Studiengang Diplom Mathematik
mit Nebenfach Informatik

DIPLOMARBEIT

Der Satz von Borel-Ritt für ultradifferenzierbare Funktionen

vorgelegt von Bastian Kanaan

Betreuender Gutachter: Prof. Dr. Michael Langenbruch

Zweiter Gutachter: apl. Prof. Dr. Andreas Defant

Oldenburg, den 12. Juni 2010

Inhaltsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Notation

Für jeden Multi-Index $J = (j_1, \dots, j_n)$ in $\mathbb{N}^n$ bezeichnet der kleine Buchstabe j immer die Länge $j_1 + \dots + j_n$ von J.
Für eine Funktion f ist die Ableitung $D^J f = f^{(J)} = \partial^j / \partial x_1^{j_1} \dots \partial x_n^{j_n} f$.
$\operatorname{supp}(f) := \overline{\{x | f(x) \neq 0\}}$ bezeichnet den Träger der Funktion f.
C^n ist der Raum der n-mal stetig differenzierbaren Funktionen.
C^∞ ist der Raum der glatten Funktionen.
$\mathcal{H}$ ist der Raum der holomorphen Funktionen.

Für eine Folge $(M_p)_{p\in\mathbb{N}}$ entspricht $(m_p)_{p\in\mathbb{N}}$ der Quotienten-Folge $(M_p/M_{p-1})_{p\in\mathbb{N}}$, $m_0 := M_0$. Es gilt $M_p = \displaystyle\prod_{q=0}^{p} m_q$.
Die Folge $(M_p^*)_{p\in\mathbb{N}}$ ist definiert durch $M_p^* := M_p/p!$ bzw. $m_p^* := m_p/p$.
Wir halten uns hierbei somit an Komatsus Notation.
Zitierte Sätze sind übersetzt und weitestgehend unserer Notation angepasst, so wird z. B. bei Thilliez der $*$ ergänzt.

S_α bezeichnet den offenen Teilsektor der Riemannschen Fläche Σ (bzw. für $\alpha \leq 2$ der komplexen Zahlenebene $\mathbb{C}$) mit $S_\alpha = \{x \in \Sigma | -\alpha\frac{\pi}{2} < \arg(x) < \alpha\frac{\pi}{2}\}$.
$B_r(x)$ bezeichnet die offene Kugel (bzw. Kreis) mit Radius r und Mittelpunkt x.
$\mathbb{N}_+ := \{1, 2, \dots\}$
$\mathbb{N} \ := \mathbb{N}_+ \cup \{0\}$
$\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$

Einleitung

In der vorliegenden Arbeit beschäftigen wir uns mit einem klassischen Problem für differenzierbare Funktionen, das im Ursprung auf die Doktorarbeit von Borel [Bor97] (1897) zurückgeht. Borel zeigte dort, dass es möglich ist, zu jeder Zahlenfolge $(\lambda_j)_j \in \Lambda(\mathbb{N})$ eine $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R})$-Funktion f zu finden, deren Ableitungen im Ursprung mit dieser Folge übereinstimmen. f heißt dann Ausdehnung oder Extension von $(\lambda_j)_j$. Der Satz von Borel besagt also, dass der Boreloperator $B : \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}) \to \Lambda(\mathbb{N}),\ f \mapsto (f^{(j)}(0))_j$ surjektiv ist ($\Lambda(\mathbb{N})$ bezeichnet hier den Raum aller komplexen Zahlenfolgen). Ritt zeigte 1916 in [Rit16], dass man zusätzlich erreichen kann, dass die Ausdehnungsfunktionen holomorph in einem Winkelbereich gewählt werden können („Borel-Ritt-Problem"), indem er Funktionen der Form $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n z^n}{n!} \left(1 - \exp\left(-\frac{1}{b_n z^2}\right)\right)^{p_n}$ betrachtete.

Eine Variante des Borel-Ritt-Problems besteht in der Frage, ob die Wachstumsbedingungen, die für die Folge $(\lambda_j)_j$ der Ableitungen in 0 gelten, auch für die Ableitungen der Extensionen erhalten werden können (ultradifferenzierbare Variante) bzw. ob stetige lineare Extensionsoperatoren $E : \Lambda_{\dots}(\mathbb{N}) \to \mathcal{E}_{\dots}(\Omega)$ existieren, die das Borel-Problem bzw. seine Varianten lösen. Mityagin zeigte, dass dies für das ursprüngliche Borel-Problem nicht möglich ist, während sich die Existenz von Ausdehnungsoperatoren im ultradifferenzierbaren und ultraholomorphen Fall unter geeigneten Voraussetzungen zeigen lässt (siehe Petzsche [Pet88], Thilliez [Thi00] und Schmets/Valdivia [SV00]). Generell muss z.B. Non-quasi-Analytizität und (M3) vorausgesetzt werden.

Wir werden das Borel-Ritt-Problem für ultradifferenzierbare Funktionen untersuchen, d.h. wir werden Folgen $(\lambda_j)_j$ mit gewissen Wachstumsbedingungen betrachten. Sie erfüllen die Abschätzung

$$(*) \qquad \exists c \in \mathbb{R}_+ \ \forall j \in \mathbb{N} : \ |\lambda_j| \leq c \cdot \sigma^j \cdot M_j$$

für eine Folge $(M_p)_p$ und einen Parameter $\sigma \in \mathbb{R}_+$. Dieser trägt wesentlich zur Größe des somit gebildeten Raumes $\Lambda_{M,\sigma}(\mathbb{N})$ bei. Der kleinste (d. h. $(*)$ gilt für alle σ) wird Beurling-Typ $\Lambda^-_M(\mathbb{N})$ und der größte (d. h. $(*)$ gilt für ein σ) Roumieu-Typ $\Lambda_M(\mathbb{N})$ genannt. Wir werden beide Fälle getrennt voneinander betrachten.

Analog lassen sich auch die glatten Funktionen klassifizieren als „ultradifferenzierbare“ Funktionen $\mathcal{E}_{M,\sigma}(\mathbb{R})$:

$$\exists c \in \mathbb{R}_+ \; \forall x \in \mathbb{R} \; \forall j \in \mathbb{N} : \; \left| f^{(j)}(x) \right| \leq c \cdot \sigma^j \cdot M_j \quad .$$

Wir betrachten auch die ultraholomorphe Variante, d. h. dass die Extensionsfunktion zusätzlich auf Sektoren S_α holomorph sein soll. Der Öffnungswinkel α wird hierbei beschränkt durch die Wachstumsbedingung (γ_r) für $(M_p)_p$, die Schmets und Valdivia in [SV00] einführten bzw. durch den äquivalenten Begriff „r-streng reguläre Folge“ von Thilliez. Beispielsweise gilt für die Gevrey-Folge $(p!^k)_p$ immer $r < k$.

Im 1. Kapitel führen wir die Eigenschaften der Folge $(M_p)_p$ ein und erläutern diese. Grundlage ist hier hauptsächlich die Arbeit [Thi00] von Thilliez, der irritierenderweise mit der Folge $(M_p^*)_p$ arbeitet, diese aber als $(M_p)_p$ notiert. Seine Ergebnisse schreiben wir daher um in die üblichere Notation von Komatsu, wobei wir zeigen, dass er von den gleichen Voraussetzungen wie Komatsu ausgeht. Thilliez fasst die Standardbedingungen zusammen zur „streng regulären Folge“. Wir definieren eine zur Folge assoziierte Funktion, die charakteristisch für die Folge ist. Schließlich betrachten wir den Wachstumsbegriff von $(M_p)_p$ und beweisen Lemmata, die zeigen, unter welchen Voraussetzungen das Potenzieren der Folge die Regularität erhält.

Das 2. Kapitel führt dann die ultradifferenzierbaren Räume $\mathcal{E}_M(K)$ gemäß [Kom00] und die $\mathcal{E}_{r,M}(K)$ aus [SV00] ein, bei denen nur jede r-te Ableitung abgeschätzt wird. Wir stellen die Konstruktion sektoriell ultraholomorpher Funktionen aus [Thi00] vor, die auf Kapitel 1 und den „äußeren Funktionen“ von Beurling beruht. Sie und ihre Abschätzungen werden später weiter verwendet.

Mit dem 3. Kapitel zeigen wir einen alternativen Einstieg mittels der Gewichtsfunktionen von Braun, Meise und Taylor [BMT90]. Hier werden die Bedingungen nicht an $(M_p)_p$ sondern an die assoziierte Funktion gestellt und entsprechend wird Ultradifferenzierbarkeit anders definiert. Komatsu zeigt in [Kom00], dass diese Theorie unter geeigneten Voraussetzungen durch Fouriertransformation mit der aus Kapitel 2 übereinstimmt. Es folgt die Konstruktion von solchen ultradifferenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger, wie z. B. Abschneidefunktionen. Der Grundansatz ist der gleiche wie zuvor, jedoch werden nun fourieranalytische Mittel eingesetzt.

Die beiden letzten Kapitel behandeln schließlich die ultradifferenzierbare Variante des Borel-Ritt-Problems. Zugrunde liegen hier [Thi00] von Thilliez und [SV00] von Schmets und Valdivia. Die Bedingungen (M0) und (M1) sind hier stets Voraussetzung. Entscheidender Aspekt ist das Wachstum der Folge.

Kapitel 4 beinhaltet den Roumieu-Fall und führt mit den Ergebnissen von Ritt [Rit16] und Petzsche [Pet88] ein. Letzterer bewies, dass (M3) hinreichend für die Existenz einer Extension nach $\mathcal{E}_M([-1,1])$ ist. Schmets und Valdivia verallgemeinern dies: Die Bedingung (γ_r) ist hinreichend für Extensionen nach $\mathcal{D}_{r,M}([-1,1])$, $\mathcal{L}_{r,M}([0,1])$ oder $\mathcal{E}_{r,M}([0,\infty[)$. Für den ultraholomorphen Fall konstruieren sie einen stetigen, linearen Operator mit dem die Definitionsbereiche ins Komplexe ausgedehnt werden. Hier ist nun der Beweisansatz anders als in Kapitel 2. Es folgt damit, dass (γ_{r+1}) notwendige Voraussetzung für eine Extension nach $\mathcal{A}_M(S_\gamma), \gamma < r$ ist. Eine andere Methode, die die Funktionen aus Kapitel 2 nutzt, stellt Thilliez vor. Er zeigt (hier nur für $r \leq 2$), dass die vorige Extension schon bei (γ_r) existiert unter Hinzunahme von (M2).

Das 5. Kapitel befasst sich mit dem Beurling-Fall. Einige Beweise des Roumieu-Falls kann man anpassen und verlaufen analog. Auch hier ist (γ_r) hinreichend für Extensionen nach $\mathcal{D}^-_{r,M}([-1,1])$, $\mathcal{L}^-_{r,M}([0,1])$ oder $\mathcal{E}^-_{r,M}([0,\infty[)$. Thilliez beweist mit einer einfachen Folgerung, dass (γ_r) notwendige Voraussetzung für eine Extension nach $\mathcal{A}^-_M(S_\gamma), \gamma < r$, ist. Mit einem aufwändigeren Beweis zeigen Schmets und Valdivia schließlich, dass (γ_{r+1}) hinreichende Voraussetzung für eine Extension nach $\mathcal{A}^-_M(S_\gamma), \gamma < r$ ist, falls (M2$'$) gegeben ist.

1 Streng reguläre Folgen

In diesem Kapitel werden wir zunächst die Folgen $(M_p)_p$ reeller Zahlen betrachten, die später das Wachstum der Ableitungen und Funktionen bestimmen werden. In erster Linie ist daher das Verhalten für große p entscheidend und um dieses begrifflich fassen zu können, müssen die Folgen bestimmten Wachstumsbedingungen genügen.
Dabei wird die Gevrey-Folge $(p!^{\alpha})$, $\alpha > 1$ als ideale Vergleichsbasis herangezogen. Weitere Beispiele sind $(p^{p\alpha})$, $(\Gamma(1+p\alpha))$, $(p! \cdot \prod_{k=2}^{p} \ln(k)^{\alpha})$, $(p!^{\alpha} \cdot \prod_{k=2}^{p} \ln(k)^{\beta})$ oder $(p!^{\alpha} \cdot \prod_{k=2}^{p} \ln(k)^{-\beta})$ für $\alpha > 1$ und $\beta > 0$.
Es wird die zu $(M_p)_p$ assoziierte Funktion eingeführt und vorbereitende Lemmata für das nächste Kapitel werden bewiesen.

1.1 Bedingungen

Thilliez nutzt in [Thi00] für eine positive Folge $(M_p)_p$ folgende Regularitätsbedingungen (mit einem $A \in \mathbb{R}_+$):

(M0$*$) $M_0^* = 1$ und $(M_p^*)_p$ ist nicht-fallend

(M1$*$) $M_p^{*2} \leq M_{p-1}^* M_{p+1}^*$ für $p \in \mathbb{N}_+$

(M2$*$) $M_{p+q}^* \leq A^{p+q} M_p^* M_q^*$ für $p, q \in \mathbb{N}$

(M3$*$) $\displaystyle\sum_{q \geq p} \frac{M_q^*}{(q+1)M_{q+1}^*} \leq A \frac{M_p^*}{M_{p+1}^*}$ für $p \in \mathbb{N}_+$

Dies sind genau Komatsus Regularitätsbedingungen aus [Kom00](Kapitel 0), jedoch mit $(M_p^*)_p$ aufgeschrieben. Vorerst haben diese selbstverständlich eine andere Bedeutung. Im Folgenden werden wir Komatsus Bedingungen benutzen.

Definition 1.1. *Eine positive Folge $(M_p)_p$ heißt **streng regulär**, falls*

(M0) *Normalisierung:* $M_0 = 1$

(M1) *Logarithmische Konvexität:* ${M_p}^2 \leq M_{p-1} \cdot M_{p+1} \quad \forall p \in \mathbb{N}_+$

(M2) *Stabilität unter Ultradifferential-Operatoren:*

$$M_{p+q} \leq A^{p+q} \cdot M_p \cdot M_q \quad \forall p, q \in \mathbb{N}$$

(M3) *Strenge Non-quasi-Analytizität:* $\displaystyle\sum_{q \geq p+1} \frac{M_{q-1}}{M_q} \leq A \cdot p \cdot \frac{M_p}{M_{p+1}} \quad \forall p \in \mathbb{N}_+$

für ein $A \in \mathbb{R}_+$ gelten.

(M0) ist eine sinnvolle Festlegung um die Formel-Notation zu erleichtern. Außerdem sind die später betrachteten Räume stabil gegen Multiplikation mit einer Konstanten, wie es hier geschieht. Darum nehmen wir sie in die Definition mit auf. Komatsu beschränkt lediglich auf positive Zahlen.
Die Konstante A wird sinnvollerweise größer 1 gewählt.

Nachfolgend führen wir den Vergleich von Thilliezs Bedingungen mit Definition 1.1. Dazu sind Umrechnungen notwendig, um zu sehen, welche Folgen die Bedingungen tatsächlich erfüllen und wo Unterschiede auftreten:

1. (M0$*$) $\Longleftrightarrow$ (M0+)$\Longrightarrow$(M0) mit

(M0+) $$M_0 = 0! \cdot M_0^* = 1 \text{ und } \left(\frac{M_p}{p!}\right) \text{ ist nicht-fallend.}$$

Für große p wird dieses Verhalten bereits durch (M1) und (M3) impliziert.
Die Bedingung ist im Kontext äquivalent zu $1 \leq M_1$, denn aus (M1$*$) folgt dann bereits induktiv

$$M_p^* \leq \frac{M_{p-1}^* M_{p+1}^*}{M_p^*} \leq \frac{M_p^* M_{p+1}^*}{M_p^*} = M_{p+1}^* \quad \text{für } p = 1, 2, \dots \quad .$$

2. (M1$*$) $\Longleftrightarrow$ (M1+)$\Longrightarrow$(M1) mit

(M1+) *Asymptotisch-logarithmische Konvexität*:
$$ {M_p}^2 \leq \frac{p}{p+1} M_{p-1} M_{p+1} \quad \forall p \in \mathbb{N}_+ \quad ,$$

$$\begin{aligned}\text{denn:}\quad \frac{1}{p!^2}\cdot M_p^2 = (M_p^*)^2 &\overset{\text{(M1*)}}{\leq} M_{p-1}^*\cdot M_{p+1}^* \\ &= \frac{M_{p-1}}{(p-1)!}\cdot\frac{M_{p+1}}{(p+1)!} \quad = \frac{p\cdot M_{p-1}}{p!}\cdot\frac{M_{p+1}}{(p+1)\cdot p!} \\ &= \frac{1}{p!^2}\cdot\frac{p}{p+1}M_{p-1}M_{p+1} \quad .\end{aligned}$$

Durch den Vorfaktor $\frac{p}{p+1} < 1$ ist also (M1+) strenger als die logarithmische Konvexität (M1).
Anschaulich bedeutet dies, dass die Folge kontinuierlich immer schneller wächst.

3. (M2*) $\Longleftrightarrow$ (M2) ,

$$\begin{aligned}\text{denn:}\quad \frac{M_{p+q}}{(p+q)!} = M_{p+q}^* &\leq A^{p+q}\cdot M_p^*\cdot M_q^* \quad = A^{p+q}\cdot\frac{M_p}{p!}\cdot\frac{M_q}{q!} \\ \Longleftrightarrow\quad M_{p+q} &= A^{p+q}\cdot\frac{(p+q)!}{p!\cdot q!}\cdot M_p\cdot M_q \\ &= A^{p+q}\cdot\binom{p+q}{q}\cdot M_p\cdot M_q \quad \leq (2A)^{p+q}\cdot M_p\cdot M_q \quad .\end{aligned}$$

Komatsu notiert äquivalent $M_p \leq AH^p \min\limits_{0\leq q\leq p} M_q M_{p-q}$, $A, H \in \mathbb{R}$.
Dies ist die einzige Forderung, die das Wachstum nach oben beschränkt.

4. (M3*) $\Longleftrightarrow$ (M3) ,

$$\begin{aligned}\text{denn:}\quad \sum_{q\geq p}\frac{M_q}{M_{q+1}} &= \sum_{q\geq p}\frac{(q+1)!\cdot M_q}{q!\cdot(q+1)M_{q+1}} \quad = \sum_{q\geq p}\frac{M_q^*}{(q+1)M_{q+1}^*} \quad \leq A\frac{M_p^*}{M_{p+1}^*} \\ &= A\frac{(p+1)!\cdot M_p}{p!\cdot M_{p+1}} \quad = A\cdot(p+1)\cdot\frac{M_p}{M_{p+1}} \quad \leq 2A\cdot p\cdot\frac{M_p}{M_{p+1}} \quad .\end{aligned}$$

Hier stimmen somit beide Autoren überein.
Diese Summierbarkeit bewirkt, dass die Folge schnell genug wächst für große p.

Thilliez benutzt also die strengeren Forderungen (M0+),(M1+),(M2) und (M3) für eine streng reguläre Folge.
Wie oben gezeigt wurde, ist (M1+) a priori eine stärkere Forderung als (M1). Gilt allerdings zusätzlich (M3), so existiert eine äquivalente Folge (siehe Definition 1.8), die (M1+) statt nur (M1) erfüllt ([Pet88] Proposition 1.1a). In diesem Sinne können wir im Folgenden oft (M1) $\Longleftrightarrow$ (M1+) benutzen.
Thilliez betrachtet daher die gleichen ultradifferenzierbaren Funktionen, da deren Räume unter dieser Äquivalenz (bis auf Konstante) invariant sind.

Die Herkunft und Bedeutung einiger Forderungen ist deutlicher zu verstehen, wenn wir sie mit der Quotienten-Folge beschreiben: $(\forall p \in \mathbb{N}_+)$

$$\begin{array}{llllll}
\text{(m0+)} & \text{(M0+)} & \iff & 1 \leq m_p^* & \iff & p \leq m_p \\
\text{(m1)} & \text{(M1)} & \iff & m_p \leq m_{p+1} & \iff & (m_p)_p \text{ ist nicht-fallend} \\
\text{(m1+)} & \text{(M1+)} & \iff & m_p^* \leq m_{p+1}^* & \iff & (m_p^*)_p \text{ ist nicht-fallend} \\
 & & \iff & \dfrac{p+1}{p} m_p \leq m_{p+1} & \iff & \left(\dfrac{m_p}{p}\right)_p \text{ ist nicht-fallend} \\
\text{(m3)} & \text{(M3)} & \iff & \displaystyle\sum_{q \geq p+1} \frac{1}{m_q} \leq A \frac{p}{m_{p+1}} & & \\
\text{(m3}') & & \Longrightarrow & \displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{m_p} < \infty & & \\
\text{(M3}') & & \iff & \displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} \frac{M_{p-1}}{M_p} < \infty & & \textit{Non-quasi-Analytizität}
\end{array}$$

Wir sehen erneut deutlich (m1+)$\Rightarrow$ $[m_1 \leq m_p^* \; \forall p]$ $\Rightarrow$(m0+), falls $m_1 \geq 1$.

Eine weitere, schwächere Bedingung ist die

(M2′) *Stabilität unter Differential-Operatoren*: $\exists A > 0 \forall p \in \mathbb{N} : M_{p+1} \leq A^{p+1} M_p$.

Schmets und Valdivia nennen dies (δ). Komatsu schreibt $M_{p+1} \leq AH^p M_p$.
Der Schluss (M2)$\Rightarrow$(M2′) ist klar, wenn wir $q = 1$ setzen.
Der Rückschluss würde einer iterierten Anwendung von (M2′) entsprechen: $(p \leq q)$

$$M_{p+q} \leq A^{p+q} M_{p+q-1} \leq \cdots \leq A^{\sum_{k=q+1}^{p+q} k} M_q \leq A^{pq+\frac{1}{2}p(p+1)} M_q \quad .$$

Um nun auf (M2) zu folgern, müsste eine Konstante $c \in \mathbb{R}_+$ existieren, so dass:

$$\begin{aligned}
& A^{pq+\frac{1}{2}p(p+1)} \leq c^{p+q} M_p \qquad \forall p, q \in \mathbb{N},\ p \leq q \\
\iff & \left(\frac{A^p}{c}\right)^q \leq A^{-\frac{1}{2}p(p+1)} c^p M_p \quad .
\end{aligned}$$

Die rechte Seite ist von q unabhängig und somit der linke Term nach oben beschränkt für festgehaltene p. Für $p > \log_A(c)$ ist aber $A^p/c > 1$. Also ist dies nicht möglich.

Beispiel 1.2. *Die Folge $(M_p)_p$ mit $M_p = \exp(p^2)$ erfüllt (M2′), aber nicht (M2).*

Beweis. Seien $p, q \in \mathbb{N}$, dann ist:

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{M2}'):\ M_{p+1} = \exp((p+1)^2) = \exp(2p+1)\cdot\exp(p^2) \le (\mathrm{e}^2)^{p+1}\cdot M_p \\
&(\mathrm{M2}):\ M_{p+q} = \exp((p+q)^2) = \exp(2pq)\cdot\exp(p^2)\cdot\exp(q^2) = \exp(2pq)\cdot M_p\cdot M_q
\end{aligned}$$

Es existiert aber kein $A \in \mathbb{R}$, so dass $\exp(2pq) \le A^{p+q}$. □

Wir können nun die genannten Bezeichnungen motivieren:
Eine Folge $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ heißt konvex, falls

$$a_p \le \tfrac{1}{2}(a_{p-1} + a_{p+1}) \quad \forall p \in \mathbb{N}_+$$

gilt. Die logarithmische Konvexität (M1) sagt aus, dass $(\log M_p)_p$ konvex ist:

$$\begin{aligned}
& 2\log M_p \le \log M_{p-1} + \log M_{p+1} \\
\Longleftrightarrow\quad & M_p^2 \le \exp(\log M_{p-1} + \log M_{p+1}) = M_{p-1}\cdot M_{p+1} \quad .
\end{aligned}$$

(M2′) bewirkt, dass die Differentialoperatoren D^α mit $\alpha \in \mathbb{N}^n$ linear und stetig in den späteren Funktionenräumen operieren ([Kom00]Theorem 2.10).
Ultradifferential-Operatoren der Beurling-Klasse (Roumieu-) besitzen die Form $\sum\limits_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha D^\alpha,\ a_\alpha \in \mathbb{C}$. Die Koeffizienten müssen dabei mit beliebigen $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ $(\forall c_2 > 0\ \exists c_1)$ wie folgt abschätzbar sein: $|a_\alpha| \le c_1 c_2^{|\alpha|}/M_{|\alpha|}$.
Diese Operatoren operieren linear und stetig in den zugehörigen Funktionenräumen, falls (M2) gilt ([Kom00] Theorem 2.12).

Die Benennung von (M3) resultiert aus der von (M3′).
Für eine reell analytische Funktion f mit $f^{(k)}(x) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ an einer Stelle x folgt $f \equiv 0$. Ein Funktionenraum, der ebenfalls diese Eigenschaft erfüllt, wird daher quasi-analytisch genannt.
Gilt (M1), so bewiesen Denjoy und Carleman, dass der Raum $\mathcal{E}_M(\Omega)$ (siehe Definition 2.1) genau dann quasi-analytisch ist, wenn (m3′) nicht gilt. Zum Beweis siehe z. B. [Coh68].

Dass (M1) und (M3) gegensätzlich zu (M2) sind, ist klar. Aus (M1) folgt

$$(1) \qquad M_p \cdot M_q \leq M_{p+q} \quad \text{für } p, q \in \mathbb{N}$$

durch vollständige Induktion mit $M_{p+1}M_q = M_pM_qm_p \leq M_{p+q}m_p \leq M_{p+q+1}$.
Eine Abschätzung, die (M2) von der Gestalt her ähnelt, allerdings M_{p+q} nach unten statt nach oben abschätzt. Zusammen genommen ergibt sich für $n, p \in \mathbb{N}$ die Einschachtelung

$$(2) \qquad M_p^n \leq M_{np} \leq A^{p\sum_{q=2}^n q} M_p^n = A^{\frac{1}{2}(n-1)(n+2)p} M_p^n \quad .$$

Petzsche führt in [Pet88] noch weitere Eigenschaften der Folge ein, die hier jedoch nicht tiefergehend betrachtet werden:

$$(\beta_1) \qquad \exists k \in \mathbb{N}_+ : \liminf_{p\to\infty} \frac{m_{kp}^*}{m_p^*} > 1$$

$$(\beta_1^0) \qquad \inf_{p\geq 1} \frac{m_{2p}^*}{m_p^*} > 1$$

$$(\beta_2) \qquad \forall \varepsilon > 0 \ \exists k \in \mathbb{N}, k > 1 : \limsup_{p\to\infty} \frac{1}{m_{kp}} \left(\frac{M_{kp}}{M_p}\right)^{1/p(k-1)} \leq \varepsilon$$

$$(\beta_2^0) \qquad \exists k \in \mathbb{N}_+ : \lim_{p\to\infty} \frac{m_{kp}}{m_p} = \infty$$

$$(\text{M3+}) \qquad \exists k \in \mathbb{N}_+ : \lim_{p\to\infty} m_p^* \sum_{q\geq kp} \frac{1}{m_q} = 0$$

(M3+) heißt im Original (γ_2). Diese Bezeichnung stände aber im Konflikt zum späteren (γ_r). Offensichtlich gelten (β_1^0)$\Longrightarrow$(β_1), (β_2^0)$\Longrightarrow$(β_1) und (M3+)$\Longrightarrow$(M3). Die Umkehrungen sind im Allgemeinen falsch.
Gelten (M1) und (M3′), so sind (M3) $\iff$ (β_1), (M3+) $\iff$ (β_2^0) ([Pet88]Proposition 1.1) und (β_2^0)$\Longrightarrow$(β_2)$\Longrightarrow$(β_1) ([Pet88]Proposition 1.6).

Schmets und Valdivia führen eine weitere Folge ein, die für die Beweise in den Kapiteln 4 und 5 wichtig ist.

Definition 1.3. *Für $r \in \mathbb{N}_+$ ist die **r-Interpolierende** $(N_p)_{p\in\mathbb{N}}$ definiert durch*

$$N_{kr+j} := \sqrt[r]{M_k^{r-j} M_{k+1}^j} \quad \forall k \in \mathbb{N},\ j \in \{0, \ldots, r-1\} \quad .$$

Dies entspricht einer geometrischen Verfeinerung der Folge $(M_p)_p$ im Sinne von $N_{kr} = M_k$ und $n_{kr+j} = \sqrt[r]{m_{k+1}}$ für $k \in \mathbb{N},\ j \in \{0, \ldots, r-1\}$. (M0) und (M1) bleiben dabei offensichtlich erhalten. (M3) wird durch Lemma 1.13 gezeigt werden, sofern $r < \gamma(M)$ gilt. Um (M2) zu zeigen, seien $k, l, p, q \in \mathbb{N}$ mit $kr \leq p < (k+1)r$

und $lr \leq q < (l+1)r$:

$$
\begin{aligned}
N_{p+q} \leq N_{(k+l+2)r} = M_{k+l+2} &\overset{\text{(M2)}}{\leq} A^{k+l+2} M_{k+1} M_{l+1} \overset{\text{(M2)}}{\leq} A^{2k+2l+4} M_1^2 M_k M_l \\
&= A^{2k+2l+4} M_1^2 N_{kr} N_{lr} \leq A^{2k+2l+4} M_1^2 \cdot N_p \cdot N_q \quad .
\end{aligned}
$$

1.2 Beispiele

Da die Gevrey-Folge ein wichtiges Beispiel ist, werden wir die Regularitätsbedingungen einmal exemplarisch nachrechnen.

Beispiel 1.4. *Sei $\alpha > 1$. Die Folge $(M_p)_{p \in \mathbb{N}}$ mit $M_p = p!^\alpha$ ist streng regulär. (M0+), (M1+), (β_1), (β_1^0) sind erfüllt und (β_2), (β_2^0) nicht.*

Beweis. Zunächst ist $m_p = \dfrac{p!^\alpha}{(p-1)!^\alpha} = p^\alpha$ und $m_p^* = \dfrac{m_p}{p} = p^{\alpha-1}$.
Wir betrachten nun die Bedingungen für $(m_p)_p$:
(M0) und (M0+) gelten, da $M_0 = 0!^\alpha = 1$ und $m_p^* \geq 1$ für $p \in \mathbb{N}_+$.
(M1) und (M1+) gelten, da $(m_p)_p$ und $(m_p^*)_p$ nicht fallen.
Für (M2) bedarf es einer elementaren Abschätzung für $p, q \in \mathbb{N}$:

$$
\begin{aligned}
&\frac{(p+q)!}{p!q!} = \binom{p+q}{q} \leq 2^{p+q} \\
\Longrightarrow \quad & M_{p+q} = (p+q)!^\alpha \ \leq 2^{(p+q)\alpha} p!^\alpha q!^\alpha \ = (2^\alpha)^{(p+q)} \cdot M_p \cdot M_q
\end{aligned}
$$

(M3′) entspricht der Definition der Riemann'schen Zeta-Funktion:

$$
\sum_{q \geq 1} \frac{1}{m_p} \ = \sum_{q \geq 1} \frac{1}{p^\alpha} \ = \ \zeta(\alpha) \ < \infty \quad .
$$

Um (M3) zu folgern, bedienen wir uns einem Teilergebnis von Petzsche:

Zitat: Teil von [Pet88] Proposition 1.1

> *Für $(M_p)_p$ gelten (M0), (M1+), (M3′) und (β_1^0). Dann gilt (M3).*

Die Voraussetzungen sind mit

$$
(\beta_1^0) \qquad \inf_{p \geq 1} \frac{m_{2p}^*}{m_p^*} \ = \inf_{p \geq 1} \frac{(2p)^{\alpha-1}}{p^{\alpha-1}} \ = 2^{\alpha-1} \ > 2^0 \ = 1
$$

alle erfüllt. Es gilt $(\beta_1^0) \Longrightarrow (\beta_1)$.
Dass (β_2) und somit (β_2^0) nicht gelten, zeigt [Pet88](Example 1.7). ☐

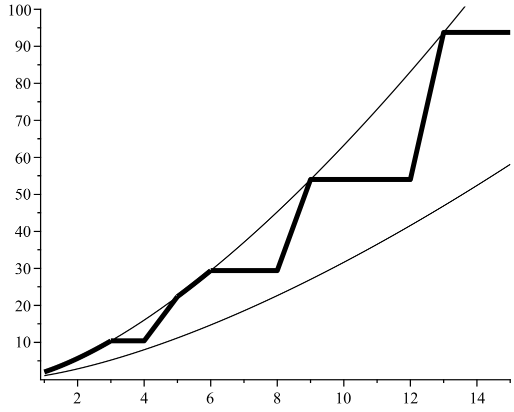

Abbildung 1.1: Skizze $(m_p)_p$

(m1) und (m1+) unterscheiden sich nur durch einen Faktor, der gegen 1 konvergiert. Man könnte daher glauben, dass die Forderungen für große p äquivalent werden. Dass dies nicht so ist, zeigt folgende Überlegung:
Sei $(M_p)_p$ eine streng reguläre Folge (im Bild $(p!^{1.5})_p$). Nebenstehend ist der Verlauf von $(m_p)_p$ und $(2 \cdot m_p)_p$ in dünn dargestellt. Der Faktor ändert an der Regularität lediglich die Konstante A.
Nun können wir eine streng reguläre Folge $(N_p)_p$ konstruieren, indem wir $(n_p)_p$ zwischen den beiden Kurven wählen. Dies ist hier beispielsweise die dicke Linie. Ist diese nicht-fallend, so gilt (m1). Da sie aber konstant verlaufen kann, gilt an diesen Stellen $m_p = m_{p+1}$ und somit (m1+) dort nicht. Und dies ist unendlich oft wiederholbar.
Darauf beruhend ist das folgende Beispiel konstruiert.

Beispiel 1.5. *Sei $\alpha > 1$. Die Folge $(M_p)_{p\in\mathbb{N}}$ mit* $m_p := \begin{cases} (p-1)^\alpha, & p \textit{ gerade} \\ p^\alpha, & p \textit{ ungerade} \end{cases}$
und $m_0 := 1$ ist streng regulär.
Sie erfüllt (M0+) und (M1+) nicht.

Beweis. Explizit ist $M_p = \prod_{q=0}^{p} m_q = \prod_{\substack{0\le q<p \\ \text{q ungerade}}} q^{2\alpha} \cdot \begin{cases} 1, & p \text{ gerade} \\ p, & p \text{ ungerade} \end{cases}.$

p	0	1	2	3	4	5	6	7
m_p	1	1	1	3^α	3^α	5^α	5^α	7^α
M_p	1	1	1	3^α	9^α	45^α	225^α	1575^α

Tabelle 1.1: Wertetabelle

Offensichtlich gilt $(p-1)!^\alpha \le M_p \le p!^\alpha$ für $p \in \mathbb{N}_+$.
(M0) gilt nach Definition.
Für ungerade p ist $m_p^* = \dfrac{p^\alpha}{p} = p^{\alpha-1} > 1$. Hier gilt (M0+).
Für gerade p ist $m_p^* = \dfrac{(p-1)^\alpha}{p}$. Somit gilt (M0+) nicht für $p = 2$ und weitere p solange $\log_{p-1}(p) < \alpha$. Insbesondere ist (M0+) erfüllt ab einem bestimmtem p.

Es ist $m_p < m_{p+2}$ für $p \in \mathbb{N}$. Für ungerade p gilt $m_p = m_{p+1} \Longrightarrow m_p^* > m_{p+1}^*$. Somit gilt (M1), aber nicht (M1+).

Da $2^{-\alpha} p^\alpha \leq m_p \leq p^\alpha$ für $p \in \mathbb{N}_+$ gilt, folgen (M2) und (M3) aus Beispiel 1.4:

$$\text{(M2)} \qquad M_{p+q} \leq (p+q)!^\alpha \leq 2^{(p+q)\alpha} p!^\alpha q!^\alpha \leq (p+q)!^\alpha \leq 2^{2(p+q)\alpha} M_p M_q$$

$$\text{(M3)} \qquad \sum_{q \geq p+1} \frac{1}{m_q} \leq \sum_{q \geq p+1} \frac{2^\alpha}{q!^\alpha} \leq 2^\alpha A \cdot \frac{p}{(p+1)^\alpha} \leq 2^\alpha A \cdot \frac{p}{m_{p+1}} \quad .$$

□

Beispiel 1.6. *Sei $\alpha \in \mathbb{R}_+$.*
Für $\alpha > 1$ sind $(p!^\alpha)_{p\in\mathbb{N}}$, $(p^{p\alpha})_{p\in\mathbb{N}}$ und $(\Gamma(1+p\alpha))_{p\in\mathbb{N}}$ streng regulär.
Für $\alpha \leq 1$ erfüllen diese (M3) nicht mehr, (M1) und (M2) gelten jedoch weiterhin.
(M0+) und (M1+) sind bei $\alpha < 1$ für fast alle p falsch.

Die letzte Behauptung wurde nur stichprobenweise numerisch getestet.

1.3 Assoziierte Funktion

Als nächstes führen wir eine zur Folge $(M_p)_p$ **assoziierte Funktion** ein.
Thilliez benutzt

$$h_M(t) := \inf_{p\in\mathbb{N}} \left(t^p M_p\right) \text{ für } t > 0 \quad \text{und} \quad h_M(0) := 0 \quad .$$

Man beachte, dass konsequenterweise in [Thi00] „h_{M^*}“ zu lesen ist.
Komatsu beschreibt die hier benutzte Funktion mit

$$\text{(3)} \qquad M(t) := \sup_{p\in\mathbb{N}} \ln\left(t^p \cdot \frac{M_0}{M_p}\right) \quad .$$

$M_0 = 1$ annehmend ist eine Transformation möglich durch

$$\text{(4)} \qquad \begin{aligned} h_M(t) &\overset{\text{Def}}{=} \inf_p \left(t^p M_p\right) = \left(\sup_p \left(t^p M_p\right)^{-1}\right)^{-1} \\ &= \left(\exp \ln \sup_p \left(\frac{1}{t}\right)^p \frac{1}{M_p}\right)^{-1} \overset{\text{Def}}{=} \exp\left(-M\left(\frac{1}{t}\right)\right) \quad . \end{aligned}$$

Stellen wir formal um, so ergibt sich die Folge ([Kom00] Formel 3.2)

$$M_p^+ := M_0 \cdot \sup_{t\geq 0} \left(t^p \cdot \exp\left(-M\left(t\right)\right)\right) \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad .$$

Sie ist die größte Folge unterhalb von $(M_p)_p$, die $M_0^+ = M_0$, $M_p^+ \leq M_p$ und (M1) erfüllt. Mit ihr sehen wir, dass die assoziierte Funktion charakteristisch für die ursprüngliche Folge ist, denn diese lässt sich rekonstruieren:

Zitat: [Kom00] Proposition 3.2

> *$(M_p)_p$ erfüllt (M1) genau dann, wenn $(M_p)_p = (M_p^+)_p$.*

Auch (M2) findet sich wieder:

Zitat: [Kom00] Proposition 3.6

> *$(M_p)_p$ erfüllt (M2) mit den Konstanten A, H genau dann, wenn*
>
> $$2M(t) \leq M(Ht) + \log A \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad .$$

In (M2) können wir $A = 1$ wählen, indem wir H verändern. Insbesondere gilt dann für $s \geq 1$, $t \in \mathbb{R}_+$ und einem $n(s) \in \mathbb{N}$

$$s \cdot M(t) \ \leq 2^{n(s)} \cdot M(t) \ \leq 2^{n(s)-1} \cdot M(Ht) \ \leq \ldots \ \leq M(H^{n(s)}t) \quad .$$

Somit folgt aus (M2) die Existenz einer Konstanten $\rho(s) \geq 1$, so dass

$$s \cdot M\,(t) \leq M(\rho(s) \cdot t) \tag{5}$$

für $s \geq 1$ und $t \in \mathbb{R}_+$ gilt. Bzw. ergibt sich [Thi00](Formel 10) analog:

$$h_M(t) \leq (h_M(\rho(s) \cdot t))^s \quad . \tag{5*}$$

Für $s \in [0, 1]$ gelten diese Abschätzungen trivialerweise mit $\rho(s) = 1$.

Weitere Bedingungen der Folge sind an der assoziierten Funktion erkennbar. Komatsu zeigt:

Zitat: [Kom00] Proposition 3.4

> *$(M_p)_p$ erfüllt (M2′) mit den Konstanten A, H genau dann, wenn*
>
> $$m(\lambda) := \#\{p \in \mathbb{N}_+ | m_p \leq \lambda\} \geq \frac{\log(\lambda/A)}{\log H} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}_+ \quad .$$

Zitat: [Kom00] Proposition 4.1

> *$(M_p)_p$ erfülle (M1), dann ist:*
>
> $$\text{(M3}'\text{)} \iff \int_0^\infty \frac{m(t)}{t^2} dt < \infty \iff \int_0^\infty \frac{M(t)}{t^2} dt < \infty \iff \sum_{p=0}^\infty \frac{1}{M_p^{1/p}} < \infty.$$

Zitat: [Kom00] Proposition 4.4

> *$(M_p)_p$ erfülle (M1). (M3) ist genau dann erfüllt, wenn*
>
> $$\exists A\ \forall p \geq m_1 : \int_p^\infty \frac{m(t)}{t^2} dt \leq (A+1)\frac{m(p)}{p} \quad .$$

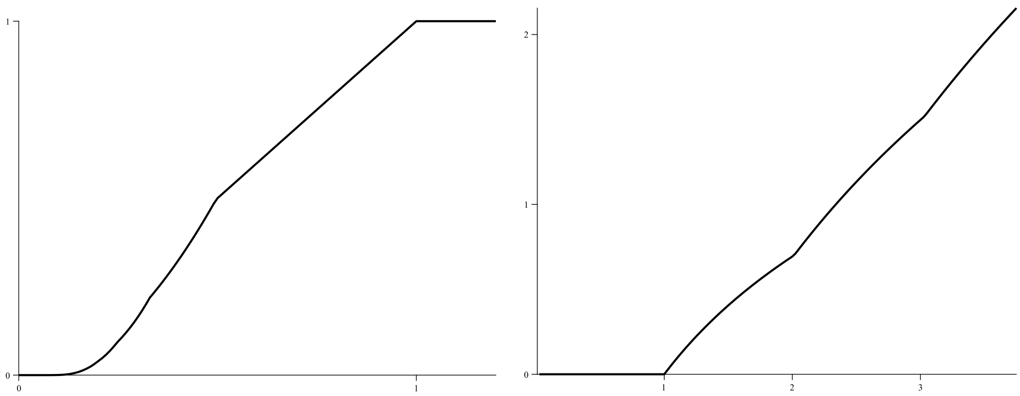

Abbildung 1.2: h_M und $M(\cdot)$ für $M_p = (p!)^{1.01}$

Diese Abbildung zeigt das typische Aussehen der assoziierten Funktionen. Beide sind stetig und monoton steigend. Aus der Definition ergibt sich, dass sie stückweise sogar glatt sind. Die Übergänge weisen jedoch Knicke auf.
Es gilt $h_M|_{[1,\infty]} \equiv 1$ und $M(\cdot)|_{[0,1]} \equiv 0$.

Das nächste Lemma zeigt eine Art Integrierbarkeit der assoziierten Funktion. Wir formulieren dabei ein Ergebnis von Komatsu um ([Thi00]Lemma 2.2).

Lemma 1.7. *Sei $(M_p)_p$ eine positive Folge mit (M1) und (M3). Dann existieren Konstanten $c_1, c_1^* > 1$ und $c_2, c_2^* > 0$, so dass*

$$\begin{aligned} a) \quad & \int_0^1 -M\left(\frac{1}{s \cdot u}\right) ds \ \geq -c_1 \cdot M\left(\frac{1}{u}\right) - c_2 \\ b) \quad & \int_0^1 -M^*\left(\frac{1}{s \cdot u}\right) ds \geq -c_1^* \cdot M^*\left(\frac{1}{u}\right) - c_2^* \end{aligned}$$

für reelle $u > 0$ gelten.

Beweis. a) Angewendet wird:

Zitat: [Kom00] Proposition 4.4 , Formel (4.14)

> $$(*) \quad \text{(M1) und (M3)} \Rightarrow p \cdot \int_p^\infty \frac{M(t)}{t^2} dt \leq (A+1)M(p) + m_1 \cdot \int_0^\infty \frac{M(t)}{t^2} dt \quad .$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 -M\left(\frac{1}{s\cdot u}\right) ds &= \frac{1}{u}\cdot\int_0^1 \frac{M\left(\frac{1}{s\cdot u}\right)}{(s\cdot u)^{-2}}\cdot\frac{-s^{-2}}{u} ds \\
&= -\frac{1}{u}\cdot\int_{1/u}^{\infty}\frac{M(t)}{t^2}dt && \mid \text{Substitution } t=\frac{1}{s\cdot u} \\
&\geq -c_1\cdot M\left(\frac{1}{u}\right) - c_2 && \mid (*)
\end{aligned}$$

Dabei sind $c_1 := A+1$ und $c_2 := m_1\cdot\int_0^\infty t^{-2}M(t)dt$ zu setzen.
Da (M3)$\Longrightarrow$(M3$'$) gilt, liefert [Kom00](Lemma 4.1) die Endlichkeit von c_2.

b) Da (M1)+(M3)$\Longrightarrow$(M1$*$), bis auf eine Äquivalenzkonstante, und (M3) $\Longleftrightarrow$ (M3$*$) gelten, erfüllt $(M_p^*)_p$ ohne Einschränkung (M1) und (M3). Somit beweisen wir die zweite Variante analog. □

An diesem Satz zeigt sich eine Schwäche in Thilliezs Notation. Er fordert hier zusätzlich „$\gamma(M)>1$“ um Komatsus Ergebnis zu benutzen und dies zieht sich auch durch die späteren Sätze.

1.4 Wachstumskriterien

Nun fehlt uns noch ein Kriterium, das die Wachstumsgeschwindigkeit charakterisiert. Vor allem interessiert eine untere Abschätzung. Bei Thilliez sind dies die Begriffe $\gamma(M)$ und γ-streng regulär, bei Schmets und Valdivia (γ_r).

Dazu benötigen wir zunächst einen Äquivalenzbegriff.

Definition 1.8. *Zwei Folgen $(m_p)_p$ und $(m'_p)_p$ sind* ***äquivalent*** *$(m\sim m')$, falls eine Konstante $a\in\mathbb{R}, a>1$ existiert, so dass*

$$a^{-1}\cdot m_p \leq m'_p \leq a\cdot m_p \quad \forall p\in\mathbb{N}$$

gilt. $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis. Die Reflexivität ist klar (für jedes $a>1$). Die Symmetrie folgt aus

$$a^{-1}\cdot m'_p \leq a^{-1}\cdot(a\cdot m_p) = m_p = a\cdot(a^{-1}\cdot m_p)\leq a\cdot m'_p \quad .$$

Für die Transitivität seien $m\sim m'$ und $m'\sim m''$ mit den Konstanten a_1, a_2:

$$(a_1a_2)^{-1}\cdot m_p \leq a_2^{-1}\cdot m'_p \leq m''_p \leq a_2\cdot m'_p \leq (a_1a_2)\cdot m_p$$ □

Häufig wird auch $0 < \inf_p \left(\frac{m_p}{m'_p}\right) \leq \sup_p \left(\frac{m_p}{m'_p}\right) < \infty$ als Definition verwendet.
Es folgt sofort $a^{-p} \cdot M_p \leq M'_p \leq a^p \cdot M_p$ und $M(a^{-1}t) \leq M'(t) \leq M(at)$ für $t \in \mathbb{R}$. Der Sinn hiervon ist, dass viele Aussagen oder Bedingungen offensichtlich unter $\sim$ invariant sind, die Konstante aber etwas mehr Spielraum für Konstruktionen gibt.

Wir können nun das Wachstum der Folge klassifizieren ([Thi00]Definition 1.7).

Definition 1.9. *Sei $(M_p)_p$ eine streng reguläre Folge und $\gamma \in \mathbb{R}_+$.*
$(M_p)_p$ erfüllt die Eigenschaft $(\mathbf{P}_\gamma)$, *wenn eine Folge $(M'_p)_p$ mit $m' \sim m$ existiert, so dass $\left(\frac{m'_p}{p^\gamma}\right)_p$ steigt.*

Und als Notation werden wir Folgendes benutzen ([Thi00]Definition 1.11).

Definition 1.10. *Für eine streng reguläre Folge $(M_p)_p$ definieren wir:*

$$\gamma(M) := \sup\left\{\gamma \in \mathbb{R} : (\mathrm{P}_\gamma) \textit{ wird erfüllt}\right\}.$$

Beweis. Die Existenz wird gesichert durch:

Zitat: [Pet88] Corollary 1.3a

> *Die Folge $(M_p)_p$ erfülle (M0), (M1) und (M3).*
> *Dann existieren ein $\varepsilon > 0$ und eine Folge $(M'_p)_p$ mit $m' \sim m$, so dass (M0), (M1+) und (M3) von $(M'_p/p!^\varepsilon)_p$ erfüllt werden.*

Es gilt immer $0 < \gamma(M) < \infty$. ☐

Anschaulich vergleichen wir hiermit das langfristige Wachstum von $(M_p)_p$ mit dem der Gevrey-Folge $((p!)^\alpha)_p$. Offensichtlich gilt $\gamma((p!)^\alpha) = \alpha$.

So wie das Wachstumskriterium $\gamma(M)$ eingeführt wurde, können wir auch die Klasse der streng regulären Folgen dementsprechend unterteilen ([Thi00]Definition 1.13).

Definition 1.11. *Sei $(M_p)_p$ eine streng reguläre Folge und $\gamma \in \mathbb{R}_+$.*
$(M_p)_p$ heißt $\boldsymbol{\gamma}$**-streng regulär**, *wenn eine streng reguläre Folge $(M_p^{\langle\gamma\rangle})_p$ mit $m^{\langle\gamma\rangle} \sim m^{1/\gamma}$ existiert.*

Folgendes zeigt die Analogie zur Definition von $\gamma(M)$ ([Thi00]Lemma 1.14).

Lemma 1.12. *Sei $(M_p)_p$ eine streng reguläre Folge und $\gamma \in \mathbb{R}_+$ mit $\gamma < \gamma(M)$. Dann ist $(M_p)_p$ γ-streng regulär.*

Beweis. Da $1/(1/\gamma) = \gamma < \gamma(M)$ gilt, folgt durch Lemma 1.16, dass $(M_p^{\langle\gamma\rangle})_p := (M_p^{1/\gamma})_p$ streng regulär ist. ☐

Offensichtlich ist jede streng reguläre Folge 1-streng regulär.
Ist $\gamma \geq 1$, dann wird Lemma 1.17 zeigen, dass eine γ-streng reguläre Folge streng regulär ist, so dass eine schlüssige Verallgemeinerung vorliegt.

Einen anderen Zugang gibt die Eigenschaft

$$(\gamma_r) \qquad \sup_{p\in\mathbb{N}} \frac{\sqrt[r]{m_p}}{p} \sum_{q=p}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[r]{m_q}} < \infty$$

für $r \in \mathbb{N}_+$ ([SV00]Kapitel 2). Sie ist eine Verallgemeinerung von der Bedingung (M3), welche genau (γ_1) ist, und entspricht obiger Definition im Sinne von

$$(M_p)_p \text{ } r\text{-streng regulär} \overset{\text{Def 1.11}}{\iff} \left| \begin{array}{c} (m_p^{\langle\gamma\rangle})_p \text{ erfüllt (m3) :} \\ \sup\limits_{p\in\mathbb{N}} \dfrac{m_p^{\langle\gamma\rangle}}{p} \sum\limits_{q=p}^{\infty} \dfrac{1}{m_q^{\langle\gamma\rangle}} < \infty \end{array} \right| \iff (m_p)_p \text{ erfüllt } (\gamma_r)\ .$$

Wir zeigen eine später benötigte, einfache Folgerung, die die Wirkung der r-Interpolierenden auf das Wachstum erklärt ([SV00]Lemma 2.3a).

Lemma 1.13. *Sei $r \in \mathbb{N}_+$.*
Eine positive Folge $(M_p)_p$ erfüllt (γ_r) genau dann, wenn die r-Interpolierende (γ_1) erfüllt.

Beweis. Sei $(N_p)_p$ die r-Interpolierende aus Definition 1.3.

$$\text{„}\Longrightarrow\text{“}: \quad \sup_{p\in\mathbb{N}_+} \frac{n_p}{p} \sum_{q=p}^{\infty} \frac{1}{n_q} = \sup_{\substack{k\in\mathbb{N} \\ j\in\{1,\ldots,r\}}} \frac{n_{kr+j}}{kr+j} \sum_{q=kr+j}^{\infty} \frac{1}{n_q}$$
$$\leq \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{\sqrt[r]{m_{k+1}}}{kr+1} \sum_{q=k}^{\infty} \sum_{j=1}^{r} \frac{1}{n_{qr+j}}$$
$$\leq r \cdot \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{\sqrt[r]{m_{k+1}}}{kr+1} \sum_{q=k+1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[r]{m_q}}$$
$$\leq r \cdot \sup_{k\in\mathbb{N}_+} \frac{\sqrt[r]{m_k}}{k} \sum_{q=k}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[r]{m_q}} < \infty\ .$$

$$\text{„}\Longleftarrow\text{“}: \quad \sup_{p\in\mathbb{N}_+} \frac{\sqrt[r]{m_p}}{p} \sum_{q=p}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[r]{m_q}} \leq r \cdot \sup_{p\in\mathbb{N}_+} \frac{n_{pr}}{pr} \sum_{q=p}^{\infty} \frac{1}{n_{qr}}$$
$$\leq r \cdot \sup_{p\in\mathbb{N}_+} \frac{n_{pr}}{pr} \sum_{q=pr}^{\infty} \frac{1}{n_q} < \infty\ .$$

$\square$

Lemma 1.14. *Sei $(M_p)_p$ eine streng reguläre Folge und $\gamma \in \mathbb{R}_+$ mit $\gamma < \gamma(M)$. Die γ-Interpolierende $(N_p)_p$ aus Definition 1.3 erfüllt die Anforderungen an $(M_p^{\langle\gamma\rangle})_p$ aus Definition 1.11.*

Beweis. Durch Lemma 1.13 ist (M3) von $(N_p)_p$ erfüllt. Somit ist diese Folge streng regulär. Die Äquivalenz $n \sim m^{1/\gamma}$ folgt aus

$$A^{\gamma p} M_p^{1/\gamma} = A^{\gamma p} N_{\gamma p}^{1/\gamma} \overset{\text{(M2)}}{\leq} N_p \overset{\text{(M1)}}{\leq} N_{\gamma p}^{1/\gamma} = M_p^{1/\gamma} \quad . \qquad \square$$

Wir stellen noch einmal den Bezug zur Gevrey-Folge her ([SV00]Lemma 2.4).

Lemma 1.15. *Sei $r \in \mathbb{N}_+$ und $(M_p)_p$ eine Folge mit (M0) und (M1). Ist $\left(\frac{m_p}{p^r}\right)_p$ quasi-steigend, d. h. steigend ab einem Index p_0, und gilt (β_2), dann folgt (γ_r).*

Beweis. Die Folge $(Q_p)_p$ mit $Q_p := \sqrt[r]{M_p}$, $p \in \mathbb{N}$, erfüllt (M0), (M1) und (β_2), denn für beliebiges $\varepsilon > 0$ existiert ein $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$, so dass:

$$\limsup_{p\to\infty} \frac{1}{q_{kp}} \left(\frac{Q_{kp}}{Q_p}\right)^{1/p(k-1)} = \limsup_{p\to\infty} \left(\frac{1}{m_{kp}} \left(\frac{M_{kp}}{M_p}\right)^{1/p(k-1)}\right)^{1/r} \leq \varepsilon \quad .$$

Auch $(Q_p^*)_p$ erfüllt (M0), (M1) und (β_2), da ([SV00] Lemma 2.2):

$$\begin{aligned}
\limsup_{p\to\infty} \frac{1}{q_{kp}^*} \left(\frac{Q_{kp}^*}{Q_p^*}\right)^{1/p(k-1)} &= \limsup_{p\to\infty} \frac{kp}{q_{kp}} \left(\frac{p! Q_{kp}}{(kp)! Q_p}\right)^{1/p(k-1)} \\
&= \limsup_{p\to\infty} \frac{1}{q_{kp}} \left(\frac{Q_{kp}}{Q_p}\right)^{1/p(k-1)} \cdot kp \left(\frac{p!}{(kp)!}\right)^{1/p(k-1)} \\
&\overset{(*)}{=} \limsup_{p\to\infty} \frac{1}{q_{kp}} \left(\frac{Q_{kp}}{Q_p}\right)^{1/p(k-1)} \cdot kp \left(\frac{e^{p(k-1)}}{\sqrt{k} k^{kp} p^{p(k-1)}}\right)^{1/p(k-1)} \\
&\leq \varepsilon \cdot \mathrm{e} \cdot k^{-1/(k-1)} \leq \varepsilon \cdot \mathrm{e} \quad .
\end{aligned}$$

Zitat: Stirling-Formel, siehe [BSMM05] 8.107h

(∗) $\quad n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \quad$ *für $n \in \mathbb{N}$*

Somit existiert $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, so dass für $p \geq p_0$:

$$\frac{q_p^*}{q_{kp}^*} \leq \frac{1}{q_{kp}^*} \left(\frac{Q_{kp}^*}{Q_p^*}\right)^{1/p(k-1)} \overset{(\beta_2)}{\leq} \frac{1}{2} \quad .$$

Damit ist (β_1) für $(Q_p)_p$ gezeigt, also auch (γ_1) ([Pet88](Proposition 1.1a)). $\square$

1.5 Potenzieren der Folge

Wir stellen fest, dass bei der Definition von $\gamma(M)$ die Potenz entscheidend ist. Naheliegend ist daher die Betrachtung, inwiefern sich das Potenzieren der Folge auf Regularität und assoziierte Folge auswirkt.
Mit dem nächste Lemma verallgemeinern wir die Aussage von [Thi00](Lemma 1.10).

Lemma 1.16. *Sei $(M_p)_p$ eine streng reguläre Folge und $r, s \in [0, \infty[$ mit $r + s \cdot \gamma(M) > 1$.*
Dann ist die Folge $(N_p)_p$ mit $n_p := p^r \cdot m_p^s$ streng regulär und es gilt $N(t^s) \leq s \cdot M(t)$ für $t \in \mathbb{R}_+$.
Im Fall $r = 0$, d. h. $1/s < \gamma(M)$, gilt $N(t^s) = s \cdot M(t)$ für $t \in \mathbb{R}_+$.

Beweis. (M0), (M1) und (M2) sind für $(N_p)_p$ klar, da $(p!)_p$ sie ebenfalls erfüllt.
Es gilt für $\alpha > 0$ und $\beta \geq 0$:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=\beta+1}^{\infty} \left(\frac{1}{j}\right)^{\alpha+1} &\leq \left(\frac{1}{\beta+1}\right)^{\alpha+1} + \int_{\beta+1}^{\infty} \left(\frac{1}{j}\right)^{\alpha+1} dj \\
&= \left(\frac{1}{\beta+1}\right)^{\alpha+1} + \frac{1}{-\alpha} \cdot j^{-\alpha}\Big|_{\beta+1}^{\infty} \\
&= \left(\frac{1}{\beta+1}\right)^{\alpha+1} + 0 + \frac{1/\alpha}{(\beta+1)^{\alpha}} \\
&\leq \frac{1 + 1/\alpha}{(\beta+1)^{\alpha}} \quad .
\end{aligned} \tag{6}$$

Die Voraussetzung an r und s sichert die Anwendung hiervon. Mit den Bezeichnungen aus Definition 1.9/1.10 folgt dann (M3):

$$\begin{aligned}
\sum_{q=p+1}^{\infty} \frac{1}{n_q} = \sum_{q=p+1}^{\infty} \frac{1}{q^r (m_q)^s} &\leq a^s \sum_{q=p+1}^{\infty} \frac{1}{q^r (m_q')^s} && \mid m \sim m' \\
&= a^s \sum_{q=p+1}^{\infty} \left(\frac{q^{\gamma(M)}}{m_q'}\right)^s \cdot \frac{1}{q^{s\gamma(M)+r}} \\
&\leq a^s \left(\frac{(p+1)^{\gamma(M)}}{m_{p+1}'}\right)^s \cdot \sum_{q=p+1}^{\infty} \frac{1}{q^{s\gamma(M)+r}} && \mid \frac{m_p'}{p^{\gamma(M)}} \nearrow \\
&\leq a^s \left(\frac{(p+1)^{\gamma(M)}}{m_{p+1}'}\right)^s \cdot \frac{1 + 1/s\gamma(M)+r-1}{(p+1)^{s\gamma(M)+r-1}} && \mid (6) \\
&\leq a^{2s} \left(1 + \frac{1}{s\gamma(M)+r-1}\right) \frac{p+1}{(p+1)^r m_{p+1}^s} \\
&\leq 2a^{2s} \left(1 + \frac{1}{s\gamma(M)+r-1}\right) \frac{p}{n_{p+1}} \quad .
\end{aligned}$$

Für die assoziierten Funktionen gilt schließlich:

$$N(t^s) = \sup_p \ln\left(\frac{t^{sp}}{p!^r M_p^s}\right) \le \sup_p \ln\left(\frac{t^{sp}}{M_p^s}\right) = s \cdot \sup_p \ln\left(\frac{t^p}{M_p}\right) = s \cdot M(t) \quad .$$

Und im Fall $r = 0$:

$$N(t^s) = \sup_p \ln\left(\frac{t^{sp}}{M_p^s}\right) = s \cdot \sup_p \ln\left(\frac{t^p}{M_p}\right) = s \cdot M(t) \quad . \qquad \square$$

Dieses Lemma ist eigentlich nur zweckmäßig für den interessanteren Fall $s < 1$. Ansonsten ist der Beweis wesentlich trivialer.

Lemma 1.17. *Sei $(M_p)_p$ eine streng reguläre Folge und $s \ge 1$.*
Dann ist die Folge $(N_p)_p$ mit $n_p := m_p^s$ auch streng regulär
und es gilt $N(t^s) = s \cdot M(t)$ für $t \in \mathbb{R}_+$.

Beweis. (M0), (M1) und (M2) sind wieder klar. Aus $m_q^{1-s} \searrow 0$ folgt (M3):

$$\sum_{q=p+1}^{\infty} \frac{1}{n_q} = \sum_{q=p+1}^{\infty} \frac{1}{m_q^s} = \sum_{q=p+1}^{\infty} \frac{m_q^{1-s}}{m_q} \le m_{p+1}^{1-s} \cdot \sum_{q=p+1}^{\infty} \frac{1}{m_q} \le m_{p+1}^{1-s} \cdot A \frac{p}{m_{p+1}}$$
$$= A \frac{p}{m_{p+1}^s} = A \frac{p}{n_{p+1}} \quad .$$

Die Aussage der assoziierten Funktion gilt wieder durch:

$$N(t^s) = \sup_p \ln\left(\frac{t^{sp}}{M_p^s}\right) = s \cdot \sup_p \ln\left(\frac{t^p}{M_p}\right) = s \cdot M(t) \quad . \qquad \square$$

Diese Stelle zeigt den Vorteil von Thilliezs Notation, die die vorhergegangene Aussage von Lemma 1.16 leichter formulieren lässt ([Thi00] Lemma 1.10).

Lemma 1.18. *Sei $(M_p)_p$ eine streng reguläre Folge und $s \ge 0$.*
Dann ist die Folge $(N_p)_p$ mit $n_p^* := (m_p^*)^s$ auch streng regulär
und es gilt $N^*(t^s) = s \cdot M^*(t)$ für $t \in \mathbb{R}_+$.

Beweis. Es gilt $(1-s) + s \cdot \gamma(M) = 1 + s \cdot (\gamma(M) - 1) > 1$, falls (M3) erfüllt ist. Nach Lemma 1.16 ist somit $(N_p)_p$ mit $n_p = p^{1-s} m_p^s$ streng regulär.
Es folgt $n_p^* = \dfrac{n_p}{p} = \dfrac{m_p^s}{p^s} = (m_p^*)^s$. Für die assoziierten Funktionen gilt

$$N^*(t^s) = \sup_p \ln\left(\frac{t^{sp}}{N_p^*}\right) = \sup_p \ln\left(\frac{t^{sp}}{(M_p^*)^s}\right) = s \cdot \sup_p \ln\left(\frac{t^p}{M_p^*}\right) = s \cdot M^*(t) \; . \qquad \square$$

Auch bei Division mit kleineren Gevrey-Folgen $(p!^\gamma)_p$ bleibt die Regularität erhalten ([Thi00]Lemma 1.12).

Lemma 1.19. *Sei $(M_p)_p$ eine streng reguläre Folge und $\gamma \in \mathbb{R}_+$ mit $\gamma < \gamma(M) - 1$. Dann existiert eine streng reguläre Folge $(M'_p)_p$ mit $m' \sim m$, so dass die Folge $(M'_p/p!^\gamma)_p$ streng regulär ist.*

Beweis. Wir wählen $\delta \in \mathbb{R}_+$ mit $\gamma < \delta < \gamma(M) - 1$, dann gilt (P_δ). Also existiert eine Folge $(M'_p)_p$ mit $m' \sim m$, so dass $(m'_p/p^{\delta+1})_p$ steigend ist.

$(M'_p)_p$ ist eine streng reguläre Folge:
(M0) klar.
(M1), da m'_p steigend ist.

(M2) $$M'_{p+q} \le a^{p+q} M_{p+q} \le (Aa)^{p+q} M_p M_q \le (Aa^2)^{p+q} M'_p M'_q$$

(M3) $$\sum_{q \ge p+1} \frac{1}{m'_q} \le \sum_{q \ge p+1} \frac{a}{m_q} \le Aa \frac{p}{m_{p+1}} \le Aa^2 \frac{p}{m'_{p+1}} \quad .$$

Nun zeigen wir die Regularität von $(M''_p)_p := (M'_p/p!^\gamma)_p$:
(M0) klar.
(M1), da m'_p/p^γ steigend ist.

(M2) $$\begin{aligned} M''_{p+q} &= \frac{1}{(p+q)!^\gamma} M'_{p+q} && \le A^{p+q} \frac{1}{(p+q)!^\gamma} M'_p M'_q \\ &= A^{p+q} \left(\frac{p!q!}{(p+q)!} \right)^\gamma M''_p M''_q && \le A^{p+q} M''_p M''_q \end{aligned}$$

(M3) $$\begin{aligned} \sum_{q \ge p+1} \frac{1}{m''_q} &= \sum_{q \ge p+1} \frac{q^\gamma}{m'_q} = \sum_{q \ge p+1} \frac{q^{\delta+1}}{m'_q} \cdot q^{\gamma-\delta-1} \\ &\le \frac{(p+1)^{\delta+1}}{m'_{p+1}} \cdot \sum_{q \ge p+1} \left(\frac{1}{q} \right)^{\delta-\gamma+1} && \Big| \ \frac{m'_p}{p^{\delta+1}} \nearrow \\ &\le \frac{(p+1)^{\delta-\gamma+1}}{m''_{p+1}} \cdot \frac{1 + 1/\delta-\gamma}{(p+1)^{\delta-\gamma}} && \Big| \ (6) \\ &= 2 \left(1 + \frac{1}{\delta - \gamma} \right) \cdot \frac{p}{m''_{p+1}} \quad . \end{aligned}$$ □

Anmerkung 1.20. *Die Regularitätsbedingungen (M0)-(M3) übertragen sich in obigen Lemmata getrennt voneinander. Einzelne Aussagen gelten daher nicht nur für streng reguläre Folgen, sondern analog auch für Folgen, die z. B. nur (M1) und (M3) erfüllen.*

2 Ultradifferenzierbarkeit

Hier führen wir die Räume der ultradifferenzierbaren Funktionen ein, die in den folgenden Kapiteln betrachtet werden. Deren induktiver Limes wird mit Roumieu-Typ (die französischen Autoren sagen Carleman-Typ) und der projektive Limes mit Beurling-Typ bezeichnet. Letzteren werden wir erst später in Kapitel 5 näher erläutern.
Wichtig sind insbesondere Funktionen, die auf den Sektoren S_α definiert sind. Wir zeigen die Konstruktion einer dort holomorphen, ultradifferenzierbaren Funktion, die wir in Kapitel 4 weiter verwenden werden.

2.1 Einführung der Funktionenräume

Sei $K \Subset \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum mit $K = \overline{\mathring{K}}$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Die Räume der glatten Funktionen $\mathrm{C}^\infty(K)$ und $\mathrm{C}^\infty(\Omega)$ werden mit der gewohnten Topologie versehen und wir erhalten so die Funktionenräume $\mathcal{E}(K)$ und $\mathcal{E}(\Omega)$. Als Unterräume hiervon sind die glatten Funktionen mit kompaktem Träger anzusehen:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(K) &:= \{f \in \mathrm{C}^\infty(K) |\ \mathrm{supp}(f) \Subset K\} \\ \mathcal{D}(\Omega) &:= \{f \in \mathrm{C}^\infty(\Omega) |\ \mathrm{supp}(f) \Subset \Omega\} \quad .\end{aligned}$$

Ebenso werden die Funktionen mit nach oben beschränktem Träger eingeführt:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(K) &:= \{f \in \mathrm{C}^\infty([0,\infty[^n) |\ \mathrm{supp}(f) \Subset K\} \\ \mathcal{L}(\Omega) &:= \{f \in \mathrm{C}^\infty([0,\infty[^n) |\ \mathrm{supp}(f) \Subset \Omega\} \quad .\end{aligned}$$

Sinnvollerweise wird dabei beispielsweise $K = [0,1]$ gewählt, so dass $f(0) \neq 0$ gelten kann. Offensichtlich ist dann $\mathcal{D}([0,1]) \subset \mathcal{L}([0,1]) \subset \mathcal{E}([0,1])$.
Diese 3 Grundtypen genügen zur Klassifizierung des Trägers.

Während diese Bezeichnungen recht einheitlich benutzt werden, benutzen die Autoren leider verschiedene Symbole für Ultradifferenzierbarkeit. Wir halten Thilliezs Symbolik für die plakativste und weichen hier von Komatsus Schreibweise mit den Klammern ab. Prinzipiell ist sie gut, aber sie ist etwas unglücklich, da der Unterschied zur späteren Beurling-Version, z. B. $\mathcal{E}^{(M_p)}(\Omega)$, bei kleiner Druckschrift

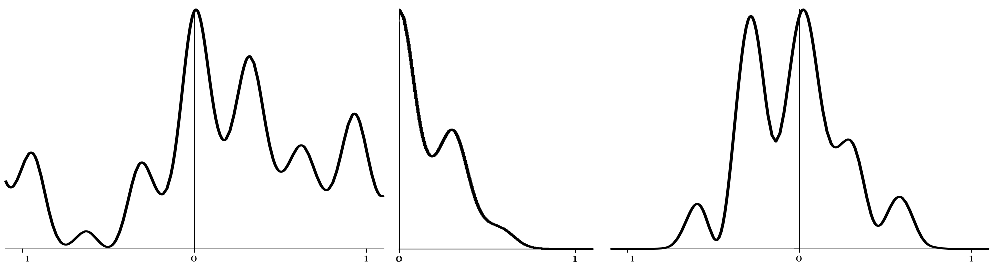

Abbildung 2.1: Funktionen aus $\mathcal{E}([-1,1])$, $\mathcal{L}([0,1])$ und $\mathcal{D}([-1,1])$

oder schlechter Handschrift nur mit gutem Auge erkennbar ist.
Zur Definition verwenden wir hier [Kom00](Kapitel 2). Die holomorphen Räume entsprechen [Thi00](Abschnitt 2.5).

Definition 2.1. *Sei Ω eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, K eine kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ($K \Subset \mathbb{R}^n$), $\sigma \in \mathbb{R}_+$ und $(M_p)_p$ eine positive Folge.*
*Wir definieren folgende Räume der **ultradifferenzierbaren Funktionen**:*

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{M,\sigma}(K) &:= \left\{ f \in \mathcal{E}(K) \,\middle|\, \exists C_f \in \mathbb{R}\ \forall J \in \mathbb{N}^n\ \forall x \in K : \ \left|D^J f(x)\right| \leq C_f \sigma^j M_j \right\} \\
\mathcal{E}_M(K) &:= \bigcup_{\sigma > 0} \mathcal{E}_{M,\sigma}(K) = \lim_{\sigma \to \infty} \mathcal{E}_{M,\sigma}(K) \\
\textit{analog} &: \mathcal{E}_{M,\sigma}(\Omega), \mathcal{E}_M(\Omega), \mathcal{D}_{M,\sigma}(K), \mathcal{D}_M(K), \mathcal{D}_{M,\sigma}(\Omega), \mathcal{D}_M(\Omega), \\
&\quad \mathcal{L}_{M,\sigma}(K), \mathcal{L}_M(K), \mathcal{L}_{M,\sigma}(\Omega), \mathcal{L}_M(\Omega) \quad .
\end{aligned}$$

Im komplexen Fall sei $\Omega \subset \mathbb{C} \hat{=} \mathbb{R}^2$.
*Wir definieren folgende Räume der **ultraholomorphen Funktionen**:*

$$\mathcal{A}_{M,\sigma}(\Omega) := \mathcal{H}(\Omega) \cap \mathcal{E}_{M,\sigma}(\Omega) \quad \textit{und} \quad \mathcal{A}_M(\Omega) := \mathcal{H}(\Omega) \cap \mathcal{E}_M(\Omega) \quad .$$

Wenn nur die Existenz der Konstante C_f von Interesse ist, wird oft der kürzere Ausdruck $\sup\limits_{x,J} \dfrac{\left|D^J f(x)\right|}{\sigma^j M_j} < \infty$ notiert.
Die Räume $\mathcal{E}_{M,\sigma}(K)$ und $\mathcal{D}_{M,\sigma}(K)$ sind Banachräume mit der Norm $\|f\|_\sigma := \sup\limits_{x \in K} \sup\limits_{J \in \mathbb{N}^n} \dfrac{\left|D^J f(x)\right|}{\sigma^j M_j}$, die der kleinstmöglichen Konstanten C_f entspricht.
Die Räume $\mathcal{E}_M(K)$ und $\mathcal{D}_M(K)$ sind als induktiver Limes nur noch (LB)-Räume.
Die reell analytischen Funktionen auf Ω bilden den Raum $\mathcal{E}_{p!}(\Omega)$.

Die folgende Tabelle soll nur einen groben Überblick über die Raum-Notationen verschaffen und beim Vergleich der verschiedenen Quellen helfen. Die Räume besitzen stets die Abschätzung wie in Definition 2.1. Die Unterschiede liegen lediglich im Definitionsbereich und beim Träger.

Autor	Raum	$C^\infty(?)$	Träger K	Quelle	hier
Komatsu Petzsche	$\mathcal{E}^{\{M_p\}}(K)$	K	–	[Kom00]Def 2.1	$\mathcal{E}_M(K)$
	$\mathcal{D}_K^{\{M_p\}}$	$\mathbb{R}^n$	$K \subset \mathbb{R}^n$		$\mathcal{D}_M(K)$
	$\mathcal{E}^{\{M_p\}}(\Omega)$	Ω	–	[Kom00]Def 2.5	$\mathcal{E}_M(\Omega)$
	$\mathcal{D}^{\{M_p\}}(\Omega)$	$\mathbb{R}^n$	$K \subset \Omega$		$\mathcal{D}_M(\Omega)$
Schmets Valdivia	$\mathcal{D}_{1,\{M\}}$	$\mathbb{R}$	$K \subset [-1,1]$	[SV00]Kap 3	$\mathcal{D}_M([-1,1])$
	$\mathcal{L}_{1,\{M\}}$	$[0,\infty[$	$K \subset [0,1]$		$\mathcal{L}_M([0,1])$
	$\mathcal{E}_{1,\{M\}}$	$[0,1]$	–		$\mathcal{E}_M([0,1])$
	$\mathcal{N}_{1,\{M\}}$	$[0,\infty[$	–		$\mathcal{E}_M([0,\infty[)$
Thilliez	$\mathcal{C}_M(\Omega)$	Ω	–	[Thi00]Kap 1.2	$\mathcal{E}_M(\Omega)$

Tabelle 2.1: Vergleich der Raum-Notationen

Schmets und Valdivia führen in [SV00](Kapitel 3) für den ein-dimensionalen Fall noch allgemeinere Räume ein, die sie mit $\mathcal{D}^{\sigma}_{r,\{M\}}$ notieren. Wir führen hier eine andere Notation ein, um sie der obigen Notation anzupassen.
Es stellt sich dabei das Problem, wo wir das r notieren. Ein weiterer Index hinten stellt Verwechslungsgefahr im Fall der Roumieu-Klasse, z. B. $\mathcal{D}_{M,3}(\Omega)$. Vorangestellt ist dies jedoch klar. Den hochgestellten Platz möchten wir frei halten für den Beurling-Fall $\mathcal{D}^{-}_{r,M}(\Omega)$ in Kapitel 5.
Des Weiteren werden in [SV00] nur $\sigma \in \mathbb{N}_+$ betrachtet, da dies keine wesentliche Einschränkung darstellt. Wir schreiben daher die Aussagen und Beweise in $\sigma \in \mathbb{R}_+$ um.

Definition 2.2. *Sei K eine kompakte Teilmenge in $\mathbb{R}$ ($K \Subset \mathbb{R}$), $\sigma \in \mathbb{R}_+$, $r \in \mathbb{N}_+$ und $(M_p)_p$ eine positive Folge.*

$$\mathcal{D}_{r,M,\sigma}(K) \;:=\; \left\{ f \in \mathcal{D}(K) \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall j \in \mathbb{N}\ \forall k \in \{1,\dots,r-1\} :\ f^{(jr+k)}(0) = 0, \\ \exists C_f \in \mathbb{R}\ \forall j \in \mathbb{N}\ \forall x \in K :\ \left|D^{jr} f(x)\right| \leq C_f \sigma^j M_j \end{array} \right\}$$

Für alle weiteren Räume analog.

Einige topologische Eigenschaften wurden von Komatsu betrachtet:

Zitat: Teil von [Kom00] Theorem 2.6

> *$\mathcal{E}_M(K)$, $\mathcal{D}_M(K)$ und $\mathcal{D}_M(\Omega)$ sind (DFS)-Räume. Somit sind sie separable, vollständige, bornologische Montel- und Schwartz-Räume.*
> *$\mathcal{E}_M(\Omega)$ ist ein vollständiger Schwartz-Raum.*
> *Insbesondere sind diese Räume semi-reflexiv. Gilt (M2′), so sind sie nuklear.*

Zitat: Teil von [Kom00] Theorem 5.12

> *Es gelte (M1) und (M3′):*
> $\mathcal{E}_M(\Omega)$ *ist ein vollständiger, bornologischer Montel- und Schwartz-Raum.*
> *Gilt (M2′), so ist er nuklear.*

Es ist eine topologisch algebraische Struktur gegeben durch [Kom00](Proposition 2.7) bzw. [Thi00](Lemma 1.3).

Lemma 2.3. *Sei* $(M_p)_p$ *eine positive Folge mit (M0) und (M1).*
Für $f_1 \in \mathcal{E}_{M,\sigma_1}(\Omega)$, $f_2 \in \mathcal{E}_{M,\sigma_2}(\Omega)$ *ist* $f_1 f_2 \in \mathcal{E}_{M,\sigma_1+\sigma_2}(\Omega)$ *und es gilt* $\|f_1 f_2\|_{\Omega,\sigma_1+\sigma_2} \leq \|f_1\|_{\Omega,\sigma_1} \|f_2\|_{\Omega,\sigma_2}$.

Beweis. Wir benutzen die Leibniz-Formel im Mehrdimensionalen:

$$\begin{aligned}
\frac{\left|D^J(f_1 f_2)(x)\right|}{(\sigma_1+\sigma_2)^j M_j} &= \frac{\left|\sum\limits_{K+L=J} \binom{J}{K} (D^K f_1)(x)(D^L f_2)(x)\right|}{(\sigma_1+\sigma_2)^j M_j} \\
&\leq \frac{1}{(\sigma_1+\sigma_2)^j} \sum_{K+L=J} \binom{j}{k} \frac{\left|(D^K f_1)(x)\right|}{M_k} \frac{\left|(D^L f_2)(x)\right|}{M_l} \qquad \mid (1) \\
&\leq \frac{\sum\limits_{K+L=J} \binom{j}{k} \sigma_1^k \sigma_2^l}{(\sigma_1+\sigma_2)^j} \cdot \sup_{K\in\mathbb{N}^n} \frac{\left|(D^K f_1)(x)\right|}{\sigma_1^k M_k} \cdot \sup_{L\in\mathbb{N}^n} \frac{\left|(D^L f_2)(x)\right|}{\sigma_2^l M_l} \\
&= \sup_{K\in\mathbb{N}^n} \frac{\left|(D^K f_1)(x)\right|}{\sigma_1^k M_k} \cdot \sup_{L\in\mathbb{N}^n} \frac{\left|(D^L f_2)(x)\right|}{\sigma_2^l M_l} \quad .
\end{aligned}$$

□

Gilt (M3′), so ist $\mathcal{E}_{M,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ nicht quasi-analytisch und enthält deshalb nicht-triviale Funktionen f, die bei 0 flach sind, d. h. $D^J f(0) = 0$ für alle Multi-Indizes $J \in \mathbb{N}^n$ erfüllen. Mit (M2), $r \in \mathbb{N}$, $J, K \in \mathbb{N}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ und einem $\theta \in (0, x)$ gilt für diese durch Taylorapproximation an der Stelle 0 ([Thi00]Formel 16):

$$\begin{aligned}
\left|D^J f(x)\right| &= \left|D^J \left(\sum_{|K|\leq r} \frac{D^K f(0)}{K!}\, x^K + \sum_{|K|=r+1} \frac{D^K f(\theta)}{K!}\, x^K\right)\right| \\
&= \left|\sum_{K\geq J, |K|\leq r} \frac{D^K f(0)}{(K-J)!}\, x^{K-J} + \sum_{K\geq J, |K|=r+1} \frac{D^K f(\theta)}{(K-J)!}\, x^{K-J}\right| \\
&\overset{\text{flach}}{\leq} \left|\sum_{K\geq J, |K|=r+1} \frac{D^K f(\theta)}{(K-J)!}\, x^{K-J}\right| \\
&\overset{r=j-1}{\leq} \|f\|_{\Omega,\sigma} \cdot \inf_{p\in\mathbb{N}} \frac{\sigma^{p+j} M_{p+j}}{p!}\; |x|^p
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\overset{\text{(M2)}}{\leq} \|f\|_{\Omega,\sigma} \cdot \inf_{p\in\mathbb{N}} \frac{A^{p+j}\sigma^{p+j}M_pM_j}{p!} \; |x|^p \\
&\leq \|f\|_{\Omega,\sigma} A^j\sigma^j M_j \cdot \inf_{p\in\mathbb{N}} (A\sigma\,|x|)^p\, M_p \\
&\leq \|f\|_{\Omega,\sigma} A^j\sigma^j M_j \exp\left(-M^*\left(\frac{1}{A\sigma\,|x|}\right)\right) \quad . \tag{7}
\end{aligned}$$

2.2 Sektoriell holomorphe Funktionen

In den folgenden Sätzen werden wir zu einer regulären Folge holomorphe Funktionen konstruieren, die betragsmäßig mit der assoziierten Funktion zusammenhängen. Zunächst betrachten wir den Fall der offenen rechten Halbebene S_1. Dies ist im Grunde [Thi00](Lemma 2.4). Allerdings kommen wir ohne die Verwendung von (M2) zu dem Ergebnis, indem im Beweis die Konstanten der betrachteten Funktion modifiziert werden! Zudem haben wir die Konstanten auf eine Seite notiert.

Satz 2.4. *Sei $(M_p)_p$ eine streng reguläre Folge, wobei (M2) nicht vorausgesetzt wird.*
Dann existieren eine Funktion $F \in \mathcal{H}(S_1)$ und positive Konstanten c_1 und c_2, die nur von $(M_p)_p$ abhängen, so dass

$$\exp\left(-M\left(\frac{1}{x}\right)\right) \leq |F(x+\mathrm{i}y)| \leq \exp\left(c_1 - c_2\cdot M\left(\frac{1}{|x+\mathrm{i}y|}\right)\right)$$

für $x+\mathrm{i}y \in S_1$ gilt.

Beweis. Für $z = x+\mathrm{i}y \in S_1$ und $c_3, c_4, c_5 \in \mathbb{R}_+$ definieren wir

$$F(x+\mathrm{i}y) := \exp\left(c_3 + c_4\int_{-\infty}^{+\infty} -M\left(\frac{1}{c_5|t|}\right)\frac{\mathrm{i}tz-1}{\mathrm{i}t-z}\frac{dt}{1+t^2}\right). \tag{8}$$

Thilliez verweist dabei auf die „klassische Konstruktion äußerer Funktionen von Hardy-Räumen H^p", die Beurling studiert hatte. Die Holomorphie ist damit klar und die Konstanten werden nun passend zur Behauptung bestimmt. Wir benutzen nun $\mathrm{e}^a = \left|\mathrm{e}^{a+\mathrm{i}b}\right|$ für $a, b \in \mathbb{R}$ mit:

$$\begin{aligned}
\Re\left(\frac{\mathrm{i}tz-1}{\mathrm{i}t-z}\cdot\frac{1}{1+t^2}\right) &= \Re\left(\frac{\mathrm{i}tx-ty-1}{-x+\mathrm{i}(t-y)}\right)\cdot\frac{1}{1+t^2} \\
&= \Re\left(\frac{(\mathrm{i}tx-ty-1)(-x-\mathrm{i}(t-y))}{x^2+(t-y)^2}\right)\cdot\frac{1}{1+t^2} \\
&= \frac{txy+x+t^2x-txy}{x^2+(t-y)^2}\cdot\frac{1}{1+t^2} \\
&= \frac{x}{x^2+(t-y)^2} \quad .
\end{aligned} \tag{9}$$

Dieser Term wird Poisson-Kern genannt. Also:

$$(10) \qquad |F(x+\mathrm{i}y)| = \exp\left(c_3 + c_4 \int_{-\infty}^{+\infty} -M\left(\frac{1}{c_5|t|}\right) \frac{x}{x^2+(t-y)^2} dt\right) \quad .$$

Nun substituieren wir $c_5 t = xs$:

$$(11) \qquad |F(x+\mathrm{i}y)| = \exp\left(c_3 + \frac{c_4}{c_5} \int_{-\infty}^{+\infty} -M\left(\frac{1}{x|s|}\right) \frac{x^2}{x^2+(c_5^{-1}xs-y)^2} ds\right) \quad .$$

Es gilt $-M\left(\frac{1}{x|s|}\right) \geq -M\left(\frac{1}{x}\right)$ für $|s| \geq 1$, da $-M$ fällt wegen (M1):

$$\begin{aligned}
\int_{|s|\geq 1} -M\left(\frac{1}{x|s|}\right) \frac{x^2}{x^2+(c_5^{-1}xs-y)^2} ds &\geq -M\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \int_{|s|\geq 1} \frac{x^2}{x^2+(c_5^{-1}xs-y)^2} ds \\
&\geq -M\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+(c_5^{-1}s-\frac{y}{x})^2} ds \\
&= -M\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \arctan\left(c_5^{-1}s - \frac{y}{x}\right)\Big|_{-\infty}^{\infty} \\
&= -M\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \pi
\end{aligned}$$

und da (M1) und (M3) gelten, folgt aus dem Lemma 1.7a mit $c_6, c_7 \in \mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned}
\int_{|s|\leq 1} -M\left(\frac{1}{x|s|}\right) \underbrace{\frac{x^2}{x^2+(c_5^{-1}xs-y)^2}}_{\in(0,1]} ds &\geq \int_{-1}^{+1} -M\left(\frac{1}{x|s|}\right) ds \\
&\geq 2\left(-c_6 \cdot M\left(\frac{1}{x}\right) - c_7\right) .
\end{aligned}$$

Zusammen ergibt dies die untere Abschätzung

$$\begin{aligned}
|F(x+\mathrm{i}y)| &\geq \exp\left(c_3 - 2c_4c_7 - c_4 \cdot (\pi + 2c_6) \cdot M\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\
&= \exp\left(-M\left(\frac{1}{x}\right)\right)
\end{aligned}$$

durch Wahl von $c_4 := (\pi + 2c_6)^{-1}$ und $c_3 := 2c_4c_7$.

Zurück zu (10). Wir berechnen zunächst

$$\int_{|t-y|\leq x} \frac{x}{x^2+(t-y)^2} dt = \int_{-x}^{x} \frac{x}{x^2+\xi^2} d\xi = \arctan\frac{\xi}{x}\Big|_{-x}^{+x} = \frac{\pi}{2}$$

und mit $|t-y| \leq x \Rightarrow |t| \leq |t-y| + |y| \leq \sqrt{2}|x+\mathrm{i}y|$ folgt dann aus (M1):

$$\int_{|t-y|\leq x} -M\left(\frac{1}{c_5|t|}\right)\frac{x}{x^2+(t-y)^2}dt \leq -M\left(\frac{1}{\sqrt{2}c_5|x+\mathrm{i}y|}\right)\cdot\frac{\pi}{2} \quad . \tag{12}$$

$$\int_{|t-y|>x} -M\left(\frac{1}{|t|}\right)\frac{x}{x^2+(t-y)^2}dt \leq 0 \tag{13}$$

ist offensichtlich und somit ist dies kombiniert die obere Abschätzung

$$|F(x+\mathrm{i}y)| \leq \exp\left(c_3 - \frac{\pi}{2}c_4\cdot M\left(\frac{1}{\sqrt{2}c_5|x+\mathrm{i}y|}\right)\right)$$

durch Wahl von $c_5 = 1/\sqrt{2}$. □

Bei Thilliez tauchen die Inversen in diesem Satz so nicht auf, da er die assoziierte Funktion h_M zur Formulierung benutzt. Ohne Inverse ist aber auch eine angepasste Variante möglich, die die vorige Beweisidee aufgreift.

Satz 2.5. *Sei $(M_p)_p$ eine streng reguläre Folge, wobei (M2) nicht vorausgesetzt wird.*
Dann existieren eine Funktion $F \in \mathcal{H}(S_1)$ und positive Konstanten c_1 und c_2, die nur von $(M_p)_p$ abhängen, so dass

$$\exp(-c_1\cdot M(|x+\mathrm{i}y|) - c_2) \leq |F(x+\mathrm{i}y)| \leq \exp(-M(x))$$

für $x+\mathrm{i}y \in S_1$ gilt.

Beweis. Für $z = x+\mathrm{i}y \in S_1$ definieren wir die holomorphe Funktion

$$F(x+\mathrm{i}y) := \exp\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} -M\left(\frac{|t|}{\sqrt{2}}\right)\frac{\mathrm{i}tz-1}{\mathrm{i}t-z}\frac{dt}{1+t^2}\right). \tag{14}$$

Benutzen wir wieder $\exp(a) = |\exp(a+\mathrm{i}b)|$ für $a,b\in\mathbb{R}$ mit

$$\Re\left(\frac{\mathrm{i}tz-1}{\mathrm{i}t-z}\cdot\frac{1}{1+t^2}\right) = \frac{x}{x^2+(t-y)^2} \quad , \qquad | = (9) \tag{15}$$

so erhalten wir:

$$|F(x+\mathrm{i}y)| = \exp\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} -M\left(\frac{|t|}{\sqrt{2}}\right)\frac{x}{x^2+(t-y)^2}dt\right) \quad . \tag{16}$$

Die obere Abschätzung erreichen wir nun durch Zerlegung des Integrals an der Stelle $\sqrt{2}\,|z|$. Es gilt $-M\left(\frac{|t|}{\sqrt{2}}\right) \leq -M(|z|)$ für $|t| \geq \sqrt{2}\,|z|$, da $-M$ fällt wegen (M1).

$$\begin{aligned}
\int_{|t|\geq\sqrt{2}|z|} -M\left(\frac{|t|}{\sqrt{2}}\right)\frac{x}{x^2+(t-y)^2}dt &\leq -M(x)\cdot\int_{|t|\geq\sqrt{2}|z|}\frac{x}{x^2+(t-y)^2}dt\\
&= -M(x)\cdot\int_{|t|\geq\sqrt{2}|z|}\frac{1}{1+(\frac{t-y}{x})^2}\cdot\frac{1}{x}dt\\
&\leq -M(x)\cdot\int_{|\xi|\geq 0}\frac{1}{1+\xi^2}d\xi\\
&= -M(x)\cdot(\arctan(\infty)-\arctan(-\infty))\\
&= -M(x)\cdot\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\\
&= -M(x)\cdot\pi
\end{aligned}$$

und $\int_{|t|\leq\sqrt{2}|z|} -M\left(\frac{|t|}{\sqrt{2}}\right)\frac{x}{x^2+(t-y)^2}dt \leq 0$ ist trivial wegen $x>0$.

Für die untere Abschätzung wird wieder das Resultat von Komatsu angewandt:

Zitat: Teil von [Kom00] Lemma 4.4 , Formel (4.14)

(∗) *(M1) und (M3)* $\Rightarrow$ $p\cdot\int_p^\infty \frac{M(t)}{t^2}dt \leq (A+1)M(p)+m_1\cdot\int_0^\infty\frac{M(t)}{t^2}dt$.
Und [Kom00](Lemma 4.1) liefert die Endlichkeit des letzten Integrals unter diesen Voraussetzungen.

Für $t\geq\sqrt{2}|z|$ und $c_3 := 6+4\sqrt{2}\approx 11.66$ gilt $\frac{x}{x^2+(t-y)^2} < \frac{c_3|z|}{t^2}$, denn für $y>0$ ist

$$\begin{aligned}
c_3|z|(x^2+(t-y)^2)-xt^2 &= c_3|z|(t^2-2yt+|z|^2)-xt^2\\
&> c_3|z|(t-|z|)^2-|z|t^2\\
&= |z|(c_3(t-|z|)^2-t^2)\\
&= |z|(\sqrt{c_3}(t-|z|)-t)(\sqrt{c_3}(t-|z|)+t)\\
&= |z|((\sqrt{c_3}-1)t-\sqrt{c_3}|z|)((\sqrt{c_3}+1)t-\sqrt{c_3}|z|)\\
&\geq |z|^3\underbrace{((\sqrt{c_3}-1)\sqrt{2}-\sqrt{c_3})}_{=0}((\sqrt{c_3}+1)\sqrt{2}-\sqrt{c_3})
\end{aligned}$$

und für $y\leq 0$ ist es klar. Sicherlich könnte c_3 kleiner gewählt werden. Es reicht hier jedoch die Existenz. Fordern wir noch größere t, so können wir c_3 kleiner wählen (aber scheinbar nicht beliebig klein).

Damit folgt dann

$$\begin{aligned}\int_{|t|\geq\sqrt{2}|z|} -M\left(\frac{|t|}{\sqrt{2}}\right)\frac{x}{x^2+(t-y)^2}dt &> \int_{|t|\geq\sqrt{2}|z|} -M\left(\frac{|t|}{\sqrt{2}}\right)\frac{c_3\,|z|}{t^2}dt \\ &= -\sqrt{2}c_3\,|z|\cdot\int_{|z|}^{\infty}\frac{M\,(t)}{t^2}dt && |\ \text{Subst.} \\ &\geq -c_4\cdot M(|z|)-c_5 && |\ (*)\end{aligned}$$

mit bestimmten positiven Konstanten c_4 und c_5. Mit (M1) gilt:

$$\begin{aligned}\int_{|t|\leq\sqrt{2}|z|} -M\left(\frac{|t|}{\sqrt{2}}\right)\frac{x}{x^2+(t-y)^2}dt &> -M\,(|z|)\cdot\int_{|t|\leq\sqrt{2}|z|}\frac{x}{x^2+(t-y)^2}dt \\ &= -M\,(|z|)\cdot\left[\arctan\left(\frac{t-y}{x}\right)\right]_{\cdots}^{\cdots} \\ &\geq -M\,(|z|)\cdot\pi \quad .\end{aligned}$$

Zusammen ergibt sich also:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} -M\left(\frac{|t|}{\sqrt{2}}\right)\frac{x}{x^2+(t-y)^2}dt \geq -\frac{\pi+c_4}{\pi}\cdot M(|z|)-\frac{c_5}{\pi} \quad .$$

Dies entspricht der Behauptung mit $c_1 := \dfrac{\pi+c_4}{\pi}$ und $c_2 := \dfrac{c_5}{\pi}$. □

Bei den beiden vorigen Beweisen können wir die Abschätzung (5) im Kapitel 1 als letzten Schritt benutzen, wenn wir die Bedingung (M2) voraussetzen. Wir erhalten dadurch folgenden Satz.

Satz 2.6. *Sei $(M_p)_p$ eine streng reguläre Folge.*
Dann existieren Funktionen $F_1, F_2 \in \mathcal{H}(S_1)$ und positive Konstanten $c_{1,\ldots,4}$, die nur von $(M_p)_p$ abhängen, so dass

$$\begin{aligned}&a)\ \exp\left(-M\left(\frac{1}{x}\right)\right) && \leq |F_1(x+\mathrm{i}y)| \leq \exp\left(c_1 - M\left(\frac{1}{c_2\,|x+\mathrm{i}y|}\right)\right) \\ &b)\ \exp(-M(c_3\,|x+\mathrm{i}y|)-c_4) && \leq |F_2(x+\mathrm{i}y)| \leq \exp(-M(x))\end{aligned}$$

für $x+\mathrm{i}y \in S_1$ gelten.

Sei $(M_p)_p$ eine streng reguläre Folge. In Kapitel 1 haben wir gezeigt, dass eine äquivalente streng reguläre Folge $(N_p)_p$ existiert, bei der auch $(N_p^*)_p$ streng regulär ist. Damit können wir in den Ansätzen ((8) und (14)) ausnutzen, dass $M(a^{-1}t) \leq N(t) \leq M(at)$ für $t \in \mathbb{R}$ gilt. Wir beweisen dann analog Folgendes.

Satz 2.7. *Sei $(M_p)_p$ eine streng reguläre Folge, wobei (M2) nicht vorausgesetzt wird.*
Dann existieren Funktionen $F_1, F_2 \in \mathcal{H}(S_1)$ und positive Konstanten $c_{1,\dots,4}$, die nur von $(M_p)_p$ abhängen, so dass

$$a)\ \exp\left(-M^*\left(\frac{1}{x}\right)\right) \leq |F_1(x+\mathrm{i}y)| \leq \exp\left(c_1 - c_2 \cdot M^*\left(\frac{1}{|x+\mathrm{i}y|}\right)\right)$$
$$b)\ \exp(-c_3 \cdot M^*(|x+\mathrm{i}y|) - c_4) \leq |F_2(x+\mathrm{i}y)| \leq \exp(-M^*(x))$$

für $x+\mathrm{i}y \in S_1$ gelten.

2.3 Sektoriell ultraholomorphe Funktionen

Nun lässt sich eine Funktion wie in den vorigen Sätzen 2.6/2.7 weiter verwenden zur Betrachtung allgemeinerer Sektoren S_γ. Zusätzlich ist die Funktion, die wir hier konstruieren, ultradifferenzierbar und gehört somit zur Roumieu-Klasse ([Thi00]Theorem 2.8).

Satz 2.8. *Sei $(M_p)_p$ eine streng reguläre Folge, wobei (M2) nicht vorausgesetzt wird, und $\gamma \in \mathbb{R}_+$ mit $\gamma < \gamma(M)$.*
Dann existieren eine Funktion $G \in \mathcal{A}_M(S_\gamma)$ und positive Konstanten c_1, c_2, c_3, die nur von γ und $(M_p)_p$ abhängen, so dass

$$\exp\left(-c_1 \cdot M^*\left(\frac{1}{|z|}\right)\right) \leq |G(z)| \leq \exp\left(c_2 - 2 \cdot M^*\left(\frac{1}{c_3\,|z|}\right)\right)$$

für $z \in S_\gamma$ gilt.

Beweis. Der Trick hierbei ist, zunächst einen zu großen Sektoren zu betrachten. Seien also $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ mit $\gamma < \alpha < \beta < \gamma(M)$. Auf S_α kann zunächst die Abschätzung gezeigt werden durch Abbildung in den bekannten Fall S_1. Die Ultradifferenzierbarkeit folgt dann aus der Cauchy'schen Integralformel.

Wir betrachten die Folge $(N_p)_p$ mit $n_p^* := (m_p^*)^{1/\beta}$, die dank Lemma 1.18 die gleichen Bedingungen wie $(M_p)_p$ erfüllt. Somit können wir Satz 2.7a hier für $(N_p)_p$ anwenden und G definieren durch

$$G(z) := F_1\left(\left(\left(\cos\frac{\pi\alpha}{2\beta}\right)^{-1} \cdot z^{1/\beta}\right)^{\beta c_4}\right) \quad \text{für } z \in S_\alpha \quad .$$

Die Konstante $c_4 \in \mathbb{R}_+$ wird später gewählt. Da $z \mapsto z^{1/\beta}$ holomorph von S_α in $S_{\alpha/\beta} \subset S_1$ abbildet, ist G wohldefiniert und holomorph auf S_α.
Dann ergeben sich die behaupteten Abschätzungen aus

$$\Re\left(z^{1/\beta}\right) = \left|z^{1/\beta}\right| \cdot \cos(\arg \underbrace{z^{1/\beta}}_{\in S_{\alpha/\beta}}) \geq \left|z^{1/\beta}\right| \cdot \cos\frac{\pi\alpha}{2\beta} \quad :$$

$$\begin{aligned}
|G(z)| &= \left|F\left(\left(\left(\cos\frac{\pi\alpha}{2\beta}\right)^{-1} z^{1/\beta}\right)^{\beta c_4}\right|\right. \geq \exp\left(-\beta c_4 \cdot N^*\left(\frac{\cos\frac{\pi\alpha}{2\beta}}{\Re(z^{1/\beta})}\right)\right) && \mid \text{Satz } 2.7a \\
&\geq \exp\left(-\beta c_4 \cdot N^*\left(\frac{1}{\left|z^{1/\beta}\right|}\right)\right) \\
&= \exp\left(-c_4 \cdot M^*\left(\frac{1}{|z|}\right)\right) && \mid \text{Lemma } 1.18 \\
|G(z)| &\leq \exp\left(\beta c_4 c_5 - \beta c_4 c_6 \cdot N^*\left(\frac{\cos{}^{\pi\alpha}/_{2\beta}}{\left|z^{1/\beta}\right|}\right)\right) && \mid \text{Satz } 2.7a \\
&= \exp\left(\beta c_4 c_5 - \underbrace{c_4 c_6}_{=2} \cdot M^*\left(\frac{(\cos{}^{\pi\alpha}/_{2\beta})^\beta}{|z|}\right)\right) && \mid \text{Lemma } 1.18
\end{aligned}$$

für $z \in S_\alpha$, also insbesondere für $z \in S_\gamma$. Dabei sind $c_5, c_6 \in \mathbb{R}_+$ die Konstanten aus Satz 2.7a.
$c_4 := 2/c_6$ wird für den nächsten Beweis so gewählt.
Für die Behauptung setzen wir also $c_1 := c_4$, $c_2 := \beta c_4 c_5$ und $c_3 := (\cos\frac{\pi\alpha}{2\beta})^{-\beta}$.

Aus der Definition (3) von $M^*(\cdot)$ folgt für $p \in \mathbb{N},\ t \in \mathbb{R}_+$:

$$(17) \qquad -M^*\left(\frac{1}{t}\right) = -\sup_{j\in\mathbb{N}} \ln\left(\frac{1}{t^j \cdot M_j^*}\right) = \inf_{j\in\mathbb{N}} \ln\left(t^j \cdot M_j^*\right) \leq \ln(t^p \cdot M_p^*) \quad .$$

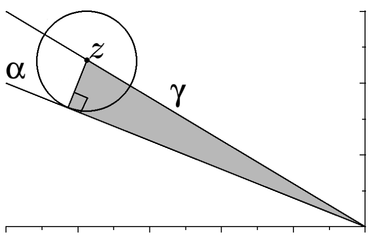

Abbildung 2.2: Skizze

Zuletzt fehlt noch die Zugehörigkeit von G zu $\mathcal{E}_M(S_\gamma)$, denn $\mathcal{A}_M = \mathcal{H} \cap \mathcal{E}_M$.
Sei also fortan $z \in S_\gamma$.
Hier wird nun die Cauchy'sche Integralformel benutzt (siehe z. B. [Wer06] Korollar II.3.5).
Wählen wir $0 < r < \sin(\min(1, \alpha - \gamma) \cdot \frac{\pi}{2})$, so liegt die offene Kreisscheibe $B_{r|z|}(z)$ in S_α. Da $r \in]0, 1[$ ist diese auch klein genug, um den Ursprung nicht abzudecken. Die Bildung des Minimums ist eher technischer Natur, um z. B. den Fall $\alpha - \gamma = 2$ ($\Rightarrow r = 0$) zu verhindern. Würden wir obige Abschätzungen mit Satz 2.6, also mit $M(\cdot)$, ausführen, so scheitert die folgende Abschätzung für betragskleine z.

Es gilt durch triviale Abschätzung des Integrals:

$$
\begin{aligned}
\left|G^{(j)}(z)\right| &= \left|\frac{j!}{2\pi\mathrm{i}}\cdot\int_{\partial B_{r|z|}(z)}\frac{G(\xi)}{(\xi-z)^{j+1}}\,d\xi\right| \\
&\le \frac{j!}{2\pi}\cdot 2\pi r\,|z|\cdot\frac{\exp\left(c_2-2\cdot M^*\left(\frac{1}{c_3\cdot(1+r)\cdot|z|}\right)\right)}{(r\,|z|)^{j+1}} && \text{(18)} \quad |\ \text{oben} \\
&\le \frac{j!}{2\pi}\cdot 2\pi r\,|z|\cdot\frac{\exp\left(c_2-M^*\left(\frac{1}{c_3\cdot(1+r)\cdot|z|}\right)\right)}{(r\,|z|)^{j+1}} \\
&\le \frac{j!}{2\pi}\cdot 2\pi r\,|z|\cdot\frac{\exp(c_2)\cdot(c_3(1+r)\cdot|z|)^j\cdot M_j^*}{(r\,|z|)^{j+1}} && |\ (17) \\
&= \exp(c_2)\cdot\left(\frac{c_3(1+r)}{r}\right)^j\cdot M_j \quad . && \text{(19)}
\end{aligned}
$$

Somit ist G ultradifferenzierbar. □

Wenn wir den letzten Teil des vorigen Beweises näher betrachten, sind weitere Abschätzungen für die Ableitungen dieser Funktion möglich ([Thi00]Lemma 2.9).

Lemma 2.9. *Sei G die Funktion aus Satz 2.8.*
Dann existieren Konstanten $c_{1,\ldots,6}\in\mathbb{R}_+$, so dass für $j\in\mathbb{N}$, $z\in S_\gamma$ gilt:

$$
\begin{aligned}
a)\quad & \left|G^{(j)}(z)\right| && \le c_1c_2^jM_j\exp\left(-M^*\left(\frac{1}{c_3\,|z|}\right)\right) \\
b)\quad & \left|\left(\frac{1}{G}\right)^{(j)}(z)\right| && \le c_4^jM_j\exp\left(c_5\cdot M^*\left(\frac{1}{c_6\,|z|}\right)\right)
\end{aligned}
$$

Gilt (M2), so kann $c_5=1$ angenommen werden.

Beweis. Sei r wieder wie im Beweis von Satz 2.8.

a) Wir setzen bei (18), mit $c_6,c_7\in\mathbb{R}_+$, wieder an und rechnen analog:

$$
\begin{aligned}
\left|G^{(j)}(z)\right| &\le \frac{j!}{(r\,|z|)^j}\cdot\exp\left(c_6-2\cdot M^*\left(\frac{1}{c_7(1+r)\cdot|z|}\right)\right) && |\ (18) \\
&\le \frac{j!}{(r\,|z|)^j}\exp\left(c_6-M^*\left(\frac{1}{c_7(1+r)\,|z|}\right)-M^*\left(\frac{1}{c_7(1+r)\,|z|}\right)\right) \\
&\le \underbrace{\exp(c_6)}_{c_1}\left(\underbrace{\frac{c_7(1+r)}{r}}_{c_2}\right)^jM_j\cdot\exp\left(-M^*\left(\frac{1}{\underbrace{c_7(1+r)}_{c_3}\,|z|}\right)\right) \quad .
\end{aligned}
$$

b) Wieder mit der Cauchy'schen Integralformel, $c_8 \in \mathbb{R}_+$:

$$
\begin{aligned}
\left|\left(\frac{1}{G}\right)^{(j)}(z)\right| &= \left|\frac{j!}{2\pi\mathrm{i}} \cdot \int_{\partial B_{r|z|}(z)} \frac{1}{G(\xi)\cdot(\xi - z)^{j+1}}\, d\xi\right| \\
&\overset{\text{Satz 2.8}}{\leq} \frac{j!}{2\pi} \cdot 2\pi r\,|z| \cdot \frac{\exp\left(c_8 \cdot M^*\left(\frac{1}{(1-r)\cdot|z|}\right)\right)}{(r\,|z|)^j} \\
&\leq \frac{j!}{(r\,|z|)^j} \exp\left((c_8+1)\cdot M^*\left(\frac{1}{(1-r)\,|z|}\right) - M^*\left(\frac{1}{(1-r)\,|z|}\right)\right) \\
&\overset{(17)}{\leq} \frac{j!}{(r\,|z|)^j}((1-r)\,|z|)^j M_j^* \exp\left((c_8+1)\cdot M^*\left(\frac{1}{(1-r)\cdot|z|}\right)\right) \\
&= \Bigg(\underbrace{\frac{1-r}{r}}_{c_4}\Bigg)^j M_j \exp\left(\underbrace{(c_8+1)}_{c_5}\cdot M^*\left(\frac{1}{\underbrace{(1-r)}_{c_6}\cdot|z|}\right)\right) \quad .
\end{aligned}
$$

Gilt schließlich zusätzlich (M2), so können wir (5) anwenden, um c_5 zu entfernen.

□

3 Gewichtsfunktionen

Bei der Einführung der assoziierten Funktion in Abschnitt 1.3 wurde erwähnt, dass die Bedingungen der Folge an der Funktion wieder erkennbar sind. Eine alternative Theorie ist daher möglich, indem wir direkt Bedingungen an die assoziierte Funktion stellen. Mit etwas allgemeineren Anforderungen sind dies die Gewichtsfunktionen, die Braun, Meise und Taylor in [BMT90] einführen.
Auch hier sind ultradifferenzierbare Funktionen einführbar und entsprechen den uns bereits bekannten aus dem vorigen Kapitel. Wie schon von Thilliez in Abschnitt 2.2 wird zunächst Beurlings Methodik der äußeren Funktionen benutzt. Aufgrund der schwächeren Voraussetzungen ist das Resultat eine allgemeinere Aussage als der Satz 2.5.
Um schließlich ultradifferenzierbare Funktionen mit kompakten Träger zu konstruieren, nehmen wir nun die Fourier-Transformation zur Hilfe. Somit wird die Existenz der Räume $\mathcal{D}_{M,\sigma}(\Omega)$ und $\mathcal{D}_M^-(\Omega)$ (siehe Kapitel 5), $\Omega \subset \mathbb{R}$, garantiert. Beispielsweise beinhalten diese Räume die Abschneidefunktionen, die wir später benötigen werden.

3.1 Bedingungen

Wir führen zunächst die Bedingungen ein ([BMT90]Definition 1.1).

Definition 3.1. *Sei* $\omega : [0,\infty[\to [0,\infty[$ *eine stetige Funktion mit* $\omega|_{[0,1]} \equiv 0$*, die auf* $[0,\infty[$ *steigend ist. Wir bezeichnen sie als* ***Gewichtsfunktion****, falls sie folgende Eigenschaften erfüllt:*

(α) $\exists K \geq 1 \ \forall t \geq 0 : \ \omega(2t) \leq K \cdot (1 + \omega(t))$

(β) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\omega(t)}{1+t^2} dt < \infty$

(γ) $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{\ln(1+t)}{\omega(t)} = 0$

(δ) $\varphi : [0,\infty[\to [0,\infty[, \ \varphi(t) := \omega(\exp(t))$ *ist konvex*

Für $t \in \mathbb{C}^n$ *setzen wir fort mit* $\omega(t) := \omega(||t||_1) = \omega\left(\sum |t_j|\right)$.

(α),(β) und (γ) beschränken das Wachstum vor allem für große t.
Gilt $\omega(t_0) \geq 1$, dann folgt für $n \in \mathbb{N}$ aus (α) :

$$\omega(2^n t_0) \leq \cdots \leq K^n \omega(t_0) + \sum_{j=1}^{n} K^j \leq (2K)^n \omega(t_0) \quad .$$

Folglich existieren $c, \alpha \in \mathbb{R}$, so dass $\omega(t) \leq c \cdot |t|^\alpha$ für $|t| \geq 1$.
Aus (β) folgt:

$$\begin{aligned} 0 = \lim_{\tau\to\infty} \int_\tau^\infty \frac{\omega(t)}{1+t^2} dt &\geq \lim_{\tau\to\infty} \int_\tau^{2\tau} \frac{\omega(t)}{1+t^2} dt \\ \geq \lim_{\tau\to\infty} \omega(\tau) \int_\tau^{2\tau} \frac{1}{2t^2} dt &= \lim_{\tau\to\infty} \omega(\tau) \cdot \left. \frac{-1}{2t} \right|_\tau^{2\tau} = \lim_{\tau\to\infty} \frac{\omega(\tau)}{4\tau} \end{aligned}$$

$$\text{(20)} \qquad \Longrightarrow \quad \lim_{\tau\to\infty} \frac{\omega(\tau)}{\tau} = 0 \quad .$$

(γ) liefert die untere Grenze $\ln(t) < k \cdot \omega(t)$ für $k > 0$.

(δ) hingegen ist auch wichtig für kleine t. Auch hier muss somit mindestens logarithmisches Wachstum vorliegen.

Eine einfache Folgerung aus (α) zeigt [BMT90](Lemma 1.2).

Lemma 3.2. *Sei ω eine Gewichtsfunktion. Aus (α) folgt für $x, y \in \mathbb{C}^n$:*

$$\omega(x+y) \leq K \cdot (1 + \omega(x) + \omega(y)) \quad .$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \omega(x+y) = \omega(|x+y|) &\leq \omega(|x| + |y|) \leq \omega(2 \cdot \max(|x|, |y|)) \\ &\overset{(\alpha)}{\leq} K \cdot (1 + \omega(\cdot \max(|x|, |y|))) \leq K \cdot (1 + \omega(x) + \omega(y)) \end{aligned}$$ □

In [BMT90](Remark 8.9) wird gezeigt, dass die assoziierte Funktion $M(\cdot)$ äquivalent zu einer Gewichtsfunktion ist, falls die Folge $(M_p)_p$ die Bedingungen (M0),(M1),(M2),(M3′) und

$$\text{(21)} \qquad \exists k \in \mathbb{N} : \liminf_{p\to\infty} \frac{m_{kp}}{m_p} > 1$$

erfüllt. Letzteres ist eine Abschwächung von (β_1), welche durch (M3) erfüllt ist. Eine streng reguläre Folge besitzt also diese Eigenschaften, so dass alle Ergebnisse der Gewichtsfunktionen somit auch für $M(\cdot)$ gelten.

3.2 Fouriertransformation

Wie in [Wer07](Kapitel V.2) eingeführt, verstehen wir unter der Fourier-Transformierten einer Funktion $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)$ die Funktion

$$\widehat{g}(x) = \mathscr{F}g(x) := (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} g(t) \exp(-\mathrm{i}\langle x, t\rangle) dt \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

und $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ sei der Schwartzraum der schnell fallenden Funktionen:

$$f \text{ schnell fallend } :\Longleftrightarrow \lim_{|x|\to\infty} x^\alpha f(x) = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n$$

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \,\middle|\, D^\beta f \text{ schnell fallend } \forall \beta \in \mathbb{N}^n \right\} \quad .$$

Dabei ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das euklidische Skalarprodukt $\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$.
Auf diesem Raum gilt bekanntlich die Inversionsformel:

$$g(x) = \mathscr{F}^{-1}\widehat{g}(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g}(t) \exp(\mathrm{i}\langle x, t\rangle) dt \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad .$$

Den Zusammenhang der Fourier-Transformation mit den ultradifferenzierbaren Funktionen hat Komatsu mit [Kom00](Lemma 3.3) erläutert.

Lemma 3.3. *Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum mit Lebesgue-Maß $|K|$ und dem Trägerfunktional*

$$H_K : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \ , \quad \zeta \mapsto \sup_{x\in K} \langle x, \zeta \rangle \quad .$$

a) Ist $\varphi \in \mathcal{D}_{M,\sigma}(K)$ mit Norm $\|\varphi\|_\sigma$, dann ist $\widehat{\varphi}$ eine ganze Funktion auf $\mathbb{C}^n$ mit

$$|\widehat{\varphi}(\zeta)| \le M_0 \cdot |K| \cdot \|\varphi\|_\sigma \cdot \exp\left(-M\left(\frac{|\zeta|}{\sigma\sqrt{n}} \right) + H_K(\Im\zeta) \right) \quad .$$

b) Ist $\widetilde{\varphi}$ eine messbare Funktion auf $\mathbb{R}^n$ mit

$$\|\widetilde{\varphi}\| = \left\| \exp M\left(\frac{|\xi|}{\sigma} \right) \cdot \widetilde{\varphi}(\xi) \right\|_{\mathrm{L}_1(\mathbb{R}^n)} < \infty \quad ,$$

dann ist $\varphi = \mathscr{F}^{-1}\widetilde{\varphi}$ eine ultradifferenzierbare Funktion auf $\mathbb{R}^n$ mit

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left| D^J \varphi(x) \right| \le \frac{\|\widetilde{\varphi}\|}{(2\pi)^{n/2} M_0} \cdot \sigma^j \cdot M_j^+ \quad \forall J \in \mathbb{N}^n \quad .$$

Für Gewichtsfunktionen können wir ebenfalls den Begriff der ultradifferenzierbaren Funktionen einführen ([BMT90]Definition 3.1).

Definition 3.4. *Sei ω eine Gewichtsfunktion, wobei (δ) nicht vorausgesetzt wird, $K \Subset \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge.*

a) Für $\sigma \in \mathbb{R}_+$ definieren wir den Banachraum

$$\mathcal{D}_{\omega,\sigma}(K) := \left\{ f \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \;\middle|\; \begin{array}{l} \operatorname{supp}(f) \subset K, \\ \|f\|_\sigma := \int_{\mathbb{R}^n} \left|\widehat{f}(t)\right| \exp(\sigma \cdot \omega(t)) dt < \infty \end{array} \right\} .$$

b) $\mathcal{D}_\omega(K) := \operatorname*{ind}_{\sigma \to 0} \mathcal{D}_{\omega,\sigma}(K)$ *und* $\mathcal{D}^-_\omega(K) := \operatorname*{proj}_{\sigma \to \infty} \mathcal{D}_{\omega,\sigma}(K)$.

c) $\mathcal{D}_\omega(\Omega) := \operatorname*{ind}_{\Omega \Supset K \to \Omega} \mathcal{D}_\omega(K)$ *und* $\mathcal{D}^-_\omega(\Omega) := \operatorname*{ind}_{\Omega \Supset K \to \Omega} \mathcal{D}^-_\omega(K)$.

Das Lemma 3.3 zeigt, dass dies mit Definition 2.1 übereinstimmt.

3.3 Ultradiff. Funktionen mit kompaktem Träger

In diesem Abschnitt stellen wir die Konstruktion aus [BMT90](Kapitel 2) vor. Der Ansatz entspricht dem aus Abschnitt 2.2 und deshalb werden die Ergebnisse hier eine Verallgemeinerung darstellen.
Wir tauschen die Koordinaten $x \leftrightarrow y$ und somit $H \leftrightarrow S_1$ (H = obere Halbebene) um die Aussagen von [BMT90] analog zu denen in Abschnitt 2.2 zu formulieren.

Wir beginnen mit den Real-Teilen des Ansatzes von Thilliez in Satz 2.4, wie wir in (10) sehen können ([BMT90]Definition 2.1).

Definition 3.5. *Für eine Gewichtsfunktion ω, wobei (γ) und (δ) nicht vorausgesetzt werden, definiere die harmonische Funktion $P_\omega : S_1 \to [0, \infty[$ durch*

$$P_\omega(x + iy) := \frac{4}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(t) \cdot \frac{x}{x^2 + (t-y)^2} dt \quad .$$

Abschätzungen dieser Funktion werden dann in [BMT90](Lemma 2.2) gezeigt.

Lemma 3.6. *P_ω aus 3.5 ist harmonisch und es gilt für $x + \mathrm{i}y \in S_1$:*

a) $\quad P_\omega(x + \mathrm{i}y) \geq \omega(|x + \mathrm{i}y|) \qquad \geq \omega(y)$

b) $\quad \forall \varepsilon > 0 \exists A > 0 : P_\omega(x + \mathrm{i}y) \leq \varepsilon x + 4K\omega(y) + A$

(K aus (α)).

Beweis. P_ω ist Real-Teil einer holomorphen Funktion, denn nach (9) gilt

$$P_\omega(x+\mathrm{i}y) = \Re\left(\frac{4}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\omega(t)\,\frac{\mathrm{i}tz-1}{\mathrm{i}t-z}\frac{dt}{1+t^2}\right) \quad .$$

Diese Funktionen sind harmonisch, denn aus den Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen für holomorphe $f = u + \mathrm{i}v$ folgt:

$$\triangle u(x,y) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u(x,y) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2}{\partial y\partial x}\right)v(x,y) = 0 \quad .$$

a) Auf Grund der Symmetrie von ω und y^2 genügt es den Fall $y \geq 0$ zu betrachten:

$$\begin{aligned}
P_\omega(x+iy) &\geq \frac{4}{\pi}\int_{x+y}^{\infty}\frac{\omega(t)\cdot x}{x^2+(t-y)^2}dt &&= \frac{4}{\pi}\int_{x}^{\infty}\frac{\omega(t+y)\cdot x}{x^2+t^2}dt \\
&\geq \frac{4}{\pi}\int_{x}^{\infty}\frac{\omega(x+y)\cdot x}{x^2+t^2}dt &&= \frac{4\omega(x+y)}{\pi}\int_{x}^{\infty}\frac{x}{x^2+t^2}dt \\
&= \frac{4\omega(x+y)}{\pi}\cdot\arctan(\xi)\Big|_1^\infty &&= \omega(x+y) \\
&\geq \omega(|x+\mathrm{i}y|) &&\geq \omega(y) \quad .
\end{aligned}$$

Die letzte Zeile gilt, weil ω wachsend ist.

b) Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Nach Definition 3.1(β) existiert eine Konstante $R = R(\varepsilon) \geq 1$, so dass

$$\frac{8K}{\pi}\int_R^\infty \frac{\omega(t)}{t^2}dt \leq \varepsilon \quad , \tag{22}$$

wobei K die Konstante aus Definition 3.1(α) ist. Mit Lemma 3.2 ist dann:

$$\begin{aligned}
P_\omega(x+iy) &= \frac{4x}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega(t+y)}{x^2+t^2}dt \\
&\overset{3.2}{\leq} \frac{4}{\pi}K\cdot(1+\omega(y))\cdot\arctan(\xi)\Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{8x}{\pi}\int_0^\infty\frac{K\cdot\omega(t)}{x^2+t^2}dt \\
&= 4K\cdot(1+\omega(y)) + \frac{8K\cdot x}{\pi}\left(\int_0^R\frac{\omega(t)}{x^2+t^2}dt + \int_R^\infty\frac{\omega(t)}{x^2+t^2}dt\right) \\
&\leq 4K\cdot(1+\omega(y)) + \frac{8K}{\pi}\cdot\omega(R)\cdot\arctan(\xi)\Big|_0^\infty + x\cdot\frac{8K}{\pi}\int_R^\infty\frac{\omega(t)}{t^2}dt \\
&\overset{(22)}{\leq} 4K\cdot(1+\omega(y)) + 4K\cdot\omega(R) + \varepsilon\cdot x \quad .
\end{aligned}$$

Und zuletzt wählen wir die Konstante $A(\varepsilon) := 4K\cdot(1+\omega(R(\varepsilon)))$. □

Dieses Ergebnis ähnelt dem Satz 2.6b:
Sei Q_ω eine konjugiert harmonische Funktion, so dass $P_\omega + \mathrm{i}Q_\omega$ holomorph auf S_1 ist. Somit ist auch $F_\omega := \exp(-P_\omega - \mathrm{i}Q_\omega)$ holomorph auf S_1.
Mit obigem Lemma und $|F_\omega| = \exp(-P_\omega)$ ergibt sich:

$$(23)\quad \forall \varepsilon > 0\ \exists A_\varepsilon > 0: \ \exp\left(-\varepsilon x - 4K\omega(y) - A_\varepsilon\right) \leq |F_\omega(x + \mathrm{i}y)| \leq \exp(-\omega(x)) \ .$$

Es gilt mit den Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
(\beta) \Longrightarrow (20) &\Longrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists x_0 > 0 \forall x > x_0 : \omega(x) \leq \varepsilon x \\
&\Longrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists A_\varepsilon > 0 \forall x > 0 : \omega(x) \leq \varepsilon x + A_\varepsilon \\
\Longrightarrow \varepsilon x + 4K\omega(y) + A_\varepsilon &\geq \omega(x) + 4K\omega(y) \\
&\geq c_1 \omega(c_2 |x + \mathrm{i}y|) \quad . \qquad | \text{ Normäquivalenz}
\end{aligned}$$

Da $M(\cdot)$ zu einer Gewichtsfunktion ω äquivalent ist, kann diese Abschätzung mit Satz 2.6b kombiniert werden und wir erhalten:

$$\exists c > 0 \forall \varepsilon > 0 \exists A_\varepsilon > 0: \ \exp\left(-\varepsilon x - c \cdot M(y) - A_\varepsilon\right) \leq |F_\omega(x + \mathrm{i}y)| \leq \exp(-M(x)) \ .$$

Dies entspricht (23), so dass die Abschätzungen aus Satz 2.6 stärker sind als die aus Lemma 3.6. Dies verwundert jedoch nicht, da die Voraussetzungen hier schwächer sind. Für die essentielle Abschätzung des Integrals (22) wird hier die Bedingung (β) vorausgesetzt, welche (M3′) entspricht ([Kom00] Lemma 4.1). Im Abschnitt 2.2 übernimmt [Kom00](Proposition 4.4) die wesentliche Rolle, bei der (M3) Voraussetzung ist. Eine mögliche Verbesserung des vorigen Beweises, so dass die Aussagen von Satz 2.6 und Lemma 3.6 äquivalent sind, ist daher nicht zu erwarten.

Mit den vorherigen Abschätzungen können wir nun eine schnell fallende Funktion mit einer Halbachse als Träger konstruieren ([BMT90]Lemma 2.3).

Lemma 3.7. *Sei ω eine Gewichtsfunktion, wobei (δ) nicht vorausgesetzt wird. Dann existiert eine Funktion $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, $g \not\equiv 0$ mit Träger in $]-\infty, 0]$, so dass*

$$|\widehat{g}(x)| \leq \exp(-2K \cdot \omega(x))$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. K ist die Konstante aus (α).

Beweis. Sei zunächst Q_ω eine konjugiert harmonische Funktion, so dass $P_\omega + \mathrm{i}Q_\omega$ holomorph auf S_1 ist. Dann ist somit auch $F := \exp(-2K \cdot (P_\omega + \mathrm{i}Q_\omega))$ holomorph auf S_1. Wir definieren $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $f(y) := F(1 - \mathrm{i}y)$.

Aus Lemma 3.6a ergibt sich für $x + \mathrm{i}y \in S_1$

$$|F(x+\mathrm{i}y)| = \exp(-2K \cdot P_\omega(x+\mathrm{i}y)) \leq \exp(-2K \cdot \omega(y)) \quad . \tag{24}$$

Aus (α) und (γ) folgt die Abschätzung

$$\exists c \in \mathbb{R}_+ \ \forall y \in \mathbb{R} : \ \omega(y) \leq K \cdot \omega\left(|y| - \frac{1}{2}\right) + c \quad . \tag{25}$$

Mit der Cauchy'schen Integralformel gilt für $j \in \mathbb{N}$ und $y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\left|f^{(j)}(y)\right| = \left|F^{(j)}(1-\mathrm{i}y)\right| &= \left|\frac{j!}{2\pi\mathrm{i}} \cdot \int_{\partial B_{1/2}(1-\mathrm{i}y)} \frac{F(\xi)}{(1-\mathrm{i}y-\xi)^{j+1}} d\xi\right| \\
&\leq \frac{j!}{2\pi} \cdot \pi \cdot \frac{\sup_\xi F(\xi)}{(1/2)^{j+1}} \\
&\leq j! \cdot 2^j \cdot \exp\left(-2K \cdot \omega\left(|y| - \frac{1}{2}\right)\right) && |\ (24) \\
&\leq \underbrace{j! \cdot 2^j \cdot \mathrm{e}^{2c}}_{=: C_j} \cdot \exp(-2 \cdot \omega(y)) \quad . && |\ (25)
\end{aligned} \tag{26}$$

(γ), (24) und (26) zeigen, dass $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ ist. Da die Fourier-Transformation auf diesem Raum ein Isomorphismus ist, existiert somit ein $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ mit $\widehat{g} = f$. (24) zeigt dann die behauptete Abschätzung.

Sei nun $x \geq 1$ und $y \in \mathbb{R}_+$. Für $k \in \mathbb{R}$ berechnen wir zunächst das Integral entlang der Geraden $[k, k - \mathrm{i}(x-1)]$:

$$\begin{aligned}
&\left|\int_k^{k-\mathrm{i}(x-1)} F(x-\mathrm{i}t)\exp(\mathrm{i}y(t+\mathrm{i}(x-1))dt\right| \\
&\overset{(24)}{\leq} |x-1| \cdot \exp(-2K \cdot \omega(k)) \cdot \exp(0) \\
\Longrightarrow \quad &\lim_{k\to\infty} \int_k^{k-\mathrm{i}(x-1)} F(x-\mathrm{i}t)\exp(\mathrm{i}y(t+\mathrm{i}(x-1))dt = 0 \quad .
\end{aligned} \tag{27}$$

Mit der Inversionsformel ist dann:

$$\begin{aligned}
g(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(\mathrm{i}yt)dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(1-\mathrm{i}t)\exp(\mathrm{i}yt)dt
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{k\to\infty} \int_{-k-\mathrm{i}(x-1)}^{k-\mathrm{i}(x-1)} F(x-\mathrm{i}t)\exp(\mathrm{i}y(t+\mathrm{i}(x-1))dt \qquad | \text{ Subst.} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} -F(x-\mathrm{i}t)\exp(\mathrm{i}y(t+\mathrm{i}(x-1))dt \quad .
\end{aligned}
$$

Der letzte Schritt resultiert aus (27) und dem Cauchy'schen Integralsatz ($\int_{\partial R} = 0$) auf dem Rechteck $R = [-k, k, k-\mathrm{i}(x-1), -k-\mathrm{i}(x-1)]$, da der Integrand holomorph ist.
Bilden wir jetzt den Grenzwert $x \to \infty$, so folgt mit (24) und (γ):

$$
\begin{aligned}
|g(y)| &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-2K\cdot\omega(t))\exp(y((1-x))dt \to 0 \\
\implies g(y) &= 0 \ \forall y \in \mathbb{R}_+ \quad .
\end{aligned}
$$

Dies ist die Behauptung des Trägers. □

Mit der obigen Funktion g bilden wir nun eine ultradifferenzierbare Funktion mit kompaktem Träger ([BMT90]Proposition 2.4).

Satz 3.8. *Sei ω eine Gewichtsfunktion, wobei (δ) nicht vorausgesetzt wird. Dann existiert für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ eine nicht-triviale Funktion $h \in \mathcal{D}_{\omega,1}([-\varepsilon, \varepsilon])$.*

Beweis. Sei g die Funktion aus Lemma 3.7 und $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Wir dürfen ohne Einschränkung $0 \in \operatorname{supp}(g)$ annehmen, denn sonst:

$$
\begin{aligned}
&a := \sup\{x \in \mathbb{R} | g(x) \neq 0\} \text{ und } g_a := g(\cdot - a) \\
\implies \quad &\forall x \in \mathbb{R}: \ |\widehat{g_a}(x)| = |\exp(-\mathrm{i}ax)\cdot \widehat{g}(x)| = |\widehat{g}(x)| \quad .
\end{aligned}
$$

Also existiert ein $x_0 \in \mathbb{R}_+$, so dass $-\varepsilon < x_0 < 0$ und $g(x_0) \neq 0$ gelten. Definieren wir die gesuchte Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit

$$
h(x) := g(x_0 + x)\cdot g(x_0 - x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad ,
$$

so ist $h \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R})$ und $\operatorname{supp}(h) \subset [-\varepsilon, \varepsilon]$ klar. Es ist $h(0) = g(x_0)^2 \neq 0$.

$$
\begin{aligned}
\widehat{h}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g(x_0+s)g(x_0-s)\exp(-\mathrm{i}st)ds \\
&\overset{\text{Fourier}}{=} \frac{1}{2\pi} \cdot \int g(x_0+s)\left(\int \widehat{g}(u)\exp(\mathrm{i}(x_0-s)u)du\right)\exp(-\mathrm{i}st)ds \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \int \left(\int g(x_0+s)\exp(-\mathrm{i}(t+u)s)ds\right)\widehat{g}(u)\exp(\mathrm{i}x_0u)du \\
&\overset{\text{Subst}}{=} \frac{1}{2\pi} \cdot \int \left(\int g(s)\exp(\mathrm{i}x_0(t+u))\exp(-\mathrm{i}(t+u)s)ds\right)\widehat{g}(u)\exp(\mathrm{i}x_0u)du
\end{aligned}
$$

$$\overset{\text{Fourier}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int \widehat{g}(t+u)\widehat{g}(u)\exp(\mathrm{i}x_0(t+2u))du$$

$$\overset{\text{Subst}}{=} -\frac{\exp(\mathrm{i}x_0 t)}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{g}(t-s)\widehat{g}(-s)\exp(-2\mathrm{i}x_0 s)ds \quad . \tag{28}$$

Damit folgt dann die Ultradifferenzierbarkeit:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \left|\widehat{h}(t)\right| \exp(\omega(t))dt &\overset{(28)}{\leq} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \iint |\widehat{g}(t-s)| \cdot |\widehat{g}(-s)| \exp(\omega(t))ds\ dt \\
&\overset{\text{Lemma 3.7}}{\leq} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \iint \exp(-2K\omega(t-s) - 2K\omega(-s) + \omega(t))ds\ dt \\
&\overset{\text{Lemma 3.2}}{\leq} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \iint \exp(-2K\omega(t-s) - 2K\omega(-s) + K(\omega(t-s) + \omega(s) + 1))ds\ dt \\
&= \frac{\exp(K)}{\sqrt{2\pi}} \cdot \iint \exp(-K\omega(t-s) - K\omega(s))ds\ dt \\
&= \frac{\exp(K)}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-K\omega(t))dt\right)^2 \overset{(\gamma)}{<} \infty \quad .
\end{aligned}$$

□

Dieses Ergebnis lässt sich sehr einfach auf mehrere Variablen verallgemeinern ([BMT90]Corollary 2.5).

Lemma 3.9. *Sei ω eine Gewichtsfunktion, wobei (δ) nicht vorausgesetzt wird. Dann existiert für jedes $n \in \mathbb{N}_+$ eine Konstante $\delta_n \in \mathbb{R}_+$, so dass für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ eine nicht-triviale Funktion $H \in \mathcal{D}_{\omega,\delta_n}([-\varepsilon,\varepsilon]^n)$ existiert.*

Beweis. Aus Lemma 3.2 folgt:

$$\forall n \in \mathbb{N}_+\ \exists \delta_n, C_n \in \mathbb{R}_+\ \forall t \in \mathbb{R}^n :\ \delta_n \omega(t) \leq \sum_{j=1}^{n} \omega(t_j) + C_n \quad . \tag{29}$$

Für gegebenes $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ sei $h \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R})$ aus Satz 3.8. Damit definieren wir

$$H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}^n\ , \quad x \mapsto \prod_{j=1}^{n} h(x_j) \quad .$$

Somit ist $H \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\mathrm{supp}(H) \subset [-\varepsilon,\varepsilon]^n$. Es gilt dann:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \left|\widehat{H}(t_1,\dots,t_n)\right| \exp(\delta_n\omega(t))dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \left|\prod_{j=1}^{n} \widehat{h}(t_j)\right| \exp(\delta_n\omega(t))dt \\
&\overset{(29)}{\leq} \int_{-\infty}^{\infty} \left|\prod_{j=1}^{n} \widehat{h}(t_j)\right| \exp\left(\sum_{j=1}^{n} \omega(t_j) + C_n\right) dt
\end{aligned}$$

$$= \exp(C_n) \cdot \prod_{j=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} \left|\widehat{h}(t_j)\right| \exp\left(\omega(t_j)\right) dt_j$$

$$\overset{\text{Satz 3.8}}{<} \infty \quad . \qquad \square$$

Zuletzt wollen wir noch anmerken, dass die Konstante δ_n so wählbar ist, dass die Funktion H in der Beurling-Klasse liegt ([BMT90]Corollary 2.6).

Lemma 3.10. *Sei ω eine Gewichtsfunktion, wobei (δ) nicht vorausgesetzt wird. Dann existiert für jedes $n \in \mathbb{N}_+$ und jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ eine nicht-triviale Funktion $H \in \mathcal{D}_\omega^-([-\varepsilon, \varepsilon]^n)$.*

Beweis. Durch [BMT90](Lemma 1.6) existiert eine Gewichtsfunktion ω_2 ((δ) nicht zwangsläufig) mit $\lim_{t\to\infty} \frac{\omega(t)}{\omega_2(t)} = 0$. Mit Lemma 3.9 existieren $\delta_n \in \mathbb{R}_n$ und eine Funktion $H \in \mathcal{D}_{\omega_2,\delta_n}([-\varepsilon,\varepsilon]^n)$. Dann folgt für jedes $\sigma \in \mathbb{R}_+$ die Ultradifferenzierbarkeit:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\widehat{H}(t)\right| \exp(\sigma\omega(t))dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left|\widehat{H}(t)\right| \exp(\delta_n\omega_2(t) + c)dt < \infty \quad . \qquad \square$$

4 Borel-Ritt-Theoreme der Roumieu-Klasse

Nun werden wir das Problem betrachten, unter welchen Voraussetzungen Funktionen zu gegebenen Ableitungswerten existieren, die zusätzlich auf einem Sektor holomorph sind. Dieses Kapitel behandelt dabei vor allem Funktionen aus ultradifferenzierbaren Räumen und deren Roumieu-Klassen. Auf deren Beurling-Klassen wird im nächsten Kapitel eingegangen.
Im ersten Teil sind die Definitionsbereiche reell. Im zweiten werden dann die Sektoren S_α auf die reellen Aussagen zurückgeführt.
Im Wesentlichen sind hier das Kapitel 3 von [Thi00] und Kapitel 5 von [SV00] Grundlage.

4.1 Ultradifferenzierbare Räume

Zunächst führen wir Thilliezs Notation ein.

Definition 4.1. *Sei $(M_p)_p$ eine Folge reeller Zahlen.*
Wir definieren folgende Räume:

$$\begin{aligned}
\Lambda(\mathbb{N}^n) \quad &: \quad \textit{komplexe Zahlenfamilien } \lambda = (\lambda_J)_{J\in\mathbb{N}^n} \\
\Lambda_{M,\sigma}(\mathbb{N}^n) &:= \left\{ \lambda \in \Lambda(\mathbb{N}^n) \,\middle|\, \exists C_\lambda \in \mathbb{R}\ \forall J \in \mathbb{N}^n :\ |\lambda_J| \leq C_\lambda \sigma^j M_j \right\} \\
\Lambda_M(\mathbb{N}^n) &:= \bigcup_{\sigma>0} \Lambda_{M,\sigma}(\mathbb{N}^n)
\end{aligned}$$

$\Lambda_{M,\sigma}(\mathbb{N}^n)$ sind Banachräume mit der Norm $\|\lambda\|_\sigma$, die die kleinstmögliche Konstante C_λ ist. Sie bilden eine Inklusionskette $\Lambda_{M,i}(\mathbb{N}^n) \subseteq \Lambda_{M,j}(\mathbb{N}^n)$ für $i < j$. Dass diese Kette nicht konstant ist, zeigt zum Beispiel die Folge $(M_p)_p \in \Lambda_{M,\sigma}(\mathbb{N})$, die in genau den Räumen mit $\sigma \geq 1$ liegt.
$\Lambda_M(\mathbb{N}^n)$ stellt den induktiven Limes dieser Stufenräume dar und ist somit (LB)-Raum.
$\Lambda_M(\mathbb{N})$ sind die komplexen Zahlenfolgen $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
Da hier eigentlich nur für der Fall $n = 1$ formuliert wird, notieren viele Autoren ohne die Indexmenge, also nur Λ_M.

Die Zahlenfolgen dieser Räume passen zu den Funktionen der Räume aus Definition 2.1, indem wir sie als Koeffizienten der Taylorreihe $\sum_{J\in\mathbb{N}^n} \frac{D^J f(0)}{J!} z^J$ auffassen. Formal dient dazu der folgende Operator, der eine Funktion auf ihre Ableitungswerte abbildet.

Definition 4.2. *Wir definieren die* ***Borel-Abbildung B*** *durch*

$$B : X_1 \to X_2 \ , \quad f \mapsto (D^J f(0))_{J\in\mathbb{N}^n}$$

für $X_1 \subset \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ *und* $X_2 \subset \Lambda(\mathbb{N}^n)$.
Im Fall der Räume, wie z. B. $\mathcal{D}_{r,M}(K)$, *betrachten wir*

$$B_r : X_1 \to X_2 \ , \quad f \mapsto (D^{rJ} f(0))_{J\in\mathbb{N}^n} \quad .$$

Die Frage nach dem folgenden Satz hatte Borel in seiner Doktorarbeit [Bor97] auf Seite 38 gestellt. Ritt beantwortete dies in [Rit16], indem er die Reihenentwicklung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n z^n}{n!} \left(1 - \exp\left(-\frac{1}{b_n z^2}\right)\right)^{p_n} \quad \text{mit } p_n \in \mathbb{N}_+, b_n \in \mathbb{R}_+, 2^{p_n-1}\,|a_n| < b_n, p_n < b_n$$

auf $\pm S_\alpha$ und $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ angab. Thilliez formuliert dies in [Thi00](Abschnitt 3.1).

Satz 4.3. Borel-Ritt-Theorem
Für alle $\lambda \in \Lambda(\mathbb{N})$ *und* $\gamma \in \mathbb{R}_+$ *mit* $0 < \gamma \leq 2$ *existiert eine Funktion* $f \in \mathcal{H}(S_\gamma)$ *mit* $\sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda_j \frac{z^j}{j!}$ *als Reihenentwicklung um* 0.
Damit ist die Borel-Abbildung $B : \mathcal{H}(S_\gamma) \to \Lambda(\mathbb{N})$ *surjektiv.*

Für größere γ gilt die Aussage weiterhin, allerdings müssen wir dann mit Hilfe von Riemannschen Flächen arbeiten. Es folgt durch Einschränkung auf die reelle Achse sofort, dass $B : \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}) \to \Lambda(\mathbb{N})$ surjektiv ist.

Häufig werden wir den Begriff der Extension benutzen.

Definition 4.4. *Sei* $r \in \mathbb{N}_+$. *Eine* ***Extension E*** $: X_2 \to X_1$ *ist ein linearer, stetiger Operator mit*

$$B_r E\lambda = (D^{rJ}(E\lambda)(0))_{J\in\mathbb{N}^n} = \lambda \quad \forall \lambda \in X_2$$

für $X_1 \subset \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ *und* $X_2 \subset \Lambda(\mathbb{N}^n)$.

Man könnte annehmen, dass im komplexen Fall weitere Forderungen an die Ableitungswerte gestellt werden müssten, um die Cauchy'sche Abschätzung und somit die Holomorphie zu erfüllen:

$$\text{Sei } U \subset \mathbb{C} \text{ offen, } f \in \mathcal{H}(U),\ D := B_r(0),\ \overline{D} \subset U. \text{ Dann gilt für die}$$
$$\text{Potenzreihenentwicklung } f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n z^n \text{ auf } D:\ \lambda_n \leq \frac{1}{r^n} \cdot \max_{\xi \in \partial D} |f(\xi)| \quad .$$

Die Voraussetzung ist hier jedoch nie gegeben, da bei den Sektoren S_α der Entwicklungspunkt 0 auf dem Rand statt im Inneren liegt.

Für den reellen ultradifferenzierbaren Fall haben wir zunächst einen Spezialfall aus [CC94] ([Thi00]Proposition 1.5). Chaumat und Chollet bewiesen dort allgemeinere Aussagen, die auf die Arbeit [Whi34] von Whitney aufbauen.

Satz 4.5. *Sei $(M_p)_p$ eine streng reguläre Folge.*
a) Es gibt eine Konstante $c \geq 1$, die nur von $(M_p)_p$ und n abhängt, so dass für jedes $\sigma \in \mathbb{R}_+$ eine Extension $E_\sigma : \Lambda_{M,\sigma}(\mathbb{N}^n) \to \mathcal{E}_{M,c\sigma}(\mathbb{R}^n)$ existiert.
Für $E_\sigma\lambda$ kann der Träger als kompakt angenommen werden.
b) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit Lipschitz-Rand.
Es gibt eine Konstante $c \geq 1$, die von $(M_p)_p$ und Ω abhängt, so dass für jedes $\sigma \in \mathbb{R}_+$ ein linearer, stetiger Operator $T_{\Omega,\sigma}$ existiert mit

$$T_{\Omega,\sigma} : \mathcal{E}_{M,\sigma}(\Omega) \to \mathcal{E}_{M,c\sigma}(\mathbb{R}^n) \quad \textit{und} \quad T_{\Omega,\sigma} f|_\Omega = f \ \forall f \in \mathcal{E}_{M,\sigma}(\Omega) \ .$$

Beweis. Die Behauptungen entsprechen [CC94](Proposition 9) mit den Kompakta $\{0\}$ für a) und $\overline{\Omega}$ für b). □

Wir erinnern, dass (M3) $\iff$ (β_1) gilt, falls (M0) und (M1) gelten ([Pet88]Proposition 1.1). Wir ersetzen dies daher in den folgenden Sätzen von Petzsche. Da $\mathcal{E}(\mathbb{R})|_{[-1,1]} \subset \mathcal{E}([-1,1])$ ist, zeigt [Pet88](Theorem 3.6) die Notwendigkeit von (M3) bei der vorigen Aussage a).

Satz 4.6. *Sei $(M_p)_p$ eine positive Folge mit (M0) und (M1).*

$$\begin{aligned}
& \textit{a) } (M_p)_p \textit{ erfüllt (M3)} && \\
\iff & \textit{b) } \exists g, h > 0 && \exists \textit{Extension } E : \Lambda_{M,g}(\mathbb{N}) \to \mathcal{E}_{M,h}([-1,1]) \\
\iff & \textit{c) } \exists A > 0\ \forall h > 0 && \exists \textit{Extension } E : \Lambda_{M,h}(\mathbb{N}) \to \mathcal{E}_{M,Ah}([-1,1]) \\
\iff & \textit{d) } \exists g, h > 0 : && \Lambda_{M,g}(\mathbb{N}) \subset B(\mathcal{E}_{M,h}([-1,1])) \\
\iff & \textit{e) } \exists A > 0\ \forall h > 0 : && \Lambda_{M,h}(\mathbb{N}) \subset B(\mathcal{E}_{M,Ah}([-1,1]))
\end{aligned}$$

Insbesondere folgt sofort der Roumieu-Fall ([Pet88]Theorem 3.5).

Satz 4.7. Borel-Ritt-Theorem für Roumieu-Klassen
Sei $(M_p)_p$ eine positive Folge mit (M0) und (M1).
(M3) ist genau dann erfüllt,
wenn die Borel-Abbildung $B : \mathcal{E}_M([-1,1]) \to \Lambda_M(\mathbb{N})$ surjektiv ist.

Die folgenden Lemmata bereiten den Satz 4.11 vor. Zunächst zeigen wir, dass (γ_r) notwendige Bedingung für die Existenz einer Extension $E : \Lambda_M(\mathbb{N}) \to \mathcal{L}_{r,M}([0,1])$ ist ([SV00]Proposition 5.1).

Lemma 4.8. *Sei $r \in \mathbb{N}_+$ und $(M_p)_p$ eine positive Folge mit (M0) und (M1).*
Ist die Borel-Abbildung $B_r : \mathcal{L}_{r,M}([0,1]) \to \Lambda_M(\mathbb{N})$ surjektiv,
dann wird (γ_r) von $(m_p)_p$ erfüllt.

Beweis. Zuerst wird folgender Satz angewendet:

Zitat: [MV97] 24.33: Grothendieck'sches Faktorisierungstheorem

> *Sei E ein lokal konvexer Raum, F und F_n Frécheträume und $u \in L(F,E), u_n \in L(F_n,E), n \in \mathbb{N}$.*
> *Wenn $u(F) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} u_n(F_n)$ gilt, dann existiert ein $m \in \mathbb{N}$, so dass $u(F) \subset u_m(F_m)$ gilt.*
> *Wenn u_m injektiv ist, dann existiert $v \in L(F,F_m)$ mit $u = u_m \circ v$.*

Hier liefert dieser Satz:

$$\exists \sigma \in \mathbb{N}_+ : \ \Lambda_{M,1}(\mathbb{N}) \subset B_r\mathcal{L}_{r,M,\sigma}([0,1]) \quad .$$

Expliziter ausgedrückt, existieren Funktionen, so dass:

$$\begin{gathered}\exists \sigma \in \mathbb{N}_+,\ C > 0\ \forall (a_p)_p \in \Lambda_{M,1}(\mathbb{N})\ \exists g \in \mathcal{L}_{r,M,\sigma}([0,1]) : \\ (a_p)_p \in B_r\mathcal{L}_{r,M,\sigma}([0,1]),\ B_r g = a \text{ und } \|g\|_\sigma \le C \cdot \|a\|_1 \overset{\text{Def}}{=} C \cdot \sup_{p\in N}\left(\frac{|a_p|}{M_p}\right) \quad .\end{gathered}$$

Das bedeutet, dass $B_r : \mathcal{L}_{r,M,\sigma}([0,1]) \to \Lambda_{M,1}(\mathbb{N})$ surjektiv ist.
Insbesondere liegen für $p \in \mathbb{N}_+$ die Einheitsvektoren $e_p := (\dots, 0, \underset{p}{1}, 0, \dots)$ in $\Lambda_{M,1}(\mathbb{N})$, so dass reelle Funktionen $\varphi_p \in \mathcal{L}_{r,M,\sigma}([0,1])$ existieren mit $\varphi_p^{(jr)}(0) = (e_p)_j = \begin{cases} 1 & ,j = p \\ 0 & ,j \in \mathbb{N}, j \neq p \end{cases}$ und $\|\varphi_p\|_\sigma \le C/M_p$.
Da $\operatorname{supp}(\varphi_p) \subset [0,1]$ gilt, ist $\varphi_p^{(pr)}(1) = 0$ und somit ist

$$\alpha_p := \inf\left\{x \in [0,1] \,\middle|\, \varphi_p^{(pr)}(x) < 1/2\right\}$$

wohldefiniert mit $0 < \alpha_p < 1$. Es folgt sofort $\varphi_{2p}^{(2pr)}(x) \geq 1/2$ für $x \in [0, \alpha_{2p}]$ und nach pr-facher Integration erhalten wir mit obigen Abschätzungen:

$$\varphi_{2p}^{(pr)}(x) \geq \frac{x^{pr}}{2(pr)!} \quad \forall x \in [0, \alpha_{2p}]$$

$$\overset{x=\alpha_{2p}}{\Longrightarrow} \alpha_{2p}^{pr} \leq 2(pr)!\varphi_{2p}^{(pr)}(\alpha_{2p}) \leq 2(pr)! \left\|\varphi_{2p}\right\|_\sigma \sigma^p M_p$$

$$\leq 2(pr)^{pr} \left\|\varphi_{2p}\right\|_\sigma \sigma^p M_p \leq 2(pr)^{pr} C \sigma^p \frac{M_p}{M_{2p}}$$

$$\overset{(\text{M1})}{\leq} 2C(pr)^{pr}\sigma^p \frac{1}{m_p^p} \tag{30}$$

$$\Longrightarrow \alpha_{2p} \leq r \sqrt[pr]{2C}\sqrt[r]{\sigma}\frac{p}{\sqrt[r]{m_p}} \quad . \tag{31}$$

Falls nun die Bedingung

$$\exists p_0 \in \mathbb{N}_+,\ h > 0\ \forall\ p \geq p_0 :\ \alpha_{2p} \geq \sum_{k=4p}^{\infty} \frac{h}{\sqrt[r]{m_k}} \tag{32}$$

gilt, so folgt die Behauptung:

$$\sum_{k=p}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[r]{m_k}} = \sum_{k=p}^{4p-1} \frac{1}{\sqrt[r]{m_k}} + \sum_{k=4p}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[r]{m_k}} \underset{(32)}{\overset{(\text{M1})}{\leq}} \frac{3p}{\sqrt[r]{m_p}} + \frac{\alpha_{2p}}{h}$$

$$\overset{(31)}{\leq} \left(3 + \frac{r}{h}\sqrt[pr]{2C}\sqrt[r]{\sigma}\right)\frac{p}{\sqrt[r]{m_p}} \quad .$$

Um (32) zu zeigen, sei für $h \in]0, \frac{1}{4}\sigma^{-3/r}[$ die Zahlenmenge

$$P := \left\{ p \in \mathbb{N}_+ \,\middle|\, \alpha_{2p} < \sum_{k=4p}^{\infty} \frac{h}{\sqrt[r]{m_k}} \right\} \tag{33}$$

definiert. Ist diese endlich, so gilt offensichtlich (32).

Für $p \in P$ definieren wir $\varrho_p \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R})$ mit $\varrho_p(x) := \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ \varphi_{2p}^{(2pr)}(x) - 1 & , x \geq 0 \end{cases}$

und konstruieren die fallende Folge

$$\frac{1}{q_k} = \begin{cases} \dfrac{h}{\sqrt[r]{m_{4p}}} & \text{für } k \in \mathbb{N}_+ \text{ mit } k \leq pr \\ \dfrac{h}{\sqrt[r]{m_{4p+l+1}}} & \text{für } k \in \mathbb{N}_+,\ l \in \mathbb{N} \text{ mit } (p+l)r \leq k \leq (p+l+1)r \end{cases} \quad .$$

Durch (33) ist $\alpha_{2p} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{q_k}$, so dass folgendes Lemma angewendet werden kann:

Zitat: [Hör83] Lemma 1.3.6

> *Sei $u \in \mathrm{C}^m((-\infty, T])$ verschwindend auf $(-\infty, 0]$ und $(a_j)_j$ eine positive fallende Folge mit $T \leq a_1 + \cdots + a_m$, dann gilt für $x \leq T$:*
>
> $$|u(x)| \leq \sum_{j \in J} 4^j \sup_{y<x} a_1 \ldots a_j \left|u^{(j)}(y)\right|$$
>
> *Dabei ist $J = \{j | 1 \leq j \leq m$ und $a_{j+1} < a_j$ oder $j = m\}$.*

Es folgt dann:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} &\overset{\text{Def } \alpha}{=} |\varrho_p(\alpha_{2p})| \leq \sum_{k=1}^{\infty} 4^k \sup_{x<\alpha_{2p}} \frac{1}{q_1} \cdots \frac{1}{q_k} \cdot \left|\varrho_p^{(k)}(x)\right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} 4^{(p+k)r} \sup_{x<\alpha_{2p}} \left(\frac{1}{q_p}\right)^{pr} \left(\frac{1}{q_{(p+1)r}}\right)^{r} \cdots \left(\frac{1}{q_{(p+k)r}}\right)^{r} \cdot \left|\varphi_{2p}^{((3p+k)r)}(x)\right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^{(p+k)r} h^{(p+k)r}}{m_{4p}^p m_{4p+1} \cdots m_{4p+k}} \cdot \sup_{x \geq 0} \left|\varphi_{2p}^{((3p+k)r)}(x)\right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4h)^{(p+k)r}}{m_{4p}^p m_{4p+1} \cdots m_{4p+k}} \cdot \|\varphi_{2p}\|_\sigma \sigma^{3p+k} M_{3p+k} \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4h)^{(p+k)r}}{m_{4p}^p m_{4p+1} \cdots m_{4p+k}} \cdot \frac{C}{M_{2p}} \sigma^{3p+k} M_{3p+k} \\
&\overset{(M1)}{\leq} \sum_{k=0}^{\infty} (4h)^{(p+k)r} C \sigma^{3p+k} = C(4h)^{pr} \sigma^{3p} \sum_{k=0}^{\infty} ((4h)^r \sigma)^k \\
&= \frac{C}{1-(4h)^r \sigma} \cdot \underbrace{((4h)^r \sigma^3)^p}_{\leq 1} \quad ,
\end{aligned}$$

da h klein genug gewählt wurde. Dies ist aber nur für endlich viele p möglich. □

Die gleiche Aussage können wir im Fall des größeren Funktionenraumes $\mathcal{E}_{r,M}([0,\infty[)$, also unter schwächerer Voraussetzung, erhalten. Für den Beweis müssen wir zunächst die folgende Inklusion zeigen, die wir auch in anderen Beweisen verwenden werden (Teil von [SV00] Proposition 4.2).

Lemma 4.9. *Sei $(M_p)_p$ eine Folge mit (M0) und (M1), $r \in \mathbb{N}_+$ und $\sigma \in \mathbb{R}_+$.*
Ist $(N_p)_p$ die r-Interpolierende von $(M_p)_p$,
dann ist $\mathcal{E}_{r,M,\sigma}([0,1])$ ein Untervektorraum von $\mathcal{E}_{N,\sigma}([0,1])$.
Entsprechend ist $\mathcal{E}_{r,M}([0,1]) \subset \mathcal{E}_N([0,1])$ und $\mathcal{E}_{r,M}^-([0,1]) \subset \mathcal{E}_N^-([0,1])$.

Beweis. Es wird ein Ergebnis von Gorny benutzt:

Zitat: Spezialfall von [Gor83]Abschnitt 1.6

> *Sei $f \in \mathrm{C}^r([-1,1])$ und $Q_j := \sup\limits_{x\in[-1,1]} \left|f^{(j)}(x)\right|$ für $j \in \mathbb{N}$, dann gilt*
>
> $$Q_j \le 16 \cdot (2\mathrm{e})^j \cdot Q_0^{1-j/r} \cdot \max\left(Q_r \ , \ \frac{r!}{2^r} \cdot Q_0\right)^{j/r}$$
>
> *für $0 < j < r$.*

$$\Longrightarrow \quad Q_j \le 16 \cdot (2\mathrm{e})^j \cdot \max\left(Q_0^{1-j/r} \cdot Q_r^{j/r} \ , \ \frac{r!^{j/r}}{2^j} \cdot Q_0\right)$$

(34)
$$\le 16 \cdot (2\mathrm{e})^j \cdot \max\left(Q_0^{1-j/r} \cdot Q_r^{j/r} \ , \ \left(\frac{r}{2}\right)^j \cdot Q_0\right)$$

Sei $g \in \mathcal{E}_{r,M,\sigma}([0,1])$ gegeben, so gilt per Definition:

$$\forall p \in \mathbb{N}\ \forall x \in [0,1] : \ \left|g^{(pr)}(x)\right| \le \|g\|_\sigma \cdot \sigma^p \cdot M_p \quad .$$

Wir wollen nun (34) auf $h := g^{(pr)}\left(\frac{\cdot + 1}{2}\right) \in \mathrm{C}^\infty([-1,1])$ anwenden. Für $t \in [-1,1]$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}
|h(t)| \quad &= \quad \left|g^{(pr)}\left(\frac{t+1}{2}\right)\right| \quad &&\le \quad \|g\|_{\sigma^r} \sigma^{pr} M_p &&=: Q_0 \\
\left|h^{(r)}(t)\right| &= 2^{-r}\left|g^{((p+1)r)}\left(\frac{t+1}{2}\right)\right| &&\le 2^{-r} \|g\|_{\sigma^r} \sigma^{(p+1)r} M_{p+1} &&=: Q_r \quad .
\end{aligned}$$

Somit ergibt sich für $q \in \{1, \dots, r-1\}$:

$$\begin{aligned}
\left|h^{(q)}(t)\right| &= 2^{-q}\left|g^{(pr+q)}\left(\frac{t+1}{2}\right)\right| \\
&\le 16 \cdot (2\mathrm{e})^q \cdot \max\begin{pmatrix} \left(\|g\|_{\sigma^r} \sigma^{pr} M_p\right)^{1-q/r} \cdot \left(2^{-r}\|g\|_{\sigma^r} \sigma^{(p+1)r} M_{p+1}\right)^{q/r} \ , \\ \left(\frac{r}{2}\right)^q \cdot \|g\|_{\sigma^r} \sigma^{pr} M_p \end{pmatrix} \\
&= 16 \cdot \mathrm{e}^q \cdot \|g\|_{\sigma^r} \cdot \max\left(\sigma^{pr+q} M_p^{1-q/r} \cdot M_{p+1}^{q/r} \ , \ r^q \cdot \sigma^{pr} M_p\right) \\
&= 16 \cdot \mathrm{e}^q \cdot \|g\|_{\sigma^r} \cdot \sigma^{pr} \cdot \max\left(\sigma^q N_{pr+q} \ , \ r^q \cdot N_{pr}\right) \\
&\le 16 \cdot (\mathrm{e} \cdot \max(\sigma, r))^q \cdot \|g\|_{\sigma^r} \cdot \sigma^{pr} \cdot N_{pr+q} \\
&\le A \cdot \|g\|_{\sigma^r} \cdot \sigma^{pr} \cdot N_{pr+q}
\end{aligned}$$

mit $A := \max\limits_q (16 \cdot (\mathrm{e} \cdot \max(\sigma, r))^q)$.

Zuletzt gilt für $x \in [0,1]$:

$$\begin{aligned}\left|g^{(pr+q)}(x)\right| &= \left|2^q \cdot h^{(q)}(2x-1)\right| \leq 2^q \cdot A \cdot \|g\|_{\sigma^r} \cdot \sigma^{pr} \cdot N_{pr+q} \\ &= 2^q \cdot \sigma^{-q} \cdot A \cdot \|g\|_{\sigma^r} \cdot \sigma^{pr+q} \cdot N_{pr+q} \\ &\leq \underbrace{2^r \cdot \max(1, \sigma^{-r}) \cdot A \cdot \|g\|_{\sigma^r}}_{=:C} \cdot \sigma^{pr+q} \cdot N_{pr+q} \quad .\end{aligned}$$

Dabei hängt C nicht von p, q ab, womit $\mathcal{E}_{r,M,\sigma}([0,1]) \subset \mathcal{E}_{N,\sigma}([0,1])$ gezeigt ist. □

Damit können wir jetzt [SV00](Proposition 5.2) beweisen.

Lemma 4.10. *Sei $r \in \mathbb{N}_+$ und $(M_p)_p$ eine positive Folge mit (M0) und (M1). Ist die Borel-Abbildung $B_r : \mathcal{E}_{r,M}([0,\infty[) \to \Lambda_M(\mathbb{N})$ surjektiv, dann ist die Voraussetzung von Lemma 4.8 erfüllt. Somit wird (γ_r) von $(m_p)_p$ erfüllt.*

Beweis. Sei $(N_p)_p$ die r-Interpolierende aus Definition 1.3.

Es wird zuerst die Non-quasi-Analytizität gezeigt:
Der Einheitsvektor $e_1 := (0,1,0,\dots)$ gehört zu $\Lambda_M(\mathbb{N})$. Nach Voraussetzung existiert somit eine Funktion $\varphi \in \mathcal{E}_{r,M}([0,\infty[)$ mit $\varphi^{(p)}(0) = \begin{cases} 1, & p = r \\ 0, & p \in \mathbb{N}, p \neq r \end{cases}$.
Da φ beschränkt ist, ist die Funktion ψ mit $\psi(x) := \varphi(x) - x^r/r!$ für $x \in [0,\infty[$ nicht die Nullfunktion. Jedoch gilt $B\psi = 0$.

1. Fall: $\psi|_{[0,1]} \not\equiv 0$. Setze $f := \psi|_{[0,1]}$
2. Fall: $\psi|_{[0,1]} \equiv 0$. Sei $x_0 := \sup\{x \geq 0 | \ \psi(t) = 0 \ \forall t \in [0,x]\}$,
setze $f := \psi(\cdot + x_0)|_{[0,1]}$

Durch voriges Lemma ist $f \in \mathcal{E}_N([0,1])$ und durch die Konstruktion ist $f \not\equiv 0$ mit $Bf = 0$. Nach Denjoy und Carleman erfüllt $(N_p)_p$ somit (M3′) und folglich beinhaltet $\mathcal{D}_N([-1,1])$ eine Funktion φ mit $\varphi \equiv 1$ nahe 0.

Für jedes $(a_p)_p \in \Lambda_M(\mathbb{N})$ existiert durch die Voraussetzung der Surjektivität eine Funktion $g \in \mathcal{E}_{r,M}([0,\infty[)$ mit $B_r g = a$. Wir definieren $k \in C^\infty([0,\infty[)$ mit $k(x) := \begin{cases} \varphi(x)g(x) & , x \in [0,1] \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$. Dann ist $B_r k = B_r g = a$ und $k \in \mathcal{L}_{r,M}([0,1])$, denn für alle $p \in \mathbb{N}$, $x \in [0,1]$ und einem $\sigma \in \mathbb{R}_+$ gilt:

$$\begin{aligned}\left|k^{(pr)}(x)\right| &= \left|\sum_{j=0}^{pr} \binom{pr}{j} \cdot \varphi^{(pr-j)}(x) \cdot g^{(j)}(x)\right| \\ &\leq \sum_{j=0}^{pr} \binom{pr}{j} \cdot \|\varphi\|_\sigma \, \sigma^{pr-j} N_{pr-j} \cdot \|g\|_\sigma \, \sigma^j N_j\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\overset{(M1)}{\leq} \|\varphi\|_\sigma \|g\|_\sigma \sigma^{pr} N_{pr} \cdot \sum_{j=0}^{pr} \binom{pr}{j} \\ &= \|\varphi\|_\sigma \|g\|_\sigma ((2\sigma)^r)^p M_p \quad .\end{aligned}$$ □

Wir können nun die Umkehrung voriger Aussagen zeigen ([SV00]Theorem 5.4). Es die Verallgemeinerung von Satz 4.7, der den Fall $r = 1$ darstellt.
Schmets und Valdivia erwähnen dabei zusätzlich (β_2) als Voraussetzung. Dies ist unnötig (bzw. nicht so gemeint) und mit [SV00](Proposition 5.3) zeigen sie sogar, dass (β_2) $\iff$ (γ_r) für ein $r \in \mathbb{N}_+$ gilt. Also insbesondere (β_2) $\iff$ (M3).

Satz 4.11. Borel-Ritt-Theorem für Roumieu-Klassen
Sei $r \in \mathbb{N}_+$ und $(M_p)_p$ eine positive Folge mit (M0) und (M1).

a) $(m_p)_p$ erfüllt (γ_r)

$\iff$ *b) Die Borel-Abbildung $B_r : \mathcal{D}_{r,M}([-1,1]) \to \Lambda_M(\mathbb{N})$ ist surjektiv*

$\iff$ *c) Die Borel-Abbildung $B_r : \mathcal{L}_{r,M}([0,1]) \to \Lambda_M(\mathbb{N})$ ist surjektiv*

$\iff$ *d) Die Borel-Abbildung $B_r : \mathcal{E}_{r,M}([0,\infty[) \to \Lambda_M(\mathbb{N})$ ist surjektiv*

Beweis.
b) $\implies$ *c)* $\implies$ *d)* : klar, da $\mathcal{D}_{r,M}([-1,1])|_{[0,1]} \subset \mathcal{L}_{r,M}([0,1]) \subset \mathcal{E}_{r,M}([0,\infty[)|_{[0,1]}$.
d) $\implies$ *a)* : Lemma 4.10.
a) $\implies$ *b)* : Sei $(N_p)_p$ die r-Interpolierende aus Definition 1.3. Sie erfüllt die Bedingungen (M0), (M1) und (M3). Der Satz 4.7 liefert die Existenz einer Extension $S : \Lambda_N(\mathbb{N}) \to \mathcal{E}_N([-1,1])$. Wir wählen eine Abschneidefunktion $\varphi \in \mathcal{E}_N([-1,1])$ so, dass $\varphi \equiv 1$ nahe 0 und $\varphi^{(p)}(-1) = \varphi^{(p)}(1) = 0$ für $p \in \mathbb{N}$ gilt. Somit ist

$$U : \Lambda_N(\mathbb{N}) \to \mathcal{D}_N([-1,1]) \ , \quad (a_p)_p \mapsto \begin{cases} \varphi(x) \cdot Sa(x) & , x \in [-1,1] \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

eine Extension, denn für alle $p \in \mathbb{N}$, $x \in [-1,1]$ und ein $\sigma \in \mathbb{R}_+$ ist

$$\begin{aligned}(\varphi \cdot Sa)^{(p)}(0) &= \sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j} \cdot \varphi^{(p-j)}(0) \cdot Sa^{(j)}(0) = Sa^{(p)}(0) = a_p \\ \text{und } \left|(\varphi \cdot Sa)^{(p)}(x)\right| &= \left|\sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j} \cdot \varphi^{(p-j)}(x) \cdot Sa^{(j)}(x)\right| \\ &\leq \sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j} \cdot \|\varphi\|_\sigma \sigma^{p-j} N_{p-j} \cdot \|Sa\|_\sigma \sigma^j N_j\end{aligned}$$

$$\overset{(M1)}{\leq} \|\varphi\|_\sigma \|Sa\|_\sigma \sigma^p N_p \cdot \sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j}$$
$$= \|\varphi\|_\sigma \|Sa\|_\sigma (2\sigma)^p N_p \quad .$$

$$V : \Lambda_M(\mathbb{N}) \to \Lambda_N(\mathbb{N}) \ , \quad (a_p)_p \mapsto (b_p)_p$$

ist mit $b_{pr+q} := \begin{cases} a_p & , q = 0 \\ 0 & , q \in \{1, \dots, r-1\} \end{cases}$ für $p \in \mathbb{N}$ ein linearer, stetiger Operator.
Dieser ist wohldefiniert, da $M_{pr} = N_p$ für $p \in \mathbb{N}$.

Sei E der topologische Untervektorraum von $\mathcal{D}_N([-1,1])$, dessen Funktionen $f^{(pr+q)}(0) = 0$ für $p \in \mathbb{N}, q \in \{1, \dots, r-1\}$ erfüllen. Dann ist *Bild* $UV \subset E$.
Durch das Lemma 4.9 ist $\mathcal{D}_{r,M}([-1,1]) \subset \mathcal{D}_N([-1,1])$ und somit ist

$$W : \mathcal{D}_{r,M}([-1,1]) \to E \ , \quad f \mapsto f$$

wohldefiniert, bijektiv, linear und stetig.
$W^{-1}UV : \Lambda_M(\mathbb{N}) \to \mathcal{D}_{r,M}([-1,1])$ ist linear und durch den Satz vom abgeschlossenen Graphen (siehe [Wer07] Theorem IV.4.5) stetig.
Dies ist eine Extension, da für $\Lambda_M(\mathbb{N})$ und $p \in \mathbb{N}$:

$$(W^{-1}UVa)^{(pr)}(0) = (UVa)^{(pr)}(0) = (Va)_{pr} = a_p \quad . \qquad \square$$

4.2 Ultraholomorphe Räume

Wir konstruieren in diesem Abschnitt ultraholomorphe Funktionen zu gegebenen Ableitungen, indem wir die vorigen Ergebnisse weiter verwenden. Dabei werden hier zwei Ideen vorgestellt.
Die erste ist eine Methodik, die bei Schmets und Valdivia in den Beweisen wiederholt auftaucht. Es wird ein Operator konstruiert, der die Verbindung zwischen den bereits bekannten ultradifferenzierbaren Funktionen und den gesuchten sektoriell ultraholomorphen Funktionen herstellt. Ausführlich wird die Konstruktion in [SV00](Theorem 4.5) beschrieben. In den späteren Theoremen [SV00]5.5 und [SV00]5.8 geschieht diese nur verkürzt und es wird auf [SV00](Theorem 4.5) verwiesen. Deshalb führen wir sie hier im folgenden Lemma gesondert aus und können dies somit in den Beweisen als Komponente benutzen.
Eine andere Methode zeigt danach der Satz 4.17 von Thilliez ([Thi00]Theorem 3.4), der Abschnitt 2.3 aufgreift.

Lemma 4.12. *Sei $(M_p)_p$ eine positive Folge mit (M0) und (M1), $r \in \mathbb{N}_+$, $\sigma \in \mathbb{R}_+$ und $\gamma \in \mathbb{R}_+$ mit $\gamma < r$.*
Dann existieren eine Konstante $c \in \mathbb{R}_+$ und ein linearer, stetiger Operator

$$\begin{aligned} & W : \mathcal{D}_{r,M^*,\sigma}([-1,1]) \to \mathcal{A}_{M,c\sigma}(S_\gamma) \ , \\ \text{so dass} \quad & (Wf)^{(n)}(0) = n! f^{(nr)}(0) \ \forall n \in \mathbb{N} \ \forall f \in \mathcal{D}_{r,M^*,\sigma}([-1,1]) \end{aligned}$$

gilt. Insbesondere gilt dies im Roumieu- und Beurling-Fall.

Beweis. Bei diesem Ansatz wird auf Arbeiten von J.C. Canille, J.C. Tougeron und G. Valiron verwiesen.
Für $f \in \mathcal{D}_{r,M^*,\sigma}([-1,1])$ definieren wir φ auf der rechten Halbebene S_1 durch

$$\varphi(z) := \frac{1}{z} \cdot \int_0^1 f(t) \exp\left(-\frac{t}{z}\right) dt$$

und die Funktion g auf dem Sektor S_r durch $g(z) := \varphi(\sqrt[r]{z})$. Diese holomorphe Funktion wird das gesuchte Bild Wf.

Für $z \in S_1$ und $n \in \mathbb{N}_+$ folgt durch wiederholte partielle Integration:

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \frac{1}{z} \cdot \left(\left[-z \cdot \exp\left(-\frac{t}{z}\right) f(t) \right]_0^1 + z \cdot \int_0^1 \exp\left(-\frac{t}{z}\right) f'(t) dt \right) \\ &= 0 + z^0 \cdot \exp(0) f(0) + z^0 \cdot \int_0^1 \exp\left(-\frac{t}{z}\right) f^{(1)}(t) dt \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} f^{(j)}(0) z^j + z^{n-1} \cdot \int_0^1 \exp\left(-\frac{t}{z}\right) f^{(n)}(t) dt \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \varphi(z) - \sum_{j=0}^{n-1} f^{(j)}(0) z^j = z^{n-1} \cdot \int_0^1 \exp\left(-\frac{t}{z}\right) f^{(n)}(t) dt \tag{35}$$

$$\Longrightarrow \left| \frac{\varphi(z) - \sum_{j=0}^{n-1} f^{(j)}(0) z^j}{z^n} - f^{(n)}(0) \right| = \left| \int_0^1 \exp\left(-\frac{t}{z}\right) f^{(n+1)}(t) dt \right| \quad .$$

Es ist eine integrierbare Majorante gegeben durch

$$\sup_{t \in [0,1]} \left| \exp\left(-\frac{t}{z}\right) \right| \cdot \left| f^{(n+1)}(t) \right| \leq c \cdot \sup_{t \in [0,1]} \left| \exp\left(-\frac{t}{z}\right) \right| \quad \leq c$$

und mit der punktweisen Konvergenz $\lim\limits_{z\to 0, z\in S_1} \exp\left(-\frac{t}{z}\right) f^{(n+1)}(t) = 0$ für alle $t \in (0,1]$ folgt durch dominierte Konvergenz

$$\lim_{z\to 0} \frac{\varphi(z) - \sum_{j=0}^{n-1} f^{(j)}(0) z^j}{z^n} = f^{(n)}(0) \quad \forall n \in \mathbb{N}_+ \quad . \tag{36}$$

Wir wählen $\beta \in \mathbb{R}_+$ mit $\gamma < \beta < r$ und $s \in \mathbb{N}_+$ so, dass $D := B_{|z|/s}(z) \subset S_\beta$ für $z \in S_\gamma$. Zum Beispiel $s := \left\lceil \left(\cos\frac{\pi\gamma}{2\beta}\right)^{-1} \right\rceil$. Siehe dazu die Skizze Seite 35.

Ferner gilt $|z| \le A \cdot \Re(z)$ für $z \in S_{\beta/r}$ mit $A := \left(\cos\frac{\pi\beta}{2r}\right)^{-1}$.
Mit $\|\cdot\|_\sigma$ bezeichnen wir die Norm von $\mathcal{D}_{r,M^*,\sigma}([-1,1])$:

$$\begin{aligned}
\sup_{z\in S_{\beta/r}} \left| \frac{\varphi(z) - \sum_{j=0}^{nr-1} f^{(j)}(0) z^j}{z^{nr}} \right| &\overset{(35)}{=} \sup_{z\in S_{\beta/r}} \left| \frac{1}{z} \cdot \int_0^1 \exp\left(-\frac{t}{z}\right) f^{(nr)}(t) dt \right| \\
&\le \sup_{t\in[0,1]} \left| f^{(nr)}(t) \right| \cdot \sup_{z\in S_{\beta/r}} \frac{1}{|z|} \int_0^1 \exp\left(-t\Re\left(\frac{1}{z}\right)\right) dt \\
&\le \|f\|_\sigma \sigma^n M_n^* \cdot \sup_{z\in S_{\beta/r}} \frac{1}{|z|} \int_0^1 \exp\left(-t\Re\left(\frac{1}{z}\right)\right) dt \\
&\le \|f\|_\sigma \sigma^n M_n^* \cdot \sup_{z\in S_{\beta/r}} \frac{1-\exp\left(-\Re\left(\frac{1}{z}\right)\right)}{|z| \cdot \Re\left(\frac{1}{z}\right)} \\
&\le \|f\|_\sigma \sigma^n M_n^* \cdot A \quad .
\end{aligned} \tag{37}$$

Auf g wenden wir nun die Cauchy'sche Integralformel für $z \in S_\gamma$ und $n \in \mathbb{N}_+$ an:

$$\begin{aligned}
g^{(n)}(z) &= \left(g(z) - \sum_{j=0}^{n-1} f^{(rj)}(0) z^j\right)^{(n)} && \mid \text{Nullergänzung} \\
&= \left(\varphi(\sqrt[r]{z}) - \sum_{j=0}^{nr-1} f^{(j)}(0) (\sqrt[r]{z})^j\right)^{(n)} && \mid \text{Nullergänzung} \\
&= \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\partial D} \frac{\varphi(\sqrt[r]{u}) - \sum_{j=0}^{nr-1} f^{(j)}(0)(\sqrt[r]{u})^j}{(u-z)^{n+1}} du \quad .
\end{aligned}$$

Damit gilt für $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
g^{(n)}(z) =& \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\partial D} \left(\frac{\varphi(\sqrt[r]{u}) - \sum_{j=0}^{nr-1} f^{(j)}(0)(\sqrt[r]{u})^j}{(\sqrt[r]{u})^{nr}} - f^{(nr)}(0) \right) \frac{u^n}{(u-z)^{n+1}} du \\
&+ \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\partial D} f^{(nr)}(0) \frac{u^n}{(u-z)^{n+1}} du
\end{aligned}$$

$$(38) \qquad \overset{(36)}{\Longrightarrow} \lim_{z\to 0} g^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial D} f^{(nr)}(0) \frac{1}{u} du = n! f^{(nr)}(0) \quad .$$

Außerdem folgt aus (37):

$$\begin{aligned}
\left|g^{(n)}(z)\right| &\leq \frac{n!}{2\pi} \cdot 2\pi \frac{|z|}{s} \cdot \sup_{u\in\partial D} \left| \frac{\varphi(\sqrt[r]{u}) - \sum_{j=0}^{nr-1} f^{(j)}(0)(\sqrt[r]{u})^j}{(|z|/s)^{n+1}} \right| \\
&= \frac{n! s^n}{|z|^n} \cdot \sup_{u\in\partial D} \left| \frac{\varphi(\sqrt[r]{u}) - \sum_{j=0}^{nr-1} f^{(j)}(0)(\sqrt[r]{u})^j}{(\sqrt[r]{u})^{nr}} \right| |u|^n \\
&\leq \frac{n! s^n}{|z|^n} \cdot A \cdot \|f\|_\sigma \, \sigma^n M_n^* \cdot \sup_{u\in\partial D} |u|^n \\
&= A \cdot \|f\|_\sigma \cdot (\sigma \underbrace{s(1+1/s)}_{=:c})^n \cdot M_n \\
\Longrightarrow \quad \|g\|_{c\sigma} &\leq A \cdot \|f\|_\sigma \quad .
\end{aligned}$$

Setzten wir nun g an der Stelle 0 mit $g^{(n)}(0) := n! f^{(nr)}(0)$ fort, so ist

$$W : \mathcal{D}_{r,M^*,\sigma}([-1,1]) \to \mathcal{A}_{M,c\sigma}(S_\gamma) \ , \quad f \mapsto g|_{S_\gamma}$$

wohldefiniert durch (38), linear durch Definition und stetig durch die letzte Abschätzung. □

Durch eine leichte Konstruktion können wir die Extension aus Satz 4.6 mit diesem Operator kombinieren ([SV00]Theorem 5.8). Die Beweis-Methodik wurde bereits in Satz 4.11 verwendet.

Satz 4.13. *Sei $(M_p)_p$ eine positive Folge mit (M0) und (M1), $r \in \mathbb{N}_+$ und $\gamma \in \mathbb{R}_+$ mit $\gamma < r$.*
Ist die Borel-Abbildung $B_{r+1} : \mathcal{D}_{r+1,M}([-1,1]) \to \Lambda_M(\mathbb{N})$ surjektiv,
dann existiert ein $c \in \mathbb{R}_+$, so dass für jedes $\sigma \in \mathbb{R}_+$ eine Extension $E_{\gamma,\sigma} : \Lambda_{M,\sigma}(\mathbb{N}) \to \mathcal{A}_{M,c\sigma}(S_\gamma)$ existiert.

Beweis. Da $\mathcal{D}_{r+1,M}([-1,1])|_{[0,1]} \subset \mathcal{L}_{r+1,M}([0,1])$ ist, zeigt Lemma 4.8, dass (γ_{r+1}) von $(m_p)_p$ erfüllt ist. $(\sqrt[r+1]{m_p})_p$ erfüllt folglich (γ_1). Ohne Einschränkung wird (M0) und (M1) von $(M_p^*)_p$ erfüllt, und somit auch von der zugehörigen r-Interpolierenden $(N_p)_p$. Diese erfüllt (M3) durch Lemma 1.13.

Wir werden nun folgende Operatoren konstruieren:

$$\begin{aligned}
&\Lambda_{M,\sigma}(\mathbb{N}) \xrightarrow{L} \Lambda_{M^*,\sigma}(\mathbb{N}) \xrightarrow{V} \Lambda_{N,\sqrt[r]{\sigma}}(\mathbb{N}) \\
&\qquad \xrightarrow{U} \mathcal{D}_{N,\sqrt[r]{d_1\sigma}}([-1,1]) \xrightarrow{W} \mathcal{D}_{r,M^*,d_1\sigma}([-1,1]) \xrightarrow{N} \mathcal{A}_{M,cd_1\sigma}(S_\gamma)
\end{aligned}$$

Zuerst definieren wir den Isomorphismus

$$L_\sigma : \Lambda_{M,\sigma}(\mathbb{N}) \to \Lambda_{M^*,\sigma}(\mathbb{N}) \ , \quad (a_p)_p \mapsto (a_p/p!)_p$$

und den Operator

$$V_\sigma : \Lambda_{M^*,\sigma}(\mathbb{N}) \to \Lambda_{N,\sqrt[r]{\sigma}}(\mathbb{N}) \ , \quad (a_p)_p \mapsto (b_p)_p$$

mit $b_{pr+q} := \begin{cases} a_p & ,q=0 \\ 0 & ,q \in \{1,\dots,r-1\} \end{cases}$ für $p \in \mathbb{N}$. Diese sind linear, stetig und wohldefiniert, denn $|b_{pr}| = |a_p| \le \|a\|_\sigma \sigma^p M_p^* = \|a\|_\sigma \sqrt[r]{\sigma}^{pr} N_{pr}$.

Da $(N_p)_p$ (M3) erfüllt, liefert Satz 4.6 die Existenz von $d \in \mathbb{R}_+$ und einer Extension

$$U_\sigma : \Lambda_{N,\sqrt[r]{\sigma}}(\mathbb{N}) \to \mathcal{D}_{N,\sqrt[r]{d\sigma}}([-1,1]) \quad .$$

Zusammen ergibt dies $U_\sigma V_\sigma L_\sigma : \Lambda_{M,\sigma}(\mathbb{N}) \to \mathcal{D}_{N,\sqrt[r]{d\sigma}}([-1,1])$.

Sei E_σ der topologische Untervektorraum von $\mathcal{D}_{N,\sqrt[r]{d\sigma}}([-1,1])$ mit den Elementen f, so dass $f^{(pr+q)}(0) = 0$ für $p \in \mathbb{N}$, $q \in \{1,\dots,r-1\}$. Es ist *Bild* $(U_\sigma V_\sigma L_\sigma) \subset E_\sigma$ durch die Konstruktion von V_σ. Somit ist die Einbettung

$$W_\sigma : E_\sigma \to \mathcal{D}_{r,M^*,d\sigma}([-1,1]) \ , \quad f \mapsto f$$

linear, stetig und wohldefiniert, da

$$\left| f^{(pr)}(x) \right| \le \|f\|_{\sqrt[r]{d\sigma}} (\sqrt[r]{d\sigma})^{pr} N_{pr} = \|f\|_{\sqrt[r]{d\sigma}} (d\sigma)^p M_p^* \quad .$$

Lemma 4.12 liefert schließlich ein $c \in \mathbb{R}_+$ und einen linearen, stetigen Operator

$$N_\sigma : \mathcal{D}_{r,M^*,d\sigma}([-1,1]) \to \mathcal{A}_{M,cd\sigma}(S_\gamma)$$

mit $(N_\sigma f)^{(p)}(0) = p! f^{(pr)}$ für $f \in \mathcal{D}_{r,M^*,d\sigma}([-1,1])$ und $p \in \mathbb{N}$.
Somit folgt für $(a_p)_p \in \Lambda_{M,\sigma}(\mathbb{N})$ und $p \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}(N_\sigma W_\sigma U_\sigma V_\sigma L_\sigma a)^{(p)}(0) &= p!(W_\sigma U_\sigma V_\sigma L_\sigma a)^{(pr)}(0) = p!(W_\sigma U_\sigma V_\sigma L_\sigma a)^{(pr)}(0) \\ &= p!(V_\sigma L_\sigma a)_{pr} = p!(L_\sigma a)_p = a_p \quad .\end{aligned}$$

Damit ist $N_\sigma W_\sigma U_\sigma V_\sigma L_\sigma : \Lambda_{M,\sigma}(\mathbb{N}) \to \mathcal{A}_{M,cd\sigma}(S_\gamma)$ die behauptete Extension. $\square$

Überspringen wir die erste Argumentation im vorigen Beweis, so können wir die Voraussetzung elementarer formulieren.

Satz 4.14. *Sei $(M_p)_p$ eine positive Folge mit (M0) und (M1), $r \in \mathbb{N}_+$ und $\gamma \in \mathbb{R}_+$ mit $\gamma < r$.*
Wird (γ_{r+1}) von $(m_p)_p$ erfüllt,
dann existiert ein $c \in \mathbb{R}_+$, so dass für jedes $\sigma \in \mathbb{R}_+$ eine Extension $E_{\gamma,\sigma} : \Lambda_{M,\sigma}(\mathbb{N}) \to \mathcal{A}_{M,c\sigma}(S_\gamma)$ existiert.

Auf die gleiche Weise können wir die Voraussetzung in [SV00](Theorem 5.5) substituieren. Es entspricht dann vorigem Ergebnis für die Roumieu-Klasse.

Satz 4.15. Borel-Ritt-Theorem für ultraholomorphe Roumieu-Klassen
Sei $(M_p)_p$ eine positive Folge mit (M0) und (M1), $r \in \mathbb{N}_+$ und $\gamma \in \mathbb{R}_+$ mit $\gamma < r$.
Wird (γ_{r+1}) von $(m_p)_p$ erfüllt,
dann ist die Borel-Abbildung $B : \mathcal{A}_M(S_\gamma) \to \Lambda_M(\mathbb{N})$ surjektiv.

Beweis. Ohne Einschränkung erfüllt $(M_p^*)_p$ die Bedingungen (M0), (M1) und (γ_r). Somit liefert Satz 4.11 eine Extension $U : \Lambda_{M^*}(\mathbb{N}) \to \mathcal{D}_{r,M^*}([-1,1])$.

$$V : \Lambda_M(\mathbb{N}) \to \Lambda_{M^*}(\mathbb{N}) \ , \quad (a_p)_p \mapsto (a_p/p!)_p$$

ist ein Isomorphismus und $W : \mathcal{D}_{r,M^*}([-1,1]) \to \mathcal{A}_M(S_\gamma)$ sei der Operator aus Lemma 4.12, da $\gamma < r$ gilt.
Zusammen ist dann $WUV : \Lambda_M(\mathbb{N}) \to \mathcal{A}_M(S_\gamma)$ die gesuchte Extension, da

$$(WUVa)^{(p)} = (p!UVa)^{(p)} = p!(Va)_p = a_p$$

für alle $(a_p)_p \in \Lambda_M(\mathbb{N})$ und $p \in \mathbb{N}$ gilt. □

Mit den nächsten beiden Sätzen zeigen wir, dass die Voraussetzung (γ_{r+1}) durch (M2)+(γ_r) ersetzbar ist. Wir erinnern, dass die Bedingung (γ_r) und der Begriff „r-streng regulär“ gleichbedeutend sind (Seite 20). Zunächst knüpfen wir an den Satz 4.13/4.14 an ([Thi00]Proposition 3.2).
Wir möchten anmerken, dass Thilliez dabei ein kleiner, behebbarer Fehler unterläuft ((M2)$\not\Longrightarrow$ $M_{qj} \leq A^{qj} M_j^q$). In einer (späteren) Version der Arbeit auf seinem Universitätswebspace ist dieser Satz nicht enthalten.

Satz 4.16. *Sei $r \in \mathbb{N}_+$, $(M_p)_p$ eine streng reguläre Folge, r-streng regulär und $\gamma \in \mathbb{R}_+$ mit $\gamma < r$.*
Dann gibt es eine Konstante $c \geq 1$, die nur von $(M_p)_p$ und γ abhängt, so dass für jedes $\sigma \in \mathbb{R}_+$ eine Extension $E_{\gamma,\sigma} : \Lambda_{M,\sigma}(\mathbb{N}) \to \mathcal{A}_{M,c\sigma}(S_\gamma)$ existiert.

Beweis. Sei $(M_p^{\langle r\rangle})_p$ die streng reguläre Folge aus der Definition 1.11 und $a \in \mathbb{R}_+$ die Konstante der dortigen Äquivalenzrelation. Für ein $c_1 \in \mathbb{R}_+$ gilt:

$$M_{p(r+1)}^{\langle r\rangle} \overset{\text{Def 1.11}}{\geq} a^{-p(r+1)} M_{p(r+1)}^{1/r} \geq a^{-p(r+1)} M_{p(r+1)}^{1/r+1} \overset{(\text{M1})}{\geq} (a^{r+1})^{-p} M_p \tag{39}$$

$$\begin{aligned} M_{p(r+1)}^{\langle r\rangle} &\overset{\text{Def 1.11}}{\leq} a^{p(r+1)} M_{p(r+1)}^{1/r} \overset{(\text{M2})}{\leq} a^{p(r+1)} A^{p(r+1)} M_r^{1/r} M_{pr}^{1/r} \\ &\overset{(\text{M2})}{\leq} a^{p(r+1)} A^{p(r+1)+r^2+pr^2} M_1 M_p \leq c_1^p M_p \quad . \end{aligned} \tag{40}$$

Sei nun eine Folge $(\lambda_p)_p \in \Lambda_M(\mathbb{N})$ gegeben, dann existiert ein $\sigma \in \mathbb{R}_+$ mit $(\lambda_p)_p \in \Lambda_{M,\sigma}(\mathbb{N})$. Wir definieren $(\lambda_p^*)_p$ durch $\lambda_{p(r+1)+q}^* := \begin{cases} \lambda_p & , q = 0 \\ 0 & , q \in \{1, \dots, r\} \end{cases}$ für $p \in \mathbb{N}$. Dann gilt für $\sigma_* := a \cdot \sqrt[r+1]{\sigma}$:

$$\sup_{p\in\mathbb{N}} \frac{|\lambda_p^*|}{\sigma_*^p M_p^{\langle r\rangle}} = \sup_{p\in\mathbb{N}} \frac{|\lambda_p|}{\sigma_*^{p(r+1)} M_{p(r+1)}^{\langle r\rangle}} \overset{(39)}{\leq} \sup_{p\in\mathbb{N}} \frac{|\lambda_p|}{\sigma_*^{p(r+1)} a^{-p(r+1)} M_p} < \infty \quad .$$

Somit ist $(\lambda_p^*)_p \in \Lambda_{M^{\langle r\rangle},\sigma_*}(\mathbb{N})$. Satz 4.5a liefert dann die Existenz einer Funktion $f \in \mathcal{E}_{M^{\langle r\rangle},c\sigma_*}(\mathbb{R})$ mit $Bf = \lambda^*$ und $\operatorname{supp}(f) \subset [-1,1]$.
Es ist $f \in \mathcal{D}_{r+1,M}([-1,1])$, denn:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \sup_{p\in\mathbb{N}} \frac{|f^{(p(r+1))}(x)|}{((ac)^{r+1}c_1)^p M_p} \overset{(40)}{\leq} \sup_{x\in\mathbb{R}} \sup_{p\in\mathbb{N}} \frac{|f^{(p(r+1))}(x)|}{(ac)^{p(r+1)} \sigma^p M_{p(r+1)}^{\langle r\rangle}} \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} \sup_{p\in\mathbb{N}} \frac{|f^{(p)}(x)|}{c^p \sigma_*^p M_p^{\langle r\rangle}} < \infty \,.$$

Da $B_{r+1} f = \lambda$ gilt, ist die Voraussetzung von Satz 4.13 geschaffen und dies ergibt die Behauptung. ☐

Da im Allgemeinen nur „$r < \gamma(M) \iff r$-streng regulär" gilt (Lemma 1.12), ist dieser Satz lediglich ausreichend für $\gamma < \lceil \gamma(M) - 1 \rceil$. Dies ist jedoch recht wenig, z. B. im Falle von $(M_p)_p = (p!^2)_p : \gamma(M) = 2$ und $r = 1$. Hier wäre es interessant, ob der Satz für $r = 2$ auch noch gilt.
Tatsächlich können wir die positive Antwort zeigen ([Thi00]Theorem 3.4). Der Beweis beruht nun nicht mehr auf dem Operator aus Lemma 4.12. Stattdessen werden hier die Funktionen und Abschätzungen aus Abschnitt 2.3 verwendet.

Satz 4.17. Borel-Ritt-Theorem für ultraholomorphe Roumieu-Klassen
Sei $(M_p)_p$ eine streng reguläre Folge und $\gamma \in \mathbb{R}_+$ mit $\gamma < \min(2, \gamma(M))$.
Dann gibt es eine Konstante $c \geq 1$, die nur von $(M_p)_p$ und γ abhängt, so dass für jedes $\sigma \in \mathbb{R}_+$ eine Extension $E_{\gamma,\sigma} : \Lambda_{M,\sigma}(\mathbb{N}) \to \mathcal{A}_{M,c\sigma}(S_\gamma)$ existiert.
Insbesondere existiert eine Extension $E_\gamma : \Lambda_M(\mathbb{N}) \to \mathcal{A}_M(S_\gamma)$.

Beweis. Sei $z = x + \mathrm{i}y$ und $\overline{\partial}$ der Cauchy-Riemann-Operator $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)$.
Wir wählen zwei offene Kreisscheiben $D = B_{r_1}(0)$ und $D' = B_{r_2}(0)$ mit $r_1 < r_2$.
Für $\sigma > 0$ sei $\chi \in \mathcal{E}_{M,\sigma}(\mathbb{C})$ eine Abschneidefunktion mit $\operatorname{supp}(\chi) \subset D'$ und $\chi|_D \equiv 1$.
$\mathbb{C}$ fassen wir dabei als $\mathbb{R}^2$ auf.

Der Beweis ist nun in 4 Teile aufgeteilt.
Teil I konstruiert eine Extension nach $\mathcal{E}_{M,c\sigma}(\mathbb{C})$ durch Satz 4.5.
In Teil II wird eine Division mit der ultraholomorphen Funktion aus Satz 2.8 erzeugt mit ultradifferenzierbarem Ergebnis.
Teil III zeigt, dass dieses eine Lösung einer Differentialgleichung ist.
Teil IV erzeugt schließlich die gesuchte holomorphe Extension durch Addition einer flachen Funktion.

I. Zu $\lambda \in \Lambda_{M,\sigma}(\mathbb{N})$ definieren wir $\lambda^{\mathbb{C}} \in \Lambda_{M,\sigma}(\mathbb{N}^2)$ durch die Komplexifizierung

$$\sum_{(j,k)\in\mathbb{N}^2} \lambda^{\mathbb{C}}_{j,k} \cdot \frac{x^j y^k}{j!k!} = \sum_{l\in\mathbb{N}} \lambda_l \cdot \frac{(x+\mathrm{i}y)^l}{l!} \quad , \tag{41}$$

d. h. $\lambda^{\mathbb{C}}_{j,k} = \mathrm{i}^k \lambda_{j+k}$. Dieser Operator $\lambda \mapsto \lambda^{\mathbb{C}}$ ist damit linear und stetig mit Norm 1.
Wir setzen nun $g_\lambda := E_\sigma \lambda^{\mathbb{C}}$ mit der Extension $E_\sigma : \Lambda_{M,\sigma}(\mathbb{N}^2) \to \mathcal{E}_{M,c\sigma}(\mathbb{C})$ aus Satz 4.5, so dass der Träger $\operatorname{supp}(g_\lambda) \subset D$ erfüllt. Dann ist $Bg_\lambda = BE_\sigma\lambda^{\mathbb{C}} = \lambda^{\mathbb{C}}$ und (41) ist die Taylorreihe zu g_λ. Somit ist $\overline{\partial} g_\lambda$ ist flach bei 0.
Da (M2) gilt, existieren wie in (7) Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_+$, so dass für $J \in \mathbb{N}^2$ und $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\left|D^J \overline{\partial} g_\lambda(z)\right| \le c_1 \left\|E_\sigma\right\| \left\|\lambda\right\|_\sigma (c_2\sigma)^j M_j \exp\left(-M^*\left(\frac{1}{c_2\sigma\,|z|}\right)\right) \quad . \tag{42}$$

Dabei ist $\|E_\sigma\|$ die Operator-Norm von E_σ.

II. Sei nun $\tau \in \mathbb{R}_+$, $z \in S_\gamma$ und $J, K, L \in \mathbb{N}^2,\ K+L = J$. Wir setzen $G_\tau(z) := G(\tau z)$ mit der ultraholomorphen Funktion G aus Satz 2.8. Wie in Lemma 2.3 folgt dann:

$$\begin{aligned}
\left|D^J\left(\frac{1}{G_\tau}\overline{\partial} g_\lambda\right)(z)\right| &\le \frac{(c_3\tau + c_2\sigma)^j}{(c_3\tau)^k (c_2\sigma)^l} \left|\left(D^K \frac{1}{G_\tau}\right)(z)\right| \left|(D^L\overline{\partial} g_\lambda)(z)\right| \\
&\underset{(42)}{\overset{\text{Lemma 2.9}}{\le}} \frac{(c_3\tau + c_2\sigma)^j}{(c_3\tau)^k (c_2\sigma)^l} \cdot c_3^k \tau^k M_k \exp\left(+M^*\left(\frac{1}{c_4\tau\,|z|}\right)\right) \cdot \\
&\qquad \cdot c_1 \left\|E_\sigma\right\| \left\|\lambda\right\|_\sigma (c_2\sigma)^l M_l \exp\left(-M^*\left(\frac{1}{c_2\sigma\,|z|}\right)\right) \\
&\le c_1 \left\|E_\sigma\right\| \left\|\lambda\right\|_\sigma (c_3\tau + c_2\sigma)^j M_j \exp\left(M^*\left(\frac{1}{c_4\tau\,|z|}\right) - M^*\left(\frac{1}{c_2\sigma\,|z|}\right)\right) \quad .
\end{aligned}$$

Für $\psi := G_{\rho(2)c_2\sigma/c_4}$ und $c_5, c_6, \nu(\sigma) \in \mathbb{R}_+$ erhalten wir nun mit Hilfe von (5) (hier geht (M2) ein):

$$\begin{aligned} \left| D^J \left(\frac{1}{\psi} \overline{\partial} g_\lambda \right)(z) \right| &\leq c_1 \|E_\sigma\| \|\lambda\|_\sigma \left(\frac{c_2 c_3 \rho(2)\sigma}{c_4} + c_2\sigma \right)^j M_j \cdot \\ &\cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot M^* \left(\frac{1}{c_2\sigma |z|} \right) \right) \\ &\leq \nu(\sigma) \|\lambda\|_\sigma (c_5\sigma)^j M_j \exp\left(-M^* \left(\frac{1}{c_6\sigma |z|} \right) \right) \quad . \end{aligned} \tag{43}$$

III. Diese Abschätzung zeigt insbesondere, dass $\frac{1}{\psi}\overline{\partial} g_\lambda$ zu $\mathcal{E}_{M,c_5\sigma}(S_\gamma)$ gehört mit Norm kleiner als $\nu(\sigma) \|\lambda\|_\sigma$. Der Satz 4.5b mit $\Omega = S_\gamma \cap D'$ liefert ein $c_\Omega \geq 1$, so dass $v_\lambda := T_{\Omega,c_5\sigma}(\frac{1}{\psi}\overline{\partial} g_\lambda)$ in $\mathcal{E}_{M,c_5 c_\Omega\sigma}(\mathbb{C})$ liegt. Es gilt $\|v_\lambda\|_{c_5 c_\Omega \sigma} \leq \|T_{\Omega,c_5\sigma}\| \, \nu(\sigma) \|\lambda\|_\sigma$. Da $v_\lambda = \frac{1}{\psi}\overline{\partial} g_\lambda$ auf Ω und $\frac{1}{\psi}\overline{\partial} g_\lambda$ auf $S_\gamma \backslash D$ verschwindet, folgt

$$\chi v_\lambda = \frac{1}{\psi}\overline{\partial} g_\lambda \quad \text{auf } S_\gamma \; . \tag{44}$$

Mit $c_7 := c_5 c_\Omega + 1$ zeigt Lemma 2.3, dass $\chi v_\lambda \in \mathcal{E}_{M,c_7\sigma}(\mathbb{C})$ und dass $\|\chi v_\lambda\|_{\mathbb{C},c_7\sigma} \leq \nu_2(\sigma) \|\lambda\|_\sigma$ für ein $\nu_2(\sigma) \in \mathbb{R}_+$ gilt.
Nun falten wir mit dem Cauchy-Kern $\mathcal{K}(\xi) = -\frac{1}{\pi\xi}$, also $u_\lambda := \mathcal{K} * (\chi v_\lambda)$. Da χv_λ einen kompakten Träger in D hat, gilt $\overline{\partial} u_\lambda = \overline{\partial}\mathcal{K} * (\chi v_\lambda) = \delta * (\chi v_\lambda) = \chi v_\lambda$ in $\mathbb{C}$. Dabei ist δ die Dirac-Funktion. Für $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned} \left| D^J u_\lambda(z) \right| &= \left| \int_D D^J \chi v_\lambda(y) \mathcal{K}(z-y) dy \right| \\ &\leq \sup_{\zeta \in D} \left| D^J \chi v_\lambda(\zeta) \right| \cdot \int_D \left| \frac{1}{\pi(y-z)} \right| dy \\ &\leq 6r_1 \cdot \sup_{\zeta \in D} \left| D^J \chi v_\lambda(\zeta) \right| \quad . \end{aligned} \tag{45}$$

Die letzte Abschätzung des Integrals zeigen wir in zwei Fällen:
<u>1.Fall: $|z| \geq 2r_1$.</u> Es gilt $|y-z| \geq |z| - |y| \geq |2y| - |y| = |y|$ für $y \in D$ und somit:

$$\int_D \left| \frac{1}{y-z} \right| dy \leq \int_D \frac{1}{|y|} dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{r_1} \frac{r \; dr \; d\phi}{r} = 2\pi r_1 \quad .$$

<u>2.Fall: $|z| \leq 2r_1$.</u> Mit $|\xi| \leq |\xi + z| + |z| \leq r_1 + 2r_1 = 3r_1$ gilt

$$\int_D \left| \frac{1}{y-z} \right| dy = \int_{|\xi+z| \leq r_1} \frac{1}{|\xi|} d\xi \leq \int_{|\xi| \leq 3r_1} \frac{1}{|\xi|} d\xi = 6\pi r_1 \quad .$$

Aus 45 folgt dann:

$$\sup_{z\in\mathbb{C}} \left|D^J u_\lambda(z)\right| \le 6r_1\nu_2(\sigma)\,\|\lambda\|_\sigma\,(c_7\sigma)^j\,M_j \quad . \tag{46}$$

IV. Da nach Satz 2.8 ein $c_8 \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $G \in \mathcal{E}_{M,c_8}(S_\gamma)$ ist, ist $\psi \in \mathcal{E}_{M,c_9\sigma}(S_\gamma)$ mit $c_9 := c_2c_8\rho(2)/c_4$. Durch (46) und Lemma 2.3 ist dann $\psi u_\lambda \in \mathcal{E}_{M,(c_7+c_9)\sigma}(S_\gamma)$ mit $\|\psi u_\lambda\|_{S_\gamma,(c_7+c_9)\sigma} \le 2r_1\nu_2(\sigma)\,\|\lambda\|_\sigma\,\|\psi\|_{S_\gamma,c_9\sigma}$.
Damit ist nun $f_\lambda := g_\lambda - \psi u_\lambda$ wohldefiniert und holomorph auf S_γ, denn es gilt:

$$\overline{\partial} f_\lambda = \overline{\partial} g_\lambda - (\overline{\partial}\psi)u_\lambda - \psi(\overline{\partial} u_\lambda) \; = \overline{\partial} g_\lambda - 0 - \psi\chi v_\lambda \overset{(44)}{=} 0 \quad .$$

Die Definitionen von $g_\lambda, v_\lambda, u_\lambda$ und f_λ zeigen, dass diese linear in λ sind.
Des Weiteren ist die Abbildung $\lambda \mapsto f_\lambda$ stetig von $\Lambda_{M,\sigma}$ nach $\mathcal{A}_{M,c_{10}\sigma}(S_\gamma)$ mit $c_{10} := \max(c, c_7 + c_9)$. Das Lemma 2.9a zeigt, dass ψ und somit ψu_λ flach bei 0 sind. Somit gilt $f_\lambda^{(j)}(0) = g_\lambda^{(j)}(0) = \lambda_j$ für $j \in \mathbb{N}$.
Die Behauptung folgt jetzt durch Setzen von $T_{\gamma,\sigma}\lambda = f_\lambda$. □

Abschließend wollen wir erwähnen, dass eine Umkehrung der letzten Sätze folgendermaßen möglich ist ([SV00]Abschnitt 5.2):
Sei eine sektorielle Extension $E : \Lambda_M(\mathbb{N}) \to \mathcal{A}_M(S_r)$ gegeben. Dann erhalten wir durch Einschränkung auf die positive reelle Achse eine weitere Extension $(E\cdot)|_{[0,\infty[} : \Lambda_M(\mathbb{N}) \to \mathcal{E}_M([0,\infty[)$. Der Satz 4.11 kann dann (M3) zeigen und aus [SV00](Proposition 5.3) folgt (β_2). Falls zusätzlich $(m_p/p^r)_p$ quasi-steigend ist, gilt (γ_r) durch Lemma 1.15.
Hier wäre eine Aussage ohne die letzte Forderung interessant. Im Beurling-Fall bietet dies der Satz 5.11.

5 Borel-Ritt-Theoreme der Beurling-Klasse

Hier werden wir die Beurling-Klassen einführen und betrachten. Viele Aussagen des vorigen Kapitels gelten für diese analog und werden auf gleichem Weg beweisen. Grundlage ist hier das Kapitel 4 aus [SV00].

5.1 Ultradifferenzierbare Räume

Bisher haben wir die induktiven Limites der Räume $\mathcal{E}_{M,\sigma}(\Omega)$ und $\Lambda_{M,\sigma}(\mathbb{N}^n)$ betrachtet. Ebenfalls interessant sind die projektiven Limites, d. h. die entsprechenden Fréchet-Räume.

Definition 5.1. *Sei $(M_p)_p$ eine positive Folge, so definieren wir:*

$$\begin{aligned}
\Lambda_M^-(\mathbb{N}^n) &:= \bigcap_{\sigma>0} \Lambda_{M,\sigma}(\mathbb{N}^n) = \lim_{\sigma\to 0} \Lambda_{M,\sigma}(\mathbb{N}^n) \\
\mathcal{E}_M^-(K) &:= \bigcap_{\sigma>0} \mathcal{E}_{M,\sigma}(K) = \lim_{\sigma\to 0} \mathcal{E}_{M,\sigma}(K) \\
\mathcal{E}_{r,M}^-(K) &:= \bigcap_{\sigma>0} \mathcal{E}_{r,M,\sigma}(K) = \lim_{\sigma\to 0} \mathcal{E}_{r,M,\sigma}(K)
\end{aligned}$$

Für alle weiteren Räume analog.

Beispielsweise bedeutet dies für die Folgen $(\lambda_p)_p$ in $\Lambda_M^-(\mathbb{N})$:

$$\forall \sigma \in \mathbb{R}_+ \; \exists C(\sigma) \in \mathbb{R}_+ \; \forall p \in \mathbb{N} : \; |\lambda_p| \leq C(\sigma) \cdot \sigma^p \cdot M_p \quad .$$

Da besonders die kleinen σ wichtig sind, können wir äquivalent

$$\forall q \in \mathbb{N}_+ \; \exists C(q) \in \mathbb{R}_+ \; \forall p \in \mathbb{N} : \; |\lambda_p| \leq C(q) \cdot M_p / q^p$$

fordern. Dies finden wir zum Beispiel bei Schmets und Valdivia.
Die Räume sind nicht trivial (leer), denn es ist beispielsweise $(M_p^*)_p$ oder offensichtlich jede abbrechende Folge in $\Lambda_M^-(\mathbb{N})$ enthalten. Die topologische Struktur wird mit dem Halbnorm-System $\{\|\cdot\|_\sigma \,|\sigma \in \mathbb{R}_+\}$ versehen (bzw. abzählbar mit $(1/\sigma) \in \mathbb{N}_+$). [Kom00] beinhaltet dazu:

Zitat: Teil von [Kom00] Theorem 2.6

> *$\mathcal{E}^-_M(K)$, $\mathcal{E}^-_M(\Omega)$ und $\mathcal{D}^-_M(K)$ sind (FS)-Räume.*
> *$\mathcal{D}^-_M(\Omega)$ ist (LFS)-Raum. Insbesondere sind diese separable, vollständige, bornologische Montel- und Schwartz-Räume. Somit sind sie semi-reflexiv. Gilt (M2′), so sind sie nuklear.*

Zitat: Teil von [Kom00] Theorem 5.12

> *Gelten (M1) und (M3′), so ist $\mathcal{E}^-_M(\Omega)$ ein (DFS)-Raum.*

Die Aussage von Lemma 4.8 stimmt hier analog und der Beweis verläuft fast identisch ([SV00]Proposition 4.1). Die Bedingung (γ_r) ist somit notwendige Voraussetzung für eine Extension $E : \Lambda^-_M(\mathbb{N}) \to \mathcal{L}^-_{r,M}([0,1])$.

Lemma 5.2. *Sei $r \in \mathbb{N}_+$ und $(M_p)_p$ eine positive Folge mit (M0) und (M1). Ist die Borel-Abbildung $B_r : \mathcal{L}^-_{r,M}([0,1]) \to \Lambda^-_M(\mathbb{N})$ surjektiv, dann wird (γ_r) von $(m_p)_p$ erfüllt.*

Beweis. Da $B_r : \mathcal{L}^-_{r,M}([0,1]) \to \Lambda^-_M(\mathbb{N})$ eine lineare, stetige, surjektive Abbildung zwischen Fréchet-Räumen ist, ist sie eine offene Abbildung durch den Satz der offenen Abbildung (siehe z. B. [Wer07]Abschnitt IV.3). Somit gilt:

$$\exists C, \sigma \in \mathbb{R}_+ \ \forall (a_p)_p \in \Lambda^-_M(\mathbb{N}) \ \exists f \in \mathcal{L}^-_{r,M}([0,1]) : \ B_r f = a \text{ und } \|f\|_1 \leq C \cdot \|a\|_\sigma \ .$$

Da für $p \in \mathbb{N}$ die Einheitsvektoren $e_p := (\ldots, 0, \underset{p}{1}, 0, \ldots)$ in $\Lambda^-_M(\mathbb{N})$ sind, existieren somit reelle Funktionen $\varphi_p \in \mathcal{L}^-_{r,M}([0,1])$ mit $\varphi_p^{(jr)}(0) = (e_p)_j = \begin{cases} 1 & , j = p \\ 0 & , j \in \mathbb{N}, j \neq p \end{cases}$
und $\|\varphi_p\|_1 \leq C/(\sigma^p M_p)$.
Es ist $\varphi_p^{(pr)}(1) = 0$ wegen dem Träger $\operatorname{supp}(\varphi_p) \subset [0,1]$, und somit ist

$$\alpha_p := \inf \left\{ x \in [0,1] \,\middle|\, \varphi_p^{(pr)}(x) < 1/2 \right\}$$

wohldefiniert mit $0 < \alpha_p < 1$. Es folgt sofort $\varphi_{2p}^{(2pr)}(x) \geq 1/2 \ \forall x \in [0, \alpha_{2p}]$. Und nach pr-facher Integration erhalten wir mit obigen Abschätzungen:

$$\begin{aligned} \varphi_{2p}^{(pr)}(x) &\geq \frac{x^{pr}}{2(pr)!} \quad \forall x \in [0, \alpha_{2p}] \\ \overset{x=\alpha_{2p}}{\Longrightarrow} \alpha_{2p}^{pr} &\leq 2(pr)! \varphi_{2p}^{(pr)}(\alpha_{2p}) \leq 2(pr)! \|\varphi_{2p}\|_1 M_p \\ &\leq 2(pr)^{pr} \|\varphi_{2p}\|_1 M_p \leq 2(pr)^{pr} C \sigma^{-2p} \frac{M_p}{M_{2p}} \\ &\overset{\text{(M1)}}{\leq} 2C(pr)^{pr} \sigma^{-2p} \frac{1}{m_p^p} \quad . \end{aligned} \tag{47}$$

$$\Longrightarrow \alpha_{2p} \leq r \sqrt[pr]{2C} \sqrt[r]{\sigma^{-2}} \frac{p}{\sqrt[r]{m_p}} \tag{48}$$

Falls nun die Bedingung

$$\exists p_0 \in \mathbb{N}_+,\ h > 0\ \forall\ p \geq p_0 :\ \alpha_{2p} \geq \sum_{k=4p}^{\infty} \frac{h}{\sqrt[r]{m_k}} \tag{49}$$

gilt, so folgt die Behauptung:

$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[r]{m_k}} = \sum_{k=p}^{4p-1} \frac{1}{\sqrt[r]{m_k}} + \sum_{k=4p}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[r]{m_k}} &\underset{(49)}{\overset{(M1)}{\leq}} \frac{3p}{\sqrt[r]{m_p}} + \frac{\alpha_{2p}}{h} \\ &\overset{(48)}{\leq} \left(3 + \frac{r}{h} \sqrt[pr]{2C} \sqrt[r]{\sigma^{-2}}\right) \frac{p}{\sqrt[r]{m_p}} \quad .\end{aligned}$$

Um (49) zu zeigen, sei für $h \in]0, \frac{1}{4}\sigma^{2/r}[$ die Zahlenmenge

$$P := \left\{ p \in \mathbb{N}_+ \middle| \alpha_{2p} < \sum_{k=4p}^{\infty} \frac{h}{\sqrt[r]{m_k}} \right\} \tag{50}$$

definiert. Ist diese endlich, so gilt offensichtlich (49).

Sei $p \in P$, so definieren wir $\varrho_p \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R})$ mit $\varrho_p(x) := \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ \varphi_{2p}^{(2pr)}(x) - 1 & , x \geq 0 \end{cases}$ und konstruieren die fallende Folge

$$\frac{1}{q_k} = \begin{cases} \dfrac{h}{\sqrt[r]{m_{4p}}} & \text{für } k \in \mathbb{N}_+ \text{ mit } k \leq pr \\ \dfrac{h}{\sqrt[r]{m_{4p+l+1}}} & \text{für } k \in \mathbb{N}_+,\ l \in \mathbb{N} \text{ mit } (p+l)r \leq k \leq (p+l+1)r \end{cases} .$$

Durch (50) ist $\alpha_{2p} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{q_k}$, so dass [Hör83](Lemma 1.3.6) (siehe Seite 53) angewendet werden kann. Es folgt:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \overset{\text{Def } \alpha}{=} |\varrho_p(\alpha_{2p})| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} 4^k \sup_{x<\alpha_{2p}} \frac{1}{q_1} \cdots \frac{1}{q_k} \cdot \left|\varrho_p^{(k)}(x)\right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} 4^{(p+k)r} \sup_{x<\alpha_{2p}} \left(\frac{1}{q_p}\right)^{pr} \left(\frac{1}{q_{(p+1)r}}\right)^r \cdots \left(\frac{1}{q_{(p+k)r}}\right)^r \cdot \left|\varphi_{2p}^{((3p+k)r)}(x)\right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^{(p+k)r} h^{(p+k)r}}{m_{4p}^p m_{4p+1} \cdots m_{4p+k}} \cdot \sup_{x\geq 0} \left|\varphi_{2p}^{((3p+k)r)}(x)\right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4h)^{(p+k)r}}{m_{4p}^p m_{4p+1} \cdots m_{4p+k}} \cdot \|\varphi_{2p}\|_1 M_{3p+k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4h)^{(p+k)r}}{m_{4p}^{p} m_{4p+1} \cdots m_{4p+k}} \cdot \frac{C}{\sigma^{2p} M_{2p}} M_{3p+k} \\
&\overset{\text{(M1)}}{\leq} \sum_{k=0}^{\infty} (4h)^{(p+k)r} C \sigma^{-2p} = C(4h)^{pr} \sigma^{-2p} \sum_{k=0}^{\infty} (4h)^{kr} \\
&= \frac{C}{1-(4h)^r} \cdot \underbrace{\left(\frac{(4h)^r}{\sigma^2}\right)^p}_{\leq 1} \quad ,
\end{aligned}$$

da h klein genug gewählt wurde. Dies ist aber nur für endlich viele p möglich. $\square$

In den nächsten beiden Lemmata korrigieren wir einen Druckfehler in [SV00]. Dort wird die Roumieu-Klasse $\Lambda_{\{M\}}$ notiert, obwohl die Beurling-Klasse im Beweis betrachtet wird.
Wir setzen voriges Lemma fort: Wie in Lemma 4.10 wird die größere Klasse $\mathcal{E}$ statt $\mathcal{L}$ betrachtet. Entgegen dem Roumieu-Fall formulieren wir hier zunächst ein Zwischenergebnis ([SV00]Proposition 4.2).

Lemma 5.3. *Sei $r \in \mathbb{N}_+$ und $(M_p)_p$ eine positive Folge mit (M0) und (M1).*
Sei die Borel-Abbildung $B_r : \mathcal{E}^-_{r,M}([0,1]) \to \Lambda^-_M(\mathbb{N})$ surjektiv.
Zusätzlich enthalte $\mathcal{E}^-_{r,M}([0,1])$ eine Funktion $f \not\equiv 0$ mit $f^{(n)}(0) = 0\ \forall n \in \mathbb{N}$.
Dann ist die Voraussetzung von Lemma 5.2 erfüllt.
Es wird also (γ_r) von $(m_p)_p$ erfüllt.

Beweis. Sei $(N_p)_p$ die r-Interpolierende von $(M_p)_p$. Nach Lemma 4.9 ist $\mathcal{E}^-_{r,M}([0,1]) \subset \mathcal{E}^-_N([0,1])$, so dass f in $\mathcal{E}^-_N([0,1])$ liegt und dadurch dieser Raum non-quasi-analytisch ist. Folglich wird (M3$'$) von $(N_p)_p$ erfüllt und es existiert eine Funktion $\varphi \in \mathcal{D}^-_N([-1,1])$ mit $\varphi^{(p)}(0) = \begin{cases} 1, & p = 0 \\ 0, & p \geq 1 \end{cases}$. Setzen wir nun den Operator

$$T : \mathcal{E}^-_{r,M}([0,1]) \to \mathcal{L}^-_{r,M}([0,1])\ , \quad h \mapsto \varphi h \quad ,$$

so ist dieser linear, stetig und wohldefiniert, da für $p \in \mathbb{N}$, $\sigma \in \mathbb{R}_+$, $x \in [0,1]$:

$$\begin{aligned}
\left|(\varphi h)^{(pr)}(x)\right| &= \left|\sum_{j=0}^{pr} \binom{pr}{j} \cdot \varphi^{(pr-j)}(x) \cdot h^{(j)}(x)\right| \\
&\leq \sum_{j=0}^{pr} \binom{pr}{j} \cdot \|\varphi\|_\sigma \sigma^{pr-j} N_{pr-j} \cdot \|h\|_\sigma \sigma^j N_j \\
&\overset{\text{(M1)}}{\leq} \|\varphi\|_\sigma \|h\|_\sigma \sigma^{pr} N_{pr} \cdot \sum_{j=0}^{pr} \binom{pr}{j} \\
&= \|\varphi\|_\sigma \|h\|_\sigma ((2\sigma)^r)^p M_p
\end{aligned}$$

$$\text{und} \quad (\varphi h)^{(p)}(0) = \sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j} \cdot \varphi^{(p-j)}(0) \cdot h^{(j)}(0) = h^{(p)}(0) \quad .$$

Sei nun ein $\lambda \in \Lambda_M^-(\mathbb{N})$ gegeben. Nach Voraussetzung existiert eine Funktion $\psi \in \mathcal{E}_{r,M}^-([0,1])$ mit $B_r\psi = \lambda$. Da nun $T\psi \in \mathcal{L}_{r,M}^-([0,1])$ mit $B_rT\psi = B_r\psi$ existiert, ist $B_r : \mathcal{L}_{r,M}^-([0,1]) \to \Lambda_M^-(\mathbb{N})$ surjektiv. □

Legen wir die gesamte Halbachse $[0,\infty[$ statt $[0,1]$ zu Grunde, so erzeugt die Surjektivität bereits die Non-quasi-Analytizität ([SV00]Proposition 4.3).

Lemma 5.4. *Sei $r \in \mathbb{N}_+$ und $(M_p)_p$ eine positive Folge mit (M0) und (M1). Ist die Borel-Abbildung $B_r : \mathcal{E}_{r,M}^-([0,\infty[) \to \Lambda_M(\mathbb{N})$ surjektiv, dann wird (γ_r) von $(m_p)_p$ erfüllt.*

Beweis. Es soll das vorige Lemma 5.3 benutzt werden. $B_r : \mathcal{E}_{r,M}^-([0,1]) \to \Lambda_M(\mathbb{N})$ ist surjektiv durch die Voraussetzung mit $\mathcal{E}_{r,M}^-([0,\infty[)|_{[0,1]} \subset \mathcal{E}_{r,M}^-([0,1])$.
Es ist somit nur noch die Existenz einer Funktion $0 \not\equiv f \in \mathcal{E}_{r,M}^-([0,1])$ mit $Bf = 0$ nachzuweisen:

Der Einheitsvektor $e_1 = (0,1,0,\dots)$ liegt in $\Lambda_M^-(\mathbb{N})$ und somit existiert ein $\varphi \in \mathcal{E}_{r,M}^-([0,\infty[)$ mit $\varphi^{(pr)}(0) = \begin{cases} 1, & p = 0 \\ 0, & p \geq 1 \end{cases}$.
Sei $\psi(x) := \varphi(x) - x^r/r!$ für $x \in [0,\infty[$, so ist $0 \not\equiv \psi \in C^\infty([0,\infty[)$ und $B\psi = 0$.
Falls $\psi|_{[0,1]} \not\equiv 0$, so ist dies die gesuchte Funktion f.
Ansonsten sei $x_0 := \sup\{x \geq 0 |\ \psi(t) = 0\}$ für $t \in [0,x]\}$, also $\psi|_{[0,x_0]} \equiv 0$. Somit nehmen wir $f := \psi(\cdot + x_0)|_{[0,1]}$, da $Bf = 0$ durch die Wahl von x_0. □

Die Umkehrung ist schließlich auch richtig, so dass die Bedingung (γ_r) hinreichend für eine Extension $E : \Lambda_M^-(\mathbb{N}) \to \mathcal{D}_{r,M}^-([-1,1])$ ist ([SV00]Theorem 4.4).

Satz 5.5. *Sei $r \in \mathbb{N}_+$ und $(M_p)_p$ eine positive Folge mit (M0) und (M1). Die Borel-Abbildung $B_r : \mathcal{D}_{r,M}^-([-1,1]) \to \Lambda_M^-(\mathbb{N})$ ist genau dann surjektiv, wenn (γ_r) von $(m_p)_p$ erfüllt wird.*

Beweis. "$\Longrightarrow$": Lemma 5.4
"$\Longleftarrow$": Sei $(N_p)_p$ die r-Interpolierende aus Definition 1.3. Sie erfüllt (M0), (M1) und (γ_1) nach Lemma 1.13. Folgende Idee wird gezeigt:

$$\Lambda_M^-(\mathbb{N}) \xrightarrow{V} \Lambda_N^-(\mathbb{N}) \xrightarrow{U} \mathcal{E}_N^-(\mathbb{R}) \xrightarrow{W} \mathcal{D}_{r,M}^-([-1,1])$$

Petzsche beweist in [Pet88](Theorem 2.1a) die Existenz einer Extension $S : \Lambda_N^-(\mathbb{N}) \to \mathcal{E}_N^-([-1,1])$. Nach Denjoy und Carleman sind die hier betrachteten Funktionenräume nicht quasi-analytisch. Somit existiert eine Abschneidefunktion $\varphi \in \mathcal{D}_N^-([-1,1])$, die identisch 1 ist nahe 0 und deren Ableitungen dort verschwinden.
Damit definieren wir einen linearen, stetigen Operator:

$$U : \Lambda_N^-(\mathbb{N}) \to \mathcal{E}_N^-(\mathbb{R}) \ , \quad a \mapsto \varphi S a \text{ auf } [-1,1] \quad .$$

Dieser ist ebenfalls eine Extension, denn für $a \in \Lambda_N^-(\mathbb{N})$, $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(Ua)^{(n)}(0) = (\varphi Sa)^{(n)}(0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \varphi^{(n-k)}(0)(Sa)^{(k)}(0) = (Sa)^{(n)}(0) = a_n \ .$$

Ein weiterer linearer, stetiger Operator ist gegeben durch:

$$V : \Lambda_M^-(\mathbb{N}) \to \Lambda_N^-(\mathbb{N}) \ , \quad (Va)_{kr+j} := \begin{cases} a_k & j = 0 \\ 0 & j \in \{1, \dots, r-1\} \end{cases} , \ k \in \mathbb{N} \quad .$$

Die Wohldefiniertheit folgt aus $M_k = N_{kr}$ für $k \in \mathbb{N}$.
Sei E nun der topologische Untervektorraum von $\mathcal{D}_N^-([-1,1])$, deren Funktionen $f^{(kr+j)}(0) = 0$ für $n \in \mathbb{N},\ j \in \{1, \dots, r-1\}$ erfüllen.
Es ist dann *Bild* $UV \subset E$ und $E \subset \mathcal{D}_{r,M}^-([-1,1])$, da für $f \in E,\ j \in \mathbb{N},\ \sigma \in \mathbb{R}_+$, und $x \in [-1,1]$ gilt:

$$\left| f^{(jr)}(x) \right| \le C_f \sigma^{jr} N_{jr} = C_f (\sigma^r)^j M_j \quad .$$

Sei $W : E \to \mathcal{D}_{r,M}^-([-1,1])$ die stetige, kanonische Einbettung, so ist für $a \in \Lambda_M^-(\mathbb{N})$

$$(WUVa)^{(nr)}(0) = (UVa)^{(nr)}(0) = (Va)_{nr} = a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

und somit ist $WUV : \Lambda_M^-(\mathbb{N}) \to \mathcal{D}_{r,M}^-([-1,1])$ die gesuchte Extension. $\square$

Fassen wir zusammen, so stellen wir fest, dass wir genau das Gleiche wie im Roumieu-Fall (Satz 4.11) bewiesen haben.

Satz 5.6. Borel-Ritt-Theorem für Beurling-Klassen
Sei $r \in \mathbb{N}_+$ und $(M_p)_p$ eine positive Folge mit (M0) und (M1).

$$\begin{aligned} & a)\ (m_p)_p \text{ erfüllt } (\gamma_r) \\ \iff & b)\ \text{Die Borel-Abbildung } B_r : \mathcal{D}^-_{r,M}([-1,1]) \to \Lambda_M(\mathbb{N}) \text{ ist surjektiv} \\ \iff & c)\ \text{Die Borel-Abbildung } B_r : \mathcal{L}^-_{r,M}([0,1]) \to \Lambda_M(\mathbb{N}) \text{ ist surjektiv} \\ \iff & d)\ \text{Die Borel-Abbildung } B_r : \mathcal{E}^-_{r,M}([0,\infty[) \to \Lambda_M(\mathbb{N}) \text{ ist surjektiv} \end{aligned}$$

5.2 Ultraholomorphe Räume

Wie bei den Roumieu-Klassen im Kapitel 4, folgen nun auch Sätze für die sektoriell ultraholomorphen Räume. Die Verbindung zu den vorigen ultradifferenzierbaren Räumen stellt wieder der Operator aus Lemma 4.12 her.

Wir zeigen zunächst, wie eine Extension hier fortgesetzt wird ([SV00]Theorem 4.5).

Satz 5.7. *Sei $(M_p)_p$ eine positive Folge mit (M0) und (M1), $r \in \mathbb{N}_+$ und $\gamma \in \mathbb{R}_+$ mit $\gamma < r$.*
Wenn eine Extension $S : \Lambda^-_M(\mathbb{N}) \to \mathcal{D}^-_{r+1,M}([-1,1])$ existiert,
dann existiert eine Extension $E_\gamma : \Lambda^-_M(\mathbb{N}) \to \mathcal{A}^-_M(S_\gamma)$.

Beweis. Wir zeigen folgenden Weg:

$$\Lambda^-_M(\mathbb{N}) \xrightarrow{V} \Lambda^-_{M^*}(\mathbb{N}) \xrightarrow{U} \mathcal{D}^-_{r,M^*}([-1,1]) \xrightarrow{W} \mathcal{A}^-_M(S_\gamma) \quad .$$

Da es eine äquivalente Folge gibt, die (M1+) statt nur (M1) erfüllt ([Pet88]Proposition 1.1a), können wir ohne Einschränkung $(m^*_p)_p$ als steigend annehmen. Das heißt, $(M^*_p)_p$ erfüllt (M1).

Durch die Existenz von S und Satz 5.5 gilt (γ_{r+1}) für $(m_p)_p$ und somit (γ_r) für $(m^*_p)_p$. Nochmaliges Anwenden des Satzes ergibt somit eine Extension $U : \Lambda^-_{M^*}(\mathbb{N}) \to \mathcal{D}^-_{r,M^*}([-1,1])$.

$$V : \Lambda^-_M(\mathbb{N}) \to \Lambda^-_{M^*}(\mathbb{N}) \ , \quad (a_p)_{p\in\mathbb{N}} \mapsto (a_p/p!)_{p\in\mathbb{N}}$$

ist ein Isomorphismus zwischen den Räumen.

Da $\gamma < r$ ist, existiert der Operator $W : \mathcal{D}^-_{r,M^*}([-1,1]) \to \mathcal{A}^-_M(S_\gamma)$ aus Lemma 4.12. Und schließlich gilt für $(a_p)_p \in \Lambda^-_M(\mathbb{N})$ und $p \in \mathbb{N}$:

$$(WUVa)^{(p)}(0) = p!(UVa)^{(pr)}(0) = p!(Va)_p = a_p \quad .$$

Damit ist WUV die gesuchte Extension E_γ. □

Im vorigen Beweis wird die vorausgesetzte Extension S lediglich dazu benötigt, um (γ_r) mit Satz 5.5 zu folgern. Steigen wir stattdessen an dieser Stelle ein, so ergibt sich eine Aussage wie in Satz 4.14.

Satz 5.8. *Sei $r \in \mathbb{N}_+$, $(M_p)_p$ eine streng reguläre Folge (wobei (M2) nicht vorausgesetzt wird), r-streng regulär und $\gamma \in \mathbb{R}_+$ mit $\gamma < r - 1$.*
Dann ist die Borel-Abbildung $B : \mathcal{A}^-_M(S_\gamma) \to \Lambda^-_M(\mathbb{N})$ surjektiv.

Die Aussage des Satzes 4.17 kann hier leicht fortgesetzt werden ([Thi00]Corollary 3.7). Thilliez gibt dabei nur die Beweisidee mit dem Verweis auf das Resultat aus [CC94] an.

Satz 5.9. Borel-Ritt-Theorem für Beurling-Klassen
Sei $(M_p)_p$ eine streng reguläre Folge und $\gamma \in \mathbb{R}_+$ mit $\gamma < \min(2, \gamma(M))$.
Dann ist die Borel-Abbildung $B : \mathcal{A}^-_M(S_\gamma) \to \Lambda^-_M(\mathbb{N})$ surjektiv.

Beweis. Wir wollen Folgendes benutzen:

Zitat: [CC94] 17 Proposition

(∗) *Sei $(M_p)_p$ eine streng reguläre Folge und $(L_p)_p$ eine positive Folge, so dass*

$$\forall t > 0\ \exists C(t) > 0\ \forall p \geq 0 : \ L_p \leq C(t) \cdot t^p \cdot M_p \quad .$$

Dann existiert eine streng reguläre Folge $(N_p)_p$, für die

$$\begin{aligned} &\exists C > 0\ \forall p \geq 0 : L_p \leq C \cdot N_p \\ \textit{und} \quad &\forall t > 0\ \exists C'(t) > 0\ \forall p \geq 0 : N_p \leq C'(t) \cdot t^p \cdot M_p \end{aligned}$$

gilt.

Sei $(\lambda_p)_p \in \Lambda^-_M(\mathbb{N})$ gegeben. Wir setzen ein $k \in \mathbb{R}_+$ mit $\gamma < k < \gamma(M)$, so ist $(p!^k)_p \in \Lambda^-_M(\mathbb{N})$, denn:

$$\begin{aligned} &\forall \sigma \in \mathbb{R}_+\ \exists C > 0\ \forall p \in \mathbb{N} : \ p!^k \leq C \cdot \sigma^p \cdot M_p \\ \iff &\forall \sigma \in \mathbb{R}_+\ \exists C > 0\ \forall p \in \mathbb{N} : \ C \cdot \sigma^p \leq p!^{\gamma(M)-k} \quad . \end{aligned}$$

Letzteres ist gegeben, da die Fakultät durch keine Potenz nach oben abschätzbar ist. Und somit ist auch $(L_p)_p := (\max(\lambda_p, p!^k))_p \in \Lambda_M^-(\mathbb{N})$. Diese Konstruktion sichert $\gamma < \gamma(L)$.

Damit haben wir die Voraussetzung für $(*)$ geschaffen. Anders geschrieben, bedeutet diese Abschätzungen, dass $(L_p)_p \in \Lambda_{N,1}(\mathbb{N}) \subseteq \Lambda_N(\mathbb{N})$ und $(N_p)_p \in \Lambda_M^-(\mathbb{N})$ gelten. Also ist auch die kleinere Folge $(\lambda_p)_p \in \Lambda_N(\mathbb{N})$. Es folgt außerdem $\gamma < \gamma(N)$. Verknüpfen wir die Abschätzungen der Räume, so ist $\mathcal{A}_N(S_\gamma) \subseteq \mathcal{A}_M^-(S_\gamma)$.
Schließlich kombinieren wir diese Einbettung mit Satz 4.17, der eine Funktion $f \in \mathcal{A}_N(S_\gamma)$ mit $Bf = \lambda$ liefert. $\square$

Die Umkehrung von Satz 5.7 ist möglich, wir müssen jedoch zusätzlich (M2′) fordern ([SV00]Theorem 4.6).

Satz 5.10. *Sei $\gamma \in \mathbb{N}_+$ und $(M_p)_p$ eine positive Folge mit (M0), (M1) und (M2′). Wenn eine Extension $S : \Lambda_M^-(\mathbb{N}) \to \mathcal{A}_M^-(S_\gamma)$ existiert, dann existiert auch eine Extension $E : \Lambda_M^-(\mathbb{N}) \to \mathcal{D}_{\gamma+1,M}^-([-1,1])$.*

Beweis. Wie im Beweis zu Satz 5.7 gelte wieder ohne Einschränkung (M1+), so dass $(M_p^*)_p$ (M0) und (M1) erfüllt. Da S eine Extension nach $\mathcal{A}_M^-(S_\gamma)$ ist und $\mathcal{A}_M^-(S_\gamma)|_{[0,\infty[} \subset \mathcal{E}_M^-([0,\infty[)$, ist die Borel-Abbildung $B : \mathcal{E}_M^-([0,\infty[) \to \Lambda_M^-(\mathbb{N})$ surjektiv. Durch Lemma 5.4 wird also (M3) erfüllt.

$$V : \Lambda_{M^*}^-(\mathbb{N}) \to \Lambda_M^-(\mathbb{N}) \ , \quad (a_p)_{p\in\mathbb{N}} \mapsto (p! \cdot a_p)_{p\in\mathbb{N}}$$

ist ein Isomorphismus.
Wir konstruieren nun eine Abbildung U, so dass

$$USV : \Lambda_{M^*}^-(\mathbb{N}) \xrightarrow{V} \Lambda_M^-(\mathbb{N}) \xrightarrow{S} \mathcal{A}_M^-(S_\gamma) \xrightarrow{U} \mathcal{E}_{\gamma,M^*}^-([0,1])$$

eine Extension ist.

Für eine Funktion $\psi \in \mathcal{A}_M^-(S_\gamma)$ gilt nach Definition $|\psi(z)| \le \|\psi\|_1 M_0$. Und aus der Restgliedabschätzung der Taylorformel folgt für $n, p \in \mathbb{N}_+$, $z \in S_\gamma$:

$$(51) \qquad \left|\psi(z) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\psi^{(k)}(0)}{k!} z^k\right| \le \frac{|z|^n}{n!} \sup_{t\in[0,1]} \left|\psi^{(n)}(tz)\right| \le \frac{|z|^n}{n!} \|\psi\|_{1/p} \frac{M_n}{p^n} \quad .$$

Dabei ist $\|\cdot\|_{1/p}$ die Norm von $\mathcal{A}_{M,1/p}(S_\gamma)$. Wir definieren nun die Funktion φ auf S_1 durch

$$\varphi(z) := \psi(z^{-\gamma}) - \psi(0) - \psi'(0) \cdot z^{-\gamma} \quad .$$

Dies entspricht der Reihe von (51) für $n = 2$ an der Stelle $z^{-\gamma} \in S_\gamma$.

$$(52) \qquad \overset{(51)}{\Longrightarrow} \qquad \left| \varphi(z) - \sum_{k=2}^{n-1} \frac{\psi^{(k)}(0)}{k!} z^{-\gamma k} \right| \leq \frac{\|\psi\|_{1/p}}{p^n} \cdot \frac{M_n}{n!} \, |z|^{-\gamma n} \quad .$$

Mit $p = 1$ folgt daraus die Existenz einer Konstanten $c \in \mathbb{R}_+$, so dass $|\varphi(z)| \leq c \cdot |z|^{-2\gamma}$ gilt.
Folglich ist die Funktion f auf $\mathbb{R}$ wohldefiniert durch

$$f(t) := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \cdot \int_{1-\infty \mathrm{i}}^{1+\infty \mathrm{i}} \exp(tz)\varphi(z) dz \quad .$$

Diese Funktion ist in $\mathrm{C}^{2\gamma-2}(\mathbb{R})$, denn für $k \leq 2\gamma - 2$ gilt:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d}{dt}\right)^k \int_{1-\infty \mathrm{i}}^{1+\infty \mathrm{i}} \exp(tz)\varphi(z) dz &= \int_{1-\infty \mathrm{i}}^{1+\infty \mathrm{i}} \left(\frac{d}{dt}\right)^k \exp(tz)\varphi(z) dz \\
&= \int_{1-\infty \mathrm{i}}^{1+\infty \mathrm{i}} z^k \exp(tz)\varphi(z) dz \\
\Longrightarrow \quad \int_{1-\infty \mathrm{i}}^{1+\infty \mathrm{i}} \left| z^k \exp(tz)\varphi(z) \right| dz &\leq c \int_{-\infty}^{\infty} |\exp(t(1+\mathrm{i}\xi))| \, |1+\mathrm{i}\xi|^{k-2\gamma} \, dz \\
&\leq c \cdot \exp(t) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|1+\mathrm{i}\xi|^2} dz \quad < \infty \quad .
\end{aligned}$$

Durch die Cauchy'sche Integralformel gilt für $j \in \mathbb{N}_+, j > 1$:

$$\begin{aligned}
t^{\gamma j - 1} &= \frac{d^{\gamma j-1}}{dz^{\gamma j-1}} \exp(tz) \Big|_{z=0} = \frac{(\gamma j-1)!}{2\pi \mathrm{i}} \cdot \lim_{m\to\infty} \int_{\partial B_m(1)} \frac{\exp(tz)}{z^{\gamma j}} dz \\
&= \frac{(\gamma j-1)!}{2\pi \mathrm{i}} \cdot \int_{1-\infty \mathrm{i}}^{1+\infty \mathrm{i}} \frac{\exp(tz)}{z^{\gamma j}} dz \quad .
\end{aligned}$$

Für den letzten Schritt zerlegen wir $\partial B_m(1)$ in 2 Wege: $\Gamma_m^+ : \xi \mapsto 1 + m \cdot \exp(-\mathrm{i}\xi)$ und $\Gamma_m^- : \xi \mapsto 1 + m \cdot \exp(-\mathrm{i}(\xi + \pi))$ mit $\xi \in [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$. Für $t \geq 0$ ist dann $\int_{\Gamma_m^-} = 0$, denn:

$$\lim_{m\to\infty} \left| \int_{\Gamma_m^-} \frac{\exp(tz)}{z^{\gamma j}} dz \right| \leq \lim_{m\to\infty} \int_{\Gamma_m^-} \left| \frac{\exp(tz)}{z^{\gamma j}} \right| dz \leq \lim_{m\to\infty} \pi m \cdot \frac{\exp(t)}{(m-1)^{\gamma j}} = 0 \quad .$$

Für $t < 0$ ist mit analoger Rechnung $\int_{\Gamma_m^+} = 0$.

Für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ folgt also aus der Definition von f und eben gezeigter Formel:

$$\underbrace{f(t) - \sum_{j=2}^{n-1} \frac{\psi^{(j)}(0)}{j!} \frac{t^{\gamma j-1}}{(\gamma j-1)!}}_{=:\, f_1(t)} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{1-\infty \mathrm{i}}^{1+\infty \mathrm{i}} \mathrm{e}^{tz} \left(\varphi(z) - \sum_{j=2}^{n-1} \frac{\psi^{(j)}(0)}{j!} \frac{1}{z^{\gamma j}} \right) dz \, . \tag{53}$$

Wie in (52) ist der Integrand abschätzbar mit $c_n \in \mathbb{R}_+$:

$$\left| \mathrm{e}^{tz} \left(\varphi(z) - \sum_{j=2}^{n-1} \frac{\psi^{(j)}(0)}{j!} \cdot \frac{1}{z^{\gamma j}} \right) \right| \leq \mathrm{e}^t \frac{\|\psi\|_1}{1} \frac{M_n}{n!} |z|^{-\gamma n} \leq c_n \cdot \mathrm{e}^t \cdot |z|^{-\gamma n} \quad .$$

Somit ist $f_1 \in \mathrm{C}^{\gamma n-2}(\mathbb{R})$ (Beweis wie oben bei f) mit verschwindenden Ableitungen an der Stelle 0. Wir benutzen dazu den Cauchy'schen Integralsatz mit dem Weg Γ_m^+ und Grenzwertbildung:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{d^k}{dt^k} f_1(0) \right| &= \left| \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{1-\infty \mathrm{i}}^{1+\infty \mathrm{i}} z^k \mathrm{e}^{tz} \left(\varphi(z) - \sum_{j=2}^{n-1} \frac{\psi^{(j)}(0)}{j!} \cdot \frac{1}{z^{\gamma j}} \right) dz \right| |_{t=0} \\
&= \left| \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \lim_{m\to\infty} \int_{\Gamma_m^+} z^k \mathrm{e}^{tz} \left(\varphi(z) - \sum_{j=2}^{n-1} \frac{\psi^{(j)}(0)}{j!} \cdot \frac{1}{z^{\gamma j}} \right) dz \right| |_{t=0} \\
&\leq \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \lim_{m\to\infty} \int_{\Gamma_m^+} |z|^k \cdot \left| \mathrm{e}^{tz} \left(\varphi(z) - \sum_{j=2}^{n-1} \frac{\psi^{(j)}(0)}{j!} \cdot \frac{1}{z^{\gamma j}} \right) \right| dz|_{t=0} \\
&\leq \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \lim_{m\to\infty} \int_{\Gamma_m^+} |z|^k \cdot c_n \cdot \mathrm{e}^t \cdot |z|^{-\gamma n} \, dz|_{t=0} \\
&= \frac{c_n}{2\pi \mathrm{i}} \lim_{m\to\infty} \int_{\Gamma_m^+} |z|^{-2} \, dz \quad \leq \frac{c_n}{2\pi \mathrm{i}} \lim_{m\to\infty} \frac{\pi m}{m^2} \quad = 0 \quad .
\end{aligned}$$

Aus der Definition von f_1 bedeutet dies, dass $f \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R})$ ist und es gelten:

$$\begin{cases} f^{(0)}(0) = \cdots = f^{(2\gamma-2)}(0) & = 0 \\ f^{(\gamma n-1)}(0) & = \psi^{(n)}(0)/n! \quad \forall n \geq 2 \\ f^{(\gamma n-1+j)}(0) & = 0 \qquad\qquad\;\; \forall n \geq 2,\ j \in \{1, \dots, \gamma-1\} \end{cases} \quad . \tag{54}$$

Für die Ableitungen der Funktion $g \in \mathrm{C}^\infty([0,1])$ mit

$$g(t) := \int_0^t f(u) du + \psi(0) + \frac{\psi'(0)}{\gamma!} t^\gamma$$

gilt dann:

$$
\begin{aligned}
&g^{(0)}(0) = 0 + \psi(0) + 0 = \psi(0) \\
&g^{(n)}(0) = f^{(n-1)}(0) + 0 + 0 = f^{(n-1)}(0) \quad \forall n \in \mathbb{N}_+, k \neq \gamma \\
&g^{(\gamma)}(0) = f^{(\gamma-1)}(0) + 0 + \psi'(0) = \psi'(0)
\end{aligned}
$$

(55)
$$
\overset{(54)}{\Longrightarrow} \begin{cases} g^{(\gamma n)}(0) & = \psi^{(n)}(0)/n! \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ g^{(\gamma n + j)}(0) & = 0 \qquad\qquad\quad \forall n \in \mathbb{N},\ j \in \{1, \ldots, r-1\} \end{cases} .
$$

Von der Struktur her passt g also bereits in den Raum $\mathcal{E}^{-}_{\gamma,M^*}([0,1])$. Die noch notwendigen Abschätzungen folgen nun. Die komplexen Integrale fassen wir wieder als Wegintegral entlang eines Kreises auf.

$$
\text{Erinnere: } \int_{-\infty}^{\infty} \left(1+y^2\right)^{-(\gamma+1)/2} dy \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left(1+y^2\right)^{-1} dy = \arctan(y)\Big|_{-\infty}^{\infty} = \tfrac{1}{2}\pi \quad .
$$

Sei $n \in \mathbb{N}$, so berechnen wir für alle $p \in \mathbb{N}_+$, $t \in [0,1]$ aus den Definitionen von f und g:

<u>1.Fall:</u> $n = 0$

$$
\begin{aligned}
\left|g^{(0)}(t)\right| &\leq |\psi(0)| + \left|\psi'(0)\right| + \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^1 \left| \int_{1-\infty\mathrm{i}}^{1+\infty\mathrm{i}} \exp(uz)\varphi(z) dz \right| du \\
&\overset{(52)}{\leq} \|\psi\|_{1/p} \left(M_0 + \frac{M_1}{p} + \frac{1}{2\pi} \cdot \mathrm{e} \cdot \frac{M_2}{2 \cdot p^2} \cdot \left| \int_{1-\infty\mathrm{i}}^{1+\infty\mathrm{i}} |z|^{-2\gamma}\, dz \right| \right) \\
&= \|\psi\|_{1/p} \left(M_0 + \frac{M_1}{p} + \frac{\mathrm{e}M_2}{4\pi p^2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left(1+y^2\right)^{-\gamma} dy \right) < \infty \quad .
\end{aligned}
$$

<u>2.Fall:</u> $n = 1$

$$
\begin{aligned}
\left|g^{(\gamma)}(t)\right| &= \left|\psi'(0) + f^{(\gamma-1)}(t)\right| \\
&\leq \left|\psi'(0)\right| + \frac{1}{2\pi} \cdot \left| \int_{1-\infty\mathrm{i}}^{1+\infty\mathrm{i}} z^{\gamma-1} \exp(tz)\varphi(z) dz \right| \\
&\overset{(52)}{\leq} \|\psi\|_{1/p} \left(\frac{M_1}{p} + \frac{1}{2\pi} \cdot \mathrm{e} \cdot \frac{M_2}{2 \cdot p^2} \cdot \left| \int_{1-\infty\mathrm{i}}^{1+\infty\mathrm{i}} |z|^{-\gamma-1}\, dz \right| \right) \\
&= \|\psi\|_{1/p} \left(\frac{M_1}{p} + \frac{\mathrm{e}M_2}{4\pi p^2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left(1+y^2\right)^{-(\gamma+1)/2} dy \right) < \infty \quad .
\end{aligned}
$$

3.Fall: $n \geq 2$

$$\begin{aligned}
g^{(\gamma n)}(t) &= f^{(\gamma n-1)}(t) \\
&= f^{(\gamma n-1)}(t) - \frac{d^{\gamma n}}{dt^{\gamma n}} \left(\sum_{j=2}^{n-1} \frac{\psi^{(j)}(0)}{j!} \cdot \frac{t^{\gamma j}}{(\gamma j)!} \right) \qquad | \text{ Nullergänzung} \\
&= f^{(\gamma n-1)}(t) + \frac{\psi^{(n)}(0)}{n!} - \frac{d^{\gamma n}}{dt^{\gamma n}} \left(\sum_{j=2}^{n} \frac{\psi^{(j)}(0)}{j!} \cdot \frac{t^{\gamma j}}{(\gamma j)!} \right) \\
&= \frac{\psi^{(n)}(0)}{n!} + \frac{d^{\gamma n-1}}{dt^{\gamma n-1}} \left(f(t) - \sum_{j=2}^{n} \frac{\psi^{(j)}(0)}{j!} \cdot \frac{t^{\gamma j-1}}{(\gamma j-1)!} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overset{(53)}{\Longrightarrow} \left| g^{(\gamma n)}(t) \right| &\leq \left| \frac{\psi^{(n)}(0)}{n!} \right| + \frac{1}{2\pi} \int_{1-\infty \mathrm{i}}^{1+\infty \mathrm{i}} \left| z^{\gamma n-1} \mathrm{e}^{tz} \left(\varphi(z) - \sum_{j=2}^{n} \frac{\psi^{(j)}(0)}{j!} \frac{1}{z^{\gamma j}} \right) \right| dz \\
&\overset{(52)}{\leq} \left| \frac{\psi^{(n)}(0)}{n!} \right| + \frac{1}{2\pi} \int_{1-\infty \mathrm{i}}^{1+\infty \mathrm{i}} |z|^{\gamma n-1} \, \mathrm{e} \frac{\|\psi\|_{1/p}}{p^{n+1}} \cdot \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |z|^{-\gamma(n+1)} \, dz \\
&= \left| \frac{\psi^{(n)}(0)}{n!} \right| + \|\psi\|_{1/p} \frac{\mathrm{e}}{2\pi} \cdot \frac{M_{n+1}}{(n+1)! p^{n+1}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 + y^2\right)^{-(\gamma+1)/2} dy \\
&\overset{(\mathrm{M2}')}{\leq} \|\psi\|_{1/p} \left(\frac{M_n}{n! p^n} + \frac{\mathrm{e}}{4} \frac{A^{n+1} M_n}{(n+1)! p^{n+1}} \right) \\
&= \|\psi\|_{1/p} \left(\frac{n}{A^n} + \frac{\mathrm{e}}{4} \frac{A}{(n+1)p} \right) \left(\frac{A}{p} \right)^n \frac{M_n}{n!}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \|g\|_{A/p} \leq \|\psi\|_{1/p} \cdot \sup_{n \in \mathbb{N}_+} \left(\frac{1}{A^n} + \frac{\mathrm{e}}{4} \frac{A}{(n+1)p} \right) < \infty \quad .$$

Somit ist $g \in \mathcal{E}_{\gamma, M^*, A/p}([0,1])$ für alle $p \in \mathbb{N}_+$, d. h. in der Beurling-Klasse $\mathcal{E}^-_{\gamma, M^*}([0,1])$.

Die Konstruktion von g ergibt, dass die Abbildung

$$U : \mathcal{A}^-_M(S_\gamma) \to \mathcal{E}^-_{\gamma, M^*}([0,1]) \ , \quad \psi \mapsto g$$

linear und stetig ist. Für $(a_p)_p \in \Lambda^-_{M^*}(\mathbb{N})$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(USVa)^{(\gamma n)}(0) \overset{(55)}{=} \frac{(SVa)^{(n)}(0)}{(n-1)!} = \frac{(Va)_n}{(n-1)!} = a_n \quad ,$$

so dass schließlich $USV : \Lambda^-_{M^*}(\mathbb{N}) \to \mathcal{E}^-_{\gamma, M^*}([0,1])$ eine Extension ist.

Offensichtlich liegt der Einheitsvektor $e_1 = (0,1,0,0,\dots)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\Lambda_M^-(\mathbb{N})$. Betrachten wir nun obige Rechnungen mit

$$\eta := Se_1 \ \in \mathcal{A}_M^-(S_\gamma) \quad (\text{entspricht } \psi),$$

dann erhalten wir kürzere Ausdrücke auf Grund der fehlenden Ableitungen:

$$\begin{aligned} h(t) &:= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{1-\infty\mathrm{i}}^{1+\infty\mathrm{i}} \exp(tz) \cdot \big(\eta(z^{-\gamma}) - z^{-\gamma}\big)\, dz \quad (\text{entspricht } f) \\ \lambda(t) &:= \int_0^t h(u)du \ \in \mathcal{E}^-_{\gamma,M^*}([0,1]) \quad (\text{entspricht } g(t) - \frac{\psi'(0)}{\gamma!} t^\gamma). \end{aligned}$$

λ ist nicht die Nullfunktion und erfüllt $\lambda^{(\gamma n)}(0) = 0$ (siehe (55)) und somit $\lambda^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Mit der obigem Extension USV zeigt nun Lemma 5.3, dass $(m_p^*)_p$ (γ_γ) erfüllt. $(m_p)_p$ erfüllt also $(\gamma_{\gamma+1})$ und Satz 5.5 liefert schließlich die Behauptung. ☐

Zuletzt fassen wir noch einmal zusammen ([SV00]Theorem 4.7).

Satz 5.11. Borel-Ritt-Theorem für Beurling-Klassen
Sei $(M_p)_p$ eine positive Folge mit (M0), (M1) und (M2′):

a) für alle $\gamma \in \mathbb{R}_+$ existiert eine Extension $\Lambda_M^-(\mathbb{N}) \to \mathcal{A}_M^-(S_\gamma)$

$\Longleftrightarrow$ b) für alle $r \in \mathbb{N}_+$ existiert eine Extension $\Lambda_M^-(\mathbb{N}) \to \mathcal{D}^-_{r+1,M}([-1,1])$

$\Longleftrightarrow$ c) für alle $r \in \mathbb{N}_+$ wird (γ_{r+1}) von $(m_p)_p$ erfüllt

Beweis. a) $\Longrightarrow$ b) : Satz 5.10. Nur hier wird (M2′) benötigt!
b) $\Longrightarrow$ a) : Satz 5.7
b) $\Longleftrightarrow$ c) : Satz 5.5 ☐

Literaturverzeichnis

[BMT90] Braun ; Meise ; Taylor: *Ultradifferentiable functions and Fourier analysis.* Bd. 17. Birkhäuser Verlag, Basel, 1990

[Bor97] Borel, E.: *Sur quelques points de la théorie des fonctions.* Doktorarbeit, 1897

[BSMM05] Bronstein ; Semendjajew ; Musiol ; Mühlig: *Taschenbuch der Mathematik.* Verlag Harri Deutsch, 6.Auflage, 2005

[CC94] Chaumat ; Chollet: *Surjectivité de l'application restriction à un compact dans des classes de fonctions uitradifférentiables.* Math Ann 298, 7-40, 1994

[Coh68] Cohen, P.J.: *A simple proof of the Denjoy-Carleman theorem.* American Math Monthly 75, no.1, 26-31, 1968

[Gor83] Gorny, A.: *Contribution a l'étude de fonctions dérivables d'une variable réelle.* Acta Math 71, 1983

[Hör83] Hörmander, L.: *The analysis of linear partial differential operators I.* Springer Verlag, Berlin, 1983

[Kom00] Komatsu, H.: *Ultradistributions, I. Structure theorems and a characterization.* Universität Tokyo, 2000

[MV97] Meise, Reinhold ; Vogt, Dietmar: *Introduction to functional analysis.* Oxford University Press, 1997

[Pet88] Petzsche, H.-J.: *On E. Borel's theorem.* Math Ann 282, 299-313, 1988

[Rit16] Ritt, J.F.: *On the derivatives of a function at a point.* Annals of Mathematics 18, 18-23, 1916

[SV00] Schmets ; Valdivia: *Extension maps in ultradifferentiable and ultraholomorphic function spaces.* Studia mathematica 143, 221-250, 2000

[Thi00] Thilliez, V.: *Division by flat ultradifferentiable functions and sectorial extensions.* Universität Lille, 2000

[Wer06] WERNER, D.: *Einführung in die höhere Analysis.* Springer Verlag, Berlin, 2006

[Wer07] WERNER, D.: *Funktionalanalysis.* Springer Verlag, Berlin, 2007

[Whi34] WHITNEY, H.: *Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets.* Transactions of the American Math Soc 36.1, 1934

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich diese Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe. Außerdem versichere ich, dass ich die allgemeinen Prinzipien wissenschaftlicher Arbeit und Veröffentlichung, wie sie in den Leitlinien guter wissenschaftlicher Praxis der Carl von Ossietzky Universität Oldenburg festgelegt sind, befolgt habe.

Oldenburg, den 12. Juni 2010