Carl von Ossietzky Universität Oldenburg

Diplomstudiengang Mathematik
Schwerpunkt Versicherungs- und Finanzmathematik

Diplomarbeit

Prämienberechnung unter Berücksichtigung des Asset-Liability-Managements mittels Valuation Portfolio

vorgelegt von: Philipp V. Wederz

Betreuender Gutachter: Prof. Dr. Dietmar Pfeifer

Zweite Gutachterin: Prof. Dr. Angelika May

Oldenburg, den 15. Februar 2010

Inhaltsverzeichnis

Beilage

CD-ROM

Inhalt: PDF-Version dieser Arbeit sowie Anhang B als Programm,
mit dem verschiedene Prämienkalkulationen durchgeführt werden können.

Tabellenverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

1. Einführung

Mit dem Begriff *Versicherungsprämie* bezeichnet man einen Geldbetrag, der als Gegenleistung für den Versicherungsschutz an eine Versicherungsgesellschaft gezahlt wird.[1] Aus Sicht des Versicherers ist zwischen Bruttoprämie und Nettoprämie zu unterscheiden. Die *Nettoprämie* meint den Teil des Versicherungsbeitrages, der das Risiko für mögliche Versicherungsleistungen abdeckt, eine Nettoprämie mit Sicherheitszuschlag bezeichnet man als Risikoprämie[2]. Auf eine *Bruttoprämie* werden zusätzlich noch Kosten für den Geschäftsbetrieb und Gewinn des Versicherers sowie ein Abschlag für Erträge aus anderweitigen Kapitalanlagen angerechnet. In meiner Arbeit befasse ich mich ausschließlich mit der Kalkulation einer Risikoprämie.

1.1. Klassische Versicherungsmathematik

1.1.1. Prämienprinzipien

Warum ist es wichtig, dass ein Versicherungsunternehmen Prämien möglichst genau kalkuliert? Was bei zu hohen Prämien passiert, ist uns allen klar: die Kundschaft bleibt aus, die laufenden Kosten führen das Unternehmen in den Ruin. Bei zu geringen Einnahmen jedoch werden die Schäden das Anfangskapital aufbrauchen und dies führt ebenfalls in den Ruin. Eine gute Mitte ist also gefragt.

Das versicherungsmathematische Äquivalenzprinzip, nach dem der Barwert der zu erbringenden Versicherungsleistungen dem Barwert der Prämienzahlungen entspricht, ist das erste Hilfsmittel zur Berechnung der Versicherungsprämie. Mit vorsichtig kalkulierten Rechnungsgrundlagen (meist mit einem Aufschlag oder Abzug, um eine gewisse Sicherheit zu gewährleisten) kann so im stochastischen Mittel eine langfristige Finanzierbarkeit der erwarteten Versicherungsleistungen angenommen werden[3].

[1] [VVG08] §1.
[2] Vergleiche [Sch06] Seite 239.
[3] Siehe [Füh10], Seite 4f.

Der Erwartungswert $E[X]$ des Schadens X stellt dabei die niedrigste mögliche Prämie dar. Über die Zeit werden alle Schäden durch Prämien gedeckt. Dieses Erwartungswert-Prinzip hat jedoch den entscheidenden Nachteil, dass es unweigerlich zum Ruin des Versicherungsunternehmens führt, denn nach dem Gesetz des iterierten Logarithmus (siehe Satz A.1, vgl. [Bil86] Theorem 9.5) kommt es fast sicher im Laufe der Jahre unendlich oft zu Verlusten in beliebiger Höhe. Diese verschlingen alle Anfangsreserven und zwischenzeitliche Gewinne. Allerdings kann dies durch eine geringfügige Anhebung der Prämie bereits wettgemacht werden, es bleibt jedoch immer eine gewisse Ruinwahrscheinlichkeit, die erst mit steigender Prämie geringer wird.

Natürlich ist es mit einem konstanten Aufschlag nicht getan. Dieser würde bei hohen Risiken vergleichsweise gering sein, während geringe Risiken fast komplett aus diesem bestehen würden.
Lösung des Problems sind verschiedene Prämienprinzipien $H(X)$, wobei X ein Risiko darstellt, welches aus der Menge $\mathcal{Z}$ der nicht-negativen Zufallsvariablen stammt.

Definition 1.1.1. *Verteilungsfunktion*
Ist X eine reelle Zufallsvariable, so heißt die Funktion F_X mit

$$F_X(x) = P(X \leq x) \tag{1.1}$$

Verteilungsfunktion von X. Sie gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Zufallsvariable X kleiner oder gleich einem reellen Wert x ausfällt.

$H(X)$ soll verschiedene Eigenschaften erfüllen (beachte: nicht jedes Prinzip erfüllt jede Eigenschaft)[4].

[4] Siehe [Pfe09], Seite 87.

Definition 1.1.2. *Es sei H ein Prämienprinzip und $\mathcal{Z}$ die Menge der nicht-negativen Zufallsvariablen. H ist*

a) *erwartungswertübersteigend (eü):*
   $H(X) \geq E[X]$ *für alle* $X \in \mathcal{Z}$.

b) *positiv homogen (ph):*
   $H(c \cdot X) = c \cdot H(X)$ *für alle* $c \geq 0$ *und* $X \in \mathcal{Z}$.

c) *additiv (ad):*
   $H(X+Y) = H(X) + H(Y)$ *für alle* $X, Y \in \mathcal{Z}$,
   die stochastisch unabhängig sind.

d) *maximalschadenbegrenzt (ms):*
   $H(X) \leq \overline{\omega}_X := \sup\{x \in \mathbb{R} \mid F_X(x) < 1\}$ *für alle* $X \in \mathcal{Z}$,
   wobei F_X *die Verteilungsfunktion von* X *bezeichnet.*

e) *Stochastisch monoton (sm):*
   $H(X) \leq H(Y)$ *für stochastisch geordnete* $X, Y \in \mathcal{Z}$,
   also wenn $F_X(x) \geq F_Y(x)$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$.

Jedes Prämienprinzip sollte mindestens erwartungswertübersteigend und maximalschadenbegrenzt sein. Erwartungswertübersteigend bedeutet, dass das Unternehmen nicht sicher in den Ruin geht, wie bereits ausgeführt. Maximalschadenbegrenzt heißt, dass das Versicherungsunternehmen wirklich ein Risiko trägt, es also für den Kunden einen Grund gibt, die Versicherung auch abzuschließen.
Positive Homogenität bezeichnet die Invarianz bezüglich der Geldeinheit, zum Beispiel Äquivalenz von Euro und US-Dollar mit einem Umrechnungsfaktor. Die Eigenschaft der Additivität bedeutet, dass bei gemeinsamer Versicherung mehrerer unabhängiger Risiken die benötigte Prämie der Summe der einzelnen Prämien entspricht. Die stochastische Monotonie wiederum beschreibt, dass größere Risiken auch höhere Prämien erfordern.

Die einzige Prämie, die alle fünf Eigenschaften erfüllt, ist die Nettoprämie $H(X) = E[X]$. Diese ist jedoch, wie bereits angemerkt, wirtschaftlich nicht vertretbar. Hier daher einige in der Praxis relevante Prämienprinzipien[5]:

[5] Vergleiche [Pfe09], Seite 87ff.

Definition 1.1.3. *Sei H ein Prämienprinzip.*

a) *Sei $\delta \geq 0$. H mit*

$$H(X) = (1+\delta)E[X], X \in \mathcal{Z},$$

heißt dann Erwartungswertprinzip (EwP) mit Sicherheitszuschlag δ.

b) *Sei $\delta \geq 0$. Wenn die Varianz $Var[X]$ von X existiert, dann heißt H mit*

$$H(X) = E[X] + \delta \cdot Var[X], X \in \mathcal{Z},$$

Varianzprinzip (VaP) mit Zuschlagsfaktor δ.

c) *Sei $\delta \geq 0$. Wenn die Varianz $Var[X]$ von X existiert, dann heißt H mit*

$$H(X) = E[X] + \delta \cdot \sqrt{Var[X]}, X \in \mathcal{Z},$$

Standardabweichungsprinzip (StP) mit Zuschlagsfaktor δ.

d) *Sei $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ eine streng monoton wachsende, konvexe Funktion. Existiert der Erwartungswert, so heißt H mit*

$$H(X) = g^{-1}(E[g(X)]), X \in \mathcal{Z},$$

Mittelwertprinzip (MwP) bezüglich g.

e) *Sei $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ eine (schwach) monoton wachsende Funktion. Existiert der Erwartungswert, so heißt H mit*

$$H(X) = \frac{E[X \cdot g(X)]}{E[g(X)]}, X \in \mathcal{Z},$$

Esscherprinzip (EsP) bezüglich g.

f) *Sei $\varepsilon \in (0,1)$. H mit*

$$H(X) = F_X^{-1}(1-\varepsilon) = \inf\{x \in \mathbb{R}^+ \mid F_X(x) \geq 1-\varepsilon\}, X \in \mathcal{Z},$$

heißt Perzentilprinzip (PzP) zur Risikowahrscheinlichkeit ε.

1.1.2. Schadenreservierungen

Im Bereich der Nicht-Lebensversicherungen gibt es neben der Bestimmung der Prämien noch ein weiteres Problem, die so genannten Spätschäden. Dies hängt einerseits damit zusammen, dass ein Schaden zwar aufgetreten sein kann und dennoch nicht bekannt ist oder Schäden aufgrund eines Ereignisses erst nach und nach auftreten. Hier ein Beispiel aus [Tay00][6]:

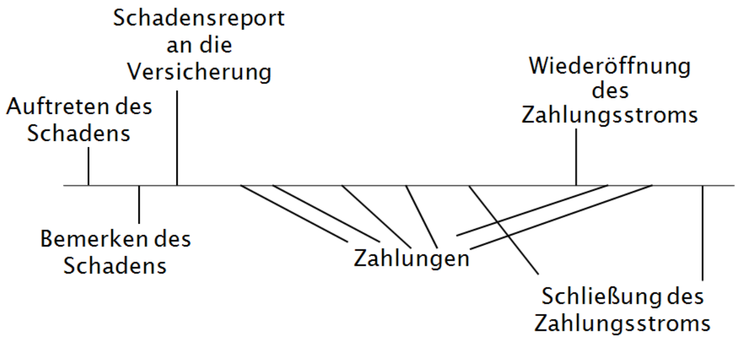

Abbildung 1.1.: Möglicher Verlauf eines einzelnen Schadensversicherungsvertrages

Die Zeit zwischen Auftreten und Meldung des Schadens an das Versicherungsunternehmen wird als *Incurred but not Reported* (IBNR) bezeichnet. Sind alle Zahlungen geleistet, wird der Zahlungsstrom geschlossen. Sollte sich dieses als Irrtum erweisen, so wird der Zahlungsstrom neu eröffnet und weitere Zahlungen folgen bis zur erneuten Schließung. Ein Beispiel wäre ein Wasserschaden, der während eines Urlaubs auftritt, aber erst nach diesem gemeldet wird. Nach Abschluss der Zahlungen tritt nach einiger Zeit Schimmel in den Wänden auf, so dass erneute Zahlungen geleistet werden müssen.
Das Versicherungsunternehmen möchte nun aber zu einem festen Bewertungszeitpunkt seine zukünftigen Ausgaben (Liabilities) schätzen. Da der Schaden jedoch nicht zu jedem Zeitpunkt bekannt ist (IBNR) oder bereits als abgeschlossen gilt, wird dieser auch nicht gewertet. Betrachtet man jedoch die Summe aller Claims, so kann der Wert aus historischen Daten geschätzt werden.

Bei der Schätzung geht es also darum, zukünftige Zahlungen anhand bisher angefallener Schäden zu bewerten. Auf durch Inflation bedingte Abweichungen wird an dieser Stelle nicht weiter eingegangen[7].

Die meistgenutzte Variante zur Bestimmung der Schadenreservierung ist das Chain-Ladder Verfahren. Taylor ([Tay00]) führt dessen Entstehung bis zu Harnek ([Har66]) zurück. Im Chain-Ladder Verfahren werden Daten der Vergangenheit

[6] Seite 18ff.
[7] Es sei hierzu auf [HBH96] verwiesen.

ausgewertet und auf die Zukunft bezogen. So sind bei älteren Claims bereits Nachzahlungen abgeschlossen, die Höhe dieser im Vergleich zur Erstzahlung von neueren Claims gibt eine Schätzung für die Höhe der Nachzahlungen der neueren Claims ab. Da sich diese Schätzer jedoch über die Jahre verändern, ist es meist sinnvoll, für in kurzer Zeit anstehende Zahlungen nur neuere Daten auszuwerten, für spätere Zahlungen jedoch alle vorhandenen Daten. Diese können untereinander in der Auswertung noch weiter gewichtet werden. Taylor ([Tay00]) unterstellt zudem Verteilungen, durch die sich die resultierenden Werte noch glätten lassen. Meine Betrachtungen beschränken sich auf das heuristische Chain-Ladder Verfahren[8].

Sei $X(i,j)$ die Summe der aus Schäden des Jahres i resultierenden Zahlungen am Ende der j-ten Periode nach Abschluss, also im Zeitpunkt $j+i-1$. Dies umfasst IBNR Claims und jegliche Art von Spätschäden. $X(i,j)$ ist für ältere Jahre bekannt, jedoch für zukünftige eine Zufallsvariable. Sei I die Anzahl beobachteter Jahre und $Y(i,j) = \sum_{m=1}^{j} X(i,m)$ die summierten Zahlungen der ersten j Jahre für Schäden des Jahres i. Das Chain-Ladder Verfahren trifft nun die Annahmen

$$E[X(i,j)] = \alpha(i)\mu(j), \qquad \mu(1) = 1, \tag{1.2}$$

$$Var[X(i,j) \mid Y(i,j-1)] = \sigma_{j-1}^2 \cdot Y(i,j-1) \qquad j > 1. \tag{1.3}$$

In einem bestimmten Jahr i fällt ein Schaden $\alpha(i)$ an, dessen Spätschäden nicht vom Jahr selber, sondern von einem Zeitfaktor $\mu(j)$ abhängen. Die Varianz hängt von der Periode sowie den bisherigen Gesamtschäden ab. $\mu(j)$ und σ_{j-1}^2 können aus bekannten Daten geschätzt werden. Es gilt wegen obiger Annahme

$$\frac{E[Y(i,j+1)]}{E[Y(i,j)]} = \frac{\sum\limits_{m=1}^{j+1} \mu(m)}{\sum\limits_{m=1}^{j} \mu(m)}, \tag{1.4}$$

wobei die rechte Seite nicht mehr von i abhängig ist. Eine Schätzung kann somit durch die linke Seite erfolgen. Da i jedoch beliebig ist, kann eine Kombination über alle verfügbaren Jahre einen besseren Schätzer ergeben. Die so erhaltenen Schätzer

$$\widehat{\nu}_j = \sum_{i=1}^{I-j} Y(i,j+1) / \sum_{i=1}^{I-j} Y(i,j) \tag{1.5}$$

heißen age-to-age Faktoren vom Periodenende j zum Periodenende $j+1$ und beschreiben eine Wertänderung des Liability-Portfolios. Es ist zu beachten, dass hier nicht zwingend über alle bekannten i summiert werden muss, da es auch von Vorteil sein kann, ältere Daten für kleinere j verfallen zu lassen.

[8] Hier sei auch auf [Mac91] und [Kre85] verwiesen.

Um nun eine Schätzung für zukünftige Schäden zu erhalten, werden die age-to-age Schätzer auf bereits aufgetretene Schäden angewandt. So kann der zukünftige Wert von $Y(i,j)$ für bekanntes $Y(i,m)$, $m < j$, durch

$$\widehat{Y}(i,j) = Y(i,m)\widehat{\nu}_m \cdots \widehat{\nu}_{j-1} \tag{1.6}$$

geschätzt werden, zukünftige Werte der $X(i,j)$ mittels

$$\widehat{X}(i,j) = Y(i,m)\widehat{\nu}_m \cdots \widehat{\nu}_{j-2} \cdot (\widehat{\nu}_{j-1} - 1). \tag{1.7}$$

Seien die individuellen Chain-Ladder Entwicklungsfaktoren als

$$\nu_{i,j} = \frac{Y_{i,j+1}}{Y_{i,j}} \tag{1.8}$$

definiert. Diese sind dann unabhängige Schätzer für ν_j mit bedingter Varianz

$$Var[\nu_{i,j} \mid Y_{i,j}] = \sigma_j^2 / Y_{i,j}. \tag{1.9}$$

Satz 1.1.4. *$\widehat{\nu}_j$ sind die voneinander unabhängigen Schätzer für ν_j mit minimaler Varianz aller Linearkombinationen aus unabhängigen Schätzern für $\nu_{i,j}$.*

Beweis. Taylor führt dies in [Tay00], Abschnitt 12.2.2, mittels der Methode von Lagrange her. □

Als Schätzer für σ_j^2 sei

$$\widehat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{I-j-1} \cdot \sum_{i=1}^{I-j} Y_{i,j} \cdot (\frac{Y_{i,j+1}}{Y_{i,j}} - \widehat{\nu}_j)^2, j < I-1 \tag{1.10}$$

gewählt. Für $\widehat{\sigma}_{I-1}^2$ reichen die Daten nicht aus, daher wird mittels einer Formel von Mack aus [Mac93] geschätzt:

$$\widehat{\sigma}_{I-1}^2 = \min\{\widehat{\sigma}_{I-2}^4 / \widehat{\sigma}_{I-3}^2; \widehat{\sigma}_{I-2}^2; \widehat{\sigma}_{I-3}^2\}. \tag{1.11}$$

Der Name Chain-Ladder leitet sich von der Aufarbeitung der Daten ab, da sich diese tabellarisch wie eine Kette aufbauen und ältere Daten neuere begründen. Folgendes Beispiel nutzt die Daten aus [WBF07][9].

Beispiel 1.1.5. *Mittels der age-to-age-Schätzer aus Tabelle 1.3, die nach (1.5) berechnet sind, füllen sich die Tabellen 1.1 und 1.2 zu 1.4 und 1.5 auf.*

[9] Diese werden auch von [TA83], [Ver90], [Ver91] und [Mac93] gebraucht.

Tabelle 1.1.: Inkrementelle Schäden $X_{i,j}$

	Schadenperiode j									
Jahr i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	357848	766940	610542	482940	527326	574398	146342	139950	227229	67948
2	352118	884021	933894	1183289	445745	320996	527804	266172	425046	
3	290507	1001799	926219	1016654	750816	146923	495992	280405		
4	310608	1108250	776189	1562400	272482	352053	206286			
5	443160	693190	991983	769488	504851	470639				
6	396132	937085	847498	805037	705960					
7	440832	847631	1131398	1063269						
8	359480	1061648	1443370							
9	376686	986608								
10	344014									

Tabelle 1.2.: Kumulative Schäden $Y_{i,j}$

	Schadenperiode j									
Jahr i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	357848	1124788	1735330	2218270	2745596	3319994	3466336	3606286	3833515	3901463
2	352118	1236139	2170033	3353322	3799067	4120063	4647867	4914039	5339085	
3	290507	1292306	2218525	3235179	3985995	4132918	4628910	4909315		
4	310608	1418858	2195047	3757447	4029929	4381982	4588268			
5	443160	1136350	2128333	2897821	3402672	3873311				
6	396132	1333217	2180715	2985752	3691712					
7	440832	1288463	2419861	3483130						
8	359480	1421128	2864498							
9	376686	1363294								
10	344014									

Tabelle 1.3.: age-to-age Schätzer $\widehat{\nu}_j$

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\widehat{\nu}_j$	3.4906	1.7473	1.4574	1.1739	1.1038	1.0863	1.0539	1.0766	1.0177
$\widehat{\sigma}_j$	400.36	194.26	204.85	123.22	117.18	90.473	21.133	33.874	21.133

Tabelle 1.4.: Erwartete Inkrementelle Schäden $\widehat{X}_{i,j}$

Jahr i	Schadenperiode j 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	357848	766940	610542	482940	527326	574398	146342	139950	227229	67948
2	352118	884021	933894	1183289	445745	320996	527804	266172	425046	**94634**
3	290507	1001799	926219	1016654	750816	146923	495992	280405	**375833**	**93678**
4	310608	1108250	776189	1562400	272482	352053	206286	**247190**	**370179**	**92268**
5	443160	693190	991983	769488	504851	470639	**334148**	**226674**	**339456**	**84611**
6	396132	937085	847498	805037	705960	**383287**	**351548**	**238477**	**357132**	**89016**
7	440832	847631	1131398	1063269	**605548**	**424501**	**389349**	**264121**	**395534**	**98588**
8	359480	1061648	1443370	**1310258**	**725788**	**508792**	**466660**	**316565**	**474073**	**118164**
9	376686	986608	**1018834**	**1089616**	**603569**	**423113**	**388076**	**263257**	**394241**	**98266**
10	344014	**856804**	**897410**	**959756**	**531636**	**372687**	**341826**	**231882**	**347255**	**86555**

Tabelle 1.5.: Erwartete Kumulative Schäden $\widehat{Y}_{i,j}$

Jahr i	Schadenperiode j 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	357848	1124788	1735330	2218270	2745596	3319994	3466336	3606286	3833515	3901463
2	352118	1236139	2170033	3353322	3799067	4120063	4647867	4914039	5339085	**5433719**
3	290507	1292306	2218525	3235179	3985995	4132918	4628910	4909315	**5285148**	**5378826**
4	310608	1418858	2195047	3757447	4029929	4381982	4588268	**4835458**	**5205637**	**5297905**
5	443160	1136350	2128333	2897821	3402672	3873311	**4207459**	**4434133**	**4773589**	**4858200**
6	396132	1333217	2180715	2985752	3691712	**4074999**	**4426547**	**4665024**	**5022156**	**5111172**
7	440832	1288463	2419861	3483130	**4088678**	**4513179**	**4902528**	**5166649**	**5562183**	**5660771**
8	359480	1421128	2864498	**4174756**	**4900544**	**5409336**	**5875996**	**6192561**	**6666634**	**6784798**
9	376686	1363294	**2382128**	**3471744**	**4075313**	**4498426**	**4886502**	**5149759**	**5544000**	**5642266**
10	344014	**1200818**	**2098228**	**3057984**	**3589620**	**3962307**	**4304133**	**4536015**	**4883270**	**4969825**

1.1.3. Risikomaße

Risikomaße dienen dazu, das Risiko einer Anlage einzuschätzen und macht sie vergleichbar mit anderen Anlagen.
Zunächst einige Definitionen (vgl. [FS04], Kapitel 4 oder [ADEH99]), die Risikomaße beschreiben:

Definition 1.1.6. *$\rho : \mathcal{Z} \to \mathbb{R}$ heißt monetäres Risikomaß, falls die Eigenschaften*

- *Monotonie: wenn $X \leq Y$, dann $\rho(X) \geq \rho(Y)$*

und

- *Währungsinvarianz: wenn $m \in \mathbb{R}$, dann $\rho(X + m) = \rho(X) - m$*

erfüllt sind.

$X \leq Y \Leftrightarrow F_X(x) \geq F_Y(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$ bezeichnet hierbei eine stochastische Ordnung. Die Monotonie sagt aus, dass das Sicherheitskapital einer sichereren Anlage geringer ist als das der riskanteren (ausgedrückt durch die Wahrscheinlichkeit, größere Verluste zu erhalten). Die Währungsinvarianz zeigt genau dies, denn wird auf eine Anlage X ein fester Betrag m aufgeschlagen, so ist dieser vom Risikokapital abzuziehen. Insbesondere gilt $\rho(X - \rho(X)) = 0$. Als zusätzliche Eigenschaft kann man zudem noch die

- Normalisation: $\rho(0) = 0$

annehmen, allerdings ist dies nicht in allen Fällen sinnvoll, aber in den meisten ohne Bedingung der Allgemeinheit möglich.

Definition 1.1.7. *Ein monetäres Risikomaß heißt konvexes Risikomaß, wenn die Eigenschaft der*

- *Konvexität: $\rho(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \leq \lambda\rho(X) + (1 - \lambda)\rho(Y), 0 \leq \lambda \leq 1$*

gegeben ist. Konvexität besagt, dass bei Diversifizierung der Anlage das Gesamtrisiko geringer ist als die Summe der Risiken.

Definition 1.1.8. *Ein konvexes Risikomaß heißt kohärentes Risikomaß, wenn die Eigenschaft*

- *Positive Homogenität: Für $\lambda \geq 0$ ist $\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X)$*

erfüllt ist. Hieraus folgt direkt die oben angesprochene Eigenschaft der Normalisation.

Wir benötigen wir außerdem folgende Definition[10]:

Definition 1.1.9. *Pseudoinverse*
Sei F_X die Verteilungsfunktion der Zufallsvariable X.
Dann heißt die Funktion F_X^{-1} mit der Zuordnung

$$F_X^{-1}(y) = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F_X(x) \geq y\}, y \in (0,1), \tag{1.12}$$

Quantilfunktion oder Pseudoinverse von F_X.

Das am meisten verwendete Risikomaß ist der *Value at Risk* (VaR). Dieser beschreibt das α-Quantil am oberen Ende der Verteilung, also den monetären Wert, der in $1-\alpha$ Prozent aller Fälle nicht überschritten wird.

$$VaR_\alpha(X) := -F_X^{-1}(1-\alpha) \text{ für } 0 < \alpha < 1, \tag{1.13}$$

wobei F_X die Verteilungsfunktion des Risikos darstellt. Der VaR hat jedoch den entscheidenden Nachteil, kein kohärentes, ja nicht einmal ein konvexes Risikomaß zu sein. Die Aufteilung einer Risikoposition in zwei neue erfordert unter Umständen weniger Risikokapital.

Auf der Suche nach einem kohärenten Risikomaß stösst man zunächst auf den Erwartungswert $E[X]$ des Risikos X. Dieser gibt jedoch nur wenig Anhalt über ein sinnvolles Risikokapital. Daher ermittelt man ein kohärentes Risikomaß oberhalb des *Value at Risk*. Sehr verbreitet ist hier der *Expected Shortfall*[11], welcher unter Annahme von Stetigkeit der Risikoverteilung als bedingter Erwartungswert des Risikos oberhalb das VaR_α ausgedrückt wird[12]:

$$ES_\alpha(X) = -E[X \mid X \geq -VaR_\alpha(X)] \tag{1.14}$$

oder alternativ als *Average Value at Risk*

$$ES_\alpha(X) = -\frac{1}{\alpha} \int\limits_{1-\alpha}^{1} F_X^{-1}(x)dx.$$

[10] Vergleiche auch [CK07].

[11] Alternative Namen sind *Tail Value at Risk*, *Conditional Value at Risk* oder *Average Value at Risk*, welche sich im Diskreten durchaus unterscheiden können, was hier jedoch nicht weiter betrachtet wird.

[12] Vergleiche [Pfe09], Seite 124f.

Satz 1.1.10. *Der Expected Shortfall ES_α ist ein kohärentes Risikomaß.*

Beweis. Zunächst sei klar, dass $X \leq Y \Leftrightarrow F_X \geq F_Y \Leftrightarrow F_X^{-1} \leq F_Y^{-1}$ gilt.
Monotonie:

$$\begin{aligned} X \leq Y \Rightarrow ES_\alpha(X) = & -\frac{1}{\alpha}\int_{1-\alpha}^{1} F_X^{-1}(x)dx \geq -\frac{1}{\alpha}\int_{1-\alpha}^{1} F_Y^{-1}(x)dx \\ = & ES_\alpha(Y) \end{aligned}$$

Währungsinvarianz:

$$\begin{aligned} ES_\alpha(X+m) = & -\frac{1}{\alpha}\int_{1-\alpha}^{1} F_{X+m}^{-1}(x)dx \\ = & -\frac{1}{\alpha}\int_{1-\alpha}^{1} F_X^{-1}(x) + mdx \\ = & ES_\alpha(X) - m \end{aligned}$$

Konvexität:

$$\begin{aligned} ES_\alpha(\lambda X + (1-\lambda)Y) = & -\frac{1}{\alpha}\int_{1-\alpha}^{1} F_{\lambda X+(1-\lambda)Y}^{-1}(x)dx \\ \leq & -\frac{1}{\alpha}\int_{1-\alpha}^{1} F_{\lambda X}^{-1}(x) + F_{(1-\lambda)Y}^{-1}(x)dx \\ = & ES_\alpha(\lambda X) + ES_\alpha((1-\lambda)Y) \end{aligned}$$

Positive Homogenität:

$$\begin{aligned} \lambda \geq 0 \Rightarrow ES_\alpha(\lambda X) = & -\frac{1}{\alpha}\int_{1-\alpha}^{1} F_{\lambda X}^{-1}(x)dx \\ = & -\frac{\lambda}{\alpha}\int_{1-\alpha}^{1} F_X^{-1}(x)dx \\ = & \lambda ES_\alpha(X) \end{aligned}$$

□

1.2. Stochastisches Diskontieren und Bewertung von Cash-Flows

Risikoneutrales Bewerten von Cash-Flows funktioniert über Deflatoren. Deflatoren sind stochastische Diskontfaktoren. Die Bewertung mit Hilfe von Deflatoren ist konsistent mit der gewöhnlichen risikoneutralen Bewertung der Finanztheorie. Es erfolgt eine Beschränkung auf Bewertungen in einem diskreten Zeitmodell, wie bei Wüthrich, Bühlmann und Furrer ([WBF07]).

Seien ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ und
eine Familie von σ-Algebren $(\mathfrak{F}_t)_{t=0,\dots,n}$ mit

$$\{\emptyset, \Omega\} = \mathfrak{F}_0 \subset \mathfrak{F}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{F}_n \subset \mathfrak{F} \tag{1.15}$$

gegeben, zu der eine $(\mathfrak{F}_t)_{t=0,\dots,n}$-adaptierte Sequenz von Zufallsvariablen

$$\mathbf{X} = (X_0, X_1, \ldots, X_n)$$

existiert. $\mathbf{X}$ ist dann ein (zufälliger) Cash-Flow mit Geldströmen X_t zur Zeit t (also zur Ausführungszeit bekannt). Die Zuhilfenahme der Deflatoren ermöglicht es nun, den Wert von $\mathbf{X}$ zu einer beliebigen Zeit zu bestimmen.

Annahme: Jede Koordinate von $\mathbf{X}$ ist quadratintegrierbar.

Somit ist $\mathbf{X} \in L^2_{n+1}(P)$, welcher ein Hilbertraum ist und einige Eigenschaften erfüllt:

$$E[\sum_{t=0}^{n} X_t^2] < \infty \text{ für alle } \mathbf{X} \in L^2_{n+1}(P) \tag{1.16}$$

$$< \mathbf{X}, \mathbf{Y} >= E[\sum_{t=0}^{n} X_t Y_t] \text{ für alle } \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in L^2_{n+1}(P) \tag{1.17}$$

$$\| \mathbf{X} \| =< \mathbf{X}, \mathbf{X} >^{1/2} \text{ für alle } \mathbf{X} \in L^2_{n+1}(P) \tag{1.18}$$

Definition 1.2.1. *Im folgenden gelte:*

- $\boldsymbol{X} > 0 \Leftrightarrow X_k \geq 0,$ *P-fast sicher für alle* $k = 0, \ldots, n$ *und es gibt ein* $k \in \{0, \ldots, n\}$ *für das* $X_k > 0$ *mit positiver Wahrscheinlichkeit.*
- $\boldsymbol{X} \gg 0 \Leftrightarrow X_k > 0$ *P-fast sicher für alle* $k = 0, \ldots, n$.

Definition 1.2.2. *$Q : L^2_{n+1}(P) \to \mathbb{R}$ heißt positives stetiges lineares Funktional auf $L^2_{n+1}(P)$, wenn es die folgenden Eigenschaften erfüllt:*

- *Positivität: $\boldsymbol{X} > 0 \Rightarrow Q[\boldsymbol{X}] > 0$.*
- *Stetigkeit: für jede Folge von Zufallsvariablen $\boldsymbol{X}^{(k)} \in L^2_{n+1}(P)$ für die $\boldsymbol{X}^{(k)} \to \boldsymbol{X}$ in $L^2_{n+1}(P)$ konvergiert, gilt, dass $Q[\boldsymbol{X}^{(k)}] \to Q[\boldsymbol{X}]$ konvergiert.*
- *Linearität: für alle $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \in L^2_{n+1}(P)$ und alle $a, b \in \mathbb{R}$ ist $Q[a\boldsymbol{X} + b\,\boldsymbol{Y}] = a \cdot Q[\boldsymbol{X}] + b \cdot Q[\boldsymbol{Y}]$.*

$Q[\mathbf{X}]$ kann als Bewertungsfunktion des Cash-Flows $\mathbf{X}$ angesehen werden.
Zudem genügt es, in der Definition nur Positivität und Linearität zu verwenden, da diese bereits die Stetigkeit begründen:

Lemma 1.2.3. *Ein positives lineares Funktional $Q : L^2_{n+1}(P) \to \mathbb{R}$ auf $L^2_{n+1}(P)$ ist stetig.*

Beweis. Da Q bereits linear ist, genügt es für jede Folge $\mathbf{X}^{(k)}$ nur $\mathbf{Y}^{(k)} := \mathbf{X}^{(k)} - \mathbf{X}$ zu untersuchen und zu beweisen, dass aus $\mathbf{Y}^{(k)} \to 0$ in $L^2_{n+1}(P)$ folgt, dass $Q[\mathbf{Y}^{(k)}] \to 0$ konvergiert.
Wäre dies nicht der Fall, existiert ein $\varepsilon > 0$ und eine unendliche Unterfolge k' von k mit $Q[\mathbf{Y}^{(k')}] \geq \varepsilon$ für alle k'. Wähle dann eine unendliche Unterfolge k'' von k', die

$$\sum_{k''} \| \mathbf{Y}^{(k'')} \| < \infty$$

erfüllt. Dann ist $\mathbf{Y} := \sum_{k''} \mathbf{Y}^{(k'')} \in L^2_{n+1}(P)$ wegen Vollständigkeit von $L^2_{n+1}(P)$.
Nun ist aber

$$Q[\mathbf{Y}] \geq Q[\sum_{k''=1}^{N} \mathbf{Y}^{(k'')}] \geq N \cdot \varepsilon$$

für alle N, was $Q[\mathbf{Y}] = \infty$ impliziert. Dies ist allerdings ein Widerspruch zur Definition von Q.
Um den Beweis zu beenden, reicht es, $\mathbf{Y}^{(k)}$ in einen positiven Teil $\mathbf{Y}^{(k)}_{+}$ und einen negativen Teil $\mathbf{Y}^{(k)}_{-}$ zu zerlegen. Für jeden dieser Teile gilt

$$\| \mathbf{Y}^{(k)}_{+/-} \| \leq \| \mathbf{Y}^{(k)} \| \to 0,$$

also wegen des ersten Beweisteils auch $Q[\mathbf{Y}^{(k)}_{+/-}] \to 0$ und wegen der Linearität von Q die Behauptung. □

Satz 1.2.4. *Rieszscher Darstellungssatz*
Sei $\boldsymbol{X} \in L^2_{n+1}(P)$. Dann existiert für jedes positive stetige lineare Funktional Q ein $\varphi \in L^2_{n+1}(P)$, so dass

$$Q[\boldsymbol{X}] =< \boldsymbol{X}, \varphi >= E[\sum_{t=0}^{n} X_t \cdot \varphi_t].$$

Definition 1.2.5. *Der Vektor φ aus obigem Satz heißt Deflator.*

Bemerkung 1.2.6. *Deflatoren haben die folgenden Eigenschaften:*

- $\varphi \gg 0$ *wegen Positivität von Q.*
- φ_t *kann $\mathfrak{F}_t$-adaptiert gewählt werden. Ersetze hierzu φ_t mit $\widetilde{\varphi}_t = E[\varphi_t \mid \mathfrak{F}_t]$, so dass für alle $\boldsymbol{X}$ gilt:*

  $$Q[\boldsymbol{X}] = E[\sum_{t=0}^{n} X_t \cdot \varphi_t] = E[\sum_{t=0}^{n} X_t \cdot E[\varphi_t \mid \mathfrak{F}_t]] = E[\sum_{t=0}^{n} X_t \cdot \widetilde{\varphi}_t].$$

  Die Wahl ist somit ohne Einschränkungen möglich.
- *Ein $\mathfrak{F}_t$-adaptierter Deflator φ ist (bis auf Nullmengen) eindeutig bestimmt. Wäre dem nicht so, dann gäbe es φ und φ^*, so dass für alle $\boldsymbol{X}$ gilt: $Q[\boldsymbol{X}] =< \boldsymbol{X}, \varphi >=< \boldsymbol{X}, \varphi^* >$. Dann gilt allerdings*

  $$Q[\varphi] =\| \varphi \|^2 =< \varphi, \varphi^* >=< \varphi^*, \varphi >=\| \varphi^* \|^2 = Q[\varphi^*]$$

  und somit

  $$< \varphi^*, \varphi >=\| \varphi^* \| \cdot \| \varphi \| .$$

  Mittels der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung (Satz A.2) folgt nun, dass φ und φ^* P-fast sicher bis auf einen konstanten Faktor gleich sind, was aber wegen $< \boldsymbol{X}, \varphi >=< \boldsymbol{X}, \varphi^* >$ Gleichheit zur Folge hat.
- *Wählt man nun Q so, dass $\varphi_0 \equiv 1$ gilt, so bedeutet dies eine neutrale Bewertung im Zeitpunkt 0, also $Q[(x_0, 0, \ldots, 0)] = x_0$.*

Definition 1.2.7. *$Y_t = \varphi_t / \varphi_{t-1}$ heißt Spann-Deflator. Er bezeichnet den Wert einer in t erfolgenden Zahlung im Zeitpunkt $t-1$ und es gilt*

$$\varphi_t = \prod_{k=1}^{t} Y_k \cdot \varphi_0.$$

Beispiel 1.2.8. *Sei* $\boldsymbol{Z}^{(t)} = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ *der Zero-Coupon Bond mit Auszahlung* 1 *im Zeitpunkt* t*. Der Wert zum Zeitpunkt* $s < t$ *dieses Bonds ist*

$$D_{s,t} = \frac{Q[\boldsymbol{Z}^{(t)}]}{Q[\boldsymbol{Z}^{(s)}]} = \frac{E[\varphi_t]}{E[\varphi_s]}. \tag{1.19}$$

Wegen seiner Natur ist $D_{s,t}$ $\mathfrak{F}_s$*-messbar, jedoch* φ_t/φ_s *nur eine* $\mathfrak{F}_t$*-messbare Zufallsvariable. So lange nur deterministische Variablen* $\boldsymbol{X}$ *betrachtet werden, ist es zwar egal, ob nun* $D_{s,t}$ *oder* φ_t/φ_s *verwendet wird. Sobald der Cash-Flow probabilistisch wird, ist jedoch nur der Deflator vernünftig, da sehr wohl*

$$Q[\boldsymbol{X}_t] = E[X_t \cdot \varphi_t] \neq E[X_t] \cdot E[\varphi_t] = D_{0,t} \cdot E[X_t]$$

gelten kann, womit die Realisation von X_t *direkt von* φ_t *abhängt. Ein klassisches Beispiel sind hier Versicherungen auf den Erlebensfall, welche am Ende ihrer Laufzeit den aufgetretenen Zinssätzen entsprechend eine Auszahlung leisten.*

In der klassischen Versicherungsmathematik wird $\varphi_t = (1+i)^{-t}$ vorausgesetzt, was jedoch nicht den tatsächlichen Gegebenheiten entspricht. Sollte dieser Ansatz trotzdem gewählt werden, so können in der Realität stark abweichende Berechnungswerte auftreten, was auf der Bilanz zu inkonsistenten Werten auf der Aktiv-Seite führt.

2. Asset-Liability-Management

Die klassische Versicherungsmathematik befasst sich mit *Liabilities*, den Verpflichtungen gegenüber Versicherungsnehmern und anderen, also rein mit der Passivseite der Bilanz des Versicherers. *Assets*, also Vermögen der Versicherungsnehmer, Eigenkapital und freie Reserven des Versicherers sind nicht Thema der klassischen Versicherungsmathematik. ALM befasst sich mit beiden Seiten der Bilanz und stellt eine Vielzahl von Methoden zur Bewertung von Zahlungsströmen zur Verfügung. Ziel ist die Optimierung des Risikomanagements, das heißt, das klassische versicherungstechnische Risikogeschäft wird im Zusammenhang mit dem Kapitalanlagegeschäft analysiert und entsprechend gesteuert. Erkenntnisse aus den Risikoabschätzungen bilden die Basis für die Kapitalanlagestrategie. So soll gewährleistet sein, dass fällige Leistungen jederzeit ausgezahlt werden können und stets ausreichend Eigenkapital zur Verfügung steht.

Zur Entwicklung von ALM in Deutschland sei verwiesen auf Zwiesler [Zwi04]. Er nennt hier Redingtons Immunisierungskonzept (Duration) von 1952 und Gessners Konzept der Planungsberechnung für die Lebensversicherung und seinen Finanzierbarkeitsnachweis (1978). Seit 1995 wurden, bedingt durch die Deregulerung des deutschen Versicherungsmarktes, neue Methoden entwickelt, die sich vielfältig einsetzen lassen, von der Analyse von einzelnen Versicherungsprodukten bis hin zur Bewertung des gesamten Versicherungsunternehmens. Zwiesler unterscheidet zwischen der Makro-Sicht (ALM auf Unternehmensebene) und der Mikro-Sicht (Analyse einzelner Versicherungsprodukte). Ich werde mich im folgenden auf diese Mikro-Sicht beziehen, indem ich Prämienberechnungen für Lebensversicherungen und Nicht-Lebensversicherungen unter Berücksichtigung von ALM betrachten werde.

Das folgende Kapitel befasst sich mit der Konstruktion eines Bewertungs-Portfolios $BePo$ für Lebens- wie auch für Sachversicherungen. Dieses Portfolio repliziert die Versicherungsverträge auf dem Kapitalmarkt. Annahme ist wie bei Wüthrich, Bühlmann und Furrer ([WBF07]) ein zeitdiskreter Rahmen: Schäden, die innerhalb einer Periode auftreten, werden zum Ende der Periode gezahlt. Weiterhin wird das den jeweiligen Vertrag replizierende Portfolio dann gegen technisches wie finanzielles Risiko abgesichert, wobei für das finanzielle Risiko der Modellrahmen zeitstetig angenommen wird, um Ergebnisse der klassischen Finanzmathematik nutzen zu können. Dies hat jedoch keinerlei Einfluss auf das Ziel der Prämienberechnung, sondern gibt lediglich einen Wert an, der unter Umständen auf die Prämie aufgeschlagen werden sollte.
Der Gedanke, dieses Portfolio zu gestalten, erschließt sich aus dem Asset-Liability-Management. Insgesamt soll sich so das Risiko vermindern. Mittels eines replizierenden Portfolios soll das am Versicherungsmarkt entstehende Risiko negativ am Finanzmarkt abgebildet werden, Ausgaben auf der einen führen zu Einnahmen auf der anderen Seite.

2.1. Risikodiversifikation

Für folgende Definition vergleiche [BS08][1]:

Definition 2.1.1. *Risikodiversifikation*
Auch bekannt als Risikostreuung: Anlage von Zahlungsmitteln in Assets, bei denen die Gefahr besteht, dass die Rückzahlungsbeträge teilweise oder ganz ausbleiben, wobei das Risiko des Ausfalls bei verschiedenen Assets unterschiedliche Ursachen hat.

Die Streuung des Kapitals auf verschiedene Anlagen vermindert das Risiko des Kapitalverlustes. Diese Minderung ist dadurch bedingt, dass Ausfälle unterschiedlichen Eintrittsursachen unterliegen. Durch Streuung wird ein kompletter Verlust der Anlagen weniger wahrscheinlich, jedoch auch die Möglichkeit, den gesamten möglichen Gewinn zu erzielen. Die Wahrscheinlichkeit, einen zwischenwertigen Ertrag zu erzielen, steigt jedoch.

[1] Seiten 10, 612.

Beispiel 2.1.2. *Es gebe zwei Anlagen, welche je zu einer Wahrscheinlichkeit von* 80% 100 *Euro ausschütten und zu* 20% *wertlos werden. Der Preis einer jeden Anlage sei* 80 *Euro, unser Anlagekapital betrage* 160 *Euro. Es stehen uns also zwei Möglichkeiten zur Wahl:*

a) Investiere das gesamte Kapital in eine Anlage:
Es ist mit 80% *Wahrscheinlichkeit mit* 200 *Euro Ausschüttung, aber mit* 20% *Wahrscheinlichkeit mit* 0 *Euro Ausschüttung zu rechnen.*

b) Investiere hälftig in beide Anlagen:
Es ist mit 64% *Wahrscheinlichkeit mit* 200 *Euro Ausschüttung zu rechnen, aber zu* 4% *mit einem totalen Ausfall. Mit einer Wahrscheinlichkeit von* 32% *ist mit einem geringeren Gewinn zu rechnen, hier werden nur* 100 *Euro ausgeschüttet.*

Die Erwartungswerte der Anlagestrategien entsprechen einander:

$$\begin{aligned} E[Strategie_a] &= 0.8 \cdot 200Euro \\ &= 160Euro \\ &= 0.64 \cdot 200Euro + 0.32 \cdot 100Euro = E[Strategie_b]. \end{aligned}$$

Das Risiko der Strategien wird unterschiedlich bewertet. Die Wahrscheinlichkeit auf einen Totalausfall ist in der zweiten Strategie wesentlich geringer, aber auch die Wahrscheinlichkeit auf die höchstmögliche Ausschüttung. Berechnen wir Value at Risk und Expected Shortfall beider Strategien zu einer Risikowahrscheinlichkeit von $\alpha = 5\%$*:*

$$\begin{aligned} VaR_{5\%}[Strategie_a] &= -F^{-1}_{Strategie_a}(0.95) = -200, \\ VaR_{5\%}[Strategie_b] &= -F^{-1}_{Strategie_b}(0.95) = -100, \\ ES_{5\%}[Strategie_a] &= -E[Strategie_a \mid Strategie_a \geq 200] = -200, \\ ES_{5\%}[Strategie_b] &= -E[Strategie_b \mid Strategie_b \geq 100] = -(100 \cdot \frac{1}{3} + 200 \cdot \frac{2}{3}) \\ &= -166 - 2/3. \end{aligned}$$

Das Risiko ist also sowohl unter VaR *als auch unter dem* ES *für Strategie b) besser bewertet.*

2.2. Portfoliowahl einer Lebensversicherung (Personenversicherung)

Mit dem Begriff Lebensversicherung fasse ich in meiner Arbeit die Bereiche Lebens-, Kranken-, Unfall- und Berufsunfähigkeitsversicherung zusammen. In diesen Versicherungsbereichen lösen Tod, Invalidität beziehungsweise Krankheit den Versicherungsfall aus. Der Versicherungsfall selbst bleibt unvorhersagbar. Rentenversicherungen, die auch zu den Lebensversicherungen gehören, stellen einen Spezialfall dar. Der Versicherungsfall tritt hier zu einem festen Zeitpunkt ein. Folgende Kriterien im Lebensversicherungsgeschäft erfordern eine besondere Betrachtung: lange Vertragslaufzeit, Zinsänderungsrisiko, geringe Stochastizität von Schadeneintritt und -höhe[2]. Deshalb werden bei der Lebensversicherung besonders Immunisierungs- und Optimierungsmodelle verwendet.

Betrachten wir zunächst ein Standard-Modell mit deterministischen Sterbewahrscheinlichkeiten, welche aus zugrunde liegenden Daten ohne Aufschläge stammen. Bezeichne l_x die Anzahl der lebenden x-jährigen und d_x die Anzahl der x-jährigen, die vor Erreichen des Lebensalters $x+1$ sterben. Es folgt direkt $l_x - l_{x+1} = d_x$.[3] Aus diesen Daten lassen sich eindeutige Erlebens- und Sterbewahrscheinlichkeiten errechnen. So ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein x-jähriger noch y Jahre lebt durch

$$ {}_y p_x = \frac{l_{x+y}}{l_x} \tag{2.1} $$

angegeben (im Fall $y = 1$ wird dieser Index nicht mit angegeben). Die entsprechende Wahrscheinlichkeit, nicht so lange zu überleben, ist durch

$$ {}_y q_x = 1 - {}_y p_x = \frac{\sum_{j=x}^{x+y-1} d_j}{l_x} \tag{2.2} $$

angegeben. Diese Daten finden sich in den meisten zur Verfügung stehenden Tabellen.

Zunächst eine grundlegene Definition[4]:

Definition 2.2.1. *Derivat*
Ein Derivat ist ein an einen Dividendenprozess δ adaptierter Claim.
Bezeichne δ_t die im Zeitpunkt t gezahlte Dividende des Derivats. Jedes Derivat hat einen adaptierten Preisprozess S, mit dem S_t den Preis des Derivates im Zeitpunkt t nach Dividenden beschreibt.

[2] Vergleiche [EP05].
[3] Vergleiche [Sch06], Seiten 124, 127.
[4] Vergleiche [Smi95] Seiten 168f, 186ff sowie [Duf92] Seite 22.

Sei nun ein gemischter Todesfall- und Erlebensversicherungsvertrag für einen x-jährigen mit jährlicher Prämie Π, Todesfall-Zahlung Y_t und Erlebensfall-Zahlung Z_n, wobei n die Laufzeit des Vertrages darstellt, $0 < t \leq n$, gegeben. $\mathbf{Y}$ und $\mathbf{Z}$ sind hierbei Zufallsvariablen, die jedoch durch ein Minimum (zum Beispiel Bankkonto) nach unten beschränkt sein können, um dem Versicherten eine Garantie zu bieten.

Für l_x Versicherte unter diesem Vertrag ergibt sich folgender Cash-Flow:

Alter	Cash-Flow	Prämien	Todesfall	Erlebensfall
x	X_0	$-l_x \cdot \Pi$		
$x+1$	X_1	$-l_{x+1} \cdot \Pi$	$d_x \cdot Y_1$	
$x+2$	X_2	$-l_{x+2} \cdot \Pi$	$d_{x+1} \cdot Y_2$	
	$\vdots$		$\vdots$	
$x+n$	X_n		$d_{x+n-1} \cdot Y_n$	$l_{x+n} \cdot Z_n$

Tabelle 2.1.: Deterministischer Cash-Flow für l_x Versicherte

oder alternativ für nur einen Versicherten mit Wahrscheinlichkeiten dargestellt

Alter	Cash-Flow	Prämien	Todesfall	Erlebensfall
x	X_0	$-\Pi$		
$x+1$	X_1	$-p_x \cdot \Pi$	$q_x \cdot Y_1$	
$x+2$	X_2	$-{}_2p_x \cdot \Pi$	$p_x \cdot q_{x+1} \cdot Y_2$	
	$\vdots$		$\vdots$	
$x+n$	X_n		${}_{r-1}p_x \cdot q_{x+n-1} \cdot Y_n$	${}_np_x \cdot Z_n$

Tabelle 2.2.: Deterministischer Cash-Flow für einen Versicherten

In beiden Tabellen werden Einnahmen negativ dargestellt.

Ziel ist es nun, diesen Cash-Flow zu replizieren. Die Prämieneinnahmen können mittels Zero-Coupon Bonds dargestellt werden, während **Y** und **Z** ein oder mehrere Assets unterliegen, so dass sie sich mittels Optionen replizieren lassen. Hierzu wird eine Fülle von Derivaten benötigt: bezeichne im folgenden $\mathcal{U}_j$ je eines dieser Derivate. Dann ergibt sich das replizierende Bewertungs-Portfolio
zum Cash-Flow $\mathbf{X} = (X_0, \ldots, X_n)$ als

$$\mathbf{X} \to BePo(\mathbf{X}) = \sum_j \lambda_j(\mathbf{X}) \cdot \mathcal{U}_j \tag{2.3}$$

mit λ_j deterministisch, da diese die Anteile am Derivat j darstellen. Das $BePo$ stellt also eine Replizierung eines Versicherungsvertrages aus Finanzinstrumenten dar. Diese lassen sich gut bewerten, zum Beispiel durch
das bekannte Black Scholes Modell [BS73].

Bemerkung 2.2.2. *Wird das $BePo$ gekauft, so spricht man vom replizierenden Portfolio.*

Folgendes Beispiel dient lediglich der prinzipiellen Darstellung. Übliche Lebensversicherungsverträge haben eine sehr viel längere Laufzeit. Um solche zu berechnen sei auf Anhang B verwiesen, wo nur die nötigen Daten verändert werden müssen.

Beispiel 2.2.3. *Das Eintrittsalter von l_{65} Versicherten sei 65 und die Laufzeit der Verträge sei $n = 5$ Jahre. Beschreibe $\boldsymbol{I}$ die Wertänderung einer Aktie mit $I_0 = 1$ und bezeichne i den minimalen Zinssatz, den ein Versicherter im Todesfall erhalten soll. Im Erlebensfall soll kein minimaler Zins gezahlt werden, sondern lediglich die Wertänderung von $\boldsymbol{I}$. Es folgt also $x = 65, n = 5, Y_t = \max(I_t, (1+i)^t), Z = \boldsymbol{I}$ und damit folgende Tabelle*

Alter	Cash-Flow	Prämien	Todesfall	Erlebensfall
65	X_0	$-l_{65} \cdot \Pi$		
66	X_1	$-l_{66} \cdot \Pi$	$d_{65} \cdot \max(I_1, (1+i))$	
67	X_2	$-l_{67} \cdot \Pi$	$d_{66} \cdot \max(I_2, (1+i)^2)$	
68	X_3	$-l_{68} \cdot \Pi$	$d_{67} \cdot \max(I_3, (1+i)^3)$	
69	X_4	$-l_{69} \cdot \Pi$	$d_{68} \cdot \max(I_4, (1+i)^4)$	
70	X_5		$d_{69} \cdot \max(I_5, (1+i)^5)$	$l_{70} \cdot I_5$

Tabelle 2.3.: Beispiel eines deterministischen Cash-Flows

Das Bewertungsschema zum Zeitpunkt 0 *wird nun mittels folgender Derivate dargestellt:*

- *Zero-Coupon Bonds* $\boldsymbol{Z}^{(t)}$*, welche die fest bewerteten und zu festen Zeitpunkten auftretenden Prämieneinnahmen darstellen.*
- *Europäische Put-Optionen und gekaufte Aktien zur Replizierung des Risikos, welches zwar zu festen Zeitpunkten auftritt, aber den Kapitalmarktschwankungen unterliegt. Die Put Optionen setzen die Aktie zum Auszahlungszeitpunkt ein, um einen dem Zinssatz entsprechenden Betrag zu erhalten und so das Risiko abzusichern.*

Es folgen

$$\begin{aligned}(\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_{11}) = &(\boldsymbol{Z}^{(0)}, \boldsymbol{Z}^{(1)}, \boldsymbol{Z}^{(2)}, \boldsymbol{Z}^{(3)}, \boldsymbol{Z}^{(4)},\\ &\boldsymbol{I} + Put^{(1)}(\boldsymbol{I}, (1+i)), \boldsymbol{I} + Put^{(2)}(\boldsymbol{I}, (1+i)^2),\\ &\boldsymbol{I} + Put^{(3)}(\boldsymbol{I}, (1+i)^3), \boldsymbol{I} + Put^{(4)}(\boldsymbol{I}, (1+i)^4),\\ &\boldsymbol{I} + Put^{(5)}(\boldsymbol{I}, (1+i)^5), \boldsymbol{I})\end{aligned}$$

sowie

Zeit	Prämien	Todesfall	Erlebensfall
0	$-l_{65} \cdot \Pi \cdot \mathcal{U}_1$		
1	$-l_{66} \cdot \Pi \cdot \mathcal{U}_2$	$d_{65} \cdot \mathcal{U}_6$	
2	$-l_{67} \cdot \Pi \cdot \mathcal{U}_3$	$d_{66} \cdot \mathcal{U}_7$	
3	$-l_{68} \cdot \Pi \cdot \mathcal{U}_4$	$d_{67} \cdot \mathcal{U}_8$	
4	$-l_{69} \cdot \Pi \cdot \mathcal{U}_5$	$d_{68} \cdot \mathcal{U}_9$	
5		$d_{69} \cdot \mathcal{U}_{10}$	$l_{70} \cdot \mathcal{U}_{11}$

Tabelle 2.4.: Beispiel eines deterministischen Cash-Flows im Beispiel mit Derivaten

also

$$\begin{aligned}(\lambda_1(\boldsymbol{X}), \ldots, \lambda_{11}(\boldsymbol{X})) = &(-l_{65} \cdot \Pi, -l_{66} \cdot \Pi, -l_{67} \cdot \Pi, -l_{68} \cdot \Pi, -l_{69} \cdot \Pi,\\ &d_{65}, d_{66}, d_{67}, d_{68}, d_{69}, l_{70}),\end{aligned}$$

was das BePo eindeutig bestimmt.

2.3. Risiken der Lebensversicherungen

Zwei bedeutsame Risikofaktoren für Versicherungen verursachen oftmals Abweichungen von den Modellberechnungen: das technische und das finanzielle Risiko. Technisches Risiko beschreibt das durch stochastische Sterblichkeit entstehende Risiko. Das deterministische Modell nutzt zwar *best estimates* für Todesfälle, in der Realität gibt es jedoch stets Abweichungen. Das finanzielle Risiko hingegen beschreibt den Unterschied des $BePo$ zum tatsächlich vorhandenen Investment-Portfolio S.

2.3.1. Technisches Risiko

Betrachten wir zunächst das technische Risiko. Sei l_x bekannt (Anzahl Versicherter zum heutigen Zeitpunkt) und L_{x+1} sei die Zufallsvariable, die die Anzahl der lebenden Versicherten zum Zeitpunkt $t = 1$ beschreibt und somit $D_x = l_x - L_{x+1}$ die Anzahl der Nicht-Überlebenden dieser Periode. Für spätere Perioden gilt $D_y = L_y - L_{y+1}$ mit entsprechend großem y. Zudem sollen $\mathcal{U}_j, j = 1, \ldots, 2n + 1$, die nötigen zusammengesetzten Derivate darstellen. Damit ergibt sich folgendes Bewertungsschema:

Zeit	Prämien	Todesfall	Erlebensfall
0	$-l_x \cdot \Pi \cdot \mathcal{U}_1$		
1	$-L_{x+1} \cdot \Pi \cdot \mathcal{U}_2$	$D_x \cdot \mathcal{U}_{n+1}$	
2	$-L_{x+2} \cdot \Pi \cdot \mathcal{U}_3$	$D_{x+1} \cdot \mathcal{U}_{n+2}$	
		$\vdots$	
n		$D_{x+n-1} \cdot \mathcal{U}_{2n}$	$L_{x+n} \cdot \mathcal{U}_{2n+1}$

Tabelle 2.5.: Beispiel eines stochastischen Cash-Flows mit Derivaten

Zum Vergleich hier die Tabelle für ein deterministisches Risikomodell (siehe Tabelle 2.4):

Zeit	Prämien	Todesfall	Erlebensfall
0	$-l_x \cdot \Pi \cdot \mathcal{U}_1$		
1	$-l_{x+1} \cdot \Pi \cdot \mathcal{U}_2$	$d_x \cdot \mathcal{U}_{n+1}$	
2	$-l_{x+2} \cdot \Pi \cdot \mathcal{U}_3$	$d_{x+1} \cdot \mathcal{U}_{n+2}$	
		$\vdots$	
r		$d_{x+n-1} \cdot \mathcal{U}_{2n}$	$l_{x+r} \cdot \mathcal{U}_{2n+1}$

Tabelle 2.6.: Beispiel eines deterministischen Cash-Flows mit Derivaten

Sei $\mathbf{X}_{(t+1)} = (0, \ldots, 0, X_{t+1}, \ldots, X_n)$ der zukünftige Cash-Flow betrachtet vom Zeitpunkt t unter deterministischem Risiko. Dann bezeichnet $BePo(\mathbf{X}_{(t+1)})$ das nötige Portfolio zur Absicherung dieses Cash-Flows im Zeitpunkt t. Zudem merken wir an, dass wegen $D_x = l_x - L_{x+1}$ und $d_x = l_x - l_{x+1}$ direkt $D_x - d_x = l_{x+1} - L_{x+1}$ folgt, was im folgenden zur Vereinfachung herangezogen wird.

Betrachten wir zunächst den Zeitpunkt $t = 0$. Zu diesem Zeitpunkt sind uns alle zukünftigen Daten unbekannt, als *best estimate* für die Liabilities kann das $BePo(\mathbf{X}_{(1)}) = BePo(\mathbf{X}) + l_x \cdot \Pi \cdot \mathcal{U}_1$ genutzt werden[5].
Im Zeitpunkt $t = 1$ finden sich nun Abweichungen von unserer Erwartung. Es sind D_x anstatt d_x Todesfälle aufgetreten. Die Prämieneinnahmen fallen demnach ebenfalls anders aus. Direkt auftretende Abweichungen sind also

$$(l_{x+1} - L_{x+1}) \cdot \Pi \cdot \mathcal{U}_2 \tag{2.4}$$

und

$$(D_x - d_x) \cdot \mathcal{U}_{n+1}. \tag{2.5}$$

Folglich ändern sich auch die Rücklagen für zukünftige Zeitpunkte, denn diese müssen nun an die Anzahl L_{x+1} Überlebender angepasst werden, sind jedoch für l_{x+1} vorhanden. Demnach ergibt sich eine Portfolio-Anpassung um

$$\frac{L_{x+1}}{l_{x+1}} BePo(\mathbf{X}_{(2)}) - BePo(\mathbf{X}_{(2)}) \tag{2.6}$$

$$= (L_{x+1} - l_{x+1}) \frac{BePo(\mathbf{X}_{(2)})}{l_{x+1}}. \tag{2.7}$$

Insgesamt ergibt sich eine Abweichung um

$$(D_x - d_x) \cdot (\mathcal{U}_{n+1} + \Pi \cdot \mathcal{U}_2 - \frac{BePo(\mathbf{X}_{(2)})}{l_{x+1}}) \tag{2.8}$$

vom erwarteten Schaden, welche durch zusätzliche Reserven abgedeckt werden muss.

[5] Vergleiche [Büh04] sowie [WBF07].

Im Zeitpunkt $t = 2$ passiert ähnliches, jedoch nun zur zufälligen Basis von L_{x+1} Personen. Zunächst gibt es L_{x+2} anstatt $p_{x+1}L_{x+1}$ Überlebende und D_{x+1} anstatt $q_{x+1}L_{x+1}$ Todesfälle, wie sie im Bewertungs-Portfolio angenommen waren. Dies führt zu Prämien- und Todesfallabweichungen

$$(p_{x+1}L_{x+1} - L_{x+2}) \cdot \Pi \cdot \mathcal{U}_3 \tag{2.9}$$

sowie

$$(D_{x+1} - q_{x+1}L_{x+1}) \cdot \mathcal{U}_{n+2} \tag{2.10}$$

und einer nötigen Portfolio-Anpassung, wobei aus dem vorherigen Schritt L_{x+1}/l_{x+1} des $BePo$ vorhanden ist und L_{x+2}/l_{x+2} benötigt wird, also

$$\begin{aligned}
&(\frac{L_{x+2}}{l_{x+2}} - \frac{L_{x+1}}{l_{x+1}})BePo(\mathbf{X}_{(3)}) \\
=&(\frac{L_{x+2}}{l_{x+2}} - \frac{p_{x+1}L_{x+1}}{p_{x+1}l_{x+1}})BePo(\mathbf{X}_{(3)}) \\
=&(L_{x+2} - p_{x+1}L_{x+1})\frac{BePo(\mathbf{X}_{(3)})}{l_{x+2}}.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Man sieht direkt, dass keiner dieser Faktoren mehr vom Anfangsbestand l_x abhängig ist, sondern lediglich von der Realisation der Vorperiode.
Wegen $p_{x+1}L_{x+1} - L_{x+2} = D_{x+1} - q_{x+1}L_{x+1}$ ergibt sich für den Zeitpunkt $t = 2$ eine zusätzlich benötigte Reserve von

$$(D_{x+1} - q_{x+1}L_{x+1})(\mathcal{U}_{n+2} + \Pi \cdot \mathcal{U}_3 - \frac{BePo(\mathbf{X}_{(3)})}{l_{x+2}}). \tag{2.12}$$

Für weitere Perioden lässt sich dies iterieren, so ergibt sich im Jahr j, $1 \leq j \leq n-1$, eine zusätzliche benötigte Reserve von

$$(D_{x+j-1} - q_{x+j-1}L_{x+j-1})(\mathcal{U}_{n+j} + \Pi \cdot \mathcal{U}_{j+1} - \frac{BePo(\mathbf{X}_{(j+1)})}{l_{x+j}}) \tag{2.13}$$

mit $L_x = l_x$.

Im Endzeitpunkt $t = n$ ist das $BePo$ aufgebraucht, es gibt keine neuen Prämien und es wird eine Erlebensfall-Auszahlung vorgenommen, jedoch wieder zu angepassten Werten. Dies führt zu Abweichungen

$$(D_{x+n-1} - q_{x+n-1} L_{x+n-1}) \cdot \mathcal{U}_{2n} \tag{2.14}$$

und

$$(L_{x+n} - p_{x+n-1} L_{x+n-1}) \mathcal{U}_{2n+1}, \tag{2.15}$$

somit zu einer letzten Abweichung von

$$(D_{x+n-1} - q_{x+n-1} L_{x+n-1}) \cdot (\mathcal{U}_{2n} - \mathcal{U}_{2n+1}). \tag{2.16}$$

Diese Werte beschreiben die Teile des Portfolios, welche innerhalb der j-ten Periode einem Risiko ausgesetzt sind. So ist im Jahr $1 \leq j \leq n-1$ das Portfolio

$$Port_j = \mathcal{U}_{n+j} + \Pi \cdot \mathcal{U}_{j+1} - \frac{BePo(\mathbf{X}_{(j+1)})}{l_{x+j}} \tag{2.17}$$

und für das letzte Jahr

$$Port_n = \mathcal{U}_{2n} - \mathcal{U}_{2n+1} \tag{2.18}$$

einem Risiko ausgesetzt: Sterben mehr Kunden als erwartet
(also $D_{x+j} > q_{x+j} L_{x+j}$), so muss eine zusätzliche Leistung von

$$(D_{x+j} - q_{x+j} L_{x+j}) \cdot \mathcal{U}_{n+j}$$

erbracht werden. Gleichzeitig verringern sich jedoch auch die benötigten Rückstellungen, denn die Leistungen diese Versicherten betreffend, sind nun bereits eingetreten.
Die Liabilities verringern sich um

$$(D_{x+j} - q_{x+j} L_{x+j}) \cdot (-\Pi \cdot \mathcal{U}_{j+1} + \frac{BePo(\mathbf{X}_{(j+1)})}{l_{x+j}}). \tag{2.19}$$

Im Falle einer höheren Erlebensfall-Auszahlung als erwartet, ist das Verhältnis umgekehrt.

Wegen der beschriebenen Unsicherheiten werden Portfolios durch einen Sicherheitszuschlag geschützt. Es wird eine Sterbewahrscheinlichkeit $q^*_{x+j} > q_{x+j}$ angenommen (beachte, stete Umformung nach D_{x+j}).
Für einen Pflege- oder Rentenversicherungsvertrag wird eine geringere Sterbewahrscheinlichkeit angenommen. Hiermit ergibt sich der Zuschlag periodenweise als Portfolio

$$RPP_j = l_{x+j-1} \cdot (q^*_{x+j-1} - q_{x+j-1}) \cdot Port_j \tag{2.20}$$

und damit die nötige Gesamtreserve, um das $BePo$ gegen technisches Risiko abzusichern, als

$$BePo^{prot}(\mathbf{X}) = BePo(\mathbf{X}) + \sum_{j=1}^{n} RPP_j. \tag{2.21}$$

2.3.2. Finanzielles Risiko

Das finanzielle Risiko einer Lebensversicherung ergibt sich aus dem Unterschied des tatsächlich vorhandenen Asset-Portfolios S zum Bewertungs-Portfolio $BePo$ beziehungsweise zu dem gegen technisches Risiko abgesicherten Bewertungs-Portfolio $BePo^{prot}$. Im folgenden ist es unerheblich, mit welchem Portfolio der Vergleich geführt wird. Daher wird der Index *prot* hier nicht weiter genutzt. Der folgende Abschnitt lehnt sich stark an [WBF07], Kapitel 4 an.[6]
Zunächst eine Definition bezüglich der Solvenz eines Unternehmens:

Definition 2.3.1. *Ein Unternehmen, welches das Portfolio S hält, ist solvent zum Zeitpunkt t_0 bezüglich einem Bewertungsprinzip $\mathcal{A}$, wobei $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}[\cdot \mid \mathfrak{F}_t]$ die Bewertung zum Zeitpunkt t bezeichne, wenn*

$$\mathcal{A}_{t_0}[S] > \mathcal{A}_{t_0}[BePo], \tag{2.22}$$

die Bilanzbedingung, erfüllt ist. Sollte dies zu einem Zeitpunkt nicht der Fall sein, so übernimmt die Aufsicht die Kontrolle über das Unternehmen. Zudem muss

$$\mathcal{A}_t[S] > \mathcal{A}_t[BePo] \ \forall t > t_0 \tag{2.23}$$

gelten, damit alle Versicherungsverträge erfüllt werden können.

Diese Definition der Solvenz ist in der Literatur nicht eindeutig. So gibt es in verschiedenen Ländern auch verschiedene Regeln bezüglich der Solvenz, zudem ist das Bewertungsprinzip $\mathcal{A}$ durchaus unterschiedlich.

[6] Vergleiche auch [Pou09].

Der Einfachheit halber kann das Solvenz-Problem in Ein-Perioden Probleme entkoppelt werden. Wird die Versicherungsbedingung in $t_0 + 1$ erfüllt, so kann dies als neue Bilanzbedingung herangezogen und iteriert werden.

Eine einfache Lösung zur Garantie von Solvenz wäre $S = BePo + F$ mit einer stets positiv bewerteten freien Reserve F. Solvenz ist hiermit zwar garantiert, jedoch sind die möglichen Gewinne durch das geringe Risiko stark begrenzt. Realistisch ist das $BePo$ nicht in S enthalten. Daher müssen Rücklagen gebildet werden, um die Auszahlung der Versicherungsnehmer zu garantieren.
Teilen wir zunächst das Portfolio S zum Zeitpunkt t_0 in verschiedene Teile auf:

$$S = \widetilde{S} + M + F. \tag{2.24}$$

Hierbei soll $\widetilde{S}$ die Bilanzbedingung erfüllen, M ist eine Marge und F bezeichnet die freien Reserven.

$$\mathcal{A}_{t_0}[\widetilde{S}] \geq \mathcal{A}_{t_0}[BePo] \text{ Bilanzbedingung} \tag{2.25}$$
$$M \text{ Marge} \tag{2.26}$$
$$F \text{ Freie Reserven} \tag{2.27}$$

F soll auch hier zu jedem Zeitpunkt positiv bewertet sein. Am Ende $t_0 + 1$ der Periode soll es nun möglich sein, von $\widetilde{S} + M$ auf $BePo$ zu wechseln, für den Fall dass $\mathcal{A}_{t_0+1}[\widetilde{S}] < \mathcal{A}_{t_0+1}[BePo]$ ist, also eine Bilanzbedingung im Zeitpunkt $t_0 + 1$ nicht eintritt.

Definition 2.3.2. *Eine Margrabe Option beinhaltet das Recht, ein Asset (Portfolio) für ein anderes einzutauschen.*

Diese Option ist nach William Margrabe [Mar78] benannt.
In unserem Fall bezeichnet M also gerade die Margrabe Option, welche das Portfolio $\widetilde{S}$ mit $BePo$ im Zeitpunkt $t_0 + 1$ ersetzen kann. Um den Preis dieser Option zu berechnen, ist es praktisch, wenn ein zeitstetiges Modell für $t \in [t_0, t_0 + 1]$ unterstellt wird, da dies die Nutzung von Ergebnissen der klassischen Finanzmathematik zulässt. Da dieses Problem weder mit der Wahl des $BePo$ noch mit der von S zusammenhängt, ist dies auch ohne Einschränkungen möglich.

Seien $Y_t = \mathcal{A}_t[\widetilde{S}]$ und $V_t = \mathcal{A}_t[BePo]$. Um nun unsere Margrabe Option zu modellieren, betrachten wir

$$\widetilde{Y}_t = \frac{Y_t}{V_t}, \tag{2.28}$$

den proportionalen Wert von Assets zu Liabilities. Dies hat den Vorteil, dass bewertungs- und zeitspezifische Variablen, zum Beispiel der Diskont, verschwinden, da diese sowohl in Y_t als auch in V_t gleich sind (Bewertung zur selben Zeit!).
Sollte $\widetilde{Y}_t < 1$ gelten, so wäre dies prinzipiell eine Insolvenz, weswegen in diesem Falle die Margrabe Option greifen soll.
Bezeichne D_{t_0,t_0+1} den Preis eines Zero-Coupon Bonds mit Zahlung 1 in t_0+1 zum Zeitpunkt t_0 (vergleiche (1.19)).

Lemma 2.3.3. *Das Maß P^* mit Radon-Nikodym Derivativ*

$$\frac{dP^*}{dP} = \prod_{t=0}^{n-1} \frac{\varphi_{t+1}/\varphi_t}{E[\varphi_{t+1}/\varphi_t \mid \mathfrak{F}_t]} \tag{2.29}$$

ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

Beweis. Sei

$$\xi_s = \prod_{t=0}^{s-1} \frac{\varphi_{t+1}/\varphi_t}{E[\varphi_{t+1}/\varphi_t \mid \mathfrak{F}_t]}.$$

Dann ist $(\xi_s)_s$ ein Martingal bezüglich $(P, (\mathfrak{F}_s)_s)$ und es gilt

$$\begin{aligned} E^*[1] =& E[\prod_{t=0}^{n-1} \frac{\varphi_{t+1}/\varphi_t}{E[\varphi_{t+1}/\varphi_t \mid \mathfrak{F}_t]}] \\ =& E[\xi_n] = E[\xi_1] \\ =& E[\frac{\varphi_1}{E[\varphi_1 \mid \mathfrak{F}_0]}] = 1. \end{aligned}$$

□

Um den Preis einer Margrabe Option zu bestimmen, untersuchen wir

$$D_{t_0,t_0+1} \cdot E^*[(V_{t_0+1} - Y_{t_0+1})_+ \mid \mathfrak{F}_{t_0}] = E^{**}[(1 - \widetilde{Y}_{t_0+1})_+ \mid \mathfrak{F}_{t_0}] \cdot V_{t_0} \tag{2.30}$$

mit transformiertem Maß

$$dP^{**}(\cdot \mid \mathfrak{F}_{t_0}) = D_{t_0,t_0+1} \frac{V_{t_0+1}}{V_{t_0}} dP^*(\cdot \mid \mathfrak{F}_{t_0}). \tag{2.31}$$

Es wird mittels Esscher-Transformationen[7] eine Grundformel zur Preisbestimmung hergeleitet:
Seien $\delta \geq 0, t \geq 0$ und der Finanzmarkt sei endlich mit L Assets, deren Preisprozesse ohne Dividendenzahlungen durch

$$A_1(t), \ldots, A_L(t) > 0$$

beschrieben werden. Der Vektor der logarithmierten Preisprozesse

$$\mathbf{B}(t) = (B_1(t), \ldots, B_L(t))' \tag{2.32}$$

ist ein stochastischer Vektor in $\mathbb{R}^L$ mit

$$B_i(t) = \log(\frac{A_i(t)}{A_i(0)}) \in \mathbb{R} \tag{2.33}$$

und Verteilungsfunktion

$$F(\mathbf{x}, t) = P[B_i(t) \leq x_i, i = 1, \ldots, L] \; \forall t \geq 0, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^L. \tag{2.34}$$

Die Momenterzeugende Funktion sei durch

$$M(\mathbf{z}, t) = E[\exp\{\mathbf{z}' \cdot \mathbf{B}(t)\}] \tag{2.35}$$

gegeben.
Wir nehmen an, dass $\{\mathbf{B}(t)\}_{t \geq 0}$ stationäre unabhängige Inkremente $M(\mathbf{z}, t) = M(\mathbf{z}, 1)^t$, sowie eine Dichte

$$f(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial^L}{\partial_{x_1} \ldots \partial_{x_L}} F(\mathbf{x}, t) \tag{2.36}$$

besitzt.
Für $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^L$ definiert

$$f(\mathbf{x}, t; \mathbf{h}) = \frac{\exp\{\mathbf{h}' \cdot \mathbf{x}\} \cdot f(\mathbf{x}, t)}{M(\mathbf{h}, t)} \tag{2.37}$$

die modifizierte Dichte unter der Esscher-Transformation, worunter die Momenterzeugende Funktion zu

$$M(\mathbf{z}, t; \mathbf{h}) = \frac{M(\mathbf{z} + \mathbf{h}, t)}{M(\mathbf{h}, t)} \tag{2.38}$$

gewandelt wird.

[7] Vergleiche [GS94] und [WBF07] Seite 54ff.

Sei $F_{\mathbf{h}}(\cdot,\cdot) = F(\cdot,\cdot,\mathbf{h})$ die Verteilungsfunktion bezüglich der transformierten Dichte $f(\cdot,\cdot,\mathbf{h})$. Dann hat der Prozess $\{\mathbf{B}(t)\}_{t\geq 0}$ nach der Esscher-Transformation stationäre unabhängige Inkremente $M(\mathbf{z},t;\mathbf{h}) = M(\mathbf{z},1;\mathbf{h})^t$. Ziel ist es nun, $\mathbf{h}^*$ so zu wählen, dass

$$\{e^{-\delta t}A_i(t)\}_{t\geq 0}$$

ein Martingal bezüglich $F^* = F_{\mathbf{h}^*}(\cdot,\cdot) = F(\cdot,\cdot,\mathbf{h}^*)$ und $(\mathfrak{F}_t)_t$ ist.
Sei $0 \leq s \leq t$:

$$\begin{aligned}
&E^*[e^{-\delta t}A_i(t) \mid \mathfrak{F}_s] \\
=&e^{-\delta t} \cdot A_i(0) \cdot E^*[\exp\{B_i(t)\} \mid \mathfrak{F}_s] \\
=&e^{-\delta t} \cdot A_i(0) \cdot E^*[\exp\{B_i(t) - B_i(s) + B_i(s)\} \mid \mathfrak{F}_s] \\
=&e^{-\delta t} \cdot A_i(0) \cdot \exp\{B_i(s)\} \cdot E^*[\exp\{B_i(t) - B_i(s)\} \mid \mathfrak{F}_s] \\
=&e^{-\delta s} \cdot A_i(s) \cdot e^{-\delta(t-s)} \cdot E^*[\exp\{B_i(t) - B_i(s)\} \mid \mathfrak{F}_s]
\end{aligned}$$

Wegen der stationären unabhängigen Inkremente muss also $\mathbf{h}^* \in \mathbb{R}^L$

$$E^*[\exp\{B_i(t) - B_i(s)\} \mid \mathfrak{F}_s] = E^*[\exp\{B_i(t-s)\}] = e^{\delta(t-s)} \tag{2.39}$$

für alle $s \leq t$ erfüllen. Dann folgt aber

$$\begin{aligned}
e^{\delta(t-s)} =&E^*[exp\{B_i(t-s)\}] \\
=&E_{\mathbf{h}^*}[exp\{B_i(t-s)\}] \\
=&M(1_i, t-s; \mathbf{h}^*) = M(1_i, 1; \mathbf{h}^*)^{t-s},
\end{aligned} \tag{2.40}$$

wobei 1_i den i-ten Einheitsvektor darstellt. Hieraus folgt direkt

$$e^{\delta} = M(1_i, 1; \mathbf{h}^*). \tag{2.41}$$

Es gibt nun eine eindeutige Lösung $\mathbf{h}^*$, die dies für alle $1 \leq i \leq L$ erfüllt[8].

[8] Vergleiche [Mar78].

Bemerkung 2.3.4.

- $\boldsymbol{h}^*$ *wird als Parameter zur risikoneutralen Esscher-Transformation bezeichnet.*
- *Das äquivalente Martingalmaß* $F^* = F_{\boldsymbol{h}^*}(\cdot,\cdot) = F(\cdot,\cdot;\boldsymbol{h}^*)$ *heißt risikoneutrales Esscher Maß.*
- *Durch die Eindeutigkeit von* $\boldsymbol{h}^*$ *ist das risikoneutrale Esscher Maß eindeutig bestimmt.*
- *Es kann neben dem risikoneutralen Esscher Maß noch andere Martingalmaße geben, sollte der Markt nicht vollständig sein.*

Satz 2.3.5. *Sei* $g : \mathbb{R}^L \to \mathbb{R}$ *eine messbare Funktion. Dann gilt für alle* $t > 0$*:*

$$\begin{aligned} &E_{\boldsymbol{h}^*}[e^{-\delta t} A_i(t) \cdot g(A_1(t), \ldots, A_L(t))] \\ =&A_i(0) \cdot E_{\boldsymbol{h}^*+1_i}[g(A_1(t), \ldots, A_L(t))]. \end{aligned} \tag{2.42}$$

Beweis. Man betrachte

$$\begin{aligned} e^{x_i} \cdot f(\mathbf{x}, t, \mathbf{h}^*) =& e^{\mathbf{x}' \cdot 1_i} \cdot f(\mathbf{x}, t, \mathbf{h}^*) \\ =& \frac{e^{\mathbf{x}' \cdot (\mathbf{h}^* + 1_i)} \cdot f(\mathbf{x}, t)}{M(\mathbf{h}^*, t)} \\ =& f(\mathbf{x}, t, \mathbf{h}^* + 1_i) \cdot \frac{M(\mathbf{h}^* + 1_i, t)}{M(\mathbf{h}^*, t)} \\ =& f(\mathbf{x}, t, \mathbf{h}^* + 1_i) \cdot M(1_i, t; \mathbf{h}^*) \\ =& e^{\delta t} \cdot f(\mathbf{x}, t, \mathbf{h}^* + 1_i) \end{aligned}$$

wegen der spezifischen Wahl von $\mathbf{h}^*$. Hiermit folgt nun

$$\begin{aligned} &E_{\mathbf{h}^*}[e^{-\delta t} A_i(t) \cdot g(A_1(t), \ldots, A_L(t))] \\ =&A_i(0) \cdot E_{\mathbf{h}^*}[e^{-\delta t} \cdot e^{B_i(t)} \cdot g(A_1(t), \ldots, A_L(t))] \\ =&A_i(0) \cdot E_{\mathbf{h}^*+1_i}[g(A_1(t), \ldots, A_L(t))], \end{aligned}$$

also die Behauptung. $\square$

Dieser Satz kann nun zur Berechnung von Optionspreisen genutzt werden:

Korollar 2.3.6. *Sei $L = 2$. Der Preis der Margrabe Option, die im Zeitpunkt $t_0 > 0$ Ersetzen von $A_2(t_0)$ mit $A_1(t_0)$ erlaubt, wird gegeben durch*

$$A_1(0) \cdot P_{\boldsymbol{h}^*+1_1}[A_1(t_0) > A_2(t_0)] - A_2(0) \cdot P_{\boldsymbol{h}^*+1_2}[A_1(t_0) > A_2(t_0)]. \tag{2.43}$$

Beweis. Der Wert der Option $(A_1(t_0) - A_2(t_0))_+$ im Zeitpunkt 0 ist

$$\begin{aligned}
&E_{\mathbf{h}^*}[e^{-\delta t_0} \cdot (A_1(t_0) - A_2(t_0))_+] \\
=&E_{\mathbf{h}^*}[e^{-\delta t_0} \cdot (A_1(t_0) - A_2(t_0) \cdot 1_{\{A_1(t_0)>A_2(t_0)\}})] \\
=&E_{\mathbf{h}^*}[e^{-\delta t_0} \cdot A_1(t) \cdot 1_{\{A_1(t_0)>A_2(t_0)\}}] \\
&- E_{\mathbf{h}^*}[e^{-\delta t_0} \cdot A_2(t) \cdot 1_{\{A_1(t_0)>A_2(t_0)\}}] \\
=&A_1(0) \cdot E_{\mathbf{h}^*+1_1}[1_{\{A_1(t_0)>A_2(t_0)\}}] \\
&- A_2(0) \cdot E_{\mathbf{h}^*+1_2}[1_{\{A_1(t_0)>A_2(t_0)\}}],
\end{aligned}$$

was die Behauptung beweist. □

Ein Spezialfall ist der Wiener Prozess. Seien die Assets $A_1(t), \ldots, A_L(t)$ so gewählt, dass der logarithmierte Preisprozess $\mathbf{B}(t)$ ein L-dimensionaler Wiener Prozess mit Mittelwert $\mu \in \mathbb{R}^L$ und nicht-singulärer $(L \times L)$ Kovarianzmatrix Σ ist.
Dann besitzt $\mathbf{B}(t)$ die Dichte

$$f(\mathbf{x}, t) = \frac{\exp\{-(\mathbf{x} - t\mu)'(2t\Sigma)^{-1}(\mathbf{x} - t\mu)\}}{(2\pi)^{L/2} \cdot \mid t\Sigma \mid^{1/2}} \tag{2.44}$$

und die Momenterzeugende Funktion wird durch

$$M(\mathbf{z}, t) = E[\exp\{\mathbf{z}' \cdot \mathbf{B}(t)\}] = \exp\{t \cdot [\mathbf{z}'\mu + \frac{\mathbf{z}'\Sigma\mathbf{z}}{2}]\} \tag{2.45}$$

gegeben. Die modifizierte Momenterzeugende Funktion ist somit

$$\begin{aligned}
M(\mathbf{z}, t, \mathbf{h}) =& \frac{M(\mathbf{z} + \mathbf{h}, t)}{M(\mathbf{h}, t)} \\
=& \frac{\exp\{t \cdot [(\mathbf{z} + \mathbf{h})'\mu + (\mathbf{z} + \mathbf{h})'\Sigma(\mathbf{z} + \mathbf{h})/2]\}}{\exp\{t \cdot [\mathbf{h}'\mu + \mathbf{h}'\Sigma\mathbf{h}/2]\}} \\
=& \exp\{t \cdot [\mathbf{z}' \cdot (\mu + \Sigma\mathbf{h}) + \mathbf{z}'\Sigma\mathbf{z}/2]\},
\end{aligned} \tag{2.46}$$

womit auch die Esscher-Transformierte einen Wiener Prozess mit Kovarianzmatrix Σ und modifiziertem Mittelwert $\mu + \Sigma\mathbf{h}$ darstellt.

Aus (2.41) ist bekannt, dass

$$\delta = 1_i' \cdot (\mu + \Sigma \mathbf{h}^* + 1_i' \Sigma 1_i / 2) \tag{2.47}$$

für alle $1 \leq i \leq L$ gelten muss, was für $\Sigma = (\sigma_{i,j})_{i,j}$

$$\mu + \Sigma \mathbf{h}^* = (\delta - \sigma_{1,1}/2, \ldots, \delta - \sigma_{L,L}/2), \tag{2.48}$$

$$\mu + \Sigma(\mathbf{h}^* + 1_i) = (\delta - \sigma_{1,1}/2 + \sigma 1, i, \ldots, \delta - \sigma_{L,L}/2 + \sigma L, i) \tag{2.49}$$

impliziert.
Beschränken wir uns nun wieder auf nur zwei Assets A_1 und A_2 und bestimmen den Esscher-Preis der Margrabe-Option, die Austauschen von A_2 gegen A_1 in t_0 erlaubt. Seien

$$\zeta = \log(\frac{A_1(0)}{A_2(0)}) \tag{2.50}$$

und

$$W(t) = B_2(t) - B_1(t) = \log(\frac{A_2(t)}{A_2(0)}) - \log(\frac{A_1(t)}{A_1(0)}) \tag{2.51}$$

definiert. Dann ist der Preis der Margrabe-Option nach Korollar 2.3.6 gerade

$$\begin{aligned}
&E_{\mathbf{h}^*}[e^{-\delta t} \cdot (A_1(t) - A_2(t))_+] \\
=&A_1(0) \cdot P_{\mathbf{h}^*+1_1}[A_1(t) > A_2(t)] \\
&- A_2(0) \cdot P_{\mathbf{h}^*+1_2}[A_1(t) > A_2(t)] \\
=&A_1(0) \cdot P_{\mathbf{h}^*+1_1}[\frac{A_1(0)}{A_2(0)} > (\frac{A_1(t)}{A_1(0)})^{-1} \cdot \frac{A_2(t)}{A_2(0)}] \\
&- A_2(0) \cdot P_{\mathbf{h}^*+1_2}[\frac{A_1(0)}{A_2(0)} > (\frac{A_1(t)}{A_1(0)})^{-1} \cdot \frac{A_2(t)}{A_2(0)}] \\
=&A_1(0) \cdot P_{\mathbf{h}^*+1_1}[W(t) < \zeta] - A_2(0) \cdot P_{\mathbf{h}^*+1_2}[W(t) < \zeta].
\end{aligned} \tag{2.52}$$

Bezeichne $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ die Normalverteilung mit Mittelwert μ und Varianz σ^2, $\Phi(\cdot)$ die Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung mit Mittelwert $\mu = 0$ und Varianz $\sigma^2 = 1$ und sei $\phi(\cdot)$ die Dichtefunktion der Standard-Normalverteilung. Dann folgt $W(t)$ den Verteilungen

$$\mathcal{N}(t(-\sigma_{1,1}/2 + \sigma_{2,1} - \sigma_{2,2}/2), t(\sigma_{1,1} - 2\sigma_{1,2} + \sigma_{2,2})) \text{ unter } P_{\mathbf{h}^*+1_1} \tag{2.53}$$
$$\mathcal{N}(t(\sigma_{1,1}/2 - \sigma_{2,1} + \sigma_{2,2}/2), t(\sigma_{1,1} - 2\sigma_{1,2} + \sigma_{2,2})) \text{ unter } P_{\mathbf{h}^*+1_2} \tag{2.54}$$

oder vereinfacht mit

$$v^2 = \sigma_{1,1} - 2\sigma_{1,2} + \sigma_{2,2} \tag{2.55}$$
$$\mathcal{N}(-tv^2/2, tv^2) \text{ unter } P_{\mathbf{h}^*+1_1} \tag{2.56}$$
$$\mathcal{N}(tv^2/2, tv^2) \text{ unter } P_{\mathbf{h}^*+1_2}. \tag{2.57}$$

Es folgt ein Korollar zum Preis der Margrabe-Option für zweidimensionale Wiener Prozesse.

Korollar 2.3.7. *Sei $\boldsymbol{h}^*$ der Parameter zur risikoneutralen Esscher-Transformation. Dann gilt unter obigen Annahmen*

$$\begin{aligned} &E_{\boldsymbol{h}^*}[e^{-\delta t} \cdot (A_1(t) - A_2(t))_+] \\ =&A_1(0) \cdot \Phi(\frac{\zeta + tv^2/2}{vt^{1/2}}) - A_2(0) \cdot \Phi(\frac{\zeta - tv^2/2}{vt^{1/2}}). \end{aligned} \tag{2.58}$$

Zurück zur Betrachtung der Margrabe Option als Austausch des tatsächlichen Portfolios $\widetilde{S}$ gegen das Portfolio $BePo$ unter einem Bewertungsprinzip $\mathcal{A}_t$.
Sei M_t der Wertprozess der Margrabe-Option für $t_0 \leq t \leq t_0 + 1$ und sei $t_0 + 1$ der zugehörige Ausübungszeitpunkt. Setze $A_1(t) = V_t = \mathcal{A}_t[BePo]$ und $A_2(t) = Y_t = \mathcal{A}_t[\widetilde{S}]$. Dann gilt

$$\zeta_t = \log(\frac{A_1(t)}{A_2(t)}) = \log(\frac{V_t}{Y_t}) = -\log(\widetilde{Y}_t) \tag{2.59}$$

und der Preisprozess M_t der Margrabe-Option wird mit $v_t^2 = v^2(t_0 + 1 - t)$ durch

$$\begin{aligned} M_t =&V_t \cdot \Phi(\frac{\zeta_t + v_t^2/2}{v_t}) - Y_t \cdot \Phi(\frac{\zeta_t - v_t^2/2}{v_t}) \\ =&V_t \cdot [\Phi(\frac{\zeta_t + v_t^2/2}{v_t}) - e^{-\zeta_t} \cdot \Phi(\frac{\zeta_t - v_t^2/2}{v_t})] \\ =&Y_t \cdot [e^{\zeta_t} \cdot \Phi(\frac{\zeta_t + v_t^2/2}{v_t}) - \Phi(\frac{\zeta_t - v_t^2/2}{v_t})] \end{aligned} \tag{2.60}$$

gegeben.

Betrachtet man zum Abschluss die Möglichkeit des Hedgens einer Margrabe-Option, die den Tausch von $\widetilde{S}$ nach $BePo$ für beliebiges $t \in [t_0, t_0 + 1]$ ermöglicht. Eine solche Option ist am Markt selten verfügbar. Das Hedgen ist daher hier besonders sinnvoll. Zunächst definieren wir die Hilfsfunktion

$$H(t,x) = x \cdot \Phi(\frac{\log x + v_t^2/2}{v_t}) - \Phi(\frac{\log x - v_t^2/2}{v_t}) \tag{2.61}$$

mit der

$$M_t = Y_t \cdot H(t, e^{\zeta t}) = Y_t \cdot H(t, \widetilde{Y}_t^{-1}) \tag{2.62}$$

gilt. Sehen wir uns speziell $\frac{\partial}{\partial x} H(t,x)$ an:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x} H(t,x) && (2.63)\\ =&\Phi(\frac{\log x + v_t^2/2}{v_t}) + \phi(\frac{\log x + v_t^2/2}{v_t})/v_t - \phi(\frac{\log x - v_t^2/2}{v_t})/(x v_t) && (2.64)\\ =&\Phi(\frac{\log x + v_t^2/2}{v_t}). && (2.65)\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist allgemein als Preis einer europäischen Call-Option im Black-Scholes Optionspreis-Modell bekannt[9].
Für unsere Hedgeing-Strategie $\psi = (\widetilde{\lambda}_t, \lambda_t)$ bieten sich die folgenden Faktoren an[10]:
In das Asset V_t wird

$$\widetilde{\lambda}_t = \frac{\partial}{\partial x} H(t,x) \mid_{x = e^{\zeta t} = \widetilde{Y}_t^{-1}} = \Phi(\frac{\zeta_t + v_t^2/2}{v_t}) \tag{2.66}$$

investiert,

$$\lambda_t = 1 - \Phi(\frac{\zeta_t - v_t^2/2}{v_t}) \tag{2.67}$$

in das Asset Y_t. Der Wert des Portfolios ist dann zu jeder Zeit $t \in [t_0, t_0 + 1]$ gerade

$$\begin{aligned} \widetilde{\lambda}_t \cdot V_t + \lambda_t \cdot Y_t =& V_t \cdot [\widetilde{\lambda}_t + e^{-\zeta t} \cdot \lambda_t]\\ =& V_t \cdot [\Phi(\frac{\zeta_t + v_t^2/2}{v_t}) + e^{-\zeta t} \cdot (1 - \Phi(\frac{\zeta_t - v_t^2/2}{v_t}))]\\ =& e^{-\zeta t} \cdot V_t + M_t = Y_t + M_t, \end{aligned} \tag{2.68}$$

was den notwendigen Wert beschreibt, um jederzeit auf das $BePo$ wechseln zu können.

[9]Wie in [BS73] hergeleitet.
[10]Vergleiche (2.60) und [LL91].

2.4. Portfoliowahl einer Sachversicherung (Schadenversicherung)

Folgende Kriterien unterscheiden die Nicht-Lebensversicherung von der Lebensversicherung: Kurzfristigkeit, sehr volatile Schadenverteilungen, schwierigere Prognose der Schadenhöhen. Daher werden im Nicht-Lebensversicherungsbereich vor allem stochastische Gesamtmodelle wie die dynamische Finanzanalyse verwendet[11].

Die Nicht-Lebensversicherung umfasst in der Regel Schadenversicherungen, also Versicherungsverträge, welche den Versicherten gegen Sachschäden (z.B. Kfz, Hausrat) innerhalb einer bestimmten Periode schützt. Im Gegenzug erhält die Versicherung die Prämie Π zu Beginn des Versicherungszeitraums. Zur Bewertung dieser Schäden wird das Chain-Ladder Verfahren genutzt[12], um Spätschäden und IBNR Claims abzudecken.

Nehmen wir an, ein einzelner Vertrag erzeugt den Cash-Flow $\mathbf{X} = (X_0, \dots, X_N)$, wobei N der zufällige Zeitpunkt ist, in dem die letzte Zahlung ausgeführt wird, $X_k = 0$ wenn in k keine Zahlung vorgenommen wird, $X_0 = -\Pi$ die anfängliche Prämienzahlung. Ein Problem in der Praxis ist,

$$Y(N) = \sum_{j=1}^{N} X_j \tag{2.69}$$

zum Zeitpunkt k zu schätzen. Dies ist unter dem Namen *claims reserving problem* bekannt. Hierzu sei auf [Tay00] verwiesen[13]. $Y(N)$ wird zur Schätzung des Cash-Flows $\mathbf{X}$ herangezogen. Zwar lässt sich $\mathbf{X}$ auch direkt schätzen, dies hat sich in der Praxis jedoch als zu ungenau erwiesen, weswegen dieser Umweg gewählt wird. Es werden zwar in der Realität diverse Daten genutzt, wir betrachten im folgenden allerdings nur die bereits aufgetretenen Schadensdaten des betrachteten Jahres, sowie solche aus anderen Jahren, um diese Schätzungen vorzunehmen. Die meisten Daten sind bereits durch das Chain-Ladder Verfahren bekannt.

Wir wollen nun ein Bewertungs-Portfolio $BePo$ ähnlich dem der Lebensversicherungen konstruieren. Hierzu wählen wir zunächst unsere Derivate $\mathcal{U}_j$, welche zum Beispiel aus Zero-Coupon Bonds $\mathbf{Z}^{(t)}$ bestehen. Daraufhin bestimmen wir die Anzahl der Derivate, die nötig ist, zukünftige Schäden abzudecken. Dies umfasst alte Verträge, deren Zahlungen noch ausstehen, IBNR Claims dieser Verträge sowie das Neugeschäft.

[11] Siehe [EP05].
[12] Siehe Abschnitt 1.1.2, [WBF07] Abschnitt 5.5 sowie [Tay00].
[13] Siehe auch [KPW98] Kapitel 4.

Wir nehmen nun an, dass die Wahl $\mathcal{U}_j = \mathbf{Z}^{(j)}$ die Derivate $\mathcal{U}_j$ und die Anzahl zu kaufender Derivate l_j voneinander entkoppelt. Während dies bei Lebensversicherungen klar zu bestimmen war, können bei Nicht-Lebensversicherungen auch äußere Einflüsse, wie zum Beispiel steigende Arbeitslosigkeit oder die Folgen der Finanzkrise einen Einfluss auf den Cash-Flow $\mathbf{X}$ haben. Um die Replikation gegen solche Einflüsse abzuschirmen, müssten sogar gegen Inflation geschützte Zero-Coupon Bonds gewählt werden, was in unserem Fall (wir betrachten lediglich die durch $\mathbf{X}$ generierte Information sowie den Verlauf der Zero-Coupon Bonds) nicht nötig ist.

Wie bereits angedeutet ersetzen wir nun den Cash-Flow X_j durch die deterministische Schätzung l_j^t, wobei t den Zeitpunkt der Schätzung angibt.

Zeit j	$\mathcal{U}_j$	Cash-Flow		Anzahl
$t+1$	$\mathbf{Z}^{(t+1)}$	X_{t+1}	$\rightarrow$	l_{t+1}^t
$t+2$	$\mathbf{Z}^{(t+2)}$	X_{t+2}	$\rightarrow$	l_{t+2}^t
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$t+n$	$\mathbf{Z}^{(t+n)}$	X_{t+n}	$\rightarrow$	l_{t+n}^t
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$

Tabelle 2.7.: Unbekannte deterministische Schätzer

Im folgenden halten wir den Bewertungszeitpunkt fest:

$$l_j^t = l_j \text{ und } l_j^{*,t} = l_j^*, \tag{2.70}$$

wobei l_j^* wie in der Lebensversicherung die Anzahl der Anleihen im $BePo^{prot}$, welches gegen technisches Risiko abgesichert ist, beschreibt.
Durch unsere Wahl der $\mathcal{U}_j$ gilt zudem

$$l_j^t = E[X_j \mid \mathfrak{F}_t]. \tag{2.71}$$

Seien für $k > t$:

$$E_k^{(t)} = E[X_k \mid \mathfrak{F}_t] \tag{2.72}$$
$$V_k^{(t)} = Var[X_k \mid \mathfrak{F}_t] \tag{2.73}$$

Die Folge $(E_k^{(t)}, E_k^{(t+1)}, \ldots)$ bildet ein Martingal und beschreibt die Schätzer für X_k jeden Jahres als bedingte Erwartung.
Der *best estimate* für $Y(N) = Y(\infty) = \sum_k X_k$ (beachte: N ist zufällig, doch nach N sind keine Zahlungen mehr vorhanden) zur Zeit t ist

$$E[Y(\infty) \mid \mathfrak{F}_t] = Y(t) + \sum_{k=t+1}^{\infty} E_k^{(t)}. \tag{2.74}$$

Mit diesen Daten kann nun mittels des Chain-Ladder Verfahrens zuverlässig geschätzt werden und es folgt das Bewertungs-Portfolio $BePo(\mathbf{X}_{(t)})$:

Zeit j	$\mathcal{U}_j$	Cash-Flow		Anzahl
$t+1$	$\mathbf{Z}^{(t+1)}$	X_{t+1}	$\to$	$l_{t+1} = E_{t+1}^{(t)}$
$t+2$	$\mathbf{Z}^{(t+2)}$	X_{t+2}	$\to$	$l_{t+2} = E_{t+2}^{(t)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$t+n$	$\mathbf{Z}^{(t+r)}$	X_{t+n}	$\to$	$l_{t+n} = E_{t+n}^{(t)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$

Tabelle 2.8.: Bekannte deterministische Schätzer

also

$$BePo(\mathbf{X}_{(t)}) = \sum_{k\geq 1} l_{t+k} \cdot \mathbf{Z}^{(t+k)}, \tag{2.75}$$

$$BePo(\mathbf{X}) = \sum_{k\geq 1} l_k \cdot \mathbf{Z}^{(k)} - \Pi. \tag{2.76}$$

Wie schon angedeutet, wird in der Praxis zunächst die nicht-diskontierte Reserve $\widetilde{R}_k^{(t)}$ geschätzt:

$$\widetilde{R}_k^{(t)} = \sum_{l=k}^{\infty} E_l^{(t)}. \tag{2.77}$$

Dieser Wert wird dann wieder auf die einzelnen $E_l^{(t)}$ aufgeteilt, um diese zu schätzen. Dazu werden die Chain-Ladder age-to-age Schätzer aus (1.5) verwendet. Hier ist jedoch zu beachten, dass die einzelnen geschätzten Zahlungen nicht voneinander unabhängig sind: Sie nutzen die selben age-to-age Schätzer. Dies ist zusammen mit der Wahl entkoppelnder Finanzinstrumente sowie der Wahl der Maße zur Absicherung gegen technisches Risiko ein offenes Problem[14].

[14]Vergleiche [WBF07] Seite 104f, [MTW07].

2.5. Risiken der Sachversicherungen

2.5.1. Technisches Risiko

Es gibt verschiedene Ansätze, das *BePo* gegen technisches Risiko abzusichern[15]:

- den pragmatischen Ansatz eines Risikomaß-Zuschlags und
- den theoretischen Ansatz mittels Nutzenfunktionen,

a) Der pragmatischen Ansatz eines Risikomaß-Zuschlags:

Es gilt, Unsicherheiten in l_{t+k} zu beschreiben und mittels Wahl eines geeigneten Risikomaßes Q die gegen technisches Risiko abgesicherten Faktoren $l^*_{t+k} = E^{(t)}_{t+k} + i \cdot Q[X_{t+k}]$ zu bestimmen, wobei i die so genannte *cost-of-capital rate* beschreibt. Diese Bezeichnung umschreibt die Kosten für Fremdkapitalbeschaffung am Markt. i kann auch von weiteren Faktoren abhängen, wir nehmen jedoch an, dass i über die Perioden konstant bleibt.

Zeit j	$\mathcal{U}_j$	Cash-Flow		Anzahl
$t+1$	$\mathbf{Z}^{(t+1)}$	X_{t+1}	$\rightarrow$	$l^*_{t+1} = E^{(t)}_{t+1} + i \cdot Q[X_{t+1}]$
$t+2$	$\mathbf{Z}^{(t+2)}$	X_{t+2}	$\rightarrow$	$l^*_{t+2} = E^{(t)}_{t+2} + i \cdot Q[X_{t+2}]$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$t+n$	$\mathbf{Z}^{(t+n)}$	X_{t+n}	$\rightarrow$	$l^*_{t+n} = E^{(t)}_{t+n} + i \cdot Q[X_{t+n}]$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$

Tabelle 2.9.: Abgesicherte deterministische Schätzer

Zu beachten ist hierbei die mögliche Abhängigkeit unter den Perioden sowie der Bewertungszeitpunkt t. Wir sehen, dass das Versicherungsunternehmen gleich zwei Liabilities in $t+k$ ausgesetzt ist: $E^{(t)}_{t+k}$ gegenüber dem Versicherungsnehmer sowie $i \cdot Q[X_{t+k}]$ gegenüber dem Investor bzw. Aktieninhaber bei Zahlung aus Eigenkapital. Ebenfalls zu beachten ist der Unterschied zwischen

- dem Preis des Risiko ausgesetzten Kapitals $i \cdot Q[X_{t+k}]$ sowie
- der Verfügbarkeit dieses Kapitals, $Q[X_{t+k}]$.

Das Versicherungsunternehmen hält im Normalfall nur das Kapital zum Kauf des Risikomaßes (price of risk measure). Dieses muss allerdings nicht verfügbar sein, wenn es gebraucht wird. Daher sollte i sehr groß gewählt werden, um die Chance auf Verfügbarkeit möglichst zu gewährleisten.

[15] Vergleiche [WBF07], [Duf92] Seite 5, [FS04].

Passende Risikomaße sind der *Expected Shortfall* oder *Value at Risk* (siehe (1.14) und (1.13)). Auch geeignet ist eine gewichtete Standardabweichung $\beta \cdot \sqrt{V_{t+k}^{(t)}}$.[16] Dies kann unter anderem durch das Verhalten von ES_α und VaR_α unter normalverteilten Zufallsvariablen begründet werden[17], denn dann sind beide Risikomaße Vielfache der Standardabweichung $\sqrt{V_{t+k}^{(t)}}$.

Zeit j	$\mathcal{U}_j$	Cash-Flow		Anzahl
$t+1$	$\mathbf{Z}^{(t+1)}$	X_{t+1}	$\rightarrow$	$l_{t+1}^* = E_{t+1}^{(t)} + i \cdot \beta \cdot \sqrt{V_{t+1}^{(t)}}$
$t+2$	$\mathbf{Z}^{(t+2)}$	X_{t+2}	$\rightarrow$	$l_{t+2}^* = E_{t+2}^{(t)} + i \cdot \beta \cdot \sqrt{V_{t+1}^{(t)}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$t+n$	$\mathbf{Z}^{(t+n)}$	X_{t+n}	$\rightarrow$	$l_{t+n}^* = E_{t+n}^{(t)} + i \cdot \beta \cdot \sqrt{V_{t+n}^{(t)}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$

Tabelle 2.10.: Standardabweichungs-Absicherung

b) Der theoretische Ansatz mittels Nutzenfunktionen:

Zunächst ein Ausschnitt aus der Nutzentheorie[18]:

Definition 2.5.1. *Nutzenfunktionen*
Eine Nutzenfunktion ist eine stetige streng monoton wachsende Funktion $u : \mathbb{R}^n \supseteq S \rightarrow \mathbb{R}$. Ist $u'' < 0$, so spricht man von Risikoaversion, im Fall $u'' > 0$ von Risikofreude. Ist u zweifach stetig differenzierbar, so wird die Funktion der Risikoaversion durch

$$\alpha(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)} \tag{2.78}$$

gegeben.

$u(x)$ beschreibt also den Nutzen aus x Geldeinheiten. Im Normalfall wird $u'' < 0$ gewählt, um einem möglichen Risiko entgegenzuwirken.

[16] Vergleiche [WBF07].
[17] Vergleiche den Swiss Solvency Test 2006 [SST06].
[18] Vergleiche [FS04].

Korollar 2.5.2. *Mögliche Klassen für Nutzenfunktionen sind unter anderem:*

a) Hyperbolische absolute Risikoaversion (HARA): Seien $\gamma \in [0,1], S = (0,\infty)$. *Dann hat die Nutzenfunktion*

$$u(x) = \log(x) \text{ für } \gamma = 0,$$
$$u(x) = \frac{1}{\gamma}x^\gamma \text{ für } \gamma \neq 0$$

eine Risikoaversion von $\alpha(x) = (1-\gamma)/x$. *Für* $\gamma = 1$ *ergibt sich die risikoneutrale Bewertung. Vergleiche [Smi95], [Coc01].*

b) Power Utility: Seien $0 < c < 1, S = (0,\infty)$ *Dann hat die Nutzenfunktion*

$$u(x) = x^c$$

die Risikoaversion $\alpha(x) = (1-c)/x$. *Auch hier ergibt sich für* $c = 1$ *die risikoneutrale Bewertung. Hierzu siehe auch [Coc01].*

c) Konstante absolute Risikoaversion (CARA): Wir wollen $\alpha(x) > 0$ *konstant wählen. Da* $\alpha(x) = -(\log u')'(x)$ *folgt* $u(x) = a - b \cdot e^{-\alpha x}$ *und nach Normalisierung durch affine Transformationen folgt*

$$u(x) = 1 - e^{-\alpha x}$$

was zu konstanter Risikoaversion $\alpha(x) = \alpha$ *führt.*

Wir wollen nun speziell eine Nutzenfunktion der CARA-Klasse betrachten. Die folgenden Schritte lassen sich jedoch für beliebige Nutzenfunktionen analogdurchführen[19]. Sei $u(x) = 1 - e^{-\alpha x}$ mit konstanter Risikoaversion $\alpha > 0$.
Das Nullnutzenprinzip zur Nutzenfunktion u besagt, dass es unerheblich sein soll, ob ein Risiko $(X_{t+k} \mid \mathfrak{F}_t)$ getragen wird oder der Beitrag $l_{t+k}^{*(\alpha)}$ gezahlt wird, um dieses Risiko nicht zu tragen, also

$$E[u(-X_{t+k}) \mid \mathfrak{F}_t] = u(-l_{t+k}^{*(\alpha)}). \tag{2.79}$$

[19] Vergleiche [WBF07] Seite 70ff, [FS04] Seite 61ff.

$l_{t+k}^{*(\alpha)}$ ist wegen Konvexität von u echt größer als $l_{t+k} = E_{t+k}^{(t)}$, da mit Jensen's Ungleichung (siehe Satz A.3)

$$u(-l_{t+k}^{*(\alpha)}) = E[u(-X_{t+k}) \mid \mathfrak{F}_t] \leq u(-E[X_{t+k} \mid \mathfrak{F}_t]) = u(-E_{t+k}^{(t)}) \tag{2.80}$$

gilt und u streng monoton wachsend ist.
Einsetzen von u liefert nun

$$\begin{aligned} E[u(-X_{t+k}) \mid \mathfrak{F}_t] =& 1 - E[\exp\{\alpha \cdot X_{t+k}\}] \\ =& 1 - \exp\{\alpha \cdot l_{t+k}^{*(\alpha)}\}, \end{aligned} \tag{2.81}$$

woraus folgt, dass

$$\begin{aligned} l_{t+k}^{*(\alpha)} =& \frac{1}{\alpha} \log E[\exp\{\alpha \cdot X_{t+k}\} \mid \mathfrak{F}_t] \\ =& E_{t+k}^{(t)} + \frac{1}{\alpha} \log E[\exp\{\alpha \cdot (X_{t+k} - E_{t+k}^{(t)})\} \mid \mathfrak{F}_t] \\ \approx& E_{t+k}^{(t)} + \frac{\alpha}{2} \cdot V_{t+k}^{(t)}. \end{aligned} \tag{2.82}$$

Im letzten Schritt wird eine Taylor-Approximation auf den hinteren Term angewandt. Es folgen wie im pragmatischen Ansatz Zuschläge:

Zeit j	$\mathcal{U}_j$	Cash-Flow		Anzahl
$t+1$	$\mathbf{Z}^{(t+1)}$	X_{t+1}	$\rightarrow$	$l_{t+1}^{*} = E_{t+1}^{(t)} + i \cdot \frac{\alpha}{2} \cdot V_{t+1}^{(t)}$
$t+2$	$\mathbf{Z}^{(t+2)}$	X_{t+2}	$\rightarrow$	$l_{t+2}^{*} = E_{t+2}^{(t)} + i \cdot \frac{\alpha}{2} \cdot V_{t+2}^{(t)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$t+n$	$\mathbf{Z}^{(t+n)}$	X_{t+n}	$\rightarrow$	$l_{t+n}^{*} = E_{t+n}^{(t)} + i \cdot \frac{\alpha}{2} \cdot V_{t+n}^{(t)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$

Tabelle 2.11.: Variations-Absicherung

Insgesamt bieten der theoretische und der pragmatische Ansatz jedoch nur erste Anhalte für Bewertungs-Portfolios im Nicht-Lebens Bereich. Es stehen noch einige Probleme offen[20]:

- Die Wahl des Risikomaßes: der theoretische Ansatz nimmt komplette Unabhängigkeit unter den Jahren an, während der pragmatische Ansatz totale positive Korrelation annimmt,
- Die Wahl der Derivate $\mathfrak{U}_j$, die das finanzielle und das technische Risiko entkoppeln,
- Die Wahl der cost-of-capital rate i.

2.5.2. Finanzielles Risiko

Das finanzielle Risiko kann bei der Nicht-Lebensversicherung ohne Einschränkungen wie bei Lebensversicherungen in Abschnitt 2.3.2 behandelt werden, da nicht die Wahl des Bewertungs-Portfolios, sondern das tatsächliche Investment das Risiko beschreibt.

[20] Vergleiche [WBF07] Seite 104f.

3. Prämienberechnung

Nachdem wir Risiken diversifiziert haben (vergleiche Abschnitt 2.1), geht es im folgenden um die Einbeziehung der entsprechenden Risikomerkmale in die Versicherungsprämie. Ziel ist, nicht nur die Nettoprämie, d.h. den erwarteten Schaden des Risikos, sondern auch den nötigen Sicherheitszuschlag für das jeweilige Einzelrisiko zu bestimmen.
In den vorangegangenen Abschnitten wurde das Bewertungs-Portfolio $BePo$ definiert und gegen technisches sowie finanzielles Risiko abgesichert. Im folgenden kommen wir nun zur Berechnung der Prämie.
Das Äquivalenzprinzip verlangt die faire Prämie. Unsere Risiken werden in das $BePo$ eingerechnet, weswegen nach einer Bewertung $\mathcal{A}[BePo^{prot}(\mathbf{X})] = 0$ gelten sollte.[1]

3.1. Lebensversicherungen

Greifen wir zunächst Beispiel 2.2.3 wieder auf:

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}' = (\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_{11}) =& (\mathbf{Z}^{(0)}, \mathbf{Z}^{(1)}, \mathbf{Z}^{(2)}, \mathbf{Z}^{(3)}, \mathbf{Z}^{(4)}, \\
& \mathbf{I} + Put^{(1)}(\mathbf{I}, (1+i)), \mathbf{I} + Put^{(2)}(\mathbf{I}, (1+i)^2), \\
& \mathbf{I} + Put^{(3)}(\mathbf{I}, (1+i)^3), \mathbf{I} + Put^{(4)}(\mathbf{I}, (1+i)^4), \\
& \mathbf{I} + Put^{(5)}(\mathbf{I}, (1+i)^5), \mathbf{I}) \\
\lambda(\mathbf{X})' =& (-l_{65} \cdot \Pi, -l_{66} \cdot \Pi, -l_{67} \cdot \Pi, -l_{68} \cdot \Pi, \\
& - l_{69} \cdot \Pi, d_{65}, d_{66}, d_{67}, d_{68}, d_{69}, l_{70}) \\
BePo(\mathbf{X}) =& \lambda(\mathbf{X})' \cdot \mathcal{U}
\end{aligned}$$

ist das $BePo$ ohne Absicherungen, umgeformt:

$$\begin{aligned}
BePo(\mathbf{X}) =& \Pi \cdot (\sum_{j=0}^{4} -l_{j+65} \mathbf{Z}^{(j)}) \\
& + \mathbf{I}(d_{65} + d_{66} + d_{67} + d_{68} + d_{69} + l_{70}) \\
& + \sum_{j=1}^{5} Put^{(j)}(\mathbf{I}, (1+i)^j) d_{j+64} \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

[1] Siehe hierzu [WBF07] Seite 43f, [Büh04].

Wir bemerken, dass $d_{65} + d_{66} + d_{67} + d_{68} + d_{69} + l_{70} = l_{65}$ ist, wir also genau die Anzahl unseres Anfangsbestands an **I** kaufen müssen.
Betrachten wir nun das gegen technisches Risiko abgesicherte Portfolio:

$$\begin{aligned}
&BePo^{prot}(\mathbf{X}) \\
=& -\Pi \cdot (\sum_{j=0}^{4} l_{j+65}\mathbf{Z}^{(j)}) + l_{65}\mathbf{I} + \sum_{j=1}^{5} d_{j+64} Put^{(j)}(\mathbf{I}, (1+i)^j) \\
&+ \sum_{j=0}^{3} l_{j+65}(q^*_{j+65} - q_{j+65})[\Pi \cdot \mathbf{Z}^{(j+1)} + Put^{(j+1)}(\mathbf{I}, (1+i)^{j+1}) + \mathbf{I} \\
&- \frac{1}{l_{j+66}}\{l_{70}\mathbf{I} + \sum_{k=j+2}^{5} d_{k+64}(Put^{(k)}(\mathbf{I}, (1+i)^k) + \mathbf{I}) \\
&- \sum_{k=j+2}^{4} l_{k+65} \cdot \Pi \cdot \mathbf{Z}^{(k)}\}] + l_{69}(q^*_{69} - q_{69})(Put^{(5)}(\mathbf{I}, (1+i)^5))
\end{aligned}$$

und umgeformt zu

$$\begin{aligned}
&BePo^{prot}(\mathbf{X}) \\
=& -\Pi \cdot [l_{65}\mathbf{Z}^{(0)} + \\
&\sum_{j=1}^{4} \mathbf{Z}^{(j)} \cdot (-l_{j+64}(q^*_{j+64} - q_{j+64}) + l_{j+65} \cdot (1 - \sum_{k=1}^{j-1} \frac{l_{k+64}(q^*_{k+64} - q_{k+64})}{l_{k+65}}))] \\
&+ \sum_{j=0}^{4} Put^{(j+1)}(\mathbf{I}, (1+i)^{j+1}) \\
&\cdot [l_{j+65}(q^*_{j+65} - q_{j+65}) + d_{j+65} \cdot (1 - \sum_{k=1}^{j} \frac{l_{k+64}(q^*_{k+64} - q_{k+64})}{l_{k+65}})] \\
&+ \mathbf{I} \cdot [l_{65} + \sum_{j=0}^{3} l_{j+65}(q^*_{j+65} - q_{j+65}) - \sum_{j=1}^{4} d_{j+65} \cdot \sum_{k=1}^{j} \frac{l_{k+64}(q^*_{k+64} - q_{k+64})}{l_{k+65}} \\
&- l_{70} \cdot \sum_{j=1}^{4} \frac{l_{j+64}(q^*_{j+64} - q_{j+64})}{l_{j+65}}]
\end{aligned}$$

Setzen wir im folgenden der Einfachheit halber

$$\begin{aligned}
a_0 =& l_{65}, &(3.2)\\
a_j =& -l_{j+64}(q^*_{j+64} - q_{j+64})\\
&+ l_{j+65} \cdot (1 - \sum_{k=1}^{j-1} \frac{l_{k+64}(q^*_{k+64} - q_{k+64})}{l_{k+65}}), j = 1, \ldots, 4, &(3.3)\\
b_j =& l_{j+64}(q^*_{j+64} - q_{j+64})\\
&+ d_{j+64} \cdot (1 - \sum_{k=2}^{j} \frac{l_{k+63}(q^*_{k+63} - q_{k+63})}{l_{k+64}}), j = 1, \ldots, 5, &(3.4)\\
c =& l_{65} + \sum_{j=0}^{3} l_{j+65}(q^*_{j+65} - q_{j+65}) - \sum_{j=1}^{4} d_{j+65} \cdot \sum_{k=1}^{j} \frac{l_{k+64}(q^*_{k+64} - q_{k+64})}{l_{k+65}}\\
&- l_{70} \cdot \sum_{j=1}^{4} \frac{l_{j+64}(q^*_{j+64} - q_{j+64})}{l_{j+65}}. &(3.5)
\end{aligned}$$

Alle a_j, b_j und c sind dann deterministisch und

$$\begin{aligned}
BePo^{prot}(\mathbf{X}) =& -\Pi \cdot \sum_{j=0}^{4} \mathbf{Z}^{(j)} \cdot a_j\\
&+ \sum_{j=1}^{5} Put^{(j)}(\mathbf{I}, (1+i)^j) \cdot b_j\\
&+ \mathbf{I} \cdot c. &(3.6)
\end{aligned}$$

Betrachten wir nun den Faktor c genauer und erinnern uns an $d_j = l_{j+1} - l_j$, so stellen wir fest, dass[2]

$$
\begin{aligned}
c =& l_{65} + \sum_{j=0}^{3} l_{j+65}(q^*_{j+65} - q_{j+65}) - \sum_{j=1}^{4} l_{j+65} \cdot \sum_{k=1}^{j} \frac{l_{k+64}(q^*_{k+64} - q_{k+64})}{l_{k+65}} \\
&+ \sum_{j=2}^{5} l_{j+65} \cdot \sum_{k=1}^{j-1} \frac{l_{k+64}(q^*_{k+64} - q_{k+64})}{l_{k+65}} - l_{70} \cdot \sum_{j=1}^{4} \frac{l_{j+64}(q^*_{j+64} - q_{j+64})}{l_{j+65}} \\
=& l_{65} + \sum_{j=0}^{3} l_{j+65}(q^*_{j+65} - q_{j+65}) - l_{66} \frac{l_{65}(q^*_{65} - q_{65})}{l_{66}} \\
&+ l_{70} \cdot \sum_{j=1}^{4} \frac{l_{j+64}(q^*_{j+64} - q_{j+64})}{l_{j+65}} - \sum_{j=2}^{4} l_{j+65} \frac{l_{j+64}(q^*_{j+64} - q_{j+64})}{l_{j+65}} \\
&- l_{70} \cdot \sum_{j=1}^{4} \frac{l_{j+64}(q^*_{j+64} - q_{j+64})}{l_{j+65}} \\
=& l_{65} + \sum_{j=1}^{3} l_{j+65}(q^*_{j+65} - q_{j+65}) - \sum_{j=2}^{4} l_{j+65} \frac{l_{j+64}(q^*_{j+64} - q_{j+64})}{l_{j+65}} \\
=& l_{65}.
\end{aligned}
$$

Dies ist keineswegs überraschend, denn wegen der Wahl der $\mathcal{U}_j$ muss für jeden Versicherten ein Anteil **I** gekauft werden. Lediglich die Absicherung dieser durch Put-Optionen ist einem Risiko ausgesetzt, die Aktien selbst kommen sowohl im Todes- als auch im Erlebensfall zur Geltung.
Zudem kann durch die Wahl $q^*_j = q_j \ \forall j$ stets das *BePo* ohne Absicherung berechnet werden.
Nehmen wir nun einen Anfangsbestand von $l_{65} = 1000$ an und wählen als Sterbewahrscheinlichkeiten q_j die in Tabelle C.1 (siehe Anhang C) gegebenen Wahrscheinlichkeiten 2. Ordnung. q^*_j seien die Wahrscheinlichkeiten 1. Ordnung mit einem Aufschlag von 34%. $l_{66}, \dots, l_{70}$ seien mit den Wahrscheinlichkeiten 2. Ordnung bestimmt. Hiermit ergeben sich folgende Daten:

l_{65}	l_{66}	l_{67}	l_{68}	l_{69}	l_{70}
1000	985.946	969.977	951.868	931.454	908.639

Tabelle 3.1.: Beispieldaten

j	0	1	2	3	4	5
a_j	1000	983.58	965.05	944.09	920.44	
b_j		16.42	18.53	20.96	23.65	26.50

Tabelle 3.2.: Beispiel für Faktoren

[2] Vergleiche [WBF07] Seite 31.

Wählen wir nun ein lineares Bewertungsprinzip $\mathcal{A}$, welches Put-Optionen mittels eines binomialen Cox-Ross-Rubinstein Modells mit up-Wahrscheinlichkeit p bewertet. Dann ist der Preis der Put-Option durch

$$\mathcal{A}[Put^{(k)}(\mathbf{I},(1+i)^k)] = \frac{1}{(1+i)^k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}p^j(1-p)^{k-j}((1+i)^k - u^j d^{k-j})_+ \quad (3.7)$$

gegeben, wobei u und d die up- bzw. down-Intensitäten darstellen. $\mathbf{I}$ wird zu seinem Marktwert 1 bewertet, die Zero-Coupon Bonds verhalten sich wie ein Bankkonto zum Zinssatz i, also

$$\mathcal{A}[\mathbf{Z}^{(j)}] = (1+i)^{-j}. \quad (3.8)$$

Für $p = 0.4, u = 1.2, d = 0.8, i = 0.04$ folgt

$$\mathcal{A}[BePo^{prot}(\mathbf{X})] \approx -4464.1053\Pi + 1028.7045 \quad (3.9)$$

und durch das modifizierte Äquivalenzprinzip, welches $\mathcal{A}[BePo^{prot}(\mathbf{X})] = 0$ setzt,

$$\Pi \approx \frac{1028.7045}{4464.1053} \approx 0.2304. \quad (3.10)$$

Für die risikoneutrale Wahrscheinlichkeit $p_{neut} = (1+i-d)/(u-d) = 0.6$ ergibt sich

$$\Pi \approx \frac{1014.8738}{4464.1053} \approx 0.2273. \quad (3.11)$$

Generell: für steigendes p wird die Prämie geringer, da die Preise der Put-Optionen fallen.

Betrachten wir die obigen Daten mit einem variablen Zinssatz $i \in [0, u-1]$, so ergibt sich folgende Graphik, welche die aus dem $BePo$ folgende Prämie, sowie die des Äquivalenzprinzips unter Risiko, sowie Risikoneutralität darstellt:

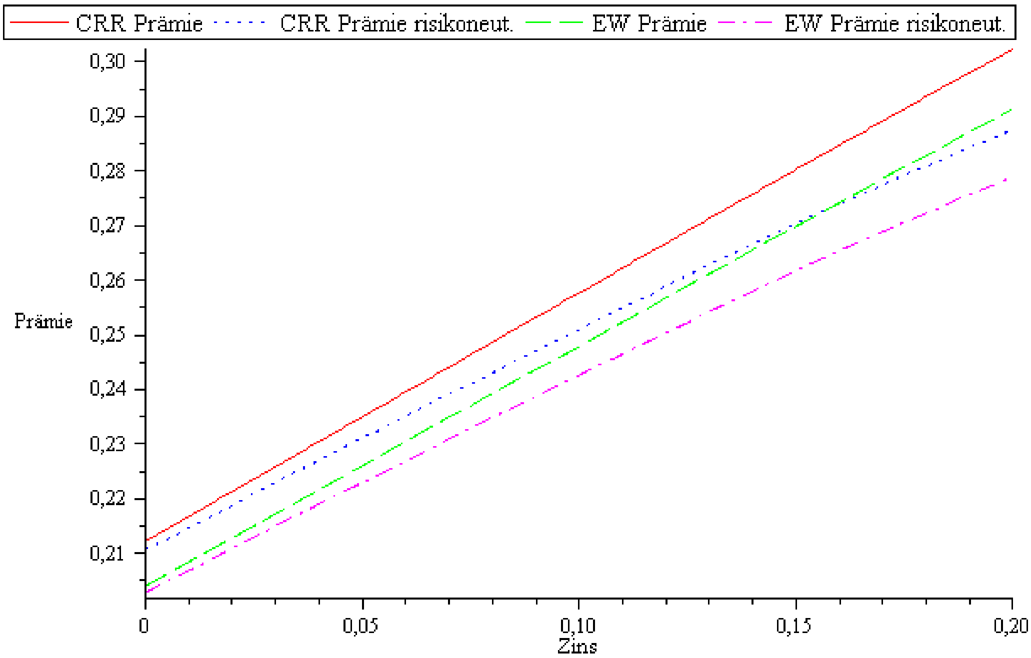

Abbildung 3.1.: Lebensversicherungs-Prämie bei variablen Zinssätzen

Gehen wir nun zurück zum allgemeinen Fall. Sei x das Eintrittsalter der Versicherten und n die Laufzeit der Verträge. Die deterministischen Faktoren a_j und b_j sind wie unter (3.2) bis (3.4) berechenbar. Der Faktor c aus (3.5) für die Erlebensfallzahlung ändert sich, denn dieser ist nicht zwingend in den Todesfallleistungen enthalten:

$$a_0 = l_x, \tag{3.12}$$

$$a_j = - l_{x+j-1}(q^*_{x+j-1} - q_{x+j-1}) + l_{x+j} \cdot (1 - \sum_{k=1}^{j-1} \frac{l_{x+k-1}(q^*_{x+k-1} - q_{x+k-1})}{l_{x+k}}), j = 1, \ldots, n-1, \tag{3.13}$$

$$b_j = l_{x+j-1}(q^*_{x+j-1} - q_{x+j-1}) + d_{x+j-1} \cdot (1 - \sum_{k=2}^{j} \frac{l_{x+k-2}(q^*_{x+k-2} - q_{x+k-2})}{l_{x+k-1}}), j = 1, \ldots, n, \tag{3.14}$$

$$c = l_x - \sum_{j=1}^{n} b_j = l_{x+n} \cdot (1 - \sum_{j=0}^{n-2} \frac{l_{j+x}(q^*_{j+x} - q_{j+x})}{l_{j+x+1}}) - l_{x+n-1}(q^*_{x+n-1} - q_{x+n-1}), \tag{3.15}$$

also

$$\begin{aligned}BePo^{prot}(\mathbf{X}) = &-\Pi \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \mathcal{U}_{j+1} \cdot a_j \\ &+ \sum_{j=1}^{n} \mathcal{U}_{n+j} \cdot b_j \\ &+ \mathcal{U}_{2n+1} \cdot c. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Satz 3.1.1. *Die aus dem BePo folgenden Prämie* Π *ist stets höher als die aus dem Äquivalenzprinzip folgende Prämie.*

Beweis: Die aus dem Äquivalenzprinzip folgende Prämie ist

$$\frac{\mathcal{A}[l_{x+n} \cdot \mathcal{U}_{2n+1} + \sum_{j=0}^{n} d_{x+j} \cdot \mathcal{U}_{n+1}]}{l_x \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \mathcal{A}[\mathcal{U}_{j+1}]} \leq \frac{\mathcal{A}[l_{x+n} \cdot \mathcal{U}_{2n+1} + \sum_{j=0}^{n} d_{x+j} \cdot \mathcal{U}_{n+1}]}{\sum_{j=0}^{n-1} \mathcal{A}[l_{x+j} \cdot \mathcal{U}_{j+1}]}, \tag{3.17}$$

wobei die rechte Seite der aus dem *BePo* folgenden Prämie entspricht. Gleichheit tritt zudem nur auf, wenn $l_x = l_{x+n-1}$ gilt, also keine Todesfälle in allen Prämien-Perioden angenommen werden.

Um das Portfolio noch gegen finanzielles Risiko abzusichern, sollte als letzter Schritt der Preis der Margrabe-Option (vergleiche Korollar 2.3.6) anteilig auf die Prämie aufgeschlagen werden. Allerdings müssen die Versicherten in diesem Fall auch eine Gewinnbeteiligung erhalten. Alternativ kann das Risiko bei Aktieninhabern gegen Dividendenzahlungen getragen werden, um die Prämien geringer zu halten[3].

3.2. Sachversicherungen

Das Bewertungs-Portfolio für eine Sachversicherung wurde im Abschnitt 2.4 konstruiert. Annahmen waren hier eine einmalige Prämienzahlung Π in $t = 0$ sowie $\mathcal{U}_j = \mathbf{Z}^{(j)}, j > 0$. Das *BePo* ohne weitere Absicherungen wird gegeben durch

$$\begin{aligned}BePo(\mathbf{X}) &= -\Pi + \sum_{k\geq 1} l_k \cdot \mathcal{U}_k \\ &= -\Pi + \sum_{k\geq 1} E[X_k \mid \mathfrak{F}_0] \cdot \mathbf{Z}^{(k)} \\ &= -\Pi + \sum_{k\geq 1} E_k^{(0)} \cdot \mathbf{Z}^{(k)}.\end{aligned}$$

[3] Vergleiche [WBF07] Seite 53.

Das gegen technisches Risiko abgesicherte Bewertungs-Portfolio ist

$$\begin{aligned} BePo^{prot}(\mathbf{X}) &= -\Pi + l_k^* \cdot \mathcal{U}_k \\ &= -\Pi + \sum_{k\geq 1} (E_k^{(0)} + i \cdot Q[X_k]) \cdot \mathbf{Z}^{(k)}, \end{aligned}$$

mit $Q[X_k]$ einem Sicherheitsprinzip, zum Beispiel $Q[X_k] = \beta \cdot \sqrt{V_k^{(0)}}$ im pragmatischen Ansatz oder $Q[X_k] = \frac{\alpha}{2} \cdot V_k^{(0)}$ im theoretischen Ansatz.

Greifen wir zunächst auf Beispiel 1.1.5 zurück: Betrachten wir die eingetretenen Schäden eines Jahres als Liability aus einem Vertrag, also insgesamt 10 Verträge. Erstes Problem ist die Schätzung von $E_k^{(0)} = E[X_k \mid \mathfrak{F}_0]$. Diese sind bereits im $BePo$ ohne Absicherungen enthalten. Hierzu wird der ultimative kumulative Schaden (vergleiche (2.74) und (2.77)) $Y(\infty)$ von $\mathbf{X}$ geschätzt, indem wir den Endwerten eine Lognormal-Verteilung unterstellen[4], in unserem Beispiel also den
$\widehat{Y}(k, 10)$ aus Tabelle 1.5. Die hier genutzten Schätzer sind

$$\widehat{\mu} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^{I} \ln \widehat{Y}(i, I) \tag{3.18}$$

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{I-1} \sum_{i=1}^{I} (\ln \widehat{Y}(i, I) - \widehat{\mu})^2 \tag{3.19}$$

$$\widehat{Y}(I) = \widehat{E}[Y(I)] = \exp\{\widehat{\mu} + \frac{\widehat{\sigma}^2}{2}\} \tag{3.20}$$

$$\widehat{Var}[Y(I)] = \exp\{2\widehat{\mu} + \widehat{\sigma}^2\}(\exp\{\widehat{\sigma}^2\} - 1). \tag{3.21}$$

Im nächsten Schritt wird der Schätzer $\widehat{Y}(I)$ mittels der age-to-age Schätzer aus Tabelle 1.3 durch (1.7) wieder in die Einzelschäden $\widehat{X}_k$ zerlegt. Es gilt

$$l_k = \widehat{E_k^{(0)}} = \widehat{E}[X_k \mid \mathfrak{F}_0] = \widehat{X}_k. \tag{3.22}$$

Wir haben somit einen erwarteten Cash-Flow erhalten, durch den sich das $BePo$ darstellen lässt. In unserem Beispiel ergeben sich $\widehat{\mu} = 15.4753$ und $\widehat{\sigma} = 0.1400$, woraus sich folgende Tabelle errechnet:

k	1	2	3	4	5
$\widehat{X}_k$	367554	915434	958819	1025431	568015
k	6	7	8	9	10
$\widehat{X}_k$	398190	365216	247750	371018	92477

Tabelle 3.3.: Schätzer für Cash-Flow X unter Lognormalverteilungs-Annahme

[4] Siehe [AM02] Seite 95ff, [Hul97] Seite 228ff, [Mar70] Setie 52f.

Betrachten wir nun das technische Risiko ähnlich [WBF07][5]. Wir erinnern uns an (2.73) und setzen zudem

$$W_k^{(t)} = Var[Y_k \mid \mathfrak{F}_t] \tag{3.23}$$

mit $k > t$. Durch Aufteilen der Varianz[6] ergibt sich nun

$$\begin{aligned} W_k^{(t)} =& E[Var[Y_k \mid \mathfrak{F}_{k-1}] \mid \mathfrak{F}_t] + Var[E[Y_k \mid \mathfrak{F}_{k-1}] \mid \mathfrak{F}_t] \\ =& E[\sigma_{k-1}^2 \cdot Y_{k-1} \mid \mathfrak{F}_t] + Var[\nu_{k-1} \cdot Y_{k-1} \mid \mathfrak{F}_t] \\ =& \sigma_{k-1}^2 \cdot Y_t \cdot \prod_{l=t}^{k-2} \nu_l + \nu_{k-1}^2 \cdot Var[Y_{k-1} \mid \mathfrak{F}_t] \\ =& \sigma_{k-1}^2 \cdot Y_t \cdot \prod_{l=t}^{k-2} \nu_l + \nu_{k-1}^2 \cdot W_{k-1}^{(t)}. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Durch Iteration dieses Ergebnisses folgt ein Schätzer für die
Varianz der Kumulschäden:

$$\widehat{W_k^{(t)}} = Y_t \cdot \sum_{m=t}^{k-1} \prod_{n=m+1}^{k-1} \widehat{\nu}_n^2 \cdot \widehat{\sigma}_m^2 \cdot \prod_{l=t}^{m-1} \widehat{\nu}_l \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{m=t}^{k-1} \prod_{n=m+1}^{k-1} \widehat{\nu}_n^2 \cdot \widehat{\sigma}_m^2 \cdot \widehat{Y}_m^{(t)} \\ &= (\widehat{Y}_k^{(t)})^2 \sum_{m=t}^{k-1} \frac{\widehat{\sigma}_m^2 / \widehat{\nu}_m^2}{\widehat{Y}_m^{(t)}}, \end{aligned} \tag{3.26}$$

wobei

$$\widehat{Y}_m^{(t)} = \widehat{E}[Y_m \mid Y_t] = Y_t \cdot \prod_{l=t}^{m-1} \widehat{\nu}_l \tag{3.27}$$

zur Vereinfachung herangezogen wurde. Weiterhin ergibt sich für die Einzelschäden

$$\begin{aligned} V_k^{(t)} =& E[Var[X_k \mid \mathfrak{F}_{k-1}] \mid \mathfrak{F}_t] + Var[E[X_k \mid \mathfrak{F}_{k-1}] \mid \mathfrak{F}_t] \\ =& E[\sigma_{k-1}^2 \cdot Y_{k-1} \mid \mathfrak{F}_t] + Var[(\nu_{k-1} - 1) \cdot Y_{k-1} \mid \mathfrak{F}_t]. \end{aligned} \tag{3.28}$$

[5] Seite 83ff.
[6] Siehe [KPW98] Seite 392ff.

Insgesamt ergibt sich der Schätzer der Prozess-Varianz

$$\begin{aligned}\widehat{V_k^{(t)}} =& \widehat{\sigma}_{k-1}^2 \cdot Y_t \cdot \prod_{l=t}^{k-2} \widehat{\nu}_l + (\widehat{\nu}_{k-1} - 1)^2 \cdot \widehat{W_{k-1}^{(t)}} \\ =& \widehat{Y}_k^2 \cdot \frac{\widehat{\sigma}_{k-1}^2 / \widehat{\nu}_{k-1}^2}{\widehat{Y}_{k-1}} + (\widehat{\nu}_{k-1} - 1)^2 \cdot \widehat{W_{k-1}^{(t)}} \\ =& \widehat{W_k^{(t)}} + (1 - 2 \cdot \widehat{\nu}_{k-1}) \widehat{W_{k-1}^{(t)}}.\end{aligned} \tag{3.29}$$

Es ist uns auf diese Weise jedoch nicht möglich, $\widehat{V_k^{(0)}}$, $k > 0$ zu bestimmen, denn der Faktor $\frac{\widehat{\sigma}_0^2/\widehat{\nu}_0^2}{\widehat{Y}_0}$ wurde nicht berechnet. Betrachten wir speziell $\widehat{V_1^{(0)}}$,
so erhalten wir

$$\begin{aligned}\widehat{V_1^{(0)}} =& \widehat{Y}_1^2 \cdot \frac{\widehat{\sigma}_0^2/\widehat{\nu}_0^2}{\widehat{Y}_0} \\ =& \widehat{Y}_0 \widehat{\sigma}_0^2 \\ =& \widehat{Y}_0^2 \cdot \widehat{Var}[\nu_0 \mid \mathfrak{F}_0] \\ =& \widehat{Var}[\nu_0 Y_0 \mid \mathfrak{F}_0] \\ =& \widehat{Var}[Y_1 \mid \mathfrak{F}_0],\end{aligned} \tag{3.30}$$

also

$$\frac{\widehat{\sigma}_0^2/\widehat{\nu}_0^2}{\widehat{Y}_0} = \frac{\widehat{Var}[Y_1 \mid \mathfrak{F}_0]}{\widehat{Y}_1^2}. \tag{3.31}$$

Mittels dieses Ergebnisses lässt sich bereits ein erster Ansatz des gegen technisches Risiko abgesicherten Portfolios $BePo^{prot}$ formulieren, welches allerdings noch nicht alle Risiken berücksichtigt.

Satz 3.2.1. *Ist $Y \sim \mathcal{LN}(\mu, \sigma^2)$ und $a \in \mathbb{R}$ ein Skalar,
so ist $a \cdot Y \sim \mathcal{LN}(\mu + \ln(a), \sigma^2)$.*

Beweis. Aus $Y \sim \mathcal{LN}(\mu, \sigma^2)$ folgt $Y = \exp\{X\}$ mit einem $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
Demnach ist $a \cdot Y = \exp\{\ln(a) + X\} = \exp\{A\}$ mit $A \sim \mathcal{N}(\mu + \ln(a), \sigma^2)$,
also folgt die Behauptung. □

Beispiel 3.2.2. *Wir greifen wieder Beispiel 1.1.5 auf. In Tabelle 3.3 haben wir bereits Schätzer für die nicht abgesicherten l_k angegeben unter der Bedingung, dass die Ultimate-Schäden lognormal-verteilt sind. Zudem haben wir $\widehat{\mu} = 15.4753$ und $\widehat{\sigma} = 0.1400$ ausgerechnet. $Var[Y_1 \mid \mathfrak{F}_0]/\widehat{Y}_1^2$ kann durch Schätzen der Varianz von $(Y(I) \mid \mathfrak{F}_0)$ (siehe (3.21)) und $Y(I) = Y_1 \prod_{k=1}^{I-1} \nu_k$ sowie Nutzung von
Satz 3.2.1 geschätzt werden. Daraus folgen jährliche Sicherheitszuschläge. Wählen wir das Standardabweichungsprinzip mit $i = 6\%, \beta = \Phi^{-1}(0.99) \approx 2.326$[7], so*

[7] Diese Werte werden auch im Swiss Solvency Test 2008 [SST08] angenommen.

errechnet sich folgende Tabelle, welche erwartete Schäden, Standardabweichungen, Variationskoeffizienten und sich ergebende Sicherheitszuschläge jedes Jahres angibt:

k	1	2	3	4	5
$\widehat{X}_k$	367554	915434	958819	1025431	568015
$\widehat{V_k^{(0)}}^{1/2}$	56553	280626	321065	408331	273392
Vco	15.48%	30.70%	33.50%	39.89%	48.05%
$i \cdot \beta \cdot \widehat{V_k^{(0)}}^{1/2}$	7894	39170	44815	56995	38160
k	6	7	8	9	10
$\widehat{X}_k$	398190	365216	247750	371018	92477
$\widehat{V_k^{(0)}}^{1/2}$	256029	214214	85580	131877	55380
Vco	64.45%	58.41%	36.82%	35.36%	48.02%
$i \cdot \beta \cdot \widehat{V_k^{(0)}}^{1/2}$	35737	29900	11945	18408	7730

Tabelle 3.4.: Standardabweichungsschätzer unter Lognormalverteilungs-Annahme

Je nach Bewertung der Zero-Coupon Bonds ergibt sich nun eine abgesicherte Prämie. Betrachtet man die Zinsraten des Swiss Solvency Test 08 [SST08]

Laufzeit	1	2	3	4	5
Zinsrate	4.05	3.98	4.06	4.11	4.14
$\mathcal{A}(\mathbf{Z}^{(k)})$	0.961	0.925	0.888	0.851	0.816
Laufzeit	6	7	8	9	10
Zinsrate	4.21	4.28	4.31	4.32	4.36
$\mathcal{A}(\mathbf{Z}^{(k)})$	0.781	0.746	0.714	0.684	0.653

Tabelle 3.5.: Swiss Solvency Test 08 Zinsraten und Zero-Coupon Bewertungen

und alternativ den Nominalwert sowie einen konstanten Zins von 4%, so ergeben sich folgende Prämien:

Zinsraten	Prämie	Unterschied zum Nominalwert	
Nominal	5600658		
4%	4733566	867092	15.48%
SST08	4701703	898955	16.05%

Tabelle 3.6.: Prämien bei unterschiedlichen Zinsraten, Prozess-Varianz

Dieser Ansatz betrachtet zwar Risiken im Verlauf des Vertrages, jedoch bleibt ein Fehler in der Schätzung der Chain-Ladder Faktoren (1.5), entstehend aus begrenzten Beobachtungen, unbeachtet. Um diesen Fehler mit einzubeziehen, betrachten wir die mittlere quadratische Abweichung unseres Schätzers $\widehat{E_k^{(0)}}$ aus (3.22), welcher $\mathfrak{F}_0$-messbar ist, zum tatsächlichen Wert[8]:

$$\begin{aligned}
&E[(X_k - \widehat{E_k^{(0)}})^2 \mid \mathfrak{F}_0] \\
=&E[X_k^2 \mid \mathfrak{F}_0] - E[X_k \mid \mathfrak{F}_0]^2 + E[X_k \mid \mathfrak{F}_0]^2 - 2E[X_k \mid \mathfrak{F}_0]\widehat{E_k^{(0)}} + \widehat{E_k^{(0)}}^2 \\
=&Var[X_k \mid \mathfrak{F}_0] + (E[X_k \mid \mathfrak{F}_0] - \widehat{E_k^{(0)}})^2 \\
=&V_k^0 + (E_k^{(0)} - \widehat{E_k^{(0)}})^2
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Der Term

$$(E_k^{(0)} - \widehat{E_k^{(0)}})^2 \tag{3.33}$$

wird Parameter-Fehler genannt und ist der aus Schätzung der σ_j^2 und μ_j entstehende Fehlerterm.
Um diesen Fehlerterm zu schätzen, ist es nötig, die Variation der Schätzer $\widehat{\nu}_k$ um ν_k zu beobachten. Um dies besser zu verstehen, wird eine Zeitserien-Version des Chain-Ladder Modells eingeführt, indem folgende Annahme zu (1.2) und (1.3) hinzugenommen wird:

$$Y(i,j) = \nu_{j-1} \cdot Y(i,j-1) + \sigma_{j-1} \cdot \sqrt{Y(i,j-1)} \cdot \varepsilon_{i,j}, \tag{3.34}$$

wobei $\varepsilon_{i,j}$ unabhängige identisch verteilte zentrierte Zufallsvariablen mit Varianz 1 sind.

Bemerkung 3.2.3. *Vergleiche [Büh04]:*

- *Es ist aus mathematischen Gründen nötig, dass $\mathfrak{F}_0$-f.s. $Y(i,j) > 0$ gilt. Dies ist jedoch ohne praktische Relevanz.*
- *Wegen der speziellen Wahl der $\varepsilon_{i,j}$ ist (3.34) mit (1.2) und (1.3) verträglich.*

Unter dieser Annahme werden die Chain-Ladder age-to-age Schätzer (1.5) spezieller:

$$\widehat{\nu}_j = \frac{\sum_{i=1}^{I-j} Y(i,j+1)}{\sum_{i=1}^{I-j} Y(i,j)} = \nu_j + \sigma_j \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{I-j} Y(i,j)}}{\sum_{i=1}^{I-j} Y(i,j)} \cdot \varepsilon_{i,j+1} \tag{3.35}$$

[8] Vergleiche [WBF07] Seite 87ff.

Kehren wir nun zurück zu unserem *BePo* und betrachten den Fehler innerhalb eines Jahres mit Information zum Zeitpunkt $t = 0$.

$$\begin{aligned}&E[(E_k^{(0)} - \widehat{E_k^{(0)}})^2] \\ =&E[Y_1^2] \cdot E[(\prod_{j=1}^{k-2} \nu_j \cdot (\nu_{k-1} - 1) - \prod_{j=1}^{k-2} \widehat{\nu}_j \cdot (\widehat{\nu}_{k-1} - 1))^2]\end{aligned} \tag{3.36}$$

Es genügt nun, den übrigen Erwartungswert zu betrachten, da Y_1 modellabhängig geschätzt wird. Zu beachten ist, dass $E[\nu_j] = E[\widehat{\nu}_j] = \nu_j$ ist und diese untereinander weder korreliert noch voneinander abhängig sind.

$$\begin{aligned}&E[(\prod_{j=1}^{k-2} \nu_j \cdot (\nu_{k-1} - 1) - \prod_{j=1}^{k-2} \widehat{\nu}_j \cdot (\widehat{\nu}_{k-1} - 1))^2] \\
=&E[(\prod_{j=1}^{k-2} \nu_j \cdot (\nu_{k-1} - 1))^2] + E[(\prod_{j=1}^{k-2} \widehat{\nu}_j \cdot (\widehat{\nu}_{k-1} - 1))^2] \\
&- 2 \cdot E[\prod_{j=1}^{k-2} \nu_j \cdot (\nu_{k-1} - 1) \prod_{j=1}^{k-2} \widehat{\nu}_j \cdot (\widehat{\nu}_{k-1} - 1)] \\
=&-(\prod_{j=1}^{k-2} \nu_j \cdot (\nu_{k-1} - 1))^2 + E[(\prod_{j=1}^{k-2} \widehat{\nu}_j \cdot (\widehat{\nu}_{k-1} - 1))^2] \\
=&Var[\prod_{j=1}^{k-2} \widehat{\nu}_j \cdot (\widehat{\nu}_{k-1} - 1)] \qquad (3.37) \\
=&\prod_{j=1}^{k-2} (\nu_j^2 + \frac{\sigma_j^2}{\sum_{i=1}^{I-j} Y(i,j)}) \cdot ((\nu_{k-1} - 1)^2 + \frac{\sigma_{k-1}^2}{\sum_{i=1}^{I-(k-1)} Y(i,k-1)}) - (\prod_{j=1}^{k-2} \nu_j \cdot (\nu_{k-1} - 1))^2 \\
=&\prod_{j=1}^{k-2} \nu_j^2 \cdot (\nu_{k-1} - 1)^2 \cdot (\prod_{j=1}^{k-2} (\frac{\sigma_j^2/\nu_j^2}{\sum_{i=1}^{I-j} Y(i,j)} + 1) \cdot (\frac{\sigma_{k-1}^2/(\nu_{k-1} - 1)^2}{\sum_{i=1}^{I-(k-1)} Y(i,k-1)} + 1) - 1) \\
\approx&\prod_{j=1}^{k-2} \nu_j^2 \cdot (\nu_{k-1} - 1)^2 \cdot (\sum_{j=1}^{k-2} \frac{\sigma_j^2/\nu_j^2}{\sum_{i=1}^{I-j} Y(i,j)} + \frac{\sigma_{k-1}^2/(\nu_{k-1} - 1)^2}{\sum_{i=1}^{I-(k-1)} Y(i,k-1)})\end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde eine lineare Approximation auf den Produktterm angewandt, was zur aus [Mac93] bekannten Lösung, der Methode von Mack, führt. Diese ermittelt neben dem *best estimate* zunächst den *mean squared error* der Parameter.[9] Der Parameter-Fehler kann demnach durch

$$\begin{aligned}\widetilde{V_k^{(0)}} =& \widehat{E}[(E_k^{(0)} - \widehat{E_k^{(0)}})^2 \mid \mathfrak{F}_0] \\ =& \widehat{E_k^{(0)}}^2 \cdot \left(\sum_{j=1}^{k-2} \frac{\widehat{\sigma}_j^2/\widehat{\nu}_j^2}{\sum_{i=1}^{I-j} \widehat{Y}(i,j)} + \frac{\widehat{\sigma}_{k-1}^2/(\widehat{\nu}_{k-1}-1)^2}{\sum_{i=1}^{I-(k-1)} \widehat{Y}(i,k-1)}\right), k > 1\end{aligned} \tag{3.38}$$

geschätzt werden. Für $k = 1$ entsteht wieder das Problem nicht vorhandener Parameter (siehe (3.30)). Jedoch gilt[10]

$$\begin{aligned}\widetilde{V_1^{(0)}} = \widehat{E}[(E_1^{(0)} - \widehat{E_1^{(0)}})^2 \mid \mathfrak{F}_0] =& \widehat{E}[E_1^{(0)^2} \mid \mathfrak{F}_0] - 2\widehat{E}[E_1^{(0)}\widehat{E_1^{(0)}} \mid \mathfrak{F}_0] + \widehat{E}[\widehat{E_1^{(0)}}^2 \mid \mathfrak{F}_0] \\ =& \widehat{E}[E_1^{(0)^2} \mid \mathfrak{F}_0] - 2\widehat{E_1^{(0)}}^2 + \widehat{E_1^{(0)}}^2 \\ =& \widehat{Var}[E_1^{(0)} \mid \mathfrak{F}_0] = \widehat{Var}[Y_1 \mid \mathfrak{F}_0],\end{aligned} \tag{3.39}$$

wodurch dieses Problem gelöst wird.

Satz 3.2.4. *Bedingte mittlere Standardabweichung des Schätzers*
Die mittlere Standardabweichung des Schätzers $\widehat{E_k^{(0)}}$ von $E_k^{(0)}$ wird mit

$$\widehat{E}[(X_k - \widehat{E_k^{(0)}})^2 \mid \mathfrak{F}_0] = \widehat{V_k^{(0)}} + \widetilde{V_k^{(0)}}, k \geq 1 \tag{3.40}$$

geschätzt. $\widehat{V_k^{(0)}}$ wird in (3.29) angegeben, $\widetilde{V_k^{(0)}}, k > 1$ in (3.38) und für $k = 1$ in (3.39).

[9] Vergleiche auch [Mac02].
[10] Vergleiche [KPW98] Seite 392ff.

Beispiel 3.2.5. *Gehen wir wieder zurück zu Beispiel 3.2.2. Es wurde bereits die Prozess-Varianz* $\widehat{V_k^{(0)}}$ *berechnet. Unter Hinzunahme der Parameter-Varianz, berechnet nach (3.38) und (3.39), wiederum zum Standardabweichungsprinzip mit* $i = 6\%, \beta = \Phi^{-1}(0.99)$ *gemäß des Swiss Solvency Test 2008 [SST08], ergibt sich folgende Tabelle:*

k	1	2	3	4	5
$\widehat{X}_k$	367554	915434	958819	1025431	568015
$\widehat{V_k^{(0)}}^{1/2}$	56553	280626	321065	408331	273392
$\widetilde{V_k^{(0)}}^{1/2}$	56553	80670	98458	139429	104277
Vco	21.88%	31.94%	35.16%	42.21%	51.82%
$i \cdot \beta \cdot (\widehat{V_k^{(0)}} + \widetilde{V_k^{(0)}})^{1/2}$	11163	40756	46874	60226	40842
k	6	7	8	9	10
$\widehat{X}_k$	398190	365216	247750	371018	92477
$\widehat{V_k^{(0)}}^{1/2}$	256029	214214	85580	131877	55380
$\widetilde{V_k^{(0)}}^{1/2}$	111197	101102	35218	65472	56940
Vco	70.42%	64.82%	37.27%	39.67%	90.74%
$i \cdot \beta \cdot (\widehat{V_k^{(0)}} + \widetilde{V_k^{(0)}})^{1/2}$	38962	33063	12917	20551	11087

Tabelle 3.7.: Beispiel der Parameter-Varianz

Mittels dieser Daten ergibt sich eine von der Bewertung der Zero-Coupon Bonds abhängige Prämie:

Zinsraten	Prämie	Unterschied zum Nominalwert	
Nominal	5626347		
4%	4754410	871937	15.50%
SST08	4721755	904592	16.08%

Tabelle 3.8.: Prämien bei unterschiedlichen Zinsraten, Prozess- und Parameter-Varianz

Wird der Zinssatz variabel gehalten, so ergibt sich folgende Graphik:

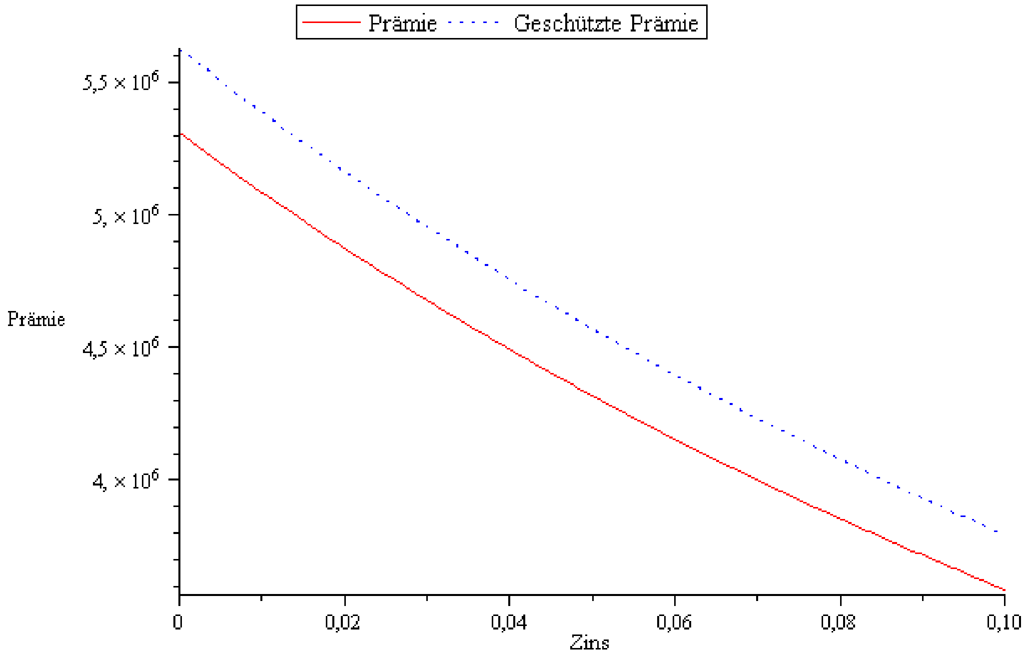

Abbildung 3.2.: Schadenversicherungs-Prämie bei variablen Zinssätzen

Dieser Verlauf ist keinesfalls überraschend, denn je höher der Zinssatz, desto geringer werden zukünftige Ausgaben bewertet.

Auch bei den Sachversicherungen ist als letzter Schritt noch das finanzielle Risiko zu betrachten. Es wird analog zu dem der Lebensversicherungen behandelt. Der Preis der Margrabe-Option (vgl. Korollar 2.3.6) sollte entweder gegen Gewinnbeteiligung proportional auf die Prämie aufgeschlagen werden, beziehungsweise bei Aktieninhabern gegen höhere Dividendenzahlungen[11].

[11]Siehe [WBF07] Seite 53.

4. Abschließende Betrachtung

Ich habe mich im vorstehenden Kapitel mit der Berechnung von Prämien für Lebens- und Schadenversicherungen befasst. Ich habe gezeigt, dass es unter Verwendung verschiedener mathematischer Methoden möglich ist, einerseits Risiken zu berechnen und andererseits die Risikobewertung in ihrer Gesamtheit auf der Kapitalseite des Unternehmens abzubilden.

Risikobewertungen lassen sich auf die gesamte Anlagestrategie anwenden und es können verschiedene Szenarien durchgerechnet und mittels Valuation Portfolio optimiert werden. Die Höhe nötiger Sicherheitszuschläge und die Wahrscheinlichkeit stochastischer Ereignisse und deren Abhängigkeiten untereinander werden zueinander in Beziehung gesetzt und erlauben Rückschlüsse auf die zukünftige Entwicklung.

Wurden früher vor allem Datenreihen aus der Vergangenheit und daraus abgeleitete Mittelwerte zur Kalkulation von Versicherungsprämien benutzt, werden heute auch die Schwankungen der verschiedenen Größen und ihre Wirkung aufeinander berücksichtigt.

Versicherungsunternehmen haben eine Vielzahl komplexer Parameter zu beachten. Marktrisiken, das heißt Schwankungen an den Kapitalmärkten (Zinsänderungsrisiko, Wechselkursänderungen, volatile Aktienkurse) und Kreditrisiken bei Kapitalanlagen sind zu berücksichtigen, als auch die rein versicherungstechnischen Risiken (Schadeneintritt und -höhe). Die Risiken in ihrer Gesamtheit können durch einen Cash-Flow Ansatz angemessen dargestellt werden. Mit seiner Hilfe lassen sich die Barwerte künftiger Geschäftsstrategien unter verschiedenen Simulationen berechnen. Valuation Portfolio ist ein Instrument, welches die Darstellung dieser Bewertungen nicht nur vereinfacht, sondern auch die Berechnung eines Sicherheitsfaktors ermöglicht. Die frühzeitige Erkennung der Risiken kann ausschlaggebend sein für den wirtschaftlichen Erfolg des gesamten Unternehmens.

Wettbewerb untereinander und steigende Ansprüche der Kunden schaffen die Notwendigkeit in der Versicherungsbranche, immer schneller neue und innovative Produkte zu entwickeln. Das Markt- und Produktumfeld wird zunehmend vielfältiger und umfangreicher. Nicht nur von Kunden und Anteilseignern, auch von staatlichen Aufsichtsbehörden werden wachsende Anforderungen an das Risikomanagement gestellt (MaRisk, Solvency II).
In diesem Sinn gilt es, stetig weitere Optimierungspotentiale für den methodischen und organisatorischen Ausbau des Risikomanagements zu schaffen, mit dem Ziel, zuverlässige Aussagen zum Gesamtrisikoumfang und zum Eigenkapitalbedarf zu machen.

Im versicherungsmathematischen Bereich findet ALM Berücksichtigung vorwiegend bei der Entwicklung neuer Versicherungsprodukte. Geeignete mathematische Modelle erlauben sowohl die Tarifierung einschließlich der Kalkulation der erforderlichen Rückstellungen, als auch die Betrachtung der Gewinnerwartungen des Unternehmens.

Projektionsrechnungen (wenn-dann Aussagen) ermöglichen

- die Prüfung der Produktgestaltung,
- die Anpassung der Vermarktungsstrategie am Markt,
- eine höhere Effizienz bei geringeren Kosten, das heißt Verbesserung der Abschluss- und Verwaltungskostensituation,
- die Risikoerkennung und -bewertung,
- eine stete Weiterentwicklung des Produkts,
- Profitabilitätsuntersuchungen.

Dieses bildet die Grundlage für die Prüfung des Bestandsgeschäfts und für eine Einschätzung des künftigen Neugeschäfts[1].

[1] Siehe [Füh10] Seite 51.

5. Glossar

$\mathcal{Z}$	Menge der nicht-negativen Zufallsvariablen.
$E[X]$	Erwartungswert von X.
$Var[X]$	Varianz von X.
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen.
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen.
$\widehat{\nu}_j$	age-to-age Schätzer für j-jährige Kumulative Spätschäden, siehe (1.5).
$VaR_\alpha(X)$	*Value at Risk* von X zum Niveau alpha, siehe (1.13).
$ES_\alpha(X)$	*Expected Shortfall* von X zum Niveau alpha, siehe (1.14).
$\mathbf{Z}^{(t)}$	Zero-Coupon Bond mit Auszahlung 1 im Zeitpunkt t, siehe Beispiel 1.2.8.
$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	Normalverteilung mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2.
$\mathcal{LN}(\mu, \sigma^2)$	Lognormalverteilung, $Y = \exp\{X\}$ mit $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Literaturverzeichnis

[ADEH99] Artzner, P. ; Delbaen, F. ; Eber, J. ; Heath, D.: Coherent Measures of Risk. Blackwell Publishers, 1999

[AM02] Albrecht, Peter ; Maurer, Raimond: Investment- und Risikomanagement. Schäffer-Poeschel Verlag Stuttgart, 2002

[Büh04] Bühlmann, Hans: Multidimensional valuation. In: Finance 25 (2004), S. 15–29

[Bil86] Billingsley, Patrick: Probability and measure. Wiley, 1986

[BS73] Black, F. ; Scholes, M.: The Pricing of Options and Corporate Liabilities. In: Journal of Political Economy 81 (1973), S. 637–654

[BS08] Bitz, Michael ; Stark, Gunnar: Finanzdienstleistungen. Oldenbourg Verlag München Wien, 2008

[CK07] Cramer, Erhard ; Kamps, Udo: Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik. Springer, 2007

[Coc01] Cochrane, J.H.: Asset Pricing. Princeton und Oxford : Princeton University Press, 2001

[Duf92] Duffie, Darell: Dynamic Asset Pricing Theory. Princeton University Press, 1992

[EP05] Eling, Martin ; Parnitzke, Thomas: Asset Lability Management in Finanzdienstleistungsunternehmen. Working Papers on Risk Management and Insurance, No. 6, April 2005

[Füh10] Führer, Christian: Asset Liability Management in der Lebensversicherung. VVW, 2010

[FS04] Föllmer, Hans ; Schied, Alexander: Stochastic Finance, An Introduction in Discrete Time. 2nd Edition. de Gruyter, 2004

[GS94] Gerber, H.U. ; Shiu, E.S.W.: Option Pricing by Esscher transforms. In: Transaction of Society of Actuaries 46 (1994), S. 99–140

[Har66] Harnek, R.F.: Formula Loss Reserve. Insurance Accounting and Statistical Association Proceedings, 1966

[HBH96] Hart, D.G. ; Buchanan, R.A. ; Howe, B.A: The Actuarial Practice of General Insurance. Institute of Actuaries of Australia, 1996

[Hul97] Hull, John C.: Options, Futures, and Other Derivatives. 3rd edition. Prentice Hall, 1997. – ISBN 0–13–186479–3

[KPW98] Klugman, Stuart A. ; Panjer, Harry H. ; Willmot, Gordon E.: Loss Models, From Data to Decisions. John Wiley & Sons, Inc., 1998

[Kre85] Kremer, E.: Einführung in die Versicherungsmathematik. Vandenhoek & Ruprecht, 1985

[LL91] Lamberton, D. ; Lapeyre, B.: Introduction au Calcul Stochastique appliqué à la Finance, Mathématiques et applications. SMAI no. 9, 1991

[Mac91] Mack, Thomas: A Simple Parametric Model for Rating Automobile Insurance or Estimating IBNR Claims Reserves. In: ASTIN Bulletin (1991), Nr. 21, S. 93–109

[Mac93] Mack, Thomas: Distribution-free calculation of the standard error of chain ladder reserve estimates. In: ASTIN Bulletin 23/2 (1993), S. 213–225

[Mac02] Mack, Thomas: Schadenversicherungsmathematik. VVW Karlsruhe, 2002

[Mar70] Markowitz, Harry M.: Portfolio Selection, Efficient Diversification of Investment. 2nd Edition. Cowles Foundation Monograph, 1970

[Mar78] Margrabe, William: The value of an option to exchange one asset for another. In: Journal of Finance 33 (1978), Nr. 1, S. 177–186

[MTW07] Malamud, S. ; Trubowitz, E. ; Wüthrich, M.V.: Market consistent pricing of insurance products. Preprint. ETH Zürich, 2007

[Pfe09] Pfeifer, Dietmar: Risikotheorie. Vorlesungsskript, Oktober 2009

[Pou09] Poulsen, Rolf: The Margrabe Formula / Centre for Finance, University of Gothenburg. 2009. – Forschungsbericht

[Sch06] Schmidt, Klaus D.: Versicherungsmathematik. 2. Auflage. Springer, 2006

[Smi95] Smink, Meije: Asset-Liability Management in Life Insurance, Towards a Theory of Liability Driven Investment Management. 1995

[SST06] Swiss Solvency Test. www.bpv.admin.ch/themen/00506/00552, October 2006. – BPV SST Technisches Dokument

[SST08] Swiss Solvency Test 08. http://www.finma.ch/, 2008. – BPV SST Technisches Dokument

[TA83] Taylor, G.C. ; Ashe, F.R.: Second moments of estimates of outstanding claims. In: J. Econometrics 23 (1983), S. 37–61

[Tay00] Taylor, Greg: Loss Reserving, An Actuarial Perspective. Kluwer Academic Publishers, 2000

[Ver90] Verall, R.J.: Bayes and empirical Bayes estimation for the chain ladder model. In: ASTIN Bulletin 20 (1990), S. 217–243

[Ver91] Verall, R.J.: On the estimation of reserves from loglinear models. In: Insurance: Math. Econom. 10 (1991), S. 75–80

[VVG08] Gesetz über den Versicherungsvertrag. http://www.gesetze-im-internet.de/vvg_2008, 2008

[WBF07] Wüthrich, Mario V. ; Bühlmann, Hans ; Furrer, Hansjörg: Market-Consistent Actuarial Valuation. Springer, 2007

[Zwi04] Zwiesler, Hans-Joachim: Asset-Liability-Management - die Versicherung auf dem Weg von der Planungswirtschaft zum Risikomanagement, aus Zwiesler: Versicherungen im Umbruch, S. 117-131. Heidelberg : Springer, 2004

Anhang

A. Sätze

A.1. Gesetz vom iterierten Logarithmus

Satz A.1. *Gesetz vom iterierten Logarithmus*
Sei $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen, identisch verteilten, quadratisch integrierbaren Zufallsvariablen. Gelte zudem

$$\begin{aligned} E[X_n] =& \mu \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} \\ Var[X_n] =& \sigma^2 > 0. \end{aligned}$$

Dann gilt mit $\sigma = |\sigma| = \sqrt{\sigma^2}$:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(X_k-\mu)}{\sqrt{2n\ln\ln n}} = \sigma \text{ fast sicher,} \tag{5.1}$$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(X_k-\mu)}{\sqrt{2n\ln\ln n}} = -\sigma \text{ fast sicher.} \tag{5.2}$$

A.2. Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

Satz A.2. *Cauchy-Schwarzsche Ungleichung*
Seien $(a_1, \ldots, a_n)$ und $b_1, \ldots, b_n$ Punkte in $\mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k)^2 \leq (\sum_{k=1}^{n} a_k^2)(\sum_{k=1}^{n} b_k^2).$$

A.3. Jensen's Ungleichung

Satz A.3. *Jensen's Ungleichung*
Sei f eine konvexe Funktion, X eine Zufallsvariable. Dann gilt

$$f(E[X]) \leq E[f(X)]$$

B. Maple-Worksheets

B.1. Maple-Worksheet zu Lebensversicherungen

```
restart:
#CRR - Modell Annahmen
Up := 1.2:
Down := 0.8:
p_up := 0.4:
i_garantie := i_bank:
i_bank := 0.04:
x := 65: #Startalter der Versicherung
Anfangsbestand := 1000: #Anfangsbestand
r := 5: #Laufzeit
Sterbetafel := DAV2008Tm: #Daten aus Sterbetafeln nutzen?
    DAV2008Tm, DAV2008Tm, Basis
#Sterbetafel 2. Ordnung
if Sterbetafel = DAV2008Tm then
#Nach DAV2008 T Männlich, 2. Ordnung
l := Vector (115, [995.438, 995.123441592,
    994.868689990952, 994.664741909504, 994.501616891831,
    994.366364671934, 994.251018173632, 994.147616067742,
    994.052177896599, 993.959731044055, 993.864310909875,
    993.757967428607, 993.629772650809, 993.464830108549,
    993.240307056944, 992.93140932145, 992.518349855172,
    991.993307648099, 991.36438389105, 990.659523814103,
    989.911575873624, 989.156273341232, 988.4153952925,
    987.704724623284, 987.03308541054, 986.402371268963,
    985.807570639088, 985.2397454784, 984.687025981186,
    984.139539994741, 983.587437712804, 983.023842110994,
    982.443858044149, 981.842602403026, 981.216186822693,
    980.560734409895, 979.869439092136, 979.134537012817,
    978.343396306911, 977.481475774764, 976.532341261787,
    975.477686333224, 974.296382855075, 972.963545403329,
    971.451560053772, 969.737919501837, 967.80620156619,
    965.651864961503, 963.272498766238, 960.66299356708,
    957.808863813193, 954.684491299434, 951.256219291178,
    947.488293406565, 943.346822076085, 938.798947046856,
    933.812985839091, 928.355782749847, 922.39481026881,
    915.887314882364, 908.776365769617, 900.974520669485,
    892.355798404761, 882.746911167538, 871.933261505736,
```

```
    859.679111448534, 845.754888880402, 829.965490859894,
    812.166050942913, 792.272855691117, 770.267477124296,
    746.193537394253, 720.245403324906, 692.735630144911,
    663.728711103853, 633.27816529583, 601.409708183648,
    568.125890703641, 533.442373202074, 497.423810721097,
    460.205566355323, 422.017708459158, 383.191235245499,
    344.157843258451, 305.404981791863, 267.457191184297,
    230.862628457697, 196.177596295584, 163.927765062957,
    134.558630602042, 108.394377674628, 85.6151908119274,
    66.2509181844673, 50.1889130779887, 37.1964589605767,
    26.9521450017853, 19.0816065705089, 13.1871265664196,
    8.88346825008886, 5.82662240789204, 3.716412050293,
    2.3021686086745, 1.38309225238225, 0.80466370914446,
    0.452614485092958, 0.245719425197631, 0.12850978506181,
    0.0646161335367136, 0.0311675920114338,
    0.0143876773270941, 0.00633988685115204,
    0.00265920214084721, 0.00105842893211071,
    0.000398423344485503, 0.000141314783938841]):
elif Sterbetafel = DAV2008Tw then
#Nach DAV2008 T Weiblich, 2. Ordnung
l := Vector(116, [996.203, 995.915097333,
    995.679065454932, 995.489886432496, 995.339567459644,
    995.218136032414, 995.118614218811, 995.033034017988,
    994.955421441335, 994.881794740148, 994.806183723748,
    994.723614810499, 994.629116067092, 994.51572834786,
    994.376496145891, 994.207452141547, 994.006622236214,
    993.777006706478, 993.536512670855, 993.292102688738,
    993.048746123579, 992.810414424509, 992.578096787534,
    992.352781559563, 992.132479242057, 991.915202229103,
    991.698964715017, 991.482774340709, 991.26365664758,
    991.040622324834, 990.810700900455, 990.568943089435,
    990.309414026345, 990.024204915106, 989.704427096918,
    989.342195276601, 988.932607607756, 988.471765012611,
    987.95479427951, 987.37782867965, 986.73504571318,
    986.019662805038, 985.221972897829, 984.330347012356,
    983.332236040486, 982.214187288107, 980.96382862769,
    979.570859991038, 978.029015457413, 976.333113144609,
    974.478080229635, 972.455063735078, 970.252453015718,
    967.858840214128, 965.264010663514, 962.456057656494,
    959.419508794588, 956.136375235493, 952.587197010619,
    948.747318019469, 944.581368546045, 940.035098419233,
```

```
    935.03599176584, 929.498708622602, 923.326837197348,
    916.419429128275, 908.675684952141, 899.997832160848,
    890.285955554001, 879.435150327708, 867.333243224049,
    853.861823290293, 838.90301800807, 821.978149619757,
    803.322533535987, 782.767919870402, 760.13261993151,
    735.208631456575, 707.779467834193, 677.659912580509,
    644.731062108397, 608.98781675617, 570.544242847803,
    529.628803560459, 486.536085587566, 441.654591300369,
    395.504336437029, 348.794483295143, 302.413885673454,
    257.35209981091, 214.619298341508, 175.146516990538,
    139.699664295925, 108.884013847208, 82.9336868270031,
    61.677865826929, 44.7478467582294, 31.6409787035103,
    21.7836431211548, 14.5866541885721, 9.48940622899231,
    5.99053879008187, 3.66511946147031, 2.17031514958749,
    1.24207787105437, 0.68596731415868, 0.364988802550236,
    0.18677535494023, 0.0917511518101286, 0.04318029406949,
    0.0194269438427458, 0.00833602389514683,
    0.003402998362668, 0.00131805953482366,
    0.000482951512214272, 0.000166871338306324]):
else
#BasisAnnahmen
l:= Vector(x + r):
l[x] := 1000:
l[x + 1] := 995:
l[x + 2] := 988:
l[x + 3] := 978:
l[x + 4] := 965:
l[x + 5] := 949:
for i from 6 to r do
l[x + i] := l[x + i - 1] - 1;
end:
end if:
l := l / l[x] * Anfangsbestand:
#Wahrscheinlichkeiten CRR
pnr_up := proc(i_br);
    ((1 + i_br - Down) / (Up - Down));
end proc:
for k from 0 to r - 1 do
l[x + k];
d[x + k] := l[x + k] - l[x + k + 1];
q[x + k] := d[x + k] / l[x + k];
```

```
end:
#Modifizierte Sterbewahrscheinlichkeiten
#Sterbetafel 1. Ordnung
if Sterbetafel = DAV2008Tm then
#Nach DAV2008 T Männlich, 1. Ordnung, Aufschlag 34%
qs := Vector (115, [0.006113, 0.000423, 0.000343,
    0.000275, 0.00022, 0.000182, 0.000155, 0.000139,
    0.000129, 0.000125, 0.000129, 0.000143, 0.000173,
    0.000222, 0.000303, 0.000417, 0.000557, 0.000709,
    0.00085, 0.000953, 0.001012, 0.001022, 0.001004,
    0.000963, 0.000911, 0.000856, 0.000808, 0.000772,
    0.000752, 0.000745, 0.000752, 0.000768, 0.000791,
    0.00082, 0.000855, 0.000895, 0.000945, 0.001005,
    0.001083, 0.001181, 0.001301, 0.001447, 0.001623,
    0.001833, 0.002082, 0.002364, 0.002669, 0.002983,
    0.003302, 0.00363, 0.003981, 0.004371, 0.004812,
    0.005308, 0.005857, 0.00646, 0.007117, 0.007831,
    0.008604, 0.009454, 0.010404, 0.011504, 0.012818,
    0.014429, 0.016415, 0.018832, 0.021704, 0.025016,
    0.028738, 0.032822, 0.037219, 0.04188, 0.046597,
    0.051181, 0.05611, 0.061477, 0.067433, 0.07416,
    0.081806, 0.090478, 0.100261, 0.111193, 0.123283,
    0.136498, 0.150887, 0.1665, 0.183344, 0.201323,
    0.220284, 0.240073, 0.260556, 0.281602, 0.303079,
    0.324872, 0.346887, 0.369051, 0.391305, 0.413938,
    0.437313, 0.461101, 0.485304, 0.509924, 0.534957,
    0.560407, 0.586265, 0.612529, 0.639188, 0.666233,
    0.693651, 0.721425, 0.749533, 0.77795, 0.806647,
    0.835585, 0.864722]):
elif Sterbetafel = DAV2008Tw then
#Nach DAV2008 T Weiblich, 1. Ordnung, Aufschlag 34%
qs := Vector (116, [0.005088, 0.000387, 0.000318,
    0.000255, 0.000202, 0.000163, 0.000134, 0.000115,
    0.000105, 0.000099, 0.000102, 0.000111, 0.000127,
    0.000153, 0.000188, 0.000228, 0.000271, 0.00031,
    0.000324, 0.00033, 0.000328, 0.000322, 0.000314,
    0.000304, 0.000297, 0.000293, 0.000292, 0.000292,
    0.000296, 0.000302, 0.000311, 0.000327, 0.000351,
    0.000386, 0.000433, 0.00049, 0.000555, 0.000624,
    0.000701, 0.000783, 0.000872, 0.000972, 0.001084,
    0.001213, 0.001359, 0.001524, 0.001706, 0.001903,
```

```
    0.002109, 0.002324, 0.002546, 0.002782, 0.003035,
    0.003306, 0.003593, 0.003898, 0.004228, 0.004585,
    0.004974, 0.005402, 0.005884, 0.006449, 0.007126,
    0.007935, 0.008898, 0.010025, 0.011323, 0.012797,
    0.01446, 0.016332, 0.01844, 0.020813, 0.023475,
    0.027035, 0.030413, 0.034287, 0.038749, 0.043937,
    0.049993, 0.057024, 0.065113, 0.074288, 0.08459,
    0.096095, 0.109028, 0.123611, 0.140022, 0.158257,
    0.178185, 0.199669, 0.222504, 0.246453, 0.271195,
    0.295584, 0.319362, 0.343441, 0.367818, 0.392493,
    0.41746, 0.442716, 0.468258, 0.494075, 0.520164,
    0.546514, 0.573114, 0.599953, 0.627014, 0.654283,
    0.681741, 0.709364, 0.73713, 0.765011, 0.792974,
    0.820987, 0.849009, 0.876998]):
else
#Basisannahmen
for k from 0 to r - 1 do
qs[x + k] := 1 - (1 - q[x + k])^2;
#qs[x + k] := q[x + k];
end:
end if:
#Faktoren
a[0] := l[x]:
for k from 1 to r - 1 do
a[k] := - l[x + k - 1] * (qs[x + k - 1] - q[x + k - 1]) +
    l[x + k] * (1 - add(l[j - 1] * (qs[j - 1] - q[j - 1]) /
    l[j], j = x + 1..x + k - 1));
end:
for k from 0 to r - 1 do
b[k + 1] := l[x + k] * (qs[x + k] - q[x + k]) + d[x + k] *
    (1 - add(l[j - 1] * (qs[j - 1] - q[j - 1]) / l[j], j =
    x + 1..x + k));
end:

Z := proc(k, i_br)
    (1 / (1 + i_br)^(k));
end proc:
Putr := proc(k, i_br, i_gr)
    local j;
    sum(binomial(k, j) * p_up^j * (1 - p_up)^(k - j) *
        max((1 + i_gr)^(k) - Up^j * Down^(k - j), 0), j =
```

```
        0..k) * Z(k, i_br);
end proc:
Putnr := proc(k, i_br, i_gr)
    local j;
    sum(binomial(k, j) * pnr_up(i_br)^j * (1 -
        pnr_up(i_br))^(k - j) * max((1 + i_gr)^(k) - Up^j *
        Down^(k - j), 0), j = 0..k) * Z(k, i_br);
end proc:
#Prämien
Pifact := proc(i_br)
    local j;
 - sum(a[j] * Z(j, i_br), j = 0..r - 1);
end proc:
Putfactr := proc(i_br, i_gr)
    local j;
    sum(b[j] * Putr(j, i_br, i_gr), j = 1..r);
end proc:
Putfactnr := proc(i_br, i_gr)
    local j;
    sum(b[2] * Putnr(j, i_br, i_gr), j = 1..r);
end proc:
Ifact := l[x]:
Premiumr := proc(i_br, i_gr)
 - (Putfactr(i_br, i_gr) + Ifact) / Pifact(i_br);
end proc:
Premiumnr := proc(i_br, i_gr)
 - (Putfactnr(i_br, i_gr) + Ifact) / Pifact(i_br);
end proc:
"Prämie" = Premiumr(i_bank, i_garantie);
"Risikoneutrale Prämie" = Premiumnr(i_bank, i_garantie);
#Erwartungswertprämien-delta
delta := 0:
#Erwartungs-Prämien
EWPremium1xr := proc(i_br, i_gr)
    local j;
    (1 + delta) * (sum(d[x + j - 1] * Putr(j, i_br, i_gr),
        j = 1..r) + Ifact) / l[x];
end proc:
EWPremiumrxr := proc(i_br, i_gr)
    local j;
    EWPremium1xr(i_br, i_gr) / sum(Z(j, i_br), j = 0..r -
```

```
        1);
end proc:
EWPremium1xnr := proc(i_br, i_gr)
    local j;
    (1 + delta) * (sum(d[x + j - 1] * Putnr(j, i_br,
        i_gr), j = 1..r) + Ifact) / l[x];
end proc:
EWPremiumrxnr := proc(i_br, i_gr)
    local j;
    EWPremium1xnr(i_br, i_gr) / sum(Z(j, i_br), j = 0..r -
        1);
end proc:
"Erwartungswert - Prämie" = EWPremiumrxr(i_bank,
    i_garantie);
"Risikoneutrale Erwartungswert - Prämie" =
    EWPremiumrxnr(i_bank, i_garantie);
#Prämien bei variablem Bankzinssatz
plot([Premiumr(i_br, i_br), Premiumnr(i_br, i_br),
    EWPremiumrxr(i_br, i_br), EWPremiumrxnr(i_br, i_br)],
    i_br = 0..(Up - 1), linestyle = [1, 2, 3, 4], color =
    [red, blue, green, magenta], labels = ["Zins",
    "Prämie"], legend = ["CRR Prämie", "CRR Prämie
    risikoneut.", "EW Prämie", "EW Prämie risikoneut."],
    title = "Prämie bei variablem Zinssatz");
```

B.2. Maple-Worksheet zu Sachversicherungen

```
restart;
with(stats):
with(LinearAlgebra):
Jahre := 10: # Anzahl beobachtete Jahre
interestrate := 0.04: #Zinssatz
useSST08 := 0: # 1 = yes, 0 = no
useParamVar := true: # Nutze Prozss - Varianz? true = ja, false = nein
cocrate := 0.06: #Cost of Capital
beta := stats[statevalf, icdf, normald](.99):
#Chain-Ladder Einzelschäden:
CLE := Matrix(Jahre, Jahre, [
[357848, 766940, 610542, 482940, 527326, 574398, 146342, 139950, 227229, 67948],
[352118, 884021, 933894, 1183289, 445745, 320996, 527804, 266172, 425046],
[290507, 1001799, 926219, 1016654, 750816, 146923, 495992, 280405],
[310608, 1108250, 776189, 1562400, 272482, 352053, 206286],
[443160, 693190, 991983, 769488, 504851, 470639],
[396132, 937085, 847498, 805037, 705960],
[440832, 847631, 1131398, 1063269],
[359480, 1061648, 1443370],
[376686, 986608],
[344014]
]):
#Chain-Ladder Kumulschäden
CLK:= Matrix(Jahre):
for i from 1 to Jahre do
        CLK[i, 1]:= CLE[i, 1];
        for j from 2 to Jahre - i + 1 do
                CLK[i, j]:= CLK[i, j - 1] + CLE[i, j];
        end:
end:
#Age to Age Schätzer
agetoage := Vector(Jahre - 1):
ataf1 := proc(x, k)
    if (x <= Jahre - k) then 1 else 0 end;
end proc:
```

```
ataf2 := proc(x, k)
    if (x = k + 1) then 1 else 0 end;
end proc:
ataf3 := proc(x, k)
    if (x = k) then 1 else 0 end;
end proc:
for i from 1 to Jahre - 1 do
        agetoage[i] :=
            Multiply(Multiply(convert(['ataf1(n, i)'$ n =
            1..Jahre], Vector[row]), CLK),
            convert(['ataf2(n, i)'$ n = 1 .. Jahre],
            Vector)) / Multiply(Multiply(convert(['ataf1(n,
            i)'$ n = 1 .. Jahre], Vector[row]), CLK),
            convert(['ataf3(n, i)'$ n = 1 .. Jahre],
            Vector));
end:
#Sigma^2 Schätzer
sigma2 := Vector(Jahre - 1):
for j from 1 to Jahre - 2 do
        s3:= 0;
        for i from 1 to Jahre - j do
                s3:= s3 + CLK[i, j] * (CLK[i, j + 1] /
                    CLK[i, j] - agetoage[j])^2;
        end;
        sigma2[j] := 1 / (Jahre - j - 1) * s3;
end:
sigma2[Jahre - 1] := min(sigma2[Jahre - 2]^2 /
    sigma2[Jahre - 3], sigma2[Jahre - 2], sigma2[Jahre -
    3]):
sigma:= Vector(Jahre - 1):
for j from 1 to Jahre - 1 do
        sigma[j] := sqrt(sigma2[j]);
end:
#Schätzer der Kumul - und Einzelschäden
EST := Matrix(Jahre, Jahre):
EST := CLK:
INCR := Matrix(Jahre, Jahre):
INCR := CLE:
for i from 2 to Jahre do
        for j from Jahre - i + 2 to Jahre do
                EST[i, j] := EST[i, j - 1] * agetoage[j -
```

```
                    1];
                INCR[i, j] := EST[i, j] - EST[i, j - 1];
        end;
end:

ESTAusgabe := Matrix(Jahre, Jahre):
INCRAusgabe := Matrix(Jahre, Jahre):
for i from 1 to Jahre do
        for j from 1 to Jahre do
                ESTAusgabe[i, j] := round(EST[i, j]);
                INCRAusgabe[i, j] := round(INCR[i, j]);
        end;
end:
#Zero-Coupon Bond Bewertung
#SST08EURRates
if (useSST08 = 1) then
        SST08EUR := Vector(50, [0.961048696337443,
            0.924840757514957, 0.887587422239571,
            0.851164551394, 0.816417176675938,
            0.780627068839518, 0.745949549913403,
            0.713716391852216, 0.683603377517643,
            0.652743456046361, 0.621785513159966,
            0.591363112037078, 0.561792519589522,
            0.533461015350894, 0.506737520569962,
            0.4819150577943, 0.458909956076802,
            0.437534219177183, 0.417567364555771,
            0.398781069354197, 0.380971588620372,
            0.36405887700221, 0.347995849803491,
            0.332736082202051, 0.3182354844841,
            0.304447712985643, 0.29133120758771,
            0.278844862264626, 0.266950651436242,
            0.255607753778376, 0.244762637308024,
            0.23438204670026, 0.224444599880059,
            0.214926565372554, 0.205809158667565,
            0.197073469530614, 0.188702492370286,
            0.180677595898579, 0.172983787336497,
            0.165606020670343, 0.158530599442243,
            0.151742941821548, 0.145230918248732,
            0.138982476031134, 0.132986445522519,
            0.127231450153866, 0.121707555542841,
            0.116405028270343, 0.111314636733992,
```

```
            0.106427564765084]):
        Z := proc(interest, k)
                SST08EUR[k];
        end proc:
else
        Z := proc(interest, k)
                1 / (1 + interest)^k;
        end proc:
end if:
#Schätzen des Neuvertrages
Ypro := Vector(Jahre):
Xpro := Vector(Jahre):
Yrec := Vector(Jahre):
Xrec := Vector(Jahre):
Xproround := Vector(Jahre):
Xrecround := Vector(Jahre):

Year1Taker := proc(x)
    max(2 - x, 0);
end proc:
Xpro[1] := Multiply(Transpose(Vector(Jahre, 1 / Jahre)),
    Multiply(INCR, Vector(Jahre, Year1Taker))):
Ypro[1] := Xpro[1]:
Xpro[2] := Xpro[1] * (agetoage[1] - 1):
Ypro[2] := Ypro[1] + Xpro[2]:
ffact:= 1:
for i from 3 to Jahre do
        ffact := ffact * agetoage[i - 2]:
        Xpro[i] := Xpro[1] * ffact * (agetoage[i - 1] - 1);
        Ypro[i] := Ypro[i - 1] + Xpro[i]:
end:

Yrec[Jahre] := 0:
mus := 0:
sigs2 := 0:
for i from 1 to Jahre do
        mus := mus + ln(EST[i, Jahre]) / Jahre;
end:
for i from 1 to Jahre do
        sigs2 := sigs2 + (ln(EST[i, Jahre]) - mus)^2 /
            (Jahre - 1);
```

```
end:
Yrec[Jahre] := exp(mus + sigs2 / 2):
for i from 1 to Jahre - 1 do
        Yrec[Jahre - i] := Yrec[Jahre - i + 1] / agetoage[Jahre - i];
        Xrec[Jahre - i + 1] := Yrec[Jahre - i + 1] - Yrec[Jahre - i];
end:
Xrec[1] := Yrec[1]:

for i from 1 to Jahre do
        Xproround[i] := round(Xpro[i]);
        Xrecround[i] := round(Xrec[i]);
end:
#Kumule Prozess-Varianz des Neuvertrages
Wpro := Vector(Jahre):
Wrec := Vector(Jahre):

Var1pro := DotProduct(Multiply(CLE, Vector(Jahre, Year1Taker)) - Vector(Jahre, Xpro[1]), Multiply(CLE, Vector(Jahre, Year1Taker)) - Vector(Jahre, Xpro[1])) / (Jahre - 1):
Var1rec := exp(2 * (mus + ln(1 / Multiply(Transpose(Vector(Jahre - 1, 1)), agetoage))) + sigs2) * (exp(sigs2) - 1):

for i from 1 to Jahre do
        s5pro := Var1pro / Xpro[1]^2 + add(sigma2[m] / agetoage[m]^2 / Ypro[m], m = 1..i - 1):
        s5rec := Var1rec / Xrec[1]^2 + add(sigma2[m] / agetoage[m]^2 / Yrec[m], m = 1..i - 1):
        Wpro[i] := Ypro[i]^2 * s5pro;
        Wrec[i] := Yrec[i]^2 * s5rec;
end:
#Einzel Prozess-Varianz des Neuvertrages
Vpro := Vector(Jahre):
Vrec := Vector(Jahre):
Vpro12Aus := Vector(Jahre):
Vrec12Aus := Vector(Jahre):
Vpro[1] := Wpro[1]:
Vrec[1] := Wrec[1]:
```

```
Vpro12Aus[1] := round(evalf(Vpro[1]^(1 / 2))):
Vrec12Aus[1] := round(evalf(Vrec[1]^(1 / 2))):
for i from 2 to Jahre do
        Vpro[i] := Wpro[i] + (1 - 2 * agetoage[i - 1]) *
            Wpro[i - 1];
        Vrec[i] := Wrec[i] + (1 - 2 * agetoage[i - 1]) *
            Wrec[i - 1];
        Vpro12Aus[i] := round(evalf(Vpro[i]^(1 / 2)));
        Vrec12Aus[i] := round(evalf(Vrec[i]^(1 / 2)));
end:
#Parameter-Varianz
ParamVarPro := Vector(Jahre, 0):
ParamVarRec := Vector(Jahre, 0):
ParamVarPro12Aus := Vector(Jahre, 0):
ParamVarRec12Aus := Vector(Jahre, 0):

if (useParamVar) then
        ParamVarPro[1] := Var1pro:
        ParamVarRec[1] := Var1rec:
        ParamVarPro12Aus[1] :=
            round(evalf(ParamVarPro[1]^(1 / 2))):
        ParamVarRec12Aus[1] :=
            round(evalf(ParamVarRec[1]^(1 / 2))):
        ata2sig2vec :=
            Multiply(Multiply(Transpose(Vector(Jahre - 1,
            1)), DiagonalMatrix(sigma2)),
            MatrixInverse(Multiply(DiagonalMatrix(agetoage),
            DiagonalMatrix(agetoage)))):
        AddCLKVec := Vector(Jahre - 1):
        for i from 1 to Jahre - 1 do
                AddCLKVec[i] :=
                    Multiply(Multiply(convert(['ataf1(n,
                    i)'$ n = 1 .. Jahre], Vector[row]),
                    CLK), convert(['ataf3(n, i)'$ n = 1 ..
                    Jahre], Vector)):
        end:
        AddCLKdiag := DiagonalMatrix(AddCLKVec):
        FactVec := Multiply(ata2sig2vec,
            MatrixInverse(AddCLKdiag)):
        for j from 2 to Jahre do
                ParamVarPro[j] := Xpro[j]^2 *
```

```
                    (add(FactVec[k], k = 1..j - 2) +
                    sigma2[j - 1] / (agetoage[j - 1] - 1)^2
                    / AddCLKVec[j - 1]):
                ParamVarRec[j] := Xrec[j]^2 *
                    (add(FactVec[k], k = 1..j - 2) +
                    sigma2[j - 1] / (agetoage[j - 1] - 1)^2
                    / AddCLKVec[j - 1]):
                ParamVarPro12Aus[j] :=
                    round(evalf(ParamVarPro[j]^(1 / 2))):
                ParamVarRec12Aus[j] :=
                    round(evalf(ParamVarRec[j]^(1 / 2))):
        end:
end if:
#Variations-Koeffizienten
VCorec := Vector(Jahre):
VCopro := Vector(Jahre):
VCorecAus := Vector(Jahre):
VCoproAus := Vector(Jahre):
for i from 1 to Jahre do
        VCorec[i] := sqrt(Vrec[i] + ParamVarRec[i]) /
            Xrec[i];
        VCopro[i] := sqrt(Vpro[i] + ParamVarPro[i]) /
            Xpro[i];
        VCorecAus[i] := evalf[4](round(evalf(VCorec[i]) *
            10000) / 100);
        VCoproAus[i] := evalf[4](round(evalf(VCopro[i]) *
            10000) / 100);
end:
#Jährliche Sicherheitszuschläge
Safefactpro := Vector(Jahre):
Safefactrec := Vector(Jahre):
Safepro := Vector(Jahre):
Saferec := Vector(Jahre):
for i from 1 to Jahre do
        Safefactpro[i] := cocrate * beta * sqrt(Vpro[i] +
            ParamVarPro[i]):
        Safefactrec[i] := cocrate * beta * sqrt(Vrec[i] +
            ParamVarRec[i]):
        Safepro[i] := round(evalf(Safefactpro[i])):
        Saferec[i] := round(evalf(Safefactrec[i])):
end:
```

```
#Prämien
ProgPremium := proc(interest)
    Multiply(convert(['Z(interest, n)'$ n = 1 .. Jahre], Vector[row]), Xpro);
end proc:
Premium := proc(interest)
    Multiply(convert(['Z(interest, n)'$ n = 1 .. Jahre], Vector[row]), Xrec);
end proc:
ProgPremiumProt := proc(interest)
    Multiply(convert(['Z(interest, n)'$ n = 1 .. Jahre], Vector[row]), Xpro + Safefactpro);
end proc:
PremiumProt := proc(interest)
    Multiply(convert(['Z(interest, n)'$ n = 1 .. Jahre], Vector[row]), Xrec + Safefactrec);
end proc:
#Ausgaben
"agetoage" = evalf[5](Transpose(agetoage));
"sigma" = evalf[5](Transpose(sigma));
ESTAusgabe:
INCRAusgabe:

"LogNorm - mu" = evalf(mus);
"LogNorm - sigma" = evalf(sqrt(sigs2));

"ZeroBonds" = convert(['Z(interest, n)'$ n = 1 .. Jahre], Vector[row]);
"Rekursive Annahmen" = Transpose(Xrecround);
"Progressive Annahmen" = Transpose(Xproround):
"DachV_k^(0)^(1 / 2)" = Transpose(Vrec12Aus);
"Progressive DachV_k^(0)^(1 / 2)" = Transpose(Vpro12Aus):
"SchlangeV_k^(0)^(1 / 2)" = Transpose(ParamVarRec12Aus);
"Progressive SchlangeV_k^(0)^(1 / 2)" = Transpose(ParamVarPro12Aus):
"VCo" = Transpose(VCorecAus);
"VCoPro" = Transpose(VCoproAus):
"Sicherheitszuschläge" = Transpose(Saferec);
"Progressive Sicherheitszuschläge" = Transpose(Safepro):
"Prämie" = round(evalf(Premium(interestrate)));
"Progressive Prämie" =
```

```
round(evalf(ProgPremium(interestrate))):
"Geschützte Prämie" = round(evalf(PremiumProt(interestrate)));
"Progressive Geschützte Prämie" = round(evalf(ProgPremiumProt(interestrate))):
"Verhältnis" = evalf(PremiumProt(interestrate) / Premium(interestrate));
"Progressives Verhältnis" = evalf(ProgPremiumProt(interestrate) / ProgPremium(interestrate)):
#Prämie bei variablem Zins:
plot([evalf(Premium(interest)), evalf(PremiumProt(interest))], interest = 0..0.1, linestyle = [1, 2], color = [red, blue], labels = ["Zins", "Prämie"], legend = ["Prämie", "Geschützte Prämie"], title = "Prämie bei variablem Zins");
```

C. Tabellen

Folgende Sterbetafeln sind auf der Website der
Deutschen Aktuarvereinigung e.V. (DAV) http://www.aktuar.de zu finden.

C.1. Tabelle DAV2008T R/NR m

Tabelle C.1.: DAV2008T R/NR m

Alter	Raucher-anteil	Sterblichkeit 2. Ordnung			Sterblichkeit 1. Ordnung		
		Aggregat	Nichtraucher	Raucher	Aggregat (Zuschlag 34%)	Nichtraucher (Zuschlag 45%)	Raucher (Zuschlag 45%)
0	0.0%	0.004562	0.004562	0.004562	0.006113	0.006113	0.006615
1	0.0%	0.000316	0.000316	0.000316	0.000423	0.000423	0.000458
2	0.0%	0.000256	0.000256	0.000256	0.000343	0.000343	0.000371
3	0.0%	0.000205	0.000205	0.000205	0.000275	0.000275	0.000297
4	0.0%	0.000164	0.000164	0.000164	0.000220	0.000220	0.000238
5	0.0%	0.000136	0.000136	0.000136	0.000182	0.000182	0.000197
6	0.0%	0.000116	0.000116	0.000116	0.000155	0.000155	0.000168
7	0.0%	0.000104	0.000104	0.000104	0.000139	0.000139	0.000151
8	0.0%	0.000096	0.000096	0.000098	0.000129	0.000129	0.000142
9	0.0%	0.000093	0.000093	0.000096	0.000125	0.000125	0.000139
10	0.0%	0.000096	0.000096	0.000101	0.000129	0.000129	0.000146
11	0.0%	0.000107	0.000107	0.000114	0.000143	0.000143	0.000165
12	0.0%	0.000129	0.000129	0.000139	0.000173	0.000173	0.000202
13	0.0%	0.000166	0.000166	0.000182	0.000222	0.000222	0.000264
14	0.0%	0.000226	0.000226	0.000250	0.000303	0.000303	0.000363
15	4.6%	0.000311	0.000309	0.000346	0.000417	0.000417	0.000502
16	11.2%	0.000416	0.000410	0.000461	0.000557	0.000557	0.000668
17	16.8%	0.000529	0.000518	0.000585	0.000709	0.000709	0.000848
18	21.6%	0.000634	0.000617	0.000696	0.000850	0.000850	0.001009
19	25.5%	0.000711	0.000689	0.000776	0.000953	0.000953	0.001125
20	28.6%	0.000755	0.000730	0.000818	0.001012	0.001012	0.001186
21	30.8%	0.000763	0.000737	0.000821	0.001022	0.001022	0.001190
22	32.3%	0.000749	0.000724	0.000802	0.001004	0.001004	0.001163
23	33.0%	0.000719	0.000694	0.000770	0.000963	0.000963	0.001117
24	33.2%	0.000680	0.000654	0.000732	0.000911	0.000911	0.001061
25	33.0%	0.000639	0.000610	0.000698	0.000856	0.000856	0.001012
26	32.6%	0.000603	0.000568	0.000675	0.000808	0.000808	0.000979
27	32.2%	0.000576	0.000533	0.000666	0.000772	0.000772	0.000966
28	31.7%	0.000561	0.000508	0.000675	0.000752	0.000737	0.000979
29	31.4%	0.000556	0.000491	0.000699	0.000745	0.000712	0.001014
30	31.1%	0.000561	0.000482	0.000737	0.000752	0.000699	0.001069
31	31.0%	0.000573	0.000479	0.000783	0.000768	0.000695	0.001135
32	30.9%	0.000590	0.000481	0.000835	0.000791	0.000697	0.001211
33	30.8%	0.000612	0.000487	0.000892	0.000820	0.000706	0.001293
34	30.8%	0.000638	0.000498	0.000953	0.000855	0.000722	0.001382
35	30.8%	0.000668	0.000512	0.001019	0.000895	0.000742	0.001478
36	30.8%	0.000705	0.000531	0.001095	0.000945	0.000770	0.001588
37	30.8%	0.000750	0.000557	0.001183	0.001005	0.000808	0.001715
38	30.9%	0.000808	0.000592	0.001292	0.001083	0.000858	0.001873
39	31.0%	0.000881	0.000636	0.001426	0.001181	0.000922	0.002068
40	31.1%	0.000971	0.000691	0.001590	0.001301	0.001002	0.002306
41	31.3%	0.001080	0.000758	0.001786	0.001447	0.001099	0.002590
42	31.5%	0.001211	0.000839	0.002021	0.001623	0.001217	0.002930
43	31.7%	0.001368	0.000935	0.002300	0.001833	0.001356	0.003335
44	31.7%	0.001554	0.001052	0.002635	0.002082	0.001525	0.003821
45	31.7%	0.001764	0.001184	0.003013	0.002364	0.001717	0.004369
46	31.4%	0.001992	0.001332	0.003434	0.002669	0.001931	0.004979
47	30.9%	0.002226	0.001488	0.003877	0.002983	0.002158	0.005622
48	30.1%	0.002464	0.001654	0.004345	0.003302	0.002398	0.006300
49	29.2%	0.002709	0.001831	0.004839	0.003630	0.002655	0.007017
50	28.3%	0.002971	0.002024	0.005371	0.003981	0.002935	0.007788
51	27.3%	0.003262	0.002244	0.005973	0.004371	0.003254	0.008661
52	26.5%	0.003591	0.002491	0.006643	0.004812	0.003612	0.009632
53	25.7%	0.003961	0.002771	0.007400	0.005308	0.004018	0.010730
54	25.1%	0.004371	0.003078	0.008228	0.005857	0.004463	0.011931
55	24.5%	0.004821	0.003418	0.009146	0.006460	0.004956	0.013262
56	23.8%	0.005311	0.003795	0.010166	0.007117	0.005503	0.014741
57	22.9%	0.005844	0.004219	0.011315	0.007831	0.006118	0.016407
58	21.9%	0.006421	0.004689	0.012596	0.008604	0.006799	0.018264
59	20.7%	0.007055	0.005227	0.014060	0.009454	0.007579	0.020387
60	19.4%	0.007764	0.005845	0.015736	0.010404	0.008475	0.022817

Alter	Raucher-anteil	Sterblichkeit 2. Ordnung			Sterblichkeit 1. Ordnung		
		Aggregat	Nichtraucher	Raucher	Aggregat (Zuschlag 34%)	Nichtraucher (Zuschlag 45%)	Raucher (Zuschlag 45%)
61	18.1%	0.008585	0.006571	0.017697	0.011504	0.009528	0.025661
62	16.9%	0.009566	0.007440	0.020021	0.012818	0.010788	0.029030
63	15.9%	0.010768	0.008492	0.022809	0.014429	0.012313	0.033073
64	15.1%	0.012250	0.009777	0.026154	0.016415	0.014177	0.037923
65	14.3%	0.014054	0.011358	0.030212	0.018832	0.016469	0.043807
66	13.7%	0.016197	0.013227	0.034906	0.021704	0.019179	0.050614
67	13.2%	0.018669	0.015395	0.040197	0.025016	0.022323	0.058286
68	12.6%	0.021446	0.017891	0.046105	0.028738	0.025942	0.066852
69	12.1%	0.024494	0.020653	0.052397	0.032822	0.029947	0.075976
70	11.6%	0.027775	0.023679	0.058986	0.037219	0.034335	0.085530
71	11.0%	0.031254	0.026983	0.065811	0.041880	0.039125	0.095426
72	10.5%	0.034774	0.030367	0.072335	0.046597	0.044032	0.104886
73	10.0%	0.038195	0.033738	0.078306	0.051181	0.048920	0.113544
74	9.5%	0.041873	0.037409	0.084395	0.056110	0.054243	0.122373
75	9.1%	0.045878	0.041402	0.090588	0.061477	0.060033	0.131353
76	8.7%	0.050323	0.045866	0.097098	0.067433	0.066506	0.140792
77	8.4%	0.055343	0.050877	0.104044	0.074160	0.073772	0.150864
78	8.1%	0.061049	0.056589	0.111650	0.081806	0.081806	0.161893
79	7.9%	0.067521	0.063039	0.119774	0.090478	0.090478	0.173672
80	7.7%	0.074822	0.070338	0.128577	0.100261	0.100261	0.186437
81	7.5%	0.082980	0.078516	0.138032	0.111193	0.111193	0.200146
82	7.4%	0.092002	0.087533	0.147930	0.123283	0.123283	0.214499
83	7.3%	0.101864	0.097419	0.158306	0.136498	0.136498	0.229544
84	7.2%	0.112602	0.108215	0.169141	0.150887	0.150887	0.245254
85	7.2%	0.124254	0.119895	0.180441	0.166500	0.166500	0.261639
86	7.2%	0.136824	0.132530	0.192169	0.183344	0.183344	0.278645
87	7.1%	0.150241	0.146092	0.204529	0.201323	0.201323	0.296567
88	7.1%	0.164391	0.160372	0.216983	0.220284	0.220284	0.314625
89	7.1%	0.179159	0.175288	0.229803	0.240073	0.240073	0.333214
90	7.1%	0.194445	0.190761	0.242648	0.260556	0.260556	0.351840
91	7.1%	0.210151	0.206673	0.255655	0.281602	0.281602	0.370700
92	7.1%	0.226178	0.222933	0.268635	0.303079	0.303079	0.389521
93	7.1%	0.242442	0.239433	0.281813	0.324872	0.324872	0.408629
94	7.1%	0.258871	0.256125	0.294800	0.346887	0.346887	0.427460
95	7.1%	0.275411	0.272931	0.307866	0.369051	0.369051	0.446406
96	7.1%	0.292019	0.289797	0.321095	0.391305	0.391305	0.465588
97	7.0%	0.308909	0.306997	0.334319	0.413938	0.413938	0.484763
98	7.0%	0.326353	0.324694	0.348396	0.437313	0.437313	0.505174
99	6.9%	0.344105	0.342733	0.362612	0.461101	0.461101	0.525787
100	6.8%	0.362167	0.361062	0.377310	0.485304	0.485304	0.547100
101	6.7%	0.380540	0.379675	0.392584	0.509924	0.509924	0.569247
102	6.6%	0.399222	0.398564	0.408529	0.534957	0.534957	0.592367
103	6.4%	0.418214	0.417759	0.424861	0.560407	0.560407	0.616048
104	6.2%	0.437511	0.437213	0.442022	0.586265	0.586265	0.640932
105	6.1%	0.457111	0.456916	0.460114	0.612529	0.612529	0.667165
106	5.8%	0.477006	0.477006	0.477006	0.639188	0.639188	0.691659
107	5.6%	0.497189	0.497189	0.497189	0.666233	0.666233	0.720924
108	5.3%	0.517650	0.517650	0.517650	0.693651	0.693651	0.750593
109	5.0%	0.538377	0.538377	0.538377	0.721425	0.721425	0.780647
110	4.7%	0.559353	0.559353	0.559353	0.749533	0.749533	0.811062
111	4.4%	0.580560	0.580560	0.580560	0.777950	0.777950	0.841812
112	4.0%	0.601975	0.601975	0.601975	0.806647	0.806647	0.872864
113	3.6%	0.623571	0.623571	0.623571	0.835585	0.835585	0.904178
114	3.2%	0.645315	0.645315	0.645315	0.864722	0.864722	0.935707
115	2.7%	0.667170	0.667170	0.667170	0.894008	0.894008	0.967397
116	2.2%	0.689091	0.689091	0.689091	0.923382	0.923382	0.999182
117	1.7%	0.711028	0.711028	0.711028	0.952778	0.952778	1.000000
118	1.2%	0.732920	0.732920	0.732920	0.982113	0.982113	1.000000
119	0.6%	0.754701	0.754701	0.754701	1.000000	1.000000	1.000000
120	0.0%	0.776292	0.776292	0.776292	1.000000	1.000000	1.000000
121	0.0%	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000

C.2. Tabelle DAV2008 T R/NR w

Tabelle C.2.: DAV2008T R/NR w

Alter	Raucher-anteil	Sterblichkeit 2. Ordnung			Sterblichkeit 1. Ordnung		
		Aggregat	Nichtraucher	Raucher	Aggregat (Zuschlag 34%)	Nichtraucher (Zuschlag 45%)	Raucher (Zuschlag 45%)
0	0.0%	0.003797	0.003797	0.003797	0.005088	0.005088	0.005506
1	0.0%	0.000289	0.000289	0.000289	0.000387	0.000387	0.000419
2	0.0%	0.000237	0.000237	0.000237	0.000318	0.000318	0.000344
3	0.0%	0.000190	0.000190	0.000190	0.000255	0.000255	0.000276
4	0.0%	0.000151	0.000151	0.000151	0.000202	0.000202	0.000219
5	0.0%	0.000122	0.000122	0.000122	0.000163	0.000163	0.000177
6	0.0%	0.000100	0.000100	0.000100	0.000134	0.000134	0.000145
7	0.0%	0.000086	0.000086	0.000086	0.000115	0.000115	0.000125
8	0.0%	0.000078	0.000078	0.000078	0.000105	0.000105	0.000113
9	0.0%	0.000074	0.000074	0.000075	0.000099	0.000099	0.000109
10	0.0%	0.000076	0.000076	0.000079	0.000102	0.000102	0.000115
11	0.0%	0.000083	0.000083	0.000088	0.000111	0.000111	0.000128
12	0.0%	0.000095	0.000095	0.000103	0.000127	0.000127	0.000149
13	0.0%	0.000114	0.000114	0.000128	0.000153	0.000153	0.000186
14	0.0%	0.000140	0.000140	0.000163	0.000188	0.000188	0.000236
15	4.7%	0.000170	0.000168	0.000203	0.000228	0.000228	0.000294
16	10.2%	0.000202	0.000197	0.000245	0.000271	0.000271	0.000355
17	14.9%	0.000231	0.000222	0.000284	0.000310	0.000310	0.000412
18	18.8%	0.000242	0.000229	0.000300	0.000324	0.000324	0.000435
19	21.9%	0.000246	0.000229	0.000306	0.000330	0.000330	0.000444
20	24.2%	0.000245	0.000226	0.000305	0.000328	0.000328	0.000442
21	25.7%	0.000240	0.000220	0.000299	0.000322	0.000319	0.000434
22	26.5%	0.000234	0.000213	0.000291	0.000314	0.000309	0.000422
23	26.6%	0.000227	0.000207	0.000283	0.000304	0.000300	0.000410
24	26.2%	0.000222	0.000202	0.000280	0.000297	0.000293	0.000406
25	25.5%	0.000219	0.000198	0.000281	0.000293	0.000287	0.000407
26	24.7%	0.000218	0.000195	0.000287	0.000292	0.000283	0.000416
27	23.7%	0.000218	0.000193	0.000298	0.000292	0.000280	0.000432
28	22.9%	0.000221	0.000193	0.000316	0.000296	0.000280	0.000458
29	22.3%	0.000225	0.000193	0.000338	0.000302	0.000280	0.000490
30	21.9%	0.000232	0.000195	0.000366	0.000311	0.000283	0.000531
31	21.7%	0.000244	0.000200	0.000401	0.000327	0.000290	0.000581
32	21.7%	0.000262	0.000211	0.000446	0.000351	0.000306	0.000647
33	21.9%	0.000288	0.000228	0.000503	0.000386	0.000331	0.000729
34	22.2%	0.000323	0.000251	0.000574	0.000433	0.000364	0.000832
35	22.6%	0.000366	0.000281	0.000657	0.000490	0.000407	0.000953
36	23.1%	0.000414	0.000314	0.000747	0.000555	0.000455	0.001083
37	23.7%	0.000466	0.000350	0.000840	0.000624	0.000508	0.001218
38	24.2%	0.000523	0.000390	0.000940	0.000701	0.000566	0.001363
39	24.8%	0.000584	0.000432	0.001044	0.000783	0.000626	0.001514
40	25.3%	0.000651	0.000479	0.001158	0.000872	0.000695	0.001679
41	25.7%	0.000725	0.000532	0.001284	0.000972	0.000771	0.001862
42	26.0%	0.000809	0.000592	0.001427	0.001084	0.000858	0.002069
43	26.2%	0.000905	0.000661	0.001592	0.001213	0.000958	0.002308
44	26.3%	0.001014	0.000740	0.001781	0.001359	0.001073	0.002582
45	26.2%	0.001137	0.000831	0.001999	0.001524	0.001205	0.002899
46	25.9%	0.001273	0.000933	0.002246	0.001706	0.001353	0.003257
47	25.4%	0.001420	0.001045	0.002521	0.001903	0.001515	0.003655
48	24.7%	0.001574	0.001165	0.002820	0.002109	0.001689	0.004089
49	23.8%	0.001734	0.001293	0.003145	0.002324	0.001875	0.004560
50	22.9%	0.001900	0.001427	0.003493	0.002546	0.002069	0.005065
51	21.9%	0.002076	0.001571	0.003877	0.002782	0.002278	0.005622
52	20.9%	0.002265	0.001727	0.004302	0.003035	0.002504	0.006238
53	20.0%	0.002467	0.001892	0.004765	0.003306	0.002743	0.006909
54	19.1%	0.002681	0.002069	0.005272	0.003593	0.003000	0.007644
55	18.2%	0.002909	0.002259	0.005830	0.003898	0.003276	0.008454
56	17.2%	0.003155	0.002469	0.006458	0.004228	0.003580	0.009364
57	16.3%	0.003422	0.002696	0.007150	0.004585	0.003909	0.010368
58	15.3%	0.003712	0.002950	0.007930	0.004974	0.004278	0.011499
59	14.2%	0.004031	0.003238	0.008821	0.005402	0.004695	0.012790
60	13.1%	0.004391	0.003569	0.009841	0.005884	0.005175	0.014269

Alter	Raucher-anteil	Sterblichkeit 2. Ordnung			Sterblichkeit 1. Ordnung		
		Aggregat	Nichtraucher	Raucher	Aggregat (Zuschlag 34%)	Nichtraucher (Zuschlag 45%)	Raucher (Zuschlag 45%)
61	12.1%	0.004813	0.003957	0.011032	0.006449	0.005738	0.015996
62	11.1%	0.005318	0.004426	0.012460	0.007126	0.006418	0.018067
63	10.2%	0.005922	0.004988	0.014146	0.007935	0.007233	0.020512
64	9.5%	0.006640	0.005647	0.016104	0.008898	0.008188	0.023351
65	8.8%	0.007481	0.006429	0.018386	0.010025	0.009322	0.026660
66	8.2%	0.008450	0.007331	0.020975	0.011323	0.010630	0.030414
67	7.6%	0.009550	0.008371	0.023890	0.012797	0.012138	0.034641
68	7.1%	0.010791	0.009545	0.027090	0.014460	0.013840	0.039281
69	6.6%	0.012188	0.010885	0.030621	0.016332	0.015783	0.044400
70	6.1%	0.013761	0.012413	0.034509	0.018440	0.017999	0.050038
71	5.6%	0.015532	0.014154	0.038755	0.020813	0.020523	0.056195
72	5.2%	0.017519	0.016105	0.043291	0.023475	0.023352	0.062772
73	4.8%	0.020175	0.018711	0.049210	0.027035	0.027035	0.071355
74	4.5%	0.022696	0.021204	0.054366	0.030413	0.030413	0.078831
75	4.2%	0.025587	0.024078	0.060003	0.034287	0.034287	0.087004
76	3.9%	0.028917	0.027406	0.066157	0.038749	0.038749	0.095928
77	3.6%	0.032789	0.031289	0.072965	0.043937	0.043937	0.105799
78	3.5%	0.037308	0.035750	0.080259	0.049993	0.049993	0.116376
79	3.3%	0.042555	0.040993	0.088339	0.057024	0.057024	0.128092
80	3.2%	0.048592	0.046993	0.096948	0.065113	0.065113	0.140575
81	3.1%	0.055439	0.053819	0.106077	0.074288	0.074288	0.153812
82	3.0%	0.063127	0.061505	0.115568	0.084590	0.084590	0.167574
83	3.0%	0.071713	0.070057	0.125262	0.096095	0.096095	0.181630
84	2.9%	0.081364	0.079747	0.135491	0.109028	0.109028	0.196462
85	2.9%	0.092247	0.090633	0.146282	0.123611	0.123611	0.212109
86	2.9%	0.104494	0.102906	0.157652	0.140022	0.140022	0.228595
87	2.9%	0.118102	0.116564	0.169601	0.158257	0.158257	0.245921
88	3.0%	0.132974	0.131464	0.181814	0.178185	0.178185	0.263630
89	3.0%	0.149007	0.147608	0.194252	0.199669	0.199669	0.281665
90	3.0%	0.166048	0.164792	0.206650	0.222504	0.222504	0.299643
91	3.1%	0.183920	0.182792	0.219168	0.246453	0.246453	0.317794
92	3.1%	0.202384	0.201453	0.231470	0.271195	0.271195	0.335632
93	3.1%	0.220585	0.219863	0.243168	0.295584	0.295584	0.352594
94	3.2%	0.238330	0.237813	0.253984	0.319362	0.319362	0.368277
95	3.2%	0.256299	0.255996	0.265468	0.343441	0.343441	0.384929
96	3.2%	0.274491	0.274491	0.274491	0.367818	0.367818	0.398012
97	3.3%	0.292905	0.292905	0.292905	0.392493	0.392493	0.424712
98	3.3%	0.311537	0.311537	0.311537	0.417460	0.417460	0.451729
99	3.3%	0.330385	0.330385	0.330385	0.442716	0.442716	0.479058
100	3.3%	0.349446	0.349446	0.349446	0.468258	0.468258	0.506697
101	3.2%	0.368713	0.368713	0.368713	0.494075	0.494075	0.534634
102	3.2%	0.388182	0.388182	0.388182	0.520164	0.520164	0.562864
103	3.2%	0.407846	0.407846	0.407846	0.546514	0.546514	0.591377
104	3.1%	0.427697	0.427697	0.427697	0.573114	0.573114	0.620161
105	3.0%	0.447726	0.447726	0.447726	0.599953	0.599953	0.649203
106	2.9%	0.467921	0.467921	0.467921	0.627014	0.627014	0.678485
107	2.8%	0.488271	0.488271	0.488271	0.654283	0.654283	0.707993
108	2.7%	0.508762	0.508762	0.508762	0.681741	0.681741	0.737705
109	2.6%	0.529376	0.529376	0.529376	0.709364	0.709364	0.767595
110	2.4%	0.550097	0.550097	0.550097	0.737130	0.737130	0.797641
111	2.3%	0.570904	0.570904	0.570904	0.765011	0.765011	0.827811
112	2.1%	0.591772	0.591772	0.591772	0.792974	0.792974	0.858069
113	1.9%	0.612677	0.612677	0.612677	0.820987	0.820987	0.888382
114	1.7%	0.633589	0.633589	0.633589	0.849009	0.849009	0.918704
115	1.4%	0.654476	0.654476	0.654476	0.876998	0.876998	0.948990
116	1.2%	0.675302	0.675302	0.675302	0.904905	0.904905	0.979188
117	0.9%	0.696026	0.696026	0.696026	0.932675	0.932675	1.000000
118	0.6%	0.716604	0.716604	0.716604	0.960249	0.960249	1.000000
119	0.3%	0.736988	0.736988	0.736988	0.987564	0.987564	1.000000
120	0.0%	0.757123	0.757123	0.757123	1.000000	1.000000	1.000000
121	0.0%	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich diese Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe. Außerdem versichere ich, dass ich die allgemeinen Prinzipien wissenschaftlicher Arbeit und Veröffentlichung, wie sie in den Leitlinien guter wissenschaftlicher Praxis der Carl von Ossietzky Universität Oldenburg festgelegt sind, befolgt habe.

Oldenburg, den 15. Februar 2010