung von Punkten mit gleicher Eigenschaft ist, sollen sie (genau wie bei der Winkelhalbierenden in der letzten Woche) selbst Punkte darstellen und sich entsprechend der Aufgabe im Raum (Flur) positionieren. […]

Hier beschreibt der Lehrer insbesondere die Eigenschaften der Mittelsenkrechten, er erkennt also das Potenzial der Aufgabe zum begrifflichen Denken.

Die Schülerinnen und Schüler lösen die Teilaufgabe zur Bestimmung der Mittelsenkrechten mithilfe des Seils gemeinsam auf dem Schulflur.

U [00:17:11.01]

(Schüler N. stellt sich auf der linken Seite an die Mitte des Seils, die die Schülerinnen und Schüler durch knicken des Seils herausgefunden haben.)

Schüler M: So ab da müsst ihr euch jetzt .... da so.

(Schüler M. deutet mit dem Zeigefinger eine Linie an; alle anderen Schüler stellen sich auf der rechten Seite des Seils in einer Linie gegenüber von Schüler N. auf der anderen Seite auf.)

(L. ermahnt einige Schüler.)

Schüler M: Sind die gerade?

Schüler N: Nicht wirklich. Ihr müsst noch ein Stück darüber.

Lehrer: So ich hätte jetzt mal gern gewusst, wieso steht ihr eigentlich so?

Schüler M: Weil wir das Seil geknickt haben, damit wir schon mal den Mittelpunkt von dem Seil haben und dann so einfach alle in einer Reihe aufgestellt und N. hat dann ausgerichtet, wie es gut aussieht. […]

Lehrer: Die Linie ist gerade? Aber weswegen muss die genau so sein? Du hast ja grad eben auch noch so korrigiert, ein bisschen dahin, ein bisschen dahin (? ...). B.

Schüler B: Weil das im 90 Grad Winkel zu der Linie sein muss... Also das vom Seil bis zu R. 90 Grad sind.

Lehrer: Tatsächlich ist das so? Muss ich mal eben gucken. Oh joa.

Lehrer: Wie, wie ist das mit den einzelnen Punkten hier auf dieser Linie? ... Habt ihr tatsächlich den gleichen Abstand zu R. und zu M.?

(Viele Schüler bejahen dies.)

Lehrer: Kommt hin. Wir fassen nochmal zusammen. Wie zeichnet man so eine Linie ein hier (L. zeigt auf Linie von Schülern)?

Schüler C: […] Äh also man hat halt eine Linie und dann hält man das Geodreieck so da dran, da ist ja so eine... Wie soll ich das erklären? […]

Schüler F: Müsste man vom, also im 90 Grad Winkel in der Mitte davon weg und dann ist man ein Strich.

Lehrer: Was waren die beiden zentralen Informationen? ... Ja?

Schüler X: Mittelpunkt der Linie von dem Dreieck und dann 90°-Winkel eine neue Linie.

In diesem Unterrichtsabschnitt kann man sehen, dass der Lehrer zunächst sehr stark lenkt, da er seine eigene Lösungsidee und insbesondere die Reduktion auf das Teilproblem einbringt, er setzt aber insbesondere unterschiedliche Repräsentationsformen ein. Die eigentliche Erarbeitung des Teilproblems gelingt den Schülerinnen und Schüler mithilfe der vom Lehrer zur Verfügung gestellten Hilfsmittel eigenständig. Dies könnte daran liegen, dass die Schülerinnen und Schüler auch die Winkelhalbierenden mit einer ähnlichen Methode mithilfe des Seils erarbeitet haben. Allerdings wird nicht begründet, warum die Punkte mit demselben Abstand zu den Eckpunkten alle auf einer Linie im 90°-Winkel zur Dreiecksseite liegen, obwohl der Lehrer mehrfach Begründungen eingefordert hat. Das begriffliche Denken wird daher kaum aktiviert. Gegen Ende des Transkriptausschnittes leitet der Lehrer den Transfer der hier gefundenen Eigenschaften auf ein Verfahren zum Zeichnen von Mittelsenkrechten an. Hier finden ein Übergang zum prozeduralen Denken und auch ein Wechsel der Repräsentationsform statt.

<u>Durchführung der erarbeiteten Idee auf dem Arbeitsblatt</u>

Als alle Schülerinnen und Schüler wieder in der Klasse sind, verteilt der Lehrer die vorher nur auf Folie gezeigte Aufgabenstellung als Arbeitsblatt an die Schülerinnen und Schüler. Am oberen Rand des Arbeitsblattes hat der Lehrer eine Linie für die noch fehlende Überschrift eingefügt.

U [00:20:53.29]

Lehrer: Oh, äh... (???) Warum ist da so ein Strich oben drüber? Da fehlt noch die Überschrift. Die müssen wir noch kurz eben ergänzen. Ähm... und zwar diese besondere Linie, die man hier einzeichnet... zwei Eigenschaften hat die. Welche waren das nochmal? ...... R.

Schüler R: Die waren im 90 Grad Winkel zu der längsten

Lehrer: Ok. Also senkrecht waren die und woher weiß man, wo man, ich brauch jetzt eben das Geodreieck... Woher weiß man denn, wo man diese senkrechte Linie hinzeichnen muss? ...... D.

Schüler D: Weil das der Mittelpunkt von der Linie ist.

Lehrer: Ah Ok. Also in der Mitte müssen wir eine senkrechte Linie zeichnen und deswegen nennt man diese Linien auch Mittelsenkrechten und das ist denn die Überschrift.

Der Lehrer lässt zunächst die beiden wichtigsten Eigenschaften der eben erarbeiteten besonderen Linie, den rechten Winkel und die Lage im Mittelpunkt der Dreiecksseite, wiederholen. Dabei formuliert er den vom Schüler verwendeten Begriff ‚90 Grad Winkel' in ‚senkrechte Linie' um und leitet hieraus den Begriff ‚Mittelsenkrechte' ab. Er verbindet explizit die Eigenschaften der Mittelsenkrechten mit der Begriffsbezeichnung. Hier wird vor allem begriffliches Wissen aufgebaut.

Der Schüler R. reagiert auf den Begriffswechsel des Lehrers wie folgt:

U [00:21:55.26]

Schüler R: Muss die senkrecht zu der Linie sein oder im 90 Grad Winkel?

Lehrer: Oh das ist eine gute Frage. Was sagt ihr? […]

Schüler L: Ist das nicht dasselbe?

Lehrer: Ja und Mathematiker sagen auch gerne orthogonal. […]

Schüler R: Ich meinte das ein bisschen anders. […] Aber wenn die jetzt, also meine Frage war jetzt, ob man senkrecht einfach einen komplett senkrechten Strich durchs Blatt und dann, dass sie dann so geht.

Lehrer: Oh... Wie nennt man solche Striche denn nochmal? Wir haben ja solche und solche (L. zeigt Horizontale und Vertikale.).

Schüler R: Waagerechte und Senkrechte oder was?

Lehrer: Ne das, waagerecht passt und wie nennt man dies hier (L. zeigt Vertikale.)? ... Ja?

Schüler Z: Senkrecht.

Lehrer: Das ist in diesem Fall tatsächlich senkrecht hierzu, aber so (L. dreht Arme zur Seite) wären die auch noch senkrecht zueinander. Kann man drehen. Aber wie nennt man die

Schüler R: Ach so senkrecht zueinander.

Lehrer: //Genau. Aber wie// nennt man die, die von oben nach unten verlaufen? ...... Das sind die vertikalen Linien.

Hier zeigt sich, dass der vom Lehrer vorgenommene Begriffswechsel nicht allen Schülerinnen und Schüler klar war. Der Lehrer gibt die Frage des Schülers an die Klasse weiter und fördert so die selbstständige Überprüfung. Er zeigt hier aber einige Schwächen in der Begriffsverwendung. Er kann den umgangssprachlichen Begriff ‚senkrecht' nicht klar vom mathematischen Begriff ‚senkrecht' abgrenzen und erkennt daher die richtige Schülerantwort des Schülers R. nicht an. Den aus mathematischer Sicht entscheidenden Hinweis ‚senkrecht zueinander' gibt er scheinbar nur ‚aus Versehen'. Dies wird daran deutlich, dass er den Gedanken des Schülers R. nicht direkt aufgreift und vertieft, sondern stattdessen seine ursprüngliche Fragestellung nach dem Begriff der vertikalen Linien weiter verfolgt. Hier lenkt der Lehrer stark, da er die Antwort vorgibt.

Der Lehrer fordert die Schülerinnen und Schüler auf, die Mittelsenkrechten auf dem Arbeitsblatt einzuzeichnen.

Die bisherige Erarbeitung der Mittelsenkrechten war stark durch begriffliches Denken geprägt. Nun wechselt der Fokus hin zu eher prozeduralem Denken.

Zusammenfassung des Vorgehens an der Tafel

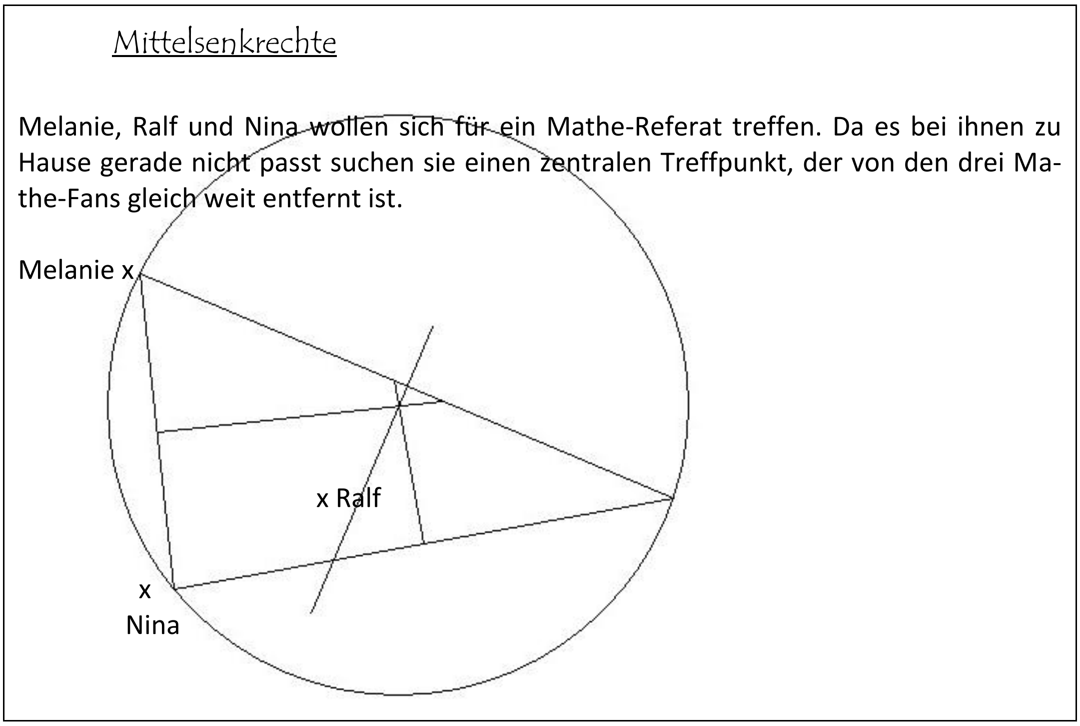


Abbildung 12.5: Folie zur Besprechung der Lösung von Aufgabe 2 (Namen geändert)

U [00:24:10.11]

Schüler L: Können wir das so mit einigen Stichworten aufschreiben, irgendwie so (???). […] Ja so wie ich das jetzt so mache, weil zu Hause saß ich dann jetzt so ein bisschen davor und wusste erst nicht, was ich machen sollte.

Lehrer: Mh. Ja das ist eine gute Idee. […] Und wir machen das so, Schritt für Schritt schreiben wir auf, wie man eine Mittelsenkrechte einzeichnet. Und dann machen wir jeden Schritt parallel auch hier einmal am Overhead-Projektor. R.

Schüler R: Also erstens muss man die Eckpunkte miteinander verbinden.

Lehrer: Stimmt. Dann haben wir hier .... das Dreieck. Das wurde schon gemacht. (L. notiert Schritt 1 an Tafel, siehe Abbildung 12.6) Der zweite Schritt... Also das Tau ist schon gespannt von M. und R. Wie geht es weiter? N.

Schüler N: Dann mess ich einmal die Strecke. […] Halbieren... und da, wo die Hälfte ist, mach ich einen Punkt. […] (L. notiert Schritt 2 an Tafel, siehe Abbildung 12.6)

Lehrer: Wer kann das mal eben hier vorne machen? Einmal den Mittelpunkt der Strecke zwischen M. und R. einzeichnen? ...... R. selber. […]

(Schüler R. hat die Mittelpunkte der Strecken eingezeichnet und möchte nun Mittelsenkrechte einzeichnen, siehe Abbildung 12.5)

Schüler R: //Also// hier jetzt?

(Zustimmung seitens Schüler in der Klasse.)

Schüler X: Jetzt drehen.

Schüler R: Wie drehen?

Schüler X: Das Geodreieck drehen. […] Ja. Und jetzt an die Linie halten mit dem Strich, mit dem 90 Grad Strich.

Schüler M: Der Strich, wo die Null ist, ne auf dem Geodreieck. […] Diesen Strich hältst du jetzt auf die Linie zwischen dir und mir. Also diesen Punkt, den du eingezeichnet hast. […] Und jetzt gucken, ob das im rechten Winkel ist und dann eine Linie ziehen. […]

Schüler R: Ok. (Schüler R. zeichnet Senkrechte ein, siehe Abbildung 12.5)

Lehrer: Super. Äh tolle Idee L., dass wir das so Punkt für Punkt aufschreiben. Wir haben ja gesehen, so einfach ist es gar nicht. Ok, der dritte Schritt war also: Eine senkrechte Linie zur Strecke M. R. zeichnen, die durch den Mittelpunkt geht (L. notiert Schritt 3 an Tafel, siehe Abbildung 12.6). […] Hier werden nochmal die wichtigen Worte markiert: Senkrechte Linie durch den Mittelpunkt, also die Mittelsenkrechte.

Es fällt auf, dass die einzelnen Punkte zwar von den Schülerinnen und Schülern genannt werden, der Lehrer formuliert die Schülerantworten für den Tafelanschrieb aber stark um. Teilweise lenkt der Lehrer in diesem Abschnitt leicht, größtenteils entwickeln die Lernenden die aufzuschreibenden Unterpunkte aber selbstständig. Der Lehrer erinnert hier immer wieder an die reale Situation mit dem Seil und stellt so explizite Verbindungen zur Darstellung der Mittelsenkrechten mithilfe des Seils her. Außerdem markiert er die wichtigsten Begriffe und fördert so das strukturierte Denken. Der Fokus liegt hier aber auf prozeduralem Denken.

Mittelsenkrechte

1. Eckpunkte verbinden
2. Mittelpunkt zwischen Melanie und Ralf bestimmen
3. Eine senkrechte Linie zur Strecke Melanie – Ralf einzeichnen, die durch den Mittelpunkt verläuft.

Abbildung 12.6: Tafelanschrieb zur Aufgabe 2 (Namen geändert)

Im Interview erläutert der Lehrer:

I [00:25:58.24]

Lehrer: […] dachte ich, ist es hier auch nochmal gut, dass wir das so punktartig oder rezeptartig Punkt für Punkt aufschreibt. Weil bei einigen Schülern ist es so, die brauchen das dann, damit sie das besser checken.

Hier zeigt sich, dass der Lehrer den Fokus auf das prozedurale Denken in dieser Unterrichtsphase erkennt, er reflektiert aber nicht, dass der Vorschlag zum Aufschreiben von einem Schüler stammte.

Die in diesem Abschnitt beim Schüler R. auffallenden Probleme beim Einzeichnen der Mittelsenkrechten hat der Lehrer schon in der Planung vorhergesehen:

Planung:

Ma-Referatsaufgabe: Aufgabe wurde auf Folie gezogen, damit die Lösung und insbesondere der Lösungsweg direkt nachvollziehbar sind (S erkennen Handhaben mit dem Geodreieck, etc. besser). […] Darüber hinaus erwarte ich Schwierigkeiten bei der Konstruktion der Mittelsenkrechten, da die S auch bei der Konstruktion der Winkelhalbieren Probleme hatten.

Es wird deutlich, dass der Lehrer den Leistungsstand und mögliche Probleme der Lernenden im Vorfeld gut einschätzen kann und auch durch das Einplanen von Hilfestellungen und Visualisierungen darauf reagieren kann. Hier zeigt sich eine Verknüpfung von schülerbezogenem Wissen und dem Wissen über das Verständlichmachen bei diesem Lehrer.

Überprüfung eines Lösungsvorschlags und Probe mit dem Umkreis

Der Lehrer fordert die Lernenden, die bereits alle Mittelsenkrechten eingezeichnet haben auf, den Vorschlag von Schüler F. zu reflektieren und den Umkreis einzuzeichnen.

U [00:23:46.24]

Lehrer: Ähm die, die fertig sind... können ja mal eben nachschauen, ob denn äh... zum einen sich das mit F. Vorschlag deckt, ob die Mittelsenkrechten denn auch gleichzeitig Seitenhalbierende sind... und dann die Probe machen und den Umkreis zeichnen.

Es fällt auf, dass bisher der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten als Mittelpunkt des Umkreises noch gar nicht angesprochen wurde. Es wird auch in der Folge nicht mehr begründet, dass die Mittelsenkrechten sich in einem Punkt schneiden müssen.

Der Lehrer geht durch die Klasse und schaut sich einige Schülerlösungen an. Dabei gibt er mehreren Schülerinnen und Schülern Hilfestellungen.

U [00:30:33.20]

Schüler G: Ähm also wie muss man jetzt, der Abstand ist ja immer so 5,6 5,5 weiß ich nicht genau, muss man dann das den Zirkel auf 5,5 einstellen?

Schüler Z: Den Zirkel musst du hier (S. zeigt auf Mittelpunkt der Strecke), pikst du hier rein in diese Dings. Dann drehst du und guckst, oder der Kreis alle drei Ecken verbindet. Oder nicht?

Lehrer: Ja genau, der Abstand soll ja zu allen Ecken gleich sein. F.

Hier zeigt sich deutlich, dass die Schülerinnen und Schüler sich gegenseitig unterstützen. Dies ist vom Lehrer auch durchaus gewünscht:

I [00:18:34.26] Lehrer: Und ähm... ja, eigentlich hatte ich noch aufgeschrieben, dass sie ihren Nachbarn bei der Konstruktion des Treffpunktes unterstützen sollen. Das klappt aber eigentlich im Klassenraum ziemlich gut, dass sie sich gegenseitig helfen, weil die da auch so in Gruppentischen sitzen und das kennen die eigentlich schon.

Der Lehrer scheint die gegenseitige Unterstützung und damit das Erklären von Lösungswegen durch die Schülerinnen und Schüler und die kognitive Selbstständigkeit der Lernenden bewusst zu fördern.

Die Schülerin G. hat in der Zwischenzeit den Umkreis gezeichnet, wobei aber ein Eckpunkt nicht genau auf dem Kreis liegt.

U [00:31:50.10]

Schüler G: Ähm... der (S. meint den Umkreis.) ist jetzt nicht ganz genau bei N., aber... da ist der Zirkel ungenau, oder?

Lehrer: Ja. Das sieht schon gut aus... Ähm G., kannst du auch mal die anderen beiden Mittelsenkrechten einzeichnen? Da kannst du einfach die Folie nehmen und dann so ein bisschen abpauschen.

Hier fordert der Lehrer die Schülerin G. explizit zur Visualisierung ihrer Lösung auf.

Beim Schüler L. schneiden sich die Mittelsenkrechten nicht in einem Punkt:

U [00:32:14.13]

Schüler L: Bei mir schneidet sich das irgendwie nicht. […]

Lehrer: Mh. Woran könnte das denn liegen, dass die sich nicht genau in einem Punkt schneiden?

Schüler L: Zu ungenau. Vielleicht der (S. zeigt auf eine Mittelsenkrechte) ein bisschen ungenau.

An dieser Stelle zeigt sich ganz deutlich, dass die Schülerinnen und Schüler wie selbstverständlich davon ausgehen, dass sich die Mittelsenkrechten in einem Punkt schneiden, obwohl dies bisher weder angesprochen noch begründet wurde.

Im Rahmen der Planung hat der Lehrer schon eine Aufforderung zur Begründung dieser Tatsache als eigene Aufgabe mit auf die Folie gedruckt (siehe Abbildung 12.8), diese Aufforderung aber während des Unterrichts verdeckt (siehe 12.3.3). Hier zeigt sich, dass der Lehrer über das nötige Fachwissen zur Notwendigkeit der Begründung verfügt. Er hat das Potenzial der Aufgabe zum Argumentieren also erkannt. Dies wird aber nicht in Unterrichtshandlungen umgesetzt.

Die Schülerin K. fragt den Lehrer, ob man die Mittelsenkrechte auch nur mit dem Zirkel konstruieren kann:

U [00:33:56.01]

Schüler K: Also wenn man nur einen Zirkel zur Verfügung hat, dass man dann ähm von einem Punkt, also jetzt zum Beispiel von R.s Punkt, ähm ungefähr die Mitte sucht und dann so einen Halbkreis zeichnet, den Zirkel dann nicht verstellt, und dann von M.s Punkt auch einen Halbkreis und dann treffen sich die beiden Halbkreise ja und dass man dadurch dann eine Linie zieht, dass man dann auch die Mitte hat.

Lehrer: Das heißt also, man bräuchte das Geodreieck gar nicht. Man kann mit Zirkel und Lineal schon Mittelsenkrechten konstruieren. Guckt mal, ob das funktioniert.

Der Lehrer fordert die Schülerin hier direkt zur selbstständigen Überprüfung auf. Allerdings können in dieser ersten videografierten Stunde keine weiteren Beobachtungen zu diesem Vorschlag gemacht werden können. Der Lehrer greift den Vorschlag aber in der folgenden Stunde als eigene Aufgabe wieder auf (siehe 12.3.4 und 12.3.5).
In der folgenden Plenumsphase legt der Lehrer die von G. vervollständigte Zeichnung auf der Folie (siehe Abbildung 12.5: Folie zur Besprechung der Lösung von Aufgabe 2 (Namen geändert)Abbildung 12.5) auf den Overhead-Projektor:

U [00:35:06.19]

Lehrer: […] wir sehen hier... eine Möglichkeit, wie man das machen kann. Eigentlich die Möglichkeit, weil das Ganze ja eindeutig ist. Es gibt ja immer... nur eine Mitte von den einzelnen Seitenlängen... Hat jeder das einigermaßen hinbekommen, dass die sich in einem Punkt schneiden die Mittelsenkrechten. (Überwiegend Zustimmung aus der Klasse.) Ich hab (???) gesehen, dass es nicht ganz genau war, aber da konnte man sehen: Oh ja, da hab ich ein bisschen schief gezeichnet und so. Ähm... das kann man dann darauf zurückführen. Was wir jetzt noch nicht besprochen haben: Wie bekommt man mit so einem Zirkel den Umkreis überhaupt hin? (L. hält Tafelzirkel hoch.) […]

Schüler A: Indem man das…

Lehrer: Zeig mal. […]

(Schüler A. kommt nach vorne und setzt Zirkel in Schnittpunkt der Mittelsenkrechten an.)

Schüler A: So und dann so M. zum Beispiel (S. setzt anderes Zirkelende an Wohnort von M. an.) und dann kann man da einfach so. […]

Lehrer: Ja prima. Wie weit ist denn jetzt der zentrale Treffpunkt von M., N. und R. entfernt? […]

Schüler M: Gleich weit.

Lehrer: Und wie weit?

Schüler M. Äh... Das müsste man dann ausmessen von dem Punkt zu einem (???). […]

Schüler U: 5,5cm.

Der Lehrer stellt den Lösungsweg der Zeichnung der Mittelsenkrechten ohne Schülerbeteiligung vor. Er lenkt somit stark, weist aber auch direkt auf mögliche aufgetretene Fehler hin, wodurch die Lernenden gegebenenfalls die Möglichkeit zur Klärung der Fehlerursache erhalten. Das Zeichnen des Umkreises wird ohne weitere Erläuterungen und Begründungen von der Schülerin A. an der Tafel vorgeführt. Der Lehrer nun den außermathematischen Kontext wieder mit ein und rundet die Bearbeitung der Aufgabe ab. Allerdings begründet die Schülerin M. ihre Antwort nicht und wird auch nicht vom Lehrer zu einer Begründung aufgefordert. Es steht hier vor allem prozedurales Denken im Vordergrund.

<u>Wiederholung Eigenschaften Mittelsenkrechte</u>

Anschließend lässt der Lehrer von einer Schülerin die Eigenschaften der Mittelsenkrechten wiederholen:

U [00:37:34.14]

Lehrer: Wir halten nochmal fest. Was war nochmal die Eigenschaften von allen Punkten, die auf so einer Lin, äh auf so einer Linie drauf liegen, die auf der Mittelsenkrechten liegen oder die sich da hingestellt haben? ... Was haben alle diese Punkte für eine Eigenschaft? ... H.

Schüler H: Die sind gleich weit weg von dem Punkt entfernt. […] Von den, die auf der anderen Linie, die sich schneiden.

Lehrer: Also hier von R. und M. Genau. Das ist noch eine ganz wichtige Eigenschaft zur Mittelsenkrechten, die müssen wir auf jeden Fall aufschreiben. Ähm... wer kann das einmal als Merksatz diktieren? ......I. […]

Schüler I: Die Punkte auf der Mittelsenkrechten liegen immer gleich weit von den... Eckpunkten ent, sind immer gleich lang von den Eckpunkten entfernt?

Der Merksatz wird in gelber Schrift an der Tafel festgehalten (siehe Abbildung 12.6). Dies stellt einerseits eine Reflexion des bisher erarbeiteten dar, andererseits fördert der Lehrer durch die Zusammenfassung in einem Merksatz das strukturelle Denken, da er auf die entscheidenden Punkte hinweist. Dabei stellt er wiederum Verbindungen zur außermathematischen Situation her, indem er die Schülernamen als Beispiele für die Eckpunkte benutzt. Er lenkt damit leicht und es steht begriffliches Denken im Vordergrund.

Jeder Punkt auf der Mittelsenkrechten ist gleich weit von den Eckpunkten (z.B. Melanie und Ralf) entfernt.
Der Mittelpunkt des Umkreises ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten (dort einpieksen). Der Radius ist der Abstand vom Mittelpunkt zum Eckpunkt.

Abbildung 12.7: Fortsetzung des Tafelanschriebs zu Aufgabe 2 (Namen geändert)

Ein Schüler fordert den Lehrer auf, ebenfalls zu notieren, wie man den Umkreis zeichnet:

U [00:39:36.01]

Schüler X: Wir haben noch gar nicht aufgeschrieben den Umkreis zu machen.

Lehrer: Oh ja. Das notieren wir auch noch kurz eben. Wie macht man den Umkreis? ... L.

Schüler L: Also in den Mittelpunkt, den wir jetzt rausgefunden haben, Nadel reinstecken und das so weit bis zum Beispiel zu R. stellen und dann einen Kreis machen und dann sind alle Punkte da drin. […]

Lehrer: (Lehrer notiert Merksatz an Tafel, siehe Abbildung 12.7) Also ähm bei den Punkten 1 bis 3 haben wir nur beschrieben, wie man eine Mittelsenkrechte zeichnet. Das gelbe war hier der interessante Merksatz allgemein zu Mittelsenkrechten und das ist dann zum Umkreis. Der Mittelpunkt des Umkreises... ist der Schnittpunkt... der Mittelsenkrechten... Also dort einpiksen […] und der Radius ist halt der Abstand von einem Eckpunkt zum Mittelpunkt.

Hier formuliert der Lehrer den Merksatz in eigenen Worten und lenkt damit stark. Dabei steht der Aufbau von Faktenwissen mithilfe prozeduralen Denkens stark im Vordergrund. Anschließend endet die erste Unterrichtsstunde.

Wiederholung zu Beginn der nächsten Stunde

Zu Beginn der Doppelstunde am nächsten Tag wiederholt der Lehrer gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern die anhand der Aufgabe Mathe-Referat erarbeiteten Inhalte:

U [00:42:44.00]

Lehrer: […] Ich erinnere nochmal dran, an unsere gestrige Aufgabe... Da ging es um ein Mathe-Referat, das gehalten werden musste und es wurde ein zentraler Treffpunkt gesucht. Und wir sind schon gleich zu Anfang letzter Stunde in eine kleine Falle rein getappt bezüglich des Treffpunktes. Was war hier nämlich nochmal wichtig bei dem Treffpunkt? D.

Schüler D: Dass man den gleichen Abstand von allen Ecken hat und nicht von den Seiten.

Lehrer: Aha... Das heißt also: Winkelhalbierende und äh Innenkreis helfen uns hier so nicht weiter, sondern wir brauchten da andere Hilfsmittel. Welche Hilfsmittel waren das? X. […]

Schüler X: Ähm wir haben jeweils von den Seiten die Mitte genommen und dann von der Mitte aus im rechten Winkel zu dem Strich da zwischen Punkten eine Linie zur anderen Seite gezogen und das war eine.

Lehrer: Prima. Hier sehen wir diese drei Linien. Äh... welchen Namen haben wir nochmal diesen Linien gegeben? S.

Schüler S: Mittelsenkrechten.

Lehrer: Ja, macht ja auch Sinn, weil wir da in der Mitte angesetzt haben und weil die senkrecht auf der jeweiligen Seite drauf sind. Also Mittelsenkrechte. Mh, wie hieß dieser Kreis, der alle Punkte berührt? ...... L.

Schüler L: Der Umkreis.

Hier findet ein fragend-entwickelndes Unterrichtsgespräch statt, in dem der Lehrer teilweise stark lenkt. Er erinnert dabei auch an aufgetretene Fehler. In dieser Phase des Unterrichts spricht der Lehrer vor allem prozedurales Denken und Faktenwissen an. Da die Prozeduren aber in Hinblick auf mathematisches Verständnis entwickelt werden und zu Beginn der Aufgabenbearbeitung das begriffliche Denken stark im Vordergrund steht, ist die Bearbeitung der Aufgabe insgesamt als verständnisbetont einzuschätzen.

Überleitung zur folgenden Gruppenarbeit

Im Anschluss zeigt der Lehrer die Folie aus der letzten Stunde (siehe Abbildung 12.4) und geht auf die noch nicht besprochenen Lösungsvorschläge ein.

U [00:44:41.00]

Lehrer: Wir hatten nicht mehr so wirklich besprochen, was mit unseren anderen Lösungsvorschlägen war. Ähm, was war denn mit F.s Lösung nochmal? […]

Schüler F: Dass man von den Eckpunkten eine Linie in die Mitte von der gegenüberliegenden Gerade zieht.

Lehrer: Ok... Und F.'s Linie die nennt man Seitenhalbierende. […] Treffen sich die Seitenhalbierenden auch in dem Umkreismittelpunkt? Q.

Schüler Q: Also ich hab das ausprobiert und die trafen sich glaub ich etwas weiter links.

Lehrer: Hm. Blöd, klappte nicht. Kann man das hier schon so mal erklären, weswegen das nicht klappt? M.

Schüler M: Ähm weil die Seitenhalbierenden da immer in einem rechten Winkel zu der Seite stehen, aber wenn man das von F. macht, sind die Winkel entweder größer oder kleiner, weil der Strich von F.s Möglichkeit immer in die gegenüberliegende Ecke geht.

Lehrer: Zu Anfang hast du einmal die Begriffe vertauscht, Seitenhalbierende und Mittelsenkrechte. […] Wer kann mal dieses Blatt so legen, dass es quasi F.s Linie entspricht. […]

(Schüler D. kommt zum OHP und deutet mit Blatt eine Seitenhalbierende zu R.s Wohnort an.)

Lehrer: […] Das wär dann also hier, also die Kante vom Blatt wäre die Seitenhalbierende und man sieht die Seitenhalbierende trifft gar nicht den Punkt, den Umkreismittelpunkt hier. Und die Mittelsenkrechte, die entsprechende, sieht anders aus als die (L. zeigt auf entsprechende Seitenhalbierende.). Tja F., da müssen wir uns noch ein bisschen gedulden. Zu deinen Seitenhalbierenden werden wir wahrscheinlich in der nächsten Woche kommen und dann rausfinden, was die so tolles können.

Hier werden nun die zu Anfang der vorherigen Unterrichtsstunde genannten Lösungsvorschläge aufgegriffen und reflektiert. Der Lehrer benennt hier die von Schüler F. umschriebenen Fachbegriffe und weist auf falsche Begriffsverwendungen hin. Außerdem fordert er die Lernenden zur Begründung und zur Visualisierung am Overhead-Projektor auf. Es wird aber nur begründet, dass der Umkreismittelpunkt nicht dem Schnittpunkt der Seitenhalbierenden entspricht. Dagegen fehlen Argumente, die belegen, dass der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden nicht gleich weit von den Eckpunkten des Dreiecks entfernt ist.

Da die Schülerin G. krank ist, lässt der Lehrer ihren Lösungsvorschlag nochmals von anderen Schülerinnen und Schülern wiederholen.

U [00:47:49.07]

Schüler D: Ich weiß nicht genau, aber ich weiß, dass sie halt auch die Seitenhalbierenden dann glaub ich einzeichnen wollte und da, wo sie dann jeweils die ähm beiden Linien Seiten treffen, also die Mitte davon, dass äh.

Lehrer: Oh, das sind also der Punkt, der Punkt und der Punkt (zeigt jeweils die Mittelpunkte der Seiten), ja.

Schüler D: Also dass das dann ein neues Dreieck ist. Ja und keine Ahnung, was dann noch kommt.

Lehrer: Wie ging es dann nochmal weiter? Also Seitenhalbierende bilden ein neues Dreieck und dann haben wir hier noch aufgeschrieben plus Innenkreis. Was könnte das heißen? N.

Schüler N: Dann könnte man ja eigentlich wieder das machen, was wir vorher die ganze mit dem äh... halt Winkelhalbierenden einzeichnen und dann diesen Innenkreis da rein machen.

Lehrer: Ha... Prima. Das ist auf jeden Fall etwas, auch wenn G. jetzt nicht da ist, das müssen wir auf jeden Fall kurz abchecken. Ähm hier an den PCs geht das super schnell.

Den Lernenden fällt die Erläuterung des Lösungsvorschlags der Schülerin G. sehr schwer. Dies könnte durch die oben erwähnte ungenaue Formulierung des Lösungsvorschlags (siehe Seite 327) erklärt werden.

Aus dieser Erläuterung des Lösungsvorschlags leitet der Lehrer in die nun folgende Gruppenarbeit (siehe 12.3.4 bis 12.3.6) über, in der die Überprüfung dieses Lösungsvorschlags mithilfe dynamischer Geometriesoftware eine von drei Aufgaben darstellt (siehe 12.3.6).

12.3.3 Geplante, aber nicht eingesetzte Aufgaben (1)

- Begründe, dass die Mittelsenkrechten sich in einem Punkt treffen müssen.
- Anna (1;0), Peter (8;1) und Lena (3;2) suchen einen zentralen Treffpunkt für ihr Physik-Referat.

Abbildung 12.8: geplante, aber nicht eingesetzte Aufgaben (Namen geändert)

Diese beiden Aufgaben hat der Lehrer schon mit auf der Folie mit der Aufgabe 2 ‚Mathe-Referat' abgedruckt (siehe Anhang), sie blieben aber im Verlauf des Unterrichts verdeckt.

Planung

Begründungsaufgabe (s. Anhang): Schnelle Schüler sollen ihre Fähigkeiten des Begründens vertiefen (Binnendifferenzierung).

Der Lehrer plant scheinbar bewusst binnendifferenzierende Maßnahmen ein, was auf schülerbezogenes Wissen schließen lässt. Außerdem zeigt sich hier deutlich, dass der Lehrer das Potenzial der Aufgabe zum Argumentieren erkannt hat. Das spezielle Einplanen dieser Aufgabe lässt möglicherweise darauf schließen, dass ihm die Begründung besonders wichtig ist. Dagegen spricht aber, dass der Lehrer diese Aufgabe nur zusätzlich für die besonders schnellen Schülerinnen und Schüler einplant. Er scheint daher nicht die fachliche Notwendigkeit der Begründung des gemeinsamen Schnittpunktes zu erkennen. Im Interview kann der Lehrer die hier geforderte Begründung ausführlich erläutern:

I [00:19:31.21]

Lehrer: […] Also da hätte man dann ja so argumentieren können, zum Beispiel an den, die haben sich ja alle hier in Reihe aufgestellt (gemeint ist Seilaufgabe), hatten auf dieser Linie den gleichen Abstand zu M. und zu R. und wenn die sich alle hier hingestellt hätten, dann hätten die den gleichen Abstand zu M. und N. das heißt also, da, wo, also der Schüler, der denn quasi genau beim Schnittpunkt der beiden Linien steht, der hat ja dann zu R. und M. und zu M. und N. den gleichen Abstand. Also muss ja hierdurch (gemeint ist Schnittpunkt der zwei Mittelsenkrechten) auch die Mittelsenkrechte, weil er den gleichen Abstand zu ja, R. und N. hat. […] Obwohl das natürlich dann so von der Begründung her auch gar nicht so untrivial ist, aber ähm aber wir haben da halt ein paar ganz pfiffige wohl dabei, so eine Hand voll und die hätten das gut machen können dann.

Aus diesen Erläuterungen kann geschlossen werden, dass der Lehrer über das fachliche Wissen zur Durchführung der Begründung verfügt. Er schätzt aber selbst diese einfache und anhand der Visualisierung mit dem Seil sehr anschauliche Begründung für die meisten Schülerinnen und Schüler als zu schwierig ein. Dabei charakterisiert der Lehrer die Klasse als eher leistungsstark (siehe Seite 319). Dies lässt darauf schließen, dass der Lehrer das Einfordern von Begründungen generell als sehr schwierig erachtet, womit sich erklären lässt, dass die vom Lehrer eingeforderten Begründungen im beobachteten Unterricht auf einer sehr oberflächlichen Ebene bleiben.

Die zweite geplante aber nicht eingesetzte Aufgabe (‚Physik-Referat') erfordert das Anwenden der in der Aufgabe 2 ‚Mathe-Referat' erarbeiteten Prozeduren:

Planung:

PH-Referatsaufgabe: Reine Übungsaufgabe zur Vertiefung der händischen Fähigkeiten

Der Lehrer spricht hier lediglich die „händischen Fähigkeiten" an, womit vor allem enaktive Repräsentationsformen gemeint sein könnten. Die Planung der Aufgabe wird aber nicht mit der Vertiefung der begrifflichen Zusammenhänge.

12.3.4 Aufgabe 3 ‚Mittelsenkrechten konstruieren'

Kiras Vorschlag für Mittelsenkrechte

Konstruiere den Mittelpunkt des Umkreises nur mit Hilfe eines Lineals und Zirkels. Bei Dynageo dürfen also nur die folgenden Funktionen benutzt werden:

Abbildung 12.9: Aufgabe 3 ‚Mittelsenkrechten konstruieren' (Name geändert)

Der Lehrer hat mit dieser Aufgabe die aus der vorangehenden Stunde noch offene und seiner Meinung nach spannende Idee der Schülerin K. aufgegriffen. Das Aufgreifen von noch offenen Schülerideen findet er wichtig für die Motivation der Schülerinnen und Schüler:

I [00:33:21.17]

Lehrer: […] K.'s Frage war ja so angelegt, mein ich,... ähm sie wunderte sich ja, ob es denn eventuell auch immer geht oder so. […] Und das kann man ja direkt mit DynaGeo dann überprüfen.

Hier spricht der Lehrer explizit an, dass sich die dynamische Geometriesoftware zum Überprüfen allgemeiner Zusammenhänge eignet. Allerdings werden mit der Software nur sehr viele Beispiele betrachtet, was aus mathematischer Sicht zwar gut geeignet ist, für das Aufstellen von Vermutungen, aber nicht für die Überprüfung im Sinne eines Beweises, bzw. einer schlüssigen Begründung. Dem Lehrer scheint dies nicht bewusst zu sein, was auf mangelndes Fachwissen oder mangelnde Umsetzung von Fachwissen schließen lässt.
Im Interview erläutert der Lehrer des Weiteren:

I [00:23:24.12]

Lehrer: Ja... tja. Aber so die Idee fand ich halt spannend, dass man mal guckt, ob das denn auch so funktioniert. Und eigentlich, ja... das wäre dann auch eine Möglichkeit gewesen, um das denn zu begründen.

Der Lehrer erkennt hier scheinbar das Potenzial der Aufgabe zum Argumentieren.

Objektive Kennzeichen der Aufgabe 3 ‚Mittelsenkrechten konstruieren'

Die Aufgabe ist als begriffliche Modellierungs- und problembezogene Aufgabe einzuschätzen. Die Schülerinnen und Schüler müssen zunächst die Eigenschaften der Mittelsenkrechten als Gerade aller Punkte, die zu zwei vorgegebenen Punkten denselben Abstand haben, reflektieren und dies mit der Festlegung einer Geraden durch zwei Punkte in Verbindung bringen. Sie müssen also zunächst erkennen, dass sie zwei Punkte bestimmen müssen, die zu den vorgegebenen Punkten denselben Abstand haben. Die Lernenden können sich an den Kreis als die Vereinigung aller Punkte mit demselben Abstand zum Mittelpunkt erinnern und können so über die Schnittpunkte zweier Kreise mit demselben Radius zwei Punkte bestimmen, die von den vorgegebenen Punkten denselben Abstand haben und somit die Mittelsenkrechte festlegen. Dies erfordert innermathematisches Modellieren auf mittlerem Niveau, da verschiedene mathematische Gegenstände, nämlich Kreise und Geraden, miteinander in Beziehung gesetzt werden müssen. Dieses entwickelte Verfahren zum Zeichnen der

Mittelsenkrechten müssen die Lernenden nun mindestens an einer weiteren Dreiecksseite wiederholen, um den Mittelpunkt des Umkreises zu konstruieren. Der eigentliche Fokus dieser Aufgaben liegt auf dem Entwickeln der Konstruktion der Mittelsenkrechten, was aus der Aufgabenstellung direkt nicht deutlich wird. Auch wenn die Aufgabenstellung keine direkte Begründung verlangt, so ermöglicht die Aufgabe dennoch mathematisches Argumentieren auf mittlerem bis hohem Niveau, da mehrschrittige, begrifflich geprägte Argumente entwickelt werden müssen, die einem Beweis ähneln.
Die Aufgabenstellung fordert direkt dazu auf, die Mittelsenkrechte mit Zirkel und Lineal zu konstruieren. Es gibt aber einen indirekten Hinweis auf die Verwendung der dynamischen Geometriesoftware. Wird die Aufgabe mithilfe der Software bearbeitet, müssen die Lernenden die oben beschriebenen Lösungsschritte auf das Programm übertragen und jeweils Verbindungen zwischen den Funktionen im Programm und dem Zeichnen mit Zirkel und Lineal herstellen, weshalb hier Darstellungen auf mittlerem Niveau verwendet werden.

Analyse des Unterrichtseinsatzes der Aufgabe 3 ‚Mittelsenkrechten konstruieren'

Diese Aufgabe wird von einem Drittel der Lerngruppe in Partnerarbeit, teilweise auch in Dreiergruppen, mithilfe von dynamischer Geometriesoftware bearbeitet:

U [00:50:24.03]

Schüler M: Sollen wir das jetzt wirklich mit Lineal und Zirkel machen oder können wir auch das benutzen.

Lehrer: Ne, ihr testet das mit DynaGeo und die einzigen Symbole, die ihr verwenden dürft... die seht ihr hier.

Hier zeigt sich die etwas ungenaue Aufgabenformulierung (vgl. objektive Kennzeichen dieser Aufgabe), die einerseits auf das Konstruieren nur mit Zirkel und Lineal hinweist, andererseits die bei der dynamischen Geometriesoftware zur Nutzung erlaubten Funktionen anspricht. Der Lehrer stellt an dieser Stelle keinen Zusammenhang zwischen den Funktionen der Software und dem realen Arbeiten mit Zirkel und Lineal her. Er hätte beispielsweise darauf hinweisen können, dass alle mit Zirkel und Lineal möglichen Konstruktionsschritte auch mit der dynamischen Geometriesoftware ausgeführt werden können.

<u>Arbeitsphase</u>

Der Lehrer geht während der Arbeitsphase durch die Klasse und gibt Hilfestellung bei Problemen. Die Gruppe, in der die Schülerin K. ist, versucht bisher erfolglos Kreise um zwei Eckpunkte zu zeichnen:

U [00:53:58.10]

Lehrer: Hm. Äh ich hab mal eine Frage an diese Gruppe. Wo ist das Problem zurzeit?

Schüler K: Ich krieg die Kreise nicht hin.

Lehrer: Ähm K., als du das gestern erzählt hast […] da hattest du schon so einen Tipp, oh du hast es auch so gemacht, ähm da hast du schon einen Tipp gegeben. Wie muss man diese Kreise hier (L. zeigt ins Heft, wo Kreisbögen zur Konstruktion der Mittelsenkrechten genutzt wurden.) machen? […]

Schüler K: Dass man den äh... also den Zirkel (???) hält.

Lehrer: Aha. Ok. Äh das heißt also, welche Funktion da oben könnte wohl passend sein?

Schüler C: //Die mit dem Radius?// […]

Schüler K: Aber dann muss man doch erstmals das hier (S. zeigt auf eine Seite des gezeichneten Dreiecks am Bildschirm.) ausrechnen oder?

Lehrer: Messen könnt ihr das ja, über Messen (L. zeigt auf Funktion in Menüleiste.) kommt ihr da hin. […] Ok. Ähm könnt ihr den anderen Gruppen hier vorne auch mal eben die gleichen Tipps geben? Einmal mit messen und rechnen und dass man die spezielle Funktion nehmen soll.

Die Schülerinnen und Schüler sind hier mit leichter Lehrerlenkung größtenteils selbstständig auf die entscheidenden Ideen gekommen. Allerdings wird in keiner Weise begründet, warum überhaupt Kreise um die Eckpunkte benötigt werden. Es zeigt sich hier aber, dass der Lehrer viel Wert auf kognitive Selbstständigkeit und gegenseitige Unterstützung zu legen scheint, da er die Lernenden dazu auffordert, den anderen Gruppen zu helfen.

Die anderen Gruppen haben große Probleme mit der Aufgabe. Der Vorschlag der Schülerin K., der schon Tipps zur Lösung enthielt, wurde vor der Aufgabenbearbeitung nicht wiederholt. Es ist daher fraglich, wie auch die anderen Gruppen darauf gekommen sind, Kreise um die Eckpunkte einzuzeichnen. Der Lehrer benennt dieses Problem auch im Interview:

I [00:21:24.04]

Lehrer: Den Schülern so rein gegeben und denen war, was ich dann nächste Stunde auch gesehen hab, das gar nicht so klar, wie K. das eigentlich meinte. […] Als Mathelehrer guckst du drauf und siehst: Ach ja, genau, so macht man das ja mit den beiden Sachen. Können ja alle mal eben ausprobieren und erforschen, erkunden. Aber ähm... die hatten ja nicht dann ihr Heft gesehen und konnten sich das wahrscheinlich auch schwer vorstellen.

Hier zeigt sich, dass der Lehrer die Aufgabenstellung nicht ausreichend reflektieren und mit dem Wissenstand der Lernenden in Beziehung setzten konnte. Er erkennt dies aber auch selbst, er kann also sein eigenes Verhalten kritisch reflektieren.

Teilweise zeichnen die Schülerinnen und Schüler wahllos Kreise ein, ohne zu reflektieren, welche sie brauchen:

U [01:00:16.22]

Lehrer: Klappt das bei euch?

Schüler Y: Ne irgendwie nicht.

Lehrer: Das ist also tatsächlich gar nicht so einfach...... Ähm... Was ist hier wohl das Blöde bei dem Kreis? ...... Ich glaube, wenn man einen Kreis gezeichnet hat, kann man den nachträglich auch noch da verändern. Kannst du mal mit der rechten Maustaste drauf gehen... und dann kannst du unten halt den Radius auch noch erweitern, anstatt 1,5 einen größeren zu nehmen. Was bietet sich hier an? ......

Schüler Y: Ja irgendwie 3?

Lehrer: Hm? ...... Wie wünscht ihr euch denn den Kreis? Der ist ja so zu klein. Wann ist der denn groß genug?

Schüler Y: Wenn er über die Hälfte geht.

Lehrer: Mh. Und ihr habt ja schon, die anderen Seiten habt ihr ja ausgemessen. […] Und dann macht man ja auch noch hier auf der anderen Seite den Kreis.

Es wird hier in keiner Weise begründet oder reflektiert, warum der größere Radius notwendig ist. Der Lehrer lenkt in dieser Gruppe den Gedankengang sehr stark. Er gibt unter anderem direkt vor, auch im anderen Eckpunkt noch einen Kreis zu zeichnen. Es wird nur auf einer prozeduralen Ebene gedacht.

Bei der nächsten Gruppe zeigt sich die schon in den objektiven Kennzeichen erwähnte Schwierigkeit der Übertragung des Zeichnens mit Zirkel und Lineal auf die dynamische Geometriesoftware:

U [01:01:54.29]

Schüler O: Ich glaub, wenn ich jetzt ein Blatt Papier hätte, wüsste ich auch, wie ich das machen müsste. […]

Lehrer: Dann ist hier dir Taktik... ähm... das hier genauso Schritt für Schritt zu machen. Also was würdest du auf dem Blatt Papier machen?

Schüler O: Ich würde einen Kreis irgendwie von dem Mittelpunkt (S. zeigt auf obere Ecke des Dreiecks.) machen, so dass er die beiden Punkte (S. zeigt auf die zwei anderen Ecken des Dreiecks.) irgendwie berührt. […]

Lehrer: Also die Eigenschaft muss der Kreis gar nicht haben, sondern es wird ein Kreis um diesen

Punkt gemacht und auch noch ein Kreis um diesen Punkt (L. zeigt auf zwei unterschiedliche Ecken des Dreiecks.) mit dem gleichen Radius... und ähm... dann kann man über die Schnittpunkte der beiden Kreise da die Mittelsenkrechte durchzeichnen. […] erstmals macht man das mit diesen beiden Punkten, dann hat man diese Mittelsenkrechte. Dann mit diesen beiden Punkten und dann, muss man nicht unbedingt, kann man auch noch, mit den beiden Punkten das machen.

Der Lösungsvorschlag der Schülerin O. wird hier nicht reflektiert, so dass die Schülerin nicht erkennen kann, warum der Vorschlag falsch ist. Der Lehrer gibt stattdessen das richtige Vorgehen vor und lenkt damit stark, das von ihm benannte Verfahren wird aber nicht begründet, so dass kein begriffliches Wissen aktiviert wird.

Eine weitere Gruppe hat die Seitenlänge des Dreiecks gemessen und Kreise mit dem Radius der halben Seitenlänge des Dreiecks um die beiden anliegenden Eckpunkte gezeichnet:

U [01:09:37.07]

Schüler Y: Ja aber ich weiß ja nicht, was wir falsch gemacht haben. Weil... wir haben die Hälfte jeweils genommen, aber es schneidet sich trotzdem nicht.

Lehrer: Hm. Was müssen wir dann wahrscheinlich wohl verändern? […]

Schüler Y: Den Radius des Kreises. […]

Lehrer: Ok. Aber dann, ihr habt ja hier schon mal prima gemessen. 12,4 cm ist die gesamte Strecke. Was für einen Radius muss der Kreis denn haben, damit man da die Schnittpunkte von den beiden Kreisen gut sehen kann?

Schüler Y: Ja, die müssen 6,5 oder?

Lehrer: Warum?

Schüler Y: Ähm damit das zusammengezählt ein bisschen mehr ist als 12, damit sich das schneidet.

Der Lehrer regt hier die Reflexion des Lösungsweges an und fragt nach Begründungen. Allerdings bleiben die von den Schülerinnen und Schülern genannten und vom Lehrer akzeptierten Begründungen auf einer oberflächlichen Ebene, da nicht darauf eingegangen wird, warum sich die Kreise überhaupt schneiden müssen. Dies deutet darauf hin, dass dem Lehrer zwar die Bedeutung von Begründungen für das Lernen bewusst ist, es ihm aber hier nicht gelingt, auch tiefgehende mathematische Begründungen einzufordern. Insgesamt nutzt er in der Bearbeitungsphase dieser Aufgabe nicht die Chance, zu begründen und zu erklären, warum das hier zu erarbeitende Verfahren der Konstruktion eine Mittelsenkrechte erzeugt. Dadurch bleibt das Denken auf einer rein prozeduralen Ebene.

Die in den Transkriptausschnitten teilweise sichtbar werdende starke Lehrerlenkung spricht der Lehrer selbst im Interview an:

I [00:40:16.18]

Lehrer: Ein paar Mal habe ich mich auch dabei ertappt, dass ich es dann auch selbst gemacht hab. Dann denkt man so, ach komm hier, mach das mal eben. Aber so soll es eigentlich nicht sein.

Der Lehrer reflektiert sein eigenes Verhalten damit kritisch.

Ihm sind aber die möglichen Schwierigkeiten der Übersetzung zwischen dynamischer Geometriesoftware und dem arbeiten mit Zirkel und Lineal bewusst, er wollte sie deshalb gezielt auch mit dieser Aufgabe aufgreifen, obwohl er benennt, dass das reale Konstruieren mit Zirkel und Lineal in diesem Zusammenhang einfacher wäre:

I [00:33:21.17]

Lehrer: […] wahrscheinlich wäre es auch einfacher gewesen, das denn mit Lineal und Zirkel tatsächlich auch so auszuprobieren. […] wir waren halt da im Computerraum und dann dachte ich, muss man auch diese Chance nutzen, dass man da dann halt auch mal was üben kann […]Das sie quasi alles das, was sie mit... der Dynamischen-Geometrie-Software machen, die quasi dann auch so, zwar nicht ganz so exakt, aber sonst auch so per Hand machen.

Hier zeigen sich Widersprüche in der Wahl der Methodik und dem schülerbezogenen Wissen des Lehrers, da er durchaus erkennt, dass diese Aufgabe mit Zirkel und Lineal einfacher gewesen wäre. Der Lehrer benennt aber auch die Wechsel zwischen den Repräsentationsformen und auch die Exaktheit des Programms als Begründungen für die Wahl der dynamischen Geometriesoftware zur Bearbeitung dieser Aufgabe.
Es stellt sich insbesondere die Frage, wie die Schülerin K. auf die Idee der Konstruktion gekommen ist. Der Lehrer erklärt dies wie folgt:

I [00:22:04.09]

Lehrer: […] vielleicht durch Nachhilfe oder so etwas, dann äh... oftmals ist es so, dass dann ja, wenn die Nachhilfe haben, dann sagen die, ja wir haben Winkelhalbierende gemacht. Ok, dann der Nachhilfelehrer, dann machen die bestimmt auch bald Mittelsenkrechte, das zeig ich mal so... Wäre eine Idee. Aber ich hab nicht genau mitbekommen, weswegen.

Diese Erläuterung des Lehrers scheint schlüssig. Sie erklärt auch, dass die anderen Schülerinnen und Schüler gar nicht ohne Hilfe durch den Lehrer oder die Schülerin K. auf die Idee kommen konnten.

Präsentationsphase

Im Anschluss an die Arbeitsphase präsentiert die Schülerin K. das Verfahren zur Konstruktion der Mittelsenkrechten am Lehrer-PC, dessen Bildschirm auch an die Wand projiziert wird (siehe Abbildung 12.10). Dabei erläutert sie die einzelnen Schritte:

U [01:12:53.00]

Schüler K: Ja also ich habe jetzt ähm erst die Seiten ausgerechnet […] Ja und dann hab ich hier das, also mit dem Radius den Kreis genommen und eingestellt. Also ein bisschen mehr als die Hälfte genommen.

Lehrer: Oh eine Frage mal an die anderen Schüler. Warum muss man hier wohl als Kreisradius ein bisschen mehr nehmen als die Hälfte? […]

Schüler Q: Ähm die müssen länger sein, damit die sich auch schneiden. […] (Schüler K. konstruiert Kreis um obere Ecke.)

Schüler K: Und dann hab ich den gleichen Radius für die andere Ecke hier genommen, weil man den nicht verstellen darf. (Schüler K. konstruiert Kreis um Ecke unten links.) Und halt für alle Seiten das gemacht.

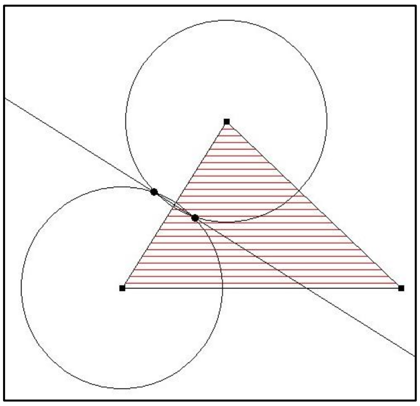


Abbildung 12.10: Bildschirm der Dynamischen Geometriesoftware zur Präsentation von Aufgabe 3

Lehrer: Ähm oder K., kannst du es mal kurz so machen, dass du die Mittelsenkrechte... von diesen beiden Punkten da erstmals eben vervollständigst? (Schüler K. konstruiert Mittelsenkrechte.) Und zieh mal an einer Ecke von dem Dreieck bitte. […] Da hätte ich jetzt nochmal gerne einen Tipp. Das wäre ja cool, wenn man an der Ecke zieht und die Mittelsenkrechte sich gleichzeitig mit bewegt... Was müsste man da wohl machen? […]

Schüler M: Ja also, wo die beiden Kreise sich schneiden, da sind ja jetzt so Quadrate... Genau die. So... Aber das sind dann, wenn man diese Quadrate ähm jetzt ersetzten würde, also wenn man da einen Schnittpunkt rein macht ähm und da dann die Gerade durchzieht... Ja Ok, sie versteht mich nicht. […]

Schüler H: Also sie meint glaub ich das Symbol in der obersten Linie das vierte. Genau das. Wenn du darauf klickst, dann musst du ja beide Kreise anklicken und dann ähm zeigt er dir ja schon den Schnittpunkt. (Schüler K. führt das durch.)

Der Lehrer unterbricht die Präsentation und fragt nach einer Begründung für die Wahl der Radien. Er lenkt damit leicht. Es wird aber auch in der Präsentationsphase nicht begründet, warum die Radien gleich groß sein müssen und warum man diese Schnittpunkte für die Konstruktion der Mittelsenkrechten benötigt. Die Eigenschaften des Kreises und der Mittelsenkrechten als Menge aller Punkte mit bestimmtem Abstand zu einem, bzw. zwei Punkten werden daher nicht reflektiert. Das Denken bleibt auf einer rein prozeduralen Ebene. Die Aufforderung des Lehrers zur Erstellung einer Figur, die auch im Zugmodus ihre Eigenschaften beibehält stellt eine Reflexion des Vorgehens dar. Allerdings begründet der Lehrer nicht, warum dies wichtig ist, da für diese Aufgabenstellung der Zugmodus nicht von Bedeutung ist. Vermutlich möchte der Lehrer die Lernenden dazu erziehen, generell Figuren zu konstruieren, die auch im Zugmodus benutzt werden können, da hierin der große Gewinn durch die Software gegenüber dem Zeichnen auf Papier gesehen werden kann. Allerdings ist auch dieser Teil der Aufgabenbesprechung prozedural geprägt, da es nur darum geht, wie sich die Figur auch im Zugmodus benutzten lässt und nicht warum dies so ist.

Vorgestelltes Verfahren nachmachen

Im Anschluss an die Präsentation gibt der Lehrer den Lernenden die Möglichkeit Fragen zu stellen, was aber von niemandem genutzt wird. Anschließend fordert er die Schülerinnen und Schüler, die in der Arbeitsphase an anderen Aufgaben gearbeitet haben, auf, das vorgeführte Verfahren selbst auszuprobieren. Die Schülerin K. soll unterdessen auch die anderen Mittelsenkrechten am Lehrer-PC konstruieren und anschließend mit ihren Gruppenmitgliedern den anderen Schülerinnen und Schülern helfen. Die Lernenden scheinen das Verfahren aber problemlos anwenden zu können.
Insgesamt steht das prozedurale Denken deutlich im Vordergrund, es fehlen die Begründungen für das Verfahren und es wird nicht reflektiert, weshalb hier eine Mittelsenkrechte entsteht. Das Potenzial der Aufgabe zum mathematischen Argumentieren ist daher überhaupt nicht genutzt worden, obwohl der Lehrer dies im Interview benennen kann (siehe Seite 338).
Die Aufgabenbearbeitung ist daher als sehr verfahrensbetont einzuschätzen.

12.3.5 Aufgabe 4 ‚Winkelhalbierende konstruieren'

Kiras Vorschlag für Winkelhalbierende
Konstruiere den Mittelpunkt des Inkreises nur mit Hilfe eines Lineals und Zirkels. Bei Dynageo dürfen also nur die folgenden Funktionen benutzt werden:

Abbildung 12.11: Aufgabe 4 ‚Winkelhalbierende konstruieren' (Name geändert)

Diese Aufgabe hat der Lehrer ebenfalls aus der Idee von Schülerin K. abgeleitet.

> Planung:
> Die habe ich dazu genommen, weil sie gut im Kontext passt und wg. der Sitzordnung

Vermutlich spricht der Lehrer hier den innermathematischen Kontext des Konstruierens von Winkelhalbierenden und Mittelsenkrechten an. Er begründet die Aufgabenauswahl aber auch mit rein methodischen Argumenten.
Es gelten ansonsten die gleichen Begründungen für die Aufgabenauswahl wie für Aufgabe 3, da der Lehrer über diese beiden Aufgaben größtenteils nur gemeinsam spricht.

Objektive Kennzeichen der Aufgabe 4 ‚Winkelhalbierende konstruieren'

Diese Aufgabe ist als begriffliche Modellierungs- und problembezogene Aufgabe einzuschätzen. Die Schülerinnen und Schüler müssen zunächst die Eigenschaften der Winkelhalbierenden reflektieren. Die Winkelhalbierende ist eine Gerade zwischen zwei Schenkeln, die alle Punkte mit gleichem Abstand zu den Schenkeln vereinigt. Sie lässt sich auch als Mittelsenkrechte in einem gleichschenkligen Dreieck deuten, welches durch den Scheitelpunkt und zwei Punkte im jeweils gleichen Abstand zum Scheitelpunkt entsteht (siehe Abbildung 12.12). Diese Deutung wird für die ‚klassische' Konstruktion der Winkelhalbierenden genutzt, in der zunächst ein Kreis um den Scheitelpunkt gezeichnet wird. Anschließend wird um die Schnittpunkte dieses Kreises mit den Schenkeln, ähnlich wie bei der Konstruktion der Mittel senkrechten, je ein Kreis bzw. Kreisbogen mit gleichem Radius gezogen. Dabei werden der Radius und die Kreisbögen so gewählt, dass sich die Kreisbögen mindestens einmal schneiden. Dieser Schnittpunkt hat denselben Abstand zu beiden Schenkeln, da er aus der Konstruktion der Mittelsenkrechten zu den beiden ersten Schnittpunkten entsteht. Er ist daher ebenso ein Punkt der Winkelhalbierenden wie der Scheitelpunkt, so dass durch diese beiden Punkte die Winkelhalbierende gezeichnet werden kann. Da laut Aufgabenstellung auch die Mittelpunktfunktion erlaubt ist, können die Schülerinnen und Schüler alternativ nach dem Zeichnen eines Kreises um den Scheitelpunkt, den Mittelpunkt der beiden Schnittpunkte des Kreises mit den Schenkeln bestimmen und die Winkelhalbierende durch den Mittelpunkt und den Scheitelpunkt zeichnen. Diese Möglichkeit ist aber nur mit Zirkel und Lineal nicht direkt durchführbar, weshalb die Aufgabenstellung in sich teilweise widersprüchlich ist. Beide Methoden erfordern eine innermathematische Modellierung von den Schülerinnen und Schüler, wobei bei der ‚klassischen' Konstruktion mehr Modellierungsschritte benötigt werden.

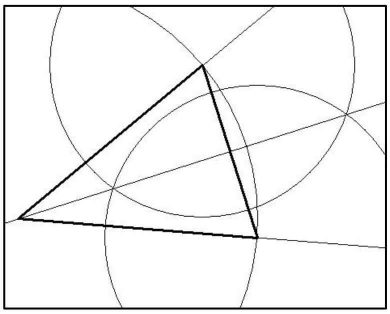


Abbildung 12.12: Konstruktion der Winkelhalbierenden

Dieses entwickelte Verfahren zum Zeichnen der Winkelhalbierenden müssen die Lernenden nun mindestens an einer weiteren Dreiecksseite wiederholen, um den Mittelpunkt des Inkreises zu konstruieren. Der eigentliche Fokus dieser Aufgaben liegt eher auf dem Entwickeln der Konstruktion der Winkelhalbierenden, welcher aus der Aufgabenstellung direkt nicht deutlich wird. Auch wenn die Aufgabenstellung keine direkte Begründung verlangt, so ermöglicht die Aufgabe dennoch mathematisches Argumentieren auf mittlerem bis hohem Niveau, da mehrschrittige, begrifflich geprägte Argumente entwickelt werden können, die einem Beweis ähneln. Insbesondere ist es nötig zu begründen, warum die Winkelhalbierende durch den Mittelpunkt zwischen den beiden Schnittpunkten auf den Schenkeln verläuft, da der Abstand eines Punktes zu einer Geraden im rechten Winkel gemessen wird. Hier liegt aber kein rechter Winkel vor.
Die Aufgabenstellung fordert direkt dazu auf, die Winkelhalbierende mit Zirkel und Lineal zu konstruieren. Es gibt aber einen indirekten Hinweis auf die Verwendung der dynamischen Geometriesoftware. Wird die Aufgabe mithilfe der Software bearbeitet, müssen die Lernenden die oben beschriebenen Lösungsschritte auf das Programm übertragen und jeweils Verbindungen zwischen den Funktionen im Programm und dem Zeichnen mit Zirkel und Lineal herstellen. Deshalb werden hier Darstellungen auf mittlerem Niveau verwendet.

Analyse des Unterrichtseinsatzes der Aufgabe 4 ‚Winkelhalbierende konstruieren'

Diese Aufgabe wird von einem Drittel der Lerngruppe in Partnerarbeit mithilfe von dynamischer Geometriesoftware bearbeitet (siehe Seite 338).

Arbeitsphase

Während der Arbeitsphase geht der Lehrer durch den Klassenraum und gibt einzelnen Paaren Hilfestellung. Nachdem er längere Zeit die Gruppen, die Aufgabe 3 bearbeiten, betreut hat, beobachtet er zunächst, wie der Schüler E. der Schülerin M. am Nachbarcomputer die Konstruktion der Winkelhalbierenden erklärt:

U [00:55:37.11]

Schüler E: Da (an Ecke des Dreiecks) machst du so einen Kreis und dann machst du (? ...) […] Ach so ja. Ja den Schnittpunkt.

Schüler M: Dann noch einen Schnittpunkt.

Schüler E: Dann macht man von der (S. zeigt auf Kreisbogen innerhalb der Schnittpunkte des Kreises (um eine Ecke) mit dem Dreieck.) den Mittelpunkt, von den beiden Punkten...

Der Schüler E. hat hier kognitiv völlig selbstständig gearbeitet. Das Denken bleibt aber auf einer prozeduralen Ebene, da die einzelnen Konstruktionsschritte nicht begründet werden.

Der Schüler E. verwendet für die Konstruktion die Mittelpunktfunktion, die nur mit Zirkel und Lineal nicht machbar ist. Sie ist aber in der Aufgabenstellung nicht ausgeschlossen worden. Zu einem späteren Zeitpunkt fordert der Lehrer die Schüler E. und F. auf, die Winkelhalbierenden ohne die Mittelpunktfunktion zu konstruieren. Dadurch weist er auf die ‚klassische' Konstruktion hin (siehe objektive Kennzeichen dieser Aufgabe). Dies können die Schüler aber nicht durchführen. Der Lehrer erläutert hierzu im Interview:

I [00:30:45.26]

Lehrer: Mh, das haben die denn mit dieser Funktion hier gemacht, dass der Mittelpunkt zwischen zwei Punkten halt bestimmt werden kann. Und ich hatte halt dann die ganze Zeit noch so im Kopf, ach, die können dann da ja auch jeweils einpiksen... und dann nochmal Kreise drehen und so den Mittelpunkt bestimmen. Aber ja, das ist natürlich klar, wenn man sagt, diese Funktion dürft ihr benutzen, ja. […] Ist das natürlich der einfachere Weg und ich hatte dann E. und F. später auch noch gesagt: Hier, probiert es mal ohne diese Funktion halt zu machen... Ja, haben sie auch so nicht hinbekommen. Aber ist... ist wahrscheinlich auch zu schwierig. […] so als Mathelehrer weiß man, dass das so geht. Aber (L. lacht) wie sollen Schüler da jetzt unbedingt drauf kommen, ne.

Hier zeigt sich, dass der Lehrer die klassische Konstruktion der Winkelhalbierenden als Lösung erwartet hätte. Es ist aber nicht zu entscheiden, ob der Lehrer die Mittelpunktfunktion bewusst zugelassen hat, um den Lösungsweg zu vereinfachen, oder ob er diese Funktion bei der Erstellung der Aufgabe schlich übersehen hat. Der Lehrer bezeichnet diesen Lösungsweg Interview als deutlich schwieriger. Er erkennt hier selbst, dass die eigenständige Erarbeitung der Konstruktion für Lernende ohne Hilfestellungen gar nicht lösbar ist. Hier zeigt sich, dass es dem Lehrer nicht gelungen ist, die Anforderungen der Aufgabe im Vorfeld einzuschätzen und mit dem Vorwissen und dem Leistungsvermögen der Lernenden in Beziehung zu setzen. Im Nachhinein kann er die Probleme der Schülerinnen und Schüler aber gut reflektieren und auch sein eigenes Vorgehen kritisch beurteilen.

Die nächsten beiden Gruppen haben Probleme, eine Lösungsidee zu entwickeln:

U [00:56:19.21]

Lehrer: Hm, da könnt ihr euch mal an die Gruppen wenden. Äh die haben schon gute Ideen.

Der Lehrer fördert hier die kognitive Selbstständigkeit und das Erklären von Lösungswegen.

Die Schülerin P. hat bisher je einen Kreis um die Eckpunkte eines Dreiecks gezeichnet, die Schnittpunkte mit den Dreiecksseiten und jeweils den Mittelpunkt dieser Schnittpunkte eingezeichnet (siehe Abbildung 12.13). Außerdem hat sie die Mittelpunkte der Dreiecksseiten eingezeichnet und diese je mit dem Gegenüberliegenden Mittelpunkt zwischen den Schenkeln verbunden. Hierdurch entstehen drei Strecken, die sich zwar in einem Punkt schneiden, jedoch nicht mit den Winkelhalbierenden identisch sind:

U [01:03:48.05]

Lehrer: Ähm was hast du denn hier (L. zeigt auf eingezeichnete Strecken innerhalb der Dreiecksfläche.) eingezeichnet?

Schüler P: Ähm ich hätte glaub ich von den beiden, warum auch immer, den Mittelpunkt gesucht, und das war halt die Mitte von dem, keine Ahnung. […]

Lehrer: Und äh... was ist das zum Beispiel für ein Punkt (L. zeigt auf Schnittpunkt von Dreiecksseite und Kreis um Eckpunkt.)?

Schüler P: Der ist irgendwie so... das ist, der gehört eigentlich zu dem Kreis. […] Auf der Linie da.

Lehrer: Ähm... dann machen wir das mal folgendermaßen... Hol dir mal ein paar Tipps bei E. und M. […] Die können dir dann weiterhelfen.

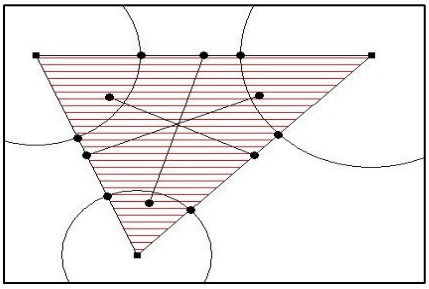


Abbildung 12.13: Lösungsversuch der Schülerin P. zur Aufgabe 4

Der Lehrer erfragt zunächst einzelne Schritte der Schülerin, wodurch sie zur Reflexion ihres eigenen Lösungsweges angeregt wird. Der Lehrer fördert aber nun nicht die eigenständige Korrektur des Lösungsweges, sondern weist auf die Lösung der Schüler E. und F. hin. Allerdings wird die Schülerin P. hierdurch nicht dazu angeregt zu erkennen, was in ihrer eigenen Zeichnung falsch, bzw. nicht zielführend ist. Dadurch wird ihr Vorgehen nicht im Detail reflektiert, obwohl es durchaus gute Ansätze enthält. Es ist nicht zu beurteilen, ob der Lehrer die Lösung der Schülerin überhaupt nachvollziehen kann, was eine Voraussetzung für die Anleitung der Reflexion des Lösungsweges durch den Lehrer gewesen wäre.

Die Dreiergruppe um die Schülerin Q. zeichnet gerade eine Orthogonale ein, als der Lehrer vorbeikommt.

U [01:04:56.09]

Lehrer: Eine Orthogonale? […] Die ist verboten. […] Weil äh die Orthogonale würdest du ja mit dem Geodreieck machen... und man soll das hier immer so ausprobieren, wie man das ohne Geodreieck machen kann. […] guckt euch das mal da bei E. und F. an und vielleicht von den anderen Ideen übernehmen, die mal fragen.

Auch hier verweist der Lehrer wieder auf die Lösung der Schüler E. und F., anstatt auf den Lösungsweg der Schülerinnen einzugehen. Der Lehrer greift an dieser Stelle kurz selbst lenkend ein, indem er auf das Verbot der Orthogonalen hinweist. Anschließend fördert er, dass die Schüler E. und F. jeweils ihren Lösungsweg den anderen Schülerinnen und Schüler vorgeben. So können diese nicht mehr kognitiv selbstständig einen Lösungsweg erarbeiten. Auch in den Interviewaussagen des Lehrers wird deutlich, dass der Lehrer das gegenseitige Erklären nicht aus einem Bewusstsein über die kognitive Aktivierung der Lernenden heraus anregt:

I [00:01:30.21]

Lehrer: […] Man versucht dann ja vorher immer so ein bisschen zu initiieren und dann zu sagen: Hier, frag mal da nach oder erkundige dich mal da oder der soll da helfen. Weil gerade im Computerraum und der Arbeit mit dem Taschenrechner ist es ja so, man kann gar nicht alle einzelnen Fragen beantworten und allen immer helfen. Deswegen... ist es da wichtig, dass sie sich gegenseitig helfen.

Der Lehrer begründet das gegenseitige Erklären hier vor allem mit ‚arbeitsökonomischen' und nicht mit lernpsychologischen Argumenten.

Präsentationsphase

Im Anschluss an die Gruppenarbeitsphase und die Präsentation zur Aufgabe 3 mit anschließender Übungsphase präsentieren Schüler E. und F. gemeinsam das Vorgehen zur Konstruktion der Winkelhalbierenden am Lehrer-PC, indem sie das Verfahren vorführen und erläutern (siehe Abbildung 12.14).

U [01:24:04.20]

Schüler E: Als erstes zeichnet man ein Dreieck... ja und dann macht man […] an jeden Eckpunkt einen Kreis... und dann an eine beliebige Stelle... Dann machen wir den Schnittpunkt vom Kreis und einer Linie, also […] Ja das halt an allen Seiten. […]

Schüler F: Man macht eine Gerade durch die Schnittpunkte, die wir gemacht haben. (? ...) bei jedem Schnittpunkt. Ja. Dann den Mittelpunkt von den Strecken, die wir gemacht haben... Das auch wieder bei jedem.

Lehrer: Eine Frage mal an die Klasse. Woran erinnert euch das Vorgehen? ... So etwas Ähnliches habt ihr schon mal gemacht... T.

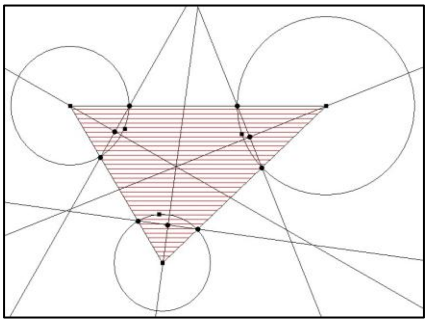


Abbildung 12.14: Bildschirm der Dynamischen Geometriesoftware zur Präsentation von Aufgabe 4

Schüler T: Ähm die Punkte am (? ...).

Lehrer: Genau. So sind wir erstmals drauf gekommen, wie die Winkelhalbierenden überhaupt gezeichnet werden. Da sind wir ja auch von der Ecke gleich weit... also gleich lange Schritte gegangen, haben zwischen diesen beiden Punkten die Mitte gesucht und dann konnten wir da die Winkelhalbierende zeichnen.

Schüler F: Ja dann malen wir halt diese Winkelhalbierende. Aber also von dem Eckpunkt zu dem Mittelpunkt der Geraden... Das auf allen Seiten.

Lehrer: Tataaa. Und da ist es fertig... Prima. Ähm... wir machen das jetzt so, dass testen wir auch mal, ob wir das so hinbekommen und äh... die Gruppen, die das aber schon hinbekommen haben, helfen bitte den anderen Gruppen mit, falls sie Fragen haben.

Der Lehrer stellt hier explizit Verbindungen zu früher Gelerntem, der Erarbeitung der Winkelhalbierenden, her. Die hier vorgestellte Konstruktion scheint den Lernenden bereits bekannt zu sein und konnte im Rahmen dieser Aufgabe in das dynamische Geometrieprogramm übersetzt werden. Dabei wird nur prozedurales Denken angeregt, da die Lernenden das Verfahren nicht selbst begründen und auch der Lehrer keinerlei Begründungen einfordert.

<u>*Vorgestelltes Verfahren nachmachen*</u>

Der Lehrer fordert im Anschluss an die Präsentation wieder die Lerngruppe auf, das Verfahren auszuprobieren. Die Lernenden, die das Verfahren schon beherrschen, werden aufgefordert, den anderen Schülerinnen und Schülern Hilfestellung zu geben.

In der nun folgenden kurzen Arbeitsphase scheinen alle Schülerinnen und Schüler problemlos das Verfahren nachahmen zu können. Dabei werden wie bei Aufgabe 3 einige Gruppen aufgefordert, die Konstruktion so durchzuführen, dass sie sich im Zugmodus nicht verändert. Außerdem weist der Lehrer auf das Zeichnen des Inkreises zur Kontrolle hin. Eine Schülergruppe kann den Inkreis nicht so einzeichnen, dass er sich im Zugmodus nicht verändert.

U [01:32:37.01]

Schüler H: (? ...) irgendwie größer und kleiner der Innenkreis.

Lehrer: Ähm... woran liegt das nochmal? ... Wie haben wir das in den letzten Wochen nochmal hinbekommen?

Schüler H: Ja da ging das bei uns auch schon nicht.

Lehrer: Hmm... Orthogonalen {langgezogen} so machte man das. Dass man den Abstand durch die Orthogonale halt äh festlegen konnte. Und zwar vom Mittelpunkt... zu einer Dreiecksseite.

Der Lehrer lenkt hier kurzzeitig sehr stark, indem er das Verfahren zur Lösung vorgibt. Er begründet das Vorgehen aber nicht.

Insgesamt fordert der Lehrer wie schon bei Aufgabe 3 weder in der Arbeitsphase, noch in der Präsentation Begründungen für das Verfahren ein, so dass ausschließlich prozedurales Denken benötigt wird. Das Potenzial der Aufgabe zum mathematischen Argumentieren wird überhaupt nicht genutzt. Die Bearbeitung der Aufgabe ist daher als sehr verfahrensbetont einzuschätzen.

12.3.6 Aufgabe 5 ‚Überprüfung einer alternativen Konstruktionsmöglichkeit für den Umkreismittelpunkt'

> Gabis Idee:
> Untersuche, ob der Inkreismittelpunkt eines neuen Dreiecks, das durch die Mittelpunkte der Seiten des alten Dreiecks entsteht, auch der gesuchte zentrale Treffpunkt zwischen Melanie, Ralf und Nina ist. Wenn du Fragen hast, dann bitte Gabi um Hilfe.

Abbildung 12.15: Aufgabe 5 ‚Überprüfung einer alternativen Konstruktionsmöglichkeit für den Umkreismittelpunkt' (Namen geändert)

Diese Aufgabe hat der Lehrer aus dem Lösungsvorschlag einer Schülerin zur Aufgabe 2 (siehe 12.3.2) abgeleitet. Schon in der ersten Stunde hat der Lehrer darauf verwiesen, dass dieser Lösungsvorschlag gut mit der dynamischen Geometriesoftware überprüft werden kann.

I [00:16:56.26]

Lehrer: […] üben die dann halt auch nochmal die Konstruktion und lernen dann halt ein bisschen mit dem Programm umzugehen.

Durch das Üben der Konstruktion spricht der Lehrer hier vor allem prozedurales Denken an. Darüber hinaus wird die Auswahl der Aufgabe nicht mit fachlichen Argumenten begründet.

Objektive Kennzeichen der Aufgabe 5 ‚Überprüfung einer alternativen Konstruktionsmöglichkeit für den Umkreismittelpunkt'

Diese Aufgabe ist als begriffliche Modellierungs- und problembezogene Aufgabe einzuschätzen. Die Lernenden müssen zunächst die in der Aufgabenstellung beschriebene, nicht triviale Konstruktion verstehen und durchführen. Das bedeutet, sie müssen ein Dreieck zeichnen, die Mittelpunkte der Seiten finden, aus diesen drei Punkten ein neues Dreieck bilden und mindestens zwei Winkelhalbierende des neuen Dreiecks einzeichnen. So entsteht der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden als Mittelpunkt des Inkreises des neuen Dreiecks. Anschließend müssen die Lernenden die Konstruktion reflektieren und Verbindungen zum Umkreismittelpunkt als zentralem Treffpunkt zwischen den drei Schülerinnen und Schülern herstellen. Dies erfordert innermathematisches Modellieren auf mittlerem Niveau. Die Schülerinnen und Schüler können anhand eines Beispiels begründen, dass der gesuchte zentrale Treffpunkt nicht allgemein durch die vorgeschlagene Konstruktion entsteht. Die Aufgabe erfordert daher mathematisches Argumentieren auf mittlerem Niveau. Es ist das Herstellen von Zusammenhängen innerhalb der Darstellung notwendig, sodass mathematische Darstellungen auf mittlerem Niveau verwendet werden. Der Einsatz dynamischer Geometriesoftware ist zwar in der Aufgabenstellung nicht direkt gefordert, er erfordert darüber hinaus aber das Übersetzen zwischen dem Zeichnen mit Zirkel und Geodreieck und der Verwendung des Programms.

Analyse des Unterrichtseinsatzes der Aufgabe 5 ‚Überprüfung einer alternativen Konstruktionsmöglichkeit für den Umkreismittelpunkt'

Diese Aufgabe wird von einem Drittel der Lerngruppe in Partnerarbeit mithilfe von dynamischer Geometriesoftware bearbeitet. Vor Beginn der Arbeitsphase wiederholt der Lehrer gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern den Lösungsvorschlag der Schülerin G. (siehe Seite 336).

Arbeitsphase

Während der Arbeitsphase geht der Lehrer durch den Klassenraum und gibt einzelnen Schülerinnen und Schülern Hilfestellung. Er verweilt zunächst längere Zeit bei den Schülerinnen und Schülern, die die Aufgaben 3 und 4 bearbeiten, bevor er sich den Lernenden zuwendet, die Aufgabe 5 bearbeiten. Die Lernenden L. und J. haben zunächst die in der Aufgabenstellung beschriebene Konstruktion mithilfe dynamischer Geometriesoftware selbstständig durchgeführt (siehe Abbildung 12.16). Scheinbar haben sie den Inkreis des kleinen Dreiecks eingezeichnet, indem sie eine Orthogonale durch den Schnittpunkt der Winkelhalbierenden des kleinen Dreiecks zu einer Seite des kleinen Dreiecks eingezeichnet haben. Anschließend haben sie einen Kreis durch den Schnittpunkt der Orthogonalen mit der Dreiecksseite gezeichnet, dessen Mittelpunkt im Schnittpunkt der Winkelhalbierenden des kleinen Dreiecks liegt. Sie erhalten so eine Konstruktion, die die gewünschten Eigenschaften auch bei Benutzung des Zugmodus beibehält. Die Konstruktion des Inkreises über die Orthogonale ist den Lernenden scheinbar aus der vergangenen Woche bekannt, wie sich aus Äußerungen des Lehrers bei einer anderen Gruppe schließen lässt (siehe 12.3.5):

U [00:57:10.16]

Lehrer: Wie ist es hier? […] Klappt nicht? […] Hm... findet ihr mal ein Dreieck, bei dem das denn doch klappt.... G.'s Idee klappt nicht bei allen Dreiecken, aber es gibt tatsächlich Dreiecke, bei denen es hinhaut.

(Schüler ziehen konstruiertes Dreieck mit Mittelsenkrechten am Bildschirm.) […]

Schüler L: (? ...) gleichschenklig oder? (? ...).

Lehrer: Gleichschenkligen?

Schüler L: Gleichwinkligen.

Lehrer: Ah Ok, gleichwinkligen sprich gleichseitigen Dreieck. Ja prima...

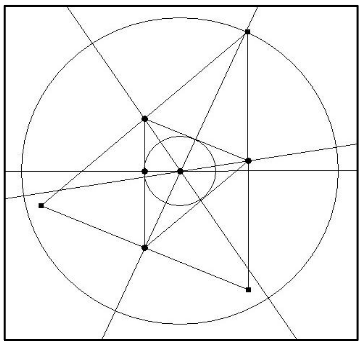


Abbildung 12.16: Schülerlösung zur Aufgabe 5

Der Ausdruck „Klappt nicht" dieses Lehrers bezieht sich scheinbar nicht auf Probleme mit der Aufgabenbearbeitung, sonder fasst das Ergebnis der Aufgabe zusammen. Der Lehrer fordert die Lernenden nicht zur Begründung ihrer Lösung auf. Stattdessen gibt er direkt vor, dass es durchaus Dreiecke gibt, bei denen die Konstruktion den Mittelpunkt eines Umkreises hervorbringt und fordert die Schülerinnen und Schüler auf, solche Dreiecke zu finden. Dies gelingt den Lernenden mit Hilfe des Zugmodus völlig selbstständig. Der Lehrer fordert aber auch hier keine Begründung ein. Diese Erweiterung der ursprünglichen Aufgabe dient als didaktische Reserve, da in der Aufgabenstellung nur die Falsifizierung gefordert ist. Zu einem etwas späteren Zeitpunkt werden auch zwei weitere Schülerpaare vom Lehrer aufgefordert zu überprüfen, für welche Dreiecke der Vorschlag von Schülerin G. funktioniert. Dies stellt eine gute Reflexion der gesamten Konstruktion dar und ist insbesondere für die Arbeit mit dem Zugmodus geeignet. Im Interview merkt der Lehrer allerdings an:

I [00:45:13.22]

Lehrer: […] In der Stunde selber ist mir eigentlich auch erst aufgefallen, dass die Aufgabe 2 (siehe 12.3.9)... dass die die...... dass die so mehr oder weniger schon von einigen […] schon bearbeitet worden ist. Und Z. und U., die dann G. Idee vorgestellt haben, die sollten denn eigentlich auch noch zeigen, für welches spezielle Dreieck das denn tatsächlich auch geht. Dann dachte ich: Och ne, das lässt du lieber weg, dann nimmt man dann doch zu viel vorweg.

Hier zeigt sich, dass der Lehrer spontan passende Erweiterungen zu einer Aufgabe erstellen kann. Er hat dabei aber nicht direkt den weiteren Stundenverlauf berücksichtigt.

Auch bei der Bearbeitung dieser Aufgabe, fordert der Lehrer mehrfach Schülerinnen und Schüler auf, die Lernenden anderer Gruppen zu unterstützen.

U [00:58:00.25]

Lehrer: Aber ihr habt ja das da vorne konstruiert ne. Genau, dann könnt ihr der Gruppe hier ja ein paar Tipps geben. Ähm... wie die es jetzt weitermachen müssen.

Hier liegt analog zur Aufgabe 4 nur eine scheinbare Förderung der kognitiven Selbstständigkeit vor (siehe 12.3.5).

Einer anderen Schülergruppe, die ohne bisherige Lehrerhilfe die vorgegebene Konstruktion ausführen und die Winkelhalbierenden im kleinen Dreieck konstruieren kann, gibt der Lehrer die einzelnen Schritte genau vor:

U [00:58:00.25]

Lehrer: […] Ähm... Ihr habt die beiden Winkelhalbierenden gemacht oder?

Schüler X: Ja haben wir.

Lehrer: Ok. Dann ähm... braucht ihr jetzt erstmals den Schnittpunkt von den Winkelhalbierenden...... Da musst ihr hier auf Konstruktion klicken. Äh. (? ...). Genau. Und dann (???) die beiden Winkelhalbierenden schneiden...... Spitze. Jetzt habt ihr den schon mal. Jetzt guckt man, also jetzt habt ihr schon mal den Inkreismittelpunkt, jetzt müsst ihr schauen, ob der tatsächlich auch der Mittelpunkt vom Umkreis ist. Das heißt, ihr zeichnet einen Kreis, der durch einen Schnittpunkt geht und dann könnt ihr mal ein bisschen an den Ecken ziehen und schauen, ob es hinhaut oder nicht.

Hier lenkt der Lehrer sehr stark. Dabei steht das prozedurale Denken stark im Fokus, da die einzelnen Konstruktionsschritte nicht begründet oder reflektiert werden.

Eine weitere Gruppe hat Probleme bei der Konstruktion. Schon beim Einzeichnen des kleinen Dreiecks nutzen die Lernenden scheinbar nicht durchgängig die Mittelpunktfunktion, sodass das kleine Dreieck im Zugmodus nicht innerhalb des großen Dreiecks verbleibt:

U [01:06:29.10]

Schüler V: Ich verstehe das ganze Programm irgendwie nicht so richtig.

Lehrer: Was kann man denn wohl am besten machen? Wenn man so'n Ding…

Schüler V: //Rumfragen.//

Lehrer: Ja genau. Und wenn er es nicht beantworten kann, fragt ihr J.

Hier fordert der Lehrer wieder zum Nachfragen bei anderen Gruppen auf, dies scheint aber ähnlich wie vorher nicht die kognitive Selbstständigkeit der Lernenden zu fördern (siehe 12.3.5).

Bei einem anderen Schülerpaar kann die Schülerin S. nicht nachvollziehen, was ihr Partner, Schüler X., am PC durchführt:

U [01:08:03.18]

Schüler S: Ich versteh das auch nicht irgendwie so. […] Ich weiß also, nicht immer so, welche Linien man für was verwenden muss, um das halt rauszubekommen.

Lehrer: Och, dann machen wir das mal so. Ihr tauscht die Plätze, beide aufstehen... und X. ist der Berater und äh... X., für dich ist es verboten, die Maus zu berühren oder irgendetwas einzutippen.

In diesem Zusammenhang erläutert der Lehrer im Interview, dass er diesen Platztausch sehr gut fand:

I [00:37:12.14]

Lehrer: Zum Beispiel auch mit X. und S., da war es auch so. X. hat die ganze Zeit so gemacht, er war denn der Macher. S. wusste es nicht und dann musste ich da mal die Plätze tauschen und dafür sorgen, dass X. dann die Maus quasi gar nicht anfasst, sondern nur seine Ideen halt nochmal verbalisiert und dann, dass S. dann selber machen muss... Fand ich eigentlich eine ziemlich coole Sache dann so, weil es ist ja auch eine Sache, dass selbstständig zeichnen zu können, aber deutlich schwieriger, dann genau zu sagen: Hier verbinde mal die beiden Eckpunkte miteinander und nun mach mal dies, mach mal das. […] dass dann halt äh... die Schüler selber auch ja mal formulieren müssen und dann konkrete Anweisungen geben, damit dann auch lernen, dass denn die Verwendung von Fachvokabular dann da auch wichtig ist.

Hier zeigt sich, dass dem Lehrer die Bedeutung der Verwendung von Fachsprache und insbesondere die Bedeutung der Wechsel der Repräsentationsformen für den Wissenserwerb durchaus bewusst sind.

Präsentationsphase

Nachdem die Lösungen von Aufgabe 3 und 4 von den Schülerinnen und Schülern präsentiert und ausprobiert worden sind, fordert der Lehrer das Schülerpaar L. und J. auf, ihre Lösung zu Aufgabe 5 vorzustellen. Dazu wurde die von den Schülern in der Arbeitsphase erstellte Konstruktion gespeichert und auf den Lehrer-PC übertragen, so dass hier im Gegensatz zur Präsentation bei den Aufgaben 3 und 4 schon die fertige Figur an die Wand projiziert wird (siehe Abbildung 12.16).

U [01:34:25.15]

Lehrer: So und zwar. Könnt ihr erst nochmal kurz eben hieran zeigen, was überhaupt G. Idee war... Die war nicht so simpel.

Schüler J: Also sie hat ja halt den Mittelpunkt von den drei Eckpunkten genommen immer... und dann die zu einem Dreieck verbunden, so dass ein kleineres Dreieck entstanden ist... und daraus dann den Mittelpunkt, daraus dann einen Mittelpunkt gemacht.

Lehrer: Ähm... was für ein besonderer Mittelpunkt ist das da jetzt im kleinen Dreieck? Das ist eine Frage an alle... Ist das der Umkreismittelpunkt, Inkreismittelpunkt? […]

Schüler M: Das ist der Mittelpunkt des Innenkreises von dem kleinen Dreieck und des Außen, äh des Umkreises von dem großen.

Lehrer: Das war ja G.'s Idee. Und wenn ihr euch das so anschaut, klappt das? Da, wo jetzt die Kneifzange ist, ist das auch der Mittelpunkt des Umkreises für das große Dreieck? D.

Schüler D: Nein, weil es, der berührt die Punkte nicht.

Der Lehrer stellt zunächst nochmals explizite Verbindungen zum Lösungsvorschlag der Schülerin G. her. Er geht hier aber nicht weiter auf die Begründung der Schüler ein, insbesondere wird die Idee des Gegenbeispiels hier nicht deutlich hervorgehoben.

Diese Konstruktion wird nicht nochmal selbst von allen Schülerinnen und Schülern durchgeführt, wie es bei den Aufgaben 3 und 4 der Fall war. Stattdessen leitet der Lehrer direkt zur nächsten Aufgabe über. Dieses Vorgehen erscheint hier durchaus sinnvoll, da es sich nicht um eine allgemeine Strategie zur Konstruktion, sondern um die Überprüfung einer speziellen Lösung handelt.

Bei der Bearbeitung dieser Aufgabe wenden die Schülerinnen und Schüler Probierverfahren an, die jedoch zum Erkennen des Nichtpassens mathematisches Verständnis erfordern. Allerdings bleibt das Denken überwiegend auf einer prozeduralen Ebene. Auch die Begründungen werden nur auf einem sehr niedrigen Niveau eingefordert, so dass das Potenzial der Aufgabe zum Argumentieren nicht genutzt wird.

12.3.7 Geplante, aber nicht eingesetzte Aufgabe (2)

An dieser Stelle des Unterrichts hat der Lehrer die Aufgabe Physik-Referat (siehe Abbildung 12.8) erneut eingeplant, allerdings mit einer etwas anderen Zielsetzung als in der Stunde zuvor.

Planung:

Die PH-R. Aufgabe dient dazu, zu üben, Ergebnisse zu hinterfragen (Ist es überhaupt sinnvoll als Treffpunkt den Punkt zu vereinbaren, der von allen 3 Schülern gleich weit entfernt ist?) und sie ist der Übergang zu den Forschungsaufgaben.

I [00:41:42.22]

Lehrer: […] bei der Lösung hier von der Aufgabe (Aufgabe ‚Physik-Referat') fällt dann halt auf, dass der zentrale Treffpunkt zwar von allen drei Leuten gleich weit entfernt ist, aber dass das auf keinen Fall ein optimaler Treffpunkt ist, weil ja, dann alle viel zu weit fahren müssten.

Der Lehrer möchte mit dieser Aufgabe in gewisser Weise eine Validierung des Modellierungskreislaufes aus Aufgabe 2 anregen. Außerdem betont er explizit das Herstellen einer Verbindung zwischen den Aufgaben.

Da die vorangegangene Partner-/Gruppenarbeit (Aufgaben 3, 4 und 5) aber deutlich länger dauerte als vom Lehrer vorgesehen, hat er aus Zeitmangel diese Aufgabe übersprungen. Er wollte auf jeden Fall noch die von ihm sogenannten „Forschungsaufgaben" (Aufgabe 6 und 7) bearbeiten, die im Rahmen dieser Untersuchung vorgegeben waren (siehe 7.3.1). Es entsteht dadurch ein etwas ‚ruckartiger' Übergang zu den Forschungsaufgaben, der allerdings durch die Vorgabe der Aufgaben entstanden zu sein scheint.

12.3.8 Aufgabe 6 ‚Lage des Umkreismittelpunktes'

Welche Eigenschaft muss ein Dreieck haben, dessen Umkreismittelpunkt a) auf dem Rand des Dreiecks liegt? b) im Dreieck liegt? c) außerhalb des Dreiecks liegt?

Abbildung 12.17: Aufgabe 6 ‚Lage des Umkreismittelpunktes'

Den Aufgabenteil a) dieser Aufgabe wählte der Lehrer aus einem im Rahmen dieser Untersuchung vorgegebenen Satz von Aufgaben aus (siehe 7.3.1). Die Aufgabenteile b) und c) ergänzt er eigenständig. Durch das Hinzufügen der Aufgabenteile b) und c) wird die vorgegebene Aufgabe an sich aber nicht verändert. Der Lehrer bezeichnet die Aufgabe als „Forschungsaufgabe":

I [00:48:42.05]

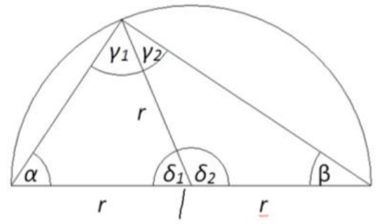
Lehrer: Ähm... ja weil das ja tatsächlich dann schon so einen leicht forschenden Charakter, den es da hat. Die sitzen da also mit einem speziellen Programm, gucken... suchen da nach Lösungen, allgemeinen Zusammenhängen und da kann man das auch mal direkt Forschungsaufgaben nennen. Wenn man es einfach nur ganz stumpf irgendwie Übungsaufgaben oder nur Aufgaben nennt, finde ich das auch ein bisschen trocken.

Der Lehrer spricht hier vor allem das Entdecken allgemeiner Zusammenhänge an und erkennt damit einen Teil des Potenzials der Aufgabe. Das Potenzial der Aufgabe zum Argumentieren spricht der Lehrer dagegen nicht an.

Objektive Kennzeichen der Aufgabe 6 ‚Lage des Umkreismittelpunktes'

Diese Aufgabe ist als begriffliche Modellierungs- und problembezogene Aufgabe einzuordnen. Der Aufgabenteil a) kann auf den Satz des Thales zurückgeführt werden. Hierzu müssen die Lernenden zunächst die Eigenschaften der Mittelsenkrechten und des Umkreises reflektieren und miteinander in Beziehung setzen. So können sie entgegen der üblichen Richtung der gedanklichen Auseinandersetzung aus den reflektierten Eigenschaften eine geeignete Zeichnung anfertigen. Sie können erkennen, dass eine Dreieckseite der Diagonale des Umkreises entspricht und dass auch der dritte Punkt auf dem Kreis liegt, so dass die Voraussetzungen für die Anwendung des Thalessatzes gegeben sind.

Sollte der Satz des Thales den Schülerinnen und Schülern noch nicht bekannt sein, können sie für diese Aufgabe den Beweis des Satzes nachzeichnen, indem sie zwei gleichschenklige Dreiecke (die gleichen Schenkel sind jeweils der Radius des Kreises) einzeichnen und über die gleich großen Basiswinkel und die Winkelsumme im Dreieck argumentieren, dass einer der Winkel 90° groß sein muss (siehe Abbildung 12.18). Hiervon ausgehend können nun die Lösungen für Aufgabenteil b) und c) hergeleitet werden, indem die Schülerinnen und Schüler begründen, wie sich die Winkel verändern, wenn der Punkt C des Dreiecks etwas außerhalb oder etwas innerhalb des Kreise befindet. Diese Überlegungen erfordern durch das Herstellen vielfältiger Verbindungen innermathematisches Modellieren auf hohem Niveau. Des Weiteren sind vielfältige Argumentationen auf hohem Niveau möglich. Die Verwendung von Darstellungen ist auf mittlerem Niveau nötig, da Darstellungen verglichen und (gedanklich) variiert werden müssen.



Es gilt $\alpha = \gamma_1$ und $\beta = \gamma_2$

$\Rightarrow \delta_1 = 180° - 2\alpha$ und $\delta_2 = 180° - 2\beta$

$\Rightarrow 180° = 2\alpha + 2\beta$

$\Rightarrow \alpha + \beta = 90°$

$\Rightarrow \gamma = \gamma_1 + \gamma_2 = 90°$

Abbildung 12.18: Beweis zum Satz des Thales

Beim Einsatz von dynamischer Geometriesoftware entfällt das sorgfältige Reflektieren der geforderten Eigenschaften, wie es zum Lösen von Aufgabenteil a) beschrieben wurde, da eine allgemeine Konstruktion des Umkreises angefertigt werden kann. Diese kann durch den Zugmodus so variiert werden, dass der Mittelpunkt des Umkreises auf dem Rand liegt. Die Software hilft also sehr beim Aufstellen der Vermutung. Allerdings sind die oben genannten Begründungen trotzdem möglich und nötig, da mit der dynamischen Geometriesoftware lediglich Aussagen über viele einzelne Beispiele getroffen werden können. Dies reicht aber für einen mathematischen Beweis nicht aus.

Analyse des Unterrichtseinsatzes der Aufgabe 6 ‚Lage des Umkreismittelpunktes'

Der Lehrer zeigt den Lernenden diese Aufgabe zunächst auf einer Folie und erläutert, dass im Folgenden untersucht werden soll, welche Eigenschaften ein Dreieck haben muss, damit der Mittelpunkt des Umkreises auf dem Rand, im Dreieck oder außerhalb des Dreiecks liegt.
Es fällt auf, dass dieses Problem hier scheinbar ‚vom Himmel fällt', da bisher noch gar nicht thematisiert wurde, dass der Umkreismittelpunkt auch außerhalb des Dreiecks liegen kann. Hier hätte die fehlende Aufgabe Physik-Referat einen guten Beitrag zum Herstellen von Verbindungen liefern können (siehe 12.3.7), die der Lehrer vermutlich ausgelassen hat, weil er die im Rahmen der Untersuchung vorgegebenen Aufgaben in den beobachteten Stunden auf jeden Fall bearbeiten wollte.

<u>*Wiederholung Dreiecksarten*</u>

Bevor die Schülerinnen und Schüler die Möglichkeit zur eigenständigen Bearbeitung der Aufgabe bekommen, wiederholt der Lehrer anhand einer vorbereiteten Folie (siehe Abbildung 12.19) die verschiedenen Dreiecksarten. Er gibt dabei die Unterscheidung nach Seitenlängen und Winkeln und auch die verschiedenen Fachbegriffe für die Dreiecksarten vor und fordert die Lernenden auf, die entsprechenden Eigenschaften solcher Dreiecke zu nennen. Ein Schüler schreibt jeweils die Antworten in die rechte Spalte auf der Folie. Alle Lernenden erhalten die Folie auch als Arbeitsblatt, so dass sie die Ergebnisse sofort mitschreiben können.

U [01:37:11.05]
Lehrer: Was war denn nochmal ein gleichseitiges Dreieck?
Schüler Q: Dass alles im rechten Winkel ist. […]
Schüler V: Dass alle Seiten gleich lang sind.
Lehrer: Hm, was stimmt denn jetzt?
Schüler V: Meins.

Lehrer: Na ja, das sagst du. Ja?

Schüler Y: Ich glaub V., weil wenn Q. kann ja gar nicht stimmen, wenn die alle ähm Seiten quatsch Winkel hätten, dann wär das ja kein Dreieck, sondern ein Quadrat.

Lehrer: Aha. Oder ein Rechteck. Genau. Also gleichseitiges Dreieck heißt, alle Seiten sind gleich lang.

Der Lehrer fördert hier die selbstständige Überprüfung der Antwort und regt die Lernenden indirekt zur Begründung und Reflexion der Lösungsvorschläge an. Die Begründung des Schülers Y. bezieht sich dabei aber nicht direkt auf ein Dreieck, da ein Quadrat vier Seiten hat. Es wird daher nicht ausreichend herausgestellt, warum die Antwort der Schülerin Q. falsch ist. Eine Argumentation über die Winkelsumme hätte beispielsweise einen besseren Bezug zum Dreieck aufgewiesen. Es wird hier aber durch die Begründung begriffliches Denken aktiviert.

	Merkmal
Unterscheidung nach Seitenlängen:	
• gleichseitiges Dreieck	Alle Seiten gleich lang
• gleichschenkliges Dreieck	2 Schenkel sind gleich
• unregelmäßiges Dreieck	Alle Seiten sind unterschiedlich
Unterscheidung nach Winkeln:	
• spitzwinkliges Dreieck	Alle Winkel: $< 90°$
• rechtwinkliges Dreieck	Ein Winkel $= 90°$
• Stumpfwinkliges Dreieck	Ein Winkel $> 90°$

Abbildung 12.19: Übersicht über verschiedene Dreiecksarten als Hilfestellung für Aufgabe 4

Die anderen beiden Dreiecksarten in Bezug auf die Seitenlänge können die Schülerinnen und Schüler ohne Probleme benennen:

U [01:39:55.07]

Lehrer: […] Ähm wie ist es beim gleichschenkligen Dreieck? Was ist denn da das markante Merkmal? ...... F.

Schüler F: Zwei Schenkel sind gleich lang. […]

Lehrer: So und was ist ein Merkmal vom unregelmäßigen Dreieck? ...... T.

Schüler T: Da sind die Seiten nicht gleich lang.

Lehrer: Ja. N.

Schüler N: Die Seiten sind unterschiedlich.

Hier fordert der Lehrer in einem leicht gelenkten Unterrichtsgespräch die Aktivierung von Faktenwissen ein, da die Eigenschaften der Dreiecke nicht miteinander in Beziehung gesetzt oder begründet werden.

Die Schülerinnen und Schüler haben große Probleme, die Eigenschaften eines spitzwinkligen Dreiecks zu benennen:

U [01:40:51.24]

Lehrer: […] Was war denn nochmal das Merkmal für ein spitzwinkliges Dreieck? ...S.

Schüler S: Ich glaube, wenn das unter 90 Grad ist, dann ist das spitzwinklig... oder andersrum. […]

Schüler V: Wenn der Winkel zwischen den beiden längeren... Schenkeln unter 90 Grad ist.

Lehrer: Jetzt muss ich mal eben überlegen, spitzwinklig. Wenn der Winkel zwischen den beiden längeren Schenkeln... unter 90 Grad ist, dann, da muss ich mal ganz kurz eben eine Skizze machen (oberes Dreieck in Abbildung 12.20). [...] Also ich habe hier einen kurzen Schenkel und zwei ganz lange Schenkel. […] Also ist das ein spitzwinkliges Dreieck hier? (Allgemeine Zustimmung der Klasse.) Nein. […] Das ist ein stumpfwinkliges... Wir haben hier, ah, ich mach das nochmal ein bisschen krasser. (Lehrer verändert Skizze.) […] Wir haben hier zwei lange Schenkel, das ist ein langer Schenkel und das ist ein langer Schenkel und der Winkel ist auf jeden Fall kleiner als 90 Grad da zwischen den Schenkeln, aber es ist kein spitzwinkliges Dreieck. Q.

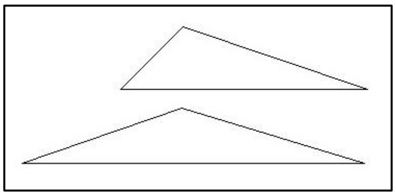


Abbildung 12.20: Skizze zur Bestimmung der Eigenschaften eines spitzwinkligen Dreiecks

Schüler Q: Ich glaub der Außenwinkel ist jetzt stumpfwinklig und ich glaub das, also deswegen ist es jetzt stumpfwinklig und wenn das ähm... also wenn der Winkel in dem ähm in dem Dreieck über 180 oder so wär, dann wär das, der Außenwinkel ja irgendwie spitzwinklig und dann wäre es ein spitzwinkliges Dreieck. […]

Schüler M: Aber, nach Q.'s Beispiel, die Außenwinkel sind dann immer stumpfwinklig, weil es kann keine Ecke geben, also keine Ecke von innen gesehen, die über 180 ist.

Lehrer: Genau. Hm... Also bei einem spitzwinkligen Dreieck ist es nun so, dass tatsächlich alle Winkel unter 90 Grad sein müssen.

Der zuerst genannte Lösungsvorschlag ist im Prinzip richtig, aber zu ungenau formuliert. Der Lehrer fordert nähere Erläuterungen ein, die dann allerdings fehlerhaft sind. Der Lehrer visualisiert den Lösungsvorschlag von Schüler V. mit einer Skizze auf der Folie (siehe Abbildung 12.20 oben). Er regt damit auch die Selbstständige Überprüfung durch die Lernenden an. Er lenkt dann aber stark, indem er die Falschheit der Antwort vorgibt. Er ändert die Skizze nochmals um, vermutlich um den stumpfen Winkel deutlicher sichtbar zu machen (siehe Abbildung 12.20 unten). Allerdings entspricht dieses Dreieck nicht mehr den Vorgaben des Schülers V., der von zwei langen Seiten spricht. Dennoch regt der Lehrer die Lernenden hiermit zu einer Reflexion der Eigenschaften des Dreiecks an. Die Schülerinnen und Schüler diskutieren gegen Ende des Transkriptausschnittes kurzzeitig sehr selbstständig, wobei sie auch selbstständig begründen, warum eine Schülerlösung nicht möglich ist. Dabei wird auf einer begrifflichen Ebene gedacht. An dieser Stelle greift der Lehrer wiederum stark lenkend ein, indem er die Lösung direkt vorgibt.

Anschließend leitet der Lehrer zum rechtwinkligen Dreieck über:

U [01:44:27.13]

Lehrer: Ähm, was ist ein rechtwinkliges Dreieck? […]

Schüler M: Wenn ein Winkel in einem rechten Winkel besteht.

Lehrer: Also wie groß ist?

Schüler M: 90 Grad.

Lehrer: Ja. Das ist ein rechtwinkliges. Und was ist ein stumpfwinkliges Dreiecke?

Schüler T: Das ist dann ja über 90 Grad von einem Winkel.

Lehrer: Also alle Winkel müssen über 90 Grad sein?

Schüler T: Ja.

Lehrer: M.

Schüler M: Ein Winkel muss über 90 Grad sein.

Lehrer: Warum können denn nicht zwei Winkel größer als 90 Grad sein? T. selber.

Schüler T: Ja weil die dann ja so wären, würde das nicht gehen. Weil die dann enger zusammen sind. […]

Lehrer: Weil wenn allein schon zwei Winkel größer als 90 Grad wären, was hätten wir dann für eine Winkelsumme... im Dreieck? ...... Der eine Winkel hat meinetwegen 95 Grad, der andere hat 100 Grad. Was für eine Winkelsumme? ... M.

Schüler M: Äh 195? Auf jeden Fall zu viel.

Lehrer: Zu viel. Mehr als 180, das ist Quatsch. Muss genau 180.

Hier versteht der Lehrer eine Antwort des Schülers T. falsch, leitet daraus aber eine Reflexion der Eigenschaften der Winkelsumme her. Außerdem regt der Lehrer die Schülerinnen und Schüler hier zur Begründung an. Er gibt die Begründung im Endeffekt aber selbst vor, da er die Lernenden stark lenkend zur Begründung anleitet und den Gedankengang auf die Betrachtung der Winkelsumme lenkt. In diesem Unterrichtsabschnitt wird zunächst Faktenwissen und dann vor allem begriffliches Denken angesprochen. Durch die allgemeine Zusammenstellung der Dreiecksarten werden auch das strukturierte Denken und die Vernetzung des Wissens gefördert.

Gruppenarbeitsphase

In der anschließenden Gruppenarbeitsphase hat der Schüler C. zunächst eine Nachfrage zu den eben erarbeiteten Eigenschaften von Dreiecken:

U [01:47:36.11]

Schüler C: Warum heißt das hier beim spitzwinkligen Dreieck: Alle Winkel sind kleiner und hier beim stumpfwinkligen nur einer?

Lehrer: Weil äh beim spitzwinkligen Dreieck tatsächlich alle Winkel kleiner als 90 Grad sein müssen. Es ist so, ein Winkel ist immer kleiner als 90 Grad. […] Äh eigentlich sogar zwei Winkel sind mindestens immer kleiner als 90 Grad. Und ähm... wenn tatsächlich alle drei Winkel kleiner als 90 Grad sind, dann ist es ein spitzwinkliges Dreieck.

Im Prinzip wurde die Frage des Schülers, zumindest für das stumpfwinklige Dreieck, in der Plenumsphase begründet. Der Lehrer geht hierauf auch nicht mehr ein, er ergänzt allgemein, dass in einem Dreieck mindestens zwei Winkel kleiner als 90° sind, begründet dies aber nicht. Der Lehrer lenkt in diesem Fall sehr stark.

Beim Gang durch die Klasse folgt der Lehrer zunächst einer in dem Video unverständlichen Diskussion zweier Schülerinnen:

U [01:48:38.15]

Lehrer: Ähm konstruiert mal den Umkreis von dem Dreieck und zieht dann an einer Ecke und dann könnt ihr sehen, wie das Dreieck dann sein muss.

Auch wenn die vorhergehende Diskussion der Schülerinnen nicht zu verstehen ist, zeigt sich hier deutlich, dass der Lehrer an dieser Stelle sehr stark lenkt, indem er den Lösungsweg vorgibt. Dabei beschränkt sich die Vorgabe des Lehrers jedoch auf das Konstruieren des Umkreises und die Nutzung des Zugmodus.

Die Schüler V. und R. zeichnen zunächst ein Dreieck und wollen nun den Umkreis konstruieren:

U [01:49:35.01]

Lehrer: So und was wäre der nächste Schritt?

Schüler V: Umkreis. […]

Lehrer: Den Mittelpunkt braucht ihr. Wie findet ihr nochmal den Umkreismittelpunkt?

Schüler V: Erst mal so und dann... Oder war das über die (???)?

Lehrer: Ähm der Umkreismittelpunkt... war nochmal ein Schnittpunkt von welchen Linien? […]

Schüler V: Von den Winkelhalbierenden.

Lehrer: Oh nein, das war der Inkreis.

Schüler R: Äh...... Musste ich da nicht so was? (S. zeigt mit Mauszeiger auf Funktion "Orthogonale".)

Lehrer: Ne, guckt mal bei euch im Heft nach. Ihr habt das doch aufgeschrieben, oder?

Schüler V: Muss man nicht ähm den Kreis hier so (S. zeigt auf eine Ecke des Dreiecks.) hinzeichnen?

Lehrer: Ähm, das mit den Kreisen ist insgesamt ein bisschen aufwändiger, aber schaut mal im Heft nach. Da steht bestimmt drin, der Umkreismittelpunkt der Schnittpunkt von welchen Linien.

Schüler V: Ach von den ähm äh...... senkrechten Linien.

Lehrer: Ja Mittelsenkrechten.

Der Lehrer lenkt hier wieder stark, indem er beispielsweise Schülerfehler direkt korrigiert. Er erkennt anscheinend nicht, dass die Lernenden mit dem Hinweis auf die Orthogonalen schon auf dem richtigen Weg sind, da auch die Mittelsenkrechten Orthogonalen im Mittelpunkt der Seiten sind. Auch die zu Beginn der Doppelstunde erarbeitete Konstruktion des Mittelpunktes des Umkreises, die die Schüler eigenständig vorschlagen, lässt er nicht weiter verfolgen. Er scheint sehr auf den Begriff der ‚Mittelsenkrechten' fixiert zu sein, so dass er nicht mehr versucht, sich in die Gedankengänge der Schüler hinein zu versetzten. Somit behindert er die Schüler deutlich in ihrer kognitiven Selbstständigkeit. Er lenkt die Schüler in die Richtung, die er selbst im Kopf hat. Er versucht dabei allerdings, mit dem Verweis auf das Heft, an bereits gelernte Inhalte anzuknüpfen.

Wiederholung Umkreiskonstruktion im Plenum

Da auch die nächste Gruppe Schwierigkeiten beim Zeichnen des Umkreises hat, unterbricht der Lehrer die Gruppenarbeitsphase und wiederholt im Plenum die Konstruktion des Umkreismittelpunktes. Er führt dabei die entsprechenden Konstruktionsschritte am Lehrer-PC vor, so dass die Schülerinnen und Schüler die Konstruktion an der Wand verfolgen können.

U [01:51:15.26]

Lehrer: […] Wir wiederholen noch einmal. Wie kann man den Mittelpunkt des Umkreises konstruieren? ... D. […]

Schüler D: Wenn man die Mittelsenkrechten einzeichnet und dann den Schnittpunkt.

Lehrer: Genau. Als erstes natürlich Dreieck zeichnen, dann die Mittelsenkrechten zeichnen und da wo die sich schneiden, da ist der Umkreismittelpunkt. Ähm... hier bei DynaGeo gibt es ja auch eine Funktion. […] Wo man die Mittelsenkrechten ganz fix mit zeichnen kann. […]

Schüler Y: Ähm mit dem, wo ähm... das also bei Form und Farbe und das darüber.

Lehrer: Genau. Hier oben. Mittelsenkrechte, die zeichnen wir... zum Beispiel die Mittelsenkrechte zu dieser Linie, zack fertig. Kein Problem... Nochmal eine Mittelsenkrechte, und dann seht ihr schon... die schneiden sich. Dann können wir da also den Schnittpunkt der beiden Mittelsenkrechten einzeichnen. Wie bekomme ich jetzt den Umkreis hin? […]

Schüler L: Äh also so einen Kreis zeichnen (???) von dem oberen, ja genau.

Lehrer: Kreis genau. Kreis und Mittelpunkt und Rad durch Kreispunkt. Was ist hier der Mittelpunkt?

Schüler L: Jaa {zögernd}... der Schnittpunkt?

Lehrer: Jawohl und durch welchen Punkt geht der Kreis noch?

Schüler L: Ähm... da oben, wo die Maus ist.

Lehrer: Genau, einem von den drei Punkten. Und tatsächlich, das ist jetzt hier unser Dreieck....

Hier findet ein teilweise stark gelenktes fragend-entwickelndes Unterrichtsgespräch statt. In dieser Wiederholung steht stark das prozedurale Denken im Vordergrund. Durch den Hinweis auf die ‚Mittelsenkrechten-Funktion', wird das Einzeichnen der Mittelsenkrechten schematisiert, so dass die Schülerinnen und Schüler nicht mehr die Eigenschaften der Mittelsenkrechten, im Mittelpunkt senkrecht zu sein, in Erinnerung rufen müssen, um diese zu zeichnen.

Der Lehrer belässt es in der eingeschobenen Plenumsphase aber nicht bei der Wiederholung der Umkreiskonstruktion:

U [01:53:26.15]

Lehrer: […] Jetzt haben wir schon mal rausgefunden, der Punkt liegt außerhalb des Dreiecks. Da kann man jetzt gleich schön an den Eckpunkten ziehen und sieht, mal liegt er außerhalb, mal genau auf dem Rand, mal innerhalb. Äh so als Tipp, wie können wir überhaupt wissen, ob das jetzt ein gleichschenkliges, gleichseitiges oder spitzwinkliges Dreieck ist? ...... Ich brauch mal Infos. W.

Schüler W: Winkel ausmessen.

Lehrer: Jawohl, Winkel ausmessen. Dann geht man also auf "Messen und Rechnen" und kann Winkel ausmessen. (Lehrer führt Winkelmessung beispielhaft an einem Winkel durch.) Zum Beispiel der hat 83 Grad... Winkel ausmessen und was könnte noch hilfreich sein? ...... Wenn ich schauen will, ob ein Dreieck ein gleichseitiges Dreieck ist? ...... X. […]

Schüler X: Ähm... ähm...... ausmessen am besten, oder?

Lehrer: Ja. Genau, dann messen wir auch noch mal aus und messen zum Beispiel den Abstand von zwei Punkten. (Lehrer führt Längenmessung beispielhaft durch.) […] Also eure Aufgabe ist es jetzt, zunächst einmal natürlich dieses Dreieck zu zeichnen, den Umkreis zu zeichnen und... die Winkel und Seiten auszumessen und dann entscheiden zu können. Ok, beim spitzwinkligen Dreieck ist es immer so, beim stumpfwinkligen ist es immer so. Testet da mal ein paar Sachen aus.

Die Lernenden sind zwar teilweise beteiligt, der Lehrer gibt in diesem Abschnitt aber viele Lösungsschritte direkt vor, sodass die Schülerinnen und Schüler den hier vorgegebenen Weg nur noch nachzeichnen müssen. Die Aufgabe verliert dadurch ihren forschenden Charakter, der vom Lehrer so hervorgehoben wurde, da die Schülerinnen und Schüler die innermathematische Modellierung nicht mehr selbst vornehmen müssen. Auch die Möglichkeit, über begriffliches Denken die Eigenschaften des Umkreismittelpunktes zu reflektieren und zu begründen, wann der Mittelpunkt beispielsweise auf dem Rand liegt, wird durch diese Vorgabe des prozeduralen Lösungsweges über das Messen ausgeblendet.

Fortsetzung der Gruppenarbeit

U [01:55:48.13]

Schüler B: Ein Dreieck muss rechtwinklig sein, damit das Teil genau da drauf liegt.

Lehrer: Geht das nur bei diesem rechtwinkligen Dreieck oder gibt es da auch noch andere Winkelkombinationen, das ist ja 90, 44, 46. Würde das sonst eventuell auch gehen? […] (Schüler ziehen Dreieck an den Ecken.) Ja, testet mal... Ja geht auch.

Schüler: Aber einer muss 90 Grad haben, oder nicht.

Lehrer: Prima, dann könnt ihr das schon mal notieren. Holt euer Heft raus und schreibt das auf.

Der Lehrer fordert die Schülerinnen hier zum Verallgemeinern und zur selbstständigen Überprüfung des Ergebnisses auf. Er gibt sich dabei aber mit ein paar weiteren Beispielen zufrieden und fordert keinerlei Begründungen ein.

Mehrere Gruppen haben Probleme, die Winkel richtig zu messen, da die dynamische Geometriesoftware bei Ihnen die Außenwinkel anzeigt:

U [01:56:59.18]

Schüler E: Wie macht man das, also wenn wir die Winkel ausmessen, ist das ganz oft so außen rum (S. zeigt auf gemessenen Außenwinkel.).

Lehrer: Oh. Ähm das hängt davon ab, wie man die Punkte markiert. Ob man das im Uhrzeigersinn macht oder gegen den Uhrzeigersinn. […] Dann misst man einmal den Innenwinkel und einmal den Außenwinkel.

Auch hier lenkt der Lehrer wieder sehr stark und gibt die Lösung des Problems direkt vor.

Trotz der direkten Vorgabe des Lösungsweges in der eingeschobenen Plenumsphase hat eine Schülergruppe Probleme, das Verfahren durchzuführen, obwohl die Lernenden den Umkreismittelpunkt konstruieren konnten:

U [01:57:50.16]

Lehrer: Genau ausprobieren. Aber ähm... fass mal eine Ecke an... und verändere das Dreieck so, dass es... dass der genau auf dem Rand liegt.

(Schüler führen dies durch.)

Lehrer: Das heißt, was für ein Dreieck ist das dann?

Schüler I: Rechtwinklig?

Lehrer: Ja super...... Prima, da habt ihr schon mal eine Teilaufgabe gelöst und dann die anderen beiden könnt ihr dann nach dem gleichen Verfahren machen.

Hier lenkt der ebenfalls stark, indem er das Verfahren direkt vorgibt. Außerdem fordert er die Schülerinnen und Schüler nicht zur Begründung ihrer Antwort und zur Verallgemeinerung, wie beispielsweise bei den Lernenden vorher, auf. Ihm genügt hier die Lösung der Aufgabe anhand eines Beispiels.

Auch andere Schülergruppen, die nach den direkten Erläuterungen des Lösungsverfahrens die Aufgabe ohne Probleme lösen können, werden nicht zur Begründung oder Verallgemeinerung aufgefordert:

U [02:00:34.23]

Schüler X: Also bei a) muss das Dreieck 90... also.... 90 Grad Winkel da haben. […] Wenn das im Dreieck liegt, ist das spitzwinklig und wenn der außerhalb des Dreiecks liegt, ist der stumpfwinklig.

Lehrer: Das hört sich super an. Ähm... und was habt ihr bei Aufgabe 2?

Während der Gruppenarbeitsphase erinnert der Lehrer den Schüler V. an eine weiter zurückliegende Aufgabenlösung, in der der Schüler den Satz des Thales bereits ausgenutzt hatte:

U [02:02:18.01]

Lehrer: Du hast doch mal äh, war das kurz vor Weihnachten oder nach Weihnachten, so eine Lösung von einer Aufgabe an der Tafel präsentiert und da hast du genau diesen Sachverhalt ausgenutzt. […] Da ging es drum... ähm wir wollten doch mal äh Grundstücke in Ägypten quadratisch... zuschneiden, zumindest rechtwinklig. Wie hast du da diese rechten Winkel hinbekommen?

Schüler V: Weiß ich nicht mehr genau. […]

Lehrer: Ähm guck dir doch mal Aufgabe 1a) an, simuliere das nochmal und vielleicht fällt es dir ja dann wieder ein.

Der Lehrer will vermutlich über die Idee des Schülers den Satz des Thales wieder aufgreifen, der zur Begründung von Aufgabenteil a) dienen kann.

Insgesamt betrachtet fällt in dieser Gruppenarbeitsphase auf, dass der Lehrer viel häufiger als im vorherigen Unterricht lenkend eingreift. Insbesondere fordert er die Schülerinnen und Schüler im Gegensatz zu den vorherigen Aufgaben nicht dazu auf, sich Hilfe beim Nachbarn zu holen.

Ergebnisvergleich

Gegen Ende der Stunde lässt der Lehrer kurz die Ergebnisse vergleichen:

U [02:05:00.09]

Schüler V: Welche Eigenschaft muss ein Dreieck haben, dessen Umkreismittelpunkt a) auf dem Rand des Dreiecks liegt. […] Ähm der, das Dreieck muss einen rechten Winkel haben.

Lehrer: Ok, simuliere ich hier einmal. Tatsächlich, wenn es ein rechtwinkliges Dreieck ist, liegt der Umkreismittelpunkt auf dem Rand des Dreiecks. Kann man hier auch nochmal so simulieren, zum Beispiel so auf 90 Grad.

Schüler V: Ach jetzt fällt‘s mir glaub ich wieder ein.

Lehrer: Oh. V. hat noch eine tolle Idee. Was denn?

Schüler V: Ähm dass, wenn man eine Linie, egal irgendwie durch den Kreis durchzieht, also wenn man durch den Mittelpunkt von dem Kreis durchzieht und dann ähm irgendeinen Punkt am Kreis nimmt und damit mit den beiden Schnittpunkten vom Kreis verbindet, dann ist da immer ein 90 Grad Winkel drin.

Lehrer: Genau, das war nochmal Satz des? Ja?

Schüler Z: Thales.

Lehrer: Jawoll. Spitze, das war ja 1a. Aufgabe 1b). H.

Schüler H: Ähm das muss spitzwinklig sein. […] Damit der Umkreismittelpunkt im Dreieck liegt.

Lehrer: Gucken wir mal, spitzwinkliges Dreieck, tatsächlich, der liegt innen drin. Und Nummer c). N.

Schüler N: Wenn der außerhalb des Kreises liegt, ist das stumpfwinklig. […]

Lehrer: Ich mach mal ein stumpfwinkliges, tatsächlich da liegt es außerhalb.

Durch den Bezug zum Satz des Thales wird das bisher vorherrschende prozedurale Denken durch begriffliches Denken ergänzt. Allerdings bleibt der Bezug sehr oberflächlich, da beispielsweise die Anwendbarkeit des Thalessatzes und der Zusammenhang zu dieser Aufgabe nicht aufgezeigt werden. Insbesondere werden die Ergebnisse der Aufgabenteile b) und c) nicht begründet und es werden keine weiteren Erklärungen eingefordert, so dass die Aufgabe nur anhand einiger Beispiele gelöst wurde. Dies ist im mathematischen Sinn nicht ausreichend, wird vom Lehrer aber nicht thematisiert. Das Potenzial der Aufgabe zum mathematischen Argumentieren und zum Reflektieren der Eigenschaften des Umkreises wird daher kaum genutzt. Dadurch verliert die Aufgabe den forschenden Charakter, den der Lehrer an dieser Aufgabe so positiv fand. Es scheint aber so, dass die beobachtete Herangehensweise mithilfe der dynamischen Geometriesoftware und ohne tiefere mathematische Begründungen durchaus im Sinne des Lehrers war. Auch das Potenzial der Aufgabe zum innermathematischen Modellieren wird nicht genutzt, da die Modellierung den Schülerinnen und Schülern durch die vorangehende Besprechung der Dreiecksarten und in der Unterbrechung der Gruppenarbeit vorgegeben wird. Die Wiederholung der Dreiecksarten ist als verständnisbetont einzustufen, die eigentliche Aufgabenbearbeitung ist aber verfahrensbetont, da das angewendete Probierverfahren durch die Nutzung der dynamischen Geometriesoftware und die fehlenden Begründungen kaum mathematisches Verständnis erfordert.

12.3.9 Aufgabe 7 ‚Umkreismittelpunkt gleich Inkreismittelpunkt'

> Gestern hattet ihr die Idee, dass der Inkreismittelpunkt evtl. auch der gesuchte Treffpunkt von Melanie, Ralf und Nina sein könnte. Es gibt tatsächlich Dreiecke bei denen die Mittelpunkte von Um- und Inkreis zusammenfallen! Untersuche, bei welchen Dreiecken dies der Fall ist.

Abbildung 12.21: Aufgabe 7 ‚Umkreismittelpunkt gleich Inkreismittelpunkt'

Inhaltlich wählte der Lehrer diese Aufgabe aus dem im Rahmen dieser Untersuchung passend zum Thema vorgegebenen Satz von Aufgaben aus (siehe Abbildung 12.22). Allerdings formulierte er die Aufgabe so um, dass sie nach Auffassung des Lehrers besser zum Unterrichtsverlauf passt (siehe Abbildung 12.21). Durch die Umformulierung wird ein Bezug zu den Lösungsvorschlägen der Schülerinnen und Schüler hergestellt. Aus mathematischer Sicht ist die Aufgabenstellung aber leicht verändert worden, da der Lehrer explizit formuliert, dass es Dreiecke gibt, bei denen die beiden Mittelpunkte zusammenfallen. Die ursprüngliche Aufgabe (Abbildung 12.22) lässt dagegen noch offen, ob solche Dreiecke überhaupt existieren.

> Untersuche, bei welchen Dreiecken die Mittelpunkte von Um- und Inkreis zusammenfallen.

Abbildung 12.22: vorgegebene Aufgabe, die als Grundlage zur Aufgabenformulierung von Aufgabe 7 diente

Auch diese Aufgabe wird vom Lehrer als Forschungsaufgabe bezeichnet (siehe 12.3.8), es gelten dieselben Begründungen für die Aufgabenauswahl wie für Aufgabe 6.

Objektive Kennzeichen der Aufgabe 7 ‚Umkreismittelpunkt gleich Inkreismittelpunkt'

Diese Aufgabe ist als begriffliche Modellierungs- und problembezogene Aufgabe einzuschätzen. Sie erfordert zunächst eine Reflexion der Konstruktionen der Mittelpunkte von In- und Umkreis. Die Schülerinnen und Schüler können erkennen, dass für die Identität der beiden Mittelpunkte je die Winkelhalbierenden und die Mittelsenkrechten des Dreiecks übereinstimmen müssen. Anschließend kann beispielsweise über die Kongruenz oder über Symmetrie argumentiert werden, dass ein Dreieck, in dem eine Winkelhalbierende mit einer Mittelsenkrechten übereinstimmt, gleichschenklig sein muss (siehe Abbildung 12.23). Hieraus kann nun geschlossen werden, dass ein Dreieck, in dem alle drei Winkelhalbierenden mit den Mittelsenkrechten übereinstimmen, gleichseitig sein muss. Dies erfordert einerseits innermathematisches Modellieren auf hohem Niveau, da Verbindungen zwischen In- und Umkreis, bzw. zwischen den nicht direkt in der Aufgabenstellung angegebenen Winkelhalbierenden und Mittelsenkrechten hergestellt werden müssen. Auch Argumentationen sind hier auf hohem Niveau möglich, da es sich bei dem hier vorgestellten Lösungsweg um einen Beweis handelt. Dieser erfordert auch die Verwendung von Darstellungen auf mittlerem Niveau, da die Darstellungen von In- und Umkreis miteinander verglichen werden müssen.

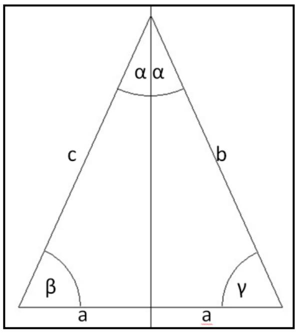


Abbildung 12.23: Veranschaulichung zur möglichen Lösung von Aufgabe 7

Wird die Aufgabe mithilfe dynamischer Geometriesoftware bearbeitet, so können die Schülerinnen und Schüler zunächst allgemein ein Dreieck und dessen In- und Umkreis zeichnen. Mithilfe des Zugmodus können sie nun durch Probieren erkennen, dass das Dreieck gleichseitig sein muss, damit die Mittelpunkte zusammenfallen. Die Software hilft daher sehr beim Aufstellen der Vermutung. Jedoch sind die oben beschriebenen Modellierungen und Argumentationen auch beim Einsatz der Software möglich und nötig, da anhand vieler Beispiele keine Aussage mathematisch bewiesen werden kann.

Analyse des Unterrichtseinsatzes der Aufgabe 7 ‚Umkreismittelpunkt gleich Inkreismittelpunkt'

Diese Aufgabe befindet sich auf einer Folie mit Aufgabe 6. Der Lehrer fordert die Schülerinnen und Schüler, die Aufgabe 6 zu Ende bearbeitet haben, auf, sich mit Aufgabe 7 zu beschäftigen. Die Wiederholung der Dreiecksarten (siehe 12.3.8) dient auch als Hilfestellung für diese Aufgabe.

Gruppenarbeitsphase

Schülerin Y. und Schüler S. haben Probleme beim Lösen der Aufgabe.

U [02:03:14.20]
Lehrer: Seid ihr bei Aufgabe 2?
Schüler S: Ja klar... Das ist voll schwer.
Lehrer: Ja einfach ist das auch nicht. Wie würde man hier beginnen?
Schüler S: (? ...) Mittelpunkt des Umkreis innerhalb oder außerhalb? ...... Also die Dreiecke müssen ja von dem gleich weit entfernt sein. […]
Lehrer: Also hier ist es ja so, man soll untersuchen, bei welchen beiden Um- und Inkreis, also die Mittelpunkte von Um- und Inkreis zusammenfallen.
Schüler Y: //Achso.// […]
Lehrer: Wie kann man wohl überprüfen, bei welchen Dreiecken das ist?
Schüler Y: Ob die stumpfwinklig oder so etwas sind.

Lehrer: Genau, aber wie kann man erstmals überprüfen, bei welchen Dreiecken das so ist?

Schüler Y: Winkel messen.

Lehrer: Ne. Als erstes muss man dann nochmal den Inkreis und den Umkreis zeichnen, sonst kann man das…

Hier lenkt der Lehrer wieder sehr stark und gibt den Lösungsweg vor. Auf die Vorschläge der Lernenden geht er nicht weiter ein, so dass die Schüler nicht zur selbstständigen Reflexion des Lösungsweges angeregt werden.

Weitere Schülerbearbeitungen konnten nicht beobachtet werden. Im Interview erläutert der Lehrer aber:

I [00:06:18.00]

Lehrer: […] Joa, dann muss man da... ein paar mehr Tipps geben, damit man das dann auch ordentlich abschließen kann so.

Der Lehrer erkennt also selbst die starke Lehrerlenkung, reflektiert diese aber nicht kritisch.

Ergebnisvergleich

Gegen Ende der Stunde, nachdem die Ergebnisse von Aufgabe 6 verglichen wurden, fragt der Lehrer nach möglichen Lösungen für Aufgabe 7:

U [02:06:30.17]

Lehrer: […] Äh hat jemand noch eine Lösung für 2) rausbekommen? U.

Schüler U: Gleichseitiges (???).

Lehrer: Äh also, wir brauchen ein gleichseitiges Dreieck, dann ist Inkreismittelpunkt und Umkreismittelpunkt identisch. H.

Schüler H: Ist das nicht nur bei 60? Weil ich mein, wenn das immer 50 wär zum Beispiel, dann wär das ja nur 150 und man brauch ja 180.

Lehrer: Oh genau. Also ein gleichseitiges Dreieck erkennt man auch daran, dass alle Winkel 60 Grad sind. Das notieren wir uns noch zu Aufgabe 2) und fahren die PCs runter.

Es wird hier keine Begründung für die Lösung der Aufgabe eingefordert. Durch die Anmerkung der Schülerin H. wird die Reflexion der Eigenschaften eines gleichseitigen Dreiecks angeregt, wofür begriffliches Denken erforderlich ist. Der Lehrer geht hierauf nicht weiter ein, er benennt lediglich die Eigenschaft des Dreiecks nochmals.

Die Bearbeitung von Aufgabe 7 ist aufgrund der geringen Daten nur schwer einzuschätzen. Es ist aber davon auszugehen, dass diese Aufgabe ähnlich wie Aufgabe 6 sehr verfahrensbetont bearbeitet wurde. Die wenigen Ausschnitte deuten auf das Vorherrschen prozeduralen Denkens hin. Vermutlich haben die Schülerinnen und Schüler jeweils nur mithilfe des Zugmodus durch Probieren und Messen der Seiten herausgefunden, dass es sich um ein gleichseitiges Dreieck handeln muss, damit die Mittelpunkte von Um- und Inkreis identisch sind. Dies scheint durchaus im Sinne des Lehrers zu sein. Er scheint das Potenzial der Aufgabe zum Argumentieren und Modellieren nicht erkannt zu haben.

12.4 Analysen von Aspekten des fachdidaktischen Wissens, die sich in der Gesamtbetrachtung des Unterrichts zeigen

12.4.1 Umgang mit den Schülerinnen und Schülern

Reagieren auf Strategien

Der Lehrer greift mehrfach Strategien der Schülerinnen und Schüler als eigene Aufgabe wieder auf, indem die Schülerinnen und Schüler aufgefordert werden, die vorgeschlagenen Strategien zu überprüfen (siehe 12.3.4 und 12.3.6). Hierdurch wird die kognitive Selbstständigkeit der Lernenden ebenso wie die Reflexion des Lösungsvorschlags gefördert. Insbesondere fällt auf, dass der Lehrer auch falsche Lösungsvorschläge an der Tafel notiert. Diese lässt er einerseits in eigenen Aufgaben überprüfen (siehe 12.3.6) oder er reflektiert den falschen Lösungsvorschlag im Anschluss an die Erarbeitung der Lösung gemeinsam mit den Lernenden (Fynns Vorschlag in Abbildung 12.4, siehe 12.3.2). Allerdings findet in einem Fall die in Aussicht gestellt Überprüfung der Strategie mithilfe der dynamischen Geometriesoftware nicht statt (siehe 12.3.2). Außerdem weist der Lehrer mehrmals darauf hin, dass die von den Schülerinnen und Schülern vorgeschlagenen Strategien falsch sind und erläutert eigenständig das richtige Vorgehen (siehe z.B. 12.3.4).

Reagieren auf richtige Lösungen

Nur sehr selten fordert der Lehrer die Schülerinnen und Schüler zur selbstständigen Überprüfung einer richtigen Antwort auf. Meistens bestätigt er selbst die Richtigkeit der Lösung. Dabei wiederholt er die Schülerantwort oft in eigenen Worten und fügt häufig eigene Ergänzungen den Schülerantworten hinzu. Vielfach stellt er auch weiterführende Fragen, so dass ein gelenktes Unterrichtsgespräch entsteht. Der Lehrer achtet mehrfach darauf, dass alle Schülerinnen und Schüler die Antwort verstanden haben und bittet die Lernenden gegebenenfalls um die Wiederholung der Antwort. Manchmal fordert er sie auch zur näheren Erläuterung ihrer Antwort, beispielsweise zur Erklärung eines von ihnen verwendeten Begriffs, auf. Wiederholt sollen die Schülerinnen und Schüler ihre Antworten beispielsweise am Overhead-Projektor oder im Lehrer-PC visualisieren. Meistens nimmt der Lehrer die häufig auftretenden Visualisierungen der Schülerantworten aber selbst vor. Zweimal fordert er die Lernenden auf, einen vorgestellten Lösungsweg selbst auszuprobieren. Mehrfach verlangt der Lehrer Begründungen für die Schülerantworten und gibt sich dann mit sehr oberflächlichen Begründungen zufrieden. Er fördert aber das reflektierende und strukturierte Denken, da er wiederholt die Schülerinnen und Schüler zur Reflexion des Lösungsweges auffordert und das bisherige Vorgehen zusammenfasst. Außerdem weist er mehrmals auf alternative Lösungswege hin und fordert die Schülerinnen und Schüler teilweise auf, diese alternativen Lösungswege zu finden (siehe z.B. 12.3.5). Zweimal erkennt er eine richtige Schülerantwort nicht (siehe Wiederholung der Dreiecksarten und Gruppenarbeitsphase in 12.3.8).

Reagieren auf Fehler

Insgesamt treten im Unterricht sehr wenige Schülerfehler auf. Nur zweimal korrigiert der Lehrer einen Fehler direkt. Meistens gibt er keinen Kommentar zur Falschheit, sondern fordert die Schülerinnen und Schüler zur Präzisierung ihrer Antwort auf und ruft anschließend kommentarlos einen anderen Lernenden auf. Meistens wird der Fehler dann von den anderen Schülerinnen und Schülern korrigiert. Bei der Wiederholung der Dreiecksarten (siehe

12.3.8) regt der Lehrer mithilfe von Visualisierungen zunächst die Schülerinnen und Schüler zur selbstständigen Überprüfung der falsch genannten Eigenschaften eines spitzwinkligen Dreiecks an. Da die Lernenden die falsche Verwendung des Begriffs aber nicht erkennen, weist der Lehrer schlussendlich auf die Falschheit hin und erläutert die richtigen Eigenschaften eines spitzwinkligen Dreiecks selbstständig. Mehrfach wiederholt der Lehrer falsche Schülerantworten, zweimal mit fragendem Unterton, so dass er indirekt auf die Falschheit hinweist. Zweimal fragt der Lehrer auch nach Begründungen der falschen Antwort und regt die Lernenden so zur Reflexion des Lösungsweges an.

Reagieren auf Probleme und Schwierigkeiten

Treten im Unterricht Probleme oder Schwierigkeiten der Schülerinnen und Schüler auf, fordert der Lehrer sie häufig zur genauen Formulierung ihres Problems auf. Größtenteils fördert der Lehrer nun die Selbstständigkeit der Lernenden. Im Rahmen des Klassengesprächs (vor allem in der ersten Stunde) fordert er häufig andere Schülerinnen und Schüler zur Erläuterung des richtigen Vorgehens auf. In den Gruppenarbeitsphasen in der Doppelstunde weist er die Lernenden sehr oft an, sich Hilfe bei anderen Gruppen zu holen oder anderen Gruppen ihre Hilfe anzubieten. Häufig regt der Lehrer die Schülerinnen und Schüler zur Reflexion des bisherigen Vorgehens an und fördert so die selbstständige Überprüfung und das eigenständige Überwinden der Schwierigkeiten. Oft gibt der Lehrer aber auch direkte Hinweise oder erläutert direkt das weitere Vorgehen. Insbesondere in der zweiten Hälfte der Doppelstunde (siehe 12.3.8 und 12.3.9) fällt auf, dass die Schülerinnen und Schüler kaum noch zur gegenseitigen Unterstützung angeregt werden, stattdessen nimmt die direkte Hilfestellung des Lehrers deutlich zu. Des Weiteren hilft der Lehrer den Lernenden häufig durch weiterführende Fragen, die einer leichten Lenkung entsprechen, beim Überwinden der Probleme. Hierzu nutzt er auch wiederholt Visualisierungen (z.B. das Seil in Aufgabe 2) und Verbindungen zu früher Gelerntem (z.B. Einzeichnen des Inkreises bei Aufgabe 4).

12.4.2 Gebrauch verschiedener Repräsentationsformen

Der Lehrer nutzt sehr viele, auch unterschiedliche Visualisierungen, um Sachverhalte zu erläutern oder Schülerlösungen zu verdeutlichen (z.B. Mittelsenkrechte mit dem Seil, dynamische Geometriesoftware). Meistens werden die Visualisierungen durch ihn selbst vorgenommen, aber auch die Schülerinnen und Schüler werden zur Visualisierung ihrer Lösungen angeregt (z.B. Zeichnen des Umkreises bei Aufgabe 2). Im Interview erläutert er, dass er beispielsweise die Visualisierung der Mittelsenkrechten mit dem Seil ganz bewusst vorgenommen hat (siehe Seite 324).
In keiner der drei Unterrichtsstunden sind formale Repräsentationen zu beobachten. Da die Lernenden aber viele Zeichnungen, entweder mit Zirkel und Lineal oder mit dynamischer Geometriesoftware, selbst erstellen und auch das Vorgehen erläutern, werden fast alle Inhalte gleichzeitig sprachlich, ikonisch und enaktiv repräsentiert. Insbesondere stellt der Lehrer bewusst Wechsel und Verbindungen zwischen verschiedenen Repräsentationsformen her. Als Beispiel ist die Konstruktion der Mittelsenkrechte mit dem Seil zu nennen, die anschließend mit dem Geodreieck im Heft und auf Folie und später auch mit dynamischer Geometriesoftware gezeichnet wird, wobei der Lehrer explizit Verbindungen zwischen den Darstellungen herstellt (z.B. Eckpunkte gleich Schülerinnen und Schüler, siehe 12.3.2). Auch im Zusammenhang mit dynamischer Geometriesoftware betont der Lehrer, dass die Lernenden explizit zwischen der Darstellung im PC und der Konstruktion auf dem Papier Verbindungen

herstellen sollen (siehe 12.3.4). Außerdem betont er den Wechsel zwischen Sprache und Handlung, bzw. bildlicher Darstellung durch das Erläutern der Lösungsschritte (siehe 12.3.2).

12.4.3 Gebrauch von Begriffen

Der Lehrer bemüht sich weitgehend um die Verwendung von Fachsprache, was sich vor allem an der seltenen Kodierung umgangssprachlicher Begriffe zeigt. Er selbst benutzt meistens die korrekten Fachbegriffe und formuliert eher umgangssprachliche Schüleräußerungen in korrekte mathematische Fachsprache um oder fordert die Schülerinnen und Schüler auf, den zuvor umschriebenen Fachbegriff zu nennen. In der Planung nennt er die Verwendung von Fachbegriffen als Ziel und auch im Interview betont er, dass er die Verwendung von Fachsprache durch die Schülerinnen und Schüler fördert, indem er beispielsweise Merksätze von ihnen formulieren lässt.

> I [00:38:18.08]
>
> Lehrer: […] die Schüler selber auch ja mal formulieren müssen und dann konkrete Anweisungen geben, damit die dann auch lernen, dass denn die Verwendung von Fachvokabular dann da auch wichtig ist. Äh... deswegen versuch ich es halt auch häufig so zu machen, dass denn die Schüler selber auch so Vorschläge für Formulierungen dann halt vorgeben und wie die dann möglichst so auch an die Tafel dann anbringen.

Es fällt allerdings auf, dass sowohl die Lernenden als auch der Lehrer häufig den Begriff ‚Linie', anstelle von ‚Strecke', ‚Gerade' und ‚Seite' benutzten. Vereinzelt hat der Lehrer Probleme mit der umgangssprachlichen Verwendung mathematische Fachbegriffe, da er den Begriff ‚senkrecht' als umgangssprachliches Pendant zum Begriff ‚waagerecht' nicht erkennt und nur den Begriff ‚vertikal' als richtig anerkennt (siehe 12.3.2).
Darüber hinaus weist der Lehrer die Lernenden auf eine falsche Begriffsverwendung hin (z.B. Überleitung zur Gruppenarbeit, siehe 12.3.2). Den in dieser Stunde neu eigeführten Begriff der ‚Mittelsenkrechte' begründet er anhand der Eigenschaften (siehe 12.3.2). Allerdings werden zum Beispiel bei der Wiederholung der Dreiecksarten (siehe 12.3.8) nur teilweise die Eigenschaften er Begriffe reflektiert.

12.4.4 Herstellen von Verbindungen

Verbindungen zum Vorwissen

Der Lehrer stellt mehrfach durch kurze Wiederholungsphasen Verbindungen zum Vorwissen her, indem jeweils die Themen der vorangegangenen Stunde zu Beginn der Unterrichtsstunden wiederholt werden. Außerdem stellen der Hinweis auf die bereits bekannte Reduktion auf ein Teilproblem als Problemlösestrategie bei Aufgabe 2, die Wiederholung der Dreiecksarten und die Wiederholung des Verfahrens zum Zeichnen eines Umkreises im Plenum bei Aufgabe 6 Verbindungen zum Vorwissen dar, die als Hilfestellung für die Bearbeitung der Aufgaben dienen. Der Lehrer wählte beispielsweise die Wiederholung der Dreiecksarten ganz bewusst aus, um das Vorwissen zu aktivieren:

> I [00:30:15.19]
>
> Lehrer: Und äh... ja ich dachte so eine kleine Wiederholung zu Anfang, dass man nochmal sagt: Hier äh, wie hieß denn die, welche Eigenschaften haben die und so. Ist ganz gut, weil... ja das brauchen die auch nochmal so als frisches Wissen, um die anderen Aufgaben dann auch zu bearbeiten.

Auch die vom Lehrer eingesetzte Visualisierung der Mittelsenkrechten mithilfe des Seils stellt eine Verbindung zu früher Gelerntem dar, da diese Hilfestellung bereits für die Erarbeitung der Winkelhalbierenden verwendet wurde.

Bei der Betreuung der Gruppenarbeiten weist der Lehrer mehrfach als Hilfestellung auf früher Gelerntes, insbesondere auf bereits gelernte Verfahren, hin (z.B. Einzeichnen des Inkreises mit Hilfe der Orthogonalen bei Aufgabe 4). Insbesondere erinnert er einen Schüler an den von ihm in der Vergangenheit verwendeten Satz des Thales und verhilft den Schülerinnen und Schülern so zu einer möglichen Begründung der Tatsache, dass der Umkreismittelpunkt bei rechtwinkligen Dreiecken immer auf dem Rand des Dreiecks liegt.

Inhaltliche Verbindungen

Innerhalb eines Stoffgebietes

Durch die Wahl der Aufgaben werden intensive Verbindungen zwischen den Eigenschaften und Konstruktionsmöglichkeiten von Winkelhalbierenden und Mittelsenkrechten hergestellt. Beide Begriffe werden mit demselben Verfahren erarbeitet (Seil) und im Rahmen des Unterrichts werden die Eigenschaften dieser beiden Begriffe immer wieder voneinander abgegrenzt. Es wird beispielsweise sehr deutlich herausgestellt, dass die Winkelhalbierenden jeweils denselben Abstand vom Rand eines Dreiecks haben, während die Mittelsenkrechten gleichweit von den Eckpunkten entfernt sind (siehe 12.3.2). Durch die zusätzliche Aufforderung bei Aufgabe 5 zum Entdecken von Konstellationen, in denen der Lösungsvorschlag funktioniert, und durch die Aufgabe 7 wird insbesondere erarbeitet, wann die Mittelsenkrechten mit den Winkelhalbierenden übereinstimmen. Dies wurde im Unterricht aber nicht herausgestellt (siehe 12.3.8 und 12.3.9). Durch die Aufgaben 3 und 4 werden insbesondere Verbindungen zwischen den Eigenschaften eines Kreises und den Eigenschaften der Mittelsenkrechten, bzw. der Winkelhalbierenden, hergestellt. Allerdings werden diese Verbindungen im Unterricht nicht deutlich gemacht. Des Weiteren werden durch die Wiederholung der Dreiecksfamilie und die Aufgaben 6 und 7 inhaltliche Verbindungen zwischen den Eigenschaften von Dreiecken und den Eigenschaften der Winkelhalbierenden und der Mittelsenkrechten, bzw. des In- und Umkreises, hergestellt. Der Lehrer erwähnt diese inhaltlichen Verbindungen im Interview aber nicht.

Zwischen verschiedenen Stoffgebieten

Es werden keine Verbindungen zwischen verschiedenen Stoffgebieten hergestellt.

Weitere Verbindungen

Die Aufgaben 3, 4 und 5 basieren auf Schülerideen aus der Bearbeitung von Aufgabe 2, so dass der Lehrer explizite Verbindungen zwischen den Aufgaben hergestellt hat. Der Lehrer plante, durch die Bearbeitung der zur Aufgabe 2 sehr ähnlichen Aufgabe ‚Physik-Referat' (siehe Abbildung 12.8) einerseits das Verfahren zur Konstruktion des Umkreises zu wiederholen, andererseits aber auch eine Diskussion anzuregen, dass ein Treffpunkt außerhalb des Dreiecks nicht immer sinnvoll ist (siehe 12.3.3 und 12.3.7). Hierdurch hätte der Lehrer einerseits Bezüge zur Realität und zur Aufgabe 2 hergestellt, andererseits hätte er die Aufgabe 6 motiviert, sodass die Aufgaben insgesamt sehr schön miteinander verbunden wären. Da die Aufgabe Physik-Referat übersprungen wird, tritt ein gedanklicher Bruch innerhalb der Doppelstunde auf.

Des Weiteren stellt der Lehrer Verbindungen zwischen den Repräsentationsformen her, da er beispielsweise bei der Konstruktion der Mittelsenkrechten mehrmals an die Visualisierung der Mittelsenkrechten mithilfe des Seils und die Position der Schülerinnen und Schüler in dieser Situation erinnert (siehe 12.3.2). Durch die Verwendung der dynamischen Geometriesoftware möchte der Lehrer bewusst Verbindungen zwischen der Konstruktion mit der Software und dem Zeichnen mit Zirkel und Lineal herstellen (siehe 12.4.2).

12.4.5 Ziele

Inhaltsbezogene Ziele

Der Lehrer nennt als inhaltliches Ziel für die erste Unterrichtsstunde vor allem die Eigenschaften der Mittelsenkrechten und des Schnittpunktes der Mittelsenkrechten, aber auch das Zeichnen von Winkelhalbierenden und die Bestimmung des Inkreismittelpunktes. Er gibt in der Planung auch die entsprechenden Stellen im Kerncurriculum an.

Planung:
- Besprechung der HA (Zeichnung von Winkelhalbierenden, Bestimmung des Inkreismittelpunktes)
- Eigenschaften der Mittelsenkrechten und des Schnittpunktes der Mittelsenkrechten (lt. KC: „kennen Höhen, Mittelsenkrechten...als besondere Linien im Dreieck“)

Der Lehrer zeigt hier, dass er in der Planung das Wissen über das Kerncurriculum anwenden kann. Das hier benannte Ziel scheint im Unterricht erreicht worden zu sein, wobei aber vor allem prozedurales Wissen und Faktenwissen aufgebaut wurde.
Für die zweite Unterrichtsstunde führt der Lehrer nicht mehr die entsprechenden Stellen im Kerncurriculum auf, er benennt lediglich die verschiedenen Aufgaben, die Wiederholung der Dreiecksfamilie und das Erkennen verschiedener Eigenschaften des Um- und Inkreises bezüglich verschiedener Dreiecksarten als inhaltsbezogene Ziele.

Planung:
- Kiras Vorschlag (Zeichnung nur mit Zirkel und Lineal) nachgehen
- Gabis Vorschlag überprüfen: Mittelpunkte der Seiten bilden ein Dreieck und davon wird der Inkreismittelpunkte genommen
- Familie der Dreiecke wiederholen
- Eigenschaften von Umkreis- und Inkreismittelpunkt bzgl. verschiedene Dreiecksarten

Es werden hier lediglich die Aufgaben aufgelistet, die damit verbundenen Ziele werden nicht deutlich benannt.
Im Interview beschreibt der Lehrer detailliert, dass die Schülerinnen und Schüler die Mittelsenkrechte und Winkelhalbierende als Summe verschiedener Punkte mit denselben Eigenschaften erkennen sollten:

I [00:08:23.12]
Lehrer: […] die Mittelsenkrechte oder die Winkelhalbierende oder generell geometrische Figuren auch als Summe von verschiedenen Punkten […] erkennen und diese Punkte haben dann alle die gleichen Eigenschaften und dann kann man das denn auch einfach so machen, man zeichnet einfach nur zwei und kann dann da eine Linie durch zeichnen und so. […] und wenn es halt geklappt hat... ja sollten die dann auch die Erkenntnisse haben, dass man nicht unbedingt ein Geodreieck braucht, um eine senkrechte Linie zu zeichnen oder um ähm... Winkelhalbierende zu zeichnen.

Es ist fraglich, ob den Schülerinnen und Schülern die Konstruktion über zwei Punkte klar geworden ist, da die einzelnen Verfahren zur Konstruktion der Mittelsenkrechten und Winkelhalbierenden nicht begründet und reflektiert wurden.
Darüber hinaus benennt der Lehrer im Interview das Üben von Konstruktionen mithilfe der dynamischen Geometriesoftware als inhaltsbezogenes Ziel. Dieses Ziel scheint erreicht zu sein, da insbesondere für die Verwendung des Zugmodus die einzelnen Funktionen (z.B. Schnittpunkte zwischen Geraden und Kreisen) reflektiert werden. Außerdem erläutert der das Ziel, dass die Schülerinnen und Schüler Verbindungen zwischen der Konstruktion mit

dynamischer Geometriesoftware und dem Zeichnen mit Zirkel du Geodreieck erkennen sollen. Diese Verbindungen macht der Lehrer im Unterricht aber nicht explizit, so dass fraglich ist, ob dieses Ziel erreicht wurde.

Prozessbezogene Ziele

Der Lehrer führt in der Planung folgende prozessbezogene Ziele an:

Planung:

- Problem lösen und Mittelsenkrechte zeichnen können (lt. KC:"beschreiben und erzeugen...Mittelsenkrechte...als Ortslinien", „wenden Eigenschaften von Ortslinien zur Lösung von Sachproblemen an", „konstruieren mit Zirkel, Geodreieck")
- Mit DGS konstruieren
- Fragestellungen verstehen und untersuchen
- Fachbegriffe anwenden können

Auch hier stellt er für die erste Unterrichtsstunde Verbindungen zum Kerncurriculum her, in der Planung der zweiten Unterrichtsstunde fehlen diese Bezüge. Dies lässt darauf schließen, dass der Lehrer nicht durchgehend das Kerncurriculum zur Planung seines Unterrichts heranzieht. Es ist zu vermuten, dass er die Bezüge in der ersten Stunde aufgrund der Erhebung der schriftlichen Unterrichtsplanung im Rahmen dieser Untersuchung hergestellt hat.
Im Interview geht der Lehrer auf die prozessbezogenen Ziele nur am Rande ein, indem er beispielsweise die Förderung der Problemlösekompetenz durch die Reduktion auf ein Teilproblem (siehe 12.3.2) benennt.

12.5 Aspekte kognitiver Aktivierung

Der Lehrer betont im Interview mehrfach die Bedeutung der kognitiven Aktivierung. Er erläutert beispielsweise, dass er die Aufgabe 2 ausgewählt hat, damit die Schülerinnen und Schüler die Eigenschaften der Mittelsenkrechten nicht nur auswendiglernen (siehe 12.3.2). Im Unterricht lässt er die Lernenden verschiedene Lösungsvorschläge formulieren und direkt oder später anhand eigener Aufgaben (siehe z.B. 12.3.6) selbstständig Überprüfen. Insbesondere werden auch falsche Lösungswege teilweise ausführlich untersucht, aber nur oberflächlich reflektiert (siehe z.B. 12.3.2).
Auch bei den Bearbeitungen der anderen Aufgaben regt der Lehrer die Schülerinnen und Schüler immer wieder zur selbstständigen Überprüfung ihrer Lösungen, insbesondere beim Auftreten von Fehlern oder Problemen, an. Dabei weist er oft darauf hin, dass sich die Schülerinnen und Schüler gegenseitig helfen sollen. Im Interview erläutert er, dass die Schülerinnen und Schüler durch das nochmalige Erklären bei der gegenseitigen Unterstützung die Inhalte besser verstehen, bzw. eigenständig erkennen können, an welchen Stellen sie noch Probleme haben. Außerdem scheint er der Meinung zu sein, dass die Inhalte bei nochmaliger Erklärung besser verinnerlicht werden:

> I [00:38:54.26]
> Lehrer: […] wenn dann Schüler halt gezwungen sind, dann Sachverhalte nochmal zu verbalisieren, zu erklären und so weiter. Dann fällt denen auch eher auf, dass sie dann irgendwelche Sachen vielleicht noch nicht ganz so verstanden haben. Äh... und ich denke die einzelnen Sachverhalte, die bringen sich dann auch besser ein, wenn sie dann nochmal erklärt werden.

Hier zeigt sich, dass der Lehrer über Wissen über die Bedeutung von Erklärungen von Lösungswegen und die selbstständige Überprüfung verfügt.
Der Lehrer begründet die gegenseitige Unterstützung der Lernenden aber auch mit arbeitsökonomischen Argumenten, da er darauf hinweist, dass er grade bei der Arbeit mit dem Computer oder auch mit dem Taschenrechner nicht alle einzelnen Fragen beantworten

kann, so dass es hier notwendig ist, dass die Schülerinnen und Schüler sich gegenseitig helfen (siehe 12.3.5 und 12.3.6). Hierdurch wird nur scheinbar die kognitive Selbstständigkeit der Lernenden gefördert, da ein Großteil der Schülerinnen und Schüler den Lösungsweg nun nicht mehr selbst erarbeiten muss. Häufig greift der Lehrer selbst stark lenkend ein, wohingegen leichte Lehrerlenkung eher selten zu beobachten ist. Er gibt beispielsweise bei Aufgabe 3 einer Gruppe den kompletten Lösungsweg schon während der Bearbeitungsphase vor (siehe 12.3.4) oder erläutert in der Unterbrechung der Gruppenarbeitsphase von Aufgabe 6 die Konstruktion des Umkreises im Detail (siehe 12.3.8). Insbesondere gegen Ende der Doppelstunde werden die Phasen starker Lehrerlenkung häufiger und länger. Der Lehrer kann dies aber im Interview reflektieren (siehe 12.3.9).

Obwohl die Aufgaben bis auf Aufgabe 1 alle Aufgaben als begriffliche Modellierungs- und problembezogene Aufgaben eingeschätzt wurden, steht bei der Bearbeitung der Aufgaben überwiegend das prozedurale Denken im Vordergrund. Dies wird vor allem deutlich, weil der Lehrer kaum Begründungen von den Schülerinnen und Schülern einfordert oder sehr oberflächliche Argumentationen als Begründung akzeptiert. Auch die Lernenden begründen ihre Antworten sehr selten eigenständig, was darauf schließen lässt, dass im Unterricht keine durchgehende Begründungskultur aufgebaut wird. Dies zeigt sich vor allem daran, dass das Potenzial der Aufgaben zum Argumentieren so gut wie nicht genutzt wird, obwohl der Lehrer die Schülerinnen und Schüler häufig zur Reflexion des Lösungsweges auffordert. Auch die Reflexion beschränkt sich aber häufig auf die durchgeführten Prozeduren, vereinzelt werden aber auch die Eigenschaften der mathematischen Gegenstände reflektiert (z.B. die Eigenschaften der Mittelsenkrechten nach der Erarbeitung mit dem Seil, siehe 12.3.2).

Das begriffliche Denken wird vor allem im Vorfeld der Aufgabenbearbeitung angesprochen, beispielsweise bei der Sammlung verschiedenere Lösungswege zu Aufgabe 2 oder bei der Wiederholung der Dreiecksarten (siehe 12.3.8). Mit diesen Wiederholungen und auch den Zusammenfassungen, die mehrfach im Unterricht zu beobachten sind, fördert der Lehrer insbesondere das strukturierte Denken.

12.6 Einschätzung des mathematischen Fachwissens anhand der Unterrichtsbeobachtungen

Eine Einschätzung des mathematischen Fachwissens anhand der Beobachtungen ist hier sehr schwer, da der Lehrer wenig Fachwissen zeigt. Hieraus kann aber nicht darauf geschlossen werden, dass er nicht über Fachwissen verfügt. Der Lehrer macht im Unterricht selbst keine fachlichen Fehler und baut die Aufgaben fachlich sinnvoll aufeinander auf. Auch die Fachsprache verwendet er korrekt und erkennt auch falsche Begriffsverwendungen bei den Schülerinnen und Schüler. Er kann die Begründung für den Schnittpunkt der Mittelsenkrechten (siehe geplante, nicht eingesetzte Aufgaben) erläutern, allerdings werden die Begründungen auch der anderen Aufgaben aus fachlicher Sicht nicht ausreichend im Unterricht eingefordert. Der Lehrer weist weder im Unterricht noch im Interview darauf hin, dass das Überprüfen einer Aussage mithilfe mehrerer Beispiele, wie es mithilfe der dynamischen Geometriesoftware schnell möglich ist, keinen Beweis für diese Aussage darstellt. Dies kann aber als ein Grundprinzip der Mathematik angesehen werden.

12.7 Zusammenfassende Interpretation und Einschätzung des fachdidaktischen Wissens

Nach einer Besprechung der Hausaufgabe, einer Übungsaufgabe zur Konstruktion des Inkreismittelpunktes, erarbeitet der Lehrer 5 gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern anhand einer anwendungsbezogenen Aufgabe die Konstruktion des Umkreises und insbesondere die Eigenschaften der Mittelsenkrechten. In der darauffolgenden Doppelstunde bearbeiten die Lernenden mithilfe dynamischer Geometriesoftware zunächst Aufgaben, die der Überprüfung von Schülerideen aus der vorangegangenen Stunde dienen. Dabei wird mithilfe der dynamischen Geometriesoftware insbesondere die Konstruktion der Mittelsenkrechten und der Winkelhalbierenden nur mit Zirkel und Lineal erarbeitet. In der zweiten Hälfte der Doppelstunde werden die verschiedenen Dreiecksarten wiederholt, woraufhin die Schülerinnen und Schüler vom Lehrer sogenannte „Forschungsaufgaben“ zum Themengebiet In- und Umkreis mithilfe der dynamischen Geometriesoftware bearbeiten.

Schülerbezogenes Wissen

Der Lehrer scheint großen Wert auf die kognitive Selbstständigkeit der Schülerinnen und Schüler zu legen. Er verfügt also offenbar über entsprechendes Wissen über konstruktivistische Lerntheorien (siehe 5.1.1). Dies führt dazu, dass der Lehrer die Schülerinnen und Schüler mehrfach selbstständig ihre Ergebnisse präsentieren lässt und die Lernenden häufig zur selbstständigen Überprüfung ihrer Lösungen auffordert. Besonders deutlich zeigt sich die Förderung der selbstständigen Überprüfung daran, dass der Lehrer bei der Erarbeitung der Eigenschaften der Mittelsenkrechten und der Konstruktion des Umkreises mehrere, auch falsche, Lösungsvorschläge notiert (siehe 12.3.2). Diese Lösungsvorschläge werden im weiteren Verlauf wieder aufgegriffen und teilweise ausführlich in eigenen Aufgabenstellungen untersucht (siehe 12.3.4 und 12.3.6). Außerdem regt der Lehrer die Schülerinnen und Schüler immer wieder zur gegenseitigen Unterstützung an. Dies begründet der Lehrer einerseits damit, dass er gar nicht allen Lernenden gleichzeitig helfen kann. Andererseits erläutert er, dass die Lernenden durch das gegenseitige Erklären die Inhalte besser verstehen und eigene Verständnisschwierigkeiten reflektieren können (siehe 12.5). Das Verweisen an andere Schülergruppen bei auftretenden Problemen führt aber nur teilweise zu kognitiver Selbstständigkeit, da zwar der Lehrer nicht lenkend eingreift, aber andere Schülerinnen und Schüler zur Vorgabe des Lösungsweges aufgefordert werden (siehe 12.3.5). Hier zeigen sich Mängel in der Umsetzung des schülerbezogenen Wissens.
Der Lehrer macht sich im Vorfeld des Unterrichts umfangreiche Gedanken über die Verknüpfung der Inhalte in den Köpfen der Lernenden und kann größtenteils die möglichen Lösungen und Probleme der Schülerinnen und Schüler benennen. Dies führt dazu, dass er sich schon bei der Planung passende, teilweise sehr umfangreiche Hilfestellungen überlegt. Beispielsweise dient das Seil in Aufgabe 2 (siehe 12.3.2) dazu, dass die Lernenden die Eigenschaften der Mittelsenkrechten direkt erfahren können und sich so später besser an die Eigenschaften erinnern können. Hier wird die bewusste Verknüpfung von schülerbezogenem Wissen und dem Wissen über das Verständlichmachen deutlich. Auch im Unterricht kann der Lehrer die Schülerantworten meistens richtig beurteilen und adäquate Hilfestellung geben. Allerdings geht er im Unterricht auf Probleme der Schülerinnen und Schüler manchmal nicht ein oder erkennt richtige Lösungsansätze nicht. Zeitweise entsteht sogar der Eindruck, dass der Lehrer die Gedankengänge der Schülerinnen und Schüler gar nicht nachvollziehen will, obwohl er explizit nach Vermutungen fragt (siehe z.B. 12.3.2). Dies reflektiert der Lehrer im Interview nicht. Er zeigt aber, dass er die Probleme der Schülerinnen und Schüler größten-

teils gut erläutern kann und somit das vorhandene schülerbezogene Wissen größtenteils nutzt.
Den Schwierigkeitsgrad der Aufgaben kann der Lehrer oft richtig einschätzen. Er erkennt im Interview aber selbst, dass er den Schwierigkeitsgrad und die Möglichkeiten der Lerngruppe zum Lösen der Aufgaben 3 und 4 falsch beurteilt hat und kann dies gut reflektieren. Er hat aber im Vorfeld des Unterrichts zu viele Aufgaben eingeplant, so dass mehrfach durch das Weglassen von Aufgaben gedankliche Brüche entstehen.

Wissen über das Verständlichmachen mathematischer Inhalte

Der Lehrer lässt die Lernenden meistens ihre Lösungen selbst erarbeiten und fördert die gegenseitige Unterstützung bei Problemen. Leichte Lehrerlenkung ist kaum zu beobachten. Teilweise wird aber das vermutlich vorhandene Wissen über konstruktivistische Lerntheorien nicht in Unterrichtshandlungen umgesetzt, da der Lehrer oft stark lenkend eingreift, indem er beispielsweise Schülerantworten um von den Schülern nicht genannte Aspekte ergänzt. Insbesondere gegen Ende der Doppelstunde sind auch längere Phasen starker Lehrerlenkung zu beobachten, in denen der Lehrer Inhalte völlig selbstständig ohne Schülerbeteiligung erklärt und sogar komplette Lösungswege, bzw. Lösungsansätze vorgibt. Im Interview reflektiert der Lehrer diese starken Hilfen aber kritisch, da er anmerkt, teilweise zu viele Hilfestellungen gegeben zu haben.
Obwohl der Lehrer zum Teil Begründungsaufgaben explizit mit eingeplant hat und teilweise auch Begründungen von den Schülerinnen und Schülern einfordert, akzeptiert er häufig sehr oberflächliche Begründungen. Es gelingt ihm nicht, auch tiefgreifende Begründungen einzufordern. Ebenso begründen die Lernenden nur vereinzelt selbstständig ihre Antworten, was auf eine fehlende Begründungskultur im Unterricht hinweist. Der Lehrer scheint zwar durchaus über Wissen über die Bedeutungen von Begründungen für das Lernen (siehe 5.2.3) zu verfügen, er hat dieses Wissen aber scheinbar nicht verinnerlicht, da es nicht in Unterrichtshandlungen umgesetzt wird.
Der Lehrer nimmt dagegen bewusst häufige Wechsel zwischen den verschiedenen Repräsentationsformen vor. Diese Wechsel und deren Bedeutung für das Lernen erläutert er auch im Interview, was auf umfangreiches Wissen über die Bedeutung verschiedener Repräsentationsformen schließen lässt (siehe 5.2.3). Fast alle Inhalte werden ikonisch, enaktiv und sprachlich repräsentiert. Allerdings treten keine formalen Repräsentationen auf. Der Lehrer benutzt häufig Visualisierungen, um seine eigenen Erläuterungen oder die Erläuterungen der Schülerinnen und Schüler zu verdeutlichen. Auch die Lernenden werden häufig zur Visualisierung ihrer Antworten aufgefordert. Des Weiteren verknüpft er die Visualisierungen teilweise mit Schülernamen, so dass die Lernenden bei den für die Darstellungswechsel nötigen Übersetzungen unterstützt werden (siehe z.B. 12.3.2). Das Wissen über die Bedeutungen der Wechsel zwischen Repräsentationsformen wird daher auch im Unterricht umgesetzt.
Im Zusammenhang mit der dynamischen Geometriesoftware achtet der Lehrer insbesondere darauf, dass die Konstruktionen der Schülerinnen und Schüler im Zugmodus ihre Eigenschaften beibehalten und reflektiert so das Verfahren der Konstruktion mit den Lernenden. Er weist aber auch auf Probleme mit der Software, vor allem in Zusammenhang mit den nötigen Übersetzungsprozessen, hin und reflektiert diese kritisch. Allerdings merkt er zwar an, dass Aufgaben 3 und 4 besser auf dem Papier hätten gelöst werden können und dass er diese Methode nicht gewählt hat, weil der Unterricht im Computerraum stattfindet. Die Begründung für diese Wahl der Repräsentationsform scheint aus didaktischer Sicht ungeeignet. Hier hat der Lehrer die Wahl der Methodik nicht immer passend getroffen. Insgesamt ist die

Begründung des Lehrers zum Einsatz der dynamischen Geometriesoftware aus fachlicher Sicht eher unzureichend, was auf fehlende Verknüpfung des Wissens über das Verständlichmachens und des inhaltsbezogenen Wissens schließen lässt.
Es zeigt sich darüber hinaus aber durchaus vielfältiges Wissen über kognitiv aktivierende Aspekte, die auch im Unterricht umgesetzt werden. So fördert der Lehrer durch die Besprechung auch falscher Lösungsvorschläge insbesondere die Reflexion der Lösungswege. Diese Reflexionen können im Unterricht immer wieder beobachtet werden, wobei aber häufig die Reflexion des Verfahrens und nicht der Eigenschaften einer Figur im Vordergrund steht. Außerdem fordert der Lehrer die Schülerinnen und Schüler auch zum Verallgemeinern ihrer Lösungen auf und mehrfach wird durch kurze Zusammenfassungen und Wiederholungen das strukturierende Denken gefördert. Das Wissen über die strukturierte Vernetzung von Wissen setzt der Lehrer auch um, indem er den Schülerinnen und Schülern noch unbekannte Fachbegriffe anhand der Eigenschaften erläutert, z.B. beim Begriff der Mittelsenkrechten (siehe 12.3.2). Er markiert markante Eigenschaften durch Unterstreichen oder eine andere Farbe an der Tafel. Insgesamt verwendet der Lehrer korrekte Fachsprache und fordert dies auch von den Schülerinnen und Schüler ein. Er weist sie auf falsche Begriffsverwendungen hin und erfragt bei umgangssprachlichen Umschreibungen die mathematischen Fachbegriffe.

Inhaltsbezogenes Wissen

Bis auf Aufgabe 1 sind alle vom Lehrer eingesetzten Aufgaben als begriffliche Modellierungs- und problembezogene Aufgaben einzuschätzen. Allerdings steht bei der Bearbeitung der Aufgaben das prozedurale Wissen stark im Vordergrund, so dass die meisten Aufgabenbearbeitungen als verfahrensbetont einzuschätzen sind, vor allem da die Verfahren häufig nicht begründet werden. Allerdings ergänzt der Lehrer dieses prozedurale Denken teilweise im Vorfeld der Bearbeitung durch die Besprechung mehrerer Lösungsvorschläge oder in der späteren Reflexion nicht passender Lösungswege und spricht so zeitweise auch das begriffliche Denken an. Beispielsweise in der Erarbeitungsphase zu den Eigenschaften der Mittelsenkrechten (siehe 12.3.2) und in der Wiederholung der Dreiecksarten (siehe 12.3.8) wird vor allem begriffliches Wissen angesprochen, es ist hier aber auch Faktenwissen nötig. Hier zeigt sich, dass der Lehrer alle drei Denkarten im Unterricht anspricht. Er scheint demnach durchaus über die Bedeutung begrifflichen Denkens und die Verknüpfung der Denkarten für den Wissensaufbau zu verfügen, allerdings zeigt der starke Fokus auf dem prozeduralen Denken während des Unterrichts große Mängel in der Umsetzung dieses Wissens.
Dass Potenzial der Aufgaben insbesondere zum mathematischen Argumentieren nutzt der Lehrer nicht aus, obwohl sich in Planung und Interview (beispielsweise durch die geplante, aber nicht eingesetzte Begründungsaufgabe, siehe 12.3.3) zeigt, dass er das Potenzial der Aufgaben zum mathematischen Argumentieren durchaus erkennt. Es ist aber fraglich, ob der Lehrer auch das Potenzial der Aufgaben der Doppelstunde (12.3.4 bis 12.3.9) erkennt, da er sich hierzu in keiner Weise äußert. Vermutlich erkennt er es nicht. Dies führt dazu, dass durch das bloße Ausprobieren verschiedener Möglichkeiten mithilfe der Software und die fehlenden Begründungen das Potenzial dieser Aufgaben zum innermathematischen Modellieren durchweg nicht genutzt wird. Der Lehrer macht den Schülerinnen und Schüler insbesondere nicht deutlich, dass das Ausprobieren von Beispielen kein Beweis im mathematischen Sinne ist. Es ist fraglich, ob dem Lehrer dies überhaupt selbst bewusst ist. Auch hier zeigen sich große Mängel in der Umsetzung des inhaltsbezogenen Wissens oder auch im vorhandenen inhaltsbezogenen Wissen.

Da der Lehrer sich die meisten Aufgaben selbst ausdenkt, bzw. Schülerideen zu Aufgaben weiterentwickelt, sind die Aufgaben größtenteils gut miteinander verbunden. Sie erfordern allesamt Wissen aus den Wissenseinheiten In- und Umkreis von Dreiecken. Auch an das Vorwissen der Schülerinnen und Schüler knüpft der Lehrer durch die mehrfachen Wiederholungsphasen an. Allerdings scheinen die inhaltlichen Verbindungen eher unbewusst hergestellt zu werden, da der Lehrer die Aufgabenauswahl eher selten mit inhaltlichen Argumenten begründet. Durch die fehlenden Begründungen im Rahmen der Lösung der Aufgaben werden mögliche inhaltliche Verknüpfungen zum Vorwissen nicht hergestellt (siehe 12.3.4 und 12.3.5). Auch zeigen sich mehrere inhaltliche Brüche im Unterrichtsgeschehen. Beispielsweise ist der Übergang zwischen Aufgabe 5 und Aufgabe 6 sehr ‚holprig', da der Lehrer die ursprünglich als Übergang eingeplante Aufgabe überspringt (siehe 12.3.7). Hier zeigen sich wieder Mängel in der Umsetzung des inhaltsbezogenen Wissens. Da der Lehrer sich kaum zur Bedeutung von Vernetzungen für das Lernen äußert (siehe 5.2.1) kann aber an dieser Stelle nicht ausgeschlossen werden, dass dieses Wissen gar nicht vorhanden ist.
Dagegen verfügt der Lehrer über Wissen über das Kerncurriculum und die Bildungsstandards, da er sowohl inhaltliche als auch prozessbezogene Ziele seiner Unterrichtsstunden in der Planung benennen und mit entsprechenden Stellen im Kerncurriculum belegen kann. Auch den Einsatz der dynamischen Geometriesoftware begründet er unter anderem mit der Forderung des Kerncurriculums zum Einsatz solcher Software, hier ist er sich aber nicht sicher, ob dies im Kerncurriculum tatsächlich gefordert ist. Das Wissen liegt hier scheinbar implizit vor, wird aber zur Planung des Unterrichts genutzt und passend umsetzt. Es zeigen sich aber Mängel in der Verknüpfung des inhaltsbezogenen Wissens mit dem schülerbezogenen Wissen, denn die vom Lehrer selbst ausgedachten Aufgaben sind teilweise etwas ‚unsauber' formuliert. Dies führt teilweise zu Unsicherheiten bei den Schülerinnen und Schülern bei der Aufgabenbearbeitung (siehe 12.3.4 und 12.3.5).

12.8 Vergleich mit den Ergebnissen des COACTIV-Tests

Im Testteil zum fachdidaktischen Wissen hat der Lehrer 28 Punkte von 37 empirisch zu erreichenden Punkten erzielt. Er liegt damit deutlich über dem Durchschnitt der gymnasialen Lehrerinnen und Lehrer, die an der COACTIV-Studie teilgenommen haben (vgl. Abbildung 2.3).
Im Testabschnitt zum schülerbezogen Wissen kann der Lehrer alle Schülerfehler und soweit gefordert auch deren mögliche Ursachen und geeignete Interventionen benennen. Auch die Begründung der verschiedenen Trapezformeln (siehe Abbildung 7.4) gelingt dem Lehrer gut. Dies bestätigt den Eindruck aus den qualitativen Analysen.
Dagegen kann der Lehrer nur die Hälfte der Aufgaben zum Verständlichmachen mathematischer Inhalte lösen. Er kann beispielsweise für die Aufgabe ‚Minus 1 mal minus 1' (siehe Abbildung 2.2) zwei unterschiedliche Erklärungsansätze benennen. Allerdings gelingt ihm bei der anderen Hälfte der Aufgaben keine geeignete Begründung oder Veranschaulichung der Sachverhalte. Diese Ergebnisse sind allerdings nicht konform zu den Ergebnissen der qualitativen Analysen, in denen der Lehrer viele geeignete Hilfestellungen anbietet.
Im Testabschnitt zum inhaltsbezogenen Wissen kann der Lehrer zu fast allen Aufgaben drei strukturell unterschiedliche Lösungen aufzeigen. Lediglich bei einer Aufgabe kann er nur einen Lösungsansatz nennen. Der Lehrer zeigt aber insgesamt sehr hohes Wissen in diesem Bereich. Dies deckt sich allerdings nicht mit den Einschätzungen aus den qualitativen Analysen, in denen deutlich wird, dass der Lehrer das inhaltliche Potenzial der Aufgaben häufig nicht erkennt und zum Teil sehr auf einen einzelnen Lösungsweg fokussiert ist.

Im Fachwissenstest erzielt der Lehrer 11 von 13 möglichen Punkten. Er liegt damit über dem Durchschnitt der gymnasialen Lehrerinnen und Lehrer, die an der COACTIV-Studie teilgenommen haben. Zwei Aufgaben konnte der Lehrer nicht richtig lösen. Bei einer dieser Aufgaben hat er aber zumindest einen geeigneten Ansatz aufschreiben können. Die andere Aufgabe, die deutlich über das Schulwissen hinausgeht, konnte er gar nicht bearbeiten. Auch dieses Ergebnisses ist mit Blick auf die qualitativen Analysen verwunderlich, da der Lehrer hier insbesondere auf die fachliche Tiefe der einzelnen Aufgaben nicht eingeht.

13 Ergebnisse

Die in den Kapiteln 8 bis 12 dargestellten Analysen der Lehrerinnen und Lehrer zeigen im Detail auf, wie die Lehrerinnen und Lehrer ihr fachdidaktisches Wissen bei der Planung, Durchführung und Reflexion von Unterricht nutzen und liefern damit zumindest für die hier dargestellten Fallbeispiele Antworten auf die erste Forschungsfrage (siehe 2.7). Es lassen sich aber insbesondere aus dem Vergleich der Nutzung des fachdidaktischen Wissens der verschiedenen Lehrerinnen und Lehrer Rückschlüsse über das Gelingen der Umsetzung des Wissens ziehen. Deshalb werden in diesem Kapitel einerseits die Ergebnisse der qualitativen Analysen der Lehrerinnen und Lehrer miteinander verglichen (siehe 13.1). Hier werden zum Einen verschiedene Handlungsmuster der Lehrerinnen und Lehrer beschrieben (13.1.1), es wird aber auch die Messung der Nutzung des fachdidaktischen Wissens mit den im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Instrumenten reflektiert. Hieraus können Antworten auf die 2. Forschungsfrage abgeleitet werden (13.1.2). In einem zweiten Abschnitt werden die Bearbeitungen des COACTIV-Tests näher in den Blick genommen (siehe 13.2). Es werden einerseits zusammenfassend die Testergebnisse der einzelnen Lehrpersonen mit den jeweiligen Einschätzungen anhand der qualitativen Analysen verglichen (13.2.1). Andererseits werden die Testergebnisse der fünf Lehrkräfte untereinander verglichen (13.2.2). Hieraus lassen zum Teil Rückschlüsse auf die Zusammenhänge zwischen dem fachdidaktischen Wissen, der Unterrichtsqualität und dem mathematischen Fachwissen ziehen, womit die 3. Forschungsfrage zumindest in Ansätzen beantwortet werden kann.

13.1 Vergleich der qualitativen Analysen

13.1.1 Handlungsmuster der Lehrerinnen und Lehrer

Jede Lehrperson für sich betrachtet scheint über feste Strukturen und Handlungsmuster zu verfügen, die sich durchgängig durch den Unterricht ziehen, auch wenn die Lehrerinnen und Lehrer zumindest punktuell von diesen Mustern abweichen.

Der Lehrer 1 baut viele Hilfestellungen schon in die Aufgabenformulierung ein und lässt die Lernenden dann scheinbar selbstständig arbeiten (siehe Kapitel 8). Er greift in Interaktion mit den Lernenden stark lenkend ein. Die von ihm gewählten Aufgaben ermöglichen zwar verschiedene Denkarten, das prozedurale Denken und die Aktivierung von Faktenwissen stehen jedoch stark im Vordergrund. Das Anforderungsniveau der Aufgaben ist insgesamt sehr niedrig, aber passend zum Leistungsstand der Schülerinnen und Schüler. Der Lehrer 1 stellt zwar viele Verbindungen zum Vorwissen und auch zu anderen Stoffgebieten her, diese bleiben aber teilweise sehr oberflächlich, da z.B. die Konzepte Flächeninhalt und Umfang nicht miteinander verbunden sondern nebeneinander verwendet werden.

Die Lehrerin 2 lenkt die Lernenden überwiegend in eine von ihr vorgegebene Richtung und bemüht sich meistens scheinbar nicht, die Gedankengänge der Lernenden nachzuvollziehen (siehe Kapitel 9). Dies zeigt sich vor allem an dem Fokus auf den von ihr vorgegebenen Arbeitsplan (siehe Abbildung 9.1). Die selbst gewählten Aufgaben erfordern alle ausschließlich prozedurales Denken und auch die beiden vorgegebenen Aufgaben, die vor allem begriffliches Denken ermöglichen, werden auf einer rein prozeduralen Ebene im Unterricht thematisiert. Insgesamt steht das prozedurale Denken damit sehr stark im Vordergrund. Die vielfältigen hergestellten Verbindungen zum Vorwissen und auch zu anderen Stoffgebieten bleiben bei der Lehrerin 2 ähnlich wie beim Lehrer 1 sehr oberflächlich, da die Konzepte Flä-

cheninhalt und Umfang nicht miteinander verbunden, sondern nebeneinander verwendet werden.
Der Lehrer 3 lässt die Lernenden kognitiv selbstständig und über mehrere Aufgaben hinweg die Idee eines Näherungsverfahrens entwickeln (siehe Kapitel 10). Dabei gibt der Lehrer 3 nur sehr selten, dafür aber stark lenkende Impulse. Dagegen zeigt der Lehrer bei den kurzen Wiederholungsphasen zu Beginn der Stunden und bei der Herleitung der Kreisfläche ein kleinschrittiges fragend-entwickelndes Unterrichtsgespräch. Ein zentrales Element des Unterrichts stellt bei beiden Vorgehensweisen das Vorstellen verschiedener Lösungswege und der Wechsel von Repräsentationsformen dar. Allerdings werden die Lösungswege nicht immer miteinander in Beziehung gesetzt, sondern ‚nebeneinander' betrachtet. Der Lehrer 3 stellt starke Verbindungen auf einer Tiefenstruktur zwischen den Aufgaben her, da die entwickelten Strategien in den folgenden Aufgaben wieder angewendet werden können. Es wechseln sich verfahrensbetonte und verständnisbetonte Unterrichtsphasen ab. Dabei steht jeweils das prozedurale Denken im Vordergrund und wird nur kurzzeitig im Anschluss an die Prozeduren durch begriffliches Denken ergänzt.
Der Lehrer 4 lässt die Lernenden überwiegend selbstständig verschiedene Beweisideen bearbeiten und lenkt auch in der Bearbeitung des anwendungsbezogenen Arbeitsblattes höchstens leicht (siehe Kapitel 11). Dabei werden die Schülerinnen und Schüler immer wieder zur Präsentation ihrer Lösungswege und zum Vergleich zwischen verschiedenen möglichen Lösungsansätzen angeregt. Hierdurch werden vielfältige Vernetzungen ermöglicht. Insgesamt ist das Verhältnis zwischen begrifflich geprägten Begründungsaufgaben und Anwendungsaufgaben, die eher prozedurales Wissen erfordern, in den beobachteten Stunden sehr ausgeglichen. Der Lehrer 4 fordert im Unterricht viele Begründungen ein, es werden dabei aber durchweg nicht alle nötigen Begründungsschritte angesprochen. Diese scheint der Lehrer aufgrund des Leistungsniveaus der Lernenden aber bewusst auszulassen. Bei der Bearbeitung der spontan ausgewählten Beweise und Anwendungsaufgaben aus dem Buch weicht der Lehrer 4 allerdings leicht von diesem Muster ab, da vor allem kaum Begründungen angesprochen und wenige Verbindungen hergestellt werden.
Der Lehrer 5 fördert vor allem die gegenseitige Unterstützung der Lernenden, allerdings führt diese nicht immer zu kognitiver Selbstständigkeit (siehe Kapitel 12). Auch hat er sich im Vorfeld des Unterrichts mehrfach umfangreiche, aber passende Hilfestellungen überlegt, womit er die Gedankengänge der Lernenden leicht bis stark lenkt. Er lässt die Lernenden mehrfach Lösungsvorschläge präsentieren und vergleichen und stellt die Inhalte häufig auf mehreren Repräsentationsebenen dar. Zentral im Unterricht ist aber, dass der Lehrer 5 zwar immer wieder Begründungen einfordert, die Begründungen werden aber auf einer sehr oberflächlichen Ebene vom Lehrer akzeptiert. Dies führt dazu, dass die gewählten Aufgaben, die vor allem begriffliches Denken erlauben, überwiegend auf einer rein prozeduralen Ebene bearbeitet werden. Das Prozedurale Wissen steht stark im Vordergrund, wird aber mehrmals zu Beginn der Aufgabenbearbeitung bei der Sammlung von Lösungsvorschlägen durch begriffliches Denken ergänzt. Gegen Ende des Unterrichts gerät der Lehrer 5 scheinbar unter Zeitdruck und weicht von diesem Muster ab, da er insbesondere stärkere Hilfestellungen anbietet.
Die hier erkennbaren Muster im Handeln der Lehrerinnen und Lehrer stellen Handlungsschemata nach Tenorth (2006) dar (siehe 4.4). Diese integrieren insbesondere das Wissen der Lehrerinnen und Lehrer, wie es in den vorausgegangenen Kapiteln für die einzelnen Lehrpersonen dargestellt wurde. Damit lassen sich auch die punktuellen Abweichungen von den generell zu beobachtenden Mustern erklären, da die Handlungsschemata in ihrer Definition nach Tenorth nicht durchgängig in allen Situationen angewendet werden.

Es bestätigen sich die bei Kleinknecht (2010) zusammengefassten Befunde verschiedener Studien (unter anderem Befunde der TIMS-Studie, siehe 2.2), die zeigen, dass Hauptschullehrer eher die Differenzierung und authentische Situationen bei der Planung von Unterricht fokussieren und den Unterricht verstärkt lenken. Aspekte kognitiver Aktivierung werden im Hauptschulunterricht deutlich seltener berücksichtigt, als an anderen Schulformen (Kleinknecht, 2010). Außerdem wird deutlich, dass sich der von Hiebert und Lefevre (1986) beschriebene Fokus auf das prozedurale Denken und die Vernachlässigung begrifflichen Denkens im Unterricht der meisten beobachteten Lehrpersonen (außer Lehrer 4) wiederfinden lässt.
Des Weiteren zeigt der Vergleich der Handlungsschemata der im Rahmen dieser Arbeit beobachteten Lehrer, dass zwar jeder Lehrer für sich Muster entwickelt hat, dass sich aber kaum Gemeinsamkeiten in den Mustern dieser 5 Lehrerinnen und Lehrer zeigen. Es ist insbesondere zu vermuten, dass sich bei der Betrachtung eines anderen Stoffgebietes auch andere Handlungsmuster der Lehrerinnen und Lehrer zeigen können (vgl. 7.3.2). Dies unterstreicht das Problem, dass es sehr schwer ist, ein einheitliches Maß für die Expertise von Lehrpersonen zu finden.

13.1.2 Messung der Nutzung des fachdidaktischen Wissen im Rahmen dieser Arbeit

Im Rahmen dieser Arbeit wurde ein umfangreiches Untersuchungsinstrument entwickelt, welches einerseits zur Erfassung des gesamten Prozesses der didaktischen Strukturierung von Unterricht eine Kombination mehrerer Methoden bei der der Datenerhebung enthält (siehe 7.3). Andererseits werden auch bei der Auswertung der Daten vielfältige Analyseschritte miteinander in Beziehung gesetzt (7.4). Dies stellt einen Versuch dar, das fachdidaktische Wissen der Lehrerinnen und Lehrer als einen wichtigen Bestandteil ihrer Expertise (siehe 3.2) bei der Umsetzung in der Praxis näher zu untersuchen. Somit kann zumindest in Ansätzen eine Antwort auf die 2. Forschungsfrage gefunden werden. Insbesondere wurden bei den qualitativen Auswertungen Kategorien zu den drei Komponenten des fachdidaktischen Wissens (siehe 6.2.1) und zur kognitiven Aktivierung (siehe 6.2.2) integriert, wobei die von den Lehrerinnen und Lehrer eingesetzten Aufgaben als Indikatoren dienten (siehe 6.1).

Die Kategorien zum fachdidaktischen Wissen

Obwohl schon in der Literatur zu den in Kapitel 2 genannten Untersuchungen mehrfach darauf hingewiesen wird, dass sich die einzelnen Komponenten des fachdidaktischen Wissens (siehe 4.1) in der Unterrichtspraxis nicht trennen lassen, hat sich diese Unterscheidung im Rahmen der qualitativen Analysen bewährt. Es konnten gezielt die einzelnen Komponenten und insbesondere deren Zusammenwirken bei der didaktischen Strukturierung von Unterricht untersucht werden. Durch den Vergleich von schriftlicher Unterrichtsplanung und Interviewaussagen der Lehrerinnen und Lehrer mit dem beobachteten Unterricht konnten einerseits Rückschlüsse auf das vorhandene Wissen gezogen werden, andererseits konnte die Umsetzung des Wissens im Unterricht analysiert werden. Es hat sich gezeigt, dass der erfahrene Gymnasiallehrer 4 deutlich die drei Komponenten des fachdidaktischen Wissens bei der didaktischen Strukturierung verknüpft, während die unerfahrenen Gymnasiallehrer 4 und 5 eher weniger Verknüpfungen dieser drei Wissenskomponenten zeigen. Beim Lehrer 5 sind zum Teil auch deutliche Mängel in der Verbindung der drei Komponenten zu sehen. Die beiden Hauptschullehrer 1 und 2 zeigen insgesamt eher keine Verknüpfungen der drei Wissenskomponenten.

Außerdem gelingt es den 3 Gymnasiallehrern deutlich besser, ihr vorhandenes Wissen zu artikulieren, als dies bei den beiden untersuchten Hauptschullehrern der Fall ist. So kann vor allem der Lehrer 4 ausführlich die Auswahl verschiedener Beweise mit fachdidaktischen und fachwissenschaftlichen Argumenten begründen.
Teilweise lassen sich aus den Kategorien zum fachdidaktischen Wissen direkt Rückschlüsse auf das vorhandene Wissen bzw. auf Defizite im Wissen ziehen. Beispielsweise zeigt sich, ob die Lehrerinnen und Lehrer im Vorfeld des Unterrichts mögliche Schülerfehler und -probleme richtig einschätzen können und ob sie die Gedankengänge der Lernenden nachvollziehen können. Auch die Verwendung mathematischer Fachbegriffe lässt sich direkt analysieren. Allerdings zeigen die Kategorien zum fachdidaktischen Wissen größtenteils zwar die Situationen, in denen sich fachdidaktisches Wissen zeigen kann, sie erlauben aber zum Teil noch keine Einschätzung der Qualität der Umsetzung des fachdidaktischen Wissens. Deshalb wurden in das Analyseinstrument Kategorien der kognitiven Aktivierung integriert (siehe 6.2.2).

Die Kategorien zur kognitiven Aktivierung

Die Kategorien der kognitiven Aktivierung haben sich als geeignet herausgestellt, um verschiedene Aspekte des Zusammenhangs zwischen dem fachdidaktischen Wissen und dem Handeln der Lehrpersonen im Unterricht einzuschätzen. Außerdem konnte die Unterrichtsqualität aus einer fachbezogenen Sicht beurteilt werden. Die kognitive Aktivierung dient

- der Einschätzung der Umsetzung des fachdidaktischen Wissen im Unterricht
- dem Aufdecken von Defiziten im fachdidaktischen Wissen
- dem Aufzeigen von Widersprüchen zwischen Wissen und Handeln
- der Unterscheidung zwischen Oberflächen- und Tiefenstruktur des Unterrichts.

Diese Aspekte werden im Folgenden einzeln anhand der vorliegenden Analysen erläutert.

Umsetzung des fachdidaktischen Wissens

Mithilfe der Kategorien zum fachdidaktischen Wissen in Kombination mit den Kategorien zur kognitiven Aktivierung kann vor allem für den Lehrer 4 die gelungene Umsetzung des fachdidaktischen Wissens an vielen Stellen aufgezeigt werden. So zeigen sich in den Reaktionen auf richtige Schülerantworten und Schülerfehler deutliche Aspekte der kognitiven Aktivierung, die vor allem zu einem konstruktiven Umgang mit Schülerantworten führen (siehe 11.7). Außerdem nutzt der Lehrer das Potenzial der eingesetzten Aufgaben insbesondere auch zum begrifflichen Denken aus. Er fordert viele Begründungen ein, auch wenn er aufgrund des Leistungsstandes der Schülerinnen und Schüler bewusst auf tiefergehende Begründungen verzichtet (siehe 11.7).
Beim Unterricht der Lehrer 3 und 5 sind die Kategorien der kognitiven Aktivierung geeignet, um im Detail aufzuzeigen, dass den Lehrern die Umsetzung des fachdidaktischen Wissens nur teilweise gelingt (siehe 10.7 und 12.7). Dies zeigt sich beim Lehrer 3 beispielsweise daran, dass er zwar viele verschiedene Lösungswege erläutern lässt. Diese werden aber nicht miteinander verglichen. Der Lehrer 5 fordert zwar teilweise Begründungen ein und plant sogar explizite Begründungsaufgaben ein, die Begründungen bleiben aber häufig sehr oberflächlich, was dem Lehrer scheinbar nicht bewusst ist. Des Weiteren fordert er bei Aufgaben, die für eine mathematisch richtige Lösung Begründungen erfordern, keinerlei Begründungen ein, sondern gibt sich mit Erläuterungen anhand eines Beispiels zufrieden. Es zeigen sich anhand der gewählten Kategorien durch fehlende kognitive Aktivierung teilweise Mängel in der Umsetzung des Wissens.

Bei den Lehrern 1 und 2 zeigen sich dagegen überwiegend Mängel in der Umsetzung des fachdidaktischen Wissens. Beide Lehrer erkennen beispielsweise das Potenzial der vorgegebenen Aufgaben zum begrifflichen Denken zumindest in Ansätzen, fokussieren im Unterricht aber auch im Zusammenhang mit diesen Aufgaben fast ausschließlich prozedurales Denken (siehe 8.7 und 9.7).
Die Kombination der Kategorien zum fachdidaktischen Wissen und zur kognitiven Aktivierung eignet sich aber nicht nur für eine generelle Einschätzung der Umsetzung des fachdidaktischen Wissens. Sie ermöglichen auch im Detail das Aufzeigen einzelner Situationen, in denen entgegen des überwiegenden Eindrucks das Wissen punktuell genutzt bzw. nicht genutzt wird. Der Lehrer 1 kann zum Beispiel zumindest teilweise sein Wissen über die Bedeutung verschiedener Repräsentationsformen umsetzten, indem er beispielsweise für die leistungsschwächste Gruppe auch Material zum Handeln und Visualisieren der Aufgabenstellung anbietet. Der Lehrer 4 greift dagegen zumindest kurzzeitig unbewusst stark lenkend ein.

Defizite im Wissen

Die Kategorien zur kognitiven Aktivierung decken nicht nur Mängel in der Umsetzung, sondern auch Defizite im vorhandenen fachdidaktischen Wissen auf. Die Lehrerin 2 zeigt beispielsweise überwiegend, dass sie ihr Wissen nicht nur nicht umsetzen kann, sondern dass das entsprechende Wissen überhaupt nicht vorhanden zu sein scheint (siehe 9.7). Die Lehrerin 2 kann beispielsweise die prozessbezogenen Kompetenzen der Bildungsstandards zitieren, es gelingt ihr jedoch nicht, diese in eigenen Worten zu beschreiben und auch im Unterricht spiegeln sich kaum Elemente der prozessbezogenen Kompetenzen wider. Dies zeigt, dass das Wissen nicht verinnerlicht wurde.

Widersprüche zwischen Wissen und Handeln

Auch Widersprüche zwischen dem fachdidaktischem Wissen und dem Handeln der Lehrpersonen im Unterricht können anhand der Kategorien zur kognitiven Aktivierung aufgezeigt werden. So betont der Lehrer 1 zwar die Bedeutung der kognitiven Selbstständigkeit für das Lernen, was darauf schließen lässt, dass er durchaus über entsprechendes fachdidaktisches Wissen verfügt. Die Gestaltung der Arbeitsblätter mit vielen Hilfestellungen ermöglicht aber kein *kognitiv* selbstständiges Arbeiten der Schülerinnen und Schüler (siehe 8.7). Außerdem lenkt der Lehrer 1 in Interaktion mit den Lernenden überwiegend sehr stark, kann dies aber nicht immer reflektieren.

Unterscheidung zwischen Oberflächen- und Tiefenstruktur des Unterrichts

Des Weiteren ermöglichen die Kategorien zur kognitiven Aktivierung eine Unterscheidung zwischen einer Oberflächen- und einer Tiefenstruktur des Unterrichts (vgl. Kunter & Voss, 2011). Auf den ersten Blick scheint beispielsweise der Unterricht des Lehrers 3 aufgrund großer Unruhe in der Klasse und häufigen Störungen durch die Schülerinnen und Schüler von eher niedriger Qualität zu sein. Die qualitativen Analysen zeigen aber eine Vielzahl von Elementen kognitiver Aktivierung im Unterricht, woraus auf eine erhöhte Unterrichtsqualität zumindest in der Dimension der kognitiven Aktivierung geschlossen werden kann (vgl. Kapitel 5). Der Lehrer 5 scheint dagegen auf einer oberflächlichen Ebene betrachtet viele Begründungen von den Schülerinnen und Schülern einzufordern. Die detaillierten Analysen decken aber auf, dass das Begründungsniveau dennoch sehr niedrig ist und ein Großteil der möglichen Begründungen nicht angesprochen wird.

Aufgaben als Indikatoren

Die von den Lehrerinnen und Lehrern eingesetzten Aufgaben dienten in dieser Arbeit als Indikatoren für die Umsetzung des fachdidaktischen Wissens (siehe 6.1). Anhand der Aufgaben konnten sowohl die Interviews, als auch die Darstellungen der Analysen der einzelnen Lehrpersonen strukturiert werden. Außerdem lassen die Vergleiche zwischen den objektiven Kennzeichen der Aufgaben und deren Implementation im Unterricht vielfältige Rückschlüsse auf das fachdidaktische Wissen der Lehrerinnen und Lehrer und dessen Umsetzung bei der didaktischen Strukturierung zu. Insbesondere konnte beurteilt werden, ob die Lehrerinnen und Lehrer das Potenzial der Aufgaben erkennen. Dabei waren vor allem die Analysen der vorgegebenen Aufgaben (siehe 7.3.1) aufschlussreich: Es zeigt sich, dass der Lehrer 4 das Potential der vorgegebenen Aufgaben z.B. zum begrifflichen Denken erkennen und im Unterricht umsetzen kann, während der Lehrer 3 das Potenzial nur in Ansätzen umsetzt. die Lehrer 1 und 2 können zwar das Potenzial der vorgegebenen Aufgabe in Ansätzen benennen, dies wird aber in keiner Weise im Unterricht genutzt. Der Lehrer 5 lässt dagegen nicht erkennen, dass er das Potenzial der vorgegebenen Aufgabe zum begrifflichen Denken erkannt hat und setzt die Aufgaben auf einer rein prozeduralen Ebene im Unterricht um, sodass auch nicht auf implizites Wissen geschlossen werden kann.

13.1.3 Schlussfolgerungen

Die qualitativen Analysen zeigen, dass dem Lehrer 4 die Umsetzung seines Wissens in Unterrichtshandlungen und auch die Verknüpfung der drei Komponenten des fachdidaktischen Wissens deutlich besser gelingt als den anderen Lehrpersonen. Dies spiegelt sich auch in der Unterrichtsqualität in der Dimension der kognitiven Aktivierung wieder. Der Unterricht der Lehrer 3 und 5 enthält zwar auch viele Elemente kognitiver Aktivierung, es zeigen sich aber teilweise auch Mängel in der Unterrichtsqualität. Die Lehrer 3 und 5 stellen bei der didaktischen Strukturierung weniger Verknüpfungen zwischen den drei Komponenten des fachdidaktischen Wissens her als der Lehrer 4. Insgesamt gelingt ihnen die Umsetzung des Wissens nur teilweise. Die Lehrer 1 und 2 zeigen dagegen keine Verknüpfungen der drei Komponenten des fachdidaktischen Wissens, Defizite im vorhandenen fachdidaktischen Wissen und große Mängel in der Umsetzung. Es bestätigen sich hier die Ergebnisse von Lindmeier (2011), die zeigen konnte, dass sich die aktionsbezogenen Komponenten des fachdidaktischen Wissen, die vor allem im Unterricht umgesetzt werden, stark von den reflektiven Kompetenzen und dem Basiswissen, welche vor allem in der Unterrichtsplanung und in der Reflexion von Unterricht aktiviert werden, unterscheiden.

Des Weiteren deuten diese Ergebnisse der vorliegenden Untersuchung darauf hin, dass die Unterrichtsqualität in der Dimension der kognitiven Aktivierung umso höher ist, je mehr fachdidaktisches Wissen die Lehrpersonen in Unterrichtshandlungen umsetzten können. Außerdem scheint insbesondere die Verknüpfung der einzelnen Wissensfacetten, aber auch die Fähigkeit zur Artikulation des vorhandenen Wissens, die Unterrichtsqualität zu beeinflussen. Aufgrund der kleinen Stichprobe im Rahmen dieser Arbeit können diese Ergebnisse aber lediglich als begründete Hypothesen gewertet werden, die es in umfangreicheren Untersuchungen zu überprüfen gilt. Beispielsweise konnten auch Kersting et al. (2012) in einer methodisch ganz anderes angelegten Studie zeigen, dass vor allem die Umsetzung des vorhandenen Wissens zu höherer Unterrichtsqualität führt.

13.2 Der COACTIV-Test

13.2.1 Vergleich qualitative Analysen – COACTIV-Testergebnis

Fachdidaktisches Wissen

Der Lehrer 1 hat 7 Punkte im Testteil zum fachdidaktischen Wissen erhalten und liegt damit deutlich unter dem Durchschnitt der nicht-gymnasialen Lehrkräfte, die an der COACTIV-Studie teilgenommen haben. Dies ist konsistent zum Gesamteindruck des fachdidaktischen Wissens dieses Lehrers anhand der qualitativen Analysen. Der Lehrer 1 zeigt bei qualitativer Betrachtung der Testbearbeitung in allen drei Bereichen des fachdidaktischen Wissens (siehe 4.1.5) größtenteils unzureichende Aufgabenbearbeitungen, im Gegensatz dazu kann er aber im Rahmen der qualitativen Erhebung punktuell vorhandenes Wissen zeigen, indem er durchaus typische Schülerfehler benennt und erkennt. Hier zeigt sich, dass der COACTIV-Test für eine generelle Einschätzung über den Wissensstand dieses Lehrers geeignet scheint.
Die Lehrerin 2 hat im COACTIV-Test zum fachdidaktischen Wissen 20 Punkte erhalten und liegt damit deutlich über dem Durchschnitt der nicht-gymnasialen Lehrkräfte bei COACTIV. Allerdings ist dieses Ergebnis völlig inkonsistent mit den Ergebnissen der qualitativen Analysen, die vielfältige Defizite im Wissen der Lehrerin 2 aufzeigen. Dies könnte dadurch begründet werden, dass die Lehrerin 2 vor allem Mängel in den Aspekten des fachdidaktischen Wissens zeigt, die nicht im Rahmen des schriftlichen COACTIV-Tests erhoben wurden (z.B. Wissen über die Bildungsstandards, siehe 7.3.6). Die Lehrerin 2 zeigt im Rahmen der qualitativen Analysen, dass sie teilweise nur über oberflächliches Wissen verfügt, dieses aber nicht näher benennen kann. Der COACTIV-Test scheint damit nur in begrenztem Maße geeignet zu sein, um zwischen oberflächlichem Wissen, welches nicht in Unterrichtshandlungen umgesetzt werden kann, und verinnerlichtem Wissen der Lehrpersonen zu unterscheiden.
Der Lehrer 3 hat 20 Punkte im Testteil zum fachdidaktischen Wissen erzielt und liegt damit leicht unter dem Durchschnitt der gymnasialen Lehrkräfte, die an der COACTIV-Studie teilgenommen haben. Die Ergebnisse des COACTIV-Tests widersprechen dem Eindruck anhand der qualitativen Analysen aber in einem Punkt: Der Lehrer 3 erzielt im Testteil zum inhaltsbezogenen Wissen, in dem hauptsächlich dass Erläutern verschiedener möglicher Lösungswege gefordert ist, nur wenige Punkte. Im Unterricht legt er aber besonderen Wert auf das Vorstellen verschiedener Lösungswege und zeigt umfangreiches Wissen in diesem Bereich. Die qualitative Betrachtung der Testbearbeitung zeigt dementsprechend, dass der Lehrer im COACTIV-Test mehrfach zwar verschiedene, auch strukturell unterschiedliche Lösungsmöglichkeiten aufzählt und somit auch hier dieses Wissen zeigt, allerdings ist die Darstellung der einzelnen Lösungsmöglichkeiten sehr knapp formuliert. Aufgrund des relativ starren Kodierschemas, welches für eine gute Inter-Coder-Reliabilität im Rahmen einer quantitativen Erhebung unbedingt notwendig ist, konnte der Lehrer 3 hier keine Punkte zugewiesen bekommen. Um diese Widersprüche in folgenden Studien zu vermeiden, wäre ein deutlich höherer Aufwand für die Codierung nötig, worunter allerdings die Inter-Coder-Reliabilität leiden würde. Es gilt diese beiden Gesichtspunkte gegeneinander abzuwägen. Hier zeigen sich Grenzen des COACTIV-Tests auf, Aussagen über das tatsächlich bei diesem Lehrer vorhandene Wissen zu treffen.
Der Lehrer 4 hat im COACTIV-Test zum fachdidaktischen Wissen 22 Punkte erzielt und liegt damit im Durchschnitt der gymnasialen Lehrerinnen und Lehrer bei COACTIV. Der Lehrer 4 zeigt aber bei der didaktischen Strukturierung vielfältiges Wissen, weshalb der Eindruck der qualitativen Analysen etwas besser als durchschnittlich ist, wobei hier allerdings keine Vergleichsgrundlage vorliegt. Allerdings zeigt sich bei qualitativer Betrachtung der Testbearbei-

tungen, dass der Lehrer 4 eine Aufgabe im Testteil zum inhaltsbezogenen Wissen (verschiedene mögliche Lösungen benennen, siehe 7.3.6) etwas anders verstanden hat und mehrere unterschiedliche Lösungen zu einer ähnlichen Aufgabe aufgeschrieben hat. Hieran zeigt sich durchaus inhaltsbezogenes Wissen, auch wenn es im Rahmen des Kodierschemas nicht bewertet werden konnte. Insgesamt stimmen die Ergebnisse der qualitativen Analysen und des COACTIV-Tests für diesen Lehrer durchaus überein.
Der Lehrer 5 hat 28 Punkte im Testteil zum fachdidaktischen Wissen erzielt und liegt damit deutlich über dem Durchschnitt der gymnasialen Lehrkräfte bei COACTIV. Das Ergebnis dieses Lehrers ist aus zweierlei Sicht als problematisch einzuschätzen. Erstens zeigen sich bei der qualitativen Betrachtung der Testbearbeitungen Widersprüche zwischen den qualitativen Analysen und den Ergebnissen des COACTIV-Tests. Der Lehrer 5 hat im Testteil zum Wissen über das Verständlichmachen relativ wenige Punkte erzielt, im Unterricht zeigt er aber gerade in dieser Komponente des fachdidaktischen Wissens umfangreiche Kenntnisse. Dagegen zeigt der Lehrer im COACTIV-Test hohes inhaltsbezogenes Wissen, während die qualitativen Analysen eher auf niedriges inhaltsbezogenes Wissen schließen lassen. Dies könnte in dem zweiten hier sichtbar werdenden Problem begründet sein: Teilweise kann innerhalb der qualitativen Analysen nicht entschieden werden, ob das Wissen nicht vorhanden ist, oder nicht in Handlungen umgesetzt wird. Hier zeigt sich der große Gewinn der Kombination des COACTIV-Tests mit den qualitativen Analysen. Es wird dadurch deutlich, dass der Lehrer zwar über umfassendes Wissen verfügt, dass es ihm aber vor allem an der Umsetzung des Wissens bei der didaktischen Strukturierung mangelt, was zu einer Verminderung der Unterrichtsqualität in der Dimension der kognitiven Aktivierung führt. Der COACTIV-Test alleine ließe keine Aussagen über die Nutzung des fachdidaktischen Wissens zu und erfasst damit nicht alle für die didaktische Strukturierung von Unterricht entscheidenden Aspekte.

Fachwissen

Im Rahmen der qualitativen Analysen hat sich die Einschätzung des mathematischen Fachwissens durchweg als sehr schwierig herausgestellt. Soweit eine Einschätzung des vorhandenen Fachwissens vorgenommen werden konnte, sind die Einschätzungen konsistent mit den Ergebnissen des COACTIV-Tests. Hier zeigt sich insbesondere, dass der Fachwissenstest aus COACTIV die qualitativen Analysen gut ergänzt, um Zusammenhänge zwischen dem fachdidaktischen Wissen und dem mathematischen Fachwissen zu untersuchen. Die Ergebnisse hierzu werden in Abschnitt 13.2.2 näher erläutert.

Schlussfolgerungen

Sowohl für die Einschätzung des fachdidaktischen Wissens, als auch für die Einschätzung des mathematischen Fachwissens, scheint der COACTIV-Test die qualitativen Analysen gut zu ergänzen. Andererseits geben die qualitativen Analysen vertiefte Einblicke in die Ergebnisse des COACTIV-Tests. Es können vor allem die Grenzen dieser Untersuchung aufzeigt werden, die sich aber im Rahmen einer rein quantitativen Auswertung nur schwer ausweiten lassen. Es ist dabei aber zu berücksichtigen, dass der COACTIV-Test als großer Screening-Test angelegt war und nicht für eine Individualdiagnose konzipiert wurde.
Des Weiteren ergänzen die qualitativen Analysen die Ergebnisse des COACTIV-Tests um eine Einschätzung der Umsetzung des fachdidaktischen Wissens. Die beiden Ebenen der Untersuchung profitieren demnach gegenseitig voneinander, so dass bei einer erneuten Durchführung der COACTIV-Studie eine qualitative Ergänzung vielversprechend wäre. Wie eine solche Untersuchung gestaltet werden könnte, wird in Abschnitt 14.2 erläutert.

13.2.2 Vergleich der COACTIV-Testergebnisse der 5 Lehrer

Die bisherigen Ergebnisse beziehen sich auf den Vergleich zwischen dem Ergebnis des COACTIV-Tests und den qualitativen Analysen für jeden einzelnen Lehrer. Es können aber auch Rückschlüsse aus dem Vergleich der 5 Lehrer untereinander gezogen werden. In Abbildung 13.1 sind die Ergebnisse des COACTIV-Tests im Testteil zum fachdidaktischen Wissen (vertikale Achse) und im Testteil zum mathematischen Fachwissen (horizontale Achse) im Vergleich dargestellt.

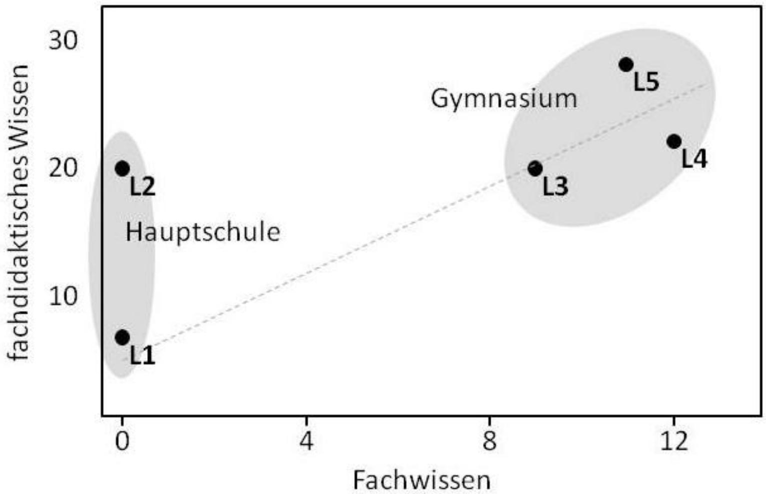


Abbildung 13.1: Vergleich der COACTIV-Testergebnisse der 5 Lehrpersonen

Die Ergebnisse der 5 Lehrer sind konform mit den Ergebnissen der COACTIV-Studie (vgl. Krauss et al., 2008). So verfügen die Gymnasiallehrer über deutlich mehr Fachwissen, aber auch über mehr fachdidaktisches Wissen, als die Lehrpersonen an der Hauptschule. Die Lehrerin 2 scheint zu der im Rahmen der COACTIV-Studie nicht unerheblichen Anzahl an nicht-gymnasialen Lehrerinnen und Lehrern zu gehören, die bei sehr niedrigem Fachwissen über vergleichsweise hohes fachdidaktisches Wissen verfügen. Die Ergebnisse der restlichen Lehrer spiegeln den starken Zusammenhang zwischen dem fachdidaktischen Wissen und dem mathematischen Fachwissen wieder. Es ist damit im Rahmen dieser Studie gelungen, trotz der relativ zufälligen Auswahl der Stichprobe (siehe 7.1) alle drei im Rahmen der COACITV-Studie ermittelten ‚Lehrertypen' zu erfassen und jeweils detailliert die Nutzung des fachdidaktischen Wissens zu untersuchen.

Bedeutung des fachdidaktischen Wissens für die kognitive Aktivierung

Die qualitativen Analysen zeigen, dass sich die im Rahmen der COACTIV-Studie festgestellte Korrelation zwischen dem fachdidaktischen Wissen und der kognitiven Herausforderung des Unterrichts nur bedingt bestätigt. Die Lehrpersonen 2, 3 und 4 erzielten ungefähr dieselbe Punktzahl im fachdidaktischen Wissenstest, in der kognitiven Herausforderung des Unterrichts unterscheiden sie sich aber stark. Insbesondere die Ergebnisse des Lehrers 5 widersprechen den Ergebnissen der COACTIV-Studie. Der Lehrer scheint über umfangreiches fachdidaktisches Wissen und auch überdurchschnittliches Fachwissen zu verfügen, im Unterricht kann er aber nur einen Teil des vorhandenen Wissens in kognitiv herausfordernde Aufgabenbearbeitungen umsetzen. Die von ihm gewählten Aufgaben weisen ein erhöhtes Potenzial zur kognitiven Aktivierung der Schülerinnen und Schüler auf, da sie beispielsweise Argumentationen und begriffliches Denken ermöglichen. Dies führt dazu, dass der Unterricht dieses Lehrers im Rahmen von COACTIV, wo die kognitive Herausforderung vor allem über die eingesetzten Aufgaben beurteilt wurde, durchaus als kognitiv aktivierend eingeschätzt worden wäre. Allerdings wird ein Großteil des Potenzials der Aufgaben nicht umgesetzt (siehe 12.7). Dem Lehrer 4 gelingt dagegen die Umsetzung seines Wissens überwiegend gut, während die Lehrerin 2 starke Mängel in der Umsetzung ihres Wissens aufweist. Die Analysen dieser Arbeit zeigen daher deutlich, dass die Unterrichtsqualität nicht allein vom vorhandenen Wissen, sondern vor allem von der Umsetzung dieses Wissens bei der didaktischen Strukturierung von Unterricht abhängt (vgl. Bromme & Seeger, 1979; Kersting et al., 2012).

Bedeutung des Fachwissens für die kognitive Aktivierung der Schülerinnen und Schüler

Der Vergleich der 5 Lehrer bestätigt den Zusammenhang zwischen dem fachdidaktischen Wissen und dem mathematischen Fachwissen, wie er schon in der COACTIV-Studie festgestellt wurde (Krauss et al., 2008). Ergänzend weisen Kersting et al. (2012) darauf hin, dass insbesondere die Lehrerinnen und Lehrer hohes Wissen zeigen, die ihr Fachwissen mit anderen Aspekten, die zur didaktischen Strukturierung des Unterrichts notwendig sind (z.B. Analyse des Schülerdenkens), verknüpfen.

Der Einfluss des Fachwissens auf die kognitive Aktivierung der Schülerinnen und Schüler konnte im Rahmen der qualitativen Analysen kaum untersucht werden. Allerdings zeigen die Vergleiche der COACTIV-Testergebnisse, dass die Lehrkräfte, die kaum kognitiv herausfordernde Elemente in ihrem Unterricht einbauen, auch über sehr wenig mathematisches Fachwissen verfügen, während die Lehrpersonen mit hohem Fachwissen überwiegend viele Elemente kognitiver Aktivierung im Unterricht zeigen (Lehrer 5 allerdings nur teilweise). Besonders deutlich wird dies beim Vergleich der Lehrer 2, 3 und 4, die fast dieselbe Punktzahl im fachdidaktischen Wissen erreicht haben, sich aber sehr stark im Fachwissen unterscheiden. Die Abstände in den Punktzahlen zum Fachwissen dieser drei Lehrpersonen spiegeln relativ gut die Unterschiede in der kognitiven Aktivierung wieder: Die Lehrerin 2 baut kaum Elemente kognitiver Aktivierung ein, beim Lehrer 3 zeigen sich überwiegend kognitiv herausfordernde Aufgabenbearbeitungen, während der Lehrer 4 durchgehend viele Elemente kognitiver Aktivierung nutzt. Hieraus kann auf eine hohe Bedeutung des Fachwissens für die kognitive Aktivierung geschlossen werden. Allerdings könnten diese Unterschiede auch durch die Fähigkeit zur Umsetzung des fachdidaktischen Wissens erklärt werden. Insbesondere die Ergebnisse der Lehrer 1 und 5 unterstützen die zweite vorgeschlagene Deutung. Auch im Rahmen von COACTIV konnten keine signifikanten Zusammenhänge zwischen dem Fachwissen und der Unterrichtsqualität gefunden werden (Baumert, Kunter, Blum, Brunner, et al., 2011). Es gilt daher, diese Zusammenhänge anhand größerer Stichproben weiter zu untersuchen.

14 Ausblick

14.1 Empfehlungen für die Lehrerbildung

Da die Ergebnisse dieser Arbeit aus den Analysen von nur 5 Lehrerinnen und Lehrern abgeleitet werden, sind sie kaum verallgemeinerbar. Es lassen sich aber anhand der detaillierten Analysen begründete Hypothesen aufstellen, die vor allem in Verbindung mit den Ergebnissen der COACTIV-Studie und auch den Ergebnissen weiterer Studien geeignet sind, Empfehlungen für die Lehrerbildung zu formulieren, wie sie als letzter Schritt im Modell für die Rekonstruktion fachdidaktischer Prozesse (siehe 2.8) gefordert sind. Die Gültigkeit dieser Empfehlungen sollte aber in weiteren Untersuchungen noch näher geprüft werden (siehe 14.2).

Umsetzung des Wissens in Handlungen verbessern

Die Ergebnisse der COACTIV Studie belegen einen Zusammenhang zwischen dem fachdidaktischen Wissen und der Unterrichtsqualität in der Dimension der kognitiven Aktivierung. Die Analysen dieser Arbeit zeigen ergänzend hierzu aber deutlich, dass die Unterrichtsqualität nicht allein vom vorhandenen Wissen, sondern vor allem von der Umsetzung dieses Wissens bei der didaktischen Strukturierung von Unterricht abzuhängen scheint. Dies zeigt sich besonders an den Lehrpersonen 2 und 5, die den COACTIV-Testergebnissen zufolge beide über verhältnismäßig hohes fachdidaktisches Wissen verfügen. Die Umsetzung des Wissens in Unterrichtshandlungen gelingt ihnen aber überwiegend nicht und auch die kognitive Herausforderung des Unterrichts ist eher als niedrig einzuschätzen. Deshalb wird für die Lehrerbildung empfohlen, nicht nur den Aufbau des Wissens, sondern auch die Umsetzung des Wissens in Handlungen in den Blick zu nehmen. Der Lehrer 4 kann sein Wissen größtenteils sehr gut in Unterrichtshandlungen umsetzen, er ist aber im Vergleich zu den anderen Lehrpersonen vor allem auch in der Lage, sein Wissen zu artikulieren und zu reflektieren. Dies lässt darauf schließen, dass im Rahmen der Lehrerbildung vor allem die Artikulation von Wissen und die Reflexion der Umsetzung des Wissens trainiert und gefördert werden sollten, so dass die Nutzung des Wissens bei der didaktischen Strukturierung explizit gemacht werden kann. So können die (angehenden) Lehrerinnen und Lehrer möglicherweise selbst Defizite in der Umsetzung des Wissens besser erkennen und in späteren Situationen bewusster ihr vorhandenes Wissen einsetzen.

Des Weiteren zeigen die Ergebnisse dieser Studie, dass die Umsetzung des Wissens scheinbar mit der Fähigkeit zur Verknüpfung der einzelnen Komponenten des fachdidaktischen Wissens zusammenhängt. Hierauf weist beispielsweise auch Mietzel (2003) hin. Aus diesem Grund sollten auch diese Verknüpfungen im Sinne des didaktischen Dreiecks (siehe 4.1.5) bei der didaktischen Strukturierung bewusst hergestellt werden.

Damit angehende Lehrerinnen und Lehrer einerseits das Bewusstmachen des vorhandenen Wissens und andererseits die bewusste Verknüpfung ihres Wissens trainieren können, ist insbesondere das eigene Planen und Durchführen von Unterricht in Verbindung mit einer entsprechenden Reflexion nötig. Dies könnte beispielsweise durch eine verstärkte Verknüpfung zwischen Theorie und Praxis ermöglicht werden, wie sie z.B. mit der derzeit laufenden Einführung von Praxissemestern (z.B. GHR 300 in Niedersachsen) oder dem Projekt OLAW zur Verzahnung von 1. und 2. Phase der Lehramtsausbildung (siehe Fischer, Niesel, & Sjuts, 2011) bereits umgesetzt wird. Es ist aber insbesondere nötig, die Umsetzung des Wissens auch über das Referendariat hinaus zu trainieren. Hierzu sind permanente Lehrerfortbildungen und auch gegenseitige, fachbezogene Coachings nötig, wie sie z.B. Kreis und Staub (2009) vorschlagen.

Einfluss des Fachwissens nicht unterschätzen

Die Bedeutung des Fachwissens für die kognitive Aktivierung konnte weder bei COACTIV noch im Rahmen dieser Studie direkt gezeigt werden. Die Ergebnisse der COACTIV-Studie lassen aber auf die Bedeutung von Fachwissen vor allem für die Entwicklung von fachdidaktischem Wissen schließen. Dies wirkt sich wiederum positiv auf die Unterrichtsqualität aus. Diese Befunde werden durch die qualitativen Analysen im Rahmen dieser Arbeit gestützt. Des Weiteren weisen Kersting et al. (2012) darauf hin, dass vor allem die Verknüpfung des Fachwissens mit pädagogischen Konzepten und mit Elementen des fachdidaktischen Wissens zu höherem Wissen führen. Dies wurde schon von Shulman (1986) betont (vgl. Kersting et al., 2012). Deshalb sollte auch in der Lehrerbildung für alle Lehrämter ein gewisses Maß an mathematischem Fachwissen vermittelt werden. Insbesondere sollten dabei Verbindungen mit fachdidaktischen und pädagogischen Konzepten hergestellt werden.

14.2 Ideen für mögliche Folgestudien

Im Rahmen dieser Studie wurde ein vertiefter Einblick in den Prozess der didaktischen Strukturierung ermöglicht, der einerseits die Ergebnisse anderer Studien (beispielsweise der COACTIV-Studie) ergänzt, andererseits aber noch viele Fragen offen lässt. Dabei haben sich die im Rahmen dieser Studie eingesetzten Instrumente als gut geeignet herausgestellt, um insbesondere mögliche Tiefenstrukturen des Zusammenhangs zwischen dem vorhandenen Wissen, dessen Umsetzung in Handlungen und der Unterrichtsqualität aufzudecken. Sie sollten daher anhand einer größeren Stichprobe erneut eingesetzt werden, um die hier erhaltenen Ergebnisse verallgemeinern zu können.

Der Aufwand der Analysen ist für jede einzelne Lehrperson sehr groß. Da sich aber relativ stabile Muster im Unterricht der Lehrerinnen und Lehrer gezeigt haben (siehe 13.1.1), würde die Analyse eines kürzeren Unterrichtsausschnittes vermutlich genügen, um auf die Fähigkeiten der Umsetzung des fachdidaktischen Wissens zu schließen. Dabei bietet es sich beispielsweise an, nur den Unterrichtseinsatz der vorgegebenen Aufgaben zu analysieren, da sich das fachdidaktische Wissen vor allem an diesen Aufgaben zeigt (siehe 13.1.2). Es sollten aber auch die von den Lehrerinnen und Lehrern direkt vorher und direkt hinterher gestellten Aufgaben zumindest auf ihre objektiven Kennzeichen hin analysiert werden, um das Herstellen möglicher Verbindungen zwischen den Aufgaben mit in den Blick der Analysen nehmen zu können. Auch das anschließende Interview und die Verschriftlichung des Planungsprozesses könnten sich auf die vorgegebene Aufgabe beschränken. Durch die Fokussierung auf eine Aufgabe könnte insbesondere erreicht werden, dass die Aussagen in der Planung und im Interview detaillierter werden und noch bessere Rückschlüsse auf das vorhandene Wissen zulassen.

Die ergänzende Bearbeitung des COACTIV-Fragebogens sollte beibehalten werden, da sich hieraus Verbindungen zu bestehenden Forschungsergebnissen anhand großer Stichprobenanzahlen herstellen lassen. Eine mögliche Erweiterung bestünde in der zusätzlichen Bearbeitung der COACTIV-Videoitems (siehe 2.3), die in Ansätzen Rückschlüsse auf die Umsetzung des fachdidaktischen Wissens zulassen. Insbesondere stellten die COACTIV-Instrumente ein verbindendes Element dar, da alle Lehrer die gleichen Aufgaben bearbeiten und die gleichen Unterrichtsszenen beurteilen würden. Eine andere Möglichkeit, die Vergleichbarkeit zwischen den Analysen der einzelnen Lehrerinnen und Lehrer zu erhöhen, bestünde in der Vorgabe derselben Aufgabe an alle Lehrerinnen und Lehrer. Hierbei müsste eine Aufgabe gefunden werden, die ein Themengebiet anspricht, welches in allen Schulformen thematisiert wird und welche auf unterschiedlichsten Niveaus kognitive Herausforderungen bietet. Dies

konnte im Rahmen dieser Studie aufgrund schwieriger Rahmenbedingen nicht realisiert werden (siehe 7.1).
Gute Rahmenbedingungen für die Durchführung einer möglichen Folgestudie, wie sie bisher beschrieben wurde, würden sich ergeben, wenn nicht der COACTIV-Fragebogen die qualitativen Analysen ergänzt, sondern wenn umgekehrt die qualitativen Analysen die COACTIV-Instrumente bei einer erneuten Durchführung der COACTIV-Studie erweitern würden. So könnte eine mögliche qualitative Ergänzung der COACTIV-Studie gestaltet werden, wie sie auch bei Krauss et al. (2011) vorgeschlagen, aber nicht näher ausgeführt wird. Es könnte einerseits eine große Stichprobe realisiert werden. Andererseits könnte im Verlauf des Schuljahres, das im Rahmen von COACTIV begleitet werden würde, von den teilnehmenden Lehrerinnen und Lehrern gefordert werden, zu einem beliebigen Zeitpunkt eine für alle gleiche Aufgabe im Unterricht einzusetzen. Diese müsste insbesondere thematisch für alle getesteten Schulformen geeignet sein (s.o.). Die Lehrpersonen müssten den Einsatz dieser Aufgabe anhand des vorgegebenen Fragenkatalogs ausführlich beschreiben, der Unterrichtseinsatz würde videografiert und die Lehrpersonen würden anschließend zu dieser Aufgabe interviewt werden. Insbesondere könnten die Ergebnisse der Analysen dann auch mit den Leistungen der Schülerinnen und Schüler in Beziehung gesetzt werden, da auch ein erneuter COACTIV-Durchgang an die PISA-Studie angebunden sein sollte. Auch Verknüpfungen zu den im Rahmen von COACTIV erhobenen Überzeugungen der Lehrerinnen und Lehrer wären dann möglich.

Diese Arbeit konnte einen kleinen Beitrag zum Verständnis des Zusammenhangs zwischen dem professionellem Wissen der Lehrerinnen und Lehrer und ihrem Unterricht leisten. Es gilt aber weiterhin: „We are only at the beginning of understanding how teacher knowledge relates to teaching and student learning“ (Kersting et al., 2012, S. 587).

15 Zusammenfassungen

15.1 Zusammenfassung

Es gibt in der Mathematikdidaktik bereits viele Studien, die den Zusammenhang zwischen dem professionellen Wissen der Lehrerinnen und Lehrer, ihrem Unterricht und dem Lernen der Schülerinnen und Schüler untersuchen. Zu den größeren Studien zählen beispielsweise die TIMS-Video-Studie (Hiebert et al., 1999), das COACTIV-Forschungsprogramm (Kunter et al., 2011), TEDS-M (Blömeke, Kaiser, et al., 2010a), die Studien der sogenannten Michigan Group (Ball & Bass, 2009) und das sogenannte Pythagoras-Projekt (Klieme, Lipowsky, et al., 2006). Diese Studien haben bereits vielfältige Ergebnisse hervorgebracht. Beispielsweise konnte bei COACTIV und TEDS-M gezeigt werden, dass Gymnasiallehrer über deutlich mehr fachdidaktisches Wissen und mathematisches Fachwissen im Sinne von Shulman (1986) verfügen, als Lehrende an anderen Schulformen (Blömeke, Kaiser, et al., 2010b; Krauss et al., 2008). Dabei wirkt sich hohes fachdidaktisches Wissen positiv auf die Leistungen der Schülerinnen und Schüler und auch auf die kognitive Herausforderung des Unterrichts aus. Dies konnte bei COACTIV und in den Studien der Michigan Group empirisch bestätigt werden (Baumert & Kunter, 2011b; Hill et al., 2005). In den bisher genannten Studien wurde zwar das vorhandene Wissen erhoben, aber nicht dessen Umsetzung in Handlungen während des Unterrichts in den Blick genommen. Dabei weisen viele Autoren darauf hin, dass der Übergang zwischen dem Wissen und dem Handeln der Lehrpersonen als problematisch angesehen wird (siehe z.B. Bromme, 1992; Neuweg, 2011; Oser, 1997; Wahl, 2001).
Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich daher mit der Frage, wie Lehrerinnen und Lehrer ihr professionelles Wissen bei der didaktischen Strukturierung ihres eigenen Unterrichts nutzen. Dabei wird der Fokus auf das fachdidaktische Wissen gelegt, welches sich in den oben beschriebenen Studien als erklärungsreicher Faktor herausgestellt hat.
Es wurde ein umfangreiches Untersuchungsdesign erarbeitet, welches insbesondere verschiedene Methoden der Datenerhebung, aber auch unterschiedliche Verfahren der Auswertung, miteinander kombiniert. Die Stichprobe bestand aus fünf ganz unterschiedlichen Lehrpersonen: Zwei Hauptschullehrkräfte, drei Gymnasiallehrer, zum Teil mit viel Berufserfahrung, teilweise sehr unerfahren, nicht alle mit klassischer Lehramtsausbildung. Diese Lehrpersonen konzipierten eine ca. 3-stündige Unterrichtseinheit zu einem selbst gewählten Thema der Geometrie, in die sie ein oder zwei vorgegebene Aufgaben mit kognitivem Aktivierungspotenzial einbauten. Die Lehrkräfte hielten ihre Planungsideen anhand eines vorgegebenen Fragenkatalogs schriftlich fest und die Unterrichtsstunden wurden videografiert. Im Anschluss an die drei Unterrichtsstunden wurden in einem reflektierenden, leitfadengestützten Interview, in dem auch die eingesetzten Aufgaben als stimulated recall (siehe z.B. Clarke et al., 2006) verwendet wurden, Gedanken und Begründungen der Lehrerinnen und Lehrer zur didaktischen Strukturierung erfasst.
Diese Datenquellen wurden anhand der eingesetzten Aufgaben ausgewertet. Es wurden zunächst die objektiven Kennzeichen der Aufgaben analysiert, um einzuschätzen, welches Potenzial unabhängig vom Unterricht der Lehrpersonen in den Aufgaben steckt. Hierzu wurden zwei bereits bestehende Aufgabenklassifikationssysteme zu einem Kategoriensystem zusammengefasst (Jordan et al., 2006; J. Neubrand, 2002). Das so ermittelte Potenzial der Aufgaben wurde mit dem Einsatz der Aufgaben im Unterricht und den Aussagen der Lehrerinnen und Lehrer in der Planung und im Interview in Beziehung gesetzt. Hierzu wurden so-

wohl der Unterricht, als auch die schriftliche Unterrichtsplanung und das Interview, mithilfe einer strukturierenden, qualitativen Inhaltsanalyse (Mayring, 2010) ausgewertet.
Es wurden aufbauend auf den Konzeptionen zum fachdidaktischen Wissen der oben genannten Arbeitsgruppen Kategorien zum fachdidaktischen Wissen gebildet, die sich entsprechend den drei Ecken des didaktischen Dreiecks (siehe z.B. Reusser, 2009) in die drei Komponenten schülerbezogenes Wissen, Wissen über das Verständlichmachen mathematischer Inhalte und inhaltsbezogenes Wissen unterteilen lassen (vgl. Krauss et al., 2011). Das *schülerbezogene Wissen* beinhaltet Wissen über Konzepte und Strategien, mögliche Schülerlösungen sowie mögliche Fehler und Probleme der Schülerinnen und Schüler. Darüber hinaus zeigt es sich an der Fähigkeit zur Einschätzung des Schwierigkeitsgrads von Aufgaben. Das *Wissen über das Verständlichmachen* beinhaltet Wissen über multiple Repräsentationsformen, geeignete Beispiele, Vereinfachungen der Inhalte und Erklärungsmöglichkeiten. Es zeigt sich auch am Gebrauch mathematischer Begriffe. Das *inhaltsbezogene Wissen* umfasst die curriculare Anordnung von Stoffen, also deren mögliche Reihenfolge und die Zusammenhänge zwischen den einzelnen Themengebieten sowie Wissen über Bildungsstandards und Bildungsziele. Insbesondere zeigt es sich an der Fähigkeit zur Einschätzung des Potenzials von Aufgaben.
Teilweise lassen sich aus den Kategorien zum fachdidaktischen Wissen direkt Rückschlüsse auf das vorhandene Wissen bzw. auf Defizite im Wissen ziehen. Beispielsweise zeigt sich, ob die Lehrerinnen und Lehrer im Vorfeld des Unterrichts mögliche Fehler und Probleme der Schülerinnen und Schüler richtig einschätzen können und ob sie die Gedankengänge der Lernenden nachvollziehen können. Allerdings zeigen die Kategorien zum fachdidaktischen Wissen größtenteils zwar die Situationen an, in denen sich fachdidaktisches Wissen zeigen kann, sie erlauben aber zum Teil noch keine Einschätzung der Qualität der Umsetzung des fachdidaktischen Wissens. Im Rahmen dieser Arbeit steht aber nicht nur das vorhandene Wissen, sondern vor allem die Umsetzung des Wissens in Handlungen der Lehrerinnen und Lehrer und die Zusammenhänge des fachdidaktischen Wissens mit der Unterrichtsqualität im Fokus des Erkenntnisinteresses. Deshalb wurde das Kategoriensystem für die qualitativen Analysen um Kategorien zur Einschätzung der kognitiven Aktivierung ergänzt.
Das Konzept der *kognitiven Aktivierung* wurde im Rahmen von TIMSS und weiteren Studien neben der effektiven Klassenführung und der Schülerorientierung als die Dimensionen von Unterrichtsqualität herausgestellt, in der vor allem die fachbezogenen Aspekte des Unterrichts von Bedeutung sind (Klieme, Lipowsky, et al., 2006). Kognitive Aktivierung zeigt sich beispielsweise an der Vernetzung von Wissen, indem einerseits Verbindungen zum Vorwissen, andererseits auch Verknüpfungen mit anderen Themengebieten hergestellt werden. Ein kognitiv aktivierender Unterricht ermöglicht darüber hinaus verschiedene Arten des Denkens, nämlich begriffliches Denken, prozedurales Denken und den Aufbau von Faktenwissen. Außerdem zeigt sich kognitive Aktivierung an außer- und innermathematische Modellierungen, dem Gebrauch verschiedener Repräsentationsformen, dem Einfordern von Argumentationen sowie dem Vergleich verschiedener Lösungswege. Diese Elemente kognitiver Aktivierung lassen sich vor allem anhand einzelner Aufgaben bestimmen und geben Aufschluss über das Potenzial einer Aufgabe zur kognitiven Aktivierung. Darüber hinaus wurden im Rahmen des hier verwendeten Kategoriensystems auch Aspekte kognitiver Aktivierung aufgenommen, die sich nicht direkt an den Aufgaben zeigen. Hierzu zählen insbesondere die Förderung der kognitiven Selbstständigkeit der Lernenden, das Auffordern zum selbstständigen Überprüfen von Lösungswegen und ein konstruktiver Umgang mit Schülerantworten. Außerdem zeigt sich kognitive Aktivierung an der Förderung metakognitiver Aktivitäten des Reflektierens, Verallgemeinerns und Strukturierens.

Die Kategorien der kognitiven Aktivierung haben sich als geeignet herausgestellt, um im Rahmen der qualitativen Analysen verschiedene Aspekte des Zusammenhangs zwischen dem fachdidaktischen Wissen und dem Handeln der Lehrpersonen im Unterricht sowie Aspekte der Unterrichtsqualität einzuschätzen. So konnte anhand der kognitiven Aktivierung zum Einen die Umsetzung des fachdidaktischen Wissens im Unterricht beurteilt werden. Darüber hinaus konnten aber auch Defizite im fachdidaktischen Wissen aufgedeckt und Widersprüche zwischen dem Wissen und dem Handeln der Lehrpersonen aufgezeigt werden. Insbesondere konnte zwischen einer Oberflächen- und Tiefenstruktur des Unterrichts unterschieden werden.

Die qualitativen Analysen zeigen, dass jede Lehrperson für sich betrachtet über feste Strukturen und Handlungsmuster zu verfügen scheint, die sich durchgängig durch den Unterricht ziehen. Die Lehrerinnen und Lehrer weichen aber zumindest punktuell von diesen Mustern ab. Es zeigen sich kaum Gemeinsamkeiten in den Mustern der Lehrkräfte. Des Weiteren deuten die Ergebnisse darauf hin, dass die Unterrichtsqualität in der Dimension der kognitiven Aktivierung umso höher ist, je mehr fachdidaktisches Wissen die Lehrpersonen in Unterrichtshandlungen umsetzten können. Außerdem scheint insbesondere die Verknüpfung der einzelnen Wissensfacetten, aber auch die Fähigkeit zur Artikulation des vorhandenen Wissens, die Unterrichtsqualität zu beeinflussen.

Ergänzend zu diesen qualitativen Erhebungen und Analysen bearbeiteten die Lehrpersonen auch den COACTIV-Test, um die qualitativ gewonnene Einschätzung des fachdidaktischen Wissens der Lehrerinnen und Lehrer mit den Ergebnissen eines vielfach erprobten Tests vergleichen zu können. In diesem Test wird auch das mathematische Fachwissen der Lehrerinnen und Lehrer erhoben. Sowohl für die Einschätzung des fachdidaktischen Wissens als auch für die Einschätzung des mathematischen Fachwissens scheint der COACTIV-Test die qualitativen Analysen gut zu ergänzen. Außerdem geben die qualitativen Analysen vertiefte Einblicke in die Ergebnisse des COACTIV-Tests und können vor allem die Grenzen dieser quantitativen Untersuchung aufdecken. Diese lassen sich aber im Rahmen einer rein quantitativen Auswertung nur schwer ausweiten.

Die Ergebnisse der 5 Lehrer im COACITV-Test sind konform mit den Ergebnissen der COACTIV-Studie (vgl. Krauss et al., 2008). So verfügen die Gymnasiallehrer über deutlich mehr Fachwissen, aber auch über mehr fachdidaktisches Wissen, als die Lehrpersonen an der Hauptschule. Die Lehrerin 2 scheint zu der im Rahmen der COACTIV-Studie nicht unerheblichen Anzahl an nicht-gymnasialen Lehrerinnen und Lehrern zu gehören, die bei sehr niedrigem Fachwissen über vergleichsweise hohes fachdidaktisches Wissen verfügen. Die Ergebnisse der restlichen Lehrer spiegeln den starken Zusammenhang zwischen fachdidaktischem Wissen und mathematischem Fachwissen wieder.

Der Einfluss des Fachwissens auf die kognitive Aktivierung der Schülerinnen und Schüler konnte im Rahmen der qualitativen Analysen nicht ausreichend untersucht werden. Die Ergebnisse deuten aber auf die Bedeutung des Fachwissens für die Entwicklung des fachdidaktischen Wissens hin. Auch die im Rahmen der COACTIV-Studie festgestellte Korrelation zwischen dem fachdidaktischen Wissen und der kognitiven Herausforderung des Unterrichts konnte durch die Ergebnisse dieser Studie nur bedingt bestätigt werden. Die Analysen dieser Arbeit zeigen deutlich, dass die Unterrichtsqualität nicht allein vom vorhandenen Wissen, sondern vor allem von der Umsetzung dieses Wissens bei der didaktischen Strukturierung von Unterricht abhängt. So gibt es durchaus Lehrpersonen, die im fachdidaktischen Wissentest eine hohe Punktzahl aufweisen, denen aber die Umsetzung ihres Wissens im Unterricht nicht gelingt.

15.2 Abstract

In the last decade there have been several extensive studies which evaluated the relation between the professional knowledge of mathematics teachers, their teaching and student learning, e.g. the TIMSS-video-study (Hiebert et al., 1999), the COACTIV-project (Baumert, Kunter, Blum, Brunner, et al., 2011), TEDS-M (Blömeke, et al., 2010), studies of the so called Michigan Group (Ball & Bass, 2009) and the so called Pythagoras-project (Klieme, Lipowsky, et al., 2006). These studies developed various results. COACTIV and TEDS-M for instance showed that teachers at a Gymnasium (the academic track in the German school system) possess much more pedagogical content knowledge and content knowledge in terms of Shulman (1986) than teachers at any other kind of school (Blömeke, Kaiser, et al., 2010b; Krauss et al., 2008). Moreover sophisticated pedagogical content knowledge affects student achievement and the amount of cognitive activation, as is empirically confirmed by COACTIV and the studies of the Michigan Group (Baumert & Kunter, 2011b; Hill et al., 2005). But the studies mentioned above only evaluated the existing knowledge as such, instead of also taking the implementation of knowledge into consideration, despite the fact that many authors pointed out the problems of transforming knowledge into action (Bromme, 1992; Neuweg, 2011; Oser, 1997; Wahl, 2001).

Therefore the study at hand deals with the question of how teachers use their professional knowledge when designing learning environments. In doing so the focus is on the pedagogical content knowledge, which emerged to explain the relations found in the studies named above.

An extensive research design was developed, which includes different methods of data collection as well as various procedures of analyzing the data. The sample consists of 5 very different teachers: 2 from Hauptschule, the vocational track in the German school system, and 3 from Gymnasium, some of the teachers have extended professional experience, some are rather new in the profession and inexperienced. Furthermore not all of them took part in the 'classical' educational training of teachers. These teachers designed three sequenced geometry lessons by embedding one or two tasks provided for their high potential for cognitive activation. They wrote down their lesson planning on the basis of a given questionnaire and the lessons were videotaped. After the lessons the teachers' thoughts and reasons for the design of the learning environment were collected in a reflective, guided interview, taking the adopted tasks as a basis.

These data were analyzed based on the adopted tasks. First the potential of the tasks was valued independently of the lesson, using two existing category systems (Jordan et al., 2006; J. Neubrand, 2002). The potential of the tasks was compared to the adoption of the tasks during the lesson and to the statements of the teachers, which were taken in the lesson planning and in the interview. For this purpose the videotaped lessons as well as the written lesson planning and the interviews were analyzed using the structured qualitative content analysis according to Mayring (2010). Therefore categories of pedagogical content knowledge have been generated, which are based on the conceptions of pedagogical content knowledge as developed in the studies mentioned above. These categories can be divided into three sections: knowledge of student cognition, knowledge of teacher action and knowledge of content (see Baumert, Kunter, Blum, Brunner, et al., 2011).

The knowledge of *student cognition* includes knowledge about student's concepts, strategies and possible solutions as well as knowledge about possible mistakes and problems of the students. Moreover the knowledge of student cognition is displayed by the ability of rating the degree of difficulty of a task. The knowledge of *teacher action* contains knowledge

of multiple representations, appropriate examples, simplifications and explanations. The knowledge of *content* includes knowledge of sequencing the content as well as knowledge about connecting different contents. Particularly it is displayed by the ability of assessing the cognitive potential of tasks.

Partly the categories of pedagogical content knowledge offer direct conclusions about the existing knowledge or about deficits in the existing knowledge, e.g. whether teachers are able to anticipate possible student mistakes already in the lesson planning or not. But mostly the categories of pedagogical content knowledge only point at situations, in which pedagogical content knowledge is needed. Therefore the concept of *cognitive activation* serves as a guiding principle, since cognitive activation (in the sense of Klieme et al., 2006) is the content-dimension in lesson dynamics.

Cognitive activation shows itself in the connection of knowledge during the lesson, especially by connecting new knowledge to prior knowledge and by connecting different contents. In addition to that indicators of cognitive activation are mathematical modelling, the use of multiple representations, the call for argumentation and reasoning, the comparison of different solutions, the coherence of the content, a balance of procedural and conceptual knowledge and the cognitively autonomous work of students.

The results of this study show that the categories of cognitive activation achieved to successfully evaluate different aspects of the relation between the pedagogical content knowledge, the acting of the teacher and the quality of instruction. First, the quality of implementing pedagogical content knowledge into action could be assessed on the basis of the categories of cognitive activation. Second, deficiency of knowledge could be exposed as well as antagonisms between the knowledge expressed in the interview and the acting of the teacher during the lesson. Third, the categories of cognitive activation enabled the differentiation between the surface and the deep structure of the lesson.

The qualitative analysis shows, that each teacher developed relatively stable structures of acting during the lesson, although they partly deviate from these structures. But there are almost no similarities visible among the different teachers. The results, however, indicate that the more pedagogical content knowledge could be implemented in the lesson planning and during the lessons, the higher is the amount of cognitive activation. Moreover the ability to connect the different aspects of pedagogical content knowledge and to articulate the knowledge seems to affect the quality of instruction.

In addition to the qualitative data collection and analysis the participating teachers filled in the COACTIV-questionnaire to test their pedagogical content knowledge and their content knowledge on a test designed for screening purposes. So the pedagogical content knowledge shown in the qualitative analyses could be compared with the results of a quantitative instrument. Moreover the qualitative results could be compared with the teachers' content knowledge, which could hardly be analyzed within the qualitative data. The analysis of the study at hand showed, that on the one hand the COACTIV-test managed to amend the qualitative analyses, on the other hand the comparison showed the constraints of the COACTIV-test as a quantitative instrument. For example one teacher gains high scores for pedagogical content knowledge, but was not able to implement his knowledge into action during the lesson, as could not be found within the COACTIV-study.

The results of the 5 teachers in the COACTIV-questionnaire are consistent with the results of the COACTIV-study (see Krauss et al., 2008). Gymnasium teachers show much more pedagogical content knowledge and content knowledge than teachers at Hauptschule. The relation between content knowledge and cognitive activation of the students could not be analyzed in whole detail within the qualitative analyses. But the results indicate an impact of content knowledge for developing pedagogical content knowledge, as was also found out by COACTIV. Furthermore the correlation between pedagogical content knowledge and cognitive activation during the lessons, as was identified by COACTIV, could not be confirmed on the basis of the qualitative analysis. In contrast the analysis of this study show, that the quality of instruction measured on the basis of cognitive activation does not depend on pedagogical content knowledge as such alone, but relates to the ability of implementing the knowledge into action when designing a learning environment. There are teachers who gain high scores for pedagogical content knowledge, but could not implement their knowledge into action.

16 Literaturverzeichnis

Ball, D. L., & Bass, H. (2003). Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. In: B. Davis & E. Simmt (Eds.), *Proceeding of the 2002 Annual Meeting of the Canadian Methematics Education Study Group*. Edmonton, AB: CMESG/GCEDM, S. 3-14.

Ball, D. L., & Bass, H. (2009). With an Eye on the Mathematical Horizion: Knowing Mathematics for Teaching to Learners' Mathematical Futures. In M. Neubrand (Ed.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2009*. Münster: Waxmann, S. 11-22.

Ball, D. L., Hill, H. C., & Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator* (Fall 2005), S. 14-46.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching – What Makes it Special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), S. 389-407.

Bandura, A. (1997). *Self-effiacy: The exercise of conrol*. New York: Freeman.

Bauer, L. (1990). Mathematikunterricht und Reflexion. *mathematik lehren, 38*, S. 6-9.

Baum, M., Dornrieden, D., Harborth, H., & Schönbach, U. (2008). *Lambacher Schweizer 9 - Mathemtaik für Gymnasien*. Stuttgart, Leipzig: Ernst Klett Verlag.

Baumert, J., Blum, W., & Neubrand, M. (2002). Drawing the lessons from PISA 2000: Long-term research implications: Gaining a better understanding of the relationship between system inputs and learning outcomes by assessing instructional and learning processes as mediating factors. In D. Lenzen, J. Baumert, R. Watermann & U. Trautwein (Eds.), *PISA und die Konsequenzen für die erziehungswissenschaftliche Forschung*: Zeitschrift für Erziehungswissenschaft, Beiheft 3/2004, S. 143 - 158.

Baumert, J., Klieme, E., & Bos, W. (2001). Mathematische und naturwissenschafltiche Bildung am Ende der Schullaufbahn - Die Herausforderung von TIMSS für die Weiterentwicklung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts. In E. Klieme & J. Baumert (Eds.), *TIMSS–Impulse für Schule und Unterricht*. Bonn: Bundesministerium für Bildung und Forschung, S. 11-41.

Baumert, J., Klieme, E., Neubrand, M., Prenzel, M., Schielfele, U., Schneider, W., . . . Weiß, M. (2001). *PISA 2000: Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich*. Opladen: Leske+ Budrich.

Baumert, J., & Köller, O. (2000a). Motivation, Fachwahlen, selbstreguliertes Lernen und Fachleistungen im Mathematik- und Physikunterricht der gymnasialen Oberstufe. In J. Baumert, W. Bos & W. H. Lehmann (Eds.), *Dritte Internationale Mathematik- und Naturwissenschaftsstudie: Mathematische und naturwissenschaftliche Bildung am Ende der Schullaufbahn, Bd. 2: Mathematische und physikalische Kompetenzen am Ende der gymnasialen Oberstufe*. Opladen: Leske + Budrich, S. 181-214.

Baumert, J., & Köller, O. (2000b). Unterrichtsgestaltung, verständnisvlles Lernen und multiple Zielerreichung im Mathematik- und Physikunterricht der gymnasialen Oberstufe. In J. Baumert, W. Bos & R. Lehmann (Eds.), *TIMSS/III. Dritte Internationale Mathematikund Naturwissenschaftsstudie—Mathematisch-naturwissenschaftliche Bildung am Ende der Schullaufbahn - Band 2: Mathematische und physikalische Kompetenzen am Ende der gymnasialen Oberstufe*. Opladen: Leske+ Budrich, S. 271-316.

Baumert, J., Köller, O., Lehrke, M., & Brockmann, J. (2000). Anlage und Durchführung der Dritten Internationalen Mathematik- und Naturwissenschaftsstudie zur Sekundarstufe II (TIMSS/III) - Technische Grundlagen. In J. Baumert, W. Bos & R. Lehmann (Eds.), *Dritte Internationale Mathematikund Naturwissenschaftsstudie-Mathematische und naturwissenschaftliche Bildung am Ende der Schullaufbahn - Band I: Mathematische und naturwissenschaftliche Grundbildung am Ende der Pflichtschulzeit*. Obpladen: Leske und Budrich, S. 8-14.

Baumert, J., & Kunter, M. (2006). Stichwort: Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft, 9*(4), S. 469-520.

Baumert, J., & Kunter, M. (2011a). Das Kompetenzmodell von COACTIV. In M. Kunter, J. Baumert, W. Blum, U. Klusmann, S. Krauss & M. Neubrand (Eds.), *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften:Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV*. Münster, New York, München, Berlin: Waxmann, S. 29-53.

Baumert, J., & Kunter, M. (2011b). Das mathematikspezifische Wissen von Lehrkräften, kognitive Aktivierung im Unterricht und Lernfortschritte von Schülerinnen und Schülern. In M. Kunter, J. Baumert, W. Blum, U. Klusmann, S. Krauss & M. Neubrand (Eds.), *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV*. Münster, New York, München, Berlin: Waxmann, S. 163-192.

Baumert, J., Kunter, M., Blum, W., Brunner, M., Voss, T., Jordan, A., . . . Tsai, Y. (2011). Teachers' Mathematical Knowledge, Cognitive Activation in the Classroom, and Student Progress. *American Educational Research Journal, 47*(1), S. 133-180.

Baumert, J., Kunter, M., Blum, W., Klusmann, U., Krauss, S., & Neubrand, M. (2011). Professionelle Kompetenz von Lehrkfräften, kognitiv aktivierender Unterricht und mathematische Kopetenz von Schülerinnen und Schülern (COACTIV) - Ein Forschungsprogramm. In M. Kunter, J. Baumert, W. Blum, U. Klusmann, S. Krauss & M. Neubrand (Eds.), *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften - Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV*. Münster, New York, München, Berlin: Waxmann, S. 7-27.

Baumert, J., Kunter, M., Brunner, M., Krauss, S., Blum, W., & Neubrand, M. (2003). Mathematikunterricht aus der Sicht der PISA-Schülerinnen und-Schüler und ihrer Lehrkräfte. *PISA*, S. 314-354.

Berliner, D. C. (2001). Learning about and learning from expert teachers. *International Journal of Educational Research, 35*(5), S. 463-482.

Blömeke, S. (2002). *Universität und Lehrerausbildung*. Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Blömeke, S., Felbrich, A., & Müller, C. (2008a). Messung des erziehungswissenschaftlichen Wissens angehender Lehrkräfte. In S. Blömeke, G. Kaiser & R. Lehmann (Eds.), *Professionelle Kompetenz angehender Lehrerinnen und Lehrer: Wissen, Überzeugungen und Lerngelegenheiten deutscher Mathematikstudierender und-referendare-Erste Ergebnisse zur Wirksamkeit der Lehrerausbildung*. Münster: Waxmann, S. 171-194.

Blömeke, S., Felbrich, A., & Müller, C. (2008b). Theoretischer Rahmen und Untersuchungsdesign. In S. Blömeke, G. Kaiser & R. Lehmann (Eds.), *Professionelle Kompetenz angehender Lehrerinnen und Lehrer. Wissen, Überzeugungen und Lerngelegenheiten deutscher Mathematik-Studierender und-Referendare–erste Ergebnisse zur Wirksamkeit der Lehrerausbildung*. Münster: Waxmann, S. 15-48.

Blömeke, S., Felbrich, A., Müller, C., Kaiser, G., & Lehmann, R. (2008). Effectiveness of teacher education. *ZDM, 40*(5), S. 719-734.

Blömeke, S., Kaiser, G., Döhrmann, M., & Lehmann, R. (2010). Mathematisches und mathematikdidaktisches Wissen angehender Sekundarstufen-I-Lehrkräfte im internationalen Vergleich. In S. Blömeke, G. Kaiser & R. Lehmann (Eds.), *TEDS-M 2008 - Professionelles Wissen und Lerngelegenheiten angehender Mathematiklehrkräfte dür die Sekundarstufe I im internationalen Vergleich*. Münster: Waxmann, S. 197-238.

Blömeke, S., Kaiser, G., & Lehmann, R. (2008). *Professionelle Kompetenz angehender Lehrerinnen und Lehrer: Wissen, Überzeugungen und Lerngelegenheiten deutscher Mathematikstudierender und-referendare-Erste Ergebnisse zur Wirksamkeit der Lehrerausbildung*. Münster: Waxmann.

Blömeke, S., Kaiser, G., & Lehmann, R. (2010a). *TEDS-M 2008 - Professionelle Kompetenz und Lerngelegenheiten angehender Primarstufenlehrkräfte im internationalen Vergleich.* Münster: Waxmann Verlag.

Blömeke, S., Kaiser, G., & Lehmann, R. (2010b). TEDS-M 2008 Sekundarstufe I: Ziele, Untersuchungsanlage und zentrale Ergebnisse In S. Blömeke, G. Kaiser & R. Lehmann (Eds.), *TEDS-M 2008 - Professionelle Kompetenz und Lerngelegenheiten angehender Mathematiklehrkräfte für die Sekundarstufe I im internationalen Vergleich*. Münster: Waxmann, S. 11-38.

Blömeke, S., Kaiser, G., & Lehmann, R. (2010c). *TEDS-M 2008: Professionelle Kompetenz und Lerngelegenheiten angehender Mathematiklehrkräfte für die Sekundarstufe I im internationalen Vergleich*. Münster: Waxmann

Blömeke, S., Kaiser, G., Schwarz, B., Seeber, S., Lehmann, R., Felbrich, A., & Müller, C. (2008). Fachbezogenes Wissen am Ende der Ausbildung. In S. Blömeke, G. Kaiser & R. Lehmann (Eds.), *Professionelle Kompetenz angehender Lehrerinnen und Lehrer - Wissen, Überzeugungen und Lerngelegenheiten deutscher Mathematikstudierender und Referendare*. Münster: Waxmann, S. 89-104.

Blömeke, S., Müller, C., Felbrich, A., & Kaiser, G. (2008). Epistemologische Überzeugungen zur Mathematik. In S. Blömeke, G. Kaiser & R. Lehmann (Eds.), *Professionelle Kompetenz angehender Lehrerinnen und Lehrer: Wissen, Überzeugungen und Lerngelegenheiten deutscher Mathematikstudierender und-referendare-Erste Ergebnisse zur Wirksamkeit der Lehrerausbildung*. Münster: Waxmann

Blömeke, S., Risse, J., Müller, C., Eichler, D., & Schulz, W. (2006). Analyse der Qualität von Aufgaben aus didaktischer und fachlicher Sicht. *Unterrichtswissenschaft, 34*(4), S. 330-357.

Blömeke, S., Seeber, S., Lehmann, R., Kaiser, G., Schwarz, B., Felbrich, A., & Müller, C. (2008). Messung fachbezogenen Wissens angehender Mathematiklehrkräfte. In S. Blömeke, G. Kaiser & R. Lehmann (Eds.), *Professionelle Kompetenz angehender Lehrerinnen und Lehrer: Wissen, Überzeugungen und Lerngelegenheiten deutscher Mathematikstudierender und-referendare-Erste Ergebnisse zur Wirksamkeit der Lehrerausbildung*. Münster: Waxmann, S. 50-88.

Blum, W., Drüke-Noe, C., Hartung, R., & Köller, O. (2006). *Bildungsstandards Mathematik: konkret - Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsideen und Fortbildungsmöglichkeiten*. Berlin: Cornelsen/Scriptor.

Blum, W., & vom Hofe, R. (2003). Welche Grundvorstellungen stecken in der Aufgabe. *Mathematik Lehren, 118*, S. 14-18.

Blum, W., vom Hofe, R., Jordan, A., & Kleine, M. (2004). Grundvorstellungen als aufgabenanalytisches und diagnostisches Instrument bei PISA. In M. Neubrand (Ed.), *Mathematische Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern in Deutschland. Vertiefende Analysen im Rahmen von PISA 2000*. Wiesbaden: VS Verlag, S. 145-157.

Bromme, R. (1981). *Das Denken von Lehrern bei der Unterrichtsvorbereitung. Eine empirische Untersuchung zu kognitiven Prozessen von Mathematiklehrern*. Weinheim: Beltz.
Bromme, R. (1992). *Der Lehrer als Experte*. Bern: Huber.
Bromme, R. (2008). Lehrerexpertise. In W. Schneider & M. Hasselhorn (Eds.), *Handbuch der Pädagogischen Psychologie*. Göttingen: Hogrefe, S. 159-167.
Bromme, R., Hömberg, E., & Seeger, F. (1981). *Die andere Hälfte des Arbeitstages: Interviews mit Mathematiklehrern über alltägliche Unterrichtsvorbereitung*: Institut für Didaktik der Mathematik der Universität Bielefeld.
Bromme, R., & Seeger, F. (1979). *Unterrichtsplanung als Handlungsplanung: Eine psychologische Einführung in die Unterrichtsvorbereitung*. Königstein: Scriptor.
Bromme, R., Seeger, F., & Steinbring, H. (1990). *Aufgaben als Anforderungen an Lehrer und Schüler*. Köln: Aulis Verlag Deubner.
Brophy, J. (1999). Teaching. *Educational practices series, 1*, S. 1-36.
Brophy, J., & Good, T. L. (1986). Teacher behaviour and student achievement. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching*. New York: Macmillian, S. 328-375.
Bruckmaier, G. (in Vorbereitung).
Bruckmaier, G., Krauss, S., Blum, W., & Neubrand, M. (2012). Zur Auswahl und Anordnung von Mathematik-Aufgaben – Eine Untersuchung im Rahmen der COACTIV-Studie *Beiträge zum Mathematikunterricht 2012*. Münster: Waxmann.
Bruder, R. (2003). *Methoden und Techniken des Problemlösenlernens. Material im Rahmen des BLK-Programms „Sinus " zur „Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts"*. Kiel: IPN.
Bruder, R., & Collet, C. (2011). Problemlösen lernen im Mathematikunterricht. Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor.
Bruner, J. S. (1972). *Der Prozeß der Erziehung*. Berlin: Berlin Verlag.
Brünken, R., & Seufert, T. (2006). Aufmerksamkeit, Lernen, Lernstrategien. In H. Mandl & H. F. Friedrich (Eds.), *Handbuch Lernstrategien*. Göttingen: Hogrefe.
Brunner, M., Kunter, M., Krauss, S., Baumert, J., Blum, W., Dubberke, T., . . . Neubrand, M. (2006). Welche Zusammenhänge bestehen zwischen dem fachspezifischen Professionswissen von Mathematiklehrkräften und ihrer Ausbildung sowie beruflichen Fortbildung? *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft, 9*(4), S. 521-544.
Brunner, M., Kunter, M., Krauss, S., Klusmann, U., Baumert, J., Blum, W., . . . Löwen, K. (2006). Die professionelle Kompetenz von Mathematiklehrkräften. Konzeptualisierung, Erfassung und Bedeutung für den Unterricht. In M. Prenzel (Ed.), *Untersuchungen zur Bildungsqualität von Schule. Abschlussbericht des DFG-Schwerpunktprogramms*. Münster: Waxmann, S. 54-82.
Buchwald, P., & Hobfoll, S. E. (2004). Burnout aus ressourcentheoretischer Perspektive. *Psychologie in Erziehung und Unterricht, 51*, S. 247-257.
Chi, M. T. H. (2011). Theoretical Perspectives, Methodological Approaches, and Trends in the Study of Expertise. In Y. Li & G. Kaiser (Eds.), *Expertise in Mathematics Instruction: An International Perspective*. New York: Springer, S. 17-39.
Chinn, C. A., & Brewer, W. F. (1993). The role of anomalous data in knowledge acquisition: A theoretical framework and implications for science instruction. *Review of educational research, 63*(1), S. 1-49.
Christiansen, B., & Walther, G. (1986). Task and activity. In B. Christiansen, A. G. Howsen & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education*. Dordrecht, Boston, Lancaster, Tokyo: D. Reidel Publishing Company, S. 243-307.

Clarke, D. J., Keitel, C., & Shimizu, Y. (2006). *Mathematics Classrooms in Twelve Countries: The Insider's Perspective*. Rotterdam: Sense Publishers.

Clausen, M., Reusser, K., & Klieme, E. (2003). Unterrichtsqualitat auf der Basis hoch-inferenter Unterrichtsbeurteilungen: Ein Vergleich zwischen Deutschland und der deutschsprachigen Schweiz. *Unterrichtswissenschaft, 31*(2), S. 122-141.

Cohors-Fresenborg, E., Sjuts, J., & Sommer, N. (2004). Komplexität von Denkvorgängen und Formalisierung von Wissen. In M. Neubrand (Ed.), *Mathematische Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern in Deutschland. Vertiefende Analysen im Rahmen von PISA 2000*. Wiesbaden: VS Verlag, S. 109-144.

Diedrich, M., Thubaß, C., & Klieme, E. (2002). Professionelles Lehrerwissen und selbstberichtete Unterrichtspraxis im Fach Mathematik. *Zeitschrift für Pädagogik, 45. Beiheft*, S. 107-123.

Dinkelaker, J., & Herrle, M. (2009). *Erziehungswissenschaftliche Videographie: Eine Einführung*. Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.

DMV, GDM, & MNU (Producer). (2008, 14.09.2011). Standards für die Lehrerbildung - Empfehlungen von DMV, GDM und MNU.

Döhrmann, M., Kaiser, G., & Blömeke, S. (2010). Messung des mathematischen und mathematikdidaktischen Wissens: Theoretischer Rahmen und Teststruktur. In S. Blömeke, G. Kaiser & R. Lehmann (Eds.), *TEDS-M 2008 - Professionelle Kompetenz und Lerngelegenheiten angehender Mathematiklehrkräfte für die Sekundarstufe I im internationalen Vergleich*. Münster: Waxmann, S. 169-196.

Drollinger-Vetter, B. (2006). Kognitiver Anspruchsgehalt der Aufgabenstellungen. In E. Klieme, C. Pauli & K. Reusser (Eds.), *Dokumentation der Erhebungs- und Auswertungsinstrumente zur schweizerisch-deutschen Videostudie "Unterrichtsqualität, Lernverhalten und mathematisches Verständnis" Teil 3: Videoanalysen*. Frankfurt am Main: Materialien zur Bildungsforschung Band 15, S. 148-164.

Drollinger-Vetter, B., & Lipowsky, F. (2006a). Fachdidaktische Qualität der Theoriephasen. In E. Klieme, C. Pauli & K. Reusser (Eds.), *Dokumentation der Erhebungs- und Auswertungsinstrumente zur schweizerisch-deutschen Videostudie "Unterrichtsqualität, Lernverhalten und mathematisches Verständnis" Teil 3: Videoanalysen*. Frankfurt am Main: Materialien zur Bildungsforschung Band 15, S. 189-205.

Drollinger-Vetter, B., & Lipowsky, F. (2006b). Kognitiver Anspruchsgehalt der Aufgabenbearbeitung. In E. Klieme, C. Pauli & K. Reusser (Eds.), *Dokumentation der Erhebungs- und Auswertungsinstrumente zur schweizerisch-deutschen Videostudie "Unterrichtsqualität, Lernverhalten und mathematisches Verständnis" Teil 3: Videoanalysen*. Frankfurt am Main: Materialien zur Bildungsforschung Band 15, S. 165-188.

Drüke-Noe, C., & Jahnke, T. (2007). Präsenstiern im Mathematikunterricht. *Mathematik lehren, 143*, S. 4-8.

Dubberke, T., Kunter, M., McElvany, N., Brunner, M., & Baumert, J. (2008). Lerntheoretische Überzeugungen von Mathematiklehrkräften. *Zeitschrift für Pädagogische Psychologie, 22*(3), S. 193-206.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* (5), S. 37-65.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1), S. 103-131.

Edelmann, W. (2000). *Lernpsychologie*. Weinheim: Beltz PVU.

Fenstermacher, G. D. (1994). The knower and the known: The nature of knowledge in research on teaching. *Review of research in education, 20*, S. 3-56.

Fischer, A. W., Niesel, V., & Sjuts, J. (2011). *Lehr-Lern-Labore und ihre Bedeutung für Schule und Lehrerbildung. Eine Bestandsaufnahme im Verbundprojekt OLAW.* Oldenburg: DIZ.

Fischler, H. (2001). Lehrerhandeln und Lehrervorstellungen bei Anfängern: Untersuchungen zu einem gestörten Verhältnis. In S. von Aufschnaiter & M. Welzel (Eds.), *Nutzung von Videodaten zur Untersuchung von Lehr-Lern-Prozessen - Aktuelle Methoden empirischer pädagogischer Forschung*. Münster Waxmann, S. 173-184.

Flick, U. (1995). *Qualitative Forschung: Theorie, Methoden, Anwendung in Psychologie und Sozialwissenschaften*. Reinbek bei Hamburg: Rowohlt.

Flick, U. (2002). *Qualitative Sozialforschung - Eine Einführung*. Reinbek bei Hamburg: Rowohlt.

Flick, U. (2011). *Triangulation - Eine Einführung*. Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.

Fraedrich, A. M. (1995). *Die Satzgruppe des Pythagoras*. Mannheim u.a.: BI-Wissenschaftsverlag.

Friebertshäuser, B. (1997). Interviewtechniken – ein Überblick. In B. Friebertshäuser & A. Prengel (Eds.), *Handbuch Qualitative Forschungsmethoden in der Erziehungswissenschaft*. Weinheim, München: Juventa Verlag, S. 371-395.

Girnat, B., & Eichler, A. (2011). Secondary Teachers' Beliefs on Modelling in Geometry and Stochastics. In G. Kaiser, W. Blum, R. B. Ferri & G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling*. New York: Springer, S. 75-84.

Glaeser, G. (1980). *Didaktik mathematischer Probleme und Aufgaben*. Braunschweig, Wiesbaden: Vieweg.

Gläser, J., & Laudel, G. (2006). *Experteninterviews und qualitative Inhaltsanalyse*. Wiesbaden: VS Verlag.

Gläser, J., & Laudel, G. (2009). *Experteninterviews und qualitative Inhaltsanalyse als Instrumente rekonstruierender Untersuchungen*. Wiesbaden: VS Verlag.

Goldin, G., Rösken, B., & Törner, G. (2009). Beliefs - No Longer a Hidden Variable in Mathematical Teaching and Learning Processes. In J. Maaß & W. Schlöglmann (Eds.), *Beliefs and Attitudes in Mathematics Education*. Rotterdamm, Taipei: Sense Publishers;S. 1-18.

Golenia, J., & Neubert, K. (2008). *Mathematik 9: Denken und Rechnen*. Braunschweig: Westermann.

Greefrath, G. (2010). *Didaktik des Sachrechnens in der Sekundarstufe*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Griesel, H. (2009). *Elemente der Mathematik, Niedersachsen*. Braunschweig: Schroedel.

Große, C. S. (2005). *Lernen mit multiplen Lösungswegen*. Münster: Waxmann.

Grossman, P. L. (1990). *The making of a teacher: Teacher knowledge and teacher education*. New York: Teachers College Press.

Gruber, H., & Mandl, H. (1996). Das Entstehen von Expertise. In J. Hoffmann & W. Kintsch (Eds.), *Enzyklopädie der psychologie, Theorie und Forschung, Kognition, Vol. 7: Lernen*. Göttingen: Hogrefe, S. 583-615.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics, 44*(1), S. 5-23.

Hasemann, K., & Stern, E. (2002). Die Förderung des mathematischen Verständnisses anhand von Textaufgaben–Ergebnisse einer Interventionsstudie in Klassen des 2. Schuljahres. *Journal für Mathematik-Didaktik, 23*(3/4), S. 222-242.

Hasselhorn, M., & Gold, A. (2006). *Pädagogische Psychologie*. Stuttgart: Kohlhammer.
Hatano, G., & Inagaki, K. (1986). Two courses of expertise. In H. W. Stevenson, H. Azuma & K. Hakuta (Eds.), *Child developement and education in Japan* (17). Neq York: Freeman and Company, S. 262-272.
Helmke, A. (2009). *Unterrichtsqualität und Lehrerprofessionalität: Diagnose, Evaluation und Verbesserung des Unterrichts*. Seelze-Velber: Kallmeyer.
Hepp, R., & Miehe, K. (2006). Kooperatives Lernen - Gemeinsam Mathematik betreiben: Konzepte für einen schüleraktivierenden Unterricht. *Mathematik lehren, 139*, S. 4-7.
Hiebert, J., Gallimore, R., Garnier, H., Bogard Givven, K., Holingsworth, H., Jacobs, J., . . . Stigler, J. (2003). *Teaching mathematics in seven countries: Results from the TIMSS 1999 video study*. Washington: US Departement of Education, National Center for Education Statistics
Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The Case of mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, S. 1-27.
Hiebert, J., Stigler, J., & Manaster, A. (1999). Mathematical Features of Lessons in the TIMSS Video Study. *ZDM, 99*(6), S. 196-201.
Hill, H. C., Rowan, B., & Ball, D. L. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal, 42*(2), S. 371-406.
Hinrichs, G. (2008). *Modellierung im Mathematikunterricht*. Heidelberg: Spektrum.
Hopf, D. (1980). *Mathematikunterricht - Eine empirische Untersuchung zur Didaktik und Unterrichtsmethode in der 7. Klasse des Gymnasiums*. Stuttgard: Klett.
Hugener, I. (2006). Überblick über die Beobachtungsinstrumente. In E. Klieme, C. Pauli & K. Reusser (Eds.), *Dokumentation der Erhebungs- und Auswertungsinstrumente zur schweizerisch-deutschen Videostudie "Unterrichtsqualität, Lernverhalten und mathematisches Verständnis" Teil 3: Videoanalysen*. Frankfurt am Main: Materialien zur Bildungsforschung Band 15, S. 45-54.
Hugener, I. (2008). *Inszenierungsmuster im Unterricht und Lernqualität* Münster: Waxmann.
Hugener, I., Pauli, C., & Reusser, K. (2007). Inszenierungsmuster, kognitive Aktivierung und Leistung im Mathematikunterricht. Analysen aus der schweizerisch-deutschen Videostudie. In M. Lemmermöhle, M. Rothgangel, S. Bögenholz, M. Hasselhorn & R. Watermann (Eds.), *Professionell Lehren-Erfolgreich Lernen*. Münster: Waxmann, S. 109-121.
Ingenkamp, K. (1970). *Handbuch der Unterrichtsforschung. Teil I-III*. Weinheim: Beltz.
Jordan, A., Krauss, S., Löwen, K., Blum, W., Neubrand, M., Brunner, M., . . . Baumert, J. (2008). Aufgaben im COACTIV-Projekt: Zeugnisse des kognitiven Aktivierungspotentials im deutschen Mathematikunterricht. *Journal für Mathematikdidaktik, 29*(2), S. 83–107.
Jordan, A., Ross, N., Krauss, S., Baumert, J., Blum, W., Neubrand, M., . . . Kunter, M. (2006). *Klassifikationsschema für Mathematikaufgaben: Dokumentation der Aufgabenkategorisierung im COACTIV-Projekt*. Berlin: Max-Planck-Inst. für Bildungsforschung.
Kanfer, R., & Heggestad, E. D. (1997). Motivational traits and skills: A person-centered approach to work motivation. *Reseacrh in Organizational Behavior, 19*, S. 1-56.
Kattmann, U. (2007). Didaktische Rekonstruktion—eine praktische Theorie. In D. Krüger & H. Vogel (Eds.), *Theorien in der biologiedidaktischen Forschung*. Berlin, Heidelberg: Springer, S. 93-104.

Kattmann, U., Duit, R., Gropengießer, H., & Komorek, M. (1997). Das Modell der Didaktischen Rekonstruktion–Ein Rahmen für naturwissenschaftsdidaktische Forschung und Entwicklung. *Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaften, 3*(3), S. 3-18.

Kaune, C. (2006). Reflection and metacognition in mathematics education—Tools for the improvement of teaching quality. *ZDM, 38*(4), S. 350-360.

Kersting, N. B., Givvin, K. B., Thompson, B. J., Santagata, R., & Stigler, J. W. (2012). Measuring Usable Knowledge Teachers' Analyses of Mathematics Classroom Videos Predict Teaching Quality and Student Learning. *American Educational Research Journal, 49*(3), S. 568-589.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding ist up: helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Acadamy Press.

Klein, F. (1968). *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus - Teil 1: Arithmetik, Algebra, Analysis, 4. Auflage*. Berlin: Springer.

Kleinknecht, M. (2010). *Aufgabenkultur im Unterricht - eine empirisch-didaktische Video- und Interviewstudie an Hauptschulen*. Baltmannsweiler: Schneider Verlag Hohengehren.

Klieme, E., & Baumert, J. (2001). *TIMSS–Impulse für Schule und Unterricht*. Bonn: Bundesministerium für Bildung und Forschung.

Klieme, E., & Bos, W. (2000). Mathematikleistung und mathematischer Unterricht in Deutschland und Japan. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft, 3*(3), S. 359-379.

Klieme, E., Lipowsky, F., Rakoczy, K., & Ratzka, N. (2006). Qualitätsdimensionen und Wirksamkeit von Mathematikunterricht. In M. Prenzel & L. Allolio-Näcke (Eds.), *Untersuchungen zur Bildungsqualität von Schule - Abschlussbericht des DFG-Schwerpunktprogramms*. Münster: Waxmann, S. 127-146.

Klieme, E., Neubrand, M., & Lüdtke, O. (2001). Mathematische Grundbildung: Testkonzeption und Ergebnisse. In J. Baumert, E. Klieme, M. Neubrand, M. Prenzel, U. Schiefele, W. Schneider, P. Stanat, K.-J. Tillmann & M. Weiß (Eds.), *PISA 2000 - Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich*. Opladen: Leske & Budrich, S. 139–190.

Klieme, E., Pauli, C., & Reusser, K. (2006). *Dokumentation der Erhebungs- und Auswertungsinstrumente zur schweizerisch-deutschen Videostudie "Unterrichtsqualität, Lernverhalten und mathematisches Verständnis" Teil 3: Videoanalysen*. Frankfurt am Main: Materialien zur Bildungsforschung Band 15.

Klieme, E., Schümer, G. & Knoll, S. (2003). Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I: "Aufgabenkultur" und Unterrichtsgestaltung. In: Bundesministerium für Bildung und Forschung (Hrsg.), TIMSS - Impulse für den Unterricht. Forschungsbefunde, Reforminitiativen, Praxisberichte und Video-Dokumente, S. 43-58.

Klusmann, U. (2011). Allgemeine berufliche Motivation und Selbstregulation. In M. Kunter, J. Baumert, W. Blum, U. Klusmann, S. Krauss & M. Neubrand (Eds.), *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften - Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV*. Münster: Waxmann, S. 277-294.

Köller, O., Baumert, J., & Neubrand, J. (2000). Epistemologische Überzeugungen und Fachverständnis im Mathematik-und Physikunterricht. In J. Baumert, W. Bos & R. Lehmann (Eds.), *Dritte Internationale Mathematik-und Naturwissenschaftsstudie-Mathematische und naturwissenschaftliche Bildung am Ende der Schullaufbahn* (2). Opladen: Leske & Budrich, S. 229-269.

Krause, U. M., & Stark, R. (2006). Vorwissen aktivieren. In H. Mandl & H. F. Friedrich (Eds.), *Handbuch Lernstrategien*. Göttingen: Hogrefe, S. 38–49.

Krauss, S. (2011). Das Experten-Paradigma in der Forschung zum Lehrerberuf. In E. Terhart, H. Bennewitz & M. Rothland (Eds.), *Handbuch der Forschung zum Lehrerberuf*. Münster: Waxmann, S. 171-191.

Krauss, S., Blum, W., Brunner, M., Neubrand, M., Baumert, J., Kunter, M., . . . Elsner, J. (2011). Konzeptualisierung und Testkonstruktion zum fachbezogenen Professionswissen von Mathematiklehrkräften. In: M. Kunter, J. Baumert, W. Blum, U. Klusmann, S. Krauss & M. Neubrand (Eds.), *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften - Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV*. Münster: Waxmann, S. 135-162.

Krauss, S., & Brunner, M. (2011). Schnelles Beurteilen von Schülerantworten: Ein Reaktionszeittest für Mathematiklehrer/innen. *Journal für Mathematik-Didaktik, 32*(2), S. 233-251.

Krauss, S., Neubrand, M., Blum, W., Baumert, J., Brunner, M., Kunter, M., & Jordan, A. (2008). Die Untersuchung des professionellen Wissens deutscher Mathematik-Lehrerinnen und -Lehrer im Rahmen der COACTIV-Studie. *Journal für Mathematik-Didaktik, 29*(3/4), S. 223–258.

Kreis, A., & Staub, F. C. (2009). Kollegiales Unterrichtscoaching. Ein Ansatz zur kooperativen und fachspezifischen Unterrichtsentwicklung im Kollegium. In K. Maag-Merki (Ed.), *Kooperation und Netzwerkbildung. Strategien zur Qualitätsentwicklung in Schulen*. Seelze-Velber: Klett – Kallmeyer, S. 26-39.

Kuckartz, U. (2010). *Einführung in die computergestützte Analyse qualitativer Daten*. Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.

Kultusministerkonferenz. (2003). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den mittleren Schulabschluss*. Bonn: KMK.

Kultusministerkonferenz (2004). Standards für die Lehrerbildung: Bildungswissenschaften. (www.kmk.org)

Kultusministerkonferenz (2008). Ländergemeinsame inhaltliche Anforderungen für die Fachwissenschaften und Fachdidaktiken in der Lehrerbildung. (www.kmk.org)

Kunter, M. (2011). Motivation als Teil der professionellen Kompetenz. In M. Kunter, J. Baumert, W. Blum, U. Klusmann, S. Krauss & M. Neubrand (Eds.), *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften - Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV*. Münster: Waxmann, S. 259-276.

Kunter, M., Baumert, J., Blum, W., Klusmann, U., Krauss, S., & Neubrand, M. (2011). *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften:Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV*. Münster: Waxmann.

Kunter, M., Dubberke, T., Baumert, J., Blum, W., Brunner, M., Jordan, A., . . . Tsai, Y. (2006). Mathematikunterricht in den PISA-Klassen 2004: Rahmenbedingungen, Formen und Lehr-Lernprozesse In P.-K. Deutschland (Ed.), *PISA 2003: Untersuchungen im Verlauf eines Schuljahres*. Münster: Waxmann, S. 161-194.

Kunter, M., & Voss, T. (2011). Das Modell der Unterrichtsqualität in COACTIV: Eine multikriteriale Analyse. In M. Kunter, J. Baumert, W. Blum, U. Klusmann, S. Krauss & M. Neubrand (Eds.), *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV*. Münster: Waxmann, S. 163-192.

Lenné, H. (1969). *Analyse der Mathematikdidaktik in Deutschland*. Stuttgard: Klett.

Leuchter, M. (2009). *Die Rolle der Lehrperson bei der Aufgabenbearbeitung: Unterrichtsbezogene Kognitionen von Lehrpersonen*. Münster: Waxmann.

Leuders, T., & Holzäpfel, L. (2011). Kognitive Aktivierung im Mathematikunterricht. *Unterrichtswissenschaft*(3), S. 213-230.

Leuders, T., & Prediger, S. (2005). Funktionierts?–Denken in Funktionen. *Praxis der Mathematik in der Schule, 47*(2), S. 1-7.

Lindmeier, A. (2011). *Modeling and Measuring Knowledge and Competencies of Teachers*. Münster: Waxmann.

Lindmeier, A., Heinze, A., & Reiss, K. (2010). Fachspezifische Wissens-und Kompetenzkomponenten bei Lehrkräften und Studierenden des Lehramts. In A. Lindmeier & S. Ufer (Eds.), *Beiträge zum Mathematikunterricht - Vorträge auf der 44. Jahrestagung für Mathematikdidaktik*. Münster: WTM, 561-564.

Lipowsky, F., Thußbas, C., Klieme, E., Reusser, K., & Pauli, C. (2003). Professionnelles Lehrerwissen, selbstbezogene Kognitionen und wahrgenommene Schulumwelt-Ergebnisse einer kulturvergleichenden Studie deutscher und Schweizer Mathematiklehrkräfte. *Unterrichtswissenschaft, 31*, S. 206-237.

Löwen, K., Baumert, J., Kunter, M., Krauss, S., & Brunner, M. (2011). Methodische Grundlagen des Forschungsprogramms. In M. Kunter, J. Baumert, W. Blum, U. Klusmann, S. Krauss & M. Neubrand (Eds.), *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften: Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV*. Münster: Waxmann, S. 69-84.

Malle, G. (2002). Begründen - Eine vernachlässigte Tätigkeit im Mathematikunterricht. *Mathematik lehren, 110*, S. 4-8.

Mayer, R. E. (2004). Should There Be a Three-Strikes Rule Against Pure Discovery Learning? - The Case for Guided Methods of Instruction. *American Psychologist, 59*(1), S. 14-19.

Mayring, P. (2010). *Qualitative Inhaltsanalyse. Grundlagen und Techniken (11. aktualisierte und überarbeitete Auflage)*. Weinheim und Basel: Beltz.

Merkens, H. (2000). Auswahlverfahren, Sampling, Fallkonstruktion. In U. Flick, E. von Kardorff & I. Steinke (Eds.), *Qualitative Forschung - Ein Handbuch*. Reinbek bei Hamburg: Rowohlt, S. 286-299.

Meuser, M., & Nagel, U. (1997). Das Experteninterview – Wissenssoziologische Vorausetzungen und methodische Durchführung. In B. Friebertshäuser & A. Prengel (Eds.), *Handbuch qualitative Forschungsmethoden in der Erziehungswissenschaft*. Weinheim, München: Juventa Verlag, S. 481-491.

Meyer, H. (2004). *Was ist guter Unterricht?* Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor.

Meyer, H. (2007a). *Leitfaden zur Unterrichtsvorbereitung*. Berlin: Cornelsen Sriptor.

Meyer, H. (2007b). *Unterrichtsmethoden - Bd.2 Praxisband (12. Auflage)*. Frankfurt am Main: Cornelsen Scriptor.

Meyer, M., & Prediger, S. (2009). Warum? Argumentieren, Begründen, Beweisen. *Praxis der Mathematik in der Schule, 30*, S. 1-7.

Mietzel, G. (2003). *Pädagogische Psychologie des Lernens und Lehrens, 7. überarbeitete Auflage*. Göttingen, Bern, Toronto, Seattle: Hogrefe.

Müller, C., Felbrich, A., & Blömeke, S. (2008). Überzeugungen zum Lehren und Lernen von Mathematik. In S. Blömeke, G. Kaiser & R. Lehmann (Eds.), *Professionelle Kompetenz angehender Lehrerinnen und Lehrer: Wissen, Überzeugungen und Lerngelegenheiten deutscher Mathematikstudierender und -referendare - Erste Ergebnisse zur Wirksamkeit der Lehrerausbildung*. Münster: Waxmann, S. 247-276.

Nawrath, D. (2010). *Kontextorientierung - Rekonstruktion einer fachdidaktischen Konzeption für den Physikunterricht*. Oldenburg: DIZ

NCTM, National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Neubrand, J. (1998). Japanischer Unterricht aus mathematikdidaktischer Sicht. *mathematik lehren, 90*, S. 52-55.

Neubrand, J. (2002). *Eine Klassifikation mathematischer Aufgaben zur Analyse von Unterrichtssituationen: Selbsttätiges Arbeiten in Schülerarbeitsphasen in den Stunden der TIMSS-Video-Studie*. Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Neubrand, J. (2006). The TIMSS 1995 and 1999 video studies. In F. K. S. Leung, K.-D. Graf & F. J. Lopez-Real (Eds.), *Mathematics Education in Different Cultural Traditions-A Comparative Study of East Asia and the West - The 13th ICMI Study*. New York: Springer, S. 291-318.

Neubrand, J., & Neubrand, M. (1999). Effekte multipler Lösungs möglichkeiten: Beispiele aus einer japanischen Mathematikstunde In C. Selter & G. Walther (Eds.), *Mathematikdidaktik als design science – Festschrift für Erich Christian Wittmann*. Leipzig, Stuttgard, Düsseldorf: Klett Grundschulverlag, S. 148-158.

Neubrand, J., & Neubrand, M. (2000). Tätigkeiten anregen - didaktische Strukturen anlegen: Eine japanische Stunde zum Beweisen. In L. Flade & W. Herget (Eds.), *Mathematik lehren und lernen nach TIMSS: Anregungen für die Sekundarstufen*. Berlin: Volk und Wissen, S. 43-50.

Neubrand, M. (1986). Aspekte und Beispiele zum Prozeßcharakter der Mathematik. *Beiträge zum Mathematikunterricht 1986*, S. 25-32.

Neubrand, M. (1990). Stoffvermittlung und Reflexion: Mögliche Verbindungen im Mathematikunterricht *Mathematica Didactica, 13*(1), S. 21-48.

Neubrand, M. (2003). "Mathematical literacy"/„Mathematische Grundbildung". *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft, 6*(3), S. 338-356.

Neubrand, M. (2004). "Mathematical Literacy" und "mathematische Grundbildung": Der mathematikdidaktische Diskurs und die Strukturierung des PISA-Tests. In M. Neubrand (Ed.), *Mathematische Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern in Deutschland: Vertiefende Analysen im Rahmen von PISA 2000*. Wiesbaden: VS Verlag, S. 15-29.

Neubrand, M. (2006). Multiple Lösungswege für Aufgaben: Bedeutung für Fach, Lernen, Unterricht und Leistungserfassung. In W. Blum, C. Drüke-Noe, R. Hartung & O. Köller (Eds.), *Bildungsstandards Mathematik: konkret*. Berlin: Cornelsen Scriptor, S. 162-177.

Neubrand, M. (2010). Inhalte, Arbeitsweisen und Kompetenzen in der (Schul-) Geometrie: Versuch einer theoretischen Klärung. In M. L. u. R. Oldenburg (Ed.), *Basiskompetenzen in der Geometrie*. Hildesheim: Franzbecker, S. 11-34.

Neubrand, M., Jordan, A., Krauss, S., Blum, W., & Löwen, K. (2011). Aufgaben im COACTIV-Projekt: Einblicke in das Potenzial für kognitive Aktivierung im Mathematikunterricht. In M. Kunter, J. Baumert, W. Blum, U. Klusmann, S. Krauss & M. Neubrand (Eds.), *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften:Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV*. Münster: Waxmann, S. 29-53.

Neuweg, G. H. (2001). *Könnerschaft und implizites Wissen: zur lehr-lerntheoretischen Bedeutung der Erkenntnis-und Wissenstheorie Michael Polanyis*. Münster: Waxmann.

Neuweg, G. H. (2002). Lehrerhandeln und Lehrerbildung im Lichte des Konzepts des impliziten Wissens. *Zeitschrift für Pädagogik, 48*(1), S. 10-29.

Neuweg, G. H. (2011). Das Wissen der Wissensvermittler. In E. Terhart, H. Bennewitz & M. Rothland (Eds.), *Handbuch der Forschung zum Lehrerberuf*. Münste: Waxmann, S. 451-477.

Niedersächsisches Kultusministerium. (2006). *Kerncurriculum für das Gymnasium Schuljahrgänge 5-10 Mathematik Niedersachsen*. Hannover: Unidruck.

OECD, Organisation for Economic Co-operation and Development. (2004). *Learning for tomorrow´s world. First results from PISA 2003*. Paris: OECD.

Oser, F. (1997). Standards in der Lehrerausbildung, Teil 1: Berufliche Kompetenzen, die hohen Qualitätsmerkmalen entsprechen. *Beiträge zur Lehrerbildung, 15*, S. 26-37.

Oser, F. (1998). *Ethos – Die Vermenschlichung des Erfolgs. Zur Psychologie der Berufsmoral von Lehrpersonen.* Opladen: Leske Budrich.

Oser, F., & Baeriswyl, F. J. (2000). Choreographies of teaching: Bridging instruction to learning. In V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching*. New York: Macmillian, S. 1031-1065.

Oser, F., & Spychiger, M. (2005). *Lernen ist schmerzhaft. Zur Theorie des Negativen Wissens und zur Praxis der Fehlerkultur.* Weinheim: Beltz.

Palmer, D. J., Stough, L. M., Burdenski Jr, T. K., & Gonzales, M. (2005). Identifying Teacher Expertise: An Examination of Researchers' Decision Making. *Educational Psychologist, 40*(1), S. 13-25.

Pauli, C. (2006). Aufbereitung der Videodaten. In E. Klieme, C. Pauli & K. Reusser (Eds.), *Dokumentation der Erhebungs- und Auswertungsinstrumente zur schweizerisch-deutschen Videostudie "Unterrichtsqualität, Lernverhalten und mathematisches Verständnis" Teil 3: Videoanalysen*. Frankfurt am Main: Materialien zur Bildungsforschung Band 15, S. 38-44.

Pauli, C., Drollinger-Vetter, B., Hugener, I., & Lipowsky, F. (2008). Kognitive Aktivierung im Mathematikunterricht. *Zeitschrift für Pädagogische Psychologie, 22*(2), S. 127-133.

Peschek, W., Prediger, S., & Schneider, E. (2008). Reflektieren und Reflexionswissen im Mathematikunterricht. *Praxis der Mathematik in der Schule, 50*(20), S. 1-6.

Petko, D. (2006). Kameraskript. In E. Klieme, C. Pauli & K. Reusser (Eds.), *Dokumentation der Erhebungs- und Auswertungsinstrumente zur schweizerisch-deutschen Videostudie "Unterrichtsqualität, Lernverhalten und mathematisches Verständnis" Teil 3: Videoanalysen*. Frankfurt am Main: Materialien zur Bildungsforschung Band 15, S. 15-37.

PISA-Konsortium Deutschland. (2004). *PISA 2003: der Bildungsstand der Jugendlichen in Deutschland: Ergebnisse des zweiten internationalen Vergleichs*. Münster: Waxmann

PISA-Konsortium Deutschland. (2007). *PISA 2006: Die Ergebnisse der dritten internationalen Vergleichsstudie*. Münster: Waxmann.

Polya, G. (1967). *Schule des Denkens, 2. Auflage*. Bern, München: Francke Verlag.

Prediger, S. (2007). Philosophical Reflections in Mathematics Classrooms. In K. Francois & J. P. Van Bendegem (Eds.), *Philosophical Dimensions in Mathematics Education*. New York: Sprinnger Science+Business Media.

Prediger, S., & Wittmann, G. (2009). Falsch bringt weiter! - Mit Fehlern umgehen. *Praxis der Mathematik in der Schule, 27*, S. 1-8.

Reiss, K. (2009). Wege zum Beweisen - Einen „Habit of Mind “im Mathematikunterricht etablieren. *Mathematik lehren, 155*, S. 4-9.

Reiss, K., & Wellstein, H. (1995). *Static and dynamic aspects of declarative knowledge in a geometry problem solvin Kontext (Arbeiten aus dem Institut für Mathematik und ihre Didaktik der Universität Flensburg)*. Flensburg: Universität.

Reusser, K. (2009). Empirisch fundierte Didaktik — didaktisch fundierte Unterrichtsforschung. In M. A. Meyer, M. Prenzel & S. Hellekamps (Eds.), *Perspektiven der Didaktik*. Heidelberg, London: VS Verlag für Sozialwissenschaften, S. 219-237.

Rowland, T. (2008). Researching Teachers’ Mathematics Disciplinary Knowledge. In P. Sullivan & T. Wood (Eds.), *Knowledge and Beliefs in Mathematics Teaching and Teaching Developement*: Sense Publishers, S. 273-298.

Rowland, T., Huckstep, P., & Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education, 8*(3), S. 255-281.

Schaarschmidt, U., Kieschke, U., & Fischer, A. W. (1999). Beanspruchungsmuster im Lehrerberuf. *Psychologie in Erziehung und Unterricht, 46*, S. 244-268.

Schmotz, C., Felbrich, A., & Kaiser, G. (2010). Überzeugungen angehender Mathematiklehrkräfte für die Sekundarstufe I im internationalen Vergleich. In S. Blömeke, G. Kaiser & R. Lehmann (Eds.), *TEDS-M 2008: Professionelle Kompetenz und Lerngelegenheiten angehender Mathematiklehrkräfte für die Sekundarstufe I im internationalen Vergleich*. Münster: Waxmann.

Schoenfeld, A., H. (1998). Toward a theory of teaching-in-context. *Issues in Education, 4*(1), S. 1-94.

Schupp, H. (1988). Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I zwischen Tradition und neuen Impulsen. *Der Mathematikunterricht, 34*(6), S. 5-16.

Schwab, J. J. (1978). *Science, curriculum and liberal education.* Chicago: University of Chicago Press.

Seel, N. (2000). *Psychologie des Lernens: Lehrbuch für Pädagogen und Psychologen*. München, Basel: Ernst Reinhardt Verlag.

Shuell, T. J. (1988). The role of the student in learning from instruction. *Contemporary Educational Psychology, 13*(3), S. 276-295.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational researcher, 15*(2), S. 4-14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard educational review, 57*(1), S. 1-23.

Silver, E. A., & Mesa, V. (2011). Coordinating Characterizations of High Quality Mathematics Teaching: Probing the Intersection. In Y. Li & G. Kaiser (Eds.), *Expertise in Mathematics Instruction*: Springer US, S. 63-84.

Sjuts, J. (1999). *Mathematik als Werkzeug zur Wissensrepräsentation*. Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

Sjuts, J. (2001). Metakognition beim Mathematiklernen: das Denken über das Denken als Hilfe zur Selbsthilfe. *Der Mathematikunterricht, 1*, S. 61-68.

Sjuts, J. (2002). Unterschiedliche mentale Konstruktionen beim Aufgabenlösen. *Journal für Mathematikdidaktik Jg, 23*, S. 106-128.

Skovsmose, O. (1998). Linking mathematics education and democracy: citizenship, mathematical archaeology, mathemacy and deliberative interaction. *ZDM, 30*(6), S. 195-203.

Skovsmose, O. (2006). Reflections as a challenge. *ZDM, 38*(4), S. 323-332.

Staub, F. C., & Stern, E. (2002). The nature of teachers' pedagogical content beliefs matters for students' achievement gains: Quasi-experimental evidence from elementary mathematics. *Journal of Educational Psychology, 94*(2), S. 344-355.

Steinbring, H. (1998). Elements of epistemological knowledge for mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education, 1*(2), S. 157-189.

Steudel, H. (1994). Der Satz des Pythagoras - ein Legespiel. *Mathematik lehren, 62*, S. 66-67.

Stölting, P. (2008). *Die Entwicklung funktionalen Denkens in der Sekundarstufe I - Vergleichende Analysen und empirische Studien zum Mathematikunterricht in Deutschland und Frankreich*. Regensburg: Universität Regensburg.

Tabachneck, H., Koedinger, K., & Nathan, M. (1994). Toward a theoretical account of strategy use and sense-making in mathematics problem solving. *Proceedings of the 16th Annual Conference of the Cognitive Science Society*. Hillsdale, NY: Erlbaum, S. 836-841.

Tatto, M. T., Schwille, J. S., Senk, S., Ingvarson, L. C., Peck, R., & Rowley, G. L. (2008). *Teacher education and development study in mathematics (TEDS-M): Conceptual framework*. East Lansing, MI: Teacher Education an Developement International Study Center, College of Education, Michigan State University.

Teddlie, C., & Tashakkori, A. (2009). *Foundations of mixed methods research: Integrating quantitative and qualitative approaches in the social and behavioral sciences*. Thousand Oaks: Sage Publications, Inc.

Tenorth, H. E. (2006). Professionalität im Lehrerberuf. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft, 9*(4), S. 580-597.

Terhart, E. (2002). *Standards für die Lehrerbildung - Eine Expertise für die Kultusministerkonferenz*. Münster: Zentrale Koordination Lehrerausbildung.

Törner, G., Sriraman, B., Sherin, M. G., Heinze, A., & Jablonka, E. (2005). Video-Based Research on Mathematics Teaching and Learning: Research in the Context of Video. In G. M. Lloyd, M. R. Wilson, J. L. M. Wilkins & S. L. Behm (Eds.), *Proceedings of the 27th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education [CD-ROM]*. Eugene, OR: All Academic.

Ulfig, F. (2013). *Geometrische Denkweisen beim Lösen von PISA-Aufgaben - Eine Verbindung quantitativer und qualitativer Analysen*. Wiesbaden: Springer.

Van Dijk, E. M., & Kattmann, U. (2007). A research model for the study of science teachers' PCK and improving teacher education. *Teaching and Teacher Education, 23*(6), S. 885-897.

Vollrath, H. J., & Roth, J. (2012). *Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe (2. Auflage)*. Heidelberg: Spektrum, Akad. Verl.

vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Heidelberg u.a.: Spektrum.

vom Hofe, R. (2003). Grundbildung durch Grundvorstellungen. *Mathematik Lehren, 118*, 4-8.

vom Hofe, R., & Jordan, A. (2009). Wissen vernetzen - Beziehungen zwischen Geometrie und Algebra. *Mathematik lehren, 154*, S. 4-9.

von Aufschnaiter, S., & Welzel, M. (2001). *Nutzung von Videodaten zur Untersuchung von Lehr-Lern-Prozessen - Aktuelle Methoden empirischer pädagogischer Forschung*. Münster Waxmann.

Voss, T., Kleickmann, T., Kunter, M., & Hachfeld, A. (2011). Überzeugungen von Mathematiklehrkräften. In M. Kunter, J. Baumert, W. Blum, U. Klusmann, S. Krauss & M. Neubrand (Eds.), *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften: Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV* . Münster: Waxmann, S. 235-257.

Voss, T., & Kunter, M. (2011). Pädagogisch-psychologisches Wissen von Lehrkräften. In M. Kunter, J. Baumert, W. Blum, U. Klusmann, S. Krauss & M. Neubrand (Eds.), *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften - Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV*. Münster: Waxmann, S. 193-214.

Wahl, D. (2001). Nachhaltige Wege vom Wissen zum Handeln. *Beiträge zur Lehrerbildung, 19*(2), S. 157-174.

Walther, G. (1985). Zur Rolle von Aufgaben im Mathematikunterricht. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht*, S. 28-42.

Weinert, F. E. (1996). " Der gute Lehrer"," die gute Lehrerin" im Spiegel der Wissenschaft. *Beiträge zur Lehrerbildung, 14*(2), S. 141-151.

Weinert, F. E. (1998). Neue Unterrichtskonzepte zwischen gesellschaftlichen Notwendigkeiten, pädagogischen Visionen und psychologischen Möglichkeiten. In K. Bayrisches Staatsministerium für Unterricht, Wissenschaft und Kunst (Ed.): *Wissen und Werte für die Welt von morgen. Dokumentation zum Bildungskongress des Bayrischen Staatsministeriums für Unterricht, Kultus, Wissenschaft und Kunst*. München, S. 101-125.

Weinert, F. E. (2001). Concept of competence: A conceptual clarification. In D. S. Rychen & L. H. Saganik (Eds.), *Defining and selecting key competencies*. Seattle, WA: Hogrefe & Huber, S. 45-65.

Weinert, F. E. (2002). *Leistungsmessung in Schulen*. Weinheim: Beltz.

Wittmann, E. C. (1981). *Grundfragen des Mathematikunterrichts*. Braunschweig, Wiesbaden: Vieweg.

Wittmann, E. C. (1995). Aktiv-entdeckendes und soziales Lernen im Rechenunterricht. In G. Müller & E. C. Wittmann (Eds.), *Mit Kindern rechnen*. Frankfurt: Arbeitskreis Grundschule, S. 10-41.

Wittmann, E. C. (1997a). Mathematikunterricht zwischen Skylla und Charybdis. In R. Voss (Ed.), *Die Schule neu erfinden*. Neuwied u.a. : Luchterhand, S. 313-332.

Wittmann, E. C. (1997b). Vom Tangram zum Satz des Pythagoras. *mathematik lehren, 83*, S. 18-20.

Wittmann, E. C. (1999). Konstruktion eines Geometrieunterrichts ausgehend von Grundideen der Elementargeometrie. In H. Henning (Ed.), *Mathematik lernen durch Handeln und Erfahrung*. Oldenburg: Bültmann & Gerriets, S. 205-223.

Zech, F. (1998). *Grundkurs Mathematikdidaktik: Theoretische und praktische Anleitungen für das Lehren und Lernen von Mathematik*. Weinheim u.a.: Beltz.

Zierer, K. (2012). *Studien zur Allgemeinen Didaktik*. Baltmannsweiler: Schneider Hohengehren.

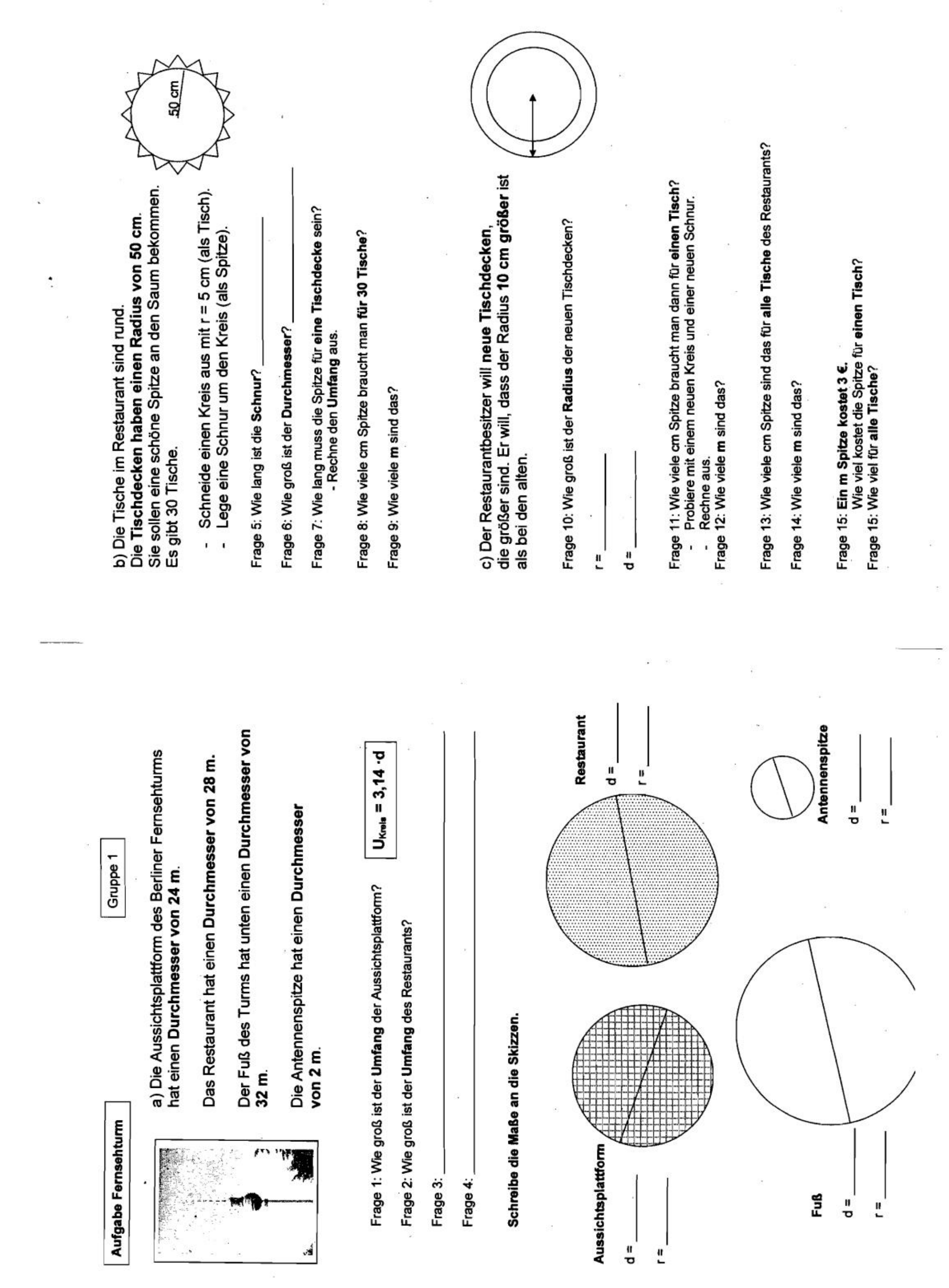
17 Abbildungsverzeichnis

18 Anhang

Anhang A: Unterrichtsmaterialien der Lehrkräfte

A1 Lehrer 1: Arbeitsblätter der Gruppen

zu Gruppe 1



Aufgabe Fernsehturm

Gruppe 1

a) Die Aussichtsplattform des Berliner Fernsehturms hat einen **Durchmesser von 24 m**.

Das Restaurant hat einen **Durchmesser von 28 m.**

Der Fuß des Turms hat unten einen **Durchmesser von 32 m**.

Die Antennenspitze hat einen **Durchmesser von 2 m**.

Frage 1: Wie groß ist der **Umfang** der Aussichtsplattform?

$\boxed{U_{Kreis} = 3{,}14 \cdot d}$

Frage 2: Wie groß ist der **Umfang** des Restaurants?

Frage 3: ____________________

Frage 4: ____________________

Schreibe die Maße an die Skizzen.

Aussichtsplattform
d = ________
r = ________

Restaurant
d = ________
r = ________

Fuß
d = ________
r = ________

Antennenspitze
d = ________
r = ________

b) Die Tische im Restaurant sind rund.
Die **Tischdecken haben einen Radius von 50 cm**.
Sie sollen eine schöne Spitze an den Saum bekommen.
Es gibt 30 Tische.

- Schneide einen Kreis aus mit r = 5 cm (als Tisch).
- Lege eine Schnur um den Kreis (als Spitze).

50 cm

Frage 5: Wie lang ist die **Schnur**? ____________

Frage 6: Wie groß ist der **Durchmesser**? ____________

Frage 7: Wie lang muss die Spitze für **eine Tischdecke** sein?
- Rechne den **Umfang** aus.

Frage 8: Wie viele cm Spitze braucht man **für 30 Tische**?

Frage 9: Wie viele **m** sind das?

c) Der Restaurantbesitzer will **neue Tischdecken**, die größer sind. Er will, dass der Radius **10 cm größer** ist als bei den alten.

Frage 10: Wie groß ist der **Radius** der neuen Tischdecken?

r = ____________

d = ____________

Frage 11: Wie viele cm Spitze braucht man dann für **einen Tisch**?
- Probiere mit einem neuen Kreis und einer neuen Schnur.
- Rechne aus.

Frage 12: Wie viele **m** sind das?

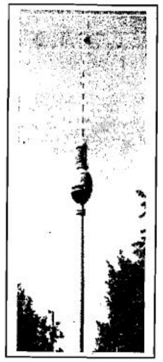
Frage 13: Wie viele cm Spitze sind das für **alle Tische** des Restaurants?

Frage 14: Wie viele **m** sind das?

Frage 15: **Ein m Spitze kostet 3 €.**
Wie viel kostet die Spitze für **einen Tisch**?
Frage 15: Wie viel für **alle Tische**?

zu Gruppe 2

Aufgabe Fernsehturm Gruppe 2



a) Die Aussichtsplattform des Berliner Fernsehturms hat einen **Durchmesser von 24 m**.

Das Restaurant hat einen **Durchmesser von 28 m.**

Frage 1: Wie groß ist die Fläche der Aussichtsplattform?

Frage 2: Wie groß ______________________________

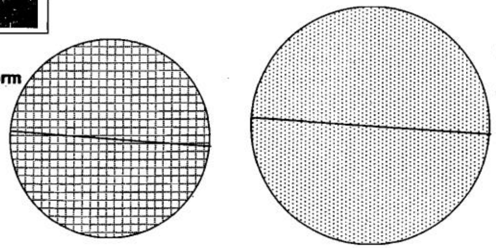
______________________________?

Schreibe die Maße an die Skizzen.

Aussichtsplattform

d = ________

r = ________



Restaurant

d = ________

r = ________

b) Der Teppichboden für die Aussichtsplattform hat **9 € pro m² gekostet**.
Der Parkettfußboden für das Restaurant **12 € pro m²**.

Frage 3: Wie viel hat der Teppichboden für die Aussichtsplattform gekostet?

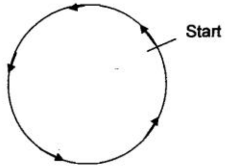
Frage 4: ______________________________

____

c) Ein Besucher läuft genau **drei Runden** auf der Aussichtsplattform ganz dicht am Fenster entlang.

Frage 5: Wie groß ist der Umfang der Plattform?

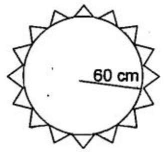
Frage 6: Welche Strecke legt er insgesamt zurück?



d) Die Tische im Restaurant sind rund. Die **Tischdecken haben einen Radius von 60 cm**. Sie sollen eine schöne Spitze an den Saum bekommen. Es gibt 30 Tische.

r = ________

d = ________



Frage 7: Wie lang muss die Spitze für eine Tischdecke sein?
- Rechne den Umfang einer Tischdecke aus.

Frage 8: Wie viele cm Spitze braucht man für 30 Tische?

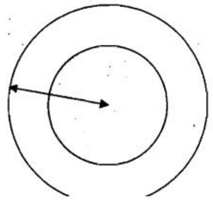
Frage 9: Wie viele m sind das?

e) Der Restaurantbesitzer will **neue Tischdecken**, die größer sind. Er will, dass der Radius 40 cm größer ist als bei den alten.

Frage 8: Wie groß ist der Radius der neuen Tischdecken?

r = ________cm = ________ m

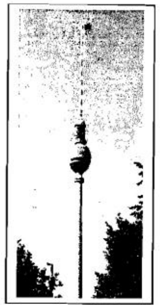
Frage 9: Wie viele m² Stoff muss man für 1 Tisch kaufen?



zu Gruppe 3

Aufgabe Fernsehturm

Gruppe 3



a) Die Aussichtsplattform des Berliner Fernsehturms hat einen **Durchmesser von 24 m**.

Das Restaurant hat einen **Durchmesser von 28 m.**

In der Mitte ist der **Aufzugschacht** mit einem Durchmesser von **6 m**.

Frage 1: Wie groß ist die Fläche der Aussichtsplattform ohne Aufzugschacht?

Frage 2: ______________________________

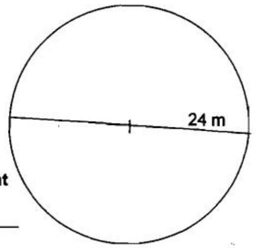
____

Vervollständige die Skizze der Aussichtsplattform und zeichne den **Aufzug** mit ein. Zeichne auch jeweils den **Radius** von Plattform und Aufzug mit ein.

Aussichtsplattform

d = ________

r = ________



Aufzugschacht

d = ________

r = ________

Restaurant

d = ________

r = ________

b) Der Teppichboden für die Aussichtsplattform hat **9 € pro m²** gekostet. Der Parkettfußboden für das Restaurant **12 € pro m²**.

Frage 3: ______________________________

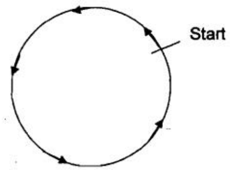
____

Frage 4: ______________________________

____

c) Ein Besucher läuft genau **drei Runden** auf der Aussichtsplattform ganz dicht am Fenster entlang.

Frage 5: ______________________________

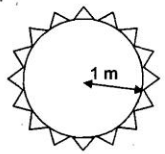


d) Die Tische im Restaurant sind **rund**. Die Tischdecken haben einen **Radius von 1 m**. Sie sollen eine schöne Spitze an den Saum bekommen. Es gibt 25 Tische. 1 m Spitze kostet 2,10 €.

Frage 6: ______________________________

____

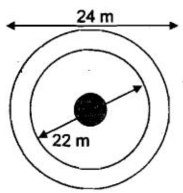
____



e) Der Teppichboden der Aussichtsplattform muss entlang der Fenster ausgebessert werden. Der Verwalter des Turms meint, dass ein **Streifen von 1 m** genügen muss.
Der Teppich kostet jetzt **11 € pro m²**.

Frage7: ______________________________

____



ganze Fläche alter Teppich

r = ______ d = ______

A = ______________

bleibender Teppich

r = ______ d = ______

A =

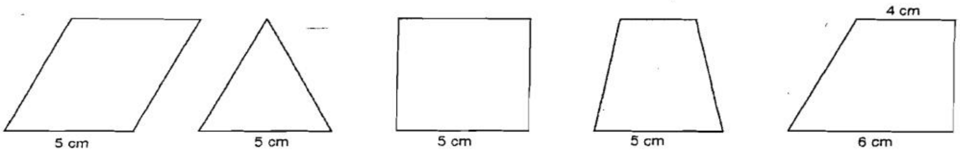
A2 Lehrer 2: Arbeitsblatt der Station 1

Hier siehst du 5 verschiedene Figuren (Zeichnung nicht maßstabsgetreu).

Benenne die Figuren und füge die Formel zur Berechnung der Fläche hinzu.

- Welche Figuren haben den gleichen Flächeninhalt?
- Welche Figur hat den kleinsten Flächeninhalt?
- Welche Figur hat den größten Flächeninhalt?

Nimm die Buchstaben zur Abkürzung und <u>begründe</u> deine Antworten!



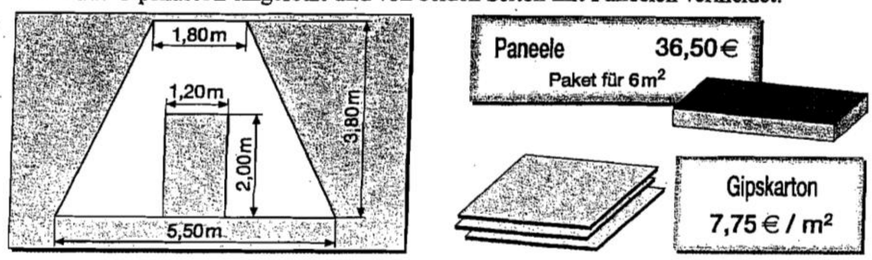
A *B* *C* *D* *E*

Formeln zur Flächenberechnung:

Begründung:

In der folgenden Aufgabe findest du bestimmte Flächen wieder. Benenne sie. Erstelle dann einen Arbeitsplan und berechne. (Die weiße Fläche wird verkleidet)

Ein Teil des Dachgeschosses soll für den älteren Sohn eingerichtet werden. Es wird eine Wand aus Gipskarton eingesetzt und von beiden Seiten mit Paneelen verkleidet.



A3 Lehrer 5: Folien und ausgeteilte Arbeitsblätter

zu Aufgabe 1

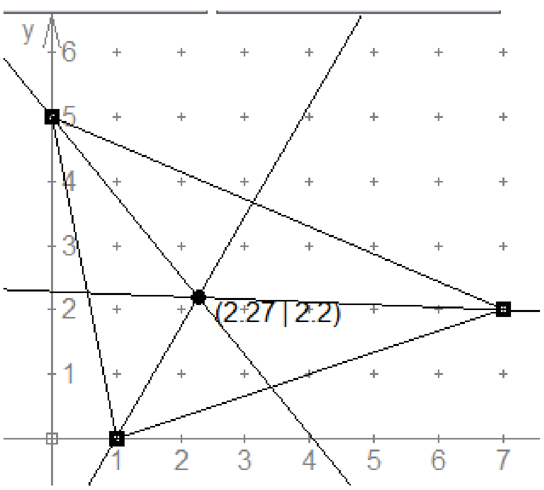
Winkelhalbierende und Inkreis im Dreieck

- Alle Punkte auf der Winkelhalbierenden haben den gleichen Abstand zu den benachbarten Dreiecksseiten
- Der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden (ja, sie schneiden sich in einem Punkt!!) ist gleichzeitig der Mittelpunkt des Inkreises

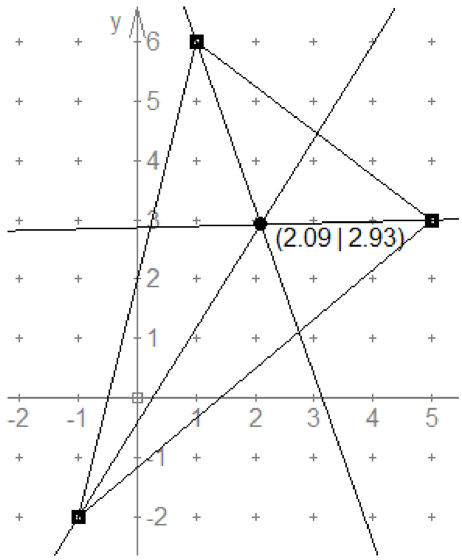
Hausaufgabe:

1) Bestimme die Koordinaten des Inkreismittelpunktes bei folgendem Dreieck ABC: A(1;0), B(7;2), C(0;5).
2) Bestimme die Koordinaten des Inkreismittelpunktes bei folgendem Dreieck DEF: D(-1;-2); E(5;3); F(1;6)
3) Wochenende genießen ;-)

1)



2)



Folie zu Aufgabe 2

Melanie, Ralf und Nina wollen sich für ein Mathe-Referat treffen. Da es bei ihnen zu Hause gerade nicht passt suchen sie einen zentralen Treffpunkt, der von den drei Mathe-Fans gleich weit entfernt ist.

Melanie x

x Ralf

x
Nina

Lösungsvorschläge:

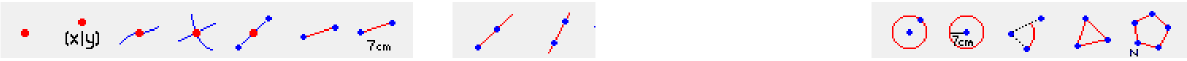
Unterstütze deinen Nachbarn bei der Konstruktion des Treffpunktes.

Begründe, dass die Mittelsenkrechten sich in einem Punkt treffen müssen.

Anna (1;0), Peter (8;1) und Lena (3;2) suchen einen zentralen Treffpunkt für ihr Physik-Referat.

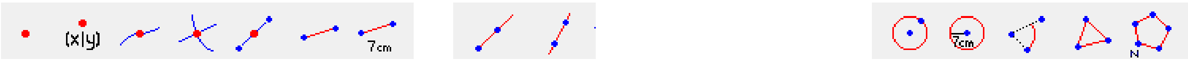
zu Aufgabe 3 bis 5

- Kiras Vorschlag für Mittelsenkrechte
  Konstruiere den Mittelpunkt des Umkreises nur mit Hilfe eines Lineals und Zirkels. Bei



  Dynageo dürfen also nur die folgenden Funktionen benutzt werden:

- Kiras Vorschlag für Winkelhalbierende
  Konstruiere den Mittelpunkt des Inkreises nur mit Hilfe eines Lineals und Zirkels. Bei Dynageo dürfen also nur die folgenden Funktionen benutzt werden:



- Gabis Idee:

Untersuche, ob der Inkreismittelpunkt eines neuen Dreiecks, dass durch die Mittelpunkte der Seiten des alten Dreiecks entsteht, auch der gesuchte zentrale Treffpunkt zwischen Nathalie, Ramon und Nadine ist. Wenn du Fragen hast, dann bitte Kiana um Hilfe.

zu Aufgabe 6 und 7

Forschungsaufgaben zu Um- und Inkreis

1) Welche Eigenschaft muss ein Dreieck haben, dessen Umkreismittelpunkt
a) auf dem Rand des Dreiecks liegt?
b) im Dreieck liegt?
c) außerhalb des Dreiecks liegt?

2) Gestern hattet ihr die Idee, dass der Inkreismittelpunkt evtl. auch der gesuchte Treffpunkt von Nathalie, Ramon und Nadine sein könnte. Es gibt tatsächlich Dreiecke bei denen die Mittelpunkte von Um- und Inkreis zusammenfallen! Untersuche, bei welchen Dreiecken dies der Fall ist.

3) Untersuche, ob der Umkreis der kleinste Kreis ist, der das Dreieck enthält.

Als Hilfe eine Übersicht der Dreiecksfamilie:

	Merkmal
Unterscheidung nach Seitenlängen:	
• gleichseitiges Dreieck	
• gleichschenkliges Dreieck	
• unregelmäßiges Dreieck	
Unterscheidung nach Winkeln:	
• spitzwinkliges Dreieck	
• rechtwinkliges Dreieck	
• stumpfwinkliges Dreieck	

Anhang B: Den Lehrern vorgegebenes Beispiel einer Stundenplanung

	Lehrerverhalten	Kognitive Aktivität der Schüler	S
p-	1. Aufgabe: Zwei Kreise im Quadrat Wiederholung und Verknüpfung der Begriffe Quadrat - Kreis (Abstandserhaltung) – Dreieck (verschiedene Formen, z.B. gleichseitiges, gleichschenkliges) und deren jeweiligen Eigenschaften Zu beachten: richtige Begründung?	Bearbeitung der Aufgabe: Erinnern Abstandserhaltung des Kreises => AD=AS und BC=BS) Wegen Quadrat auch AB=AS=BS.=> gleichschenkliges Dreieck Alternative Lösungsmöglichkeit: Keine Mögliche Probleme: - Abstandserhaltung Kreis wird nicht erinnert - Bezug zur Seite AB wird nicht hergestellt (also nur gleichschenkliges Dreieck als Antwort)	Gruppenarbeit, d dert die Verwen Begriffe, die die so gemeinsam Erinnerungen soll
	2. Aufgabe: Kreis im Quadrat Wie oben, zusätzlich kommt hier aber der Begriff der Mittelsenkrechten mit ins Spiel. Des-	Bearbeitung der Aufgabe: Wie oben: AD=AS Mittellinie im Quadrat ist auch Mittelsenkrechte von AB, wegen Eigenschaften der Mittelsenkrechten (jeder Punkt der Mittel-	Gruppenarbeit, d dert die Verwen Begriffe, die die so gemeinsam Erinnerungen soll

lb diese Aufgab an 2. Stelle, hier mehr Wissen verknüpft erden muss. Hier muss darauf achtet werden, dass die hülerinnen und Schüler nicht e bei Aufgabe 1 argumentie-n, sondern den Unterschied vischen den Aufgaben erken-n.	senkrechten hat von AB denselben Abstand) gilt AS=BS Wegen Eigenschaften des Quadrates gilt AS=BS=AB Alternativer Lösungsmöglichkeit: Statt über Eigenschaften der Mittelsenkrechte wird über Spiegelung von AS an m auf BS argumentiert. Weitere Lösungsmöglichkeiten? Mögliche Probleme: - Schüler argumentieren wie bei Aufg. 1 und nicht über Mittelsenkrechte - Eigenschaften der Mittelsenkrechte werden nicht erinnert	

Aufgaben zum Beispielentwurf

Zwei Kreise im Quadrat **MQUKKM1** **MQUKKM2**

In einem Quadrat wird um die Ecke *A* ein Kreis, der durch *D* geht, und um die Ecke *B* ein Kreis, der durch *C* geht gezogen. Dort, wo diese sich schneiden, liegt der Punkt *S*.

Welche Art von Dreieck ist dann $\Delta\ ABS$?

Antwort:

____

Begründe!

____

____

____

____

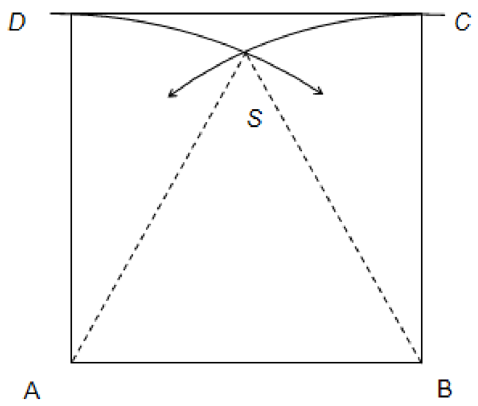
____

____

____

____

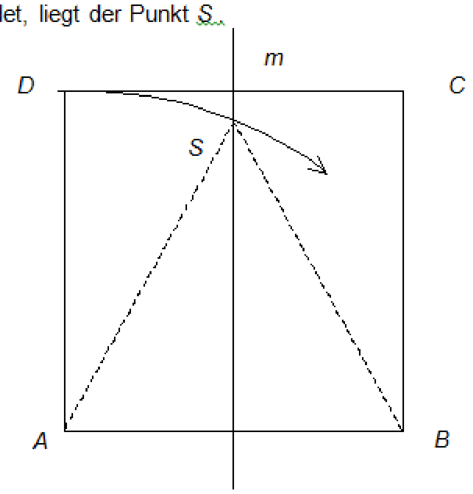
____



(Zeichnung nicht maßgenau)

Kreis im Quadrat MQUKMM1 MQUKMM2

In einem Quadrat wird um den Eckpunkt *A* ein Kreis, der durch *D* geht, gezogen. Dort wo er die Mittelinie *m* schneidet, liegt der Punkt *S*.



(Zeichnung nicht maßgenau)

Welche Art von Dreieck ist dann Δ *ABS*?

Antwort:

____

Begründe!

____

____

____

Lebenslauf

Persönliche Daten

Name:	Manuela Hillje
Adresse:	Wischenstr. 51 26188 Edewecht/Jeddeloh II
Familienstand:	geschieden
Staatsangehörigkeit:	deutsch
Geburtsdaten:	23. Februar 1984 in Oldenburg
Kinder:	Tammo Hillje (geb. 14.11.2009)

Schulische Ausbildung/Studium

1990 – 1994	Grundschule Jeddeloh I
1994 – 1996	Orientierungsstufe Friedrichsfehn
1996 – 2003	Gymnasium Bad Zwischenahn-Edewecht
	Abschluss: Abitur
Okt. 2003- Dez. 2007	Studium Lehramt an Gymnasien Mathematik/Physik an der Universität Oldenburg
	Abschluss: 1.Staatsexamen
Seit Juni 2008	Promotionsstudium im Bereich Mathematikdidaktik an der Universität Oldenburg
	Voraussichtliche Abgabe der Dissertation: Juli 2012
Seit April 2011	Teilnahme am Promotionsprogramm ProfaS (Promotionsprogramm fachdidaktische Strukturierung) an der Universität Oldenburg

Berufliche Erfahrungen

Okt. 2005-Feb.2008	Studentische Hilfskraft an der Universität Oldenburg im Institut für Mathematik (Betreuung von Tutorien)
Feb. 2008 - Juli 2012	Wissenschaftliche Mitarbeiterin an der Universität Oldenburg im Institut für Mathematik im Bereich Mathematikdidaktik
Mär. 2012 - Juli 2012	Feuerwehrlehrkraft für Physik am Gymnasium Bad Zwischenahn-Edewecht
Seit August 2012	Referendariat am Gymnasium Bad Zwischenahn-Edewecht