Oldenburger Universitätsreden

Nr. 3

Wolfgang Ebenhöh

Mathematische Horizonte

Vortrag zur Eröffnung der Ausstellung

Bibliotheks- und Informationssystem der Universität Oldenburg
1986

VORWORT

Die Wanderausstellung "Mathematische Horizonte" wurde vor einigen Jahren im großen französischen Komplex wissenschaftlicher Ausstellungen und Museen "la vilette", cité des sciences et de l'industrie, Paris, entworfen. Sie wanderte dann durch die französisch-sprachige Welt und übersprang schließlich die Sprachbarriere. Im Sommer 1986 wurde sie einige Monate im Deutschen Museum in München gezeigt und von da vom Museumsdirektor Dr. Karl Otto Meyer unter Beteiligung der Deutsch-Französischen Gesellschaft nach Oldenburg geholt, wo die Eröffnung am 28. August 1986 stattfinden konnte. Die Ausstellung bietet Mathematik zum Anfassen. Spielerisch wird in die tiefe, klare mathematische Gedankenwelt eingeführt.

Oldenburg, 25. November 1986

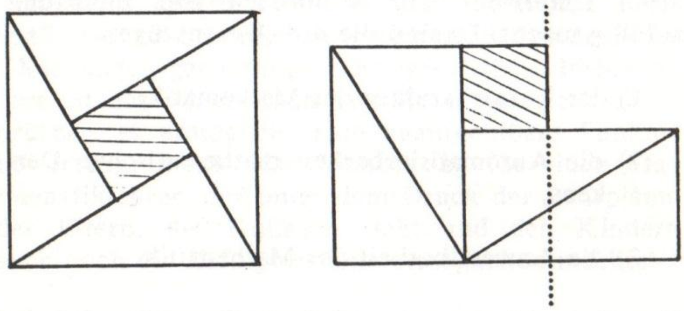
Hermann Havekost

Mathematik erscheint so als ungeheueres Gebäude komplizierter verschachtelter Theorien, unangreifbar fest und unzugänglich durch Panzerung mit messerscharfen Definitionen. Will man den Spezialisten auf seiner hochgelegenen Plattform besuchen, so ist das ein schwieriges Unterfangen, ein Königsweg - wie Euklid sagt - führt nicht hinauf.

Dieses Bild ist nicht ganz falsch, aber es trifft nicht die Mathematik, es ist sozusagen die Rückseite der Mathematik, die so zu charakterisieren wäre. Die Mathematik hat jedoch auch eine dem Menschen zugewandte Seite, die die klaren, schönen und tiefen Gedankengänge erkennen läßt. Zu dieser Seite der Mathematik will uns die Ausstellung "Mathematische Horizonte" hinführen.

Auch den Nichtmathematiker kann ein mathematisches Erlebnis, ein Blick in die absolute Klarheit, tief berühren. Ein mir befreundeter niederländischer Biologe kam eines Tages aufgeregt zu mir. Er hatte in einem Buch über die Geschichte des menschlichen Denkens einen Beweis des Satzes des Pythagoras gefunden, der ihn in eine geistige Hochstimmung versetzt hatte und ihm auf Dauer das eigentliche Wesen der Mathematik offenbarte. Das Buch erzählt die Geschichte so: Pythagoras spielte am Strand seiner Insel mit den bunten Kacheln aus einer nahe gelegenen Tonbrennerei.

Durch Umlegen und mit Hilfe eines Stöckchens erschloß sich für ihn mit einem Blick, daß das Hypothenusenquadrat gleich der Summe der Kathetenquadrate sei:



Mein Freund, der Biologe, hielt dies zunächst für eine jenseits der Mathematik liegende Offenbarung.

Die Ausstellung, die wir heute hier eröffnen, ist deshalb so bedeutsam, auch deshalb so nötig, weil trotz allen Glanzes die Vorderseite der Mathematik wenig bekannt ist und oft nicht erkannt wird. Was verstellt den Blick? Ein Teil der Antwort ist wohl, daß die Menschen das Zerrbild der Mathematik, das die Schule liefert, meist ihr ganzes Leben mit sich umhertragen. Wagenschein nennt es die Tragik des Mathematikunterrichtes, er spricht von der "Verzweiflung, die denjenigen fassen muß, der sowohl die Mathematik kennt als auch die Kinder, und die Ernte des mathematischen Schulunterrichts vor sich sieht".

Wagenschein hütet sich, die Lehrer als die Schuldigen zu bezeichnen, er sieht sie ebenfalls als Opfer. Vielmehr sucht er die Gründe in unserer heutigen Zeit, aber eben auch im Wesen der Mathematik, das ihren Unterricht "für Mißbrauch und Entartung" anfällig macht. Es sind die drei Wesenszüge:

1) der Turmcharakter der Mathematik,

2) die Automatisierbarkeit mathematischen Denkens,

3) die Anwendbarkeit der Mathematik.

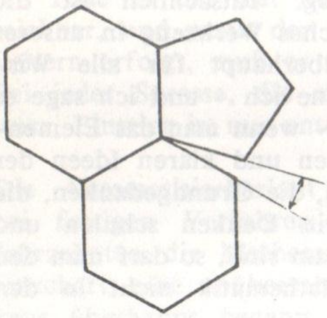
Der Turmcharakter der Mathematik macht viele ihrer Teile in der Tat nur über steile Leitern erreichbar, und wenn der Unterricht entlang solcher Leitern erfolgt, muß er notwendig langweilig sein. Bei jeder Sprosse, die man verschläft, droht Absturz, Einstieg ist nur unten möglich.

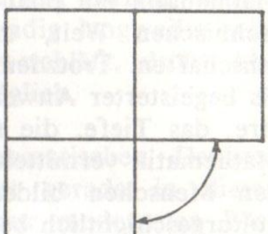
Die Automatisierbarkeit mathematischen Denkens bei fertigen Verfahren macht gerade in diesen Jahrzehnten die Mathematik zur modernsten Wissenschaft; eine unübersehbare Revolution des Denkens überhaupt begann. Das Denken wird durch Computer nicht überflüssig, sondern der Denkende erhält nur neue Hilfsmittel, wie der Reisende durch die Neuzeit Eisenbahn und Flugzeug erhalten hat. Schopenhauer hat vollständig recht, wenn er sagt: "Daß die niedrigste aller Geistestätigkeiten die arithmetische sei, wird dadurch belegt, daß es die einzige ist, die auch von Maschinen ausgeführt werden kann." Er verletzt damit nicht die Mathematiker, deren Leistung es gerade ist, gewisse Gedanken so endgültig gedacht zu haben, daß die Wiederholungen dieser Gedanken nun den Maschinen übergeben werden können. Fertige Rezepte sind aber eben nicht nur den Maschinen, sondern auch Schülern leicht unterrichtbar, es macht zuweilen sogar Spaß, sie zu beherrschen, wenn z. B. quadratische Gleichungen ganzzahlige Lösungen haben. Insbesondere ist das Beherrschen von Rezepten leicht überprüfbar, es ermöglicht eine unanfechtbare Punktebewertung. Welch eine Versuchung für einen Mathematiklehrer, der unter dem Druck der Lehrpläne, der Eltern, der Kollegen steht und den Kindern auch noch ein Erfolgserlebnis ermöglichen möchte!

Die Anwendbarkeit der Mathematik liefert das Alibi für die Rezeptvermittlung. Tatsächlich ist die Mathematik ein phantastisches Werkzeug in unserer technischen Welt, und überhaupt für alle Wissenschaften. Trotzdem meine ich - und ich sage es als begeisterter Anwender - wenn man das Elementare, das Tiefe, die schönen und klaren Ideen der Mathematik vermitteln will, die Grundgedanken, die den Menschen bilden, sein Denken schulen und kulturgeschichtlich bedeutsam sind, so darf man den Werkzeugcharakter der Mathematik nicht in den Vordergrund stellen.

Diese Ausstellung will Mathematik nicht unterrichten, weder in Konkurrenz noch in Ergänzung zur Schule. Sie will aber demonstrieren, daß die Mathematik viele Zugänge hat, durch die man auch ohne zehnsemestriges Studium in bedeutende Tiefe blicken kann. Solche Versuche sind noch immer pädagogische Pionierleistungen. Dabei läßt die Vielfalt von mathematisch orientierten Denksportaufgaben ein breites Interesse am mathematischen Denken vermuten. Hier möchte ich auch die Erfolge des bundesweiten Mathematikwettbewerbs und des Informatikwettbewerbs nennen, beide mit hervorragenden Aufgaben, die allerdings nicht nur das Ziel haben, den Zugang zur Mathematik zu öffnen, sondern sie wollen diejenigen jungen Menschen, die der Mathematik schon nahe stehen, ein Stückchen weiter hinein locken. Die Aufgaben sollen mit Grundwissen und Phantasie lösbar sein.

Ein Beispiel: Bei einem Fußball stoßen an jeder Ecke zwei Sechsecke und ein Fünfeck zusammen. Wie kann man allein aus dieser Tatsache auf die Gesamtzahl der Ecken schließen?





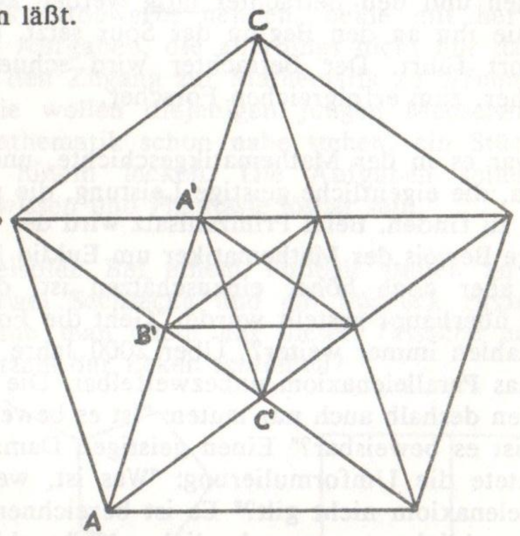
Betrachtet man den Würfel zum Vergleich, so findet man: Defizitwinkel mal Eckenzahl ist 720°. Was verbirgt sich dahinter?

Es gehört zum Wesen der Mathematik, daß aus leicht verständlichen Begriffen leicht verständliche, aber überraschende Fragen gestellt werden, die oft schwierig zu beantworten sind und tief in mathematische Zusammenhänge hineinführen. Den

Erfolg,den diese Ausstellung anderswo hatte und auch hier haben wird, beruht darauf, daß sie mit "begreifbaren" Hilfsmitteln verlockende Fragen aufkommen und den Betrachter tätig werden läßt, indem sie ihn an den Beginn der Spur setzt, die zur Antwort führt. Der Betrachter wird schnell zum Forscher, zum erfolgreichen Forscher.

Oft war es in der Mathematikgeschichte, und nicht nur da, die eigentliche geistige Leistung, die richtige Frage zu finden. Beim Primzahlsatz wird der scharfsinnige Beweis der Mathematiker um Euklid bewundert, aber noch höher einzuschätzen ist, daß die Frage überhaupt gestellt wurde: "Geht die Folge der Primzahlen immer weiter?" Über 2000 Jahre hinweg war das Parallelenaxiom unbezweifelbar. Die Fragen konnten deshalb auch nur lauten: "Ist es beweisbar?", "Wie ist es beweisbar?" Einen geistigen Dammbruch bedeutete die Umformulierung: "Was ist, wenn das Parallelenaxiom nicht gilt?" Es ist bezeichnend, daß die angeblich so unanschauliche Nichteuklidische Geometrie Grundlage für ein Titelbild des Begleitbuches zu dieser Ausstellung ist.

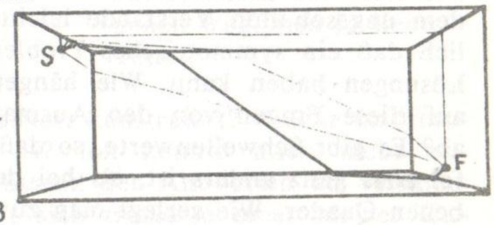
Haben Seite und Diagonale eines Quadrates ein gemeinsames Maß, das heißt, lassen sie sich als ganzzahlige Vielfache einer gemeinsamen Einheit darstellen? Diese für uns heute harmlose Frage ist dann nahezu undenkbar, wenn es für selbstverständlich gehalten wird, daß gleichartige Dinge ein gemeinsames Maß besitzen. Die Aufregung war groß, als Hippasos mit einem wundervollen Beweis zeigte, daß das Wechselwegnahmeverfahren bei Seite und Diagonale des Fünfeckes nicht abbricht. Mit dem Wechselwegnahmeverfahren wird die gemeinsame Einheit konstruiert, indem man ausnutzt, daß sich auch die Differenz von zwei Größen als ganzzahliges Vielfaches der gemeinsamen Einheit ausdrücken läßt.



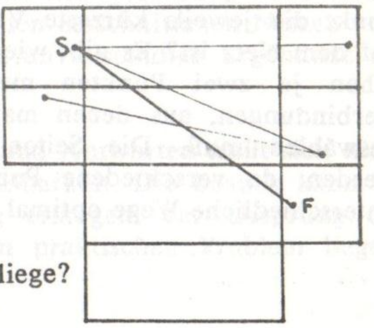
Hippasos bewies: Die Einheit, deren ganzzahlige Vielfache AB und AC sind, ist auch Einheit für A'B' und A'C'. Es gilt nämlich A'C' = AC - AB und A'B' = AB - A'C', weil AA' = AB und A'C' = A'C. Dieser Schluß kann immer wiederholt werden, so daß die Einheit kleiner als jede endliche Strecke sein müßte. Also gibt es keine solche Einheit. Das Verhältnis der beiden Strecken läßt sich nicht durch eine Bruchzahl ausdrükken. Angeblich haben die Götter den Hippasos mit Schiffbruch und Untergang bestraft, man weiß nur nicht, ob für das Entdecken oder für die Veröffentlichung der Entdeckung der Inkommensurabilität. Platon verwunderte sich hinterher sehr, warum diese Entdekkung erst so spät erfolgte, und er schämte sich "für sich und alle

Hellenen", er habe eine solche Ignoranz "bei Menschen gar nicht für möglich gehalten, sondern allenfalls bei Schweinevieh".

Auf die Frage kommt es an, das gilt für die große Forschung wie für die kleine. Für Einsichten sind gute Fragen erforderlich und viel Zeit, sich selbst mit diesen Fragen auseinanderzusetzen. Wir Mathematiker mit pädagogischen Interessen erhalten von dieser Ausstellung wertvollste Anregungen. Wir sollten uns viel mehr Mühe geben, solche Fragen zu finden, die dem interessierten Menschen etwas zu forschen geben, wobei ihm der ausgewachsene Mathematiker nicht zu viel voraus hat. Solche Fragen oder Fragenkomplexe haben oft ihren Anfang in Denksportaufgaben.

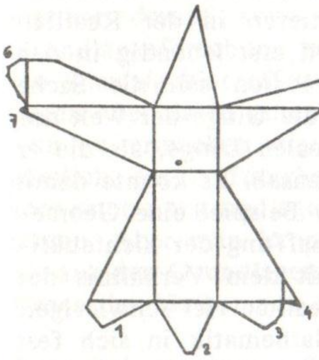


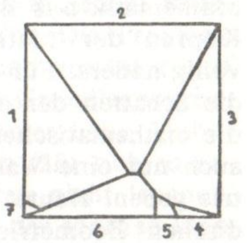
Ein Beispiel: Eine Spinne sitzt in einem quaderförmigen Raum der Ausmaße 12 x 12 x 30 Fuß auf einer Stirnwand in der Mitte einen Fuß unter der Decke. Genau gegenüber, also einen Fuß über dem Boden schläft eine Fliege. Welches ist der kürzeste Weg von der Spinne zur Fliege?



Auf den verschiedenen Quaderabwicklungen sieht man, daß mehrere unterschiedliche Wege in Frage kommen. Die Maße sind so gewählt, daß sich als überraschende Antwort ergibt: Auf dem kürzesten Weg berührt die Spinne fünf Wände. Nun sind mir einige Fragen eingefallen, die sich anschließen, für deren Beantwortung nur der Satz des Phytagoras, Phantasie und Geduld erforderlich sind: Wo hätte sich die Fliege vor ihrem Schläfchen hinsetzen sollen, um von der Spinne am weitesten entfernt zu sein? Der Punkt liegt <u>nicht</u> dem Sitz der Spinne gegenüber! Wo sind die Pole des Quaders, die Punktepaare, die auf der Quaderoberfläche maximal weit auseinander liegen? Es sind <u>nicht</u> gegenüberliegende Eckpunkte oder gegenüberliegende Seitenmittelpunkte! Es liegt einer der häufigen Fälle vor, die dem ungeschulten Verstande leicht entgehen, nämlich daß ein symmetrisches Problem asymmetrische Lösungen haben kann. Wie hängen die Antworten auf diese Fragen von den Ausmaßen des Quaders ab? Es gibt Schwellenwerte, so daß bei einem Würfel alles ganz anders ist, als bei dem oben angegebenen Quader. Wie zerlegt man zu einem gegebenen Punkt das Quadernetz so, daß zu jedem anderen Punkt die jeweils kürzeste Verbindung die Gerade auf dem Netz ist? Es gibt wie wir oben sahen, zwischen je zwei Punkten mehrere lokal kürzeste Verbindungen, aus denen man die global kürzeste auswählen muß. Die Seiten müssen zerschnitten werden, da verschiedene Punkte einer Seite über unterschiedliche Wege optimal erreichbar sind.

Ein Beispiel für eine solche Zerlegung:





Zerlegung der Gegenseite entsprechend der verschiedenen Wegtypen in sieben Teile

Wie wurde dieses Netz konstruiert? Welche Informatitionen enthält es? Ich konnte mich nicht zurückhalten, die Essenz der Antworten zu verraten. Vielleicht vertieft sich trotzdem einer meiner Zuhörer in diese Fragen? Ich jedenfalls habe einige aufregende Tage mit den zerschnittenen Netzen verbracht und bisher nur unvollständige Ergebnisse erzielt.

Für solche Probleme und Antworten stellt sich nicht die Frage der Anwendbarkeit. Die Lösung kann irgendwann Bedeutung erlangen, der Ursprung der Frage kann in einem praktischen Problem liegen, muß aber nicht.

Überhaupt ist das Dreiecksverhältnis von Mathematikern, Mathematik und Realität kompliziert. Der realitätsbezogene Mensch sagt schlicht: Mathematik existiert in den Köpfen der Mathematiker, und Mathematiker existieren in der Realität. Mathematik aus Büchern wird erst lebendig in den Köpfen der Mathematiker. Platon sah die Sache völlig anders. Für ihn waren die Dinge der Welt nur die Schatten der eigentlich realen Dinge, als die er die mathematischen Objekte ansah. Es konnte damit auch nur eine Wahrheit, zum Beispiel eine Geometrie geben. Heute, nach Erschaffung der nichteuklidischen Geometrie, ist es mit dem Verhältnis der mathematischen Dinge zur Realität viel schwieriger. Und da das Gebäude der Mathematik in sich fest und klar ist, mit vielen herrlichen Querverbindungen, scheint es manchem Mathematiker möglich und nötig, es aus seiner Verankerung in so unsicheren Dingen wie Mensch und Realität zu lösen. Je nach Standpunkt kann man die Frage nach den Grundlagen der Mathematik ganz verschieden stellen:

> Wie schafft man den Münchhausen'schen Trick, die Mathematik in sich selbst zu begründen?
>
> oder:
>
> Welches sind <u>die</u> Wurzeln der Mathematik in der Realität und in der menschlichen Denkweise, die sich nicht durchtrennen lassen?

Die Versuche, diese Fragen zu beantworten, sind heute ein Spezialgebiet der Mathematik geworden - Grundlagenforschung. Dies ist ein Münchhausen'scher Trick, indem nämlich heute jeder Mathematiker darauf verweisen kann, daß es in der Grundlagenforschung natürlich wie in jedem anderen Spezialgebiet offene Fragen gibt. Die Probleme liegen aber da in guten Händen, und vorläufig darf man weitermachen wie bisher. Die Grundlagenkrise, nämlich das Auftauchen und schmerzliche Unbeantwortetsein grundlegender Fragen läßt sich so ertragen. Aber man kann die Schatten nicht leugnen, die aus den Grundlagenfragen und das sonst so klare Wesen der Mathematik fallen.

Was sind nun diese Grundlagenfragen? Spätestens seit Hilbert geht es nicht mehr um die Wahrheit, sondern nur noch um die Sicherheit, daß, wenn eine Aussage beweisbar ist, nicht auch ihr Gegenteil bewiesen werden kann. Gödel hat auch die Sicherheit erschüttert, indem er am Beispiel der Zahlentheorie zeigte, daß sich aus den Axiomen und mit der Sprache der Zahlentheorie ein Satz formulieren läßt, der etwa aussagt: "Ich bin unbeweisbar". Damit wurde Hilberts Traum zerstört, daß mathematische Axiomensysteme vollständig und ihre Widerspruchsfreiheit von innen her beweisbar sein können.

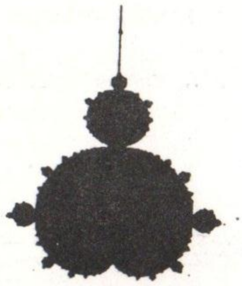
Zum Schluß noch einige Bemerkungen zu den Anwendungen der Mathematik. Der Erfolg bei den Anwendungen läßt die Grundlagenprobleme der Mathematik verblassen. Sie "funktioniert" offenbar. Mathematik wird gern als Wissenschaft von den formalen Systemen bezeichnet. Wenn sie das und nur das ist, dann fühle ich mich als mathematischer Modellierer, und manchem anderen anwendenden Mathematiker mag es ebenso gehen, aus der Mathematik hinausgedrängt. Aber wohin? Ich untersuche reale Systeme, die Atmosphäre, den Ozean, ein Ökosystem, einen Betrieb, indem ich das System mathematisch beschreibe und simuliere. An einem guten Modell kann leichter und sicherer Grundsätzliches erkannt und billiger Neues erprobt werden. Ich bilde mir ein, dabei durchaus mathematische Tätigkeiten auszuüben: ich abstrahiere, ich suche nach tiefliegenden Gemeinsamkeiten verschiedenartiger Systeme, nach Grundprinzipien, ich beweise und unterwerfe mich den mathematischen Tugenden. Es ist natürlich gleichgültig, ob die Tätigkeit des mathematischen Modellierers Mathematik genannt wird, oder nicht. Sie zeigt jedenfalls,

> daß die reine, klare mathematische Welt die einfachste aller denkbaren Welten ist,
>
> daß trotzdem die reine Mathematik die Berührung mit der schmutzigen, aber lebendigen Welt nicht zu fürchten braucht,
>
> daß umgekehrt manches der trüben Realität durch ein mathematisches Modell erhellbar ist.

Aber es wäre ganz falsch, zu glauben, die Welt in der wir leben, die so unendlich viel komplexer als die Mathematik ist, wäre durch Mathematik erklärbar. Unsere Welt bietet dem Mathematiker eine unerschöpfliche Quelle neuer Ideen, die dann in der Mathematik ein Eigenleben führen können. Als

Beispiel aus der jüngeren Zeit mag die Entfaltung der Theorie chaotischer Systeme dienen. Apfelmännchen und Seepferdchen und andere charakteristische Gebilde erscheinen in bunter Aufmachung in populärwissenschaftlichen Zeitschriften unter dem Titel "Harmonie im Chaos".

So falsch es ist, beim Unterricht den Werkzeugcharakter der Mathematik zu betonen, so falsch wäre es, den Bezug der Mathematik zu der Welt, in der wir leben, zu unterdrücken. Die Ausstellung, die heute hier eröffnet wird, hat einen hervorragenden Weg gefunden, die Vielfalt der Mathematik zwischen Abstraktem und Anwendbarem in Facetten exemplarisch darzustellen. Sie kann nicht die gesamte Mathematik umfassen, sie kann auch nicht die allertiefsten Zusammenhänge zeigen, aber sie wird viele anregen, sich weiter mit Mathematik zu beschäftigen, da sie einen Blick in das den meisten Menschen unbekannte Wesen der Mathematik erlaubt.



WOLFGANG EBENHÖH (1939)

Studium der Physik 1957-1963 in Leipzig und Heidelberg. Promotion (1966) und Habilitation (1972) in theoretischer Physik. Hochschullehrer in Oldenburg seit 1975 (Anwendungen der Analysis in Technik und Naturwissenschaften).

Forschungsgebiet Mathematische Modellierung.